东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 概率论与数理统计 考试学期 20-21-3 得分

适用专业 全校 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名

学号

线 封 密

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ 表示标准正态分布的分布函数，

$\Phi(-1.65)=0.05;\Phi(-1.96)=0.025;\Phi(1)=0.8413;\Phi(2)=0.9772$

$T_n\sim t(n)\quad P(T_{24}\ge 2.064)=0.025;P(T_{24}\ge 1.711)=0.05;$

$P(T_{25}\ge 2.060)=0.025;P(T_{25}\ge 1.708)=0.05;$

$K_n\sim\chi^2(n)\quad P(K_{24}\ge 39.36)=0.025;P(K_{24}\ge 12.40)=0.975;$

$P(K_{25}\ge 40.65)=0.025;P(K_{25}\ge 13.12)=0.975;$

一、选择题(每题 2’，共 10’)

1) 设 A,B 为两随机事件，且$P(A)>0,P(\bar{B}|A)=1$，则下列结果正确的是 （ ）

(A) $A\subset B$ (B) A 和 B 互不相容

(C) $A\subset\overline{B}$ (D) $P(AB)=0$。

2) 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ \frac{3}{14}x^2 & 1\le x<2 \end{cases}.$$

则概率$P(-0.5<X<1.5)$的值 （ ）

(A) $\frac{75}{112}$ (B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{61}{112}$ (D) $\frac{3}{4}$。

3) 设随机变量$X\sim N(1,a),Y\sim N(3,b)$，且$P(X>2)>P(Y>4)$. 则必有 （ ）

(A) $a>b$； (B) $a<b$； (C)不能确定a和b的关系；

4) 设 X，Y，Z 相互独立，且均服从泊松分布 P(1)。令 T=(X+3Y-Z)/3;则 ET^2的值为 （ ）

（A）2 （B）$\frac{1}{3}$

（C）$\frac{11}{9}$ （D）$\frac{20}{9}$。

5） 设总体 X 服从指数分布$e(\lambda), X_1, X_2, \dots, X_n$是来自该总体的简单随机样本，$\bar{X}$, 和$S^2$分别表示样本均值和样本方差。则下列结论中不正确的是 （ ）

（A）$E\bar{X} = 1/\lambda$ ； （B）$ES^2 = \frac{1}{n\lambda^2}$;

（C）$\bar{X}$和S^2相互独立； （D）$E[X|X > 2] = 2 + 1/\lambda$。(条件数学期望)

二、填充题（每空格 2’，共 26’）

1) 设事件 A 和 B 相互独立，设 P(A)=0.4; P(B)=0.2，则 P(A-B)=______。

2) 某公司产品每件合格的概率为 0.9，产品按盒销售，每盒 2 件产品。现从该公司选购 3 盒产品，三盒中恰有一盒含一件次品的概率为______________。

3) 设随机变量 X 服从均匀分布 U[-1, 2]，$EX(X-1)=$________。

4) 随机变量 X~N(1,4)，则 P(-1<X<3)=________。

5) 随机变量 X，Y 的联合分布律为：$P(X=-2, Y=-1)=0.2$;

$P(X=-2, Y=1)=0.3$; $P(X=2, Y=-1)=0.4$;

$P(X=2, Y=1)=0.1$; 则EXY^2=__________________。

6) 若随机变量 X,Y 满足，DX=DY=2，相关系数 r=0.3, 则

cov(X-Y,X+2Y)=____________。

7) 设随机变量序列{Xn,n=1,2,…}独立同于 f(x),

$f(x)=\begin{cases} e^x/(e-1) & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$。 则$\frac{1}{n}(X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+\dots+X_n^{\ 2}) \xrightarrow{p}$ ______。

8) 设总体 X 服从正态分布 $N(-1,1)$, $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自该总体的样本，若

$\sum_{i=1}^{10}(X_i+c)^2$服从$\chi^2(10)$分布,则常数 c=_________。

9) 随机变量 X 的分布律为 P(X= -2)=0.4，P(X=0)=0.3, P(X=2)=0.3 则其分布函数为_______________。

10) 设随机变量 X 的分布律为：$P(X=1)=0.1; P(X=-1)=0.2; P(X=2)=0.7$, 则$Y=-2X^2+1$的分布律为__________________________________。

11) 设 $\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, X_4}$ 是来自正态总体 N(2,4) 的简单随机样本，若 $c\frac{(X_1-X_2)^2+2(X_4-2)^2}{(X_3-2)^2} \sim F(2,1)$，则常数$\boldsymbol{c}=$_________。

12) 设某总体服从$N(m,4)$，有来自该总体的容量为 16 的简单随机样本，其样本均值为 2, 且m的置信区间的长度为 1.96, 则该置信区间的置信度为____________。

13) 设总体 X 的数学期望为$EX=\theta+1$, θ为未知参数。若 2.3, 1.5, 3.5，3.7，4 是来自该总体的简单随机样本的观测值，则 b 的矩估计值为_______________。

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

密 封 线

三、(15’) 设随机变量（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2 & x>0,y>0,x+y<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

求（1）常数a ; (2)Y 的边缘密度函数；（3）条件概率 P(X<1.5|Y<1)。

.

四、(10’) 设有甲乙两个箱子，甲中有红球 4 只，白球 2 只；乙箱中有红球 3 只，白球 1 只。随机地选一箱子，然后再从该箱中有放回地抽球两次。（1）求抽到的两球均为红球的概率；（2）如果已知抽到的两球均为红球，则这两球取自甲箱的概率是多少？

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

五、(10’)设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 从指数分布 e(2), Y 服从均匀分布 U[1,2]。令 Z=X+Y，求随机变量 Z 的概率分布函数$F_Z(z)$。

六、(9’) 设某种产品的寿命(单位小时)服从指数分布$e(0.01)$。现随机抽取这种产品 100 只，用中心极限定理求这 100 只产品的平均寿命大于 110 小时的概率。

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

七、(10')设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<\infty(\theta>0)$$

其中θ为未知参数。$X_1,\ldots X_n$ 为来自该总体的样本。(1)求参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$；(2)$\hat{\theta}$是否是θ的无偏估计量，说明理由。.

八、 (10')设总体 X 服从正态分布 N (u,σ^2), u 和σ^2未知。 现有来自该总体样本容量为 25 的样本, 其样本均值为 25，样本标准差为 4。 （1）试检验 H_0: u=24, v.s. H_1: u >24.(检验水平$\alpha=0.05$)，(2)求σ^2的置信度为 95%的置信区间。

概率统计 20-21-2(A)标准答案及评分标准

一、选择题

1)D　2) A　3)A,　4) D,　5) C

二、填空题

1) 0.32;

2)0.363

3) 1/2

4)0.6826

5)0

6) -1.4

7) (e-2)/(e-1)

8) 1

9) $F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ 0.4 & -2\le x<0\\ 0.7 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

10)

Y	-7	-1
p	0.7	0.3

11) 1/4

12) 0.95

13) 2

三、(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$; ……………2′

$a\int_0^2\int_0^{2-x} xydydx = 1$; ……………2′

$a=\frac{3}{4}$ ……………1′

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ ……………2′

当0<y<2 时　$f_Y(y)=\int_0^{2-y} ax^2dx=\frac{1}{4}(2-y)^3$………2′

当$y\le 0$，或 $y\ge 2$ 时　$f_Y(y)=0$.……………1′

(3) $P(X<1.5|Y<1) = \frac{P(X<1.5,Y<1)}{P(Y<1)}$……………1′

$P(Y<1)=\int_0^1 f_Y(y)dy$ =15/16 ……………1′

$P(X<1.5,Y<1)=P(X<1,Y<1)+P(X<1.5,Y<1)$

$=\int_0^1\int_0^1 ax^2dxdy+\int_1^{1.5}\int_0^{2-x} ax^2dydx$

$=\frac{a}{3}+\frac{109}{192}a=\frac{173}{192}a=\frac{173}{256}$ ……………2′

$P(X<1.5|Y<1)=\frac{173}{240}\approx 0.721$……………1'

四、A 表示选中甲箱;

B 表示抽到两球均为红色，则

$P(A)=P(\bar A)=\frac{1}{2}$; ……………1′

$P(B|A)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $P(B|\bar A)=\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ……………1′

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar A)P(B|\bar A)$ ……………2′

$=\frac{145}{288}\approx 0.503$ ……………2′

(2)

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$ ……………2′

$=\frac{64}{145}\approx 0.441$……………2′

五、*X*和*Y*的概率密度为:

$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 1<y<2\\ 0 & 其它\end{cases}$ ……………2′

*X*和*Y*的联合密度为:

$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0, 1<y<2\\ 0 & 其它\end{cases}$ ……………

Z的分布函数$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$ ……………1′

当$z<1$ 时，$F_Z(z)=0$;

当$1\le z\le 2$ 时，$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$ ……………2′

$=\int_1^z\int_0^{z-y} 2e^{-2x}dxdy$ ……………

$=z+\frac{1}{2}e^{2-2z}-\frac{3}{2}$……………

当$z>2$时

$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_1^2\int_0^{z-y} 2e^{-2x}dxdy=1-\frac{1}{2}e^{-2z}(e^4-e^2)$

$F_Z(z)=\begin{cases}z+\frac{1}{2}e^{2-2z}-\frac{3}{2} & 1<z<2\\ 1-\frac{1}{2}e^{-2z}(e^4-e^2) & z\ge 2\\ 0 & z<1\end{cases}$ ……………

六、X_i表示第i件的寿命，$X_i\sim e(\lambda),\lambda=0.01$; i=1,..,n; n=100;……………2

$\mu=EX_i=100;\sigma^2=DX_i=100^2$;;……………2

所求改了为:

$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i>110\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{110n-n\mu}{\sqrt{n}\ \sigma}\right)$ ……………

$=1-\Phi(1)=0.1587$……………1′

七、(1)似然函数为: $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|X_i|}{\theta}}$

$=\frac{1}{2^n\theta^n}e^{-\frac{\sum_1^n|X_i|}{\theta}}$……………2′

$\ln L(\theta)=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{\sum_1^n|X_i|}{\theta}$………1′

$[\ln L(\theta)]'=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_1^n|X_i|}{\theta^2}=0$……2′

$\hat\theta=\frac{1}{n}\sum|X_i|$……1′

(2) $E\hat\theta=E\frac{1}{n}\sum|X_i|=E|X|$ ……………

$E|X|=\int_{\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$E\hat\theta=\theta$………1′

$\hat\theta$是θ的无偏估计……………1′

八、(1)$n=25,\alpha=0.05$,

检验统计量 $T=\frac{\bar X-24}{S_n}\sqrt{n}|H_0\sim t(n-1)$

拒绝域: $D=\{T>t_\alpha(n-1)\}=\{T>1.711\}$……………

$\bar x=25,s_n=4$

T的观测值: $T=\frac{25-24}{4}\sqrt{25}=1.25$

$1.25<1.711$,……………1′

所以，不能拒绝原假设。……………

(2)σ^2的置信度为95%的置信区间为: $\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.025}(24)},\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.975}(24)}\right]$……2′

$=\left[\frac{24\times 4^2}{39.36},\frac{24\times 4^2}{12.4}\right]=[9.756,\ 30.968]$……………