数字逻辑设计

高翠芸
School of Computer Science
gaocuiyun@hit.edu.cn

Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

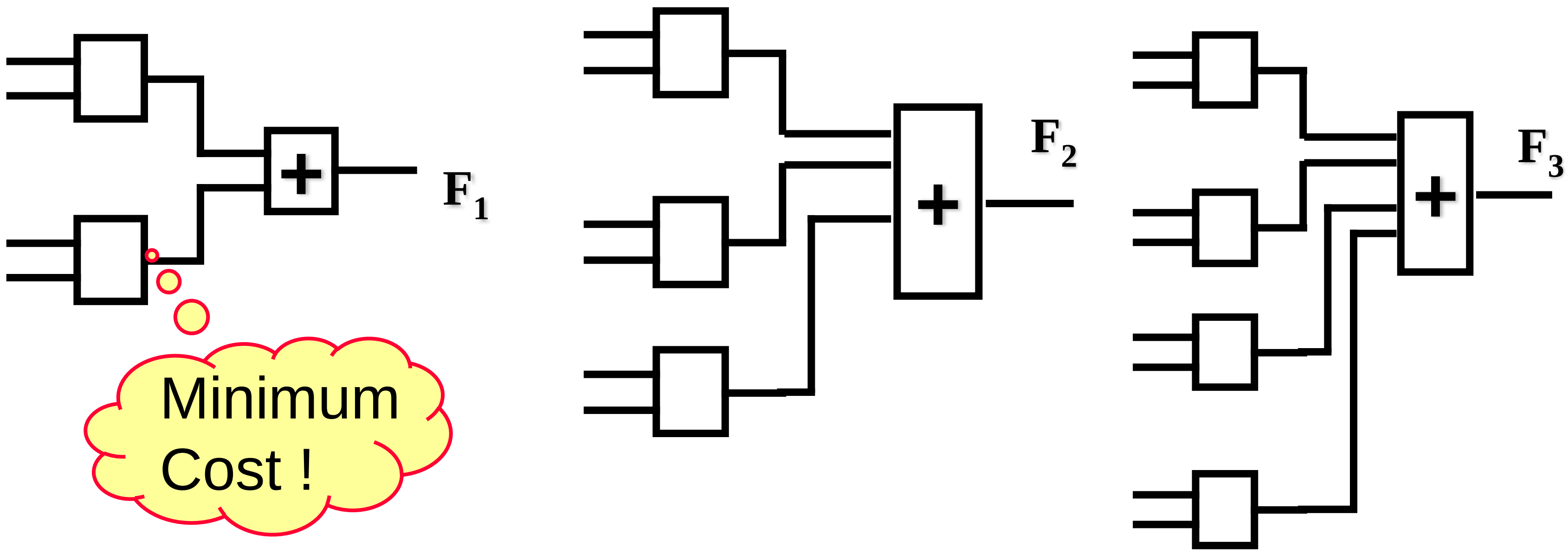
函数的最简形式

When a function is realized using **AND** and **OR** gates, the cost of realizing the function is directly related to the number of gates and gate inputs used.

$$F = AB + \bar{A}C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① F_1$$

$$= AB + \bar{A}C + BC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② F_2$$

$$= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③ F_3$$

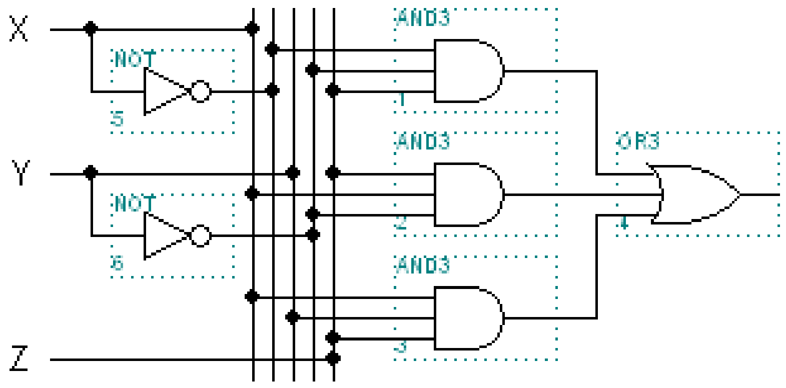


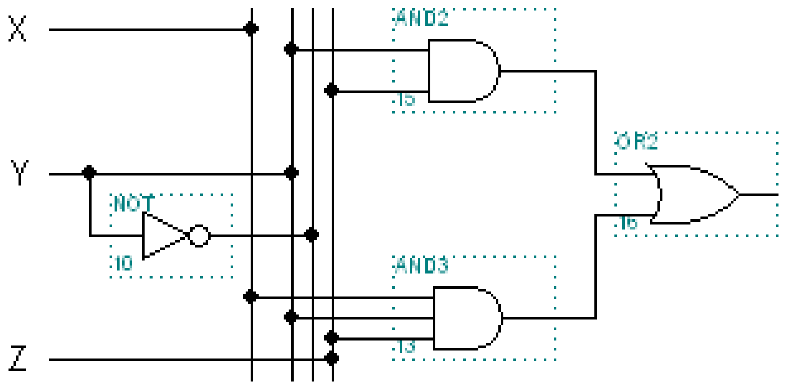
开关函数的最简形式

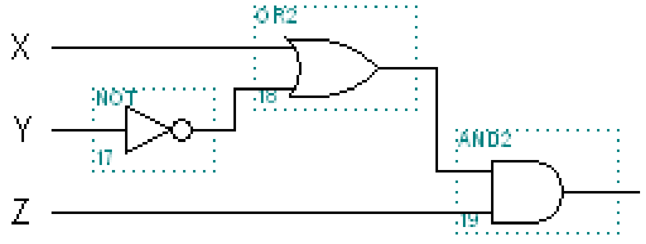
$$F=\sum\nolimits_{XYZ}(1,5,7)=x'y'z+xy'z+xyz$$

$$F=\left(x'y'z+xy'z\right)+xyz=y'z+xyz$$

$$F=\left(y'+xy\right)z=\left(y'+x\right)z$$







开关函数的最简形式

一个最简表达式中

① 逻辑门的数量最少
② 逻辑门的输入个数最少

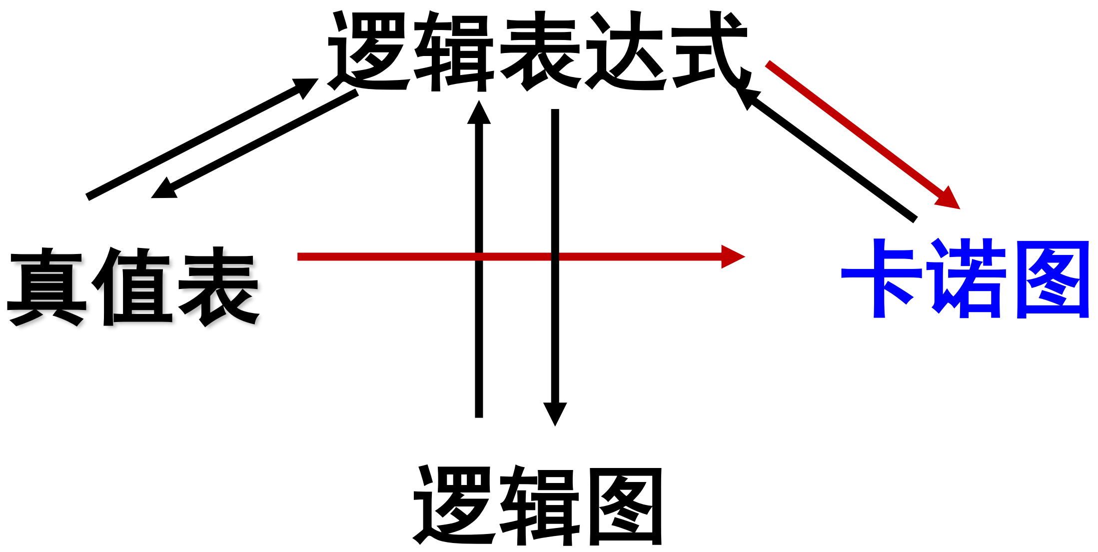
与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式不一定是唯一的.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

逻辑函数的表达方式之一



■化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

卡诺图的性质

- 卡诺图通常为正方形或矩形均匀分成2^n个小格，每个小格代表一个**最小项**。
- 单元格对应的最小项按**格雷码**摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

1. 两变量 K. Map

F=f(AB)

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

(a)

$A \backslash B$	0	1
0	0 0 $_0$	0 1 $_1$
1	1 0 $_2$	1 1 $_3$

(b)

A \ B	0	1
0	0	1
1	2	3

三变量卡诺图

F=f(ABC)

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

四变量卡诺图

F=f(ABCD)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

五变量卡诺图

F=f(ABCDE)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

卡诺图的特征

- 卡诺图上**几何相邻**的最小项**逻辑**上也相邻。

- **几何相邻**
  - 相接
  - 行或列首尾相接

- **逻辑相邻**—两个最小项中只有一个变量出现的形式不同

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

填写卡诺图

① 已知真值表

Truth Table

AB C	F
0 0 0	0 √
0 0 1	0 √
0 1 0	0 √
0 1 1	1 √
1 0 0	0 √
1 0 1	1 √
1 1 0	1 √
1 1 1	1 √

② 已知标准与或式:**与项是最小项时，按最小项编号的位置直接填入。**

③ 已知标准或与式

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F=\Sigma\, m(3,5,6,7)$$

$$F=\Pi\, M(0,1,2,4)$$

填写卡诺图

Example 1. $F=AB+BC+AC$

$$= AB(C+\overline{C})+BC(A+\overline{A})+AC(B+\overline{B})$$

$$= ABC+AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C$$

7 6 7 3 7 5

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Example 2. $F = \overline{(A \oplus B)(C+D)}$

$$= \overline{A \oplus B} + \overline{(C+D)}$$

$$= \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{C}\bar{D}$$

$$\bar{A}\bar{B} = \underbrace{\underline{00}00}_{0} + \underbrace{\underline{00}01}_{1} + \underbrace{\underline{00}10}_{2} + \underbrace{\underline{00}11}_{3}$$

$$AB = \underbrace{\underline{11}00}_{12} + \underbrace{\underline{11}01}_{13} + \underbrace{\underline{11}10}_{14} + \underbrace{\underline{11}11}_{15}$$

$$\bar{C}\bar{D} = \underbrace{00\underline{00}}_{0} + \underbrace{01\underline{00}}_{4} + \underbrace{10\underline{00}}_{8} + \underbrace{11\underline{00}}_{12}$$

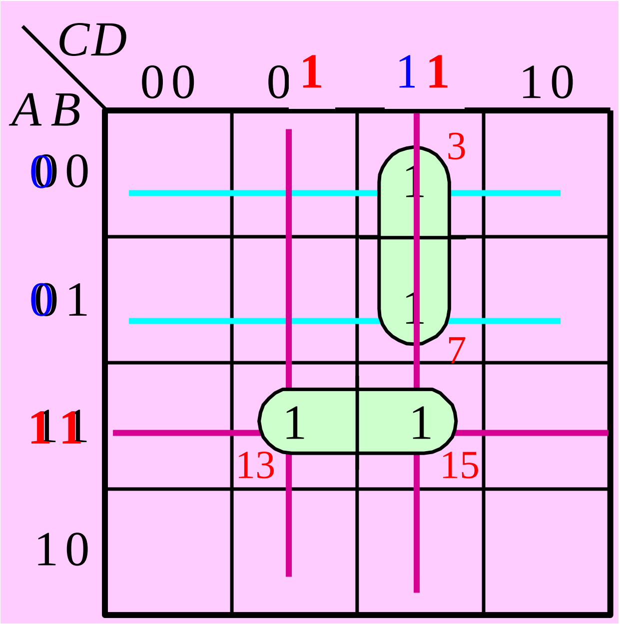
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

Example 3. $\mathbf{F} = \overline{A \oplus C \bullet \overline{\bar{B}\,(A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D})}}$

④与项不是最小项的形式

与项不是最小项的形式，按邻接关系直接填入卡诺图。

例如： $P(A,B,C,D)=\overline{A}CD+ABD$



先填$\overline{A}CD$，这是$\overline{A}$，这是CD；

$$\overline{A}CD=\overline{A}(B+\overline{B})CD$$

$$=\overline{A}BCD+\overline{A}\,\overline{B}CD$$

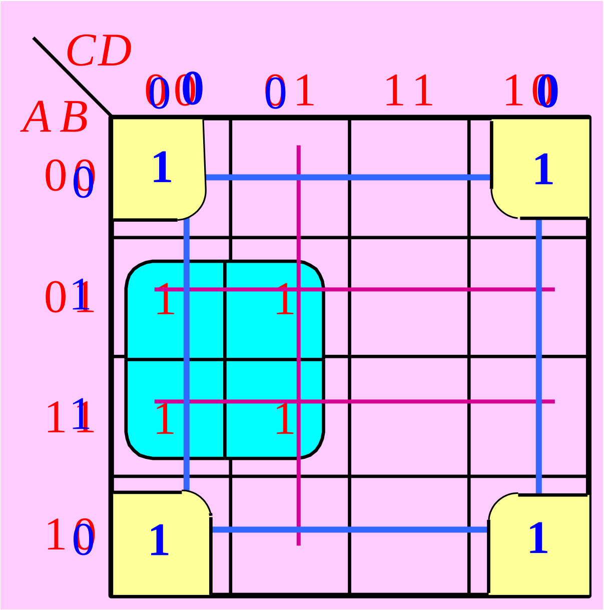
所以$\overline{A}CD$处于第一第二行和第三列的交点上（二行一列）。

再填 ABD，这是AB，这是D。

所以ABD处于第三行和第二、第三列的交点上（一行二列）。

将逻辑表达式填入卡诺图

例：将逻辑式$P=B\overline{C}+\overline{B}\overline{D}$填入卡诺图



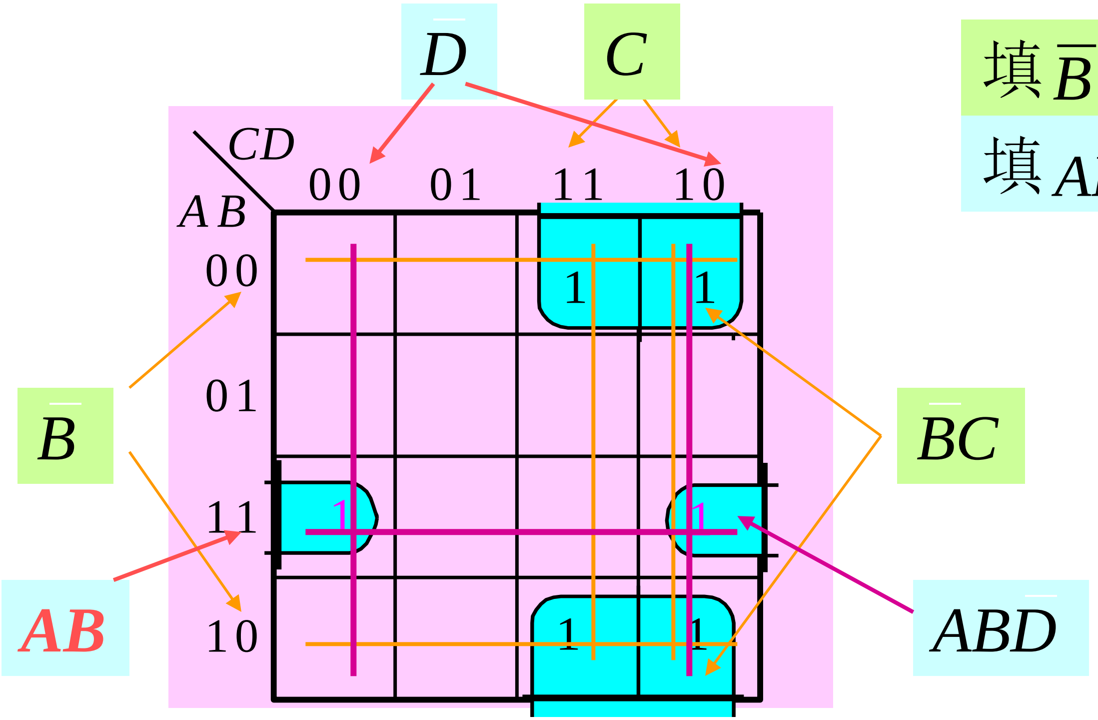
先填$B\overline{C}$，这是B,这是$\overline{C}$；

$B\overline{C}$ 这一与项处于第二、第三行和第一、第二列的交点处（二行二列）。

再填$\overline{B}\overline{D}$，这是$\overline{B}$，这是 $\overline{D}$。

$\overline{B}\overline{D}$ 这一与项处于第一、第四行和第一、第四列的交点处（二行二列）。

例：将逻辑式 $P=\overline{B}C+AB\overline{D}$ 填入卡诺图



填 $\overline{B}C$

填 $AB\overline{D}$

Properties of K. maps

■ 基于卡诺图的逻辑运算

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0

$+$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

$=$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

$\bullet$ $=$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0

$\oplus$ $=$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1

对应的小方格进行逻辑运算

Properties of K. maps

F

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

X·F

C \ AB	00	01	11	10
0		X	X	
1	X	X		

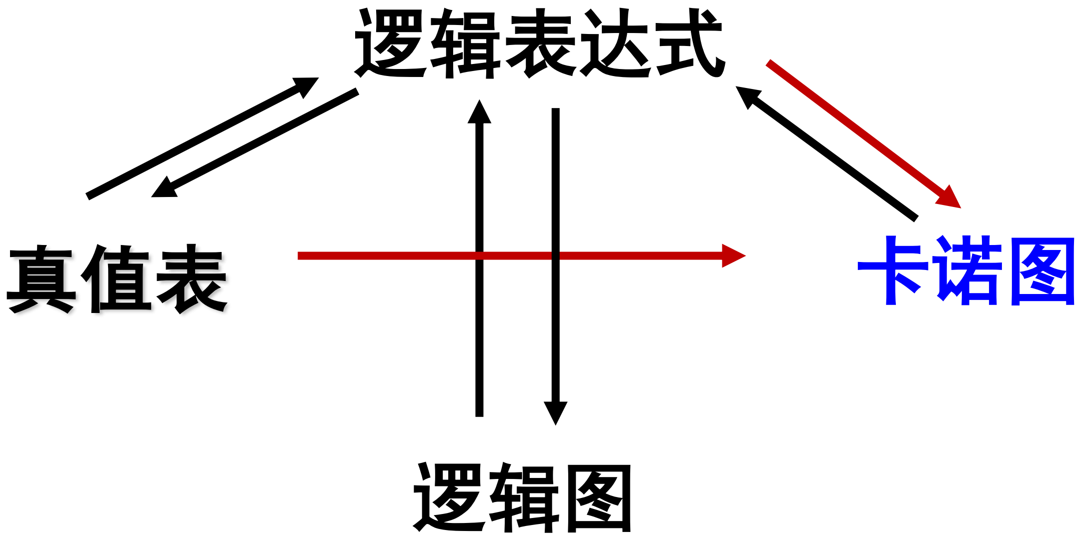
A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

F

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	1

$\overline{\mathbf{F}}$

Representation methods of logical function



- K. map is an especially useful tool for simplifying and manipulating switching functions of three or four variables.

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

卡诺图化简法

Methods

- 代数法
- 卡诺图法——
  - 图形法化简逻辑函数

$$F(A,B,C)=\bar{A}BC+ABC=BC(\bar{A}+A)=BC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：

- 最简与或式（AND-OR ）
- 最简或与式（OR-AND ）
- 最简与或非式（AND-OR-NOT ）

如何从卡诺图读最简与或式

Step ①: 画圈

- a).将相邻为1的小方格圈在一起。（小方格的个数必须为 2^m , m=0,1,2…)
- b).圈越大越好
- c).小方格可以重复使用

Adjacent:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的（本质上：满足格雷码特点）

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

如何从卡诺图读最简与或式

Step ②： 每个圈代表一个与项

观察 Left, Top } 变量取值不同——消去

变量取值相同 { 1: 原变量；0:反变量

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

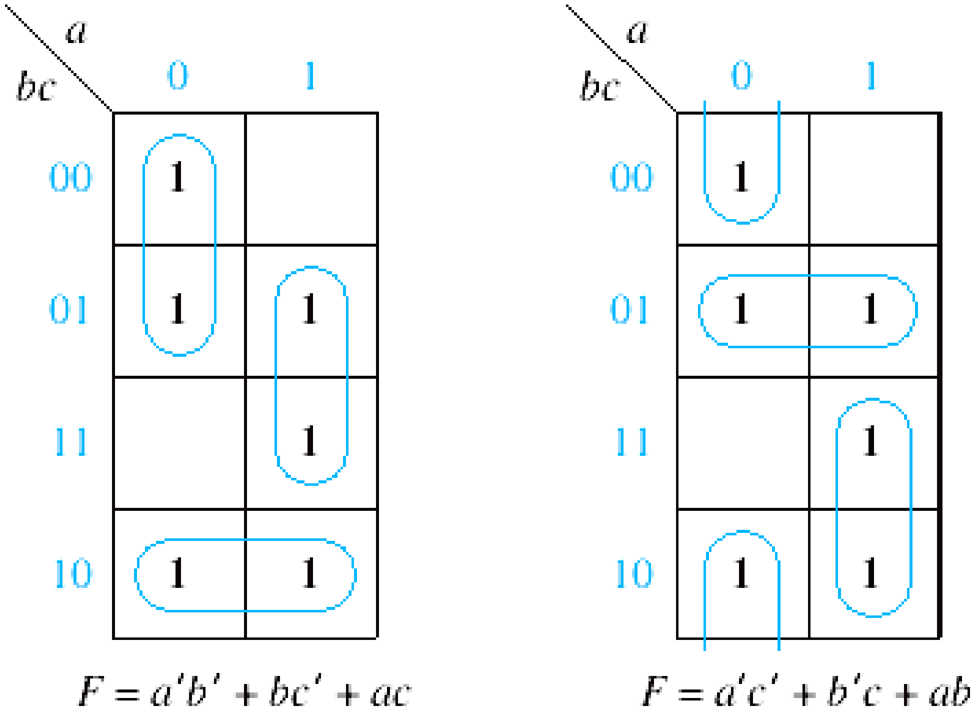
如何从卡诺图读最简与或式

Step ③: 将所有的与项相加

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

$$F=\bar{A}\bar{C}+AC+\bar{B}\bar{D}$$

如何从卡诺图读最简与或式



The two minimum solutions For *F*

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式不一定是唯一的。
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

如何从卡诺图读最简与或式

从卡诺图中读取：

- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）

如何从卡诺图读最简或与式

Step ①: 画圈

- a).将相邻为0的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , m=0,1,2…)
- b).圈越大越好
- c).小方格可以重复使用

Adjacent:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的
（本质上：满足格雷码特点）

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或与式

Step ②: 每个圈代表一个和项

观察 Left / Top —— 变量取值不同——消去

变量取值相同：
- 0: 原变量
- 1: 反变量

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或与式

Step ③: 将所有的和项相乘

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

$$F = (A+C) \cdot (\bar{A}+\bar{C}) \cdot (B + D)$$

投票 最多可选3项

设置

到目前哪里存在问题?

A 卡诺图基本概念

B 卡诺图化简

C 之前的内容

D 讲解速度快

E 讲解速度慢

提交

卡诺图化简法

从卡诺图中读取

- 最简与或式（**AND-OR** ）
- 最简或与式（**OR-AND** ）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT** ）

如何从卡诺图读最简与或非式

Step ①：读 $\overline{F}$的与或式

方法：在F的卡诺图中圈**0**（或者在$\overline{F}$ 的卡诺图中圈1）

Step ②：对$\overline{F}$求反

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

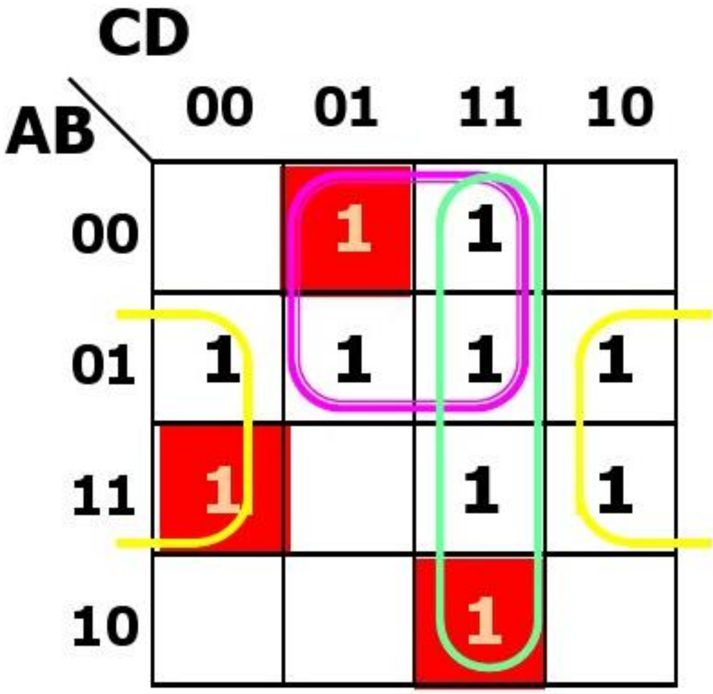
F= (A+B)(B+C)(A+C)

Minimum OR-AND Expressions

$\overline{F}= \overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}$ ⇒ $F= \overline{\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}}$

卡诺图中的几个概念

- 蕴含项（implicant）：只包含1的矩形圈
- 主蕴含项/首要蕴含项（prime implicant）：扩展到最大的蕴含项
  - 函数所有的首要蕴含项都可以通过卡诺图求得
  - 完全由无关项组成的首要蕴含项不可能成为最简结果的一部分
  - 最简积之和由某些首要蕴含项组成
    - 若含有非首要蕴含项，可能不是最简式

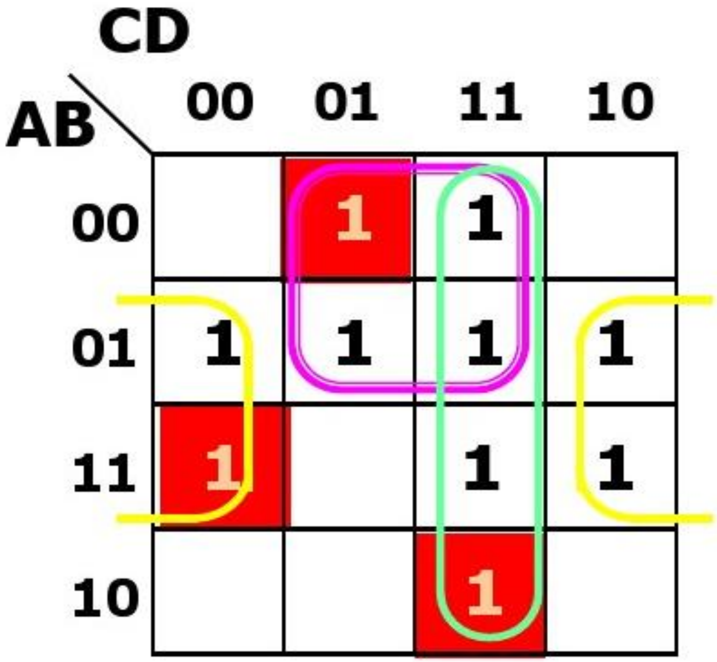


卡诺图中的几个概念——续

- 奇异“1”单元（Distinguished 1-cell）：仅被单一首要蕴含项覆盖的输入组合

技巧： 圈卡诺图时，从合并奇异**1**单元开始

- 质主蕴含项（Essential Prime implicant）/基本首要蕴含项：
  覆盖一个或者多个奇异“1”单元的 主蕴含项



小练习

进一步讨论——更多变量卡诺图

* 展开定理

一个n变量的逻辑函数可以对变量X_i展开为两个n-1变量的逻辑函数

1. $f(x_1x_2\ldots.x_i\ldots.x_n)$

$= x_i \bullet f(x_1x_2\ldots.1\ldots.x_n) + \overline{x_i} \bullet f(x_1x_2\ldots.0\ldots.x_n)$

……………………对x_i展开为与或式

2. $f(x_1x_2\ldots.x_i\ldots.x_n)$

$= [\overline{x_i} + f(x_1x_2\ldots1\ldots.x_n)] \bullet [x_i + f(x_1x_2\ldots.0\ldots.x_n)]$

……………………对x_i展开为或与式

进一步讨论——更多变量卡诺图

$F=f(x_1x_2x_3x_4x_5)$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

$$F = \Sigma\, m(\,0,1,4,\,5\,,\,6\,,\,11,12,14,16,20,22,28,30,31\,)$$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	0

A= 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

A = 1

$$F=\bar{A}\bar{B}\bar{D}+\bar{B}\bar{D}\bar{E}+ABCD+\bar{A}B\bar{C}DE+C\bar{E}$$

Example

ABC \ DEF	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

$$F = C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' + A'BDE'F' + ABC'DE'$$

代数化简法优缺点

- 优点——
  - 不受变量数目的约束
  - 对公理、定理和规则十分熟练时，化简较方便
- 缺点——
  - 技巧性强
  - 在很多情况下难以判断化简结果是否最简

卡诺图化简法

进一步讨论——

带无关项的卡诺图化简

带无关项的卡诺图化简

Example

某单位三八节包场看电影，规定电影票只发给本单位的女职工，写出满足上述条件的逻辑表达式。

A=1：本单位　　B=1：女职工　　C=1：有电影票

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	×
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	0
1	0	1	×
1	1	0	0
1	1	1	1

无关项——不存在的或无意义的取值组合

卡诺图化简时对无关项的处理：

- **根据需要，无关项可1可0；**
- **满足圈中数量最多的前提，尽量利用无关项。**

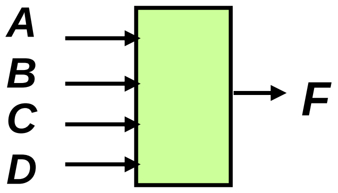
A \ BC	00	01	11	10
0	0	×	×	0
1	0	×	1	0

$$F = C$$

带无关项的卡诺图化简

Example

输入信号X为 8421BCD码，设计组合逻辑电路，当X≥5，输出 F=1。



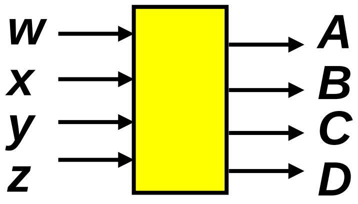
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	×	1
01	0	1	×	1
11	0	1	×	×
10	0	1	×	×

$F=A+BD+BC$

A B C D	F	A B C D	F
0 0 0 0	0	1 0 0 0	1
0 0 0 1	0	1 0 0 1	1
0 0 1 0	0	1 0 1 0	×
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×
0 1 0 0	0	1 1 0 0	×
0 1 0 1	1	1 1 0 1	×
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×
0 1 1 1	1	1 1 1 1	×

带无关项的卡诺图化简

Example 设计一个能将4位二进制数转换为余3码的电路



二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D	二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D
0 0 0 0	0 0 1 1	1 0 0 0	1 0 1 1
0 0 0 1	0 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 0
0 0 1 0	0 1 0 1	1 0 1 0	×
0 0 1 1	0 1 1 0	1 0 1 1	×
0 1 0 0	0 1 1 1	1 1 0 0	×
0 1 0 1	1 0 0 0	1 1 0 1	×
0 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 0	×
0 1 1 1	1 0 1 0	1 1 1 1	×

带无关项的卡诺图化简

A：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$A=W+XZ+XY$

B：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	×

$B=\bar{X}Z+\bar{X}\ Y+X\bar{Y}\bar{Z}$

带无关项的卡诺图化简

C：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$C=\overline{Y}\,\overline{Z}+YZ$$

D：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$D=\overline{Z}$$

Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

如何使逻辑表达式最简？

- 卡诺图

  具体步骤参见P111-112

- 首要蕴含项表（P136）

  假设某逻辑函数的表达式如6-2所示。

  经过化简后如6-3所示

  用表6-2和6-3得到最简积之和表达式