Chapter 2: Ch11 z: $x[n]=Xz^n=Xe^{j\Omega_0 n}=|X|\cos(\Omega_0 n+\angle X)+j|X|\sin(\Omega_0 n+\angle X)$

$y_{ss}(t)=|X||H(e^{j\Omega_0})|\cos(\Omega_0 n+\angle X+\angle H(e^{j\Omega_0}))+j\sin(\ldots)$

$f(t)\nearrow f(at)\to f[a(t\pm\frac{b}{a})]$

$f(t)\searrow f(t\pm b)\to f(at\pm b)\to f(-at\pm b)$

$f(t)\downarrow f(-t)\to f(-at)\to f[-a(t\mp\frac{b}{a})]$

$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ 奇/偶 分量 odd even

$\frac{1}{2}[x(t)+/-x(-t)]$

Chapter6. 无失真传输 $y(t)=Kx(t-t_d)$ $h(t)=K\delta(t-t_d)$ $H(\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$

n个连续时间周期信号之和是否周期？

1° 各T之比有理数 无限宽带滤波器

2° e.g. $T_1=\frac{4\pi}{7}$ $T_2=\pi$ $T_3=\frac{12}{7}\pi$ $\frac{T_1}{T_2}=\frac{4}{7}$ $\frac{T_1}{T_3}=\frac{1}{3}$ $\to T=21\cdot T_1=12\pi$

$H(\omega)=\mathrm{rect}(\omega/2\omega_c)$ $h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c t)$ $\frac{\pi}{\omega_c}$ 非因果sys 物理不可实现

*欧拉公式: $Ae^{j\theta}=A\angle\theta=A(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\theta=\omega t$ $\begin{cases}\sin(\omega t)=\frac{1}{2i}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\\ \cos(\omega t)=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\end{cases}$

$x(t)=Ce^{at}$ → $Ae^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega)t}=Ae^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)+jAe^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi)$ $\sigma<0$ $\sigma>0$

e.g. $g_1(t)=5\cos(1200\pi t)+5\cos(800\pi t)$ $g_2(t)=4\cos 800\pi t$ $H(\omega)=0.8\,\mathrm{rect}(\omega/2\omega_c)$ $800\pi<\omega_c<1200\pi$

低通 $H(\omega)=\frac{1}{1-\omega^2LC+j\omega\frac{L}{R}}$ $|H(\omega)|=\ldots$ $\omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $L=2R^2C$

$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\\ \frac{1}{2} & t=t_0\end{cases}$ $u(t-t_0)=u(t-t_0)^k$ $u(at-t_0)=u(t-\frac{t_0}{a})$ $a>0$

$\mathrm{rect}(t/T)$, 门函数 $=u(t+\frac{T}{2})-u(t-\frac{T}{2})$

带通: $H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega\frac{L}{R}+\frac{1}{j\omega RC}}$ $H_B(\omega)=H_L(\omega_c)$ $\omega_c=\omega_0(\omega^2-\omega_u\omega_L)/\omega(\omega_u-\omega_L)$ 带宽上下限截频

$\int$面积=强度=1不变，宽→0 时定义为 $\delta(t)=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$

仅t=0时→∞幅值，无界函数，t≠0时为0

$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)dt=1\\ \delta(t-t_0)=0,\ t\ne t_0\end{cases}$

6.3 通带：非0区间 3dB 带宽 $20\log_{10}(\frac{1}{\sqrt2})=-3dB$

*$\delta(t)$的性质: 1.偶函数 尺度变换 ...

2. $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$ 积分 求导 $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$ $n\to\infty$

3.*筛选: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$

$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ 冲激不丢!

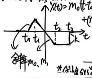
4. $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

5. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at-t_0)dt=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{t_0}{a})dt$

6.4 采样 $f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$ $F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega-k\omega_s)$ 采样频率 $\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$

混叠: ω_s过低而导致恢复错误信号的现象

$u(t)$拟合图像: $\omega_s\gg2\omega_m$



$x(t)=m_0(t-t_0)u(t-t_0)+(m_1-m_0)(t-t_1)u(t-t_1)+(0-m_1)(t-t_2)u(t-t_2)+k\,u(t-t_3)$

斜率 m_0、m_1

理想滤波性质: 1.有限数性 2.逆滤波性 3.收敛性

$v(t)=\frac{V}{T}\times t\times[u(t)-u(t-T)]$ 三角波(锯齿) $\sum v(t-kT)$

有初始储能，$x(t)\to y(t)\to y(t-t_0)$ $x(t-t_0)\to y_d(t)$ ↔ *时不变: $y(t-t_0)=y_d(t)$

*全响应分解为零状态响应和零输入响应

Chapter3. 卷积 以"0状态"(仅输入无初态)

$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

单位冲激 $\delta(t)$ LTI 的0状态响应 $\overset{def}{=}h(t)$ "单位冲激响应"

$\Delta\delta(t-k\Delta)\to\Delta h(t-k\Delta)$

$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

*e.g 积分器系统 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，$x(t)=tu(t)$

先判断是否LTI? 求 $h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$!

$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau$ 改上下限 $\int_0^t\tau d\tau=\frac{t^2}{2}(t\ge0)\cdot u(t)$

*卷积的性质 $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$ 次序可换

$\delta(t)*h(t)=h(t)$

$\delta(t-t_0)*h(t)=\delta(t)*h(t-t_0)=h(t-t_0)$

$\delta(t-t_0)*g(t)=\delta(t)*g(t-t_0)=g(t-t_0)$

e.g. $x(t)=\delta(t+3)+3e^{-0.5t}u(t)$ 每项分开卷积，最后再线性叠加

①对结构不变，简单的 $f_2(t)$ 先翻转再平移 ②积分上下限⇒共同非0部分 $f(t-\tau)$

sys 串联 结合Th: $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$；并联 分配Th: $f(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$

$\Rightarrow$ LTI 还有 $=k\delta(t)$ 无记忆；若 $h(t)$ 因果 → 因果；$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$ 绝对可积 BIBO；存在逆 $h_i(t)$ 可逆

*e.g. $h(t)=u(t)$ 积分器sys ⇐ ✗ 不稳定

Chapter9: $x[n]=Ca^n$ $C e^{j\Omega_0 n}$ $*\Omega_0=\omega_0 T$ $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 若 $\Omega_0=\frac{2\pi k}{N}$(rad) 离散周期信号

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ BIBO ✗

$y[n]=2x[n]+3$ 非线性

$y[n]=\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}x[n-k]$ "滑动平均" BIBO ✓

sys在$u(t)$下0状态响应 $\overset{def}{=}$ $s(t)$ 单位阶跃响应

$s(t)=h(t)*u(t)=u(t)*h(t)=\int_0^{+\infty}h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$

$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$ 若因果 $h(t)$ 则上限为 $\int_0^t$

微分方程是LTI的

完全响应: 0输入 y_{zi}；0状态 y_{zs} → 自由 y_c、受迫 y_p → 暂态、稳态 y_{ss} $(t\to\infty)$

所谓齐次解中系数是待定的，y_c 与所有齐次...

初始状态 $t(0_-)\xrightarrow[\text{激励}]{t=0}t(0_+)$ 初始条件；若 ≠ 时 = 右边有 $\delta(t)$ 或其导数

根态: y_c 中最基本运动形态(与输入无关) "$e^{\lambda t}$" (无系数!)

y_{zi} 由初态；y_{zs} 中齐次 由0初态→初条件 ∴ y_c 与 y_{zi} 系数不同!!!

y_c 仅"" 左边系统固有，与 $x(t)$ 无关

y_p 仅与 $x(t)$ 有关

y_{zi} 仅与初态有关，与 $x(t)$ 无关

y_{zs} 初态为0，仅与 $x(t)$ 有关 全解(初态=0) "$y(0)=0$ & $y'(0)=0$"

*Z: 求 y_{zi} 齐次 ... $y[-1],\ldots$ 初态?!

*特征根 λ_i z_i → 齐次解 y_c: $C_ie^{\lambda_i t}$ z_i^n

r重 λ_i: $(C_0+C_1t+\ldots C_{r-1}t^{r-1})e^{\lambda_i t}$ $n^kz_i^n$ $[0,r-1]$

$\lambda=\alpha\pm j\beta$: $e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))/Ce^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)$

r重: $e^{\alpha t}(C_0\cos(\beta t+\varphi_0)+C_1t\cos(\beta t+\varphi_1)+\ldots C_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\varphi_{r-1}))$

*自由项 → 特解 y_p: $(n^k)(z_i)^n$, $(n^k)(z_i^*)^n$ $k\in[0,r-1]$

常数E: Q.

t^r n^k: $Q_0+Q_1t+\ldots Q_rt^r$ $A_kn^k+\ldots A_1n+A_0$

$e^{\alpha t}$ a^n: $\alpha\ne\lambda_i$ 特征根 $Q_0e^{\alpha t}$ Ca^n；$\alpha=r$重λ_i $(Q_0+Q_1t\ldots Q_rt^r)e^{\alpha t}$ $(C_rn^r+\ldots C_1n+C_0)a^n$

sin/cos(ωt) $\Omega_0 n$: $Q_1\cos(\omega t)+Q_2\sin(\omega t)/A\cos(\omega t+\varphi)$

$t^re^{\alpha t}\cos(\omega t)$: $(Q_0+Q_1t+\ldots Q_rt^r)e^{\alpha t}\cos(\omega t)+(P_0+P_1t+\ldots P_rt^r)e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

共轭复根 $C_ie^{s_it}+(C_ie^{s_it})^*=2|C_i|e^{\sigma_it}\cos(\omega_it+\theta_i)$ $\mathrm{Re}(s_i)$ $\mathrm{Im}(s_i)$ $\angle C_i$

$\begin{cases}=0 & \text{无阻尼振荡}\\ <0 & \text{阻尼，} t\to\text{，幅度↓}\\ >0 & \text{不稳定}\to\infty\end{cases}$

*BIBO ⇔ sys 所有特征根有负实根部(全轴X) s左半平面

*$x(t)=Xe^{st}$ 下的0状态&稳态

$y(t)=H(s)x(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=H(s)$ $\begin{cases}s=\alpha+j\beta & \mathcal{L}\{h(t)\}\\ s=j\beta & \mathcal{F}\{h(t)\}\end{cases}$

$x[n]=e^{j\frac{3\pi n}{7}}+e^{j\frac{\pi n}{2}}+\cos(\frac{5\pi}{9}n)$ $\frac{k}{N}=\frac{\Omega}{2\pi}$：$\frac{3}{14}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{5}{18}$ 14、4、18 → 252

$H(s)=\frac{b_ms^m\ldots b_0}{a_ns^n\ldots a_0}$ ← 特征方程 ← 右=0

正弦输入信号: $s=j\omega$ e.g. $y_{ss}(t)=|X||H(j\omega)|\cos(\omega t+\angle X+\angle H(j\omega))$

幅度是 $|H(j\omega)|$ 相位加 $\angle H(j\omega)$

(若 $s=j\omega+\sigma$，则上式后乘 $e^{\sigma t}$) *但注 $H(s)=H(j\omega+\sigma)$

*e.g. $x(t)=5\cos(2t+40°)$ $X=5\angle40°$, $s=2j$

∵ $H(s)=\frac{10}{s^2+3s+2}$ ∴ $H(2j)=1.58\angle-108.4°$

∴ $y_{ss}(t)=(1.58)(5)\cos(2t+40°-108.4°)$

*e.g. $x(t)=8-5e^{-6t}+3\cos(4t+30°)$ $y_{ss}(t)=8H(0)-5H(-6)e^{-6t}+3|H(4j)|\cos(4t+30°+\angle H(4j))$

基频 $\frac{2\pi}{T_0}=\omega_0$

Chapter4: 满足 $x(t)=x(t+T)$ 的 min T

$x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}C_ke^{jk\omega_0t}$ ⇒ * $C_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)dt$ $C_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0t}dt$

*系数的确定

*Dirichlet条件 1° $\int_{T_0}|x(t)|dt<\infty$ 可积(绝对) 2° 有限间断点&极值 收敛于 $\frac{\lim_-+\lim_+}{2}$ 均值(左右)

Gibbs吉布斯现象 有限项→方波 周围 起伏

$C_k=C_{-k}^*=|C_k|e^{j\theta_k}$

*$x(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}2|C_k|\cos(k\omega_0t+\angle C_k)$ 直流分量 k=1 基波 k≥2 谐波

*$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $e^{jk\omega_0t}$

单边(离散)谱: 余弦合并三角式 $2|C_k|\sim\omega$、$\theta_k\sim\omega$ *C_0不乘2

双边: 复指数形式 $x(t)=\sum C_k$ $|C_k|\sim\omega$、$\theta_k\sim\omega$ 互为共轭 *对称(2)倍同 仅存一个谐波分量

e.g. $y(t)=e^{-t}x(t)$ 前含 $f(t)$ 的 时变! y_d 不等 $f(t)$

LTI sys 的性质: 记忆: 当前 $y(t_0)$ 仅依入 (t_0)；可逆: 不同入不同出，唯一；非因果: 出 $y(t_0)$ 仅依入 $t\le t_0$；不稳定: 有界入有界出 BIBO；线性性: 齐次&可加

e.g. $y(t)=x(2t)$ 尺度变换 时变! 反转 ∵ t_0不尺变 反转

$f(t)$ 由sin/cos组成 则 欧拉 → $e^{\ldots}$ 形式 则 $C_ke^{jk\omega_0t}$ 系数即 C_k

*典型信号的频谱:

1°方波 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boxed{-j\frac{2V}{k\pi}}e^{jk\omega_0t}$ *k奇 C_k

2°周期冲激 $=\frac{4V}{\pi}(\sin\omega_0t+\frac{1}{3}\sin3\omega_0t+\ldots)$

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{jk\omega_0t}$

*3°矩形脉冲序列 $C_k=\frac{X_0\tau}{T_0}\mathrm{sinc}(\frac{k\omega_0\tau}{2})$ 采样(抽样)函数 $=\frac{\sin x}{x}$ Sa(x) $\mathrm{sinc}(0)=1$

$C_k\begin{cases}>0 & \theta_k=0\\ <0 & \pm\pi\end{cases}$ 包络 $\frac{X_0\tau}{T_0}\mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$ $\frac{2\pi}{\tau}$

B_ω 有效带宽与脉宽τ成反比

脉宽 τ↓ 幅度 ↓ 谱线间隔 $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ →；T_0↑ ↓ ↓

4° 锯齿波 $C_0=\frac{X_0}{2}$. $C_k=j\frac{X_0}{2\pi k}$

5° 三角 C_0 $C_k=\frac{-2X_0}{(\pi k)^2}$ k奇

6° 全波 $C_0=\frac{2X_0}{\pi}$ $C_k=\frac{-2X_0}{\pi(4k^2-1)}$

7° 半波 $C_0=\frac{X_0}{\pi}$ $C_k=\frac{-X_0}{\pi(k^2-1)}$ k偶 & $C_1=-j\frac{X_0}{4}$ $C_{-1}=C_1^*=j\frac{X_0}{4}$

*周期信号LTI sys 稳态响应 $C_{ky}=H(jk\omega_0)C_{kx}=|C_{kx}||H(jk\omega_0)|e^{j(\angle C_{kx}+\angle H(jk\omega_0))}$ $|C_{ky}|$ $\angle C_{ky}$

*$z(t)=Ax(t)+B$: $C_{0z}=AC_{0x}+B$ $C_{kz}=AC_{kx}$

*$z(t)=x(-t)$: $C_{kz}=C_{kx}^*$

*$z(t)=x(t-t_0)$: $C_{kz}=C_{kx}e^{-jk\omega_0t_0}$

e.g. 4-8 $x(t)=z(t)+2$ 利用方波结论公式 ∴ $x(t)=2+\sum_{k=-\infty,\,k奇}^{\infty}\boxed{-j\frac{4}{k\pi}}e^{jkt}$ C_{kx} $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$

$H(s)=\frac{1}{s+1}$ ∴ $H(jk)=\frac{1}{jk+1}$ → ∴ $C_{ky}=\frac{-j\frac{4}{k\pi}}{jk+1}$ (k奇) $|C_{ky}|=\frac{4}{|k\pi|\sqrt{1+k^2}}$ $\angle C_{ky}=-\arctan k-\frac{\pi}{2}$

∴ $y_{ss}(t)=2+\sum_{k=-\infty,\,k奇}^{\infty}\frac{-4j}{(1+jk)k\pi}e^{jkt}$

$2|C_{ky}|$: 2, $\frac{8}{\sqrt2\pi}$, $\frac{8}{3\sqrt{10}\pi}$, $\frac{8}{5\sqrt{26}\pi}$; ω: 0 1 3 5；$-\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}-\arctan3$ $-\frac{\pi}{2}-\arctan5$

$|H(jk)|=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$↓ ∴ k↑ω↑ 幅值小 "低通sys"

Chapter7 $\mathcal{L}$变换对 $\delta(t)$, 1, ∀s；$u(t)$, $\frac{1}{s}$, Re(s)>0；t, $\frac{1}{s^2}$；t^n, $\frac{n!}{s^{n+1}}$；e^{-at}, $\frac{1}{s+a}$, Re(s)>−a；te^{-at}, $\frac{1}{(s+a)^2}$, Re(s)>−a；t^ne^{-at}, $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$；$\sin bt$, $\frac{b}{s^2+b^2}$, Re(s)>0；$\cos bt$, $\frac{s}{s^2+b^2}$；$e^{-at}\sin bt$, $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$, Re(s)>−a；$e^{-at}\cos bt$, $\frac{a+s}{(s+a)^2+b^2}$；$t\sin bt$, $\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$；$t\cos bt$, $\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$, Re(s)>0

Chapter11 Z变换对 $f[n]u[n]$ n≥0: $\delta[n]$, 1, ∀z；$\delta[n-n_0]$, z^{-n_0}, z≠0；$u[n]$, $\frac{z}{z-1}$, |z|>1；n, $\frac{z}{(z-1)^2}$, |z|>1；n^2, $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$, |z|>1；a^n, $\frac{z}{z-a}$, |z|>|a|；na^n, $\frac{az}{(z-a)^2}$, |z|>|a|；n^2a^n, $\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$, |z|>|a|；$a^n\sin bn=\frac{az\sin b}{z^2-2az\cos b+a^2}$, |z|>|a|；$a^n\cos bn=\frac{z(z-a\cos b)}{z^2-2az\cos b+a^2}$, |z|>|a|

$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$ $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$

Chapter7. $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 单边 $=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=F(s)$ 0时刻冲激、高阶奇异... 忽略

$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=f(t)u(t)\Leftarrow\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ 单边$\mathcal{L}$&$\mathcal{L}^{-1}$ 因果 $f(t)$ 信号 $(u(t))$ 实

因果信号的ROC为 $\mathrm{Re}(s)>-a$ 某右半平面 ROC仅研究实部σ

*e.g. $\mathcal{L}\{tu(t)\}\to tu(t)=u(t)*u(t)$ 积分器 输入也 $u(t)$ $\mathcal{L}\{\int_0^t u(\tau)d\tau\}=\frac{1/s}{s}=\frac{1}{s^2}$

e.g. $\mathcal{L}\{tu(t-1)\}=(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})e^{-s}$ $(t-1)u(t-1)+u(t-1)$

$f(t)=10(t-1)u(t-1)-10(t-2)u(t-2)-3u(t-2)-7u(t-3)$ ↔ $F(s)=\frac{10e^{-s}-10e^{-2s}-3se^{-2s}-7se^{-3s}}{s^2}$

*初值Th $f(t)$不含冲激、高阶奇异；若有 $\delta(t)$ 则 $F_1(s)=F(s)-k$ 有常数项 $f(0_+)=\lim_{s\to\infty}s[F(s)-k]$

终值Th: $\lim_{t\to+\infty}f(t)$ 存在且 $s=0$ 在ROC内

*$\mathcal{L}$变换性质 线性 a_1+a_2

$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\overset{\mathcal{L}}{=}s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-\ldots-sf^{(n-2)}(0_-)-f^{(n-1)}(0_-)$

$\frac{df(t)}{dt}\overset{\mathcal{L}}{=}sF(s)-f(0_-)$；$\int_0^tf(\tau)d\tau\overset{\mathcal{L}}{=}\frac{F(s)}{s}$

$f(t-t_0)u(t-t_0)\overset{\mathcal{L}}{=}e^{-t_0s}F(s)$；$e^{-at}f(t)\overset{\mathcal{L}}{=}F(s+a)$

$tf(t)\overset{\mathcal{L}}{=}-\frac{dF(s)}{ds}$；$f(at-b)u(at-b)\overset{\mathcal{L}}{=}\frac{e^{-\frac{b}{a}s}}{a}F(\frac{s}{a})$

$F_1(s)F_2(s)\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow}f_1(t)*f_2(t)=\int_0^tf_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$f(t)=f(t+T)=f_1(t)\overset{\mathcal{L}}{=}\frac{1}{1-e^{-sT}}F_1(s)$ $F_1(s)=\int_0^Tf(t)e^{-st}dt$

*仅 $x(t)=Xe^{st}$ 时才可 $y_{ss}(t)=H(s)x(t)$

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_ms^m+\ldots b_0}{a_ns^n+\ldots a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$ 零点 (x_n) 极点 $(y系数)$ (m<n) 有理真分式

*$\mathcal{L}^{-1}$ 逆变换: 1° 单实根 $K_i=(s-p_i)F(s)|_{s=p_i}$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}\sum_{i=1}^{n}K_ie^{p_it}$

2° 共轭复根同理 $K_1=\frac{F(\alpha+j\beta)}{2j\beta}$, $K_1=K_2^*$, $2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\angle K_1)$

3° r重根 $p_1=\ldots=p_r$ $K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}[(s-p_1)^rF(s)]|_{s=p_1}$ i=1~r

ROC为最右极点向右区域

2 特殊: 1° 非真分式 长除法化简 e.g. $\frac{\ldots}{s+2}$ 真分式；2° 含 e^{-as} 非有理式 分离，先求$\mathcal{L}^{-1}$ 再时移 $t\Rightarrow t-a$

*用 $H(s)$ 可求0状态 即 y_{zs} 若求完全响应?

$y''+y'+y=x$ "=" 两边都 $\mathcal{L}$ 其中 y'', y' 用 $f^{(n)}(t)=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-1-r}f^{(r)}(0_-)$

反解 $Y(s)=?$ 含 $y(0_-)$ & $y'(0_-)$ 为 y_{zi}，其余为 y_{zs}

e.g. $y''+3y'+2y=2e^{-3t}u(t)$ ↓ $s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+3[sY(s)-y(0_-)]+2Y(s)=\frac{2}{s+3}$

代入值(便于) $Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+3y(0_-)}{s^2+3s+2}}_{y_{zi}}+\underbrace{\frac{2}{(s+3)(s^2+3s+2)}}_{y_{zs}}$

BIBO: $H(s)$ 极点全左半面(不含虚轴) ROC含↗ $s=j\omega$ $\mathcal{F}\{\ldots\}$

可逆: $H_i(s)=\frac{1}{H(s)}$ 零点也要↗

Z变换: 1° $k_i=(z-q_i)\frac{F(z)}{z}|_{z=q_i}$ $k_iq_i^nu[n]$

2° $\frac{F(z)}{z}=\frac{k_i}{z-q_i}+\frac{k_i^*}{z-q_i^*}+\ldots$ $f[n]=2|k_i||q_i|^n\cos(\angle q_in+\angle k_i)u[n]$

3° $\frac{F(z)}{z}=\frac{k_{11}}{(z-q_1)^r}+\ldots+\frac{k_{1r}}{z-q_1}$ $k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-q_1)^r\frac{F(z)}{z}]|_{z=q_1}$ i=1~r

$\frac{1}{(r-1)!}n(n-1)\ldots(n-r+2)a^{n-r+1}u[n]$ ⇌ $\frac{z}{(z-a)^r}$

Z: BIBO ✓: $|a|<|z|$ ✗: $k\,a<|z|$ 极点在单位圆内

$Z\{nf[n]\}$: $F(z)$ 对 z 求导再 $\times z^{-1}$ $=-z\frac{dF(z)}{dz}$

平方可积 ≠ 绝对可积 $(e^{-t}u(t)$, $\mathrm{sinc}(t))$

能量信号 $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$

功率信号 $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt<\infty$ $(u(t),\mathrm{sgn}(t))$ ← 不满足Dirichlet Th.

∴ 引入 $\delta(\omega-\omega_0)$ 频域冲激

Chapter6.5 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{sinc}\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)$ $X_p(\omega)=X_s(\omega)H(\omega)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-jnT_s\omega}$ $\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega}$ $e^{-j\frac{\omega}{2}T_s}T_s\mathrm{sinc}(\frac{\pi\omega}{\omega_s})$

Chapter11 Z变换性质. 1. 线性 $af_1[n]+bf_2[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}aF_1(z)+bF_2(z)$

3. 时移 $f[n+n_0]\overset{Z}{\to}z^{n_0}F(z)-z^{n_0}\sum_{m=0}^{n_0-1}f[m]z^{-m}$

$f[n-n_0]\overset{Z}{\to}z^{-n_0}F(z)+z^{-n_0}\sum_{m=-n_0}^{-1}f[m]z^{-m}$

$f[n-n_0]u[n-n_0]=z^{-n_0}F(z)$

求完全响应 = 2边 Z变换 用到 y_{zi}

4. $g[n]=\begin{cases}f[\frac{n}{k}], & n=km\\ 0, & n\ne km\end{cases}\overset{Z}{\to}F(z^k)$

5. $x_1[n]*x_2[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}X_1(z)\cdot X_2(z)$

6. $f[0]=\lim_{z\to\infty}F(z)$；$f[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)$

$f[1]=\lim_{z\to\infty}z[F(z)-f[0]]$ ROC含单位圆

7. $\sum_{k=0}^{n}f[k]\overset{Z}{\leftrightarrow}\frac{z}{z-1}F(z)$

Chapter5: 非周期 "傅里叶变换" (Dirichlet条件)

$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=F(\omega)$ $\mathcal{F}\{f(t)\}$ / $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$

$F(-\omega)=(F(\omega))^*$ $|F(\omega)|\sim\omega$ 偶 $\angle F(\omega)\sim\omega$ 奇函数

*Fourier变换对.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)=u(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

k — $2\pi\delta(\omega)\cdot k$

$\mathrm{sgn}(t)$ — $\frac{2}{j\omega}$

$e^{j\omega_0t}$ — $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\delta_T(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_0\delta(\omega-k\omega_0)$

$e^{-a|t|}$, $\mathrm{Re}(a)>0\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(t-nT_0)$ — $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_0G(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$, $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{jk\omega_0t}$ — $2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\delta(\omega-n\omega_0)$

$\cos(\omega_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{2}(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$\sin(\omega_0t)u(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{2j}(\ldots-\ldots)+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$

$\mathrm{rect}(t/T)\cdot\cos(\omega_0t)\leftrightarrow\frac{T}{2}[\mathrm{sinc}\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}+\mathrm{sinc}\frac{(\omega+\omega_0)T}{2}]$

$\frac{\beta}{\pi}\mathrm{sinc}(\beta t)$ — $\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\beta})$

$\mathrm{tri}(t/T)$ — $T\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega T}{2})$

$\mathrm{sinc}^2(\frac{Tt}{2})$ — $\frac{2\pi}{T}\mathrm{tri}(\frac{\omega}{T})$

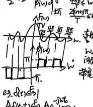
$e^{-at}u(t)$ Re(a)>0 — $\frac{1}{a+j\omega}$

$te^{-at}u(t)$ Re(a)>0 — $\frac{1}{(a+j\omega)^2}$

$t^{n-1}e^{-at}u(t)$ Re(a)>0 — $\frac{(n-1)!}{(a+j\omega)^n}$

e.g. $f(t)=V\mathrm{rect}(t/\tau)$ → $F(\omega)=\tau V\mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$

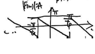
$\phi(\omega)=\begin{cases}0 & \frac{4n\pi}{\tau}\le\omega\le\frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\\ \pm\pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\le\omega\le\frac{2(2n+2)\pi}{\tau}\end{cases}$ n=0,1,2…



连续频谱 $\omega_0\downarrow$ $\frac{2\pi}{T_0}$ 间隔 密到 lim. 带宽 $B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ 第1过零点

e.g. $\delta(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}1$

$A\delta(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}Ae^{-j\omega t_0}$ $\phi(\omega)=-\omega t_0$ $|F(\omega)|=A$



*F变换性质:

$af_1(t)+bf_2(t)$ — $aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$

$f(t-t_0)$ — $F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$f(-t)$ — $F(-\omega)$

$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

$f(at-t_0)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\omega\frac{t_0}{a}}$

$F(t)$ — $2\pi f(-\omega)$

$f(t)e^{j\omega_0t}$ — $F(\omega-\omega_0)$

$f_1(t)*f_2(t)$ — $F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

$f_1(t)\cdot f_2(t)$ — $\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ — $\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$ — $(j\omega)^nF(\omega)$

$(-jt)^nf(t)$ — $\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}$

$f(t)$实数 — $F(-\omega)=F^*(\omega)$

$\mathrm{sgn}(t)$ $2\delta(t)$ $\frac{2}{j\omega}$

*e.g. $x(t)=\mathrm{rect}(t+T_0/\tau)+\mathrm{rect}(t/\tau)+\mathrm{rect}(t-T_0/\tau)$ $X(\omega)=\tau\mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})(e^{j\omega T_0}+1+e^{-j\omega T_0})$ 即 $1+2\cos(\omega T_0)$

*e.g. $f(\omega)=A\mathrm{rect}(\omega/2\beta)$ $\begin{cases}V=A\\ \tau=2\beta\end{cases}$ $F(t)=\frac{A\beta}{\pi}\mathrm{sinc}(\beta t)$

*e.g. $f(t)\cos\omega_0t\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$

*$\frac{df(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}G(\omega)\to F(\omega)=\frac{G(\omega)}{j\omega}+\pi(f(\infty)+f(-\infty))\delta(\omega)$

奇对称&时限信号 $=0$

$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$ 即 $H(s)|_{s=j\omega}$

"幅×相加" Bode图 $20\lg|H(\omega)|$ $\lg\omega$

长除法 ... 也可试因果性.

$H(\omega)=\frac{\sum\ldots}{\sum\ldots}$ $r\le k$

长除法 $F(z)=\ldots+f[1]z^{-1}\ldots$ 可得任意项 无需求式