

(1):

$$(1) \neg A \rightarrow A, \neg A \vdash A \quad (\rightarrow -)$$

$$(2) \neg A \rightarrow A, A \vdash A \quad (\in)$$

$$(3) \neg A \rightarrow A \vdash A \quad (1)(2)(-)$$

$$(4) \vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad (3)(\rightarrow +)$$

(2)

$$(1)(A \vee B) \rightarrow C, A \vdash A \vee B \quad (\vee +)$$

$$(2)(A \vee B) \rightarrow C, A \vdash C \quad (1)(\rightarrow -)$$

$$(3)(A \vee B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow C \quad (2)(\rightarrow +)$$

$$(4)(A \vee B) \rightarrow C, B \rightarrow A \vee B \quad (\vee +)$$

$$(5)(A \vee B) \rightarrow C, B \vdash C \quad (4)(\rightarrow -)$$

$$(6)(A \vee B) \rightarrow C \vdash B \rightarrow C \quad (5)(\rightarrow +)$$

$$(7)(A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \quad (3)(6)(\wedge +)$$

$$(8) \vdash ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \quad (7)(\rightarrow +)$$

$$(9)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash A \vee B \quad (\in)$$

$$(10)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B, A \vdash A \rightarrow C \quad (\wedge -)$$

$$(11)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B, A \vdash C \quad (10)(\rightarrow -)$$

$$(12)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B, B \vdash B \rightarrow C \quad (\wedge -)$$

$$(13)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B, B \vdash C \quad (12)(\rightarrow -)$$

$$(14)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C \quad (9)(11)(13)(\vee -)$$

$$(15)(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C \quad (14)(\rightarrow +)$$

$$(16) \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C) \quad (15)(\rightarrow +)$$

$$(17) \vdash ((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \quad (8)(16)(\leftrightarrow +)$$

(3)

- (1) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A$ ($\wedge -$)
- (2) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash B$ (1)($\rightarrow -$)
- (3) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B$ ($\wedge -$)
- (4) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ (2)(3)($\neg +$)
- (5) $\vdash A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ ($\rightarrow +$)
- (6) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B$ (\in)
- (7) $\neg(A \rightarrow B), B, A \vdash B$ (6)($+$)
- (8) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash (A \rightarrow B)$ (7)($\rightarrow +$)
- (9) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ (\in)
- (10) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$ (8)(9)($\neg +$)
- (11) $\neg(A \rightarrow B), A, \neg A \vdash A$ (\in)
- (12) $\neg(A \rightarrow B), A, \neg A \vdash \neg A$ (\in)
- (13) $\neg(A \rightarrow B), A, \neg A \vdash B$ (11)(12)($\neg -$)
- (14) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash (A \rightarrow B)$ (13)($\rightarrow +$)
- (15) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$ (\in)
- (16) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg \neg A$ (14)(15)($\neg +$)
- (17) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$ (16)($\neg \neg -$)
- (18) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$ (10)(17)($\wedge +$)
- (19) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$ (18)($\rightarrow +$)
- (20) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$ (5)(19)($\leftrightarrow +$)

(4)

- (1) $A \wedge B \vdash A$ ($\wedge -$)
- (2) $A \wedge B \vdash B$ ($\wedge -$)
- (3) $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$ (2)($\wedge +$)
- (4) $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ (1)(3)($\wedge +$)
- (5) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$ (4)($\rightarrow +$)
- (6) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$ ($\wedge -$)
- (7) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$ ($\wedge -$)
- (8) $A \wedge (\neg A \vee B), \neg A \vdash \neg A$ (\in)
- (9) $A \wedge (\neg A \vee B), \neg A \vdash A$ ($\wedge -$)
- (10) $A \wedge (\neg A \vee B), \neg A \vdash B$ (8)(9)($\neg -$)
- (11) $A \wedge (\neg A \vee B), B \vdash B$ (\in)
- (12) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$ (7)(10)(11)($\vee -$)
- (13) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$ (6)(12)($\wedge +$)
- (14) $\vdash A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$ ($\rightarrow +$)
- (15) $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$ (5)(14)($\leftrightarrow +$)