九　复变函数

试题分析

（一）填空题

1. 设 $\mathrm{e}^z-1-\sqrt{3}i=0$，则 $z=\underline{\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$。　（**04**，下，期中）

【解】 $z=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln\left(1+\sqrt{3}i\right)+i2k\pi=\ln\left|1+\sqrt{3}i\right|+i\arg\left(1+\sqrt{3}i\right)+i2k\pi$

$$=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2. $(-1+i)^i$ 的值为 $\underline{\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi+i\frac{1}{2}\ln 2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$。　（**00**，下，期中）

【解】 $(-1+i)^i=\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Ln}(-1+i)}=\mathrm{e}^{i(\ln(-1+i)+i2k\pi)}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)\right)}$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi+i\frac{1}{2}\ln 2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

3. 设 $\mathrm{e}^z+3-4i=0$，则 $\mathrm{Re}(z)=\underline{\ln 5}$。　（**02**，下，期中）

【解】 $z=\ln\left(-3+4i\right)=\ln\left(-3+4i\right)+i2k\pi=\ln\left|-3+4i\right|+i\arg\left(-3+4i\right)+i2k\pi$

$$=\ln 5+i\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

所以
$$\mathrm{Re}(z)=\ln 5$$

4. 若 $\mathrm{e}^z-(1+i)^i=0$，则 $\mathrm{Im}(z)=\underline{\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi}$。　（**03**，下，期中）

【解】
$$\mathrm{e}^z=(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}$$

所以
$$z=i\ln(1+i)+i2k\pi=i\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+2k\pi\right)$$

$$=-\frac{\pi}{4}-2k\pi+i\left(\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因而 $$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi$$

5. $f(z)=\dfrac{z\sin z}{\left(e^{z}-1\right)^{3}}$ 在圆域 $|z|<1$ 内的奇点 $z=\underline{0}$，奇点的类型是<u>1 级极点</u>(如为极点应指明是几级极点)。 **（03，下，期末）**

【解】 奇点为 $z=0$，因为当 $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{z\sin z}{\left(e^{z}-1\right)^{3}}=\frac{z(z-\frac{1}{3!}z^{3}+\cdots)}{\left(z+\frac{1}{2!}z^{2}+\cdots\right)^{3}}=\frac{(1-\frac{1}{3!}z^{2}+\cdots)}{z\left(1+\frac{1}{2!}z+\cdots\right)^{3}}=\frac{1}{z}g(z)$$

其中 $g(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3!}z^{2}+\cdots}{\left(1+\frac{1}{2!}z+\cdots\right)^{3}}$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $g(0)\neq 0$，所以 $z=0$ 是 1 级极点。

6. $z=-i,0,1$ 都是函数 $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^{2}(z+i)}$ 的孤立奇点，其类型分别为：$z=-i$ 是<u>1 级极点</u>，$z=0$ 是<u>本性奇点</u>，$z=1$ 是<u>2 级极点</u>(若为极点要指明级)。 **（99，下，期末）**

【解】 由于 $f(z)=\dfrac{\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^{2}}}{z+i}=\dfrac{g(z)}{z+i}$，$g(z)$ 在 $|z+i|<1$ 内解析，且 $g(-i)\neq 0$，所以 $z=-i$ 是 1 级极点，同理可知 $z=1$ 是 2 级极点。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{(x-1)^{2}(x+i)}$ 不存在且不为 ∞，从而 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在且不为 ∞，故

$z=0$是本性奇点。

7. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+2}=\underline{2\pi i}$ (积分路径取逆时针方向)。 （**01**，下，期末）

【解】 利用 Cauchy 积分公式或留数定理。

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+2}=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z-\sqrt{2}i}+\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{2}i}=\frac{1}{2}(2\pi i+2\pi i)=2\pi i$$

或

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+2}=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^2+2},-\sqrt{2}i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^2+2},\sqrt{2}i\right]\right)=2\pi i\left(\frac{-\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}i}\right)=2\pi i$$

8. 积分 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=\underline{-\pi i}$ (积分路径取逆时针方向)。 （**03**，下，期末）

【解】 根据留数定理 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3},0\right]=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$

而 $\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots}{z^3}$，所以 $\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3},0\right]=C_{-1}=-\frac{1}{2}$。从而

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3},0\right]=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$$

9. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2(z-1)}=\underline{0}$。 （**00**，下，期末）

【解】 由 Cauchy 积分公式得

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2(z-1)}=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{z-1}\mathrm{d}z+\oint\limits_{|z|=2}\frac{\frac{1}{z-1}}{(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{(1+i)^2}+\left(\frac{1}{z-1}\right)'\Big|_{z=-i}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{(1+i)^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right)=0$$

10. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+3)^2}$ 在圆环域 $0<|z+3|<3$ 内的 Laurent 级数 $\underline{-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}(z+3)^{n-2}}$。

（99，下，期末）

【解】 $f(z)=\dfrac{1}{(z+3)^2}\cdot\dfrac{1}{z+3-3}=\dfrac{-1}{3(z+3)^2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z+3}{3}}$

$$=-\frac{1}{3(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(z+3)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+3)^{n-2}$$

11. 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)z^2}$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\underline{-1}$。**（03，下，期末）**

【解】 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点，$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\sin z}{(z-1)z^2}=-1$。

12. 设 $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\underline{-\dfrac{1}{6}}$。 **（04，下，期末）**

【解】 在 $0<|z|<+\infty$ 内，$f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}=z-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{z}+\cdots$，则 $C_{-1}=-\dfrac{1}{6}$。

故 $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{1}{6}$。

（二）单项选择题

1. 设 $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos z^2}$，则

(A) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级极点　　(B) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 2 级极点

(C) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点　　(D) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点

[　A　]（00，下，期末）

【解】 由 $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1-\cos z^2}{z}=\dfrac{1-(1-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{4!}z^8+\cdots)}{z}=z^3(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}z^4+\cdots)$ 知，$z=0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的3级零点，所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的3级极点。

2. 设 $f(z)=\dfrac{z}{e^{2z}-1}$，则

(A) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点

(B) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 2 级极点

(C) $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点

(D) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点

[C]（01，下，期末）

【解】 由 $f(z)=\dfrac{z}{e^{2z}-1}=\dfrac{z}{2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\frac{1}{3!}(3z)^3+\cdots}=\dfrac{1}{2+2z+\frac{4}{3}z^2+\cdots}$ 知，$z=0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的3级零点，所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的3级极点。

3. 下列命题中正确的是

(A)如果 $f'(z_0)$ 存在，则 $f(z)$ 在 z_0 解析

(B)若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 不可导

(C)如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，则 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 的奇点

(D)若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，且 u 为实常数，则在 D 内 $f(z)$ 是常数

[D]（00，下，期末）

【解】 $f(z)$ 在 z_0 处解析，是指 $f(z)$ 在 z_0 点的某一邻域内可导，因此 $f(z)$ 仅在 z_0 可导不能保证 $f(z)$ 在 z_0 解析，故(A)不正确；$f(z)$ 不解析的点称为 $f(z)$ 的奇点，故(B)不正确；取 $g(z)=-f(z)$，说明(C)不正确；$f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则函数 u,v 在区域 D 内满足 Cauchy-Riemann 条件：$u_x=v_y,u_y=-v_x$，又由 u 为实常数知，$u_x=v_y=u_y=-v_x=0$，

所以在 D 内 v 为常数，从而 $f(z)=u+iv$ 是常数，故选(D)。

4. 下列命题中正确的是

(A)若 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析

(B)若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 处必不可导

(C)若 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则 $f(z)$ 在 D 内解析

(D) $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内满足条件 $u_x=v_y,u_y=-v_x$，则 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析 **[C]（01，下，期中）**

【解】 同上题知(A)、(B)皆错；$u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内满足条件 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 仅是 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析的必要条件，而非充分条件，因此(D)也错，故选(C)。

5. 下列命题正确的是

(A)区间 $I:|x-x_0|<r$ 内的可导函数在 x_0 点总能展成 Taylor 级数

(B)区间 $I:|x-x_0|<r$ 内的任意次可导函数在 x_0 点总能展成 Taylor 级数

(C)复域 $D:|z-z_0|<r$ 内的可导函数在 z_0 点总能展成 Taylor 级数

(D)复域 $D:|z-z_0|<r$ 内的可导函数 $f(z)$ 在 z_0 点的 Taylor 级数总是收敛的，但未必就收敛于 $f(z)$ **[C]（01，下，期末）**

【解】(A)、(B)中的条件都仅是实函数在 x_0 点展成 Taylor 级数的必要条件而非充分条件，复域 $D:|z-z_0|<r$ 内的可导函数 $f(z)$ 必定在 D 内解析，因此 $f(z)$ 在 z_0 点的 Taylor 级数总是收敛的，且收敛于 $f(z)$，故(D)也错，选(C)。

（三）计算题

1. 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=2xy-y$，且 $f(0)=0$，求 $f(z)$ 的表达式，并用 z 表示。 **（04，下，期中）**

【分析】 本题需用到解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 与虚部 $v(x,y)$ 满足 Cauchy-Riemann 条件这一结论，要将 $f(z)$ 用 z 表示，只需在 $f(z)$ 的表达式中取 $y=0$，得 $f(x)$ 的表达式，然后将 x 换为 z 即可。

【解】 根据解析函数的 Cauchy-Riemann 条件，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y$。

所以 $u(x,y)=x^2-x+\varphi(y)$，从而

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\quad \varphi=-y^2+C$$

所以 $u(x,y)=x^2-x-y^2+C$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-x-y^2+C+i\left(2xy-y\right)$，由于 $f(0)=0$，得 $C=0$，取 $y=0$，得 $f(x)=x^2-x$，然后将 x 换为 z，即得 $f(z)=z^2-z$。

2. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，若 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$，并单独用 z 表示之。 **（99，下，期末）**

【分析】 在所给等式两边求偏导数，再利用解析函数的 Cauchy-Riemann 条件，解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$，然后再求出 u,v。

【解】 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，所以满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

等式 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 两边对 x,y 求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2，\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2，$$

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=6xy，\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}-3x^2+3y^2$$

从而 $$u=3x^2y+\varphi(y)，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2+\varphi'=-\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2$$

所以 $$\varphi=-y^3+C，\quad u=3x^2y-y^3+C，\quad v=-x^3+3xy^2+C$$

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=3x^2y-y^3+C+i\left(-x^3+3xy^2+C\right)=C+i\left(-z^3+C\right)$$

3. 确定正常数α，使得函数$u(x,y)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin 3y$为调和函数，并求以$u(x,y)$为实部的解析函数$f(z)$(要求用复变量$z$表示)。 **（01，下，期中）**

【分析】 利用调和函数的定义求出α,其他同上两题。

【解】 根据调和函数的定义，有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\alpha^2-9\right)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin 3y=0$

所以 $$\alpha=3，\quad u(x,y)=\mathrm{e}^{3x}\sin 3y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\mathrm{e}^{3x}\sin 3y=\frac{\partial v}{\partial y},v=-\mathrm{e}^{3x}\cos 3y+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3\mathrm{e}^{3x}\cos 3y+\varphi'=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3\mathrm{e}^{3x}\cos 3y$$

从而 $$\varphi'=0,\varphi=C，\quad v=-\mathrm{e}^{3x}\cos 3y+C$$

$$f(z)=\mathrm{e}^{3x}\sin 3y+i\left(-\mathrm{e}^{3x}\cos 3y+C\right)=-i\left(\mathrm{e}^{3z}-C\right)$$

4. 设解析函数$f(z)=u+iv$，其中$u=\varphi\left(x^2+y^2\right)$,$\varphi$具有二阶连续导数，$\varphi(1)=0$, $\varphi'(1)=1$, 求(1)函数$\varphi(t)$的表达式；(2) $f(z)$的表达式(单独用复变量z表示)。

（02，下，期中）

【分析】 本题需要用到解析函数的实部,虚部均为调和函数这一结论。

【解】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\left(x^2+y^2\right)\varphi''+4\varphi'=0$，解得 $\varphi=C_1\ln\left(x^2+y^2\right)+C_2$

由 $\varphi(1)=0$，$\varphi'(1)=1$, 得 $C_1=1, C_2=0$。所以

$$\varphi=\ln\left(x^2+y^2\right),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad v=2\arctan\frac{y}{x}+\psi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2}+\psi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2+y^2}$$

从而
$$\psi'(x)=0,\psi(x)=C,\quad v=2\arctan\frac{y}{x}+C$$

$$f(z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+i\left(2\arctan\frac{y}{x}+C\right)=\ln z^2+iC$$

5. 计算复积分 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}\mathrm{d}\,z$，其中 $|z|=2$ 取逆时针方向。 （**04**，下，期末）

【解】 记 $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}$，由留数定理得

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}\mathrm{d}\,z=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(z),-i\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),i\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2(1+i)^2}+\frac{1}{2(1-i)^2}+0\right)=0$$

6. 计算复积分 $\oint\limits_{|z|=3\pi}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1^i}\mathrm{d}z$，其中 $|z|=3\pi$ 取逆时针方向。 （**99**，下，期末）

【解】 记 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1^i}=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{i\ln 1}}=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-2k\pi}}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,则 $f(z)$ 的奇点为

$z=-2k\pi+2n\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

（1）当 $k=0$ 时， $f(z)$ 在 $|z|=3\pi$ 内有三个奇点 $z=0$, $z=2\pi i$, $z=-2\pi i$,且均为 1 级极点，所以 $\oint\limits_{|z|=3\pi}\dfrac{e^z}{e^z-1^i}dz=\oint\limits_{|z|=3\pi}\dfrac{e^z}{e^z-1}dz$

$$=2\pi i\left(\text{Res}\left[f(z),0\right]+\text{Res}\left[f(z),2\pi i\right]+\text{Res}\left[f(z),-2\pi i\right]\right)=6\pi i$$

（2）当 $k=-1$ 时， $f(z)$ 在 $|z|=3\pi$ 内只有一个奇点 $z=2\pi$,且为 1 级极点，所以

$$\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-1^i}dz=\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-e^{2\pi}}dz=2\pi i\text{Res}\left[f(z),2\pi\right]=2\pi i$$

（3）当 $k=1$ 时， $f(z)$ 在 $|z|=3\pi$ 内只有一个奇点 $z=-2\pi$,且为 1 级极点，所以

$$\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-1^i}dz=\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-e^{-2\pi}}dz=2\pi i\text{Res}\left[f(z),-2\pi\right]=2\pi i$$

（4）当 $k=\pm2,\pm3,\cdots$ 时， $f(z)$ 在曲线 $|z|=3\pi$ 所围的区域上解析，故

$$\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-1^i}dz=\oint\limits_{|z|=3\pi}\frac{e^z}{e^z-e^{-2k\pi}}dz=0$$

7. 计算复积分 $\oint\limits_C\dfrac{\cos z}{z^3(z-1)}d\,z$ ，其中 C 为任一包含 $z=0,z=1$ 的正向简单闭曲线。

（01，下，期末）

【解】 记 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3(z-1)}$ ，则 $z=0,z=1$ 分别是 $f(z)$ 的三级极点和一级极点。由留数定理得 $$\oint\limits_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}d\,z=2\pi i\left(\text{Res}\left[f(z),0\right]+\text{Res}\left[f(z),1\right]\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\cos1\right)$$

8. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$ ，（1）把 $f(z)$ 在去心邻域 $0<|z-1|<2$ 内展成 Laurent 级数；

（2）把 $f(z)$ 在以 $z=-2$ 为中心的各圆环域内展成 Laurent 级数。 **（01，下，期末）**

【分析】 此题主要考查将函数在圆环域内展成 Laurent 级数的方法。

【解】 （1） $f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{2(z-1)}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}(z-1)^{n-1}$

（2）以 $z=-2$ 为中心的各圆环域共有三个 $|z+2|<1$，$1<|z+2|<3$，$3<|z+2|<+\infty$.

(i) $|z+2|<1$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+2-3}-\frac{1}{z+2-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(z+2)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{3}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-3^{-n-1}\right)(z+2)^n$$

(ii) $1<|z+2|<3$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z+2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{3}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n-1}(z+2)^n\right)$$

(iii) $3<|z+2|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{2(z+2)}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z+2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{z+2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n-1\right)(z+2)^{-n-1}$$

9. 求 $f(z)=\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}$ 在单位圆内的奇点与留数。 **（01，下，期末）**

【解】 $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}$ 在单位圆内的唯一奇点，且是 1 级极点。

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^{z}\right)^{3}},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^{2}\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^{z}\right)^{3}}=\lim_{z\to 0}\frac{z^{2}(z-\frac{1}{3!}z^{3}+\cdots)}{\left(-z-\frac{1}{2!}z^{2}+\cdots\right)^{3}}=-1$$

10. 利用留数计算定积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{6}}$。 （**99**，下，期末）

【**解**】 记 $f(z)=\frac{1}{1+z^{6}}$，它在上半平面内有三个 1 级极点：$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}},\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}},\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$，于是

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{6}}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{6}}=\pi i\left(\operatorname{Res}\left[f(z),\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}\right]\right)$$

$$=\frac{\pi i}{6}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{5}{6}\pi}+\mathrm{e}^{-i\frac{5}{2}\pi}+\mathrm{e}^{-i\frac{25}{6}\pi}\right)=\frac{\pi i}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}+0-i+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

12. 利用留数计算定积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$。 （**00**，下，期末）

【**解**】 记 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^{2}}$，它在上半平面内有一个 1 级极点：$i$，于是

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\right)$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=2\pi i\operatorname{Res}\left[f(z),i\right]=\frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

（四）证明题

1. 如果 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，证明：$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left|f(z)\right|\right)^{2}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left|f(z)\right|\right)^{2}=\left|f'(z)\right|^{2}$。

（**04**，下，期中）

【证】 $\left|f(z)\right|=\sqrt{u^2+v^2}$，因而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left|f(z)\right|\right)^2=\frac{\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{u^2+v^2},\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\left|f(z)\right|\right)^2=\frac{\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{u^2+v^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left|f(z)\right|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left|f(z)\right|\right)^2=\frac{\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+v^2\left(\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+2uv\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{u^2+v^2}$$

因为 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，所以满足 Cauchy-Riemann 条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

且 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$，代入上式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left|f(z)\right|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left|f(z)\right|\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left|f'(z)\right|^2$$

练习

1. 设 $\mathrm{e}^z-1-\sqrt{3}i=0$，求 $\mathrm{Im}(z)$。 **（01，下，期中）**

2. **计算** $(1+\sqrt{3}i)^{2i}$。 **（02，下，期中）**

3. 设 $C:|z-1|=1$ 取逆时针方向，计算复积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)^3}$。 **（02，下，期中）**

4. 设 $L:|z|=2$ 取逆时针方向，计算复积分 $\oint_L \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)z^2}$。 **（03，下，期中）**

5. 求函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内的 Laurent 级数。**（01，下，期末）**

6. 已知调和函数 $u(x,y)=(x-1)^2-(y+1)^2$，求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的表达式(要求用复变量 z 表示)。 **（00，下，期中）**

7. 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=2x^2-2y^2+x$，试求 $f(z)$ 的表达式(要求用复变量 z 表示)。 **（01，下，期末）**

8. 已知解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^3-3xy^2$，求虚部 v 及 $f(z)$ 的表达式(要求单独用复变量 z 表示)。 **（02，下，期中）**

9. 计算复积分 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^{2z}-1}{z^2(z-1)^2}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周：$|z|=3$。 **（03，下，期末）**

10. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z-1|<2$；(2) $3<|z+2|<+\infty$ 内展成 Laurent 级数。 **（04，下，期末）**