22-23-1 复变函数期末试卷(A)答案

一. 1. C 2. B 3. A 4. D 5. B

二. 1. -3 2. $x^2+y^2/2=1$ 3. $(1+i)z$ 4. $-1/3!$ 5. $-4/3$ 6. $-4\pi+6\pi i$ 7. $u=v^2/4-5/4$

三. 1. 由正弦, 余弦函数的定义, 方程可化简为: $e^{-iz}=4$

故 $z=i\mathrm{Ln}(4)=2i\ln 2-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. $u(x,y)=x^3-y^3,\quad v(x,y)=2x^2y^2$

由C.-R.方程 $3x^2=4x^2y,\ -3y^2=-4xy^2$ 解得 $x=0,\ y=0$, 或 $x=3/4,\ y=3/4$.

从而 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 和 $z=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$ 可导, 但处处不解析.

由 $f'(z)=u_x+iv_x$, 得 $f'(0)=0,\quad f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{27}{16}(1+i)$.

四. 1. $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{1}{-2i}\dfrac{1}{z+i}\dfrac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}=-\dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{z+i}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z+i}{2i}\right)^n,\ 0<|z+i|<2.$

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}},\qquad 1<|z|<+\infty.$$

2. 由 $1-\cos\pi z=0$ 得 $z=2k\ (k\in\mathbb{Z})$

$\because (1-\cos\pi z)'|_{z=2k}=0,\ (1-\cos\pi z)''|_{z=2k}\neq 0$

$\therefore z=2k$ 是 $1-\cos\pi z$ 的二级零点, 从而是 $(1-\cos\pi z)^2$ 的四级零点.

$\therefore z=0$ 是 f 的一级极点, $z=2$是 f的可去奇点, $z=2k(k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0,1)$是 f的四级极点.

$\because z=2k\to\infty\ (k\to\infty)$, $\therefore z=\infty$ 不是孤立奇点

五. 1. 原积分 $=\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+10}e^{ix}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(2\pi i\mathrm{Res}\Big[\frac{z}{z^2-2z+10}e^{iz},\ 1+3i\Big]\right)$

$=\mathrm{Re}\left(\dfrac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3}(\cos 1+i\sin 1)\right)=\dfrac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$.

2. (1) $R<\sqrt[4]{2}$, 原积分 $=0$.

(2) $\sqrt[4]{2}<R<2$, 原积分 $=-2\pi i\Big(\mathrm{Res}[f,\infty]+\mathrm{Res}[f,2]\Big)$

$=-2\pi i\Big(-\mathrm{Res}[\dfrac{1}{z^2}f(\dfrac{1}{z}),0]+\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\Big[(z-2)^3\dfrac{z^{10}}{(z^4+2)^2(z-2)^3}\Big]\Big)=-2\pi i\Big(-1+\dfrac{1984}{2187}\Big)=\dfrac{406}{2187}\pi i.$

(3) $R>2$, 原积分 $=-2\pi i\mathrm{Res}[f,\infty]=2\pi i$.

六. 由Cauchy积分公式得 $f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-1/2)^2}\mathrm{d}z$.

$\because$ 在 $|z|=1$ 上, 有 $|f(z)|\leq|f(z)-z|+|z|\leq 2|z|=2;\qquad |z-1/2|\geq|z|-1/2=1/2$.

$\therefore |f'(1/2)|\leq\dfrac{1}{2\pi}\max\limits_{|z|=1}\dfrac{|f(z)|}{|z-1/2|^2}\times 2\pi\leq\dfrac{1}{2\pi}\times\dfrac{2}{(1/2)^2}\times 2\pi=8.$