행렬 (Matrix)

행렬의 최종 결론 $u' = uT$, $u' = Tu$

u = Vector , T = Matrix , u' = 새로운 벡터

Transformation(변환)

DirectXMath는 Row-major Matrix 사용

$$u' = uT$$

HLSL은 Column-major Matrix 사용

$$u' = Tu$$

행렬

Row-Major order

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 3 & -2 & 1.1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} \quad u = [u_1, u_2, u_3] \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Column-major order

3×2 (B_{CR})

벡터의 행렬형태

4×4 (행렬의 크기 Column × Row)

Row Vector (DirectX 선호 방식)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow A_{1,*} \rightarrow \\ \leftarrow A_{2,*} \rightarrow \\ \leftarrow A_{3,*} \rightarrow \end{bmatrix}$$

$$A_{1,*} = [A_{11}, A_{12}, A_{13}]$$

$$A_{2,*} = [A_{21}, A_{22}, A_{23}]$$

$$A_{3,*} = [A_{31}, A_{32}, A_{33}]$$

Column Vector

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{*,1} & A_{*,2} & A_{*,3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$A_{*,1} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \quad A_{*,2} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} \quad A_{*,3} = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix}$$

행렬 더하기

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

더하기

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 같은자리끼리 더하기

크기가 같은 행렬끼리만 더할수있다

스칼라 곱하기

$2D = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, 각자리에 곱해준다

빼기

$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, 각 자리끼리 빼기

규칙

$A+B = B+A$

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$r(A+B) = rA+rB$

$(r+s)A = rA+sA$

행렬의 곱셈은 순서가 다르면 결과가 달라진다.

$A \times B \neq B \times A$

행렬 곱셈

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1,2,3)\cdot(2,0,-1) & (1,2,3)\cdot(1,-1,2) \\ (4,5,6)\cdot(2,0,-1) & (4,5,6)\cdot(1,-1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$2\times\underline{3}$행렬 $\times$ $\underline{3}\times 2$행렬 $= 2\times 2$행렬

$$C_{ij} = A_{i,*} \cdot B_{*,j}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$AB =$ 불가능, $2\times\underline{2}$행렬 $\times$ $\underline{3}\times 2$행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

즉, $AB \neq BA$로 순서에 따라 결과가 달라진다.

하지만 모든 경우에 달라지는 것은 아니다

ex) 모든 원소가 0인 행렬과 곱하기

ex) 같은 행렬끼리 곱하기

벡터-행렬 곱하기

$$uA = [x, y, z]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = [x, y, z]\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{*,1}, & A_{*,2}, & A_{*,3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

결과는 벡터가 나온다. 즉, 벡터를 행렬을 사용해 변환한다

$$uA = [u\cdot A_{*,1}, u\cdot A_{*,2}, u\cdot A_{*,3}]$$
$$= [xA_{11}+yA_{21}+zA_{31}, xA_{12}+yA_{22}+zA_{32}, xA_{13}+yA_{23}+zA_{33}]$$
$$= [xA_{11}, xA_{12}, xA_{13}] + [yA_{21}, yA_{22}, yA_{23}] + [zA_{31}, zA_{32}, zA_{33}]$$
$$= xA_{1,*} + yA_{2,*} + zA_{3,*}$$

* 비교

$$Au = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow A_{1,*} \rightarrow \\ \leftarrow A_{2,*} \rightarrow \\ \leftarrow A_{3,*} \rightarrow \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$uA = xA_{1,*} + yA_{2,*} + zA_{3,*}$ 는 각각의 $A_{i,*}$ Row Vector에 가중치 x, y, z를 곱한 후 더한 형식으로 볼 수 있다

선형 결합 (Linear Combination)

$$uA = xA_{1,*} + yA_{2,*} + zA_{3,*}$$

$$[u_1, \cdots, u_n]\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = u_1 A_{1,*} + \cdots + u_n A_{n,*}$$

결합 법칙

$$(AB)C = A(BC)$$

전치 행렬 (Transpose)

대각선을 기준으로 뒤집어준다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

B = 정방행렬 (Square Matrix)

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(cA)^T = cA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, A^{-1} = Inversed Matrix (역행렬)

단위 행렬 (Identity Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AI = A$
$IB = B$

M이 정방행렬일 경우 $MI = IM = M$

u = 벡터, $uI = u$

행렬을 사용해 변환을 하는데 만약 다시 원래대로 되돌리고 싶을 경우 역행렬 개념을 사용할 수 있는데 이것보단 정반대의 변환을 주는 것이 더 쉽기에 역변환을 주로 적용한다

ex) 30도 회전을 역행렬로 돌리기보단 반대로 30도 회전시킨다(역변환)

소행렬(Minor Matrix) - 역행렬을 구하는데 사용하는 개념

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{A}_{13} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

Minor Matrix는 이 자체의 개념보단 행렬식(Determinant)을 표현하는데 주로 사용된다

Determinant(행렬식) - 어떤 행렬의 판별식, 절대값
- 계산량이 많지만 역행렬을 구할때 사용

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}(-1)^{1+j} \det \bar{A}_{1j}$$

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11}\det[A_{22}] - A_{12}\det[A_{21}] = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11}\det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12}\det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{13}\det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 구하기

$\det A = A_{11} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$

$+ A_{13} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$

$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - (-5) \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= 2(3 \cdot 7 - 4 \cdot 3) + 5(1 \cdot 7 - 4 \cdot -2) + 3(1 \cdot 3 - 3 \cdot -2)$

$= 2(9) + 5(15) + 3(9)$

$= 18 + 75 + 27$

$= 120$

여인수 행렬 (Cofactor Matrix) - 역행렬 계산에 사용

$C_A = C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \bar{A}_{ij}$, Determinant의 부분

$C_A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

수반 행렬 (Adjoint Matrix) - 역행렬 계산에 사용

$A^* = C_A^T$, C_A의 Transpose

역행렬 (Inverse Matrix)

- 정방행렬(Square Matrix)만 역행렬을 가질 수 있다.
- $n \times n$ 행렬의 역행렬 = $n \times n$, M^{-1}로 표시
- 모든 정방행렬이 역행렬을 가질수 있는 건 아니다
  - 가능 : Invertible Matrix
  - 불가능 : Singular Matrix (ex: 요소 0인 행렬 등)
- 어떤 행렬의 역행렬은 하나(unique)뿐이다.
- $MM^{-1} = M^{-1}M = I$

$$p' = pM$$
$$p'M^{-1} = pMM^{-1}$$
$$p'M^{-1} = pI$$
$$p'M^{-1} = p$$

p' = p의 변환된 새 벡터
p = 원래 벡터

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

컴퓨터 그래픽스에서는 제한된 경우이지만 역변환을 이용해 역행렬을 효율적으로 구할 수도 있다.

ex) 왼쪽으로 10m 이동 후 역변환인 오른쪽으로 10m 이동해 원래대로 돌아온다.