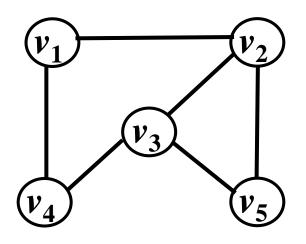
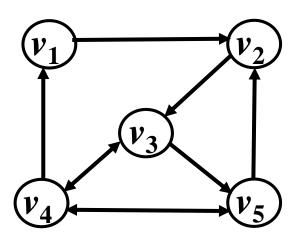


- 7.2.1 邻接矩阵
- 7.2.2 邻接表
- 7.2.3 有向图的十字链表存储表示 (了解)
- 7.2.4 无向图的邻接多重表存储表示(了解)





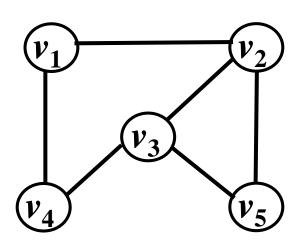


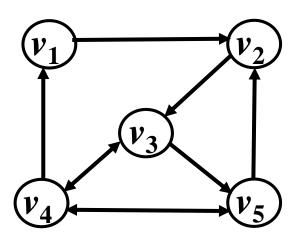


- → 是否可以采用顺序存储结构存储图(一维数组)?
 - 图的特点: 顶点之间的关系是*m:n*,即任何两个顶点之间都可能存在 关系(边),无法通过存储位置表示这种任意的逻辑关系,所以,图 无法采用顺序存储结构。

→ 如何存储图?

- 考虑图的定义,图是由顶点和边组成的;
- 如何存储顶点、如何存储边----顶点之间的关系。





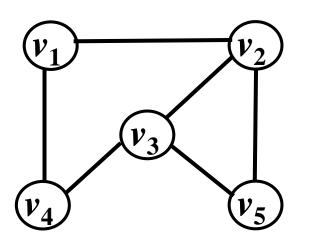


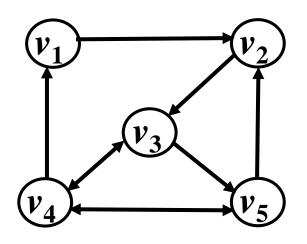


邻接矩阵 (Adjacency Matrix)表示(数组表示法)

- → 基本思想:
 - 用一个一维数组存储图中顶点的信息,用一个二维数组(称为邻接矩阵)存储图中各顶点之间的邻接关系。
 - 假设图G=(V, E)有n个顶点,则邻接矩阵是一个 $n \times n$ 的方阵,定义为:

edge
$$[i]$$
 $[j] = \begin{cases} 1 & \text{若}(i,j) \in E \text{ 或} < i,j > \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$



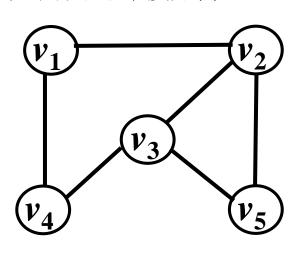


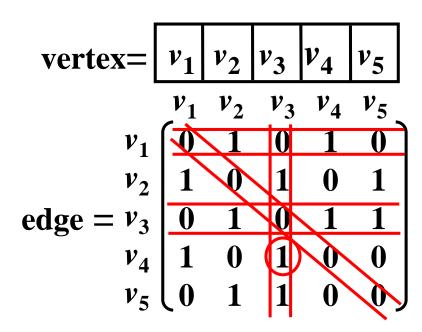




邻接矩阵 (Adjacency Matrix)表示(数组表示法)

→ 无向图的邻接矩阵:





→ 存储结构特点:

■ 主对角线为 0 且一定是对称矩阵;

问题: 1. 如何求顶点 v_i 的度?

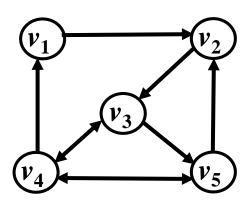
- **2.**如何判断顶点 v_i 和 v_i 之间是否存在边?
- 3.如何求顶点 v_i 的所有邻接点?

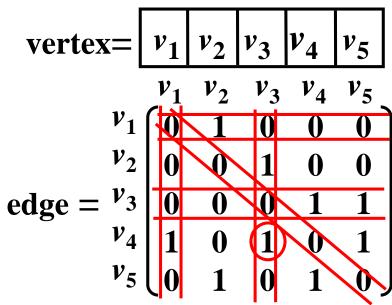




邻接矩阵 (Adjacency Matrix)表示(数组表示法)

→ 有向图的邻接矩阵:





→ 存储结构特点:

■ 有向图的邻接矩阵不一定对称

问题:1.如何求顶点 v_i 的出度?

- 2. 如何判断顶点 v_i 和 v_j 之间是否存在有向边?
- **3.**如何求邻接自(于)顶点 ν_i 的所有顶点?
- 7.如何求邻接到顶点 v_i 的所有顶点?





邻接矩阵 (Adjacency Matrix)表示(数组表示法)

▶ 存储结构定义:

假设图G有n个顶点e条边,则该图的存储需求为

typedef struct {

 $O(n+n^2) = O(n^2)$,与边的条数e无关。

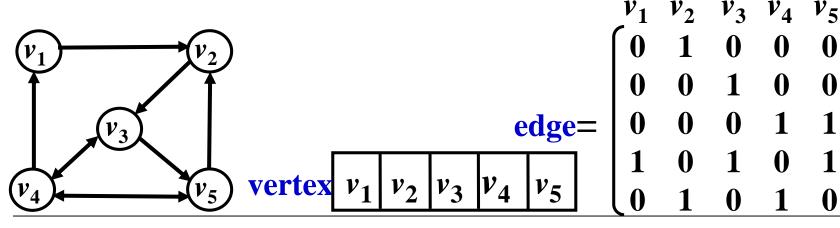
VertexData verlist [NumVertices]; //顶点表

EdgeData edge[NumVertices][NumVertices];

//邻接矩阵—边表,可视为边之间的关系

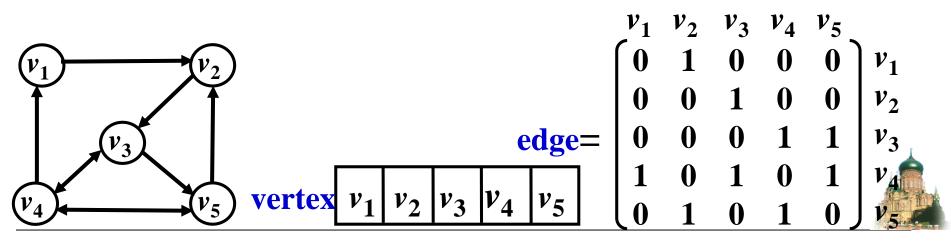
int n, e; //图的顶点数与边数

} MTGraph;





- → 存储结构的建立----算法实现的步骤:
- 1.确定图的顶点个数n和边数e;
- 2.输入顶点信息存储在一维数组vertex中;
- 3.初始化邻接矩阵;
- 7.依次输入每条边存储在邻接矩阵edge中;
 - 7.1 输入边依附的两个顶点的序号i, j;
 - 7.2 将邻接矩阵的第i行第j列的元素值置为1;
 - 7.3 将邻接矩阵的第j行第i列的元素值置为1。



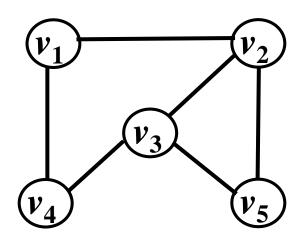


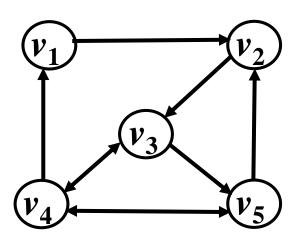
→ 存储结构的建立算法的实现: void CreateMGragh (MTGragh *G) //建立图的邻接矩阵 int i, j, k, w; $cin>>G\rightarrow n>>G\rightarrow e;$ //1.输入顶点数和边数 for (i=0; i<G→n; i++) //2.读入顶点信息, 建立顶点表 G→vertlist[i]=getchar(); for $(i=0; i< G\rightarrow n; i++)$ for $(j=0;j< G\rightarrow n;j++)$ G→edge[i][j]=0; //3.邻接矩阵初始化 for (k=0; k<G→e; k++) { //4.读入e条边建立邻接矩阵 // 输入边(i,j)上的权值w cin>>i>>j>>w; $G \rightarrow edge[i][j]=w; G \rightarrow edge[j][i]=w;$ }//时间复杂度: $T = O(n + n^2 + e) \cdot T = O(n^2)$





- 7.2.1 邻接矩阵
- 7.2.2 邻接表
- 7.2.3 有向图的十字链表存储表示 (了解)
- 7.2.4 无向图的邻接多重表存储表示(了解)



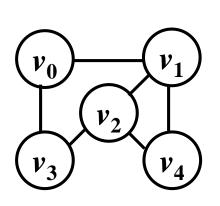


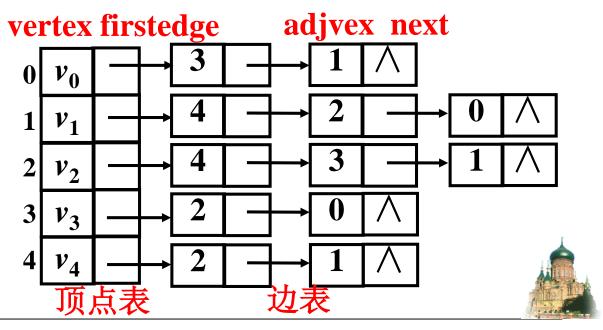




邻接表(Adjacency List)表示

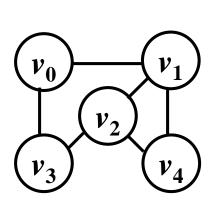
- → 无向图的邻接表:
 - 对于无向图的每个顶点 v_i ,将所有与 v_i 相邻的顶点链成一个单链表,称为顶点 v_i 的边表(顶点 v_i 的邻接表);
 - 再把所有边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。

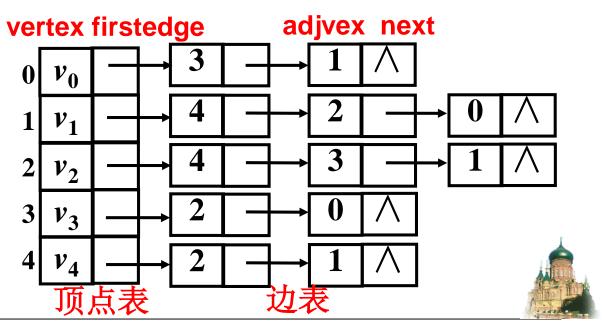






- → 无向图的邻接表存储的特点:
 - 边表中的结点表示什么?
 - 如何求顶点 v_i的度?
 - 如何判断顶点v_i和顶点v_i之间是否存在边?
 - 如何求顶点 v_i的所有邻接点?
 - 空间需求O(n+2e)

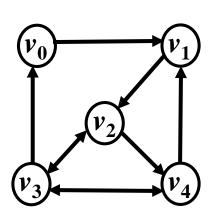


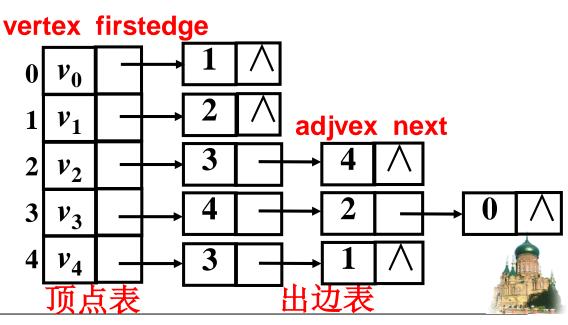




邻接表(Adjacency List)表示

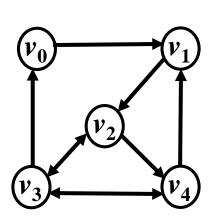
- → 有向图的邻接表---正邻接表
 - 对于有向图的每个顶点 v_i ,将<mark>邻接于 v_i </mark>的所有顶点链成一个单链表,称为顶点 v_i 的出边表;
 - 再把所有出边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。

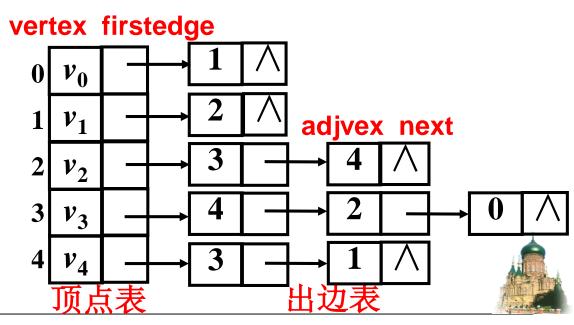






- → 有向图的正邻接表的存储特点
 - 出边表中的结点表示什么?
 - 如何求顶点 v_i的出度? 如何求顶点 v_i的入度?
 - 如何判断顶点 v_i和顶点v_i之间是否存在有向边?
 - 如何求邻接自顶点 v_i的所有顶点?
 - 如何求邻接到顶点 v_i的所有顶点?
 - 空间需求:O(n+e)

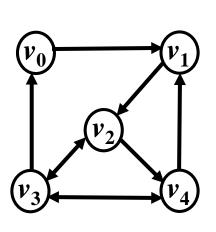


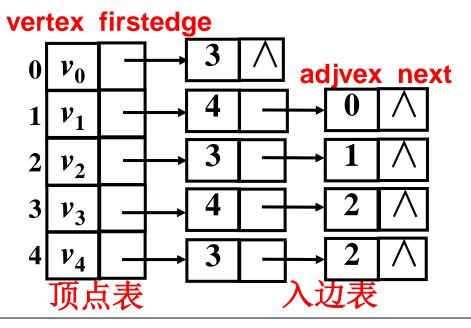




邻接表(Adjacency List)表示

- → 有向图的邻接表----逆邻接表
 - 对于有向图的每个顶点 v_i ,将<mark>邻接到 v_i </mark>的所有顶点链成一个单链表,称为顶点 v_i 的入边表;
 - 再把所有入边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。



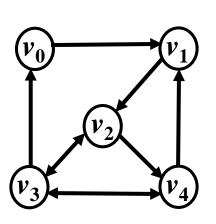


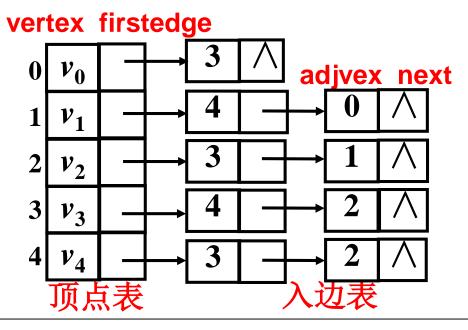




→ 有向图的逆邻接表的存储特点

- 入边表中的结点表示什么?
- 如何求顶点 v_i的入度? 如何求顶点 v_i的出度?
- 如何判断顶点 v_i和顶点v_i之间是否存在有向边?
- 如何求<mark>邻接到</mark>顶点 v_i的所有顶点?
- 如何求邻接自顶点 v_i的所有顶点?
- 空间需求:O(n+e)









邻接表存储结构的定义 typedef struct node {//边表结点 int adjvex; //邻接点域(下标) EdgeData cost; //边上的权值 struct node *next; //下一边链接指针 } EdgeNode; //顶点表结点 typedef struct { VertexData vertex; //顶点数据域 EdgeNode * firstedge;//边链表头指针 } VertexNode; //图的邻接表 typedef struct { **VertexNode** vexlist [NumVertices]; //顶点个数与边数 int n, e; } AdjGraph;

边表结点

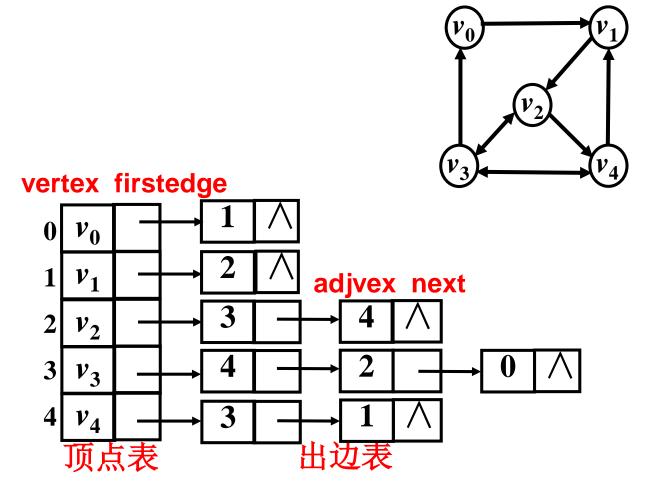
adjvex cost next

顶点表结点

vertex firstedge



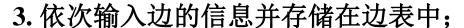




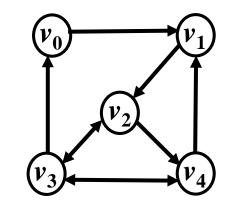




- → 邻接表存储结构建立算法实现的步骤:
- 1. 确定图的顶点个数和边的个数;
- 2. 建立顶点表:
 - 2.1 输入顶点信息;
 - 2.2 初始化该顶点的边表;



- 3.1 输入边所依附的两个顶点的序号tail和head和权值w;
- 3.2 生成邻接点序号为head的边表结点p;
- 3.3 设置边表结点p;
- 3.4 将结点p插入到第tail个边表的头部;







→ 邻接表存储结构建立算法的实现:

```
void CreateGraph (AdjGraph G)
{ cin >> G.n >> G.e;
                                 //1.输入顶点个数和边数
  for (int i = 0; i < G.n; i++) { //2.建立顶点表
    cin >> G.vexlist[i].vertex; //2.1输入顶点信息
    G.vexlist[i].firstedge = NULL; } //2.2边表置为空表
  for (i = 0; i < G.e; i++) { //3.逐条边输入,建立边表
                                       //3.1输入
    cin >> tail >> head >> weight;
    EdgeNode * p = new EdgeNode; //3.2建立边结点
    p\rightarrow adjvex = \frac{head}{p}; p\rightarrow cost = weight; //3.3设置边结点
    p→next = G.vexlist[tail].firstedge; //3.4链入第 tail 号链表的前端
    G.vexlist[tail].firstedge = p;
    p = new EdgeNode;
    p \rightarrow adjvex = tail; p \rightarrow cost = weight;
    p→next = G.vexlist[head].firstedge; //链入第 head 号链表的前端
   G.vexlist[head].firstedge = p; }
} //时间复杂度: O(2e+n)
```



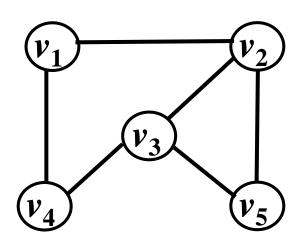
→ 图的存储结构的比较——邻接矩阵和邻接表

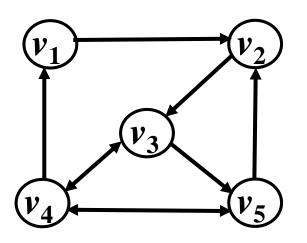
	邻接表	邻接矩阵
空间复杂度	无向图 O(V + 2 E); 有向图O(V + E)	O(V ²)
适合用于	存储稀疏图	存储稠密图
表示方式	不唯一	唯一
计算度/出度/入度	计算有向图的度、入(出)度不方 便,其余很方便	必须遍历对应行或列
找相邻的边	找有向图的入(出)边不方便,其 余很方便	必须遍历对应行或列





- 7.2.1 邻接矩阵
- 7.2.2 邻接表
- 7.2.3 有向图的十字链表存储表示 (了解)
- 7.2.4 无向图的邻接多重表存储表示(了解)









◆ 十字链表(有向图)

- 十字链表是有向图的另一种链式存储结构。
- 将有向图的邻接表和逆邻接表结合起来的结构。
- 在十字链表中有两种结点:
 - ◆ 弧结点:存储每一条弧的信息,用链表链接在一起。

弧结点结构: tailvex | headvex | hlink | tlink info

tailvex: 弧尾 headvex: 弧头

hlink: 指向弧头相同的下一条弧

tlink: 指向弧尾相同的下一条弧

Info: 弧的其他信息

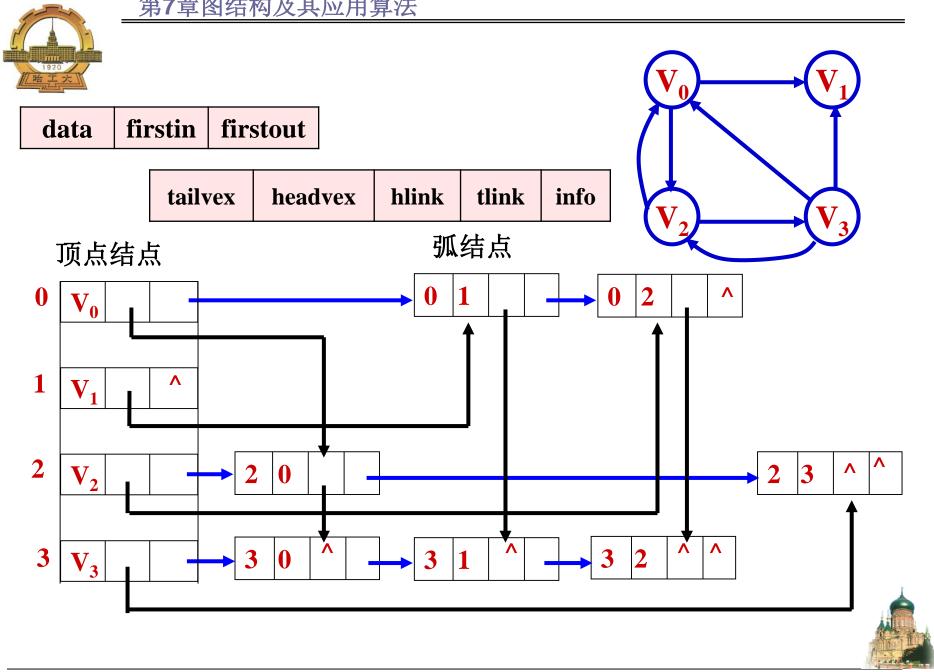
◆ 顶点结点:存储每一个顶点的信息,使用一维数组来存储。

顶点结点结构:

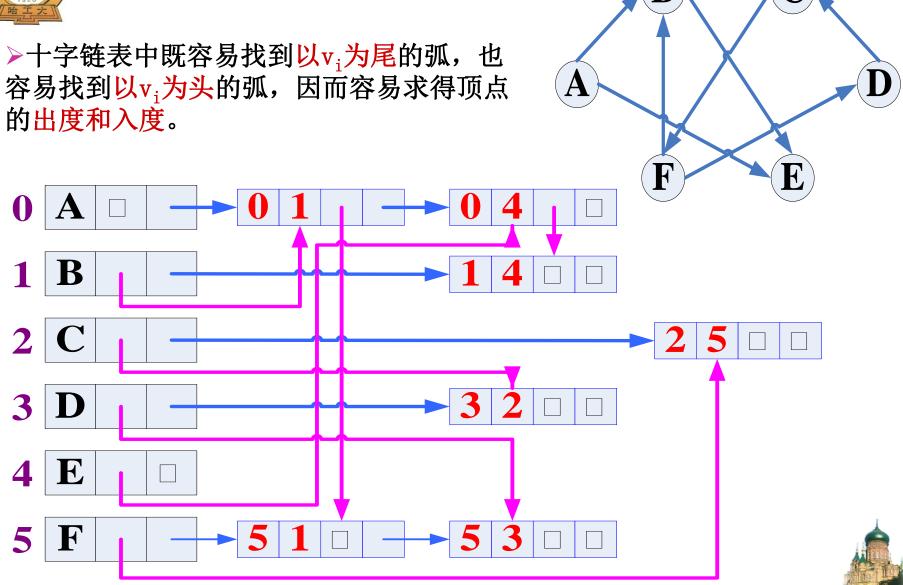
data

firstin | firstout



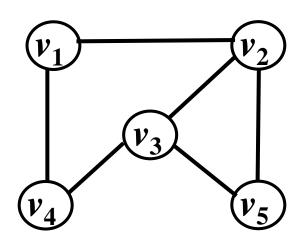


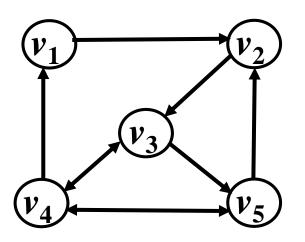






- 7.2.1 邻接矩阵
- 7.2.2 邻接表
- 7.2.3 有向图的十字链表存储表示 (了解)
- 7.2.4 无向图的邻接多重表存储表示(了解)









◆ 邻接多重表(无向图)

- 邻接多重表是无向图的另一种链式表示结构。
- 和十字链表类似。邻接多重表中,每一条边用一个结点表示。
- 在邻接多重表中有两种结点:
 - ◆ 边结点: 存储每一条边的信息,用链表链接在一起。

边结点结构: mark ivex ilink jvex jlink info

Mark: 标志域,用以标志该条边是否被搜索过 lvex和jvex: 该边依附的两个顶点在图中的位置 llink和jlink: 链域,指向下一条依附于顶点的边

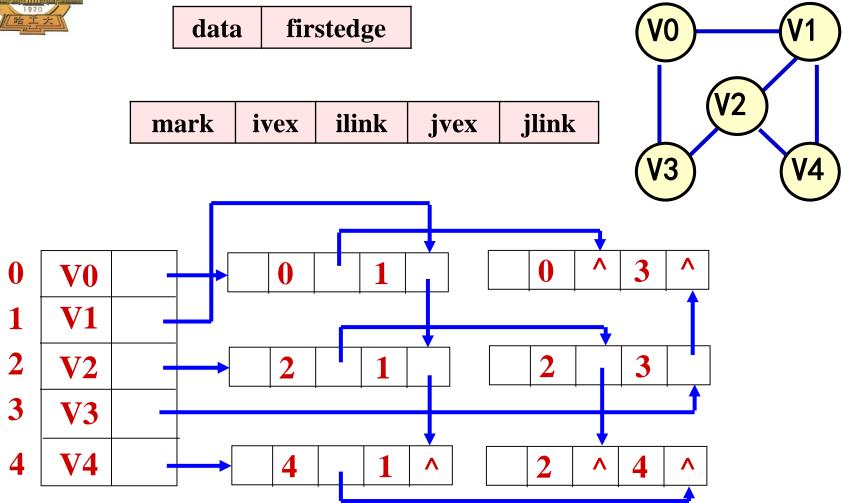
Info: 弧的其他信息

◆ 顶点结点:存储每一个顶点的信息,使用一维数组来存储。

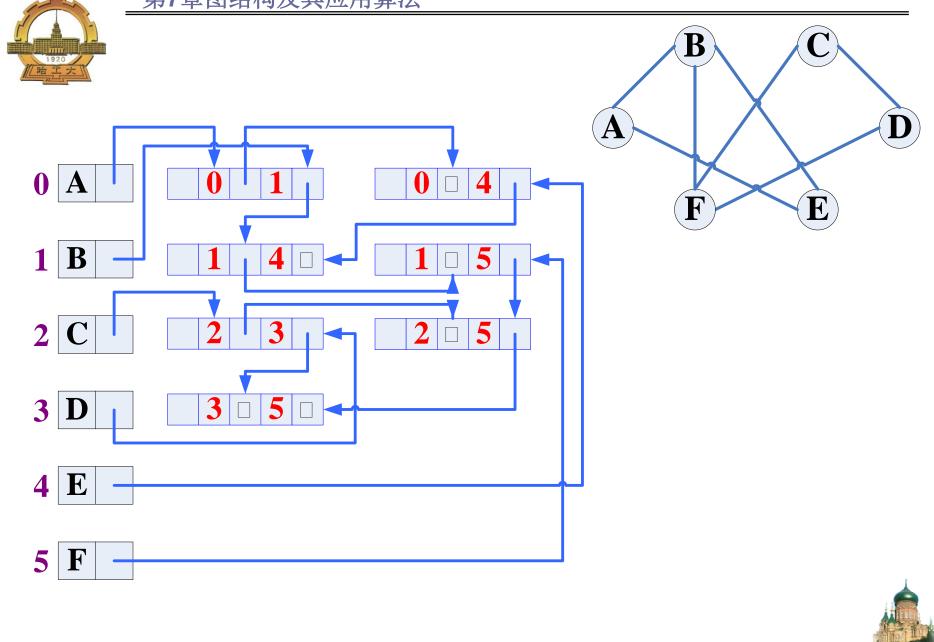
顶点结点结构: data firstedge













- → 图的遍历(图的搜索)
 - 从图中某一顶点出发,对图中所有顶点访问一次且仅访问一次。
 - 访问: 抽象操作,可以是对结点进行的各种处理
- → 图结构的复杂性
 - 在<mark>线性表</mark>中,数据元素在表中的编号就是元素在序列中的位置,因而 其编号是唯一的;
 - 在<mark>树结构</mark>中,将结点按层序编号,由于树具有层次性,因而其层序编号也是唯一的;
 - 在<mark>图结构</mark>中,任何两个顶点之间都可能存在边,顶点是没有确定的先 后次序的,所以,顶点的编号不唯一。





- ▶ 图的遍历要解决的关键问题
 - 在图中,如何选取遍历的起始顶点?
 - ●解决办法:从编号小的顶点(任取一顶点,适合编程)开始。
 - 从某个起点始可能到达不了所有其它顶点,怎么办?
 - ●解决办法: 多次调用遍历图(起点选没有用过的)的算法。
 - 图中可能存在回路,且图的任一顶点都可能与其它顶点"相通", 在访问完某个顶点之后可能会沿着某些边又回到了曾经访问过的顶 点。如何避免某些顶点可能会被重复访问?
 - ●解决办法:设访问标志数组visited[n]。
 - 在图中,一个顶点可以和其它多个顶点相连,当这样的顶点访问过 后,如何选取下一个要访问的顶点?
 - ●解决办法:深度优先搜索(Depth First Search)和广度优先搜索(Breadth First Search)。





7.3.1 深度优先搜索DFS (Depth First Search)

→ 深度优先遍历----类似于树结构的先序遍历

- (1)首先访问图中某一个顶点V_i,以该顶点为出发点;
- (2)任选一个与顶点 V_i 邻接的未被访问的顶点 V_j ; 访问 V_j ;
- (3)以 V_j 为新的出发点继续进行深度优先搜索,直至图中所有和 V_i 有路径的顶点均被访问到。





7.3.1 深度优先搜索DFS (Depth First Search)

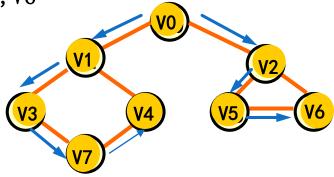
例

求图G以V0起点的的深度优先序列:

V0, V1, V3, V7, V4, V2, V5, V6,

V0, V1, V4, V7, V3, V2, V5, V6

由于没有规定 访问邻接点的顺序, 深度优先序列不是唯一的



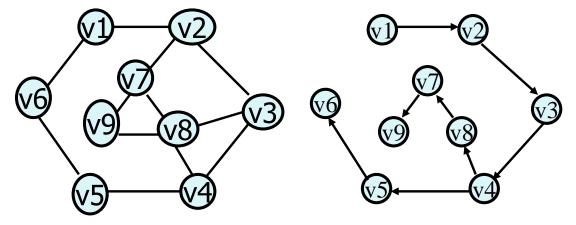




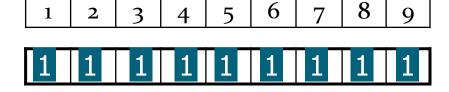
7.3.1 深度优先搜索DFS (Depth First Search)

第7章图

→ 深度优先搜索的示例演示



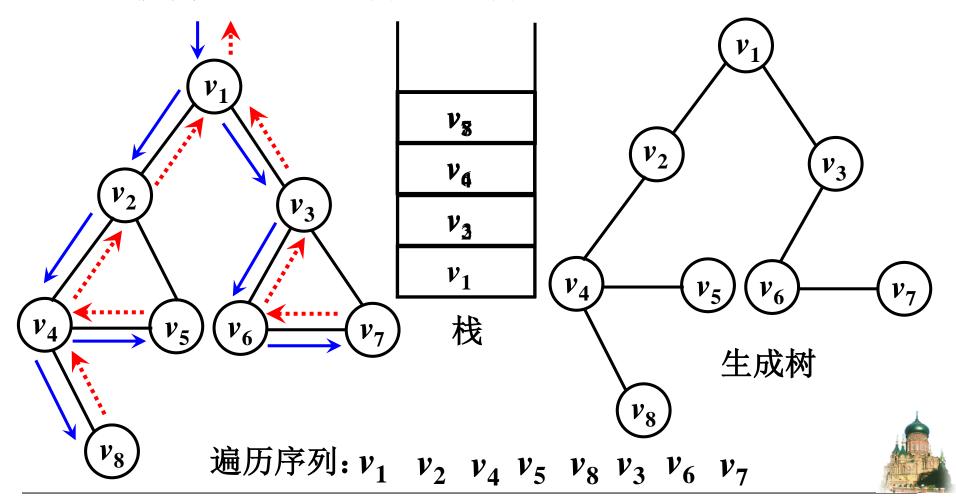
Visited[9]







- → 深度优先遍历示例
 - 深度优先遍历序列?入栈序列?出栈序列?





- → 从一个顶点出发的一次深度优先遍历算法:
 - 实现步骤:
 - 1. 访问顶点v; visited[v]=1;
 - 2. w=顶点v的第一个邻接点;
 - 3. while (w存在)
 - 3.1 if (w未被访问) 从顶点w出发递归执行该算法;
 - 3.2 w=顶点v的下一个邻接点;

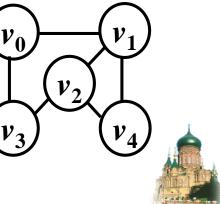




▶ 从一个顶点出发的一次深度优先遍历算法: void **DFS1** (AdjGraph* G, int i) //以v_i为出发点时对邻接表表示的图G进行先深搜索 EdgeNode *p; cout<<G→vexlist[i].vertex; visited[i]=True; **p**=**G**→**vexlist**[i].**firstedge**; **while(p) {** if (!visited[$p \rightarrow adjvex$]) vertex firstedge adjvex next DFS1(G, $p\rightarrow adjvex$); $p=p\rightarrow next;$ $\mathbf{v_1}$ } //**DFS1** $\mathbf{v_2}$ $\mathbf{v_3}$ 0

边表







7.3.1 深度优先搜索DFS (Depth First Search)

非连通图的深度优先搜索遍历

- ♣首先将图中每个顶点的访问标志设为 FALSE, 之后搜索图中每个顶点
- ♣若已被访问过,则该顶点一定是落在图中已求得的连通分量 上:
- ♣若还未被访问,则从该顶点出发遍历图,可求得图的另一个 连通分量。

如果一个无向图是非连通图,如何遍历?







→ 深度优先遍历主算法:

```
bool visited[NumVertices]; //访问标记数组是全局变量
void DFSTraverse (AdjGraph G) //主算法
// 先深搜索一邻接表表示的图G; 而以邻接矩阵表示G时,算法完全相同
{ int i;
 for ( int i = 0; i < G.n; i++)
    visited [i] =False; //标志数组初始化
 for ( int i = 0; i < G.n; i++)
   if (! visited[i])
      DFS(G,i); //从顶点i出发的一次深度优先搜索
```





- → 深度优先遍历特点:
 - 是递归的定义,是尽可能对纵深方向上进行搜索,故称<mark>先深或深</mark>度优先搜索。
- ◆ 先深或深度优先编号。
 - 搜索过程中,根据访问顺序给顶点进行的编号,称为<mark>先深</mark>或深度 优先编号。
- → 先深序列或DFS序列:
 - 先深搜索过程中,根据访问顺序得到的顶点序列,称为<mark>先深序列</mark> 或**DFS**序列。
- → 生成树(森林):
 - 有原图的所有顶点和搜索过程中所经过的边构成的子图。
- → 先深搜索结果不唯一
 - 即图的DFS序列、先深编号和生成森林不唯一。



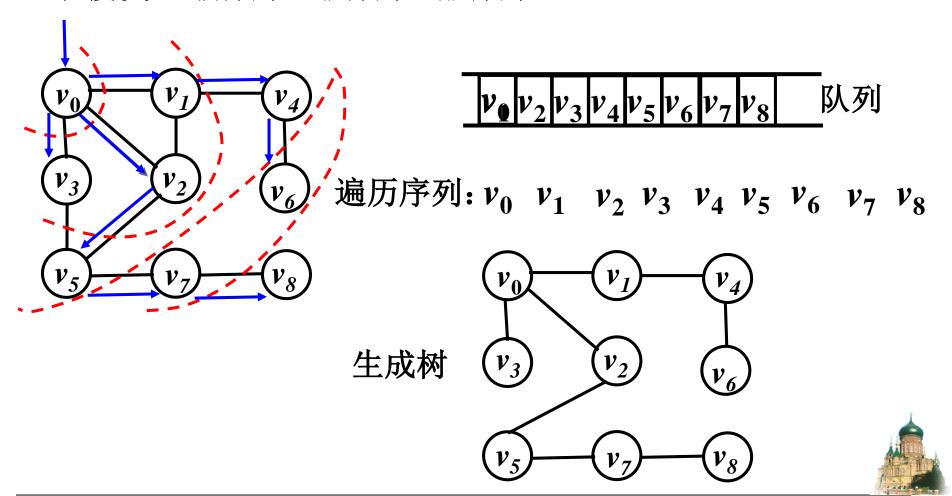


- → 广度优先遍历----类似于树结构的层序遍历
 - 设图G的初态是所有顶点都"未访问过(False)",在G中任选一个顶点 v 为源点,则广度优先搜索可定义为:
 - ①首先访问出发点 v, 并将其标记为"访问过 (True)";
 - ②接着依次访问所有与 v 相邻的顶点 w_1 , w_2 ... w_t ;
 - ③然后依次访问与 \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 … \mathbf{w}_t 相邻的所有未访问的顶点;
 - ④依次类推,直至图中所有与源点v有路相通的顶点都已访问过 为止;
 - ⑤此时,从 v 开始的搜索结束,若G是连通的,则遍历完成;否则在G中另选一个尚未访问的顶点作为新源点,继续上述搜索过程,直到G中的所有顶点均已访问为止。





- → 广度优先遍历示例
- → 广度优先遍历序列?入队序列?出队序列?





- → 广度优先遍历特点:
 - 尽可能横向上进行搜索,并使"先被访问的顶点的邻接点" 先于"后被访问的顶点的邻接点"被访问,故称先广搜索或 广度优先搜索。
- → 先广或广度优先编号:
 - 搜索过程中,根据访问顺序给顶点进行的编号,称为<mark>先广或</mark> 广度优先编号
- → 先广序列或BFS序列:
 - 先广搜索过程中,根据访问顺序得到的顶点序列,称为<mark>先广</mark> 序列或BFS序列。
- → 生成树(森林):
 - 有原图的所有顶点和搜索过程中所经过的边构成的子图。
- → 先广搜索结果不唯一:
 - 即图的BFS序列、先广编号和生成森林不唯一。





→ 广度优先遍历主算法:

```
bool visited[NumVertices]; //访问标记数组是全局变量
int dfn[NumVertices]; //顶点的先广编号
void BFSTraverse (AdjGraph G) //主算法
//* 先广搜索一邻接表表示的图G; 而以邻接矩阵表示G时,算法完
  全相同
{ int i, count = 1;
 for ( int i = 0; i < G.n; i++)
    visited [i] =False; //标志数组初始化
 for ( int i = 0; i < G.n; i++)
   if (! visited[i])
      BFS(G,i); //从顶点i出发的一次广度优先搜索
```





- → 从一个顶点出发的一次广度优先遍历算法:
 - 实现步骤:
 - 1. 初始化队列Q;
 - 2. 访问顶点v; visited [v]=1; 顶点v入队Q;
 - 3. while (队列Q非空)
 - 3.1 v=队列Q的队头元素出队;
 - 3.2 w=顶点v的第一个邻接点;
 - 3.3 while (w存在)
 - 3.3.1 如果w 未被访问,则 访问顶点w; visited[w]=1; 顶点w入队列Q;
 - 3.3.2 w=顶点v的下一个邻接点;





```
void BFS1 (AdjGraph *G, int k)//以v<sub>k</sub>为出发点时对用邻接表表示的图G进行先广搜索
   int i; EdgeNode *p; Queue Q; MakeNull(Q);
   cout << G\rightarrowvexlist[k].vertex; visited[k] = True;
   EnQueue (k, Q);
                                  //进队列
                                    //队空搜索结束
   while (! Empty (Q)) {
                                 //v<sub>i</sub>出队
       i=DeQueue(Q);
       p =G→vexlist[i].firstedge; //取v<sub>i</sub>的边表头指针
                                    //先广编号
       dfn[i] = count++;
                                    //若vi的邻接点 v<sub>i</sub> (j= p→adjvex)存在,依次搜索
       while ( p ) {
          if (!visited[p→adjvex]) { //若vj未访问过
              cout << G→vexlist[p→adjvex].vertex; //访问v<sub>i</sub>
                                                  //给v<sub>i</sub>作访问过标记
               visited[p \rightarrow adjvex]=True;
                                                  //访问过的v_i入队
               EnQueue ( p \rightarrow adjvex , Q );
                                     //找vi的下一个邻接点
          p = p \rightarrow next;
                / 重复检测 vi的所有邻接顶点
                        //外层循环,判队列空否
```



void BFS2 (MTGraph *G, int k) //以v_k为出发点时对用<mark>邻接矩阵</mark>表示的图G进行先广搜索

```
int i , j; Queue Q; MakeNull(Q);
    cout << G→vexlist[k]; //访问v<sub>k</sub>
    visited[k] = True; //给v<sub>k</sub>作访问过标记
   EnQueue (k, Q); // v<sub>k</sub>进队列
    while (! Empty (Q)) { //队空时搜索结束
        i=DeQueue(Q); //v<sub>i</sub>出队
        for(j=0; j< G\rightarrow n; j++) { //依次搜索vi的邻接点 v_i
            if ( G→edge[ i ][ j ] ==1 &&!visited[ j ]) { //若v<sub>i</sub>未访问过
                 cout << G→vexlist[j];//访问v<sub>j</sub>
                 visited[j]=True; //给v<sub>i</sub>作访问过标记
                 EnQueue (j,Q); //访问过的v<sub>i</sub>入队
         }//重复检测 v;的所有邻接顶点
     } // 外层循环,判队列空否
}//这里没有进行先广编号
```





无向图(的搜索)及其应用

- ■无向图连通性判定
 - 不连通:生成森林 求连通分量个数;求出每个连通分量;

●连通: 一棵生成树 判断是否有环路;求带权连通图的最小生成树;

