一:

操作开销函数为

$$W(i)=\begin{cases} i,\ i=2^k, k=0,1,2,\cdots \\ 1,\ other \end{cases}$$

(1) 聚集法:

n 次操作内有 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 个数为 $2^k, k=0,1,2,\cdots$

则 n 次操作的总代价为

$$\begin{aligned} T(n) &= n-(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)+\sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor+1} 2^k \\ &\le n-(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)+\sum_{k=0}^{\log_2^n+1} 2^k \\ &= 3n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 2 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

故平摊代价为 $T(n)/n=O(1)$。

(2) 会计法:

设操作的摊还代价为:

$$W(i)=\begin{cases} 0,\ i=2^k, k=0,1,2,\cdots \\ m,\ other \end{cases}$$

其中 m 为常数且 $m>0$。实际代价为 i 的操作数量为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, 实际代价为 1 的操作数量为 $n-\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, 故在所有操作中，需要满足

$$m(n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1) \ge \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor+1} 2^k$$

而

$$m(n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1) \ge m(n-\log_2 n - 1)$$

且

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor+1} 2^k \le \sum_{k=0}^{\log_2 n+1} 2^k = 2n-1$$

故只需要

$$m(n-\log_2 n-1)\geq 2n-1$$

求得 $m\geq 20$，即在 $m\geq 20$ 时实际代价为 1 的操作总能使用自己的摊还余额来支付实际操代价为 i 的操作的开销，总的摊还代价始终非负。
实际代价为 1 的操作数量小于 n，故总摊还代价小于 mn，时间复杂度为 $O(n)$，从而平摊代价为 $O(1)$。
(3) 势能法：
定义势能函数 $\phi(D)$ 为对该数据结构的操作次数，
则对于 $i=2^k\ k=0,1,2,\cdots$，实际代价 $c_i=i$，势差 $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1$，从而摊还代价 $c_i^{'}=i+1$。
对于 $i\neq 2^k\ k=0,1,2,\cdots$，实际代价 $c_i=1$，势差 $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1$，从而摊还代价 $c_i^{'}=2$。
总摊还代价为

$$\begin{aligned}T(n)&=n+\sum_{k=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor+1}2^k\\&\leq n+\sum_{k=0}^{\log_2^n+1}2^k\\&=3n-2\\&=O(n)\end{aligned}$$

由于 $\phi(D_i)\geq\phi(D_0)$，故总的摊还代价为总的实际代价的一个上界，从而平摊代价为 $T(n)/n=O(1)$。

二:

若 $i \neq 2^k, k = 0, 1, \cdots$，则操作代价为 1，

若 $i = 2^k, k = 0, 1, \cdots$，则操作代价为 $i + 1$。

(1) 聚集法:

n 次操作内有 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 个数为 $2^k, k = 0, 1, 2, \cdots$

则 n 次操作的总代价为

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 2^k \\ &\leq n + \sum_{k=0}^{\log_2^n + 1} 2^k \\ &= 3n - 2 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

故平摊代价为 $T(n)/n = O(1)$。

(2) 会计法

设操作的摊还代价为:

$$W(i) = \begin{cases} i + 2, \ i = 2^k, k = 0, 1, 2, \cdots \\ 2, \ other \end{cases}$$

其中 m 为常数且 $m > 0$。实际代价为 i 的操作数量为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, 实际代价为 1 的操作数量为 $n - \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, 故总代价为

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 2^k + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \\ &\leq n + \sum_{k=0}^{\log_2^n + 1} 2^k + \log_2 n + 1 \\ &= 3n + \log_2 n + 1 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

从而平摊代价为 $T(n)/n = O(1)$

(3) 势能法

定义势能函数 $\phi(D)$ 为,

则对于 $i = 2^k\ k = 0, 1, 2, \cdots$，实际代价 $c_i = i + 1$，势差 $\phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1$，从而摊还代价 $c_i^{'} = i + 2$。
对于 $i \neq 2^k\ k = 0, 1, 2, \cdots$，实际代价 $c_i = 1$，势差 $\phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1$，从而摊还代价 $c_i^{'} = 2$。
总摊还代价为

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 2^k + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \\ &\leq n + \sum_{k=0}^{\log_2^n + 1} 2^k + \log_2 n + 1 \\ &= 3n + \log_2 n + 1 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

由于 $\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$，故总的摊还代价为总的实际代价的一个上界，从而平摊代价为 $T(n)/n = O(1)$。