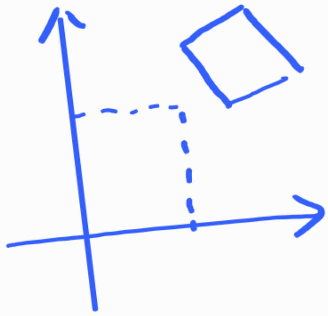
Affine Transformation (애파인 변환)

- 회전과 스케일링은 선형변환이지만 이동은 아니기에 Affine 변환을 사용해 선형변환과 이동을 하나의 행렬로 표현할 수 있다.
- Homogeneous Coordinates
  - 벡터 $(x, y, z, 0)$은 이동 X
  - 포인트 $(x, y, z, 1)$은 이동 O
  - 포인트 − 포인트 = 벡터
  - 포인트 + 벡터 = 포인트



- 변환 전 직선은 변환 후에도 직선이다.

회전 이동

$$x' = \boxed{x\cos\theta - y\sin\theta} + \boxed{wb_x}$$
$$y' = \boxed{x\sin\theta + y\cos\theta} + \boxed{wb_y}$$

$$[x', y', w] = [x, y, w]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ b_x & b_y & 1 \end{bmatrix}$$

벡터 $w=0$, 포인트 $w=1$

w가 임의의 실수인건 0과 1 뿐만이 아니라 Projection에서도 사용한다.

$\alpha(u)$ (Affine 변환) $= T(u) + b$, $T(u)$=선형변환, b=이동벡터

$$\alpha(u) = uA + b = [x, y, z]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + [b_x, b_y, b_z] = [x', y', z']$$

3차원에서는 4x4 행렬 사용

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

Affine Transformation

이동 행렬

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b_x & -b_y & -b_z & 1 \end{bmatrix}$$

스케일링 행렬

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

회전 행렬

$$R_n = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy+sz & (1-c)xz-sy & 0 \\ (1-c)xy-sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz-sx & 0 \\ (1-c)xz+sy & (1-c)yz-sx & c+(1-c)z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos\theta \\ s = \sin\theta \end{matrix}$$

$$R_n^{-1} = R_n^T = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy-sz & (1-c)xz+sy & 0 \\ (1-c)xy+sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz-sx & 0 \\ (1-c)xz-sy & (1-c)yz+sx & c+(1-c)z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$