

Quaternion(쿼터니언, 사원수)

천문에는 3차원 공간에서의 회전을 표현할 때 Quaternion을 사용한다.

Quaternion으로 회전을 표현할 때는 하나의 회전축에 대한 회전각도로 표현이 가능해 Gimbal Lock 같은 문제를 원천적으로 피할 수 있다.

핵심 요약

1. 3차원 회전을 4개로 표현

- 3차원 공간의 회전을 표현할 때 사용하는 Quaternion은 절대값이 1인 단위 벡터로 제약 조건이 있어 4개로 표현되는 단점도.

2. 회전 행렬과 호환

- Graphics Pipeline은 헤비하게 Matrix를 Quaternion을 직접 사용하기 보단 Matrix \rightarrow Quaternion으로 바꾸거나 계산한 Quaternion을 Matrix로 변환해 사용한다.

3. 회전의 보간(Interpolation)에 유리

$$q = xi + yj + zk + w = (u, w)$$

Quaternion 계산 핵심

핵심 1 : 벡터 v 를 회전시킬 때 회전하는 만큼 회전시키고 싶다면

1. Quaternion $p = (v, 0)$ 을 만든다. Vector \rightarrow Quaternion 변환
2. Quaternion $q = (n \sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$ 을 만든다. 회전 표현
3. Conjugate(켤레) Quaternion $q^* = (-n \sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$
4. Quaternion $p' = (v, 0) = q p q^*$ 로 회전시킨다.
[회전된 Quaternion]

핵심 2 : Quaternion q 로부터 회전행렬을 만들어서 쓸 수도.

회전행렬을 Quaternion으로 만들어 사용할 수 있다.

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \text{ 라고 할 때}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & 2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}$$

그래픽스 파이프라인은 행렬계산에 최적화되어 있기에 Quaternion을 직접 사용하지 않고 행렬을 바꾸기 시장에서는 별도로 많이 사용된다.
경우에 따라 행렬을 아끼기 위해 Quaternion으로 저장하거나 한다.

켤레复数의 구성

$$q = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + w = (u, v), \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \text{는 허수}$$

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = \bar{i}\bar{j}\bar{k} = -1$$

$$\bar{i}\bar{j} = \bar{k} = -\bar{j}\bar{i}$$

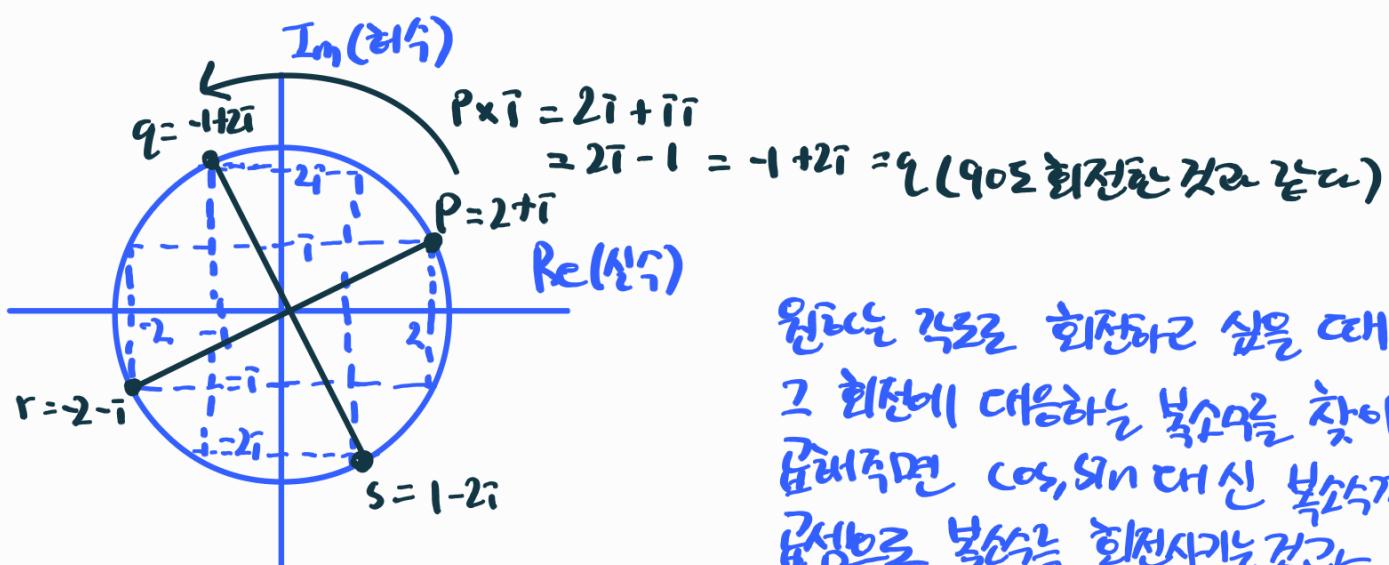
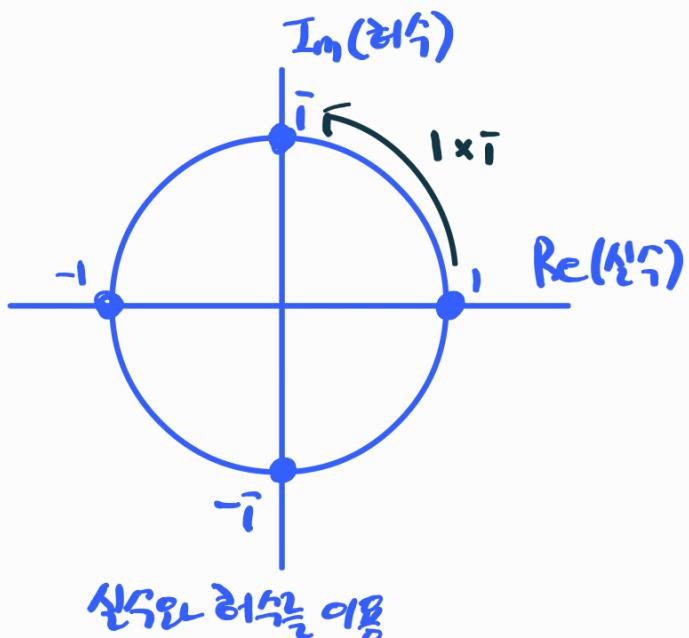
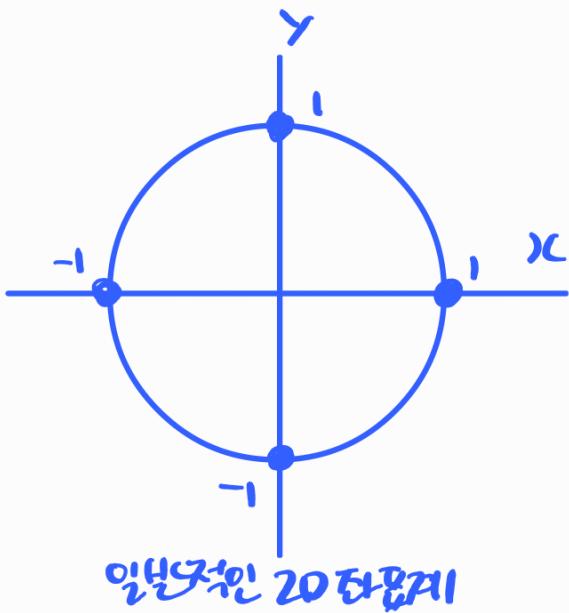
$$\bar{j}\bar{k} = \bar{i} = -\bar{k}\bar{j}$$

$$\bar{k}\bar{i} = \bar{j} = -\bar{i}\bar{k}$$

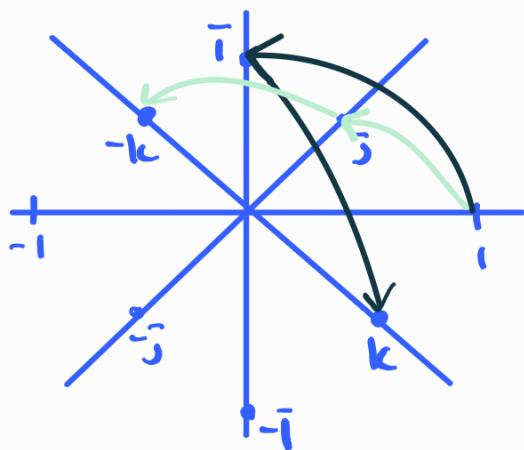
실수: real number (x, y, z, w)

허수: imaginary number ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$)

복소수: Complex Number ($q, a+bi$ 형태)



원상을 각으로 회전하고 싶을 때
그 회전에 대응하는 복소수를 찾아서
곱해주면 \cos, \sin 대신 복소수끼리의
곱셈으로 복소수를 회전시키는 것과
동일한 효과를 얻을 수 있다.



$$\bar{i}j = k, \bar{i}가 \bar{j}에서 j축을 기준으로 회전해 k가 됨$$

$$j\bar{i} = -k, \bar{j}가 \bar{i}에서 i축을 기준으로 회전해 -k가 됨$$

$$\bar{i}\bar{j} = -\bar{j}\bar{i}$$

기본연산

$u=v$ 이고 $a=b$ 이면 $(u,a)=(v,b)$, Quaternion의 4개의 원소를 같은 원소로 같은 Quaternion

 $(u,a) \pm (v,b) = (u \pm v, a \pm b)$, 각각 \pm 계산

$$q = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + w = (u, w), \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}는 허수$$

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = \bar{i}\bar{j}\bar{k} = -1$$

$$\bar{i}\bar{j} = k = -\bar{j}\bar{i}$$

$$\bar{j}\bar{k} = \bar{i} = -k\bar{j}$$

$$k\bar{i} = \bar{j} = -\bar{i}k$$

곱셈

$$q_a q_b = (a, w_a)(b, w_b) = ((x_a, y_a, z_a), w_a)((x_b, y_b, z_b), w_b)$$

$$= (x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k} + w_a)(x_b\bar{i} + y_b\bar{j} + z_b\bar{k} + w_b)$$

$$= (w_a w_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)$$

$$+ (w_a x_b + w_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)\bar{i}$$

$$+ (w_a y_b + w_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)\bar{j}$$

$$+ (w_a z_b + w_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)\bar{k}$$

$$q_a q_b = (w_a b + w_b a + a \times b, w_a w_b - a \cdot b)$$

$$a \cdot b = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

$$a \times b = (y_a z_b - y_b z_a)\bar{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\bar{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\bar{k}$$

Quaternion

Quaternion Norm

$$\|q\| = \|xi + yj + zk + w\| = \|(u, w)\|$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{\|u\|^2 + w^2}$$

Inverse Quaternion

Conjugate(켤레) Quaternion

$q = (u, w)$ 의 conjugate인 $q^* = (-u, w)$

Inverse

$$qq^* = \|q\|^2 = \|q^*\|^2$$

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

만약 $\|q\|=1$ 인 단위 Quaternion이면 $q^{-1}=q^*$

회전 - 벡터 v 를 회전시킬 때 $v \rightarrow p = (v, 0)$

$$qPq^{-1} = qPq^*$$

$$= (u, w)(v, 0)(-u, w)$$

$$= (u, w)(wv - v \times u, v \cdot u), \text{ Quaternion 곱셈}$$

$$= ((w^2 - u \cdot v)v + 2(u \cdot v)u + 2w(u \times v), 0)$$

$q = \text{회전 Quaternion}(각도/茱티나운)$
 $q^* = \text{회전 Quaternion의 Conjugate}$

$q = (n \sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$, $\|n\|=1$ 인 경우 q 로 unit Quaternion이 된다.

$$qPq^* = \cos(\theta)v + (1 - \cos(\theta))(n \cdot v)n + \sin(\theta)(n \times v)$$

$$R_n(v) = \text{proj}_n(v) + R_n(v_{\perp})$$

앞에서 유도한 회전과 동일

$$= (n \cdot v)n + \cos \theta v_{\perp} + \sin \theta (n \times v)$$

$$= (n \cdot v)n + \cos \theta (v - (n \cdot v)n) + \sin \theta (n \times v)$$

$$= \cos \theta v + (1 - \cos \theta)(n \cdot v)n + \sin \theta (n \times v)$$