

东南大学考试卷 (A 卷)

课程名称 概率论与数理统计 考试学期 21-22-2 得分

适用专业 全校 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ 表示标准正态分布的分布函数,

$\Phi(-1.65) = 0.05; \Phi(-1.96) = 0.025; \Phi(1) = 0.8413; \Phi(2) = 0.9772$

$T_n \sim t(n) \quad P(T_{24} \geq 2.064) = 0.025; P(T_{24} \geq 1.711) = 0.05;$

$P(T_{25} \geq 2.060) = 0.025; P(T_{25} \geq 1.708) = 0.05;$

$K_n \sim \chi^2(n) \quad P(K_{24} \geq 39.36) = 0.025; P(K_{24} \geq 12.40) = 0.975;$

$P(K_{25} \geq 40.65) = 0.025; P(K_{25} \geq 13.12) = 0.975;$

一、选择题(每题 2', 共 10')

1) 设 A,B 为两随机事件, 且 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 则下列说法正确的是 ()

- A) A 和 B 互不相容; B) $A \cup B$ 是必然事件;
C) $P(A) + P(B) = 1$; D) 以上三个选项均不正确。

2) 随机变量 X 服从自由度为 5 的 t 分布, $Y = X^2$, 则下列说法正确的是 ()

- A) $Y \sim \chi^2(5)$; B) $Y \sim \chi^2(4)$;
C) $Y \sim F(5, 1)$; D) $Y \sim F(1, 5)$ 。

3) 设 X 和 Y 是两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 和

$f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则下列说法不正确的是 ()

- A) $0.5f_1(x) + 0.5f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数;
B) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;
C) $1.5f_1(x) - 0.5f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数;
D) $0.5(F_1(x) + F_2(x))$ 必为某一随机变量的分布函数;

4) 设总体 X 的均值为 θ , X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值。

现需要检验 $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta \neq \theta_0$ 。若有两种拒接域 $S_1 = \{|\bar{X}| > 1\}$ 和 $S_2 = \{|\bar{X}| > 2\}$ 。

设基于这两种拒绝域的检验水平分别为 α_1 和 α_2 , 则以下结论正确的是 ()

- (A) $\alpha_1 \leq \alpha_2$; (B) $\alpha_1 \geq \alpha_2$;
(C) $\alpha_1 = \alpha_2$; (D) 不能确定 α_1 和 α_2 的大小关系。

5) 设总体 X 服从正态分布 $N(3,16)$, $X_1, X_2, \dots, 16$ 是来自该总体的样本, \bar{X}, S^2 分别表示样本均值和样本方差。下列结论中不正确的是 ()

(A) $\frac{15S^2}{16} \sim \chi^2(15)$;

(B) $cov(\bar{X}, S^2) = 0$;

(C) $\bar{X} - 3 \sim N(0,1)$

(D) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 。

二、填充题 (每空格 2', 共 26')

- 1) 设事件 A 和 B 相互独立, $P(A)=0.2$; $P(B)=0.4$, 则 $P(B|A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 2) 设一批产品的次品率为 0.2。从该批产品逐个抽取产品进行检测。则第四次检测首次检测出正品的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 3) 设随机变量 X 服从指数分布, 均值为 2, 则 $cov(X^2, X-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 4) 随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim N(2,5)$, $Y \sim N(2,1)$, 则 $P(X-2Y > -5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 5) 随机变量 X, Y 的联合分布律为: $P(X=1, Y=3)=0.3$; $P(X=2, Y=4)=0.3$;
 $P(X=1, Y=4)=0.2$; $P(X=2, Y=3)=0.2$ 。 则 $E \min(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 6) 若随机变量 X, Y 互不相关, $DX=2, DY=7$, 则 $3X-Y$ 和 $X+Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 7) 设随机变量序列 $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ 独立同分布于 $U[-1, 2]$ 。
 则 $\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) \xrightarrow{p} \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 8) 设总体 X 服从泊松分布 $P(2)$ 。 X_1, X_2, \dots, X_8 是来自该总体的样本, \bar{X} 表示样本均值, 则 $E(\bar{X} - 2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 9) 随机变量 X 的分布律为 $P(X=-2)=0.5$, $P(X=0)=0.2$, $P(X=2)=0.3$ 。 则其分布函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 10) 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 0.25 & -1 < x < 0 \\ 0.375 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $Y = |X|$ 的密度函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 11) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且 $X_1 \sim N(0,4), X_2 \sim N(0,4), X_3 \sim N(0,c), X_4 \sim N(0,c)$ 。 若 $\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2) + 2X_3^2 \sim \chi^2(3)$, 则常数 $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 12) 设某总体服从 $N(m, 4)$, 有来自该总体的容量为 16 的简单随机样本, 样本均值为 15, 基于该样本的 m 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 13) 设总体 X 的概率分布律为 $f(x, \theta) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2}, x=2, 3, \dots; 0 < \theta < 1$ 为未知参数。若 3, 2, 4, 5, 2, 6 是来自该总体的简单随机样本的观测值, 则 θ 的矩估计值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、(15') 设随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ax^2y & x^2 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数 a ; (2) X 的边缘密度函数; (3) 条件概率 $P(Y > 0.5 | X = 0.5)$ 。

四、(10') 设一盒子中有一个球，不知道其颜色是白色还是黑色（两种颜色等可能）。现在再往盒子中放入一个白球，然后从盒子中任意取出一球。(1) 求取出的球是白球的概率；(2) 若已知取出的球为白球，求原来盒子中的球是白球的概率。

五、(10') 设随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & x+y < 1, x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Z = \max(X, Y)$. 求随机变量 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

六、(9') 设某工厂仓库有一批零件，其中一等品占 60%，二等品占 20%，三等品占 20%。现从中任取 100 件零件进行检测，求检测出一等品的个数超过 68 件的概率。（用中心极限定理进行近似计算，并可使用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示相关概率）。

自觉遵守考场纪律

如考试作弊 此答卷无效

姓名

学号

线

号

密

七、(10')设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{5(x-\theta)} & x \leq \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta \text{ 为未知参数。 } X_1, \dots, X_n \text{ 为}$$

来自该总体的样本。(1)求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 。(2) $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计量, 说明理由。

八、(10')设总体 X 服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$, u 和 σ^2 未知。 现有来自该总体样本容量为 25 的样本, 其样本均值为 26, 样本方差为 16。 (1) 试检验 $H_0: u=24$, v.s. $H_1: u > 24$ (检验水平 $\alpha = 0.05$); (2) 求 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间。