1. 证:

下面证明 $f(n)=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

当 $n=1$ 时, $f(1)=1$,

假设 $n=k$ 时, $f(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 成立,

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n)+(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)\left(2(n+1)+1\right) \end{aligned}$$

从而 $f(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

故 $f(n)=\Theta(n^3)$

2. 解:

(1) $T(n)=O(n)$

即证 $\exists c, n_0>0, s.t.\ n>n_0, T(n)\le cn$

假设 $n<k$ 时均成立,

当 $n=k$ 时,

$$T(k)=T\left(\frac{k}{2}\right)+k\le c\frac{k}{2}+k=\left(\frac{c}{2}+1\right)k\le ck,\ \ c\ge 2,$$

即为 $T(n)=O(n)$

$T(n)=\Omega(n)$

即证 $\exists c, n_0>0, s.t.\ n>n_0, T(n)\ge cn$

假设 $n<k$ 时均成立,

当 $n=k$ 时,

$$T(k)=T\left(\frac{k}{2}\right)+k\ge c\frac{k}{2}+k=\left(\frac{c}{2}+1\right)k\ge ck,\ \ c\le 2,$$

即为 $T(n)=\Omega(n)$

(2) $T(n)=O\left(n\log^2 n\right)$

即证 $\exists c, n_0 > 0, s.t.\ n > n_0, T(n) \le cn\log^2 n$

假设 $n < k$ 时均成立,

当 $n = k$ 时,

$$\begin{aligned} T(k) &= 2T\left(\frac{k}{2}\right) + k\log k \le c\frac{k}{2}\log^2\frac{k}{2} + k\log k \\ &= ck\log^2 k + (1 - 2c\log 2)\, n\log n + cn\log^2 2 \\ &\le ck\log^2 k,\ \ c = 1, n_0 \ge 10, \end{aligned}$$

即为 $T(n) = O\left(n\log^2 n\right)$

$T(n) = \Omega(n\log^2 n)$

即证 $\exists c, n_0 > 0, s.t.\ n > n_0, T(n) \ge cn\log^2 n$

假设 $n < k$ 时均成立,

当 $n = k$ 时,

$$\begin{aligned} T(k) &= 2T\left(\frac{k}{2}\right) + k\log^2 k \ge c\frac{k}{2}\log^2\frac{k}{2} + k\log k \\ &= ck\log^2 k + (1 - 2c\log 2)\, n\log n + cn\log^2 2 \\ &\ge ck\log^2 k,\ \ c = \frac{1}{2}, n_0 \ge 5, \end{aligned}$$

即为 $T(n) = \Omega(n\log^2 n)$

3. 证:

对于 $\forall x > -1, x > \ln(x+1)$,

从而

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} &\ge \ln(\frac{2}{1}) + \ln(\frac{3}{2}) + \ldots + \ln(\frac{n+1}{n}) \\ &= \ln(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

4. 解:

$T(n) = O\left(n^2\right)$

即证 $\exists c, n_0 > 0, s.t.\ n > n_0, T(n) \le cn^2$

假设 $n < k$ 时均成立,
当 $n = k$ 时,

$$T(k) = 2T\left(\frac{k}{2}\right) + k^2 \le c\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k^2 = \left(\frac{c}{4} + 1\right)k^2 \le ck^2,\ c \ge \frac{4}{3},$$

即为 $T(n) = O\left(n^2\right)$
$T(n) = \Omega(n^2)$

即证 $\exists c, n_0 > 0, s.t.\ n > n_0, T(n) \ge cn^2$
假设 $n < k$ 时均成立,
当 $n = k$ 时,

$$T(k) = 2T\left(\frac{k}{2}\right) + k^2 \ge c\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k^2 = \left(\frac{c}{4} + 1\right)k^2 \ge ck^2,\ c \le \frac{4}{3},$$

即为 $T(n) = \Omega(n^2)$
5. 解:
$T(n) = \Omega(n \log n)$

即证 $\exists m, n_0 > 0, s.t.\ n > n_0, T(n) \ge mn \log n$
假设 $n < k$ 时均成立,
当 $n = k$ 时,

$$\begin{aligned} T(k) &= T\left(\frac{k}{3}\right) + T\left(\frac{2k}{3}\right) + ck \\ &\ge mc\frac{k}{3}\log\frac{k}{3} + mc\frac{2k}{3}\log\frac{2k}{3} + ck \\ &= cmk\log k + \left(\frac{2}{3}\log 2 - \log 3\right)cmk + ck \end{aligned}$$

当 $c \le 1$, 取 $m < \frac{1}{3\log 3 - 2\log 2}$, 即有 $T(k) \ge k \log k$,
当 $c > 1$, 取 $m > \frac{1}{3\log 3 - 2\log 2}, n_0 = 10$, 即有 $T(k) \ge k \log k$,
即为 $T(n) = \Omega(n \log n)$