自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿

密　封　线

东　南　大　学　考　试　卷（A 卷）

课程代码 B07M4010　课程名称 复变函数　考试学期 22-23-1

适用专业 选学复变函数各专业　考试形式 闭卷　考试时长 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
批阅人							

一. 选择题 (4分× 5=20分)

1. 一个复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 向左平移1个单位，再向下平移 1 个单位后对应的复数为 $1-i$ ，则原复数是 ________.

$A.$ 2　$B.$ $1+\sqrt{3}i$　$C.$ $1-\sqrt{3}i$　$D.$ $\sqrt{3}+i$

2. 设 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则满足等式 $z^n=z$ 且大于1的最小正整数 n 为 ________.

$A.$ 3　$B.$ 4　$C.$ 2　$D.$ 5

3. 下列命题中正确的是 ________.

$A.$ $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\overline{\mathrm{Ln}z}=\mathrm{Ln}\overline{z}$.

$B.$ $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, α_1, $\alpha_2\in\mathbb{C}$, $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2}=z^{\alpha_1\alpha_2}$.

$C.$ $f(z)=e^{\overline{z}}$ 是 z 的解析函数.

$D.$ $w=z^2$ 是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的共形映射.

4. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n(z-i)^n$ 在 $z=1+2i$ 处收敛, 则该幂级数在 $z=1$ 处 __________.

$A.$ 绝对收敛　$B.$ 条件收敛　$C.$ 发散　$D.$ 敛散性不能确定

5. 设 $f(z)$在圆环域H: $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的洛朗展开式为: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$, C为 H内任意一条绕 z_0的正向简单闭曲线, 则 $\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z=$ __________.

$A.$ $2\pi iC_{-1}$　$B.$ $2\pi iC_1$　$C.$ $2\pi iC_2$　$D.$ $2\pi if'(z_0)$

二. 填空 (4分× 7=28分)

1. 设 $z=\frac{(3+i)(1-3i)}{2i}$, 则 $\mathrm{Im}z=$ __________________.

2. 方程 $|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$ 表示的曲线的直角坐标方程是 ____________________.

3. 设 $f(z)$是以调和函数 $v(x,y)=x+y$ 为虚部的解析函数, 且 $f(0)=0$, 则 $f(z)=$ __________________.

4. $\mathrm{Res}[z^2e^{-\frac{1}{z}},\ 0]=$ __________________.

5. $\displaystyle\int_C \frac{z}{\bar{z}}\mathrm{d}z=$ ___________, 其中 $C:\ |z|=2,\ \mathrm{Im}z\geq 0$, 取逆时针方向.

6. 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\xi|=2}\frac{\xi^2+\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$, 则 $f'(1+i)=$ ___________________.

7. z平面上的直线 $y=1$ 在映射 $w=z^2-z$ 下的像为 w 平面上的曲线 ___________________.

三. **1.** (6分) 解方程 $\sin z+i\cos z=4i$.

2. (8分) 讨论函数 $f(z)=x^3-y^3+2ix^2y^2$ 的可导性和解析性, 并求出 $f(z)$ 在可导点处的导数.

四. (16分) **1.** 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 分别在 $0<|z+i|<2$ 和 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{z^3(z-2)^4}{(1-\cos\pi z)^2}$ 在扩充复平面上的所有孤立奇点并判断其类型. 若是极点, 指出极点的级.

五. (16分) 计算积分

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\oint_C \frac{z^{10}}{(z^4+2)^2(z-2)^3}\mathrm{d}z$, 其中 C : $|z|=R>0$, $R\neq\sqrt[4]{2}$, 2, 取逆时针方向.

六. (6分) 设 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 上解析, 且在 $|z|=1$ 上, 有 $|f(z)-z|\leq|z|$, 试证: $|f'(\dfrac{1}{2})|\leq 8$.