

东南大学考试卷(A)

课程名称 复变函数 考试学期 21-22-1 得分 _____

适用专业 选学复变函数各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |
| 评阅人 | | | | | | | |

(注：以下积分中的积分闭曲线除了有特殊说明外，指的都是正向闭曲线)

一、选择题(本题共5小题，每小题4分，满分20分)

1. $f(z)$ 在 z_0 可导是 $f(z)$ 在 z_0 解析的 _____.
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

2. 满足不等式 $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| < 1$ 的所有点 z 构成的集合是 _____.

- A. 有界单连通区域 B. 无界单连通区域
- C. 有界复连通区域 D. 无界复连通区域

3. 下列命题中正确的是 _____.

- A. $i < 2i$.
- B. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ ($\forall z_1, z_2 \neq 0$).
- C. xy^2 不可能成为一个解析函数的实部.

- D. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛且在 $z=3$ 发散.

4. 积分 $\oint_{|z|=2} \left[\cos z + \frac{z^2+1}{(z-i)^2} \right] dz =$ _____.

- A. 0 B. -4π C. 4π D. $4\pi i$

5. 积分 $\oint_{|z|=3/2} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz =$ _____.

- A. 0 B. 10 C. $2\pi i$ D. $-2\pi i$

二、填空题(本题共7小题，每小题4分，满分28分)

1. 设 $z = \frac{1+i}{1-i}$, 则 $z^{10} =$ _____.

2. $(-i)^i =$ _____.

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos in) z^n$ 的收敛半径是 _____.

4. z 平面上的曲线 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 在映射 $w = 1/z$ 下的像为 w 平面上的曲线 _____.

5. $\text{Res}[(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2})e^{2z}, 0] =$ _____.

6. 函数 $w = \ln(z - 1)$ 在 $z = \sqrt{3}i$ 处的伸缩率为 _____, 转动角为 _____.

7. $\oint_{|z|=1} (\bar{z})^m dz =$ _____ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

三、（本题满分6分）求方程 $z^4 = (z + 1)^4$ 的一切复数解.

四、（本题满分8分）证明 $v = -x^3 + 3xy^2$ 是调和函数, 并求相应的解析函数 $f(z) = u + iv$, 满足 $f(0) = 1$.

五、（本题共2小题，每小题8分，满分16分）

1. 将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ 在以 i 为中心的圆环域内展开成洛朗级数, 并指出其收敛范围.

2. 设 $f(z) = \sec \frac{1}{z-1}$, 求 $f(z)$ 在扩充复平面上的所有孤立奇点, 并判别它们的类型. 如果是极点, 指出它的级.

六、用复变函数论的方法计算下列实积分（本题共2小题，每小题8分，满分16分）

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \quad (a > 0, b > 0, a \neq b).$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

七、（本题满分6分） 设 (1) $f(z)$ 在实轴上有一个一级极点 x_0 , 且 $f(z)$ 在 $0 < |z - x_0| < R$ 内解析, $\text{Res}[f(z), x_0] = B$; (2) C_ρ 为圆周 $|z - x_0| = \rho$ 的上半部分, 取顺时针方向, 其中 $0 < \rho < R$. 证明: $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B\pi i$.