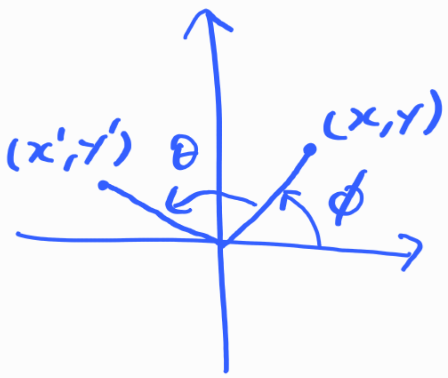
변환(Transformation)

회전 – 어떤 점을 원점에 대해 회전시키는 경우



$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

행렬로 간단히 표현가능하다

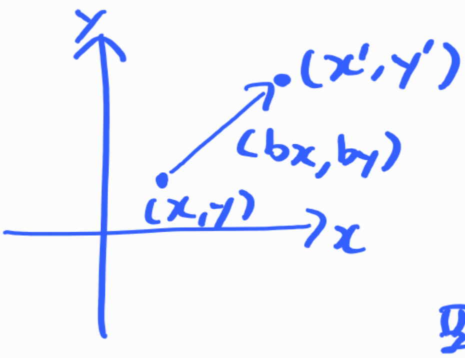
Column-Vector → Row-vector 변환

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ Row-Major}$$

이동 – 어떤 점을 이동시키는 경우



$$x' = x + b_x$$
$$y' = y + b_y$$

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & 1 \end{bmatrix}$$

포인트는 1을 더 붙여준다. 맨뒤에 붙은 1로 인해 행렬로 계산이 가능해진다.

벡터일 경우

$$[x', y', 0] = [x, y, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & 1 \end{bmatrix}, \quad x' = x, \ y' = y$$ 이기에 이동이 안된다.

애초에 벡터는 방향과 거리를 나타낼뿐 위치와 상관없다.

Homogenous Coordinates(동차 좌표계)

- 포인트(점)에는 맨 뒤에 1을 덧붙이고 벡터에는 맨 뒤에 0을 덧붙여서 차원을 하나 더 추가한 좌표계

(이동 행렬에서 점은 위치 이동이 가능하나 벡터는 위치와 연관이 없어 불가능하다)

벡터/포인터의 회전과 이동을 동차좌표계를 활용해 하나의 행렬로 표현할 수 있다.

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + w b_x$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + w b_y$$

$$[x', y', w] = [x, y, w]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ b_x & b_y & 1 \end{bmatrix},$$

벡터 $w=0$

포인트 $w=1$

선형 변환(Linear Transformation)

$u=(u_x, u_y, u_z)$ $v=(v_x, v_y, v_z)$

$T(u+v) = T(u) + T(v)$, 조건1

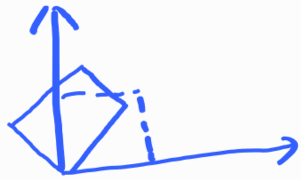
Tau (그리스 알파벳)

$T(ku) = kT(u)$, 조건2

$T()$ = 선형 변환을 해주는 함수

변환들

Scaling



Rotation

선형 변환이 아닌 경우

$T(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ 인 경우

$T(1,2,3) = (1,4,9)$

$k=2$

$T(ku) = T(2,4,6) = (4,16,36)$

$kT(u) = 2T(1,2,3) = (2,8,18)$

} 선형변환 X

선형 변환 예시

$T(x,y,z)=(2x,3y,4z)$ 인 경우　　$T(u+v)=T(u)+T(v)$, 조건1
　　　　　　　　　　　　　　　　$T(ku)=kT(u)$　　, 조건2

$T(u+v)=T(u_x+v_x, u_y+v_y, u_z+v_z)$
$=(2(u_x+v_x), 3(u_y+v_y), 4(u_z+v_z))$
$=(2u_x, 3u_y, 4u_z)+(2v_x, 3v_y, 4v_z)=T(u)+T(v)$

$T(ku)=T(ku_x, ku_y, ku_z)=(2ku_x, 3ku_y, 4ku_z)$
$=k(2u_x, 3u_y, 4u_z)=kT(u)$

조건 1,2를 만족하므로 선형변환이다.

회전은 선형 변환이다. 이동은 선형 변환이 아니다.

그래서 선형 변환만으로 이동, 회전을 함께 다룰수 없어 다른 개념이 필요하다.

선형 변환의 행렬 표현

Standard Basis (표준 기저 벡터) ~어떤 벡터의 기준이 되는 벡터중 표준

$i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$, 각각 x축, y축, z축

$u=(x,y,z)=xi+yj+zk=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

선형 결합

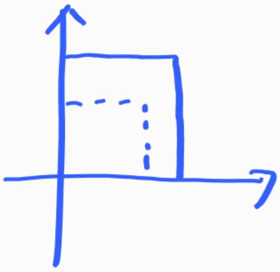
$T(u)=T(xi+yj+zk)=xT(i)+yT(j)+zT(k)$

$T(u)=xT(i)+yT(j)+zT(k)=uA$

$$=[x,y,z]\begin{bmatrix}\leftarrow T(i)\rightarrow\\ \leftarrow T(j)\rightarrow\\ \leftarrow T(k)\rightarrow\end{bmatrix}=[x,y,z]\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\ A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

결국, 벡터와 행렬의 곱셈으로 선형변환을 표현할 수 있다.

스케일링



$S =$ 스케일링

$S(x,y,z) = (S_x x, S_y y, S_z z)$

$$\begin{aligned}
S(u+v) &= (S_x(u_x+v_x), S_y(u_y+v_y), S_z(u_z+v_z)) \\
&= (S_x u_x + S_x v_x, S_y u_y + S_y v_y, S_z u_z + S_z v_z) \\
&= (S_x u_x, S_y u_y, S_z u_z) + (S_x v_x, S_y v_y, S_z v_z) \\
&= S(u) + S(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(ku) &= (S_x k u_x, S_y k u_y, S_z k u_z) \\
&= k(S_x u_x, S_y u_y, S_z u_z) \\
&= kS(u)
\end{aligned}$$

조건 1,2를 만족해 선형변환이다.

$S(i) = (S_x \cdot 1, S_y \cdot 0, S_z \cdot 0) = (S_x, 0, 0)$

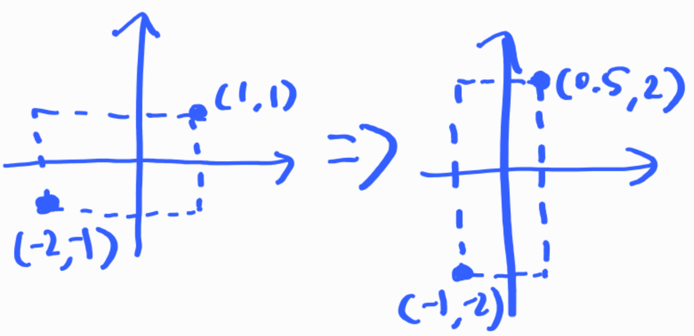
$S(j) = (S_x \cdot 0, S_y \cdot 1, S_z \cdot 0) = (0, S_y, 0)$

$S(k) = (S_x \cdot 0, S_y \cdot 0, S_z \cdot 1) = (0, 0, S_z)$

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z \end{bmatrix},$$

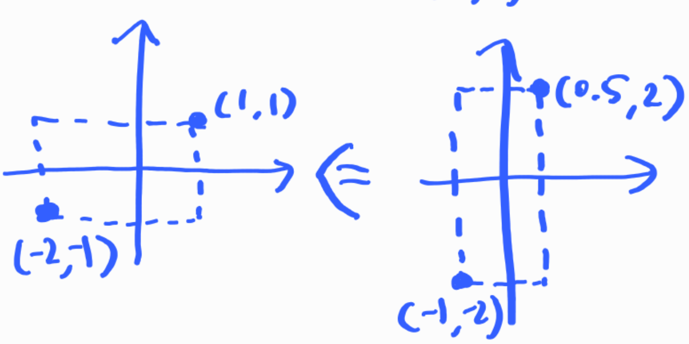
S의 Determinant가 0이 아니어야 역행렬이 존재할 수 있다. $(1/0 = \text{error})$

ex) $S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$



$[1, 1]\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0.5, 2]$

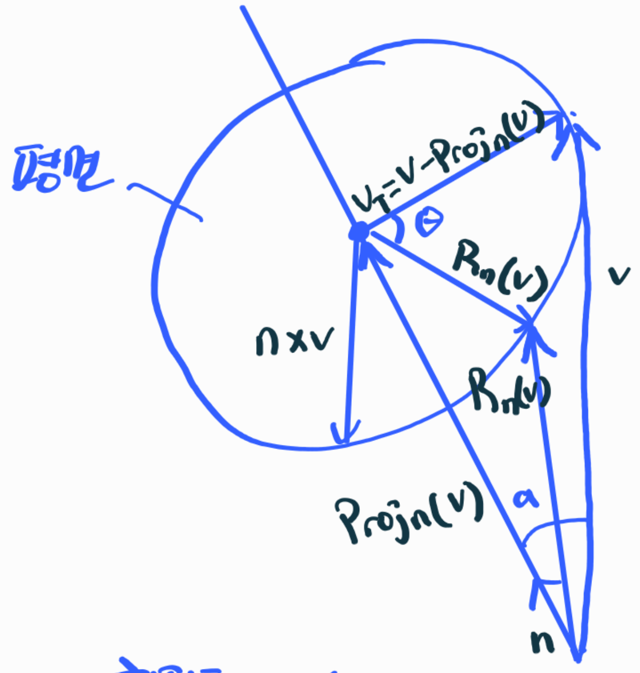
$[-2, -1]\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [-1, -2]$

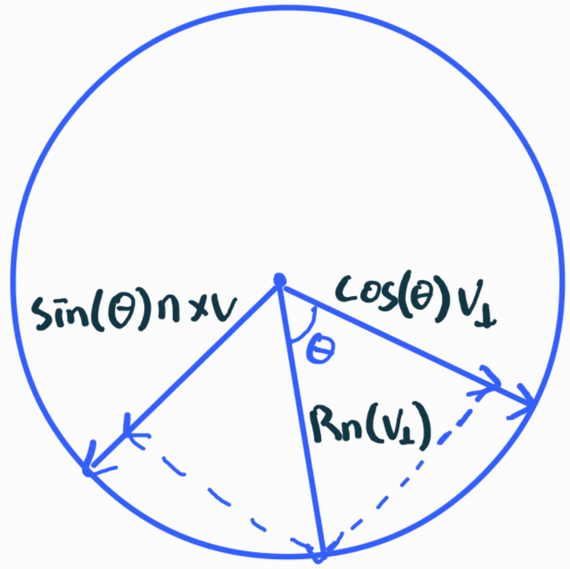


$[0.5, 2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [1, 1]$

$[-1, -2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [-2, -1]$

회전 - 회전축에 대한 벡터의 회전





n = 회전축인 Unit Vector

V = 회전을 시키고 싶은 벡터

$n \times V$ 와 $V_\perp$는 수직이다

$\|V_\perp\| = \|V\| \sin a = \|n\|\|V\| \sin a = \|n \times V\|$

$\|V_\perp\| = \|n \times V\|$

평면을 정의하기 위해 서로 다른 두 벡터가 필요하다. ($n \times V$와 $V_\perp$로 평면)

$n \times V$로 n과 V에 수직인 벡터를 구하고

V에 V를 n에 Projection한 벡터를 빼 새벡터를 구한다.

$V_\perp$는 n과 V로 만들어져 $n \times V$와 수직이다.

회전도 선형변환이기에 행렬로 표현할 수 있다.

벡터를 회전시키려면 벡터 × 행렬로 계산할 수 있다.

3차원 공간에서의 회전은 어떤 회전축에 대한 회전으로 정의할 수 있다

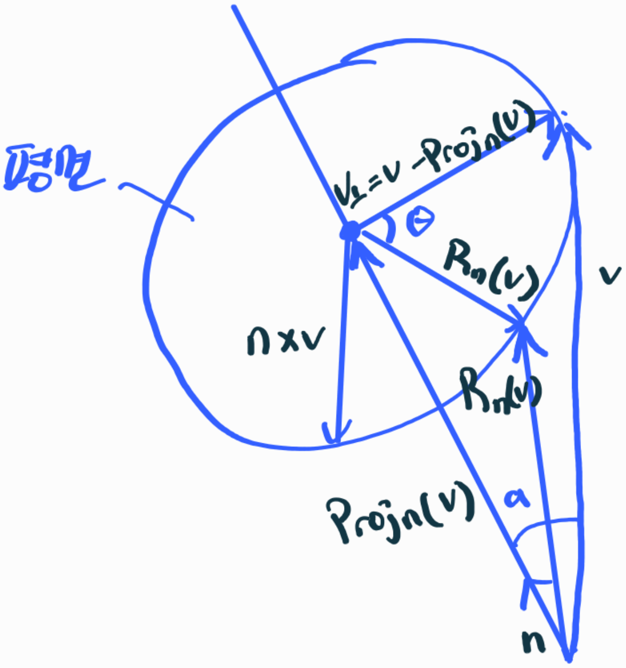
물체를 회전시키려면 정해야하는 것

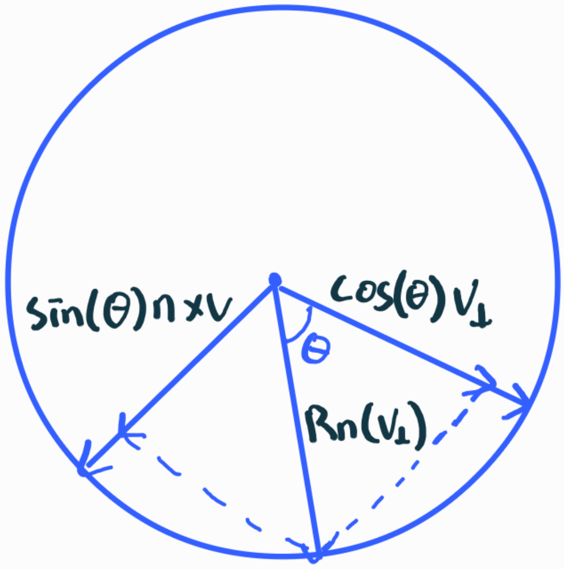
1) 어떤 축에 대해 회전할지 (회전축 정하기)

2) 얼마만큼 회전할지 각도 정하기

회전축 x, y, z 와 회전 각도 θ, 숫자 4개로 3차원 공간에서의 회전을 표현할 수 있다.

3차원 공간에서의 회전을 다루는 가장 일반적인 기법은 사원수(Quaternion)을 사용한다.





$\|n\| = 1$으로 가정 n = 회전축, v = 회전시킬 벡터

v를 두 벡터으로 분리

$v = perp_n(v) + proj_n(v)$, $perp_n(v)$ = v가 n에 대해 수직, $proj_n(v)$ = v를 n에 투영

$v_\perp = perp_n(v) = v - proj_n(v)$

회전시킨 벡터 $R_n(v) = proj_n(v) + R_n(v_\perp)$

$\|n \times v\| = \|n\|\|v\| \sin a = \|v_\perp\|$

$R_n(v_\perp) = \cos\theta\, v_\perp + \sin\theta\,(n \times v)$

$$R_n(v) = proj_n(v) + R_n(v_\perp)$$
$$= (n \cdot v)n + \cos\theta\, v_\perp + \sin\theta\,(n \times v)$$
$$= (n \cdot v)n + \cos\theta\,(v - (n \cdot v)n) + \sin\theta\,(n \times v)$$

$$R_n(v) = \cos\theta\, v + (1-\cos\theta)(n \cdot v)n + \sin\theta\,(n \times v)$$

$n = (x, y, z)$ $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

$$R_n = \begin{bmatrix} c + (1-c)x^2 & (1-c)xy + sz & (1-c)xz - sy \\ (1-c)xy - sz & c + (1-c)y^2 & (1-c)yz + sx \\ (1-c)xz + sy & (1-c)yz - sx & c + (1-c)z^2 \end{bmatrix}$$

R_n = 임의의 회전축에 대한 회전

더 간단하게 x, y, z축을 따로 따로 생각하기

회전축 x

$n=(1,0,0)$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

회전축 y

$n=(0,1,0)$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

회전축 z

$n=(0,0,1)$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

회전행렬의 역행렬은 전치(Transpose) 행렬과 같다.
역행렬을 전치행렬로 쉽게 구할 수 있다.

$$R_n = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy+sz & (1-c)xz-sy \\ (1-c)xy-sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz+sx \\ (1-c)xz+sy & (1-c)yz-sx & c+(1-c)z^2 \end{bmatrix}$$

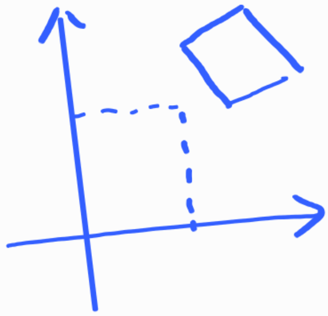
$$R_n^{-1} = R_n^T = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy-sz & (1-c)xz+sy \\ (1-c)xy+sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz-sx \\ (1-c)xz-sy & (1-c)yz+sx & c+(1-c)z^2 \end{bmatrix}$$

Affine Transformation (애파인 변환)

· 회전과 스케일링은 선형변환이지만 이동은 아니기에 Affine 변환을 사용해 선형변환과 이동을 하나의 행렬로 표현할 수 있다.

· Homogeneous Coordinates

- 벡터 $(x, y, z, 0)$은 이동 X
- 포인트 $(x, y, z, 1)$은 이동 O
- 포인트 − 포인트 = 벡터
- 포인트 + 벡터 = 포인트



· 변환 전 직선은 변환 후에도 직선이다.

회전 이동

$$x' = \boxed{x\cos\theta - y\sin\theta} + \boxed{wb_x}$$
$$y' = \boxed{x\sin\theta + y\cos\theta} + \boxed{wb_y}$$

$$[x', y', w] = [x, y, w]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ b_x & b_y & 1 \end{bmatrix}$$

벡터 $w = 0$, 포인트 $w = 1$

w가 임의의 실수인건 0과 1 뿐만이 아니라 Projection에서도 사용한다.

$\underset{\text{Affine 변환}}{\alpha(u)} = T(u) + b$, $T(u)$=선형변환, b=이동벡터

$$\alpha(u) = uA + b = [x, y, z]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + [b_x, b_y, b_z] = [x', y', z']$$

3차원에서는 4x4 행렬 사용

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

Affine Transformation

이동 행렬

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b_x & -b_y & -b_z & 1 \end{bmatrix}$$

스케일링 행렬

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

회전 행렬

$$R_n = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy+sz & (1-c)xz-sy & 0 \\ (1-c)xy-sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz-sx & 0 \\ (1-c)xz+sy & (1-c)yz-sx & c+(1-c)z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \cos\theta,\ s = \sin\theta$$

$$R_n^{-1} = R_n^T = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy-sz & (1-c)xz+sy & 0 \\ (1-c)xy+sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz-sx & 0 \\ (1-c)xz-sy & (1-c)yz+sx & c+(1-c)z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$