

1.

(1)

$$\begin{aligned}
p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg p \vee q &\iff (p \wedge \neg q \rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \rightarrow p \wedge \neg q) \\
&\iff (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \wedge ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q))) \\
&\iff \neg((\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q))))
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\neg p \vee q \vee r \leftrightarrow p &\iff (p \rightarrow q) \vee r \leftrightarrow p \\
&\iff (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow p \\
&\iff ((\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)) \\
&\iff \neg(((\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)))
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p &\iff p \vee (\neg(p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow p \\
&\iff \neg p(\neg(p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow p \\
&\iff (\neg p(\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg p(\neg(p \rightarrow \neg q))) \\
&\iff \neg((\neg p(\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p(\neg(p \rightarrow \neg q))))
\end{aligned}$$

2.

(1)

$$\begin{aligned}
\neg p \vee q &\iff (p \downarrow p) \vee q \\
&\iff ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \\
\neg p \vee q &\iff \neg(p \wedge \neg q) \\
&\iff p \uparrow \neg q \\
&\iff p \uparrow (q \uparrow q)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
p \wedge \neg q &\iff \neg(\neg p \vee q) \\
&\iff \neg p \downarrow q \\
&\iff (p \downarrow p) \downarrow q \\
p \wedge \neg q &\iff p \wedge (q \uparrow q) \\
&\iff (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\neg p \vee \neg q &\iff (p \downarrow p) \vee (q \downarrow q) \\
&\iff ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \\
\neg p \vee \neg q &\iff \neg(p \wedge q) \\
&\iff p \uparrow q
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\iff (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\iff \neg \neg (\neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg (p \vee q)) \\ &\iff \neg ((\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (p \downarrow q)) \\ &\iff \neg (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \\ &\iff (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \\ p \leftrightarrow q &\iff (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\iff \neg (\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)) \\ &\iff \neg ((p \uparrow q) \wedge (\neg p \uparrow \neg q)) \\ &\iff (p \uparrow q) \uparrow (\neg p \uparrow \neg q) \\ &\iff (p \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow)) \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r &\iff (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r \\ &\iff \neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \\ &\iff \neg \neg ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg r) \\ &\iff \neg ((\neg p \downarrow \neg q) \downarrow \neg r) \\ &\iff \neg (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (r \downarrow r)) \\ &\iff (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (r \downarrow r)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (r \downarrow r)) \\ (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r &\iff (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r \\ &\iff \neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \\ &\iff \neg (\neg (p \wedge q) \wedge r) \\ &\iff (p \uparrow q) \uparrow r \end{aligned}$$

3.

(1)

- (1)  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$  (公理 2)
- (2)  $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$  (定理 3)
- (3)  $A \rightarrow A$  (定理 1)
- (4)  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$  ((3)(2)rm 分离规则)

(3)

- (1)  $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$  (已知)
- (2)  $(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$  (公理 3)
- (3)  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  ((1)(2)rm 分离规则)
- (4)  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$  (定理 2)
- (5)  $A \rightarrow B$  (已知)
- (6)  $A \rightarrow (A \rightarrow C)$  ((5)(4) 定理 8)
- (7)  $(A \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow C))$  (公理 2)
- (8)  $(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow C)$  ((6)(7)rm 分离规则)
- (9)  $A \rightarrow A$  (定理 1)
- (10)  $A \rightarrow C$  ((9)(8)rm 分离规则)

(5)

- (1)  $(C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))$  (定理 4)
- (2)  $((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  (定理 4)
- (3)  $(C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  ((1)(2) 定理 8)
- (4)  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  (定理 3)

(7)

- (1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  (定理 6)
- (2)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  (定理 14)
- (3)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  ((1)(2)rm 分离规则)
- (4)  $A \rightarrow A$  (定理 1)
- (5)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  ((3)(4) 定理 18)
- (6)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A))$  (定理 4)
- (7)  $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  ((5)(6)rm 分离规则)
- (8)  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A))$  (定理 3)
- (9)  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  ((7)(8) 定理 8)

(9)

- (1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  (定理 6)
- (2)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  (定理 14)
- (3)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  ((1)(2)rm 分离规则)
- (4)  $A \rightarrow A$  (定理 1)
- (5)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  (定理 18)

(11)

- (1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  (定理 6)
- (2)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  (定理 14)
- (3)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  ((1)(2) rmp 分离规则)
- (4)  $(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C \rightarrow A))$  (定理 4)
- (5)  $(\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$  ((3)(4) rmp 分离规则)
- (6)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$  (定理 13)
- (7)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$  ((6)(5) 定理 8)
- (8)  $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$  (定理 5)
- (9)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$  ((7)(8) 定理 8)
- (10)  $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$  (定理 4)
- (11)  $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$  (定理 9)
- (12)  $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  ((11)(10) rmp 分离规则)
- (13)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  ((9)(10) 定理 8)

(13)

- (1)  $C \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)$  (公理 1)
- (2)  $(C \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)))$  (公理 1)
- (3)  $(B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  ((1)(2) rmp 分离规则)
- (4)  $C \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  (定理 3)
- (5)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  (定理 6)
- (6)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$  (定理 5)
- (7)  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  ((5)(6) rmp 分离规则)
- (8)  $\neg A \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B)$  (定理 3)
- (9)  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  (定理 5)
- (10)  $\neg A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  ((8)(9) 定理 8)
- (11)  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  ((4)(10) 定理 18)