

1.

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

$$P : A \rightarrow \varepsilon | aAb, \quad B \rightarrow \varepsilon | cBd, \quad S \rightarrow AB$$

2.

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P : A \rightarrow \varepsilon | aAb, \quad S \rightarrow a^2 A$$

(3)

q0 是起始状态, q0、q1 是接受状态。

PDA 如下图所示:

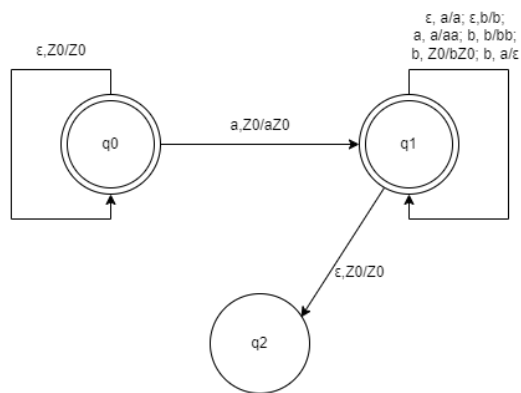


Figure 1: PDA

4.

(1)

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$$

$$P_1 : A \rightarrow \varepsilon | aBb^2, \quad b \rightarrow \varepsilon | Bc, \quad S \rightarrow AB$$

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$$

$$P_2 : A \rightarrow \varepsilon | Aa, \quad B \rightarrow \varepsilon | bBc^3, \quad S \rightarrow AB$$

(2)

$L_1 \cap L_2$ 不是 CFG。

证明：

记 $L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{6n}, n \geq 0\}$,

假设 L 是 CFG, 则存在正整数 N , 对 $\forall z \in L (|z| \geq N)$ 满足泵引理。

从 L 中取 $z = a^N b^{2N} c^{6N}$, 显然 $z \in L$ 且 $|z| = 9N \geq N$ 。

由泵引理, z 可被分为 $z = uvwxy$, 且有 $|vwx| \leq N$, $|vx| \neq \varepsilon$,

那么 vx 可能为：

- i. 只包含 a 或 b 或 c;
- ii. 只包含 a 和 b, 或只包含 b 和 c;

对这两种情况, $uv^0wx^0y \notin L$;

所以假设不成立, L 不是 CFG。