

数理逻辑

郑为杰

e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年11月



推理部分

公理集合：

$$(1) A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(2) A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(3) A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

推理规则或分离规则 (Modus Ponens) :

若有 A 和 $A \rightarrow B$ 成立，则必有结论 B 成立，可形式化表示为：

$$r_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式 A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, A_i 是PC中的公理，或是 $A_j (j < i)$ ，或是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的。其中 A_m 就是公式 A 。

A_i 只能是以下三种中的其一：

- (1) PC中的公理或已知定理
- (2) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中的某一个
- (3) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中某两个用分离规则导出的



基本定理

定理1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$ ✓

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (前件互换定理) ✓

定理3: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 定理 (2) 的另一种形式 ✓

定理4: $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加前件定理) ✓

定理5: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加后件定理) ✓

定理6: $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ ✓

定理7: $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ✓

定理8: 如果 $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$ (三段论定理) ✓

定理9. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (反证法) ✓

定理10. $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$ ✓

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (反证法) ✓

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$ ✓

基本定理

定理13: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (公理 A_3 的逆命题) \checkmark

定理14: $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ \checkmark

定理15: $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ \checkmark

定理16: $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (反证法) \checkmark

定理17: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ \checkmark



基本定理

定理18: $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

定理19: $\vdash A \rightarrow A \vee B$, 其中, $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$, 也即

$$A \rightarrow A \vee B \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (\text{等价于定理7})$$

定理20: $\vdash A \rightarrow B \vee A$, 其中, $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$, 也即

$$A \rightarrow B \vee A \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad (\text{等价于公理1})$$

定理21: 如果 $\vdash P \rightarrow Q$, 且 $\vdash R \rightarrow S$, 则 $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$

定理22: $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$ 也即

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (\text{二难推理})$$



定理18

定理18: $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

必要性: 若 $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$ 则 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

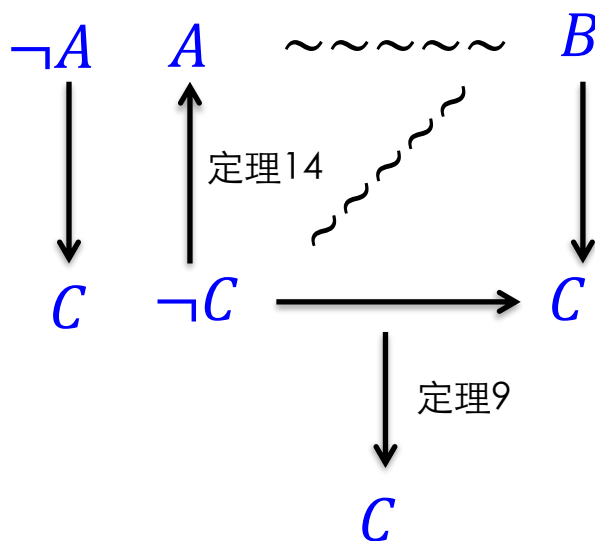
充分性: 若 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$, 则 $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$



定理18必要性证明

必要性：若 $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$ 则 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

证明思路：



定理18必要性证明

定理18（必要性）：若 $\vdash \neg A \rightarrow C$ ， $\vdash B \rightarrow C$ 则 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

证明（必要性）：

(1) $B \rightarrow C$ 已知定理

(2) $\neg A \rightarrow C$ 已知定理

(3) $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理14

(4) $\neg C \rightarrow A$ (2)和(3)用rmp分离规则

(5) $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow B))$ 加后件定理5

(6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$ (4)和(5)用rmp分离规则

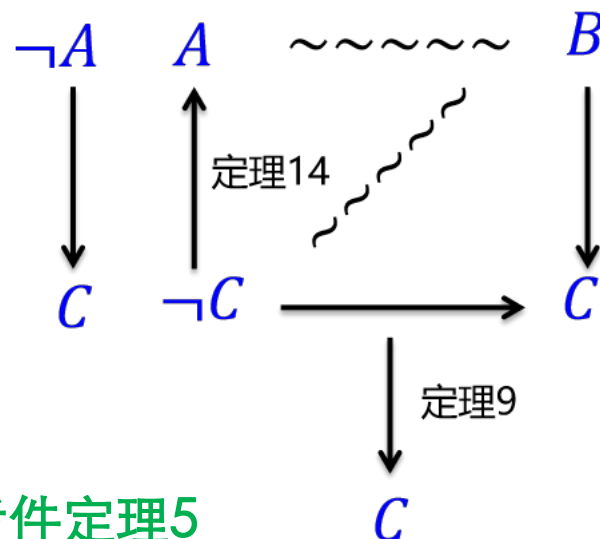
(7) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ 加前件定理4

(8) $(\neg C \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)$ (1)和(7)用rmp分离规则

(9) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)$ (6)和(8)用三段论定理8

(10) $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$ 定理9

(11) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ (9)和(10)用三段论定理8



定理18充分性证明

充分性：若 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$ ，则 $\vdash \neg A \rightarrow C$ ， $\vdash B \rightarrow C$

证明思路：结合已知定理，利用三段论加以证明

证明：

- (1) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ 已知定理
- (2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- (3) $\neg A \rightarrow C$ (2)和(1)用三段论定理8
- (4) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理1
- (5) $B \rightarrow C$ (4)和(1)用三段论定理8



定理18的应用

定理18（必要性） 若 $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$, 则 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

例1.证明 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

证明思路：有了定理18的必要性，再证明该命题就简单很多了。

只需要证明 $A \rightarrow A$ 和 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$

证明：

(1) $A \rightarrow A$ 定理1

(2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

(3) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理14

(4) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ (2)和(3)用rmp分离规则

(5) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (4) 和(1)用定理18

定理19

定理19: $\vdash A \rightarrow A \vee B$, 其中 $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$

$$A \rightarrow A \vee B \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (\text{等价于定理7})$$



定理20

定理20: $\vdash A \rightarrow B \vee A$, 其中 $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$

$$A \rightarrow B \vee A \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad (\text{等价于公理1})$$



定理21

定理21： 如果 $\vdash P \rightarrow Q$, 且 $\vdash R \rightarrow S$, 则 $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$

证明：

- (1) $P \rightarrow Q$ 已知定理
- (2) $R \rightarrow S$ 已知定理
- (3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$ 加后件定理5
- (4) $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (1) 和 (3) 用rmp分离规则
- (5) $(R \rightarrow S) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S))$ 加前件定理4
- (6) $(P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$ (2) 和 (5) 用rmp分离规则
- (7) $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$ (4) 和 (6) 使用三段论定理8

定理22

定理22: $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C)$ (二难推理)

也即 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

证明思路1: 运用定理18,

令 $Q = (B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$

要证 $(A \rightarrow C) \rightarrow Q$ 成立, 根据定理18的必要性, 只需证:

$C \rightarrow Q$ 和 $\neg A \rightarrow Q$

也即:

$C \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

$\neg A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

定理22

定理22: $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ (二难推理)

证明:

- (1) $C \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$ 公理1
- (2) $(C \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)))$ 公理1
- (3) $(B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ (1)和(2)用rmp分离规则
- (4) $C \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ 对(3)用前件互换定理2
- (5) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 定理1
- (6) $\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$ 对(5)用前件互换定理2
- (7) $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ 加后件定理5
- (8) $\neg A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ (6)和(7)用三段论定理8
- (9) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ (4) 和(8)用定理18

定理22

定理22: $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

(二难推理)

也即 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

证明思路2: 要证 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$ 成立, 只需证:

$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$ (运用定理21)

逆向用公理2, 提取相同的前件 $\neg C$, 只需证:

$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$

再次逆向用公理2, 提取相同的前件 $\neg C$, 只需证:

$\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)))$

去掉 $\neg C$, 只需证:

$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B))$

逆否命题, 只需证:

$\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$

前件互换定理, 只需证:

$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (定理1)

基本定理

定理17: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \checkmark$

定理18: $\vdash \neg A \rightarrow C$, $\vdash B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C \checkmark$

定理19: $\vdash A \rightarrow A \vee B$, 其中, $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$, 也即

$$A \rightarrow A \vee B \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (\text{等价于定理7}) \checkmark$$

定理20: $\vdash A \rightarrow B \vee A$, 其中, $A \vee B$ 定义为 $\neg A \rightarrow B$, 也即

$$A \rightarrow B \vee A \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad (\text{等价于公理1}) \checkmark$$

定理21: 如果 $\vdash P \rightarrow Q$, 且 $\vdash R \rightarrow S$, 则 $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S) \checkmark$

定理22: $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$ 也即

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (\text{二难推理}) \checkmark$$



基本定理

定理23: $\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

定理24: $\vdash A \wedge B \rightarrow A$

定理25: $\vdash A \wedge B \rightarrow B$

定理26: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

定理27: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

定理28: $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

定理29: $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$



定理23

定理23: $\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $A \wedge B$ 定义为 $\neg(A \rightarrow \neg B)$ 即
 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

证明 (必要性): 若 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$, 则 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

(1) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 已知定理

(2) $(\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$ 定理14

(3) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 由 (1) 和 (2) 用分离规则

(4) $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 对 (3) 用前件互换定理2

(5) $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow C)$ 公理3

(6) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (4) 和 (5) 用三段论定理8

定理23

定理23: $\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $A \wedge B$ 定义为 $\neg(A \rightarrow \neg B)$ 即
 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

证明 (充分性) : 若 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 则 $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

已知定理

(2) $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 定理13

(3) $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 由 (1) 和 (2) 使用三段论

(4) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 对 (3) 用前件互换定理2

(5) $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$ 定理14

(6) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 由 (4) 和 (5) 用分离规则

(7) $A \wedge B \rightarrow C$

定理24

定理24: $\vdash A \wedge B \rightarrow A$, $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

证明: $A \wedge B \rightarrow A \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

(取逆否命题) 等价于定理6



定理25

定理25: $\vdash A \wedge B \rightarrow B$

证明: $A \wedge B \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

(取逆否命题) 等价于公理1



定理26

定理26: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

证明思路1: 由 $\vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B$, 使用定理23

证明思路2:

$$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \text{ 定理1}$$

前件互换定理2

$$A \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$$

定理15

$$A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$$

形式变换

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

定理 27

定理27: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

证明思路: 发现三个蕴含式的前件都是一样的。

证明:

(1) $B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))$ 定理25

(2) $(B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ 加前件定理2

(3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))$ (1) 和 (2) 用imp分离规则

(4) $((A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ 公理2

(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ (3) 和 (4) 用三段论



定理27另一种证明方法

定理27: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

证明:

(1) $B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))$ 定理26

(2) $(B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ 公理1

(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ 公理2

(4) $(B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ (2) 和 (3) 用三段论定理8

(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))$ 由 (1) 和 (4) 用分离规则

(6) $((A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ 公理2

(7) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ (5) 和 (6) 用三段论定理8

定理28

定理28: $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$, 其中 $\vdash P \leftrightarrow Q$ 即 $\vdash P \rightarrow Q$ 且 $\vdash Q \rightarrow P$

证明: $A \vee B \rightarrow B \vee A \Leftrightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ 定理14

反向也是同理。



定理29

定理29: $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg A)$

证明:

(1) $(B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 定理15

(2) $((B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow$

$(\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg A))$ 定理13

(3) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg A)$ (1) 和 (2)用rmp分离规则



基本定理

定理23: $\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ✓

定理24: $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ ✓

定理25: $\vdash A \wedge B \rightarrow B$ ✓

定理26: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ ✓

定理27: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$ ✓

定理28: $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ ✓

定理29: $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ ✓

