1.

(1) 设 p 为大学里的本科生，q 为大学里的研究生：

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

(2) 设 p 为接到超速罚单，q 为车速超过每小时 100 公里：

$$p \to q$$

(3) 设 p 为年满 18 周岁，q 为有选举权：

$$\neg p \to \neg q$$

2.

(2) 对任意指派 v，有

$$\begin{aligned}(\neg A \to \neg B)^v &= 1 - (\neg A)^v + (\neg A)^v \cdot (\neg B) \\ &= 1 - (1 - A^v) + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v) \\ &= 1 - B^v + B^v \cdot A^v \\ &= (B \to A)^v\end{aligned}$$

故该逻辑等价成立。

(4) 对任意指派 v, 有

$$\begin{aligned}(A \to (B \to C))^v &= 1 - A^v + A^v \cdot (B \to C)^v \\ &= 1 - A^v + A^v \cdot (1 - B^v + B^v \cdot C^v) \\ &= 1 - A^v \cdot B^v + (A^v \cdot B^v) \cdot C^v \\ &= 1 - (A \wedge B)^v + (A \wedge B)^v \cdot C^v \\ &= (A \wedge B \to C)^v\end{aligned}$$

故该逻辑等价成立。

(6) 对任意指派 v，有

$$\begin{aligned}1 &= (\neg A \vee B)^v \\ &= (\neg A)^v + B^v - (\neg A)^v \cdot B^v \\ &= 1 - A^v + B^v - (1 - A^v) \cdot B^v \\ &= 1 - A^v + A^v \cdot B^v\end{aligned}$$

即

$$A^v \cdot B^v = A^v \tag{1}$$

同样的，有

$$\begin{aligned}1&=(A\to B\wedge C)^v\\&=1-A^v+A^v\cdot(B\wedge C)^v\\&=1-A^v+A^v\cdot B^v\cdot C^v\end{aligned}$$

即

$$A^v\cdot B^v\cdot C^v=A^v \tag{2}$$

而

$$\begin{aligned}(\neg B\to C)^v&=1-(\neg B)^v+(\neg B)^v\cdot C^v\\&=1-(1-B^v)+(1-B^v)\cdot C^v\\&=B^v+C^v-B^v\cdot C^v\end{aligned} \tag{3}$$

当 $A^v=1$ 时，由式 (1) 和式 (2) 可得 $B^v=1$，$C^v=1$，此时式 (3) 成立，当 $A^v=0$ 时，由式 (1) 和式 (2) 无法得出 B^v，C^v 的值，此时无法判断式 (3) 是否成立，故该逻辑蕴含不成立。

3.

(1)

$$\begin{aligned}\neg(q\to p)\wedge(r\to\neg s)&=\neg(\neg q\vee p)\wedge(\neg r\vee\neg s)\\&=q\wedge\neg p\wedge(\neg r\vee\neg s)(\text{合取范式})\\&=(q\wedge\neg p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg p\wedge\neg s)(\text{析取范式})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\neg p\wedge q\to r&=\neg(\neg p\vee q)\wedge r\\&=p\wedge\neg q\wedge r(\text{析取范式})\\&=(p\wedge\neg q\wedge r)(\text{合取范式})\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\neg(p\vee q)\leftrightarrow p\wedge q&=(\neg(p\vee q)\wedge p\wedge q)\vee(\neg\neg(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))\\&=(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)(\text{合取范式})\\&=((p\vee q)\wedge\neg p)\vee((p\vee q)\wedge\neg q)\\&=(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q)\\&=(q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)(\text{析取范式})\end{aligned}$$

4.

(1)

Table 1: $p \to p \wedge q$ 真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

从而 $p \to p \wedge q$ 的主合取范式为

$$(\neg p \vee q)$$

主析取范式为

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

(2)

Table 2: $p \vee q \to (q \to r)$ 真值表

p	q	r	$p \vee q$	$q \to r$	$p \vee q \to (q \to r)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

从而 $p \vee q \to (q \to r)$ 的主合取范式为

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

主析取范式为

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

(3)

Table 3: $(p \to p \wedge q) \vee r$ 真值表

p	q	r	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$(p \to p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

从而主合取范式为

$$(\neg p \vee q \vee r)$$

主析取范式为

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$