

Práctico numérico

Jimmy Pachón Gómez

Universidad de Buenos Aires

1.Introducción.

En este trabajo estudiaremos numéricamente un sistema físico determinado. A lo largo del informe utilizaremos como herramientas ciertos conceptos y códigos de Python para mostrar algunas consecuencias que surgen de llevar a cabo este tipo de análisis. Las ecuaciones utilizadas son:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \approx \frac{1}{h^2} [\Psi_{n+1}(t) - 2\Psi_n(t) + \Psi_{n-1}(t)] \quad (2)$$

$$h = \frac{L}{N+1} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_n \approx \frac{1}{\tau^2} [\Psi_n(t + \tau) - 2\Psi_n(t) + \Psi_n(t - \tau)] \quad (5)$$

$$\Psi(t + \tau) \approx \left[2I - \frac{c^2 \tau^2}{h^2} B \right] \Psi(t) - \Psi(t - \tau) \quad (6)$$

$$\Psi_n(t + \tau) \approx 2(1 - \beta^2) \Psi_n(t) - \Psi_n(t - \tau) + \beta^2 [\Psi_{n+1}(t) + \Psi_{n-1}(t)] \quad (7)$$

También utilizaremos el concepto de aliasing espacial. Este fenómeno consiste en una distorsión causada por una mala elección de muestras al momento de intentar reconstruir una señal continua mediante métodos numéricos. La causa de estas distorsiones pueden ser ciertas frecuencias o múltiplos de ellas. Por eso, para minimizar este efecto, se utilizan diversas técnicas de anti-aliasing, como la utilización de ciertos filtros que eviten la aparición de frecuencias específicas.

Un ejemplo de aliasing espacial puede ser el patrón de moiré. Este patrón de interferencia surge como consecuencia de ciertas selecciones de muestras. Además, es posible observar el aliasing en reconstrucciones digitales.

Por otro lado, se utilizará el algoritmo de Verlet, definiendo este como un procedimiento para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con valores iniciales conocidos. Este método se utiliza con frecuencia para calcular trayectorias de partículas en simulaciones de dinámica molecular y gráficos por computadora.

Finalmente, trabajaremos con el número de Courant y la siguiente condición para el mismo:

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Donde C es el número de Courant, u es la velocidad de propagación y Δt y Δx son intervalos de tiempo y espacio respectivamente.

Esta condición surge al momento de realizar un análisis de estabilidad para esquemas explícitos a partir de la teoría de las características para soluciones continuas. Para que dichos esquemas resulten estables deben cumplir la condición de Courant.

2.Método experimental

El sistema físico estudiado es una cuerda homogénea (de densidad lineal constante), elástica, perfectamente tensada, de longitud L y fija en su extremo $x=0$. Consideramos que la misma se desplaza de manera transversal, alejándose poco del eje x y que tanto el rozamiento como los efectos de la gravedad son despreciables.

El contorno correspondiente a $x=L$ puede estar fijo o libre, con esta última opción nos referimos al caso en que se mueve sobre una corredera.

Para abordar numéricamente el problema, planteamos un caso discreto, en el que consideramos a la longitud L de la cuerda descompuesta en N subintervalos (o puntos) iguales y equidistantes. La ecuación (3) determina el valor de la distancia entre intervalos que llamamos h.

3.Resultados

El procedimiento mediante el cual se llegó a los resultados se encuentra detallado en el apéndice, este espacio está pensado para presentar y discutir muy brevemente los resultados finales. Por simplicidad se tomará una cuerda de longitud $L=1\text{m}$ y una velocidad de fase $c=1\text{m/s}$.

3.1. Ítem a.

En este ítem se tendrá en cuenta que el número de partes móviles es de 10 con el fin de simplificar. En la tabla 1 se presenta una tabla con las frecuencias angulares de los modos en los casos de extremo cerrado y extremo abierto.

N° de modo	W extremo cerrado (Hz)	W extremo abierto (Hz)
1	3.13092644	1.64406206
2	6.19811625	4.89546055
3	9.13913029	8.03750254
4	11.89409798	11.0
5	14.40693615	13.71677564
6	16.62649064	16.12714118
7	18.50757772	18.17725303
8	20.0119039	19.82131509
9	21.10884542	21.02260173
10	21.77607172	21.75427818

Tabla 1. Frecuencias angulares de los modos para las diferentes condiciones de contorno.

Así mismo podría hacerse con un número arbitrario de partes móviles, cuanto más grande sea el número de masas, mejor será la aproximación a la cuerda continua. De manera similar se presenta una tabla con las longitudes de onda en la tabla 2.

N° de modo	λ Extremo cerrado(m ⁻¹)	λ Extremo abierto(m ⁻¹)
10	0.28853621	0.28882527
9	0.29765651	0.29887763

8	0.31397239	0.31699134
7	0.33949258	0.34566198
6	0.37790207	0.38960317
5	0.43612224	0.45806576
4	0.52826077	0.57119866
3	0.68750364	0.78173354
2	1.01372499	1.28347175
1	2.00681345	3.82174461

Tabla 2. Longitudes de onda de los modos para las diferentes condiciones de contorno.

3.2. Ítem b.

Se estudió la dependencia de la longitud de onda mínima en función de la longitud de separación de partes móviles h , con el fin de ilustrar los resultados utilizamos un gráfico para cada condición de contorno que se pueden apreciar en la figura 1; en cada uno de los gráficos se compara con la recta $\pi \cdot h$ y se comprueba que a mayor número de masas(menor distancia h) mejor es la aproximación $\lambda = \pi \cdot h$.

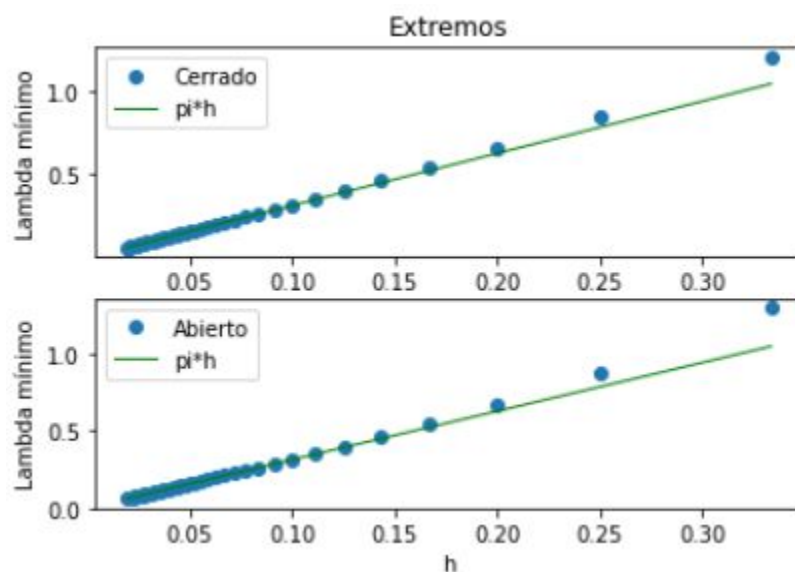


Figura 1. Gráfico de Lambda mínimo en función de la separación h de 1 a 50 partes móviles, se realiza una comparación con la función $\pi \cdot h$.

Se tiene que para una cuerda continua con extremos cerrados la longitud de onda está dada por la ecuación:

$$\lambda = \frac{2L}{m}$$

Donde m es el número de modo y por lo tanto la longitud de onda mínima es la longitud de onda en la cual m es máximo; como el número de modos es igual al número de partes móviles del sistema, el mayor m que se puede tomar es N el número de masas:

$$\lambda_{min} = \frac{2L}{N}$$

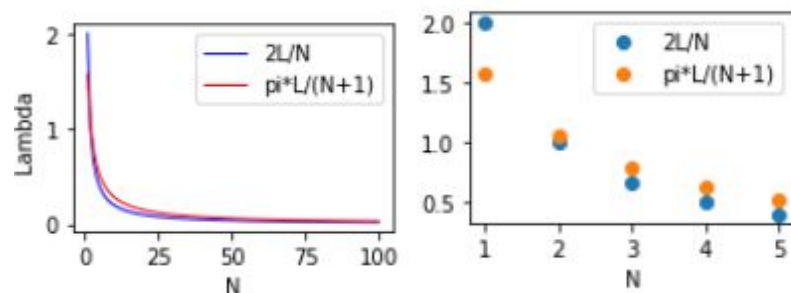


Figura 2. Gráficos que representan la longitud de onda mínima en función del número de masas. A la izquierda se tiene en cuenta los valores N de 1 hasta 100, mientras a la derecha se toman sólo los valores de 1 a 5; en cada caso se comparan con $\lambda = \pi \cdot h$.

Cualitativamente se puede ver en la figura 2 que para valores de N muy grandes el factor π no altera mucho el resultado, ya que el factor $1/(N+1)$ tiene un mayor “peso” y por lo tanto contribuye más al resultado. Ahora queda discutir si :

$$\frac{2}{N} \approx \frac{\pi}{N+1}$$

Se puede notar que cada expresión tiende a 0 en el límite cuando N tiende a infinito; su diferencia de la misma forma lo hará y se concluye que cuanto mayor sea el número de masas, mejor será la aproximación $\lambda \approx \pi h$.

3.3. Ítem c.

Se obtuvieron las listas de las correspondientes longitudes de onda para N=2,3,5,7,11 las cuales se presentan a continuación como λ_n , con n el número de partes móviles:

$$\lambda_2 = [1.20919958, 2.0943951]$$

$\lambda_3=[0.85010885, 1.11072073, 2.05234431]$

$\lambda_5=[0.54206934, 0.60459979, 0.74048049, 1.04719755, 2.02303032]$

$\lambda_7=[0.40039251, 0.42505442, 0.47229517, 0.55536037, 0.70683967, 1.02617215, 2.01290909]$

$\lambda_{11}=[0.26405844, 0.27103467, 0.28336962, 0.30229989, 0.32999091, 0.37024024, 0.43005252, 0.52359878, 0.68411477, 1.01151516, 2.00572302]$

Utilizando la notación habitual para las posiciones de las listas se puede concluir con ayuda de python que:

$\lambda_2[0]=2\lambda_5[1] \quad \lambda_2[1]=2\lambda_5[3] \quad \lambda_2[0]=4\lambda_{11}[3] \quad \lambda_2[1]=4\lambda_{11}[7] \quad \lambda_3[0]=2\lambda_7[1]$

$\lambda_3[1]=2\lambda_7[3] \quad \lambda_3[2]=2\lambda_7[5] \quad \lambda_3[0]=3\lambda_{11}[2] \quad \lambda_3[1]=3\lambda_{11}[5] \quad \lambda_3[2]=3\lambda_{11}[8]$

Estos resultados permiten observar que para cada N se obtendrán reconstrucciones distintas del sistema, algunas de las cuales pueden presentar distorsiones como consecuencia de ciertas frecuencias o múltiplos de las mismas (aliasing espacial). En un intento de mostrar esta situación, presentamos la figura 3.

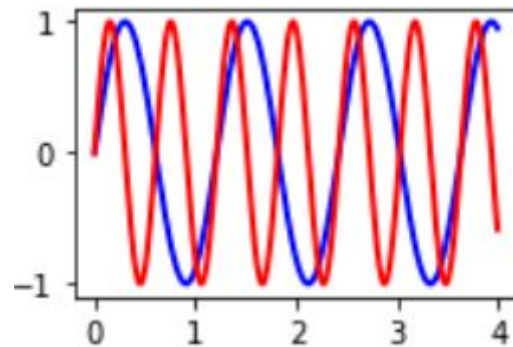


Figura 3. Comparación de dos sinusoidales con diferente longitud de onda, la azul corresponde a $\lambda_2[0]$ y la roja a $\lambda_5[1]$.

3.4. Ítem d.

Trabajamos bajo la aproximación $\psi() \approx \psi(0)$, la cual supone que la aceleración es despreciable.

Esto puede observarse al realizar una expansión de Taylor:

$$\psi(t) = \psi(0) + \dot{\psi}(0) \tau + \psi''(0) \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Al asumir una aceleración despreciable, suponemos que la sumatoria de fuerzas total es cero, es decir, que todas las fuerzas se encuentran equilibradas, lo cual no es cierto ya que la tensión de la cuerda no se encuentra compensada por ningún otro tipo de fuerza externa.

Utilizamos códigos para realizar una simulación de la evolución del sistema para cinco masas equidistantes y un período de tiempo $0 < t \leq 10$. La animación se encuentra propiamente en el código de python adjunta al trabajo.

Finalmente, nos centramos en los desplazamientos de la masa ubicada en el centro de la cuerda y observamos que la amplitud de la envolvente varía para cada valor de c , volviéndose más inestable a medida que esta variable aumenta, la animación al igual que antes está en el archivo python.

Sólo cabe aquí una pequeña discusión, cuanto mayor sea la velocidad de fase del sistema, más inestable se comporta la aproximación; tanto en la animación 1 como en la animación 2 se puede notar el comportamiento errático para $c=3.46$, mientras para $c=1.0$ tiene un movimiento estable.

4.Conclusiones.

A medida que fuimos obteniendo los resultados para cada ítem observamos las consecuencias de realizar ciertas aproximaciones y la necesidad de utilizar algunas ellas para así lograr una buena reproducción del sistema estudiado mediante un análisis numérico.

En los primeros dos ítems (a y b) utilizamos aproximaciones y códigos de Python para obtener valores que nos permitieran definir el comportamiento del sistema (calculamos frecuencias y longitudes de onda) y una vez obtenidos dedujimos que existían ciertos límites a partir de los cuales nuestra aproximación se alejaba notoriamente del tipo de desplazamiento esperado.

Si nos detenemos en los resultados obtenidos para el ítem c vemos que al comparar las longitudes de onda obtenidas para cada N , es posible encontrar múltiplos que corresponden a modos distintos. En este sentido, al momento de reconstruir el fenómeno original teniendo en cuenta los modos obtenidos para cada cantidad de partes móviles, observamos que si comparamos cada caso obtendríamos una serie de reconstrucciones que pueden llegar a ser similares pero no idénticas, por lo que no es posible definir longitudes de onda únicas (cada N reconstruye una señal distinta).

Llegamos a la conclusión de que cuando estudiamos puntos equidistantes se dificulta obtener con exactitud la señal original, ya que dependiendo de las muestras utilizadas es posible acabar construyendo toda una serie de

señales que presentan distorsiones. Estas distorsiones son las que en la introducción definimos como aliasing espacial (la figura 3 intenta mostrar este efecto mediante la superposición de dos sinusoidales de frecuencia distinta que corresponden a N distintos).

Por otro lado, en el ítem d, luego de analizar los gráficos para ψ_3 a lo largo del tiempo vemos que la amplitud de la envolvente comienza a inestabilizarse a partir de ciertos valores de c (a medida que esta variable aumenta, la inestabilidad se hace más evidente). La condición de Courant presentada en la introducción (y cuya deducción puede leerse en el apéndice) determina un rango de valores para los cuales no se observan estas inestabilidades (cuyo origen se debe a las aproximaciones realizadas al momento de resolver numéricamente la reconstrucción del sistema).

Como conclusión final podemos decir que al realizar un análisis numérico de un sistema continuo resulta extremadamente útil la capacidad de los ordenadores para la resolución de ecuaciones pero que, sin embargo, el uso de estas herramientas nos otorga información que, a su vez, requiere de un estudio cuidadoso y la implementación de ciertas aproximaciones que eliminen o atenúen anomalías, ya que de lo contrario podríamos acabar reproduciendo un sistema completamente diferente al que queríamos reconstruir.

APÉNDICE

En esta sección se explicará el procedimiento utilizado para llegar a los resultados exhibidos en el apartado correspondiente, apoyados de razonamientos analíticos pero sobretudo de métodos numéricos utilizando las herramientas que ofrece python. Se incluyen también algunas deducciones pedidas en ciertos ítems.

Para empezar definimos tres variables c, L, N que son la velocidad de fase, la longitud de la cuerda y el número de partes móviles respectivamente; inmediatamente se definió otra variable h utilizada para representar la distancia entre partículas. A todos estos parámetros se les asignó, en principio, un valor fijo; sin embargo el valor de N se cambiaba dependiendo de nuestras necesidades.

Se definen dos funciones que van de un número entero n a una matriz $n \times n$, la función $B(n)$ toma determinado número de masas y regresa la matriz característica del sistema para el caso de extremos cerrados, análogamente la matriz $C(n)$ toma un entero y devuelve la matriz asociada al caso de

extremo derecho libre. El código utilizado para tal fin se puede observar en el archivo de python adjunto a la entrega del trabajo.

Para optimizar código se crearon otras dos funciones, dada una matriz y un entero se pueden obtener las frecuencias angulares y las longitudes de onda modales. La función W(X,Y) se encarga de hacer el primer trabajo mediante el siguiente código:

```
def W(X,Y):  
  
    mu, v = la.eig(X)  
  
    w=np.zeros(Y)  
  
    for i in range(0,Y):  
  
        w[i]=(c*(Y+1)/L)*math.sqrt(mu[i])  
  
    return w
```

La función la.eig(X) toma una matriz y halla sus autovalores y autovectores,teniendo esos autovalores fácilmente se pueden hallar las frecuencias angulares mediante la expresión analítica:

$$w = \frac{c(N+1)\sqrt{\mu}}{L}$$

Con las frecuencias angulares es fácil hallar las longitudes de onda, usando de nuevo otra expresión analítica que las relacione:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{w}$$

Como las longitudes de onda se utilizarían frecuentemente a lo largo del trabajo, se creó una nueva función que dada una matriz y el número de masas nos daría una lista con las longitudes de onda del sistema. El nombre de esta función es Lam(X,Y) y su código es:

```
def Lam(X,Y):  
  
    w=W(X,Y)  
  
    lamb=np.zeros(Y)  
  
    for i in range(0,Y):
```

```

    lamb[i]=(math.pi)*2*c)/w[i]

    return lamb

```

Los resultados que se exhibieron salen de aplicar las funciones dependiendo de lo que se pida, si era necesario ordenar las frecuencias angulares se podía usar la función `np.sort` de la librería `numpy`. Con todo esto ya se podían obtener las respuestas para el ítem a, introduciendo las matrices B y C junto con el valor N en cada función, recordando que B y C también son funciones que dependen de N.

El **ítem b** no tiene mucho misterio, simplemente se creó una lista con los valores mínimos de lambda y se graficó en función de h usando la librería `matplotlib`, el código utilizado para construir la lista con los lambda mínimos es el siguiente:

```

min_lamb=np.zeros(N-1)

for i in range(2,N+1):

    min_lamb[i-2]=min(Lam(B(i),i))

```

Por otro lado, en este mismo ítem, para demostrar que solo es posible obtener desplazamientos ψ oscilantes en un rango acotado de autovalores μ^2 utilizamos la siguiente relación de recurrencia que se deduce de la ecuación (2):

$$\psi_{n+1} = (2 - \mu^2) \cdot \psi_n - \psi_{n-1}$$

Consideramos soluciones de la forma r^n , donde r es una solución que representa una oscilación espacial en un modo normal ($r = e^{ikx} = e^{iknh}$). Reemplazando en la relación de recurrencia, igualando a cero, sacando r^n de factor común y multiplicando por r se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$0 = r^2 - (2 - \mu^2) \cdot r - 1$$

Resolviendo, llegamos a soluciones del tipo:

$$r = \frac{2 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Como r es un número complejo, las soluciones de la ecuación cuadrática deben ser complejas. De esta manera, buscando un discriminante negativo, obtenemos finalmente un valor máximo para μ^2 :

$$\mu^2 \leq 4$$

El rango de autovalores μ^2 para obtener oscilaciones está acotado y su valor máximo es 4.

En el **ítem c** creamos las listas de longitudes de onda particulares para los casos $N=2,3,5,7,11$. Luego comparamos cada valor de las dos primeras listas con todos los valores de las últimas tres y hallamos las posiciones para las cuales los cocientes dan un número entero.

En el **ítem d**, usamos la librería `matplotlib.animation` que nos permite realizar distintos tipos de animaciones; la primera animación consiste en la simulación de la cuerda para cinco masas, mientras la segunda animación consiste en el trazo de una gráfica del desplazamiento en función del tiempo. Utilizando una función que actualiza la imagen que se muestra en pantalla y el método `animation.FuncAnimation` se logra el efecto de movimiento.

Por último, para realizar la deducción pedida de la condición de Courant, realizamos un procedimiento similar al del ítem b, esta vez proponiendo

soluciones oscilantes en el tiempo de la forma $\psi_n(t + \tau) = r^{t+\tau}$ donde $r = e^{-i\omega n}$. Reemplazando estas soluciones en la ecuación (7), igualando a cero, sacando r^t de factor común y escribiendo $\psi_{n+1} + \psi_{n-1}$ como dos veces un coseno que tiene a h en su argumento (ya que suponemos que la solución también es oscilante en forma espacial), llegamos a:

$$0 = 2(1 - \beta^2)r^{t+\tau} - 1 + 2\beta^2 \cos(\alpha h) r^{t+\tau} - r^{2t+\tau}$$

Si realizamos un cambio de variable de manera que ahora $g = r^{t+\tau}$ y $\gamma = 1 - 2\beta^2 \cos(\frac{\alpha h}{2})$, escribimos la ecuación cuadrática:

$$0 = g^2 - 2\gamma g + 1$$

Las soluciones de esta ecuación serán de la forma $g = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$.

Al igual que antes, como r es un número complejo, las soluciones para g también deberían ser complejas, de esta manera, pedimos que el módulo de γ sea menor a 1 y obtenemos finalmente la condición de Courant:

$$\beta^2 \leq 1$$