21-22-1 复变函数期末试卷 (A) 答案

一. 1. B 2. B 3. C 4. B 5. C

二. 1. -1 2. $e^{\frac{\pi}{2}-2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$ 3. $1/e$ 4. $2v+1=0$ 5. 3 6. $\frac{1}{2},-\frac{2\pi}{3}$ 7. $2\pi i,\ m=1;\ 0,\ m\neq 1$

三. $\frac{z}{z+1}=\sqrt[4]{1}=e^{\frac{k\pi i}{2}},\quad (k=0,1,2,3)$

$k=1$ 时, $z=\frac{-1+i}{2}$; $k=2$ 时, $z=-\frac{1}{2}$; $k=3$ 时, $z=\frac{-1-i}{2}$.

四. 由于 u 具有二阶连续偏导数, 且满足Laplace方程, 所以 u 是调和函数.

由C.-R.方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=6xy$ 得 $u(x,y)=3x^2y+\phi(y)$.

从而由 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 得 $\phi'(y)=-3y^2,\ \phi(y)=-y^3+C$.

所以 $f(z)=3x^2y-y^3+C+i(-x^3+3xy^2)=-iz^3+C$.

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$. 故 $f(z)=-iz^3+1$.

五. 1. $$f(z)=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{i}\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\right)'$$
$$=-\frac{1}{i}\frac{1}{z-i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{i^n}(z-i)^n\right]'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2},\quad 0<|z-i|<1.$$
$$f(z)=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left[\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n i^n(z-i)^{-n}\right]'$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)i^n(z-i)^{-n-3},\qquad 1<|z-i|<+\infty.$$

2. $z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+1\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 $f(z)$ 一级极点 (4分)

$\because z_k\to 1\ (k\to\infty),\ \therefore z=1$ 不是孤立奇点 (2分)

$\because f(z)\to 1\ (z\to\infty),\ \therefore z=\infty$ 是可去奇点 (2分)

六. 1. 原积分 $=\frac{1}{2}2\pi i\Big(\mathrm{Res}[f(z),\ ai]+\mathrm{Res}[f(z),\ bi]\Big)=\pi i\Big[\frac{i}{(a^2-b^2)2a}-\frac{i}{(a^2-b^2)2b}\Big]=\frac{\pi}{2ab(a+b)}$.

2. 原积分 $$=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{[z-(-2+\sqrt{3})]^2[z-(-2-\sqrt{3})]^2}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{4}{i}2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\ -2+\sqrt{3}]=\frac{4}{i}2\pi i\frac{4}{(2\sqrt{3})^3}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

七. 由题意得 $f(z)=\dfrac{B}{z-x_0}+g(z)$, 其中 $g(z)$ 在 $|z-x_0|<R$ 内解析.

从而 $g(z)$ 在 $|z-x_0|\le\rho$ 上有界.

于是 $\left|\int_{C_\rho}g(z)\mathrm{d}z\right|\le\pi M\rho\to 0\ (\rho\to 0^+)$.

又 $\int_{C_\rho}\frac{B}{z-x_0}\mathrm{d}z=B\int_{\pi}^{0}\frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=-B\pi i$.

故 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z=-B\pi i$.