FT 公式 3.5.1

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

对称性 对偶性 3.5.2: Duality of FT

对称性质

$$f(t)\xleftrightarrow{\mathscr{FT}}F(\omega)$$

$$F(t)\xleftrightarrow{\mathscr{FT}}2\pi f(-\omega)$$

形式对称

① $$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

② $$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

FT特征函数

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right]=Af(\omega)$$

① $$f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\xleftrightarrow{\mathscr{FT}}F(\omega)=\sqrt{\pi}E\tau\cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

② $$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)\xleftrightarrow{\mathscr{FT}}S(\omega)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$$

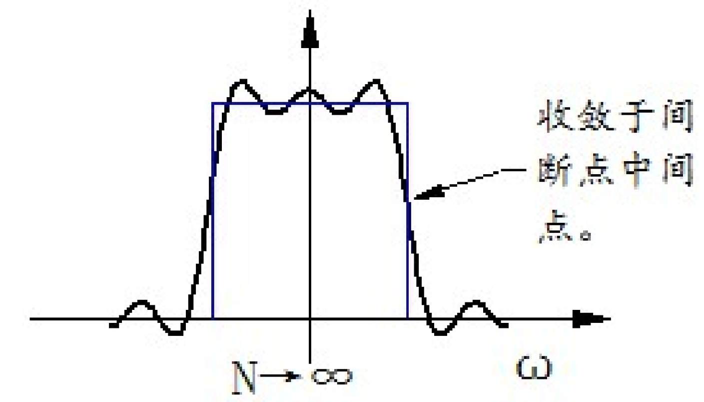
变换存存在条件

- □ **能量条件** $\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f(t)\right\|^2dt<+\infty$
- □ **波形条件**(Dirichlet条件)

① 绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$

② 极值点个数有限

③ 间断点有限



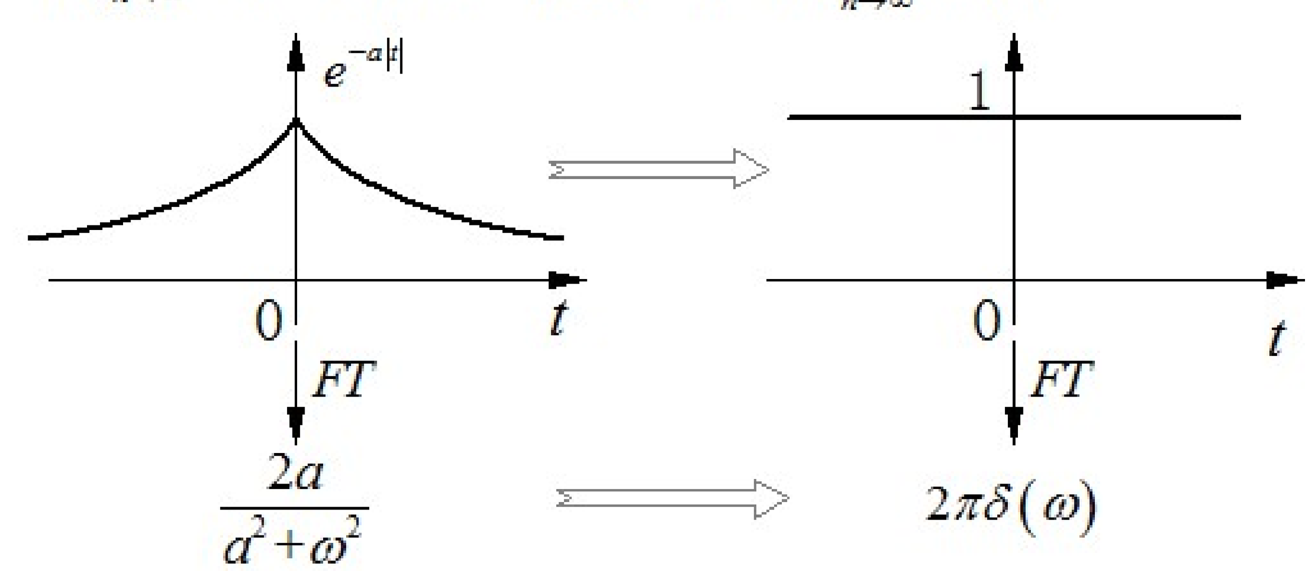
- □ **广义傅里叶变换**

函数序列 $\{f_n(t)\}$ $f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$

$f_n(t)$满足面积可积。

$$f_n(t)\xleftrightarrow{\mathscr{FT}}F_n(\omega)$$

且 $\lim_{n\to\infty}F_n(\omega)$ 存在，定义 $F(\omega)=\lim_{n\to\infty}F_n(\omega)$



结论 Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

FT推导过程

Derivation of Fourier Transform

注释：

■ 傅里叶变换公式

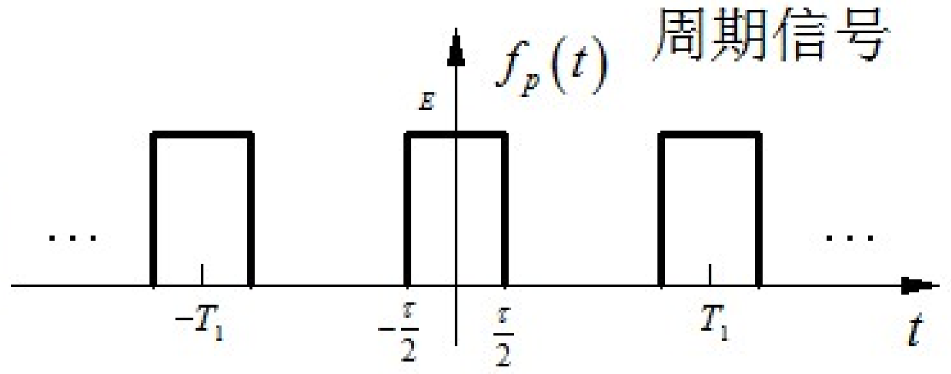
FT $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

FT⁻¹ $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

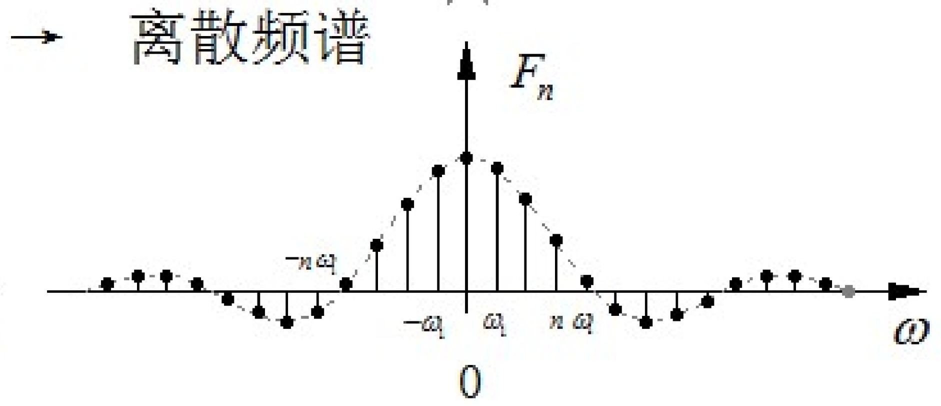
① 函数在-∞～∞上满足绝对可积；
② 函数在任意有限区间中的最大最小值个数有限；
③ 函数在任意有限区间中的不连续点的个数有限；

傅里叶变换存在的条件

周期信号



周期信号 → 离散频谱

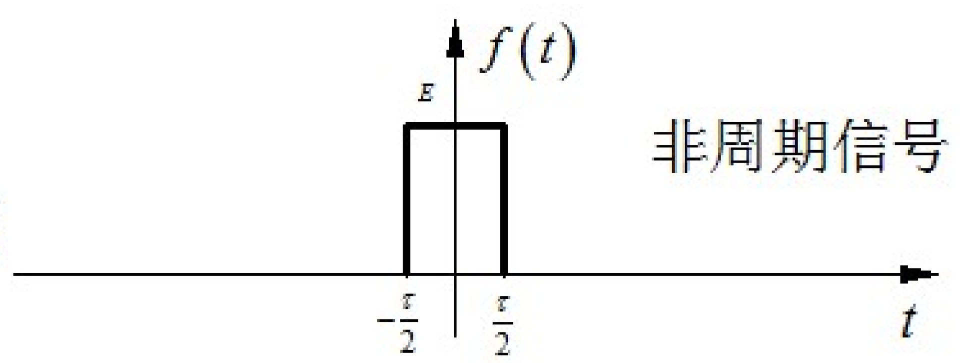


T_1

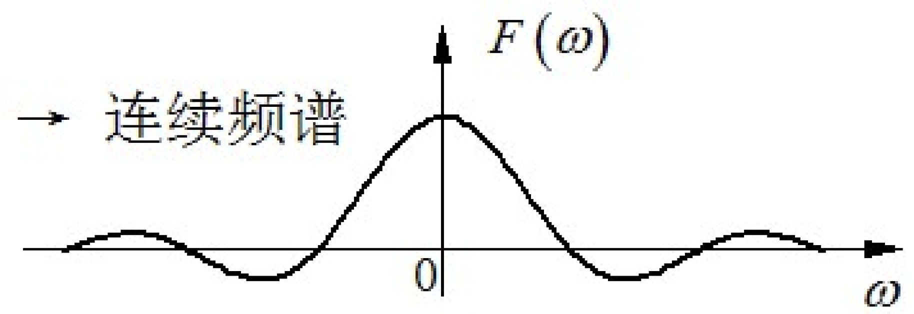
$\downarrow$

∞

非周期信号



非周期信号 → 连续频谱



$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \Longrightarrow f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}\Delta(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$

$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}dt$

$\omega_1 \to 0$, $\sum \to \int_{-\infty}^{\infty}$, $\to 2\pi F(\omega)$, $\to d\omega$, $\to e^{j\omega t}$

$$\boxed{f(t)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

FT 反变换公式

$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}\to 0$ 频谱间隔

$n\omega_1$ 离散 ⟶ ω 连续

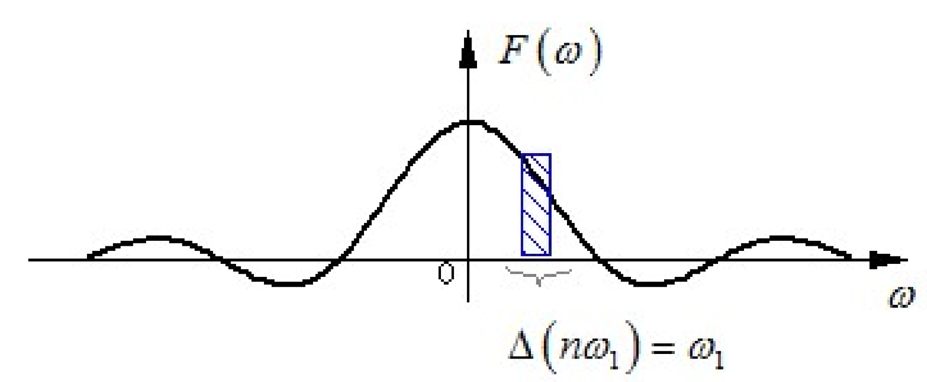
频谱幅度

$F(n\omega_1)\to 0$ $\quad T_1\cdot F(n\omega_1) \longrightarrow =\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$\frac{0}{0}=\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}=\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$

FT 正变换公式

$\frac{\text{频谱}}{\text{频率间隔}}$ = 频谱密度函数 简称频谱函数



① $F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

幅度谱 $|F(\omega)|$ 偶函数

相位谱 $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ 奇函数

如果 $f(t)$ 为实数函数

$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt=F^*(\omega)=|F(-\omega)|e^{-j\varphi(-\omega)}$

② $F(j\omega)$, $F(\omega)$

系统频率特性函数 $F(s)|_{s=j\omega}$

实变量反应信号频谱密度函数

● **结论** Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

FT证明过程

Provingof Fourier Transform.

注释：

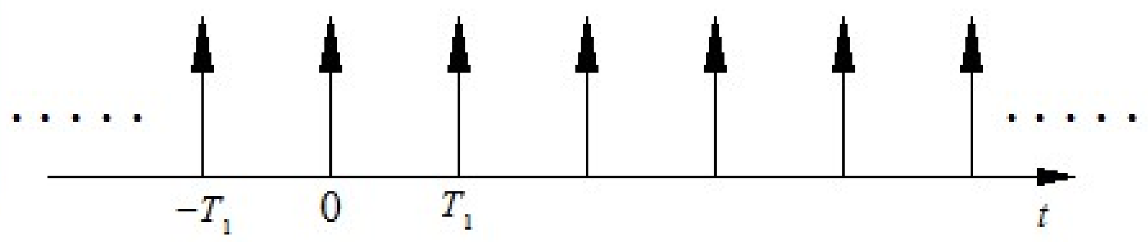
内容 Contents：直接证明Fourier Transformation 的变换公式。

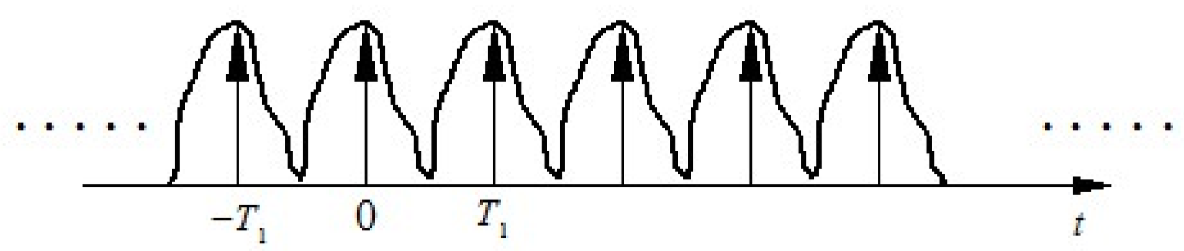
重点 Key Points：掌握其中的证明过程与技巧。

● 郑君里：信号与系统

2-22：（3） $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_T(t - nT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} e^{jk\omega_1 t}$$





$$f_{T_1}(t) = f_1(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{T_1}(t - nT_1) \right)$$

$$= f_1(t) * \left(\frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \right)$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f_1(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 (t-\tau)} d\tau$$

$$= \boxed{\frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_1} f_1(\tau) e^{-jk\omega_1 \tau} d\tau} \cdot e^{jk\omega_1 t}$$

傅里叶级数分解

$$\boxed{F_n = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t}}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_1 t}}$$

$$2\pi\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt$$

$$f(t) = f(t) * \delta(t)$$

$$= f(t) * \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(t) * \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} \right\} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F(\omega)} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega}$$

● **结论** Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

FT对称性

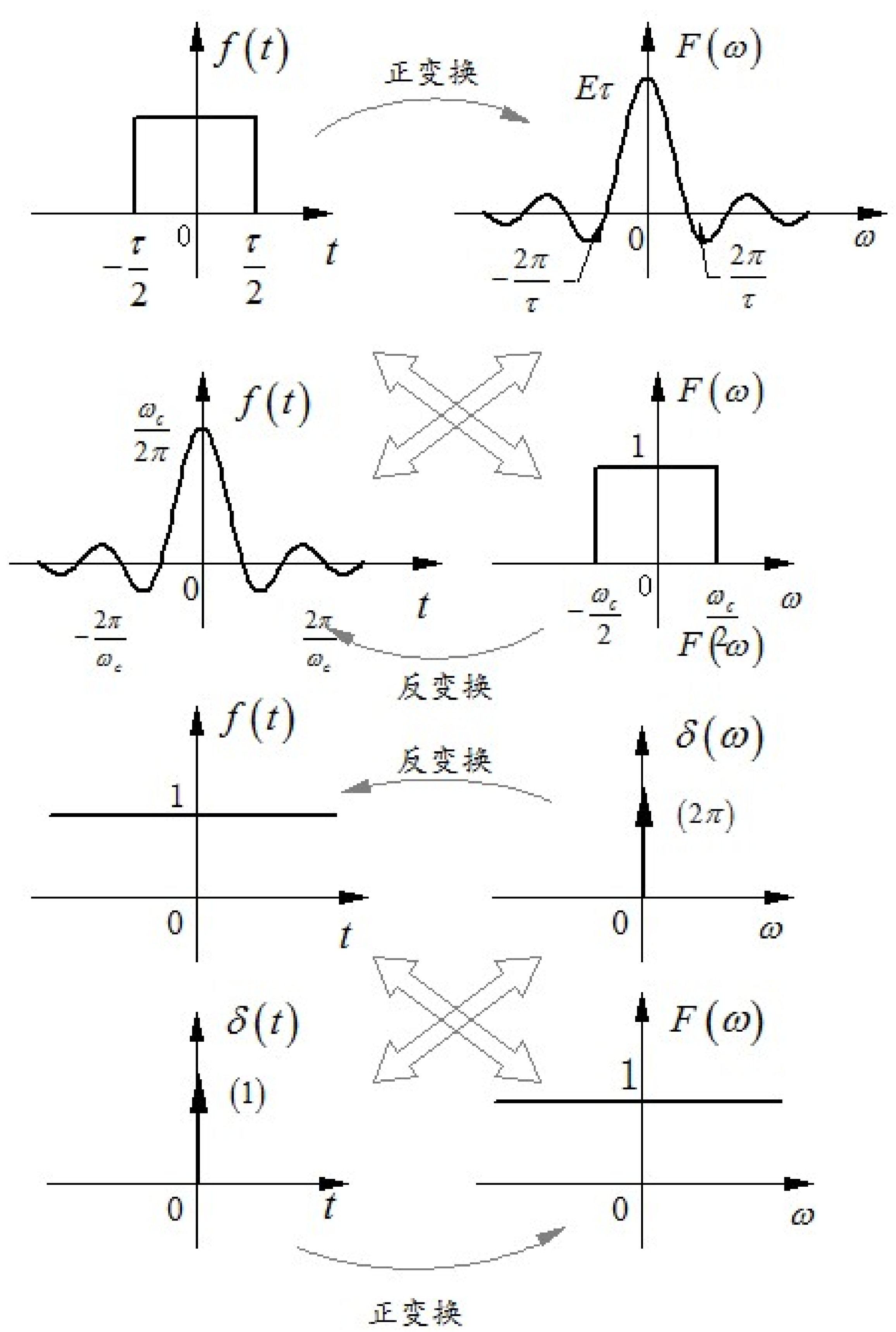
Duality of FT

注释：

内容 Contents

重点 Key Points

① 例子



② 证明

若：$\mathscr{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)$

则：$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega)$

由傅里叶逆变换公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

可以得到：

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\tau$$

将公式中的 t 与 ω 互换可以得到：

$$2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-j\omega t}dt$$

所以：$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega)$

如果 $f(t)$ 为偶函数，那么：

$$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(\omega)$$

③ 应用

① 已知信号 $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$ ，求该信号的傅里叶变换。

根据傅里叶变换的对偶性

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|t|}\right]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

由此可以得到：

$$\mathscr{F}\left[\frac{2a}{a^2+t^2}\right]=2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

● **结论** Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

典型信号的FT

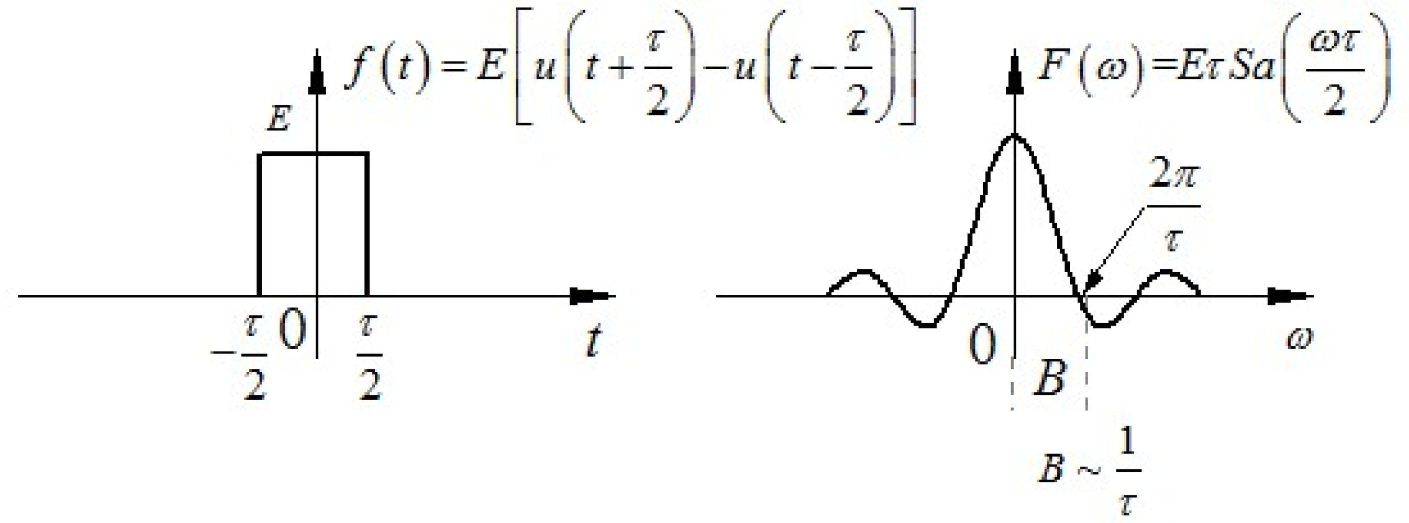
FT of Typical Signals

注释：

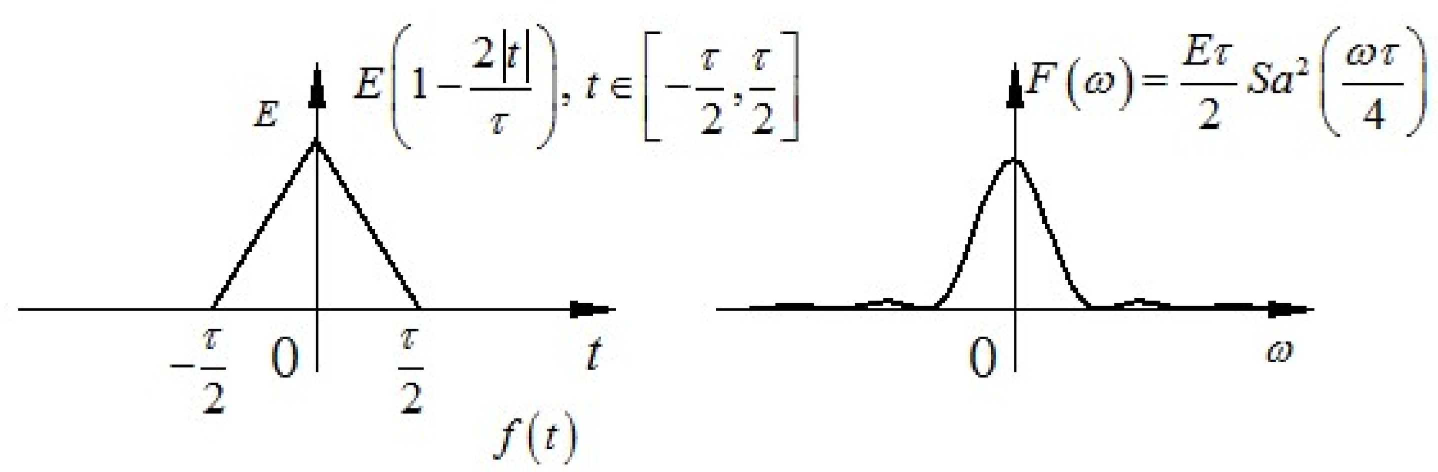
内容 Contents

重点 Key Points

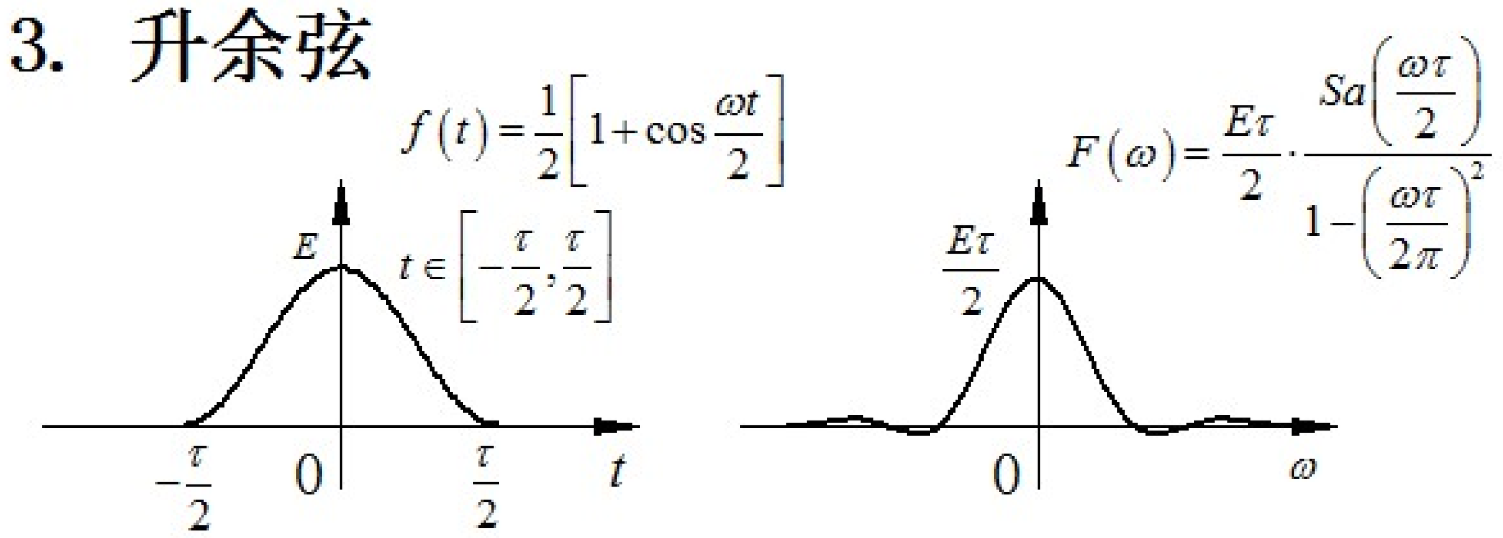
1. 矩形脉冲



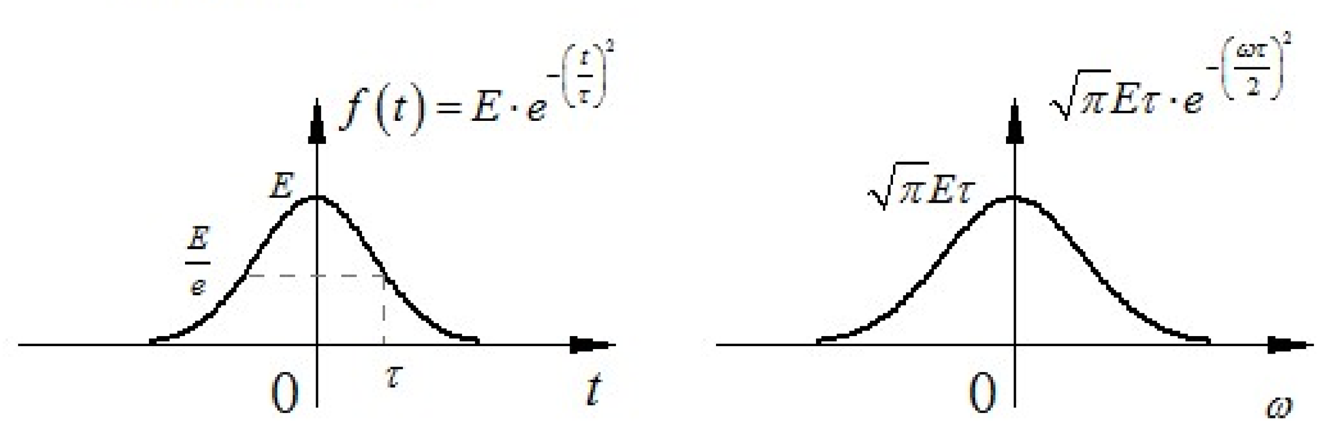
2. 三角脉冲



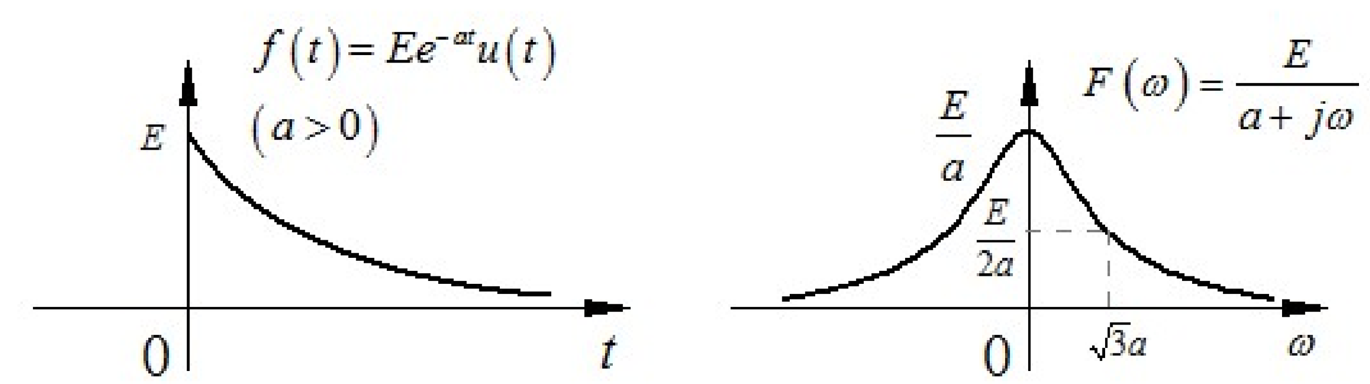
3. 升余弦



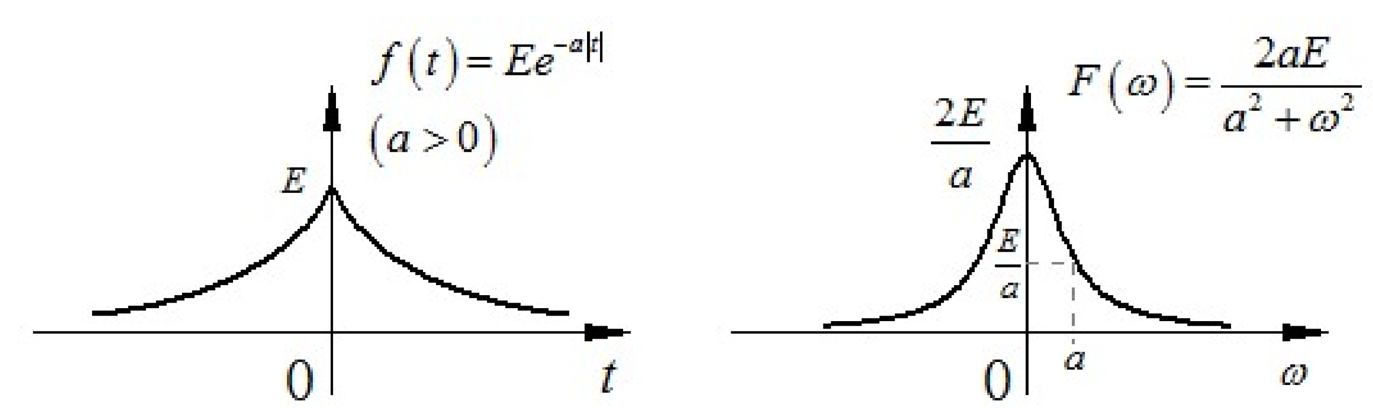
4. 高斯信号



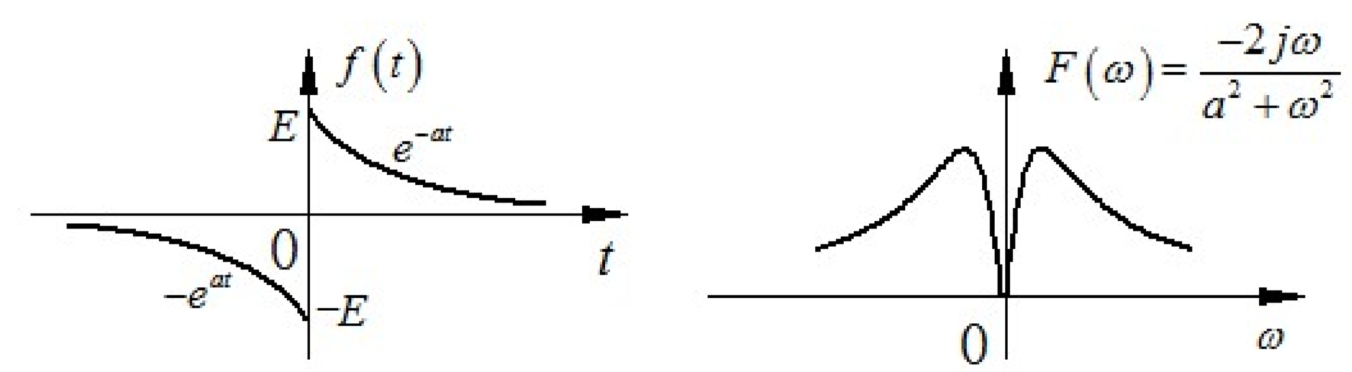
5. 单边指数函数



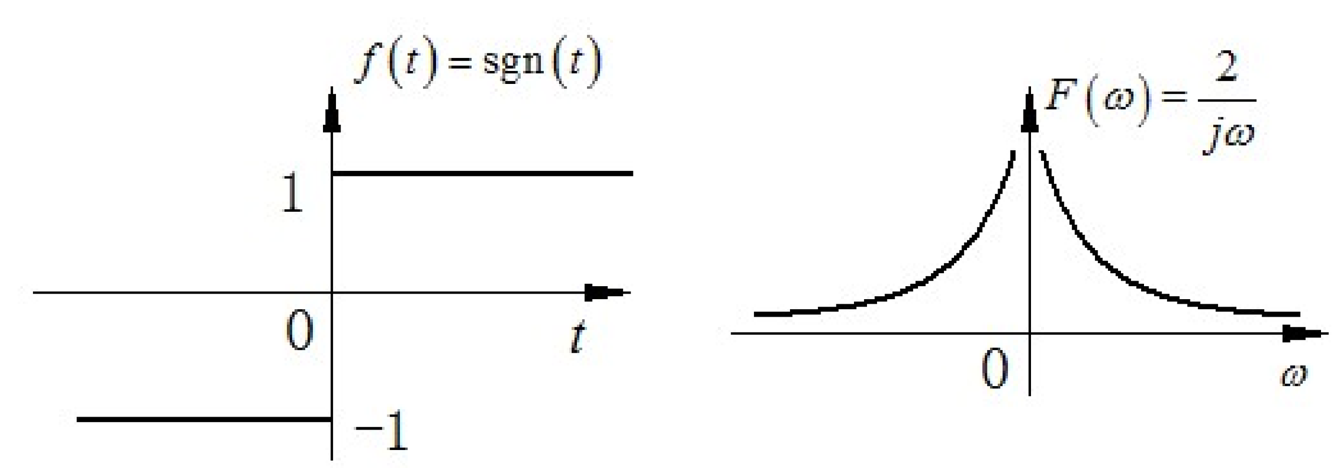
6. 双边指数函数



7. 奇对称指数函数

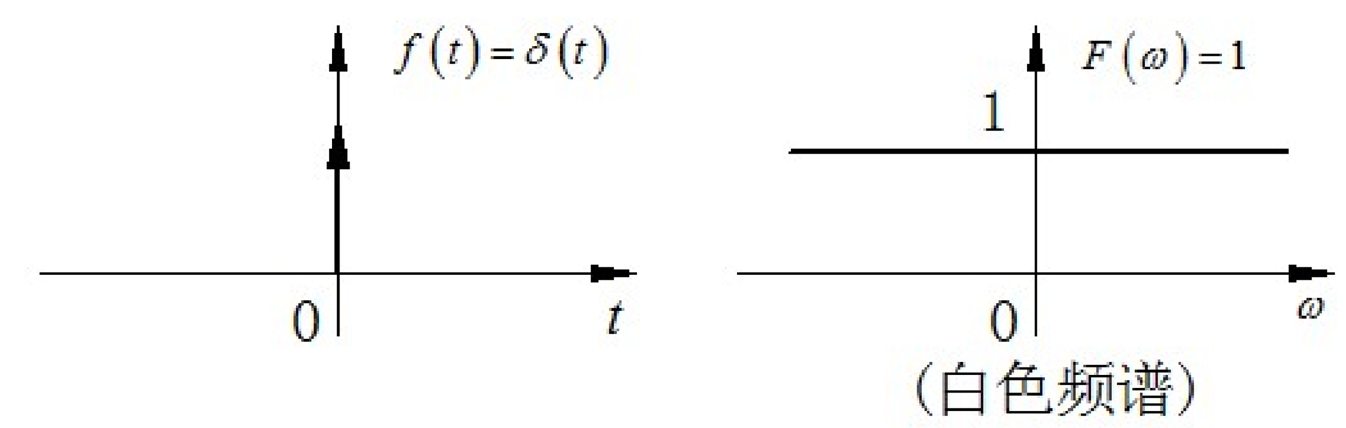


8. 符号函数

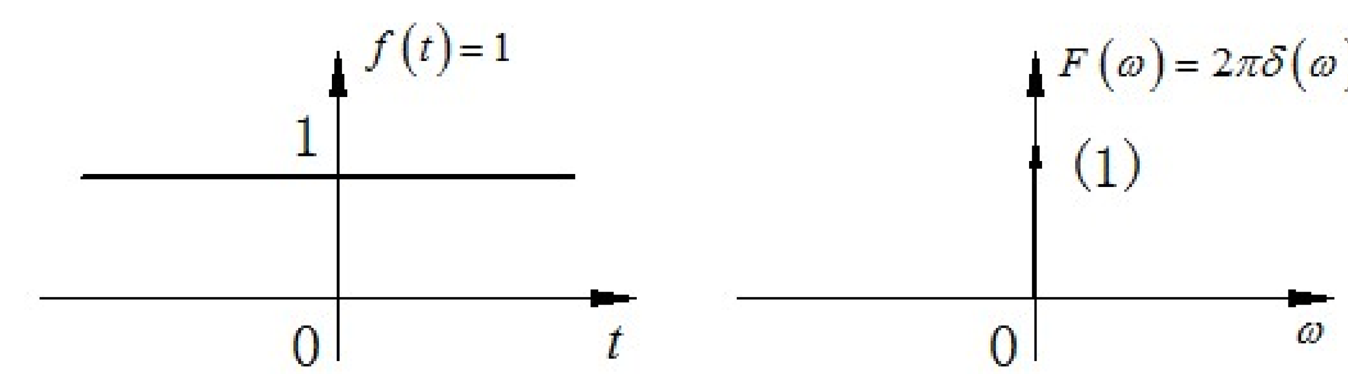


FT奇偶虚实性
3.6.3

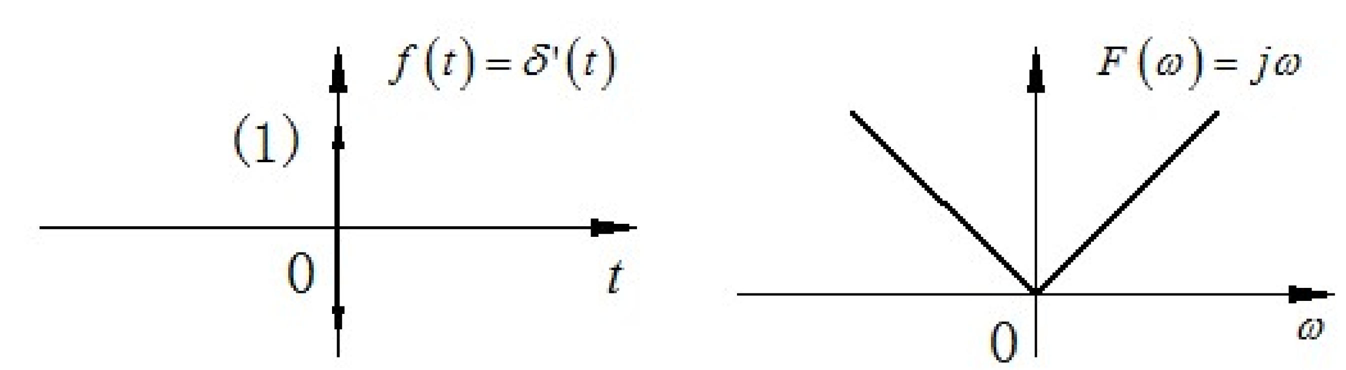
9. 冲击信号



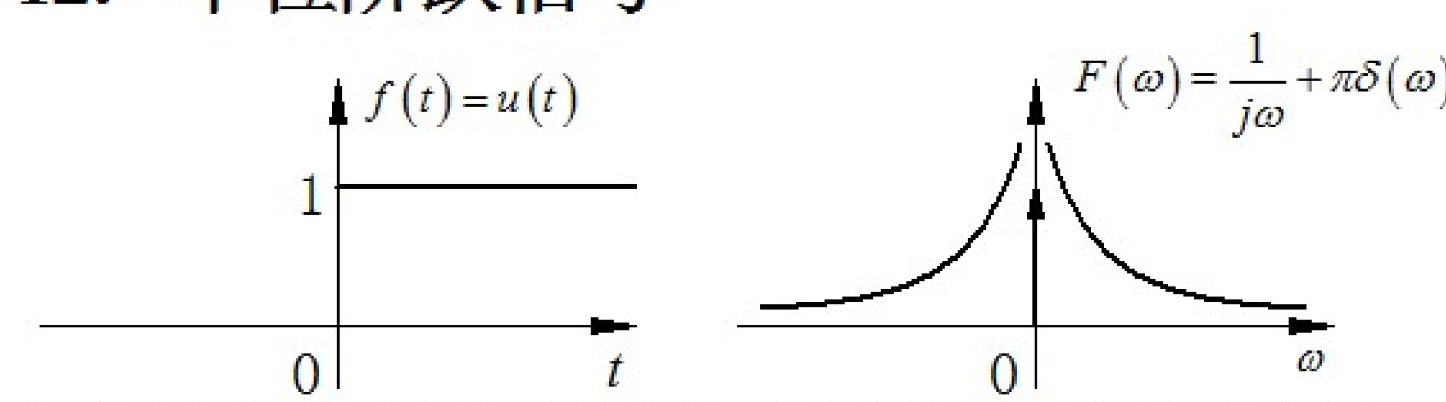
10. 直流信号



11. 冲激偶信号



12. 单位阶跃信号



● 结论 Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

矩形脉冲信号的FT

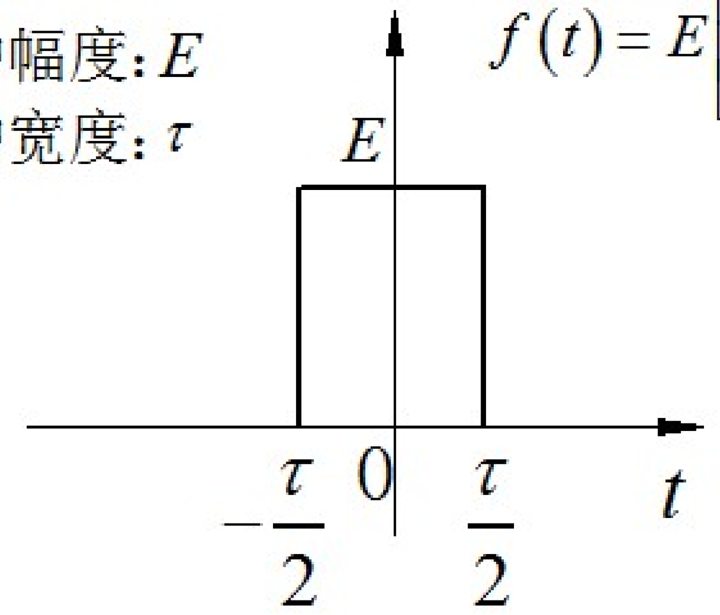
Fourier Transform of Rectangular pulse.

注释：

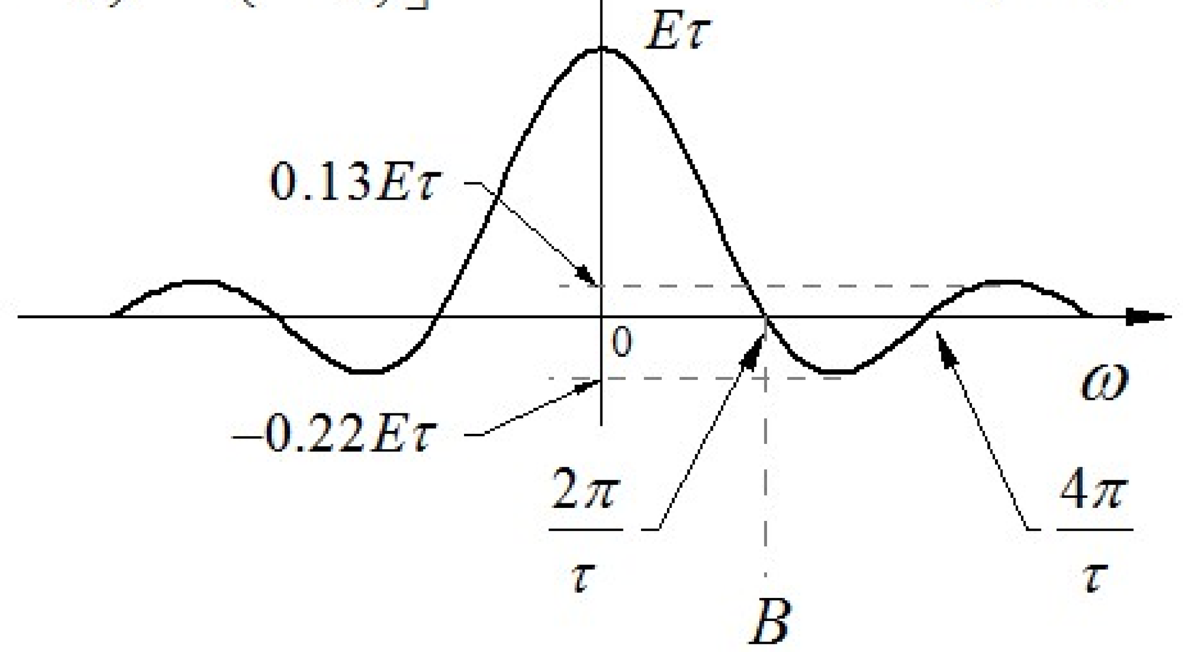
矩形脉冲信号FT

脉冲幅度：E
脉冲宽度：τ

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



$$F(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

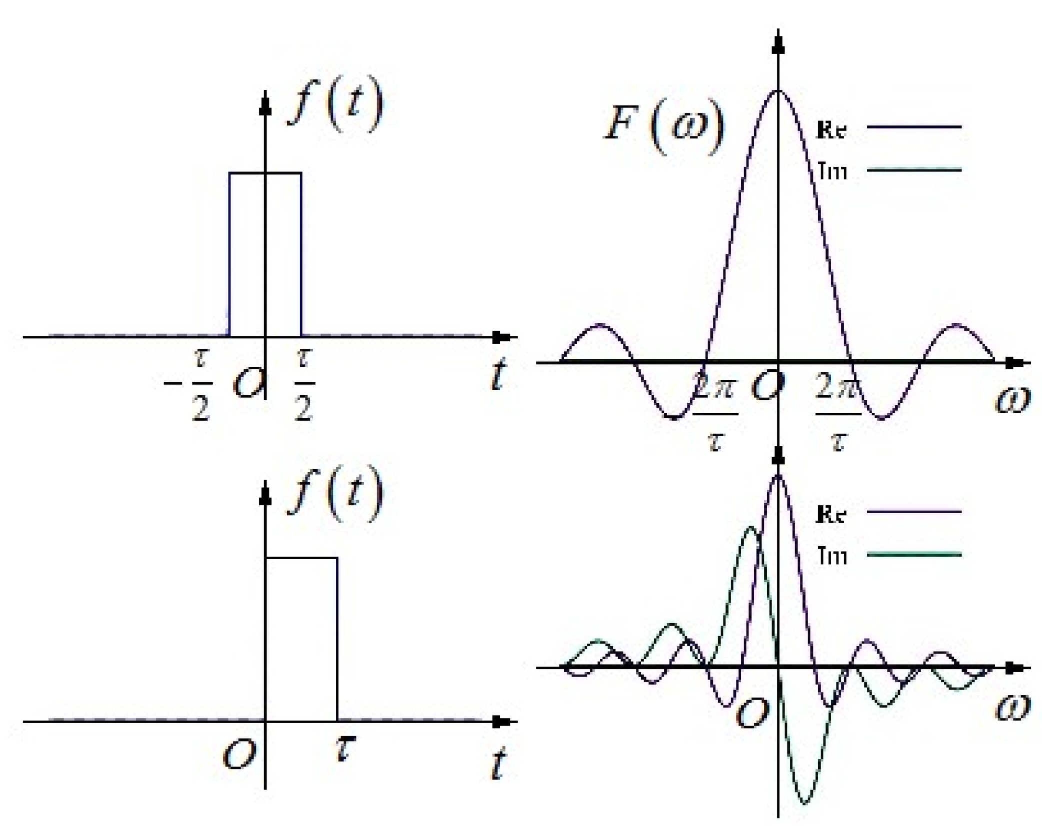


求解过程：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{E}{j\omega}e^{j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$
$$=\frac{E}{j\omega}\left[e^{-j\frac{\tau}{2}}-e^{j\frac{\tau}{2}}\right]$$
$$=\frac{E\left(-2j\sin\frac{\tau}{2}\right)}{j\omega}$$
$$F(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$
$$F(\omega)=E\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

幅度谱 $|F(\omega)|=E\tau\left|Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$

相位谱 $\varphi(\omega)=\begin{cases}0 & \left[\frac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\right]\\ \pi & \left[\frac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{4(n+1)\pi}{\tau}\right]\end{cases}$



① **衰减趋势**

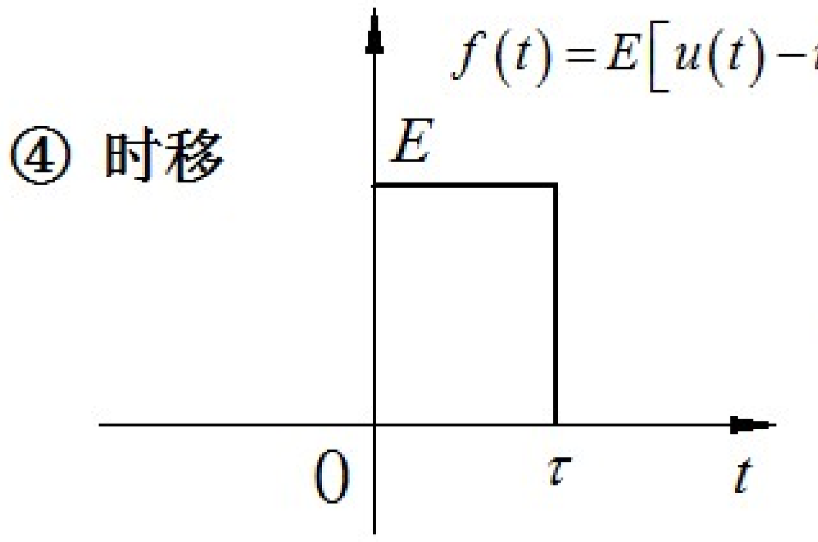
$$|F(\omega)|\sim\frac{1}{\omega}\qquad Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

② **带宽** $B:\frac{2\pi}{\tau}\longrightarrow B\sim\frac{1}{\tau}$

③ **有限时宽→无限频宽**

④ **时移**

$$f(t)=E\left[u(t)-u(t-\tau)\right]$$

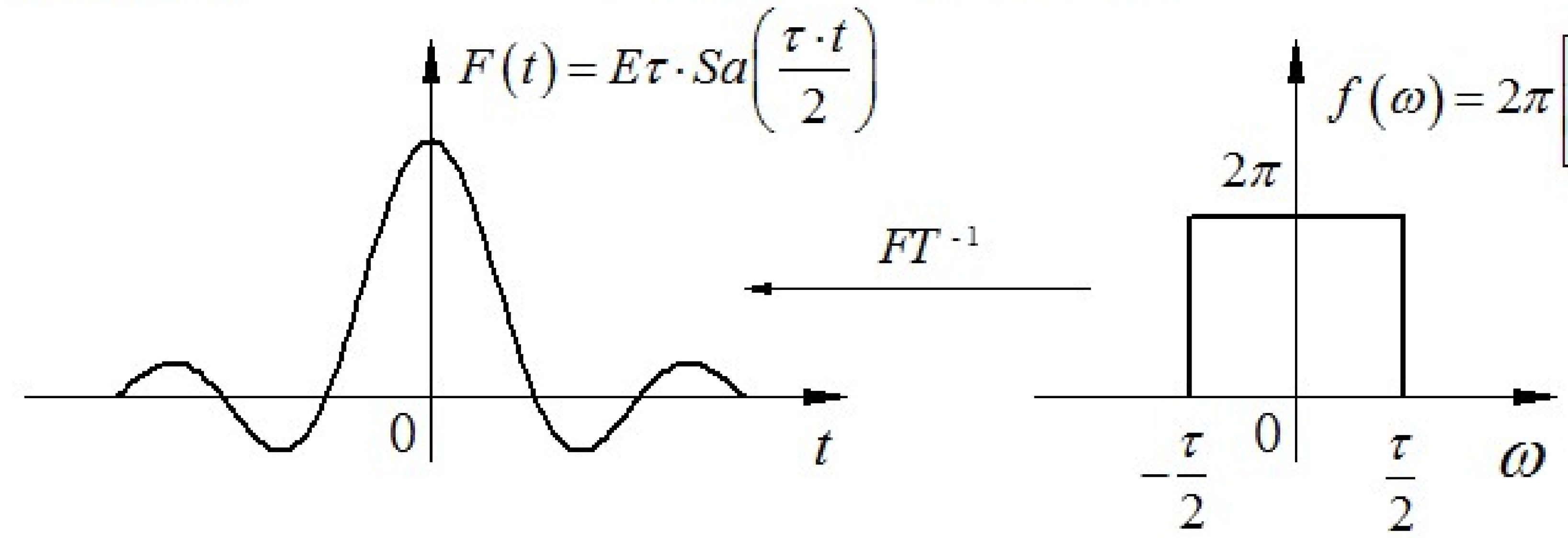


$$F(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

时移带来的
附加相移。

⑤ **对称性**

无限时宽→有限频宽



是否存在时域和频域长度
都有限的函数呢？

● **结论** Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

三角函数FT推导

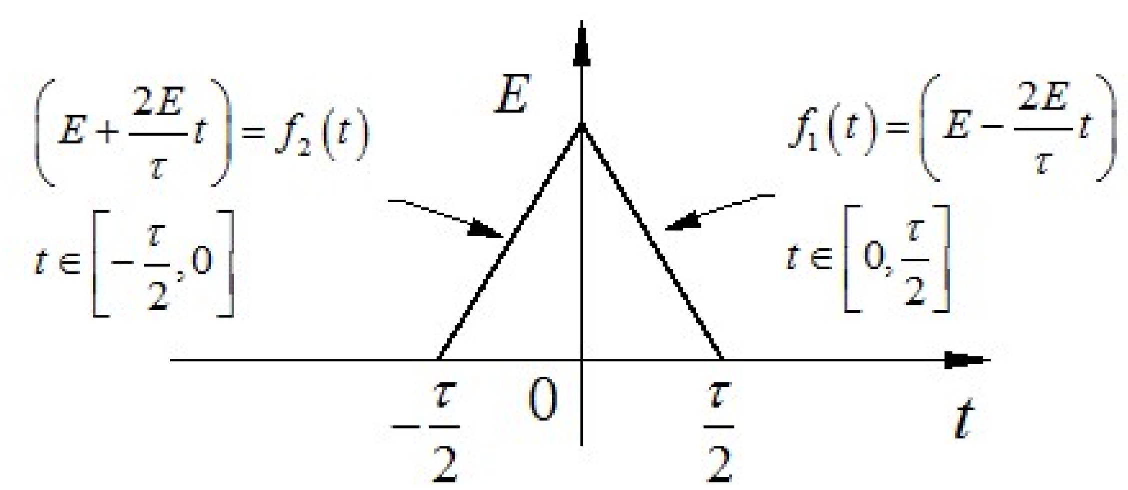
Derivation of FT of symmetric triangle pulse.

注释：

对称三角函数FT推导

过程非常繁琐，极容易出错。

$$f(t)=E\left(1-\frac{2|t|}{\tau}\right),\ t\in\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$$



① $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$

$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)]+\mathscr{F}[f_2(t)]$

③ $$F_2(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\left[E+\frac{2E}{\tau}t\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\left(E+\frac{2E}{\tau}t\right)de^{-j\omega t}\right]$$

$$\left(E+\frac{2E}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}e^{-j\omega t}\cdot\frac{2E}{\tau}dt$$

$$E$$

$$-\frac{2E}{\tau}\cdot\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}$$

$$\frac{2E}{j\omega\tau}\left(1-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left[E+\frac{2E}{j\omega\tau}\left(1-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}\right)\right]$$

② $$F_1(\omega)=\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}f_1(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\left[E-\frac{2E}{\tau}t\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left[\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\left(E-\frac{2E}{\tau}t\right)de^{-j\omega t}\right]$$

$$\left(E-\frac{2E}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}}\qquad-\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}\left(-\frac{2E}{\tau}\right)dt$$

$$0-E\qquad+\frac{2E}{\tau}\cdot\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$\frac{2E}{-j\omega\tau}\left(e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left[-E+\frac{2E}{-j\omega\tau}\left(e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}-1\right)\right]$$

$$F(\omega)=\frac{1}{-j\omega}\left[E+\frac{2E}{+j\omega\tau}\left(1-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}\right)\right]$$

④ $$F_1(\omega)+F_2(\omega)=\frac{1}{-j\omega}\cdot\frac{2E}{j\omega\tau}\cdot\left(2-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{j\omega\tau}\right)$$

$$=\frac{2E}{\omega^2\tau}\left(2-2\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{4E}{\omega^2\tau}\qquad 4\sin^2\frac{\omega\tau}{4}$$

⑤ $$\boxed{=\frac{E\tau}{2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}=\frac{E\tau}{2}\cdot Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}$$

- 后面将会使用两种方法利用FT性质简化求解三角波形的傅里叶变换：
  (1) 微分性质；§3.7.2.4
  (2) 卷积性质；§3.7.2.7

● **结论** Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

傅里叶变换求解方法

The methods of calculation of FT.

注释：

内容 Contents

重点 Key Points

① 公式法

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

③ 傅里叶变换的对称性

④ 对于FT公式进行求导

⑤ 利用FT的性质

② 广义傅里叶变换方法

存在一些常用的信号，不满足傅里叶变换换条件，例如：

(1) 周期函数 $f_T(t)=f_T(t+T)$

(2) 阶跃函数 $u(t)$

(3) 符号函数 $\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$

如果允许傅里叶变换中存在奇异函数，则可以方便表述上述函数的FT，例如：

$$\mathscr{F}\left[u(t)\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

构造函数序列$\{f_n(t)\}$逼近函数 $f(t)$

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

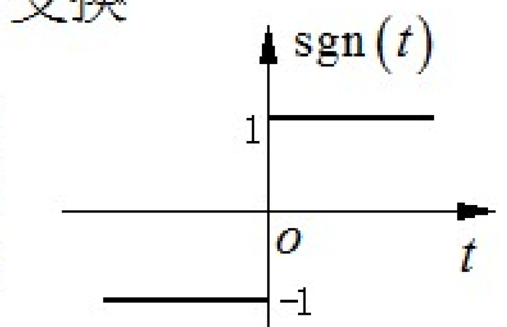
而$f_n(t)$满足绝对可积，并且$\{f_n(t)\}$的傅里叶变换序列$\{F_n(\omega)\}$是极限收敛的，则定义$f(t)$的傅里叶变换$F(\omega)$为：

$$F(\omega)=\lim_{n\to\infty} F_n(\omega)$$

- 广义傅里叶变换例子

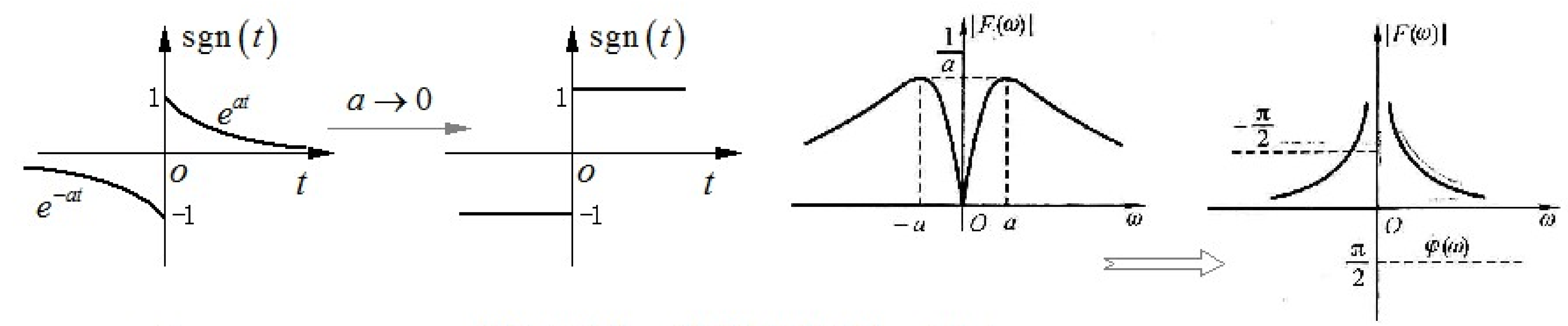
求解符号函数的傅里叶变换

$$f(t)=\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}+1 & (t>0)\\ 0 & (t=0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$



双边指数衰减信号逼近符号函数。

$$F_1(t)=\begin{cases}e^{-at} & (t>0)\\ 0 & (t=0)\\ -e^{at} & (t<0)\end{cases}\xrightarrow{a\to 0}\mathrm{sgn}(t)$$



$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{0}\left(-e^{at}\right)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|F_1(\omega)|=\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}\Longrightarrow|F(\omega)|=\frac{2}{|\omega|}$$

$$\varphi_1(\omega)=\begin{cases}+\frac{\pi}{2} & (\omega<0)\\ -\frac{\pi}{2} & (\omega>0)\end{cases}\qquad \varphi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & (\omega>0)\\ \frac{\pi}{2} & (\omega<0)\end{cases}$$

符号函数sgn(t)傅里叶变换：$F(\omega)$

$$F(\omega)=\lim_{a\to 0}F_1(\omega)=\lim_{a\to o}\left(\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

● 结论 Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

FT奇偶虚实特性

Odd/Even Imaginary/Real Property.

注释：

内容 Contents

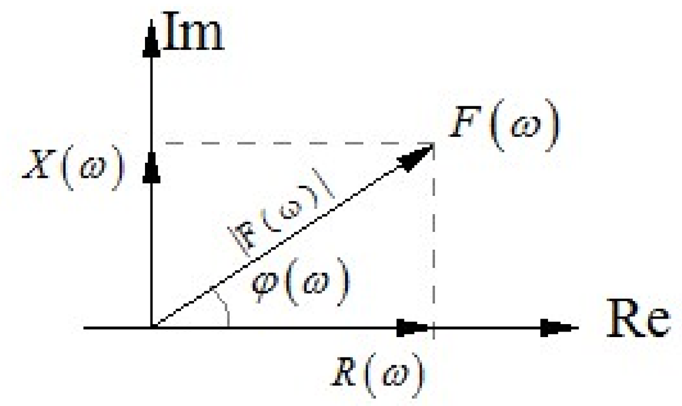
重点 Key Points

共轭对称性

⊙ $F(\omega)$

$F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$ 直角坐标形式

$=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ 极坐标形式



实数变量函数 → 偶实　奇实

$f(t)$			偶实	奇实
实数	$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt$	偶	√ 实偶	⊙
实数	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt$	奇	⊙	√ 虚奇
纯虚数	$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt$	奇	⊙	√ 实奇
纯虚数	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt$	偶	√ 虚偶	⊙

$|F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$ ：偶函数

$\varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$ ：奇函数

$f(t)$

一般复数函数，则上述性质不再存在。

⊙共轭对称性质（f(t)：实函数）

$$\mathscr{F}\left[f(-t)\right]=F(-\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[f^*(t)\right]=F^*(-\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[f^*(-t)\right]=F^*(\omega)$$

⊙ $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$

偶分量　奇分量

$\mathscr{FT}\downarrow$

实部　虚部

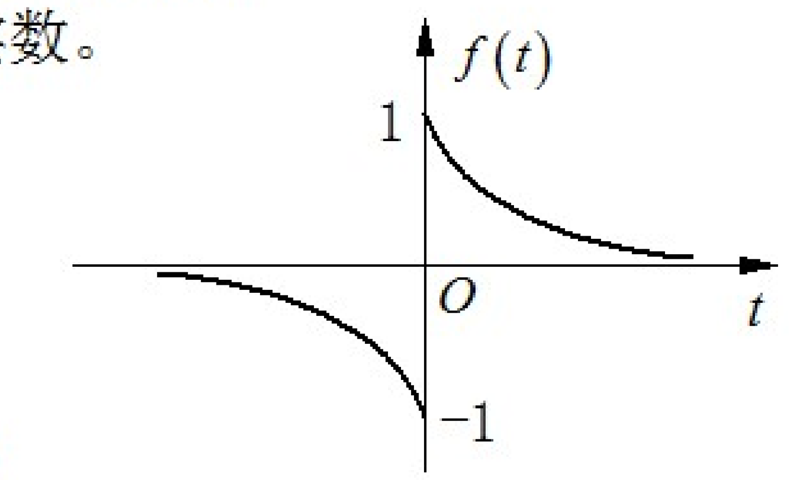
$F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$

应用举例

3.6.3.1 分析u(t)的广义FT的推导过程

举例：求下面奇函数的频谱，其中a是正实数。

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at} & (t>0)\\ -e^{at} & (t<0)\end{cases}$$



解：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

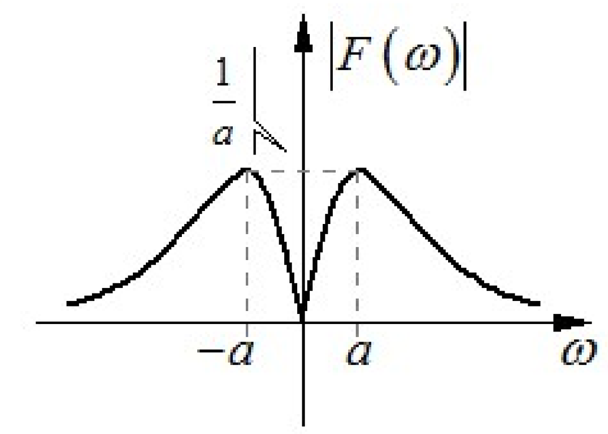
$$=-\int_{-\infty}^{0}e^{at}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$ （奇函数对应虚奇频谱）

$$F(\omega)=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|F(\omega)|=\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & (\omega>0)\\ +\frac{\pi}{2} & (\omega<0)\end{cases}$$



● 结论 Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

推导单位阶跃信号FT

Derivation of FT of Heaviside step function.

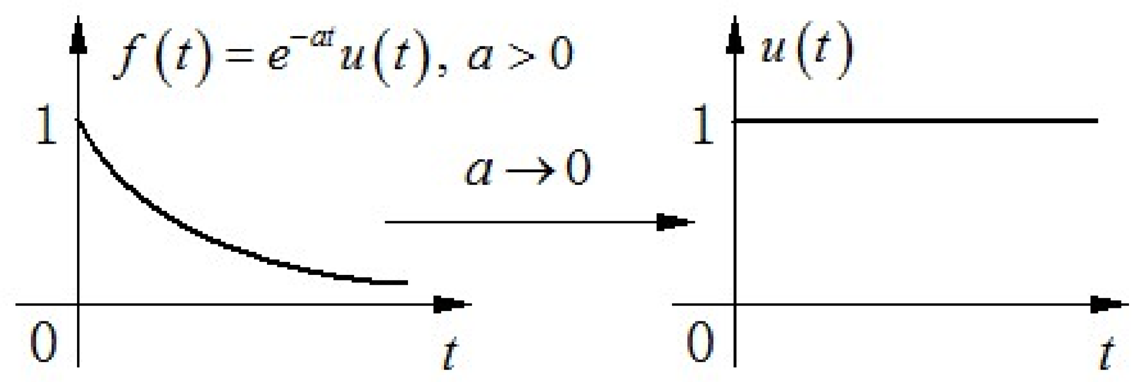
注释：

内容 Contents：利用单边指数函数的极限逼近单位阶跃函数例子说明函数的FT的奇偶虚实性对于判断FT结果的正确性。

重点 Key Points

■ 举例

用单边指数函数取极限的方法求单位阶跃信号$u(t)$ 的傅里叶变换。



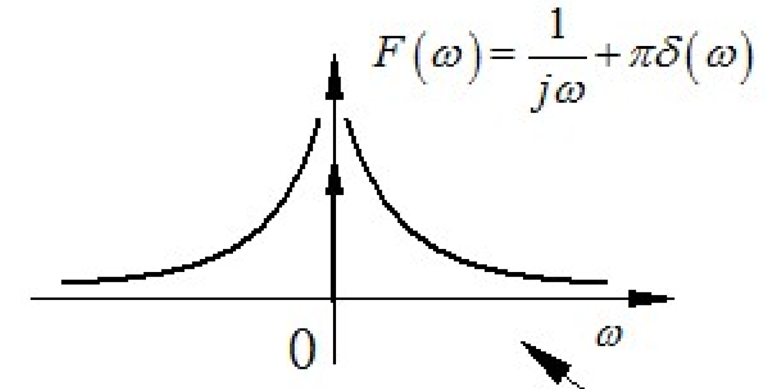
$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

由于$u(t)$不是奇实函数，所以它的FT不可能是虚奇函数 $j\omega$ 。

$$u(t)=\lim_{a\to 0} e^{-at},\ t\ge 0$$

为什么？

$$\mathscr{F}\left[e^{-at}u(t)\right]=\frac{1}{a+j\omega}\qquad \mathscr{F}\left[u(t)\right]=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j\omega}=\frac{1}{j\omega}\neq \mathscr{F}\left[u(t)\right]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$



问题分析：
$$\mathscr{F}\left[u(t)\right]=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j\omega}=\lim_{a\to 0}\left[R(\omega)+X(\omega)\right]$$

$$\lim_{a\to 0}R(\omega)=\lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+\omega^2}\qquad \lim_{a\to 0}X(\omega)=\lim_{a\to 0}\frac{-j\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{1}{j\omega}$$

① 关于ω 偶函数。

② 当 $\omega\neq 0$，$\lim_{a\to 0}R(\omega)=0$

③ 所覆盖的面积：

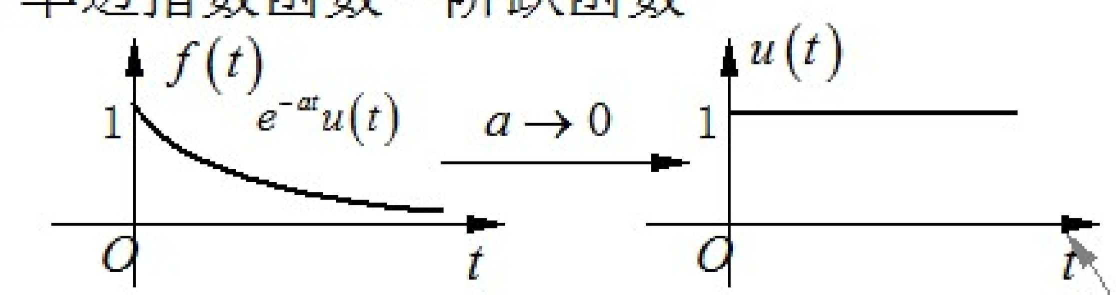
$$C=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)d\omega=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega=$$
$$=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(\frac{\omega}{a}\right)}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}=\lim_{a\to 0}\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

$$\lim_{a\to 0}R(\omega)=\pi\delta(\omega)$$

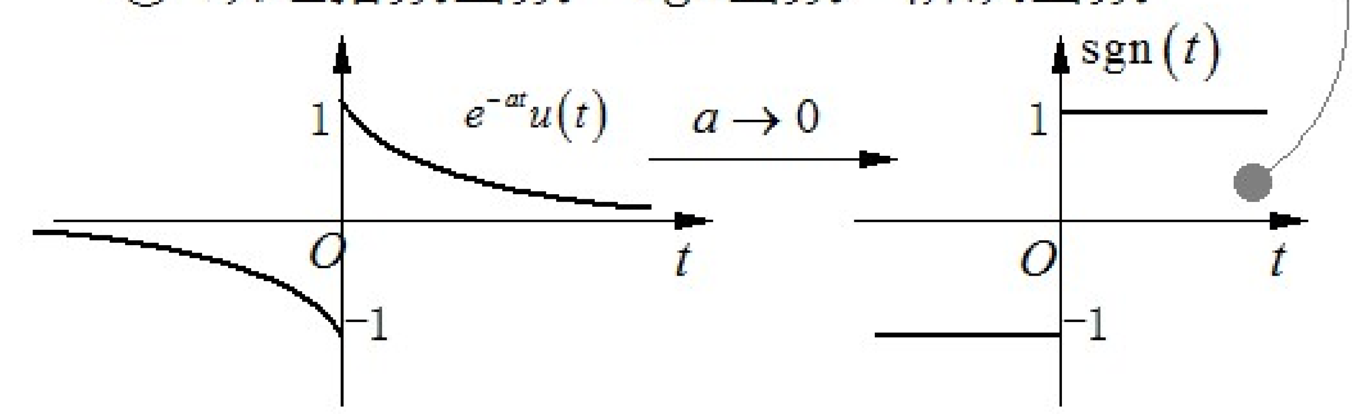
$$\mathscr{F}\left[u(t)\right]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

■ 广义傅里叶变换求阶跃函数的方式：

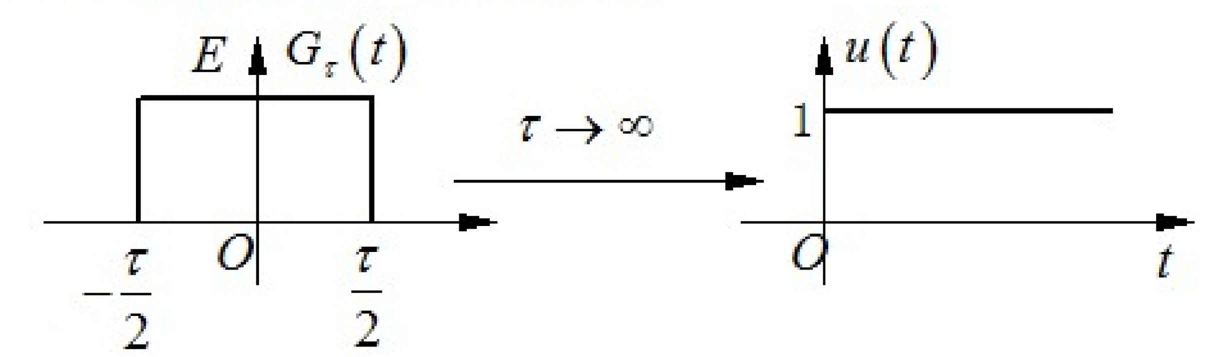
① 单边指数函数→阶跃函数



② 双边指数函数→sgn函数→阶跃函数



③ 窗口函数→阶跃函数



● 结论 Conclusions

zhuoqing@tsinghua.edu.cn

Dr. Zhuo Qing

信号傅里叶变换问题讨论

Discussion of FT properties.

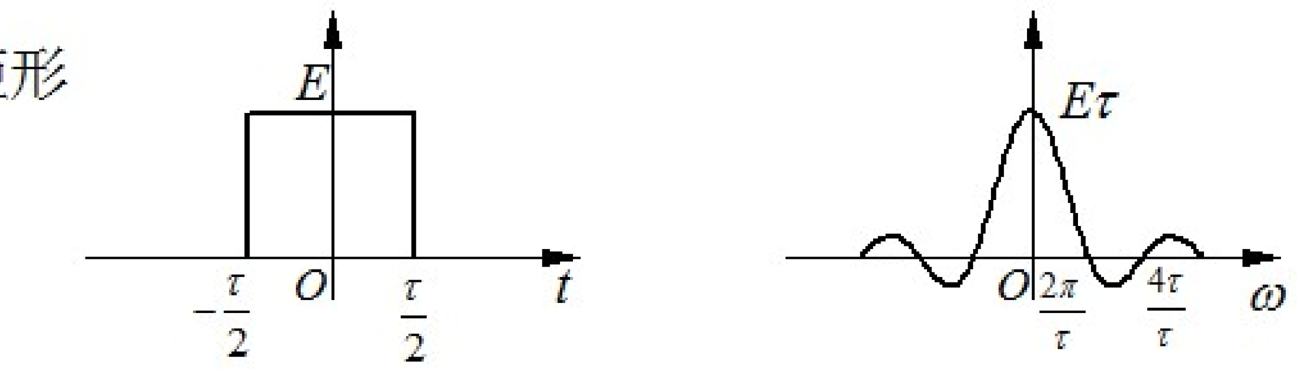
注释：

内容 Contents　　重点 Key Points

思考题1

信号的频谱衰减规律与信号的光滑性之间的关系。

矩形

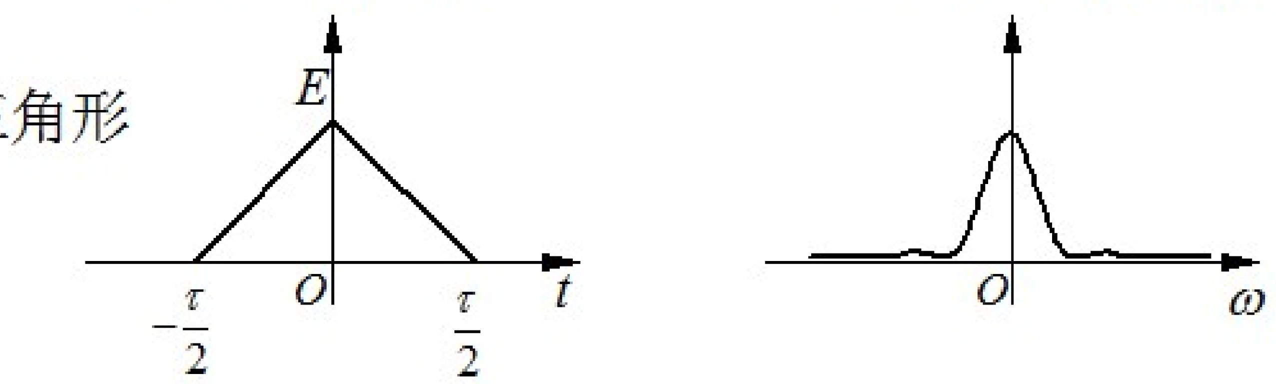


$$f(t)=\begin{cases}E & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$F(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\frac{2E}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$f(t)$ 不连续。　$|F(\omega)|$ 与 ω 大致成反比。

三角形

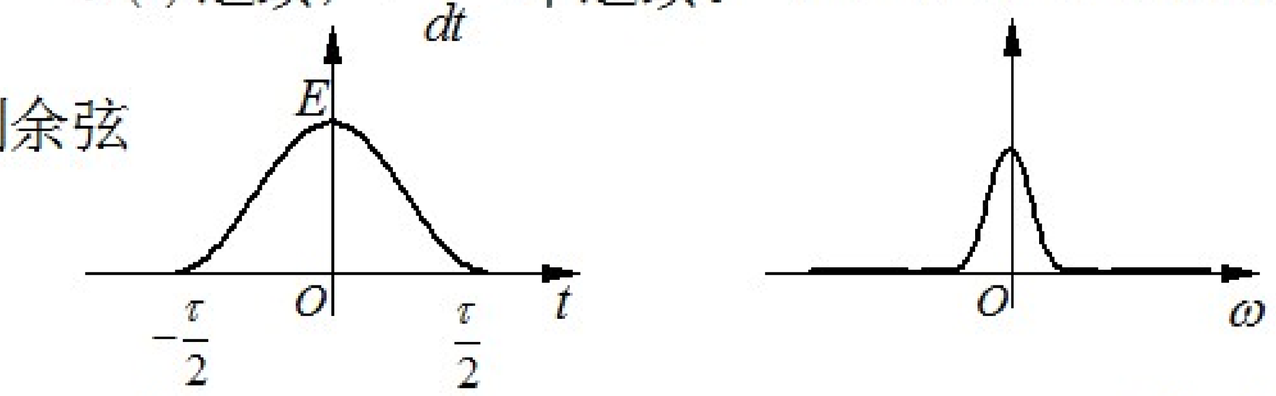


$$f(t)=\begin{cases}E\left(1-\frac{2|t|}{\tau}\right) & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=\frac{8E}{\omega^2\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$f(t)$ 连续，$\frac{df(t)}{dt}$ 不连续。　$|F(\omega)|$ 与 ω^2 大致成反比。

剩余弦



$$f(t)=\begin{cases}\frac{E}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{E\tau}{2}\cdot\frac{Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1-\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2}$$

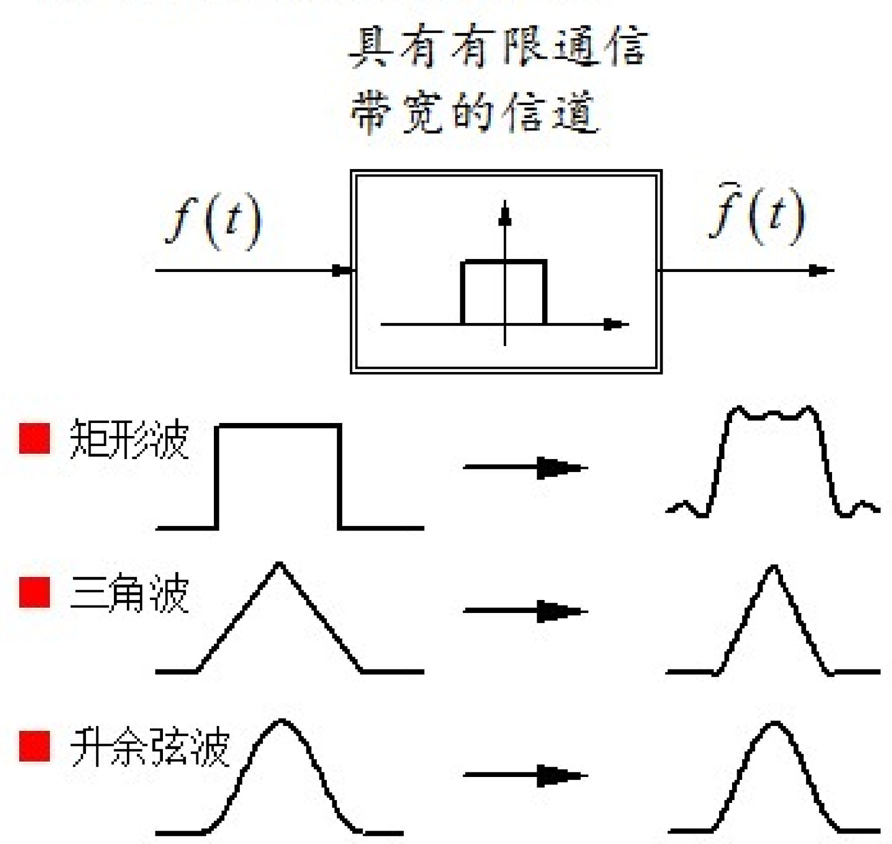
$f(t),\frac{df(t)}{dt}$ 连续，$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ 不连续。$|F(\omega)|$ 与 ω^3 大致成反比。

$$f(t)\ \text{不连续}\quad E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\propto\frac{1}{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}f(t)\ \text{不连续}\quad E\tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\propto\frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t)\ \text{不连续}\quad \frac{E\tau Sa(\omega\tau)}{1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}\propto\frac{1}{\omega^3}$$

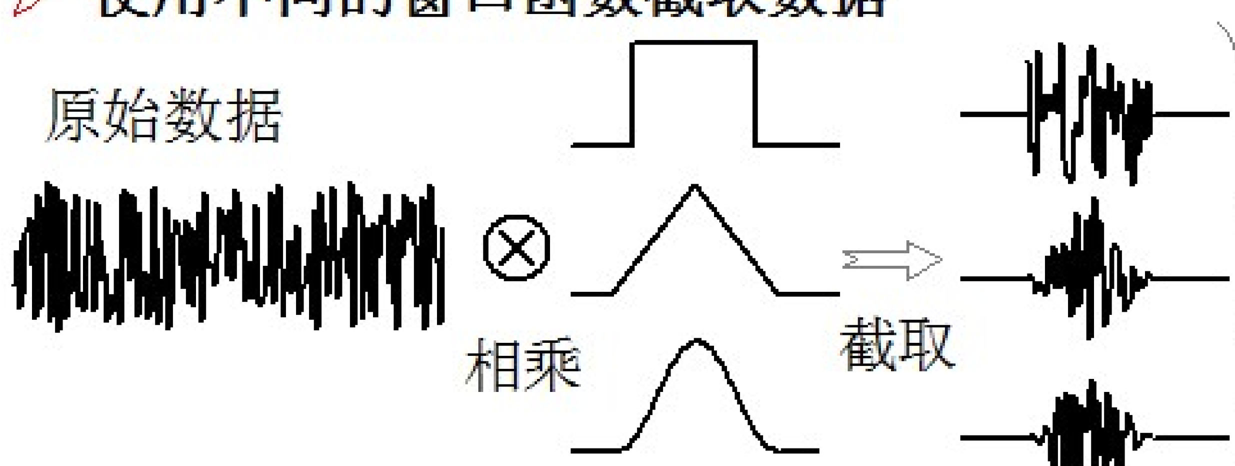
不同波形在通过有限带宽信号的时候波形失身情况。



高频成分衰减快的信号在通过有限带宽的信号的时候波形失真小。

通信脉冲波形设计

使用不同的窗口函数截取数据



截取的数据进行后面的处理。

截取窗口设计

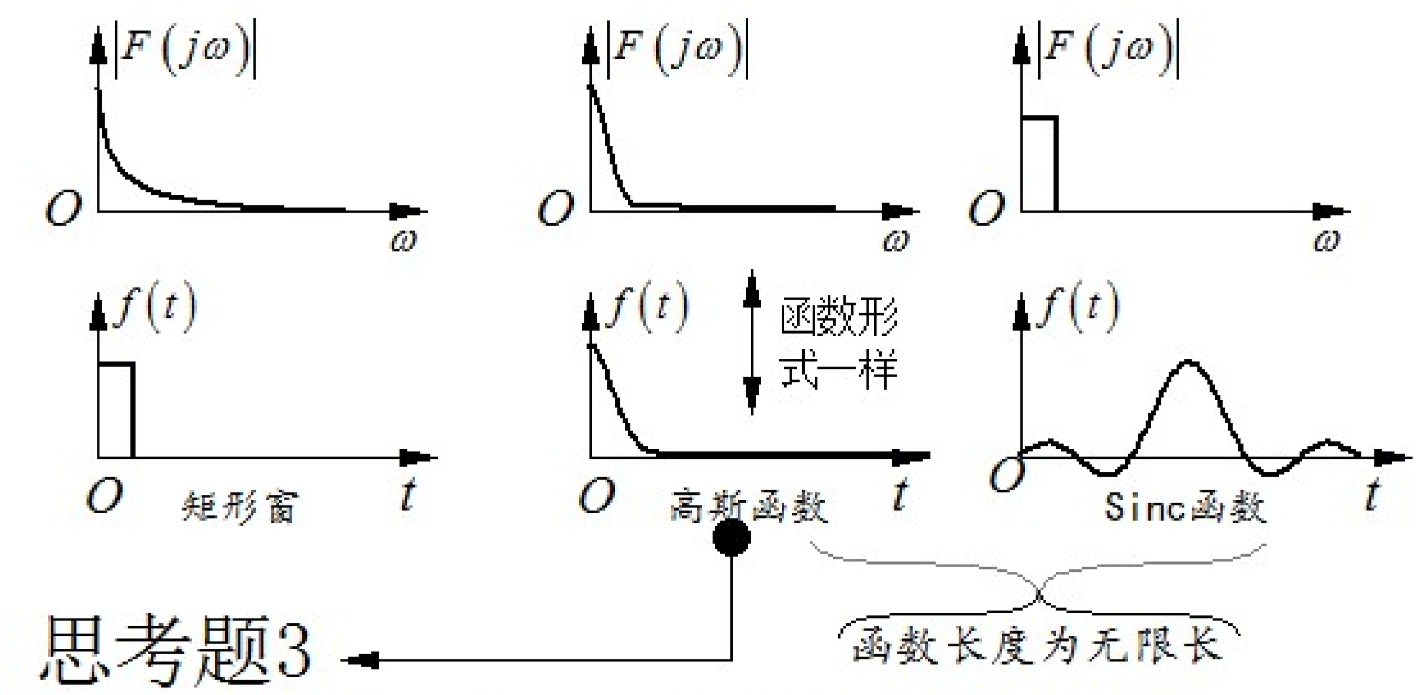
☒ 光滑的窗口用于截取数据这样可以减少信号分析中的“频率泄露”一部分效应。

思考题2

什么信号与它的频谱都是有限长度的信号？

$\frac{1}{\omega^n}$ 多项式衰减 → $e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}$ 指数衰减 → 有限长

衰减速度增加



思考题3

什么信号它的频谱与它的信号形式是相同的？

P.P. Vaidyanathan, Eigenfunctions of the Fourier Transform IETE Journal of Education, Vol 49, No.2, May-August, 2008, pp.51-58

两个常见的例子

① $g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\Leftrightarrow G(j\omega)=\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}$　高斯函数

② $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Leftrightarrow S(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)$　冲激序列

☒ Eigen function:数量无限

☒ FT Eigen Value:　$\pm\sqrt{2\pi},\pm j\sqrt{2\pi}$（只有四个）

结论 Conclusions

Dr. Zhuo Qing zhuoqing@tsinghua.edu.cn

常见信号的傅里叶变换

序号	类型	变换式
(1)	单位冲激信号	$\delta(t)\xleftrightarrow{FT}1$
(2)	单位阶跃信号	$u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
(3)	常数信号	$1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)$
(4)	斜变信号	$tu(t)\xleftrightarrow{FT}j\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$
(5)	单边指数信号	$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{a+j\omega}$
(6)	双边指数信号	$e^{-ja\lvert t\rvert}\xleftrightarrow{FT}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
(7)	矩形脉冲信号	$u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\xleftrightarrow{FS}\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
(8)	抽样信号	$Sa(Wt)\xleftrightarrow{FT}\frac{\pi}{W}\left[u(\omega+W)-u(\omega-W)\right]$
(9)	正弦信号	$\sin(\omega_0 t)\xleftrightarrow{FT}j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$
(10)	余弦信号	$\cos(\omega_0 t)\xleftrightarrow{FS}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$
(11)	单边正弦信号	$\sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{FS}\frac{j\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]-\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$
(12)	单边余弦信号	$\cos(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]-j\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$
(13)	周期信号	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(t-nT_0)\xleftrightarrow{FT}\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_1(jn\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$
(14)	周期冲激序列	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)\xleftrightarrow{FT}\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
(15)	抽样函数信号	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT_0)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left[j(\omega-n\omega_s)\right]$

● 结论 Conclusions