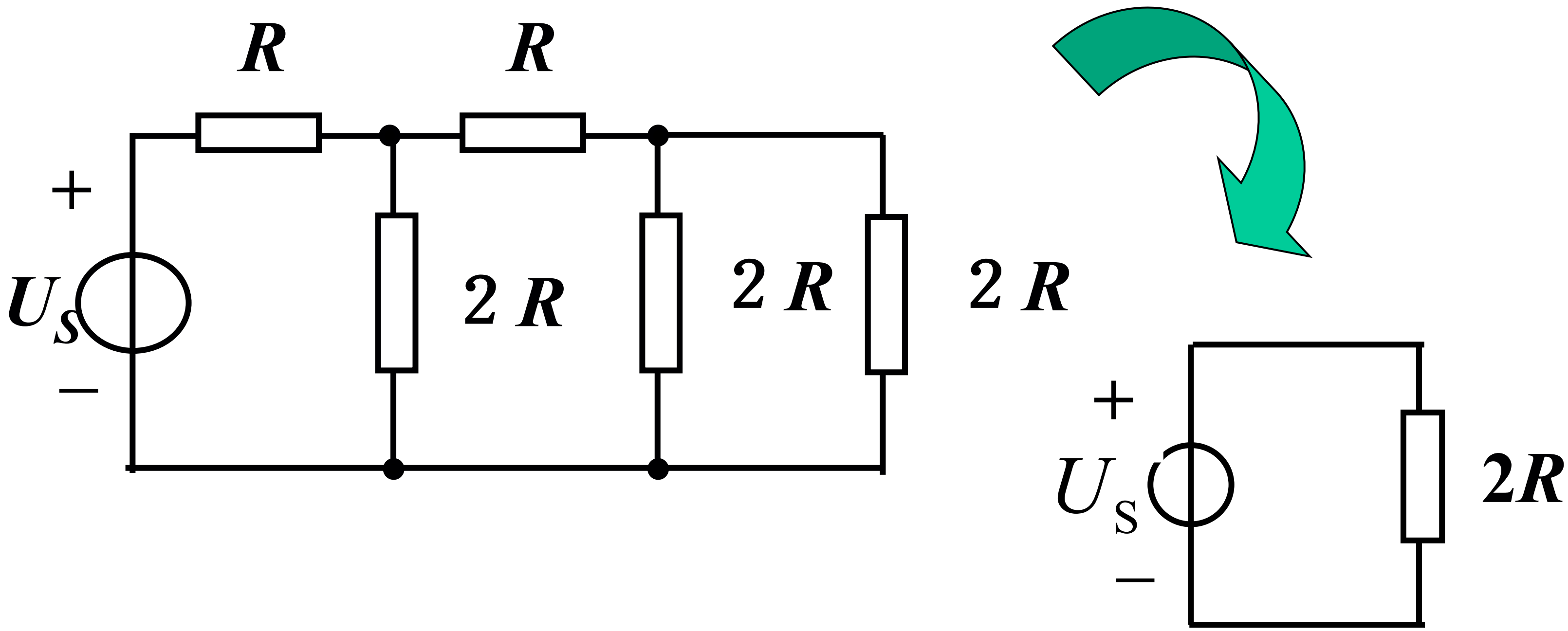
第2章 电路的分析方法

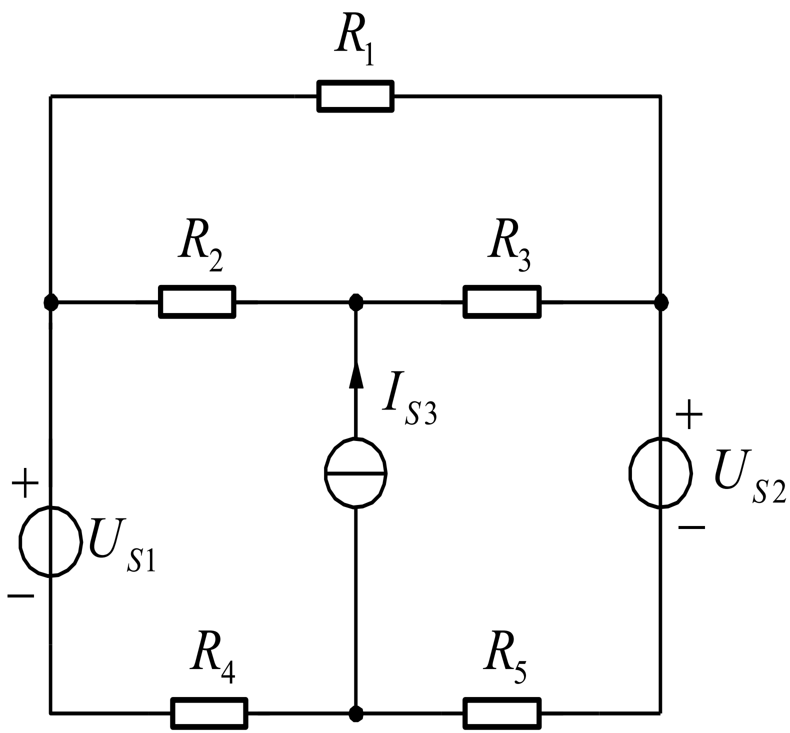
【引例】

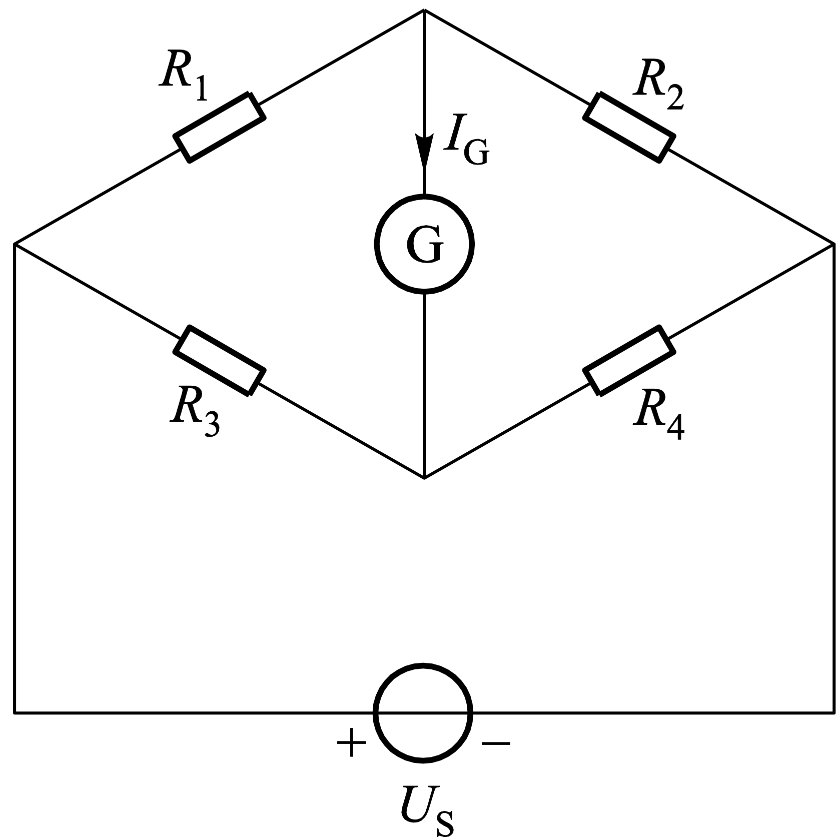
常见的电路分为简单电路和复杂电路。简单电路经过等效变换，由欧姆定律和基尔霍夫定律就可求解



而复杂电路只能用电路的分析方法来求解。

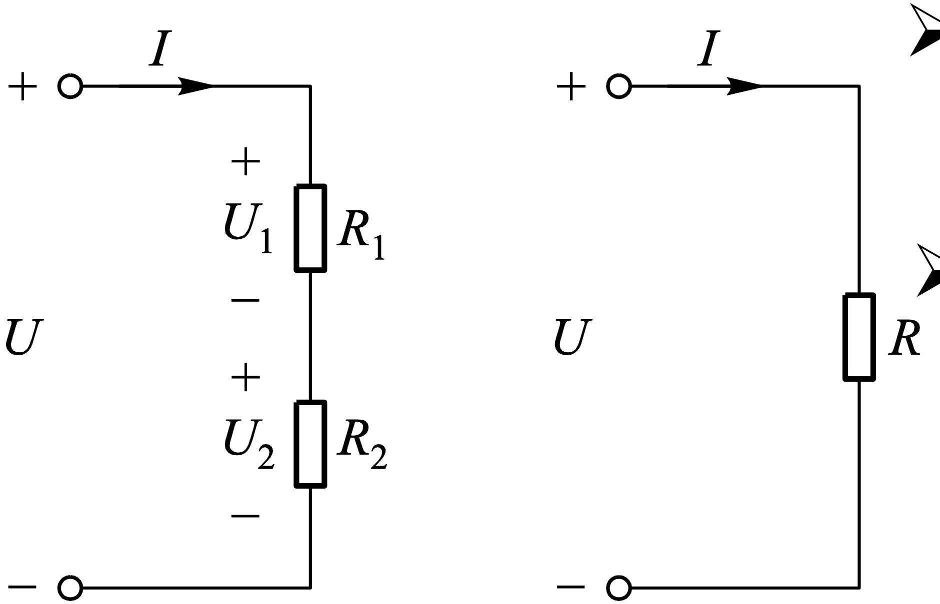
分析方法：在基尔霍夫定律的基础得到的





2.1 电阻电路的等效变换

1. 电阻元件的串联



(a) 串联电阻 (b) 等效电阻

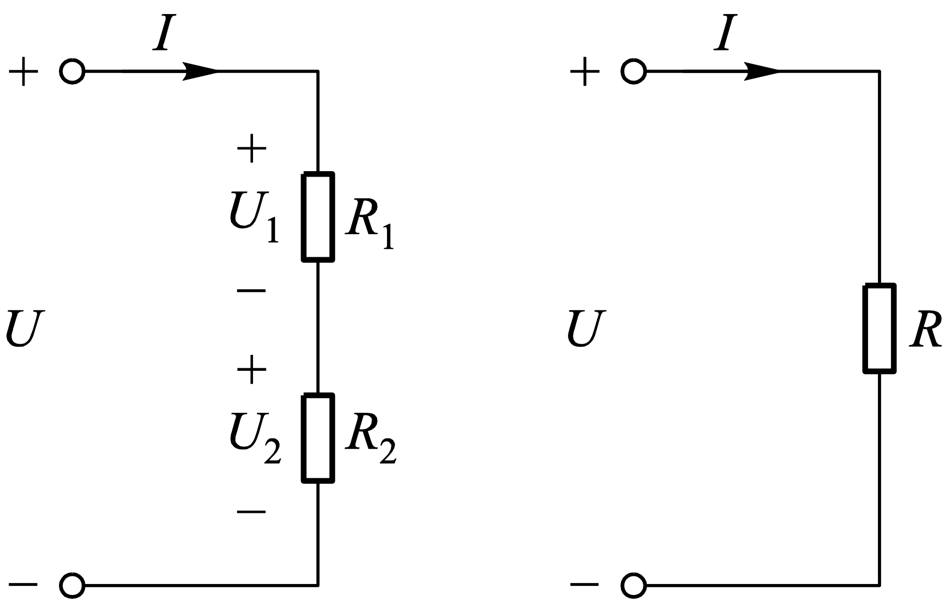
- 串联连接的电阻元件流过相同的电流。
- 等效电阻***R***:

$$R = R_1 + R_2$$

k个电阻串联的等效阻值：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

➢ 电阻串联满足分压关系。



(a) 串联电阻　　(b) 等效电阻

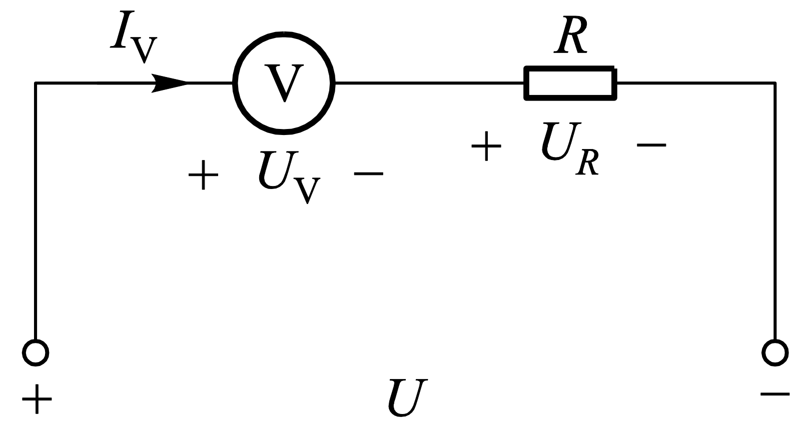
$$U = U_1 + U_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= IR_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \\ U_2 &= IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \end{aligned}}$$

电阻串联的主要作用是降压、限流。

➢ 电阻串联的应用：

电压表的量程为U_V，内阻为R_V，电压表满偏时流过表头的电流为I_V。串联电阻R后，可将电压表的量程由U_V扩展至U。

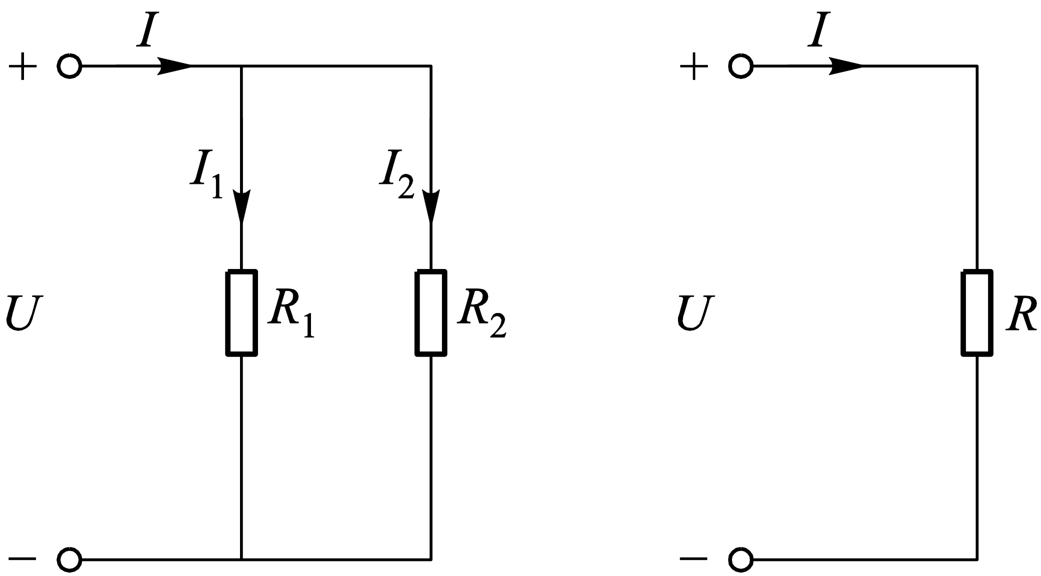


$$U = U_V + U_R = U_V + I_V R = U_V + \frac{U_V}{R_V} R = (1 + \frac{R}{R_V}) U_V$$

由此可知所需的串联电阻大小为

$$R = \frac{U - U_V}{U_V} R_V$$

2. 电阻元件的并联



(a) 串联电阻　　(b) 等效电阻

- 并联电阻两端的电压相同。
- 两个电阻并联的等效电阻满足：

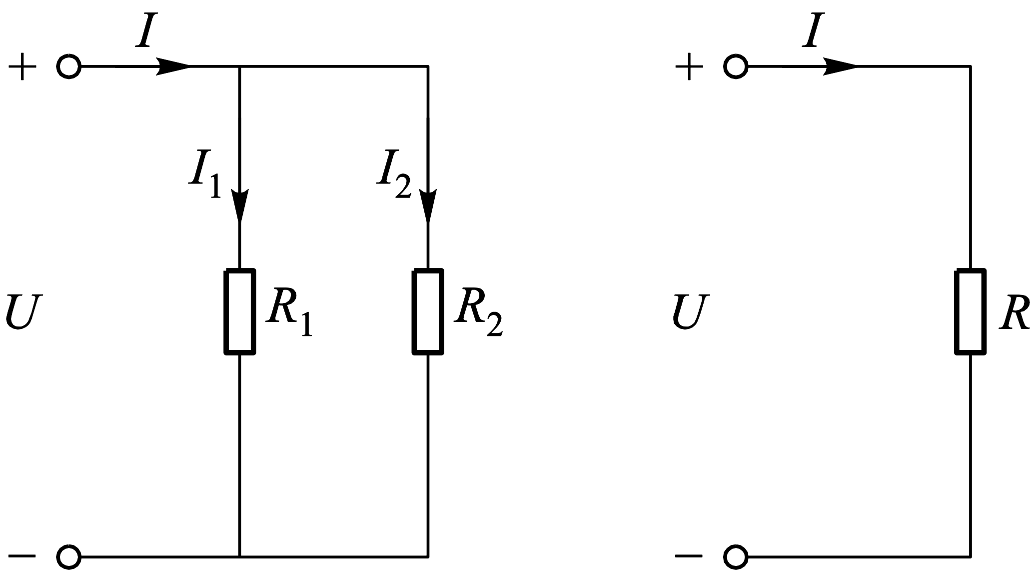
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

k个电阻并联的等效电阻满足：

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{R_{\mathrm{i}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_{\mathrm{k}}}\quad 或\quad G_{\mathrm{eq}}=\sum_{i=1}^{k}G_i=G_1+G_2+\ldots+G_{\mathrm{k}}$$

电导：$G=\dfrac{1}{R}$　　单位：S

➢ 两个并联的电阻的电流满足分流关系。



(a) 串联电阻　　(b) 等效电阻

$$I = I_1 + I_2$$

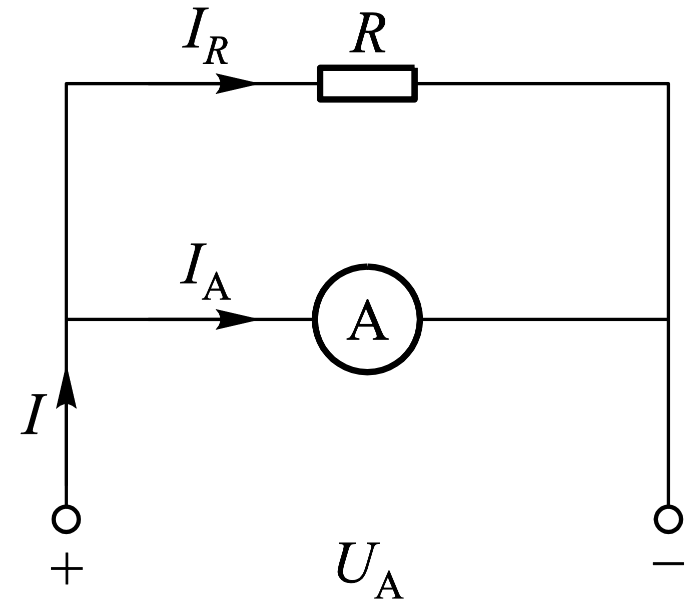
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

电阻并联的主要作用是分流。

- 电阻并联的应用：

电流表的量程为I_A，内阻为R_A，电流表满偏时表头的电压为U_A。并联电阻R后，可将电流表的量程由I_A扩展至I。



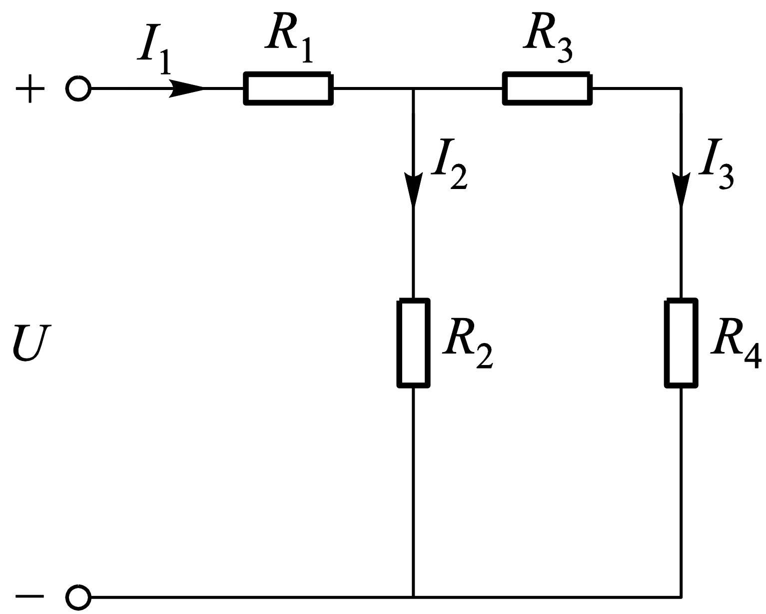
$$I = I_A + I_R = I_A + \frac{U_A}{R} = I_A + \frac{I_A R_A}{R} = I_A(1 + \frac{R_A}{R})$$

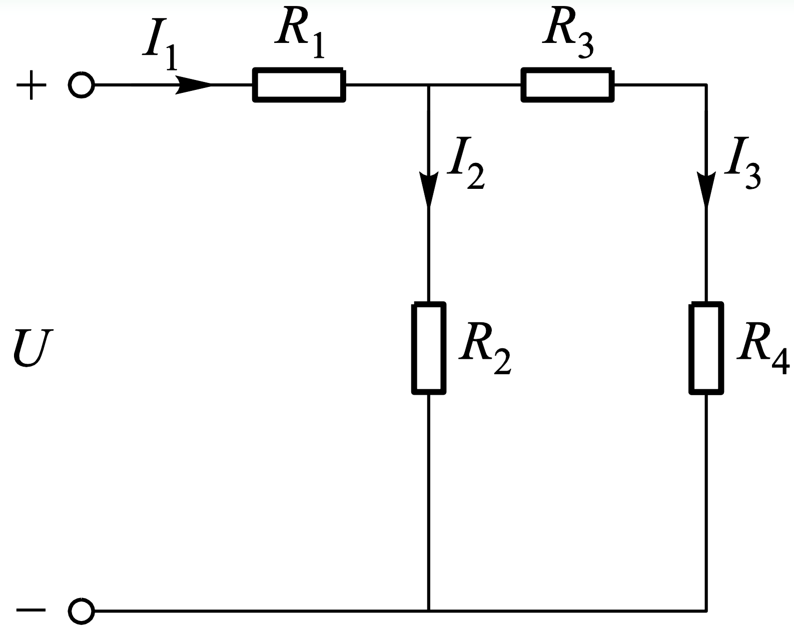
由此可知所需的并联电阻大小为：

$$R = \frac{I_A}{I - I_A} R_A$$

常用的负载都是并联接到电源上的。

【例 2.1.1】电路如图所示，已知U=120V、R_1=1kΩ、R_2=1.5kΩ、R_3=1.8kΩ、R_4=1.2kΩ，试求电路中的电流I_1、I_2、I_3。





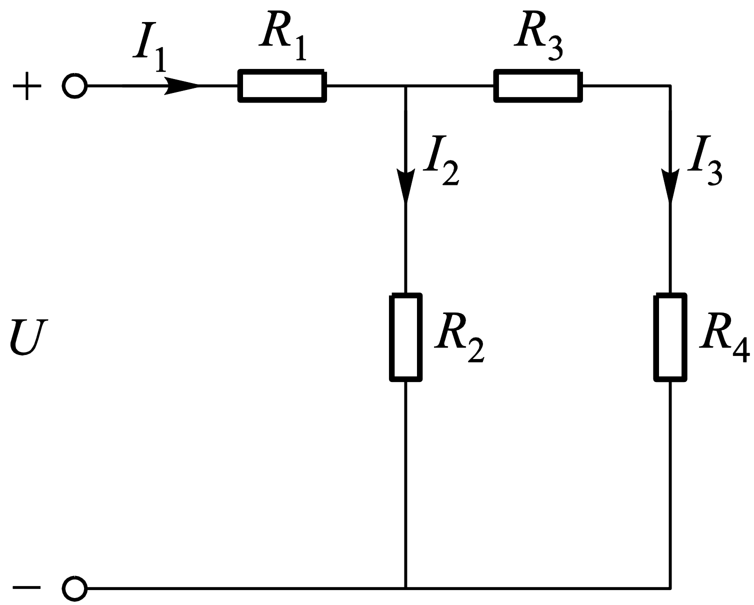
U=120V、R_1=1kΩ、R_2=1.5kΩ、R_3=1.8kΩ、R_4=1.2kΩ，

【解】R_3和R_4串联，等效电阻用R_{34}表示；R_{34}与R_2并联，等效电阻用 R'表示； 再与R_1串联，等效成电阻R。

$$R_{34}=R_3+R_4=1.8+1.2=3\text{k}\Omega$$

$$R'=\frac{R_{34}R_2}{R_{34}+R_2}=\frac{3+1.5}{3\times1.5}=1\text{k}\Omega$$

$$R=R'+R_1=1+1=2\text{k}\Omega$$



$$R_{34} = R_3 + R_4 = 1.8 + 1.2 = 3\text{k}\Omega$$

$$R = R' + R_1 = 1 + 1 = 2\text{k}\Omega$$

I_1为总电流，由欧姆定律得

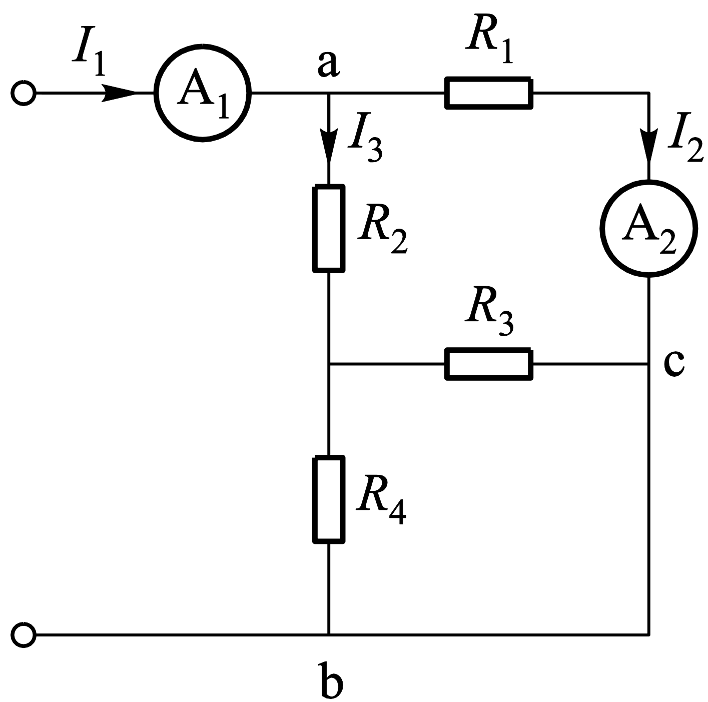
$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{120}{2} = 60\text{mA}$$

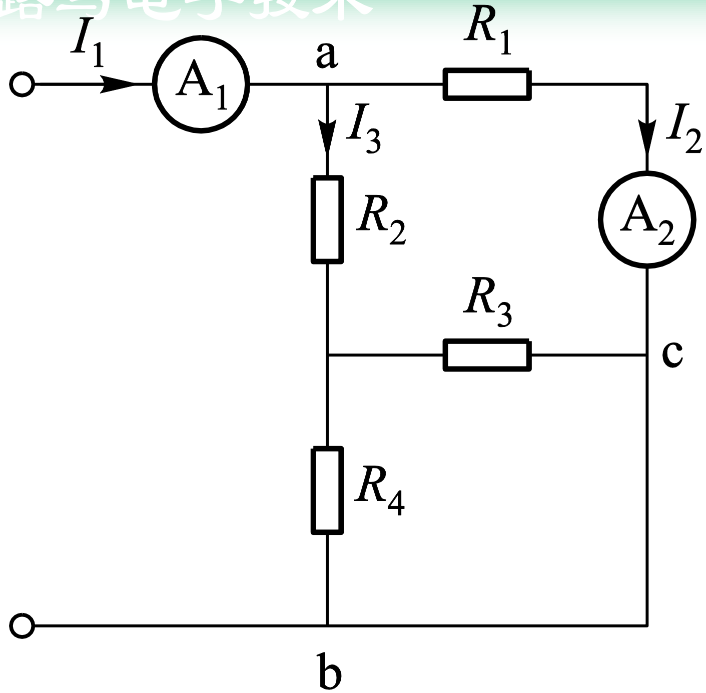
由分流公式和KCL得

$$I_2 = \frac{R_{34}}{R_{34} + R_2} I_1 = \frac{3}{3 + 1.5} \times 60 = 40\text{mA}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 60 - 40 = 20\text{mA}$$

【例 2.1.2】图示电路中，已知R_1=18Ω、R_2=1.8Ω、R_3=12Ω，电流表A_1的读数为4.5A，A_2的读数为1.5A，求R_4的阻值。





$$I_3 = I_1 - I_2 = 4.5 - 1.5 = 3\text{A}$$

$$U_{R3} = I_2 R_1 - I_3 R_2$$
$$= 1.5 \times 18 - 3 \times 1.8 = 21.6\text{V}$$

$$I_{R3} = \frac{21.6}{12} = 1.8\text{A} \qquad \boxed{R_4 = \frac{21.6}{1.2} = 18\Omega}$$

$$I_{R4} = I_3 - I_{R3} = 3 - 1.8 = 1.2\text{A}$$

【解】$\boldsymbol{R_3}$和$\boldsymbol{R_4}$并联，并联电阻用$\boldsymbol{R_{34}}$表示；$\boldsymbol{R_{34}}$与$\boldsymbol{R_2}$串联；然后与$\boldsymbol{R_1}$并联。由分流公式得

$$I_2 = \frac{R_2 + R_{34}}{R_2 + R_{34} + R_1} I_1$$

代入得 $R_{34} = 7.2\Omega$

$\boldsymbol{R_{34}}$为$\boldsymbol{R_3}$和$\boldsymbol{R_4}$并联的等效电阻，由此得 $R_4 = 18\Omega$

判别电路的串并联关系根据以下原则：

（1）看电路的结构特点；

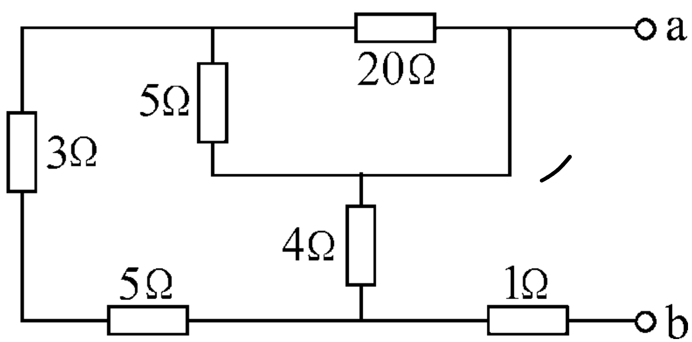
（2）看电压、电流的关系；

（3）对电路作变形等效；

（4）找出等电位点。

【例2.1.3】试求电路中ab端的等效电阻 R_{ab}。

【解】观察电路的连接方式可见，5 Ω 和20 Ω 电阻为并联，然后与3 Ω 和5 Ω 电阻串联，等效成一个电阻 R'



$$R' = \left(\frac{5\times 20}{5+20} + 3 + 5\right)\Omega = 12\Omega$$

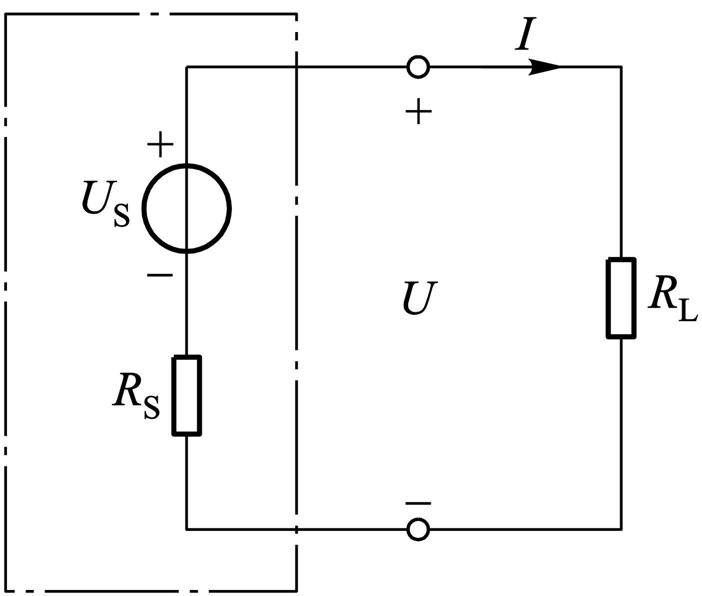
12 Ω 的电阻再与4 Ω 电阻并联后串联1 Ω 电阻就得到ab端的等效电阻，即

$$R_{ab} = \left(1 + \frac{12\times 4}{12+4}\right)\Omega = 4\Omega$$

2.2 电源的等效变换

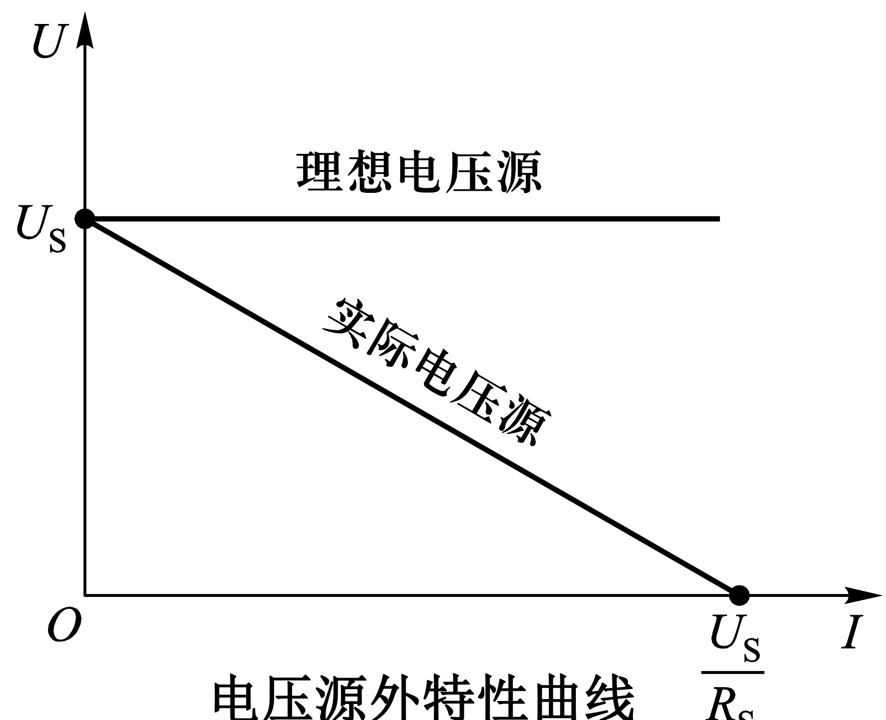
1. 实际电压源模型

电压源是能够向负载提供稳定电压的电源。



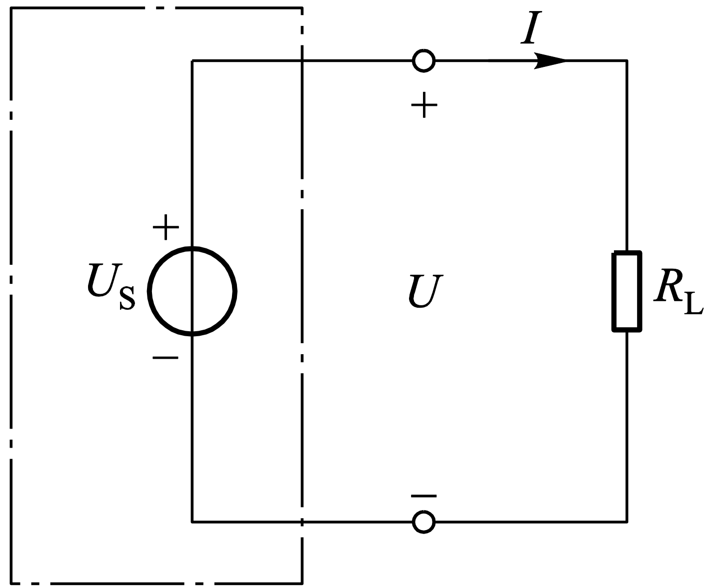
电压源

$$U = U_S - IR_S$$



电压源外特性曲线

理想电压源（恒压源）：R_S=0或R_S«R_L时的电压源

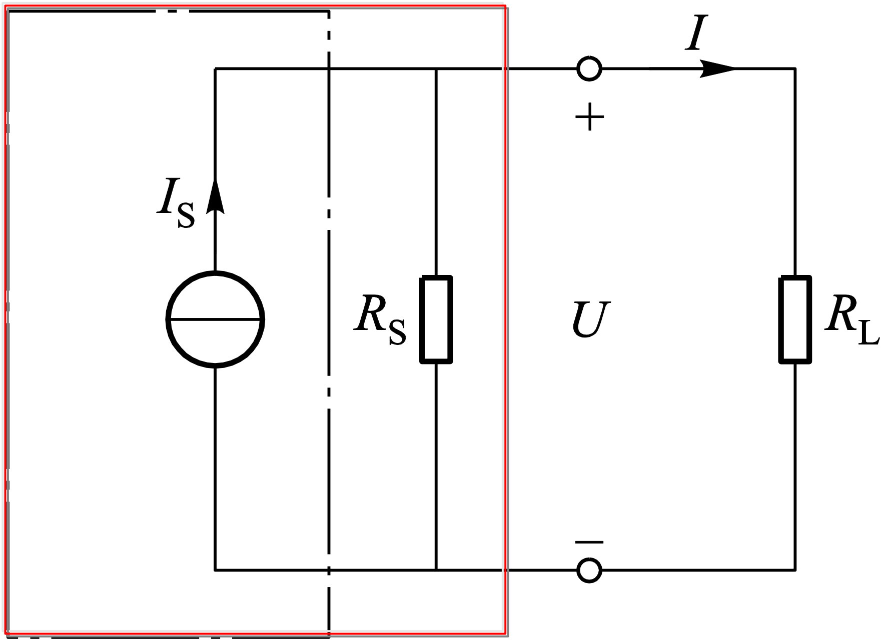


理想电压源

理想电压源端电压U恒等于理想电压源电压U_S，而电流I的大小由外电路决定。

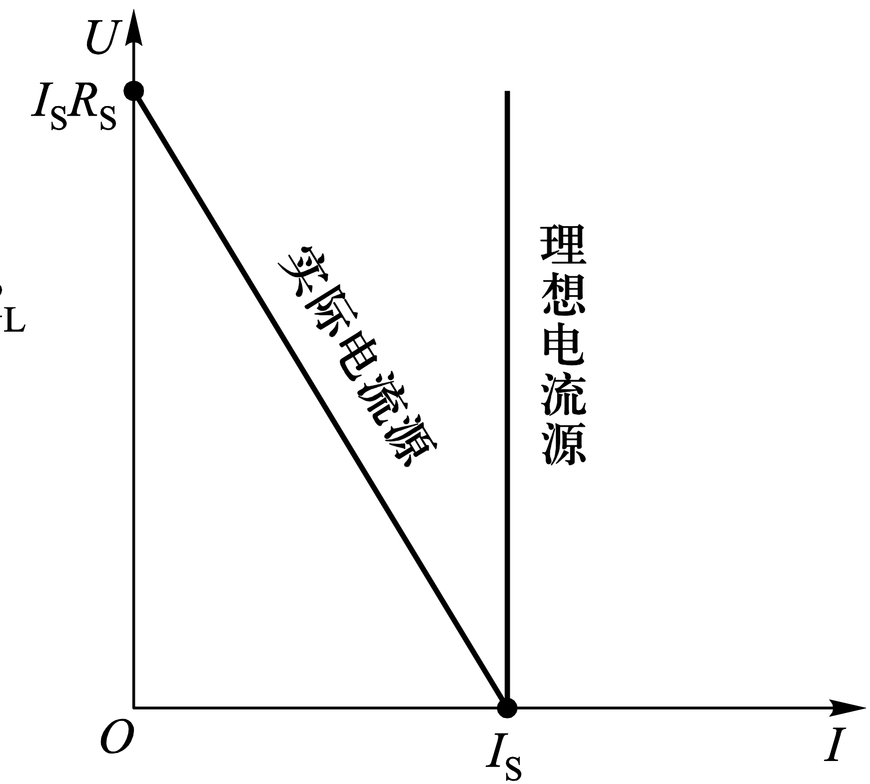
2. 实际电流源模型

电流源是能够向负载提供稳定电流的电源。



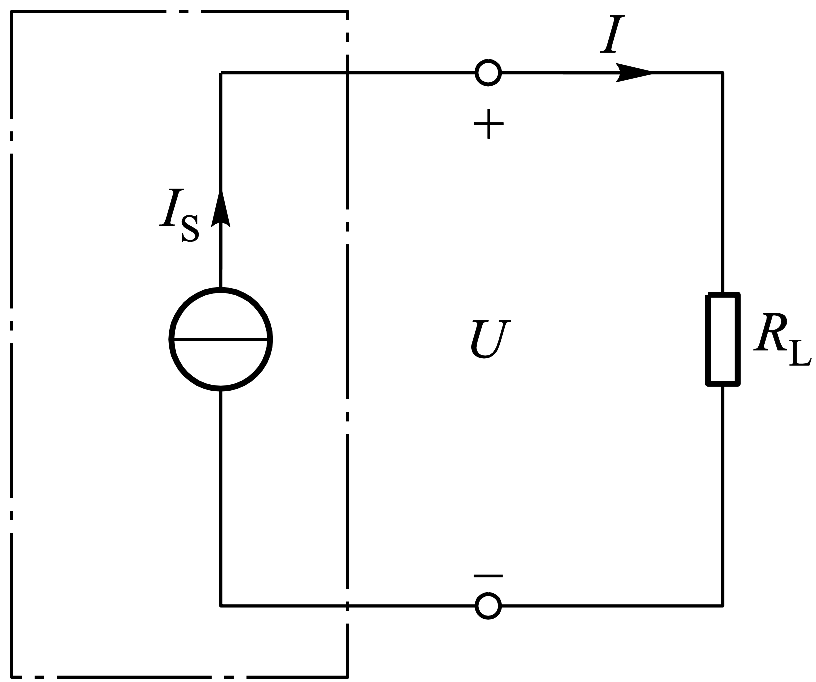
电流源

$$I = I_S - \frac{U}{R_S}$$



电流源外特性曲线

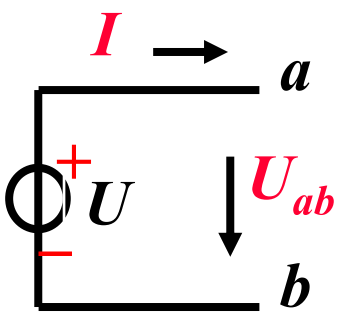
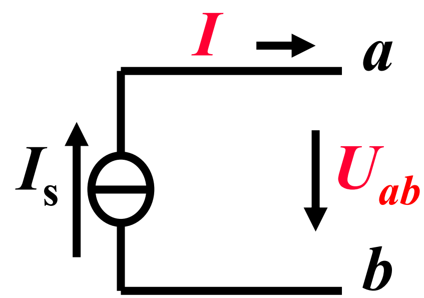
理想电流源（恒流源）：$R_S=\infty$或$R_S>>R_L$时的电流源



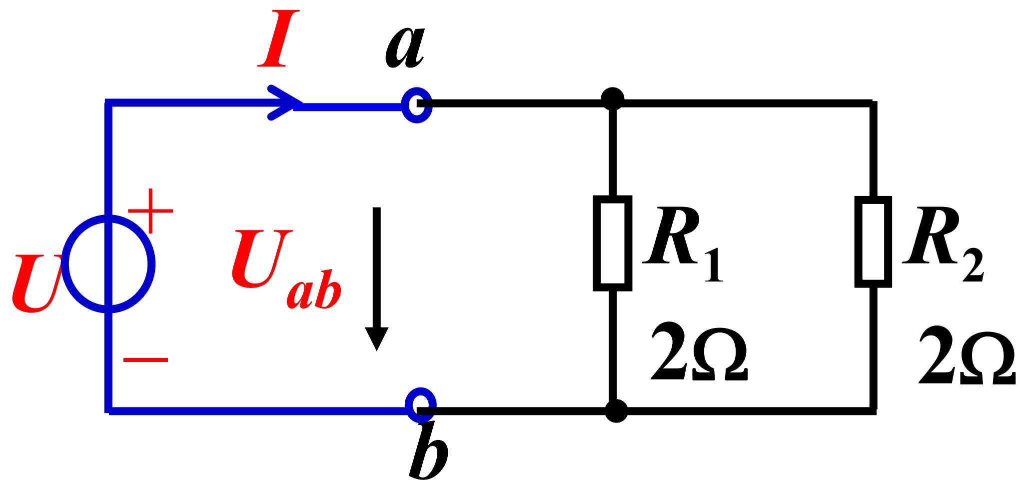
理想电流源

理想电流源端电流I恒等于理想电流源电流I_S，而端电压U由外电路决定。

恒压源与恒流源特性比较

	恒压源	恒流源
不变量	 $U_{ab} = U$ （常数） U_{ab}的大小、方向均为恒定，外电路负载对 U_{ab} 无影响。	 $I = I_s$ （常数） I 的大小、方向均为恒定，外电路负载对 I 无影响。
变化量	输出电流 I 可变 I 的大小、方向均由外电路决定	端电压U_{ab} 可变 U_{ab} 的大小、方向均由外电路决定

恒压源中的电流由外电路决定

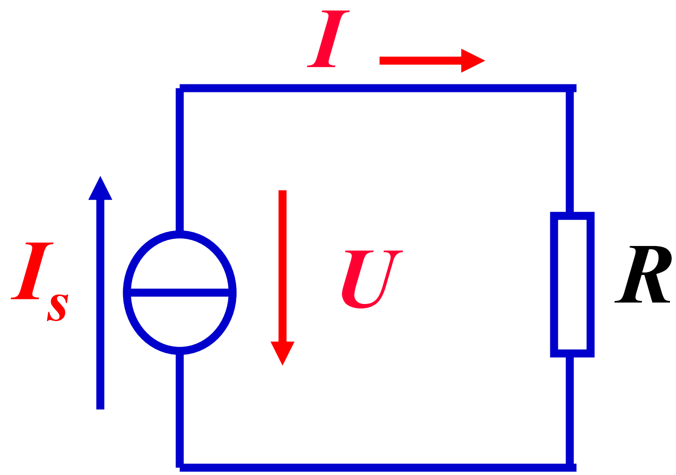


设：U=10V

则：当R_1接入时： I=5A

当R_1、R_2同时接入时： I=10A

恒流源两端电压由外电路决定

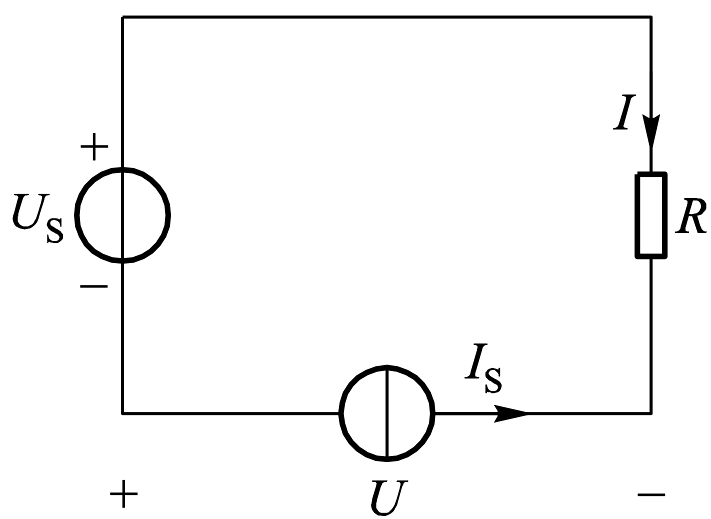


设： I_S=1 A

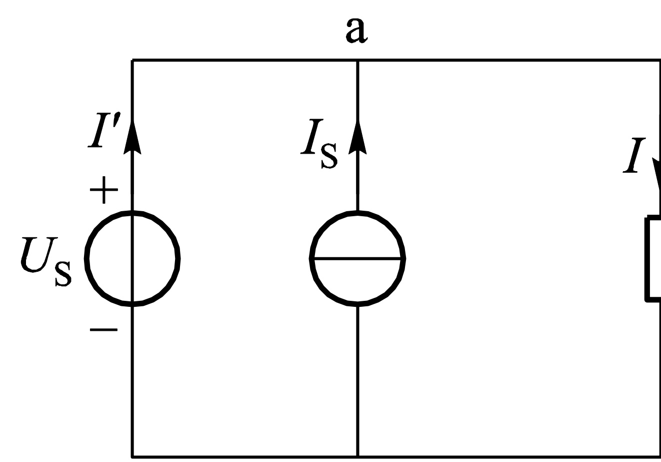
则： R=1 Ω 时， U =1 V

R=10 Ω 时， U =10 V

【例 2.2.1】电路如图所示，已知U_S=10V、I_S=2A、R=2Ω，试判断（a）、（b）两个电路中电阻R的电流。电路中哪些元件发出功率，哪些元件吸收功率。

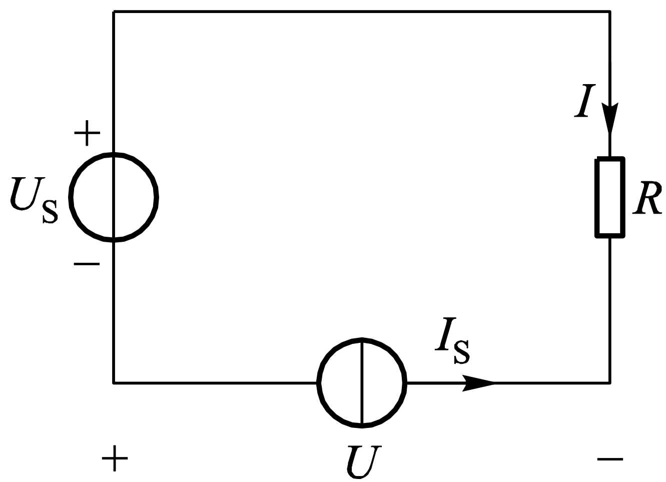


(a)



(b)

U_S=10V、I_S=2A



(a)

【解】元件R、U_S流过的电流是I_S，由此可知

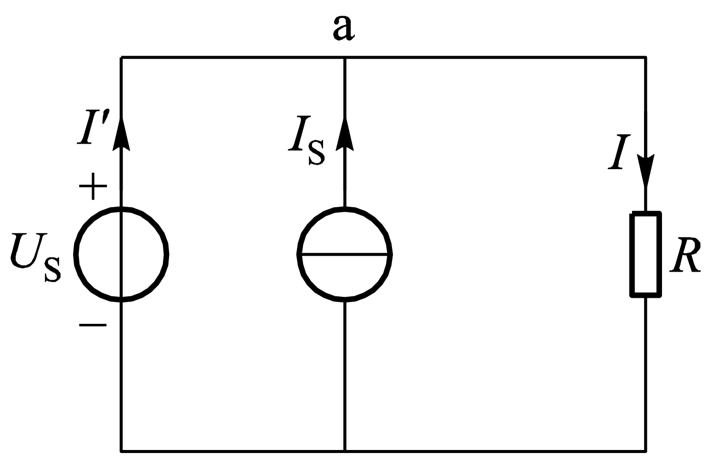
$$I = -2\text{A}$$

电流源I_S两端的电压为

$$U = -U_S + IR = -10 + (-2)\times 2 = -14\text{V}$$

电压源U_S的电压、电流实际方向一致，在电路中起负载的作用，吸收功率。

电流源I_S的电压、电流实际方向相反，在电路中起电源的作用，发出功率。



(b)

元件R、 I_S 两端的电压都为U_S，则流过R的电流为

$$I = \frac{U_S}{R} = \frac{10}{2} = 5\text{A}$$

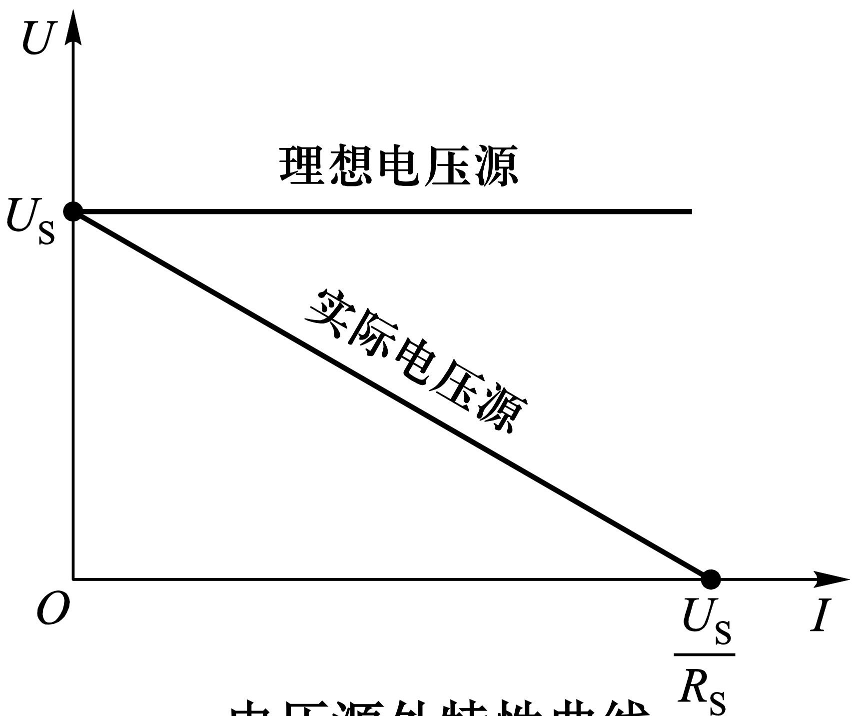
电压源U_S的电流为

$$I' = I - I_S = 5 - 2 = 3\text{A}$$

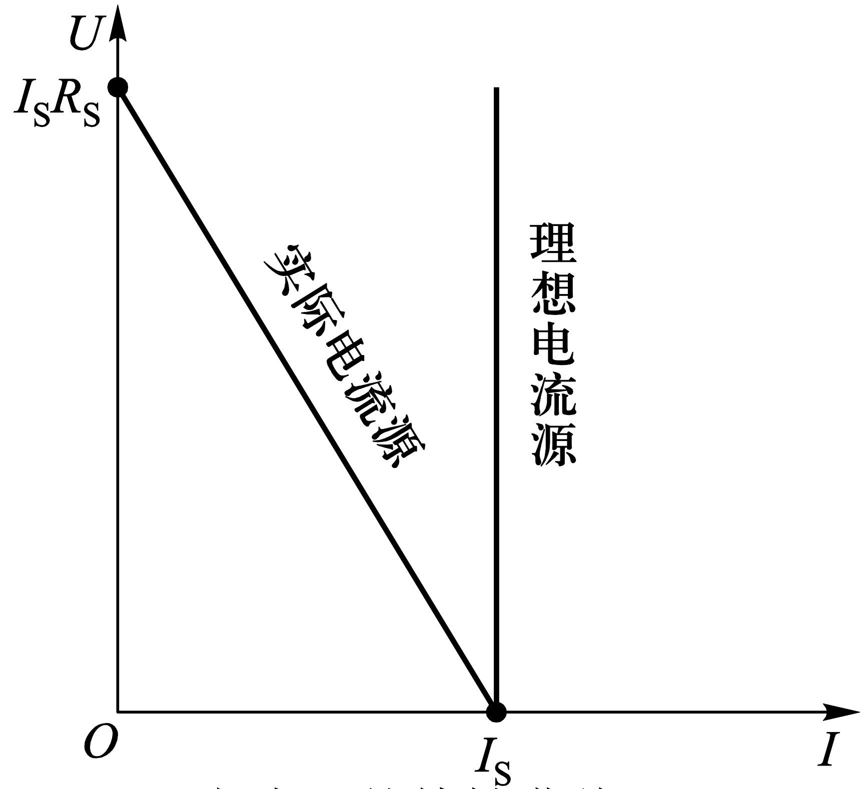
电压源U_S的电压、电流实际方向相反，在电路中起电源的作用，发出功率。

电流源I_S的电压、电流实际方向相反，在电路中起电源的作用，发出功率。

3. 实际电压源与电流源的等效互换



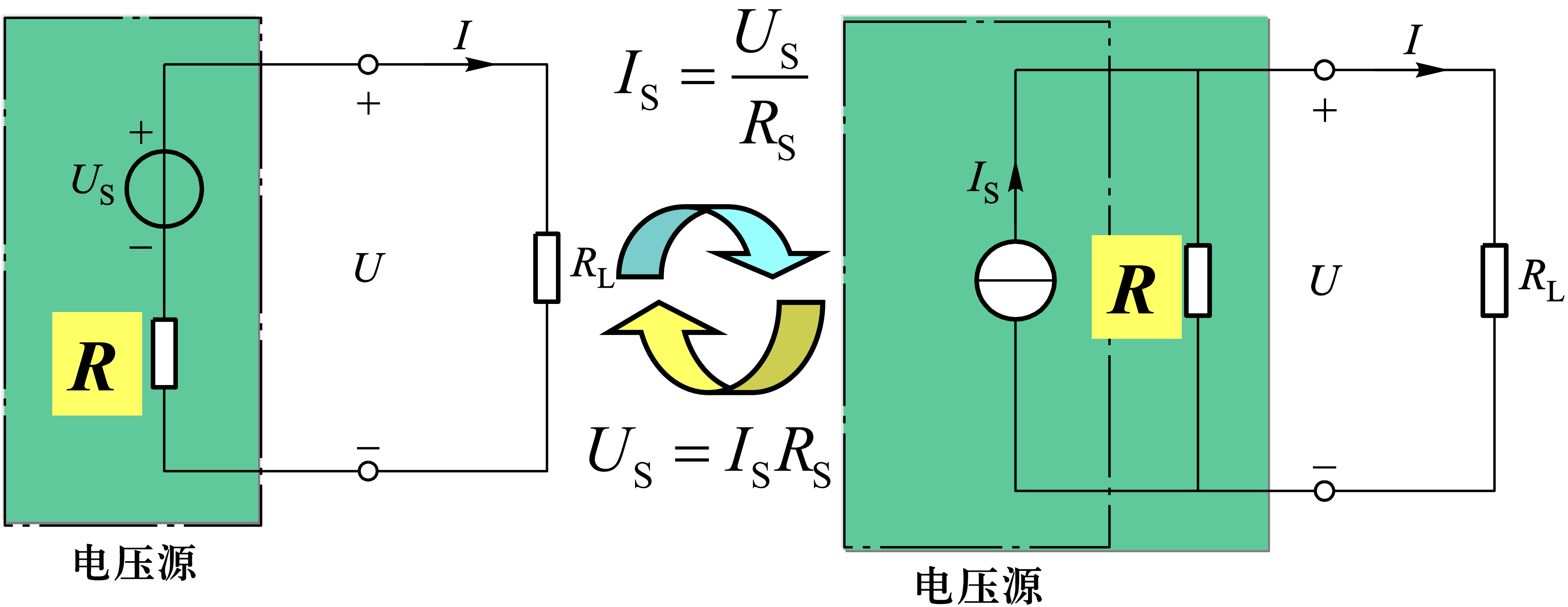
电压源外特性曲线



电流源外特性曲线

上述两条曲线变化规律一样，意味着两个电源的外特性完全相同，说明两种模型对外电路是等效的，两种模型可以进行等效互换。

电压源和电流源等效互换的条件为



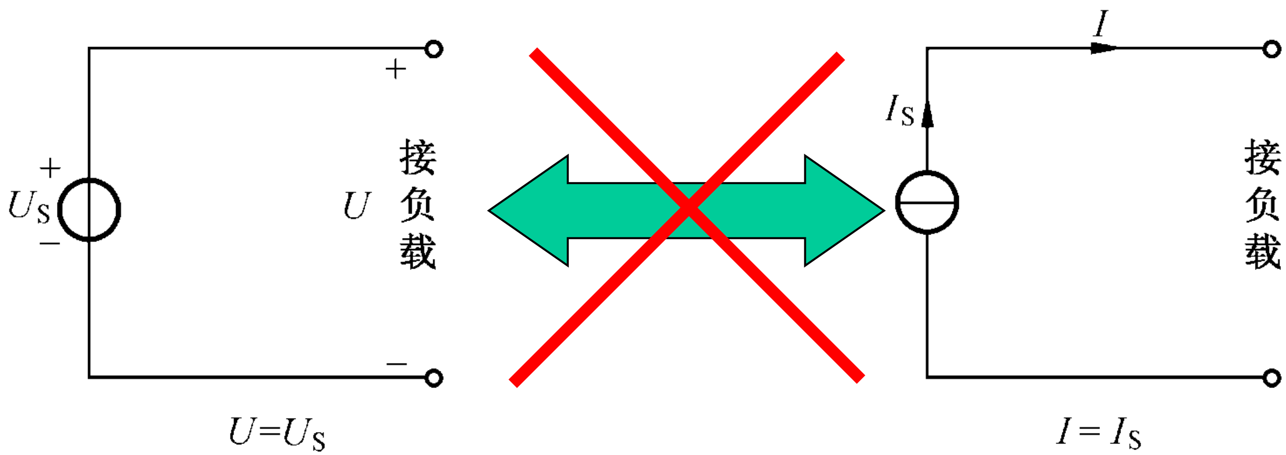
注意（1）一般不仅限于内阻,也可以是某个电阻;

（2）要注意电压源的极性与电流源的方向;

（3）两电源对外电路等效,但两电源内部不等效;

（4）恒压源和恒流源不能等效互换。

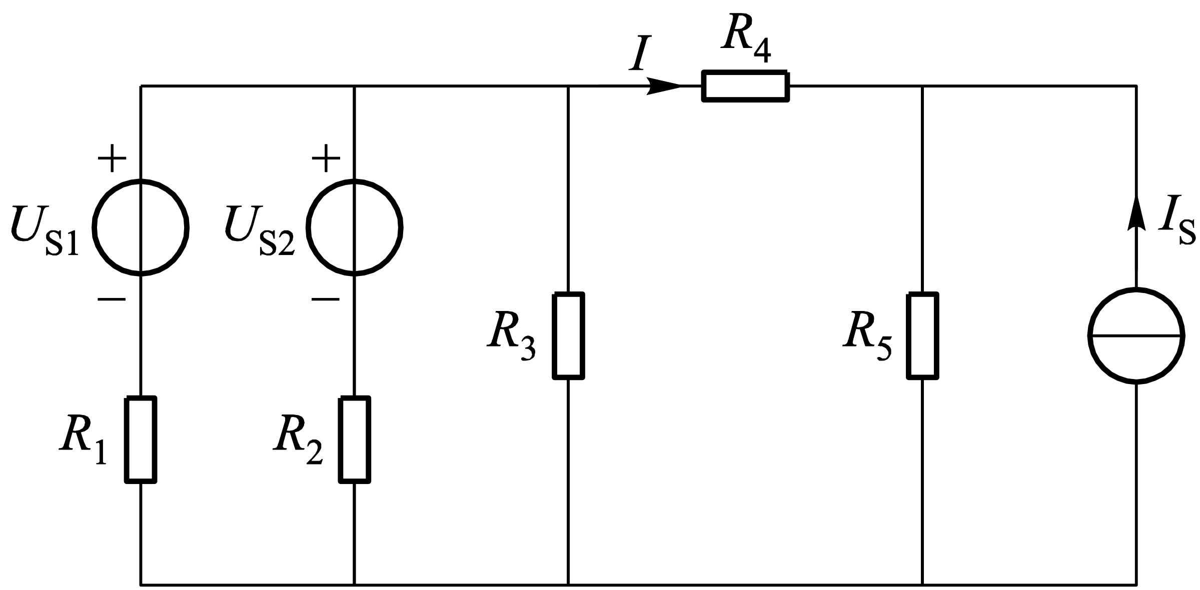
$$I_S = \frac{U_S}{R_S} = \infty$$



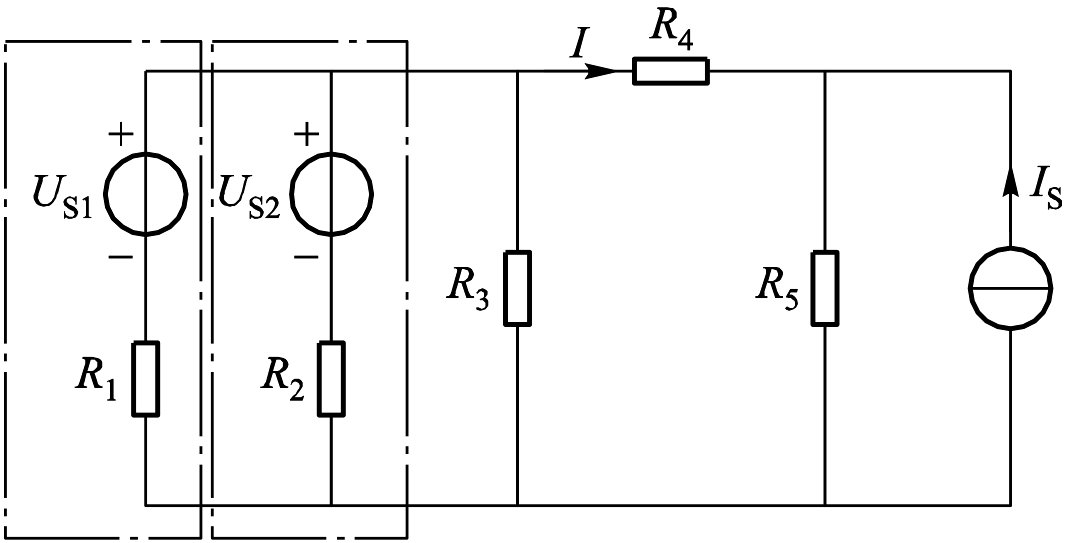
(a) 恒压源　　(b) 恒流源

$$U_S = I_S R_S = \infty$$

【例 2.2.2】电路如图所示，已知U_{S1}=4V、U_{S2}=3V、I_S=1A、R_1=2Ω、R_2=3Ω、R_3=1.2Ω、R_4=2.4Ω、R_5=2Ω，求I。



【解】利用电压源与电流源的等效互换进行等效变换。



(a) 原电路

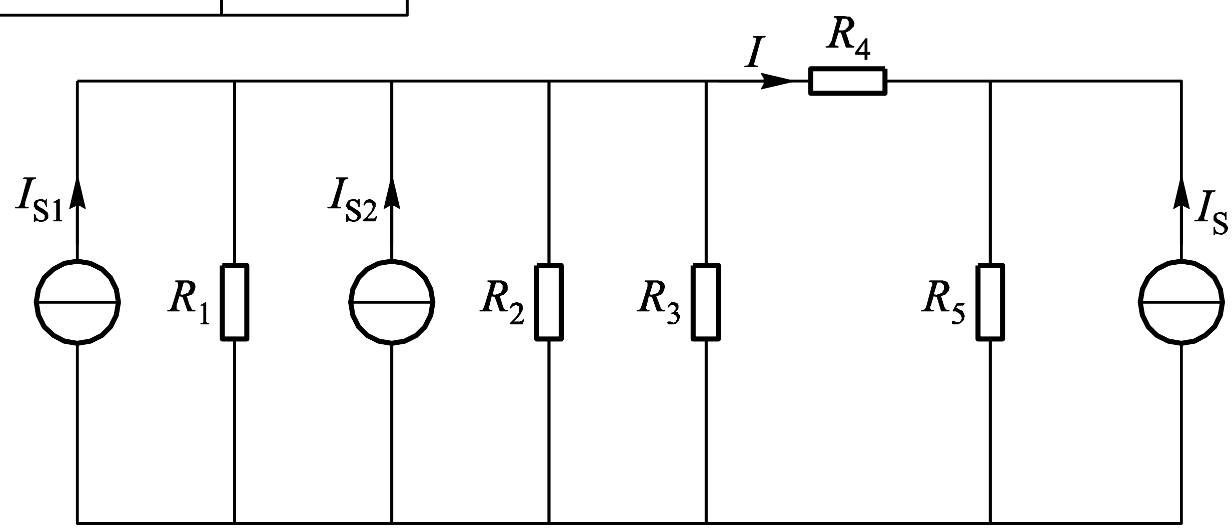
U_{S1}=4V， U_{S2}=3V、I_S=1A、

R_1=2Ω、R_2=3Ω、R_3=1.2Ω、

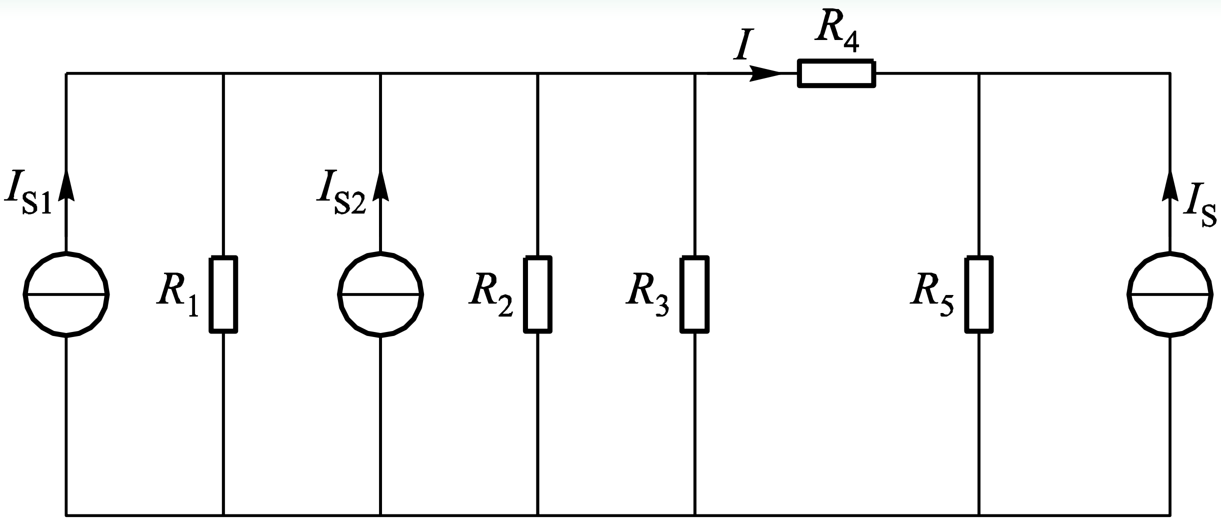
R_4=2.4Ω、R_5=2Ω

$$I_{S1}=\frac{U_{S1}}{R_1}=\frac{4}{2}=2\text{A}$$

$$I_{S2}=\frac{U_{S2}}{R_2}=\frac{3}{3}=1\text{A}$$



(b) 等效电路



$$I_{S1}=\frac{U_{S1}}{R_1}=\frac{4}{2}=2\text{A}$$

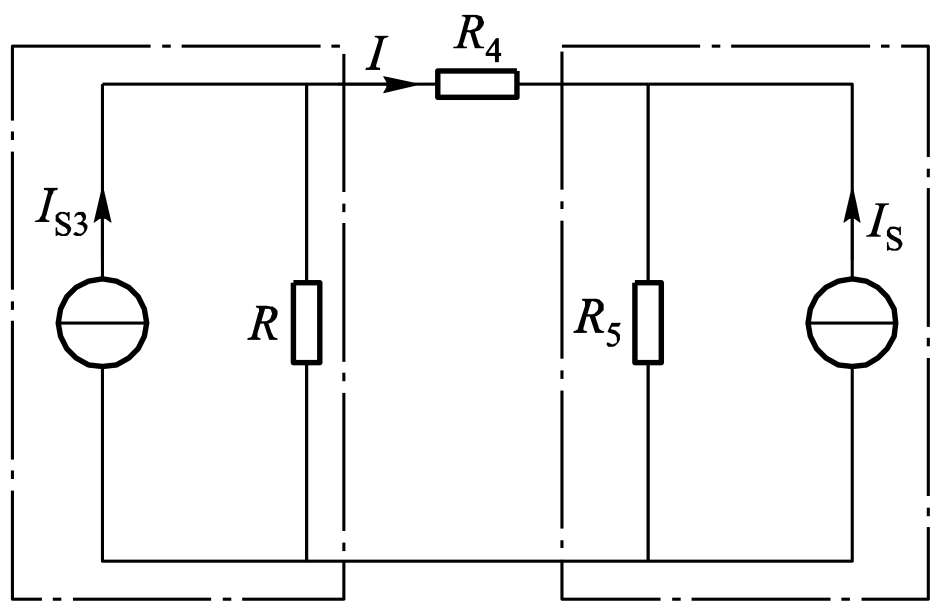
$$I_{S2}=\frac{U_{S2}}{R_2}=\frac{3}{3}=1\text{A}$$

(b) 等效电路

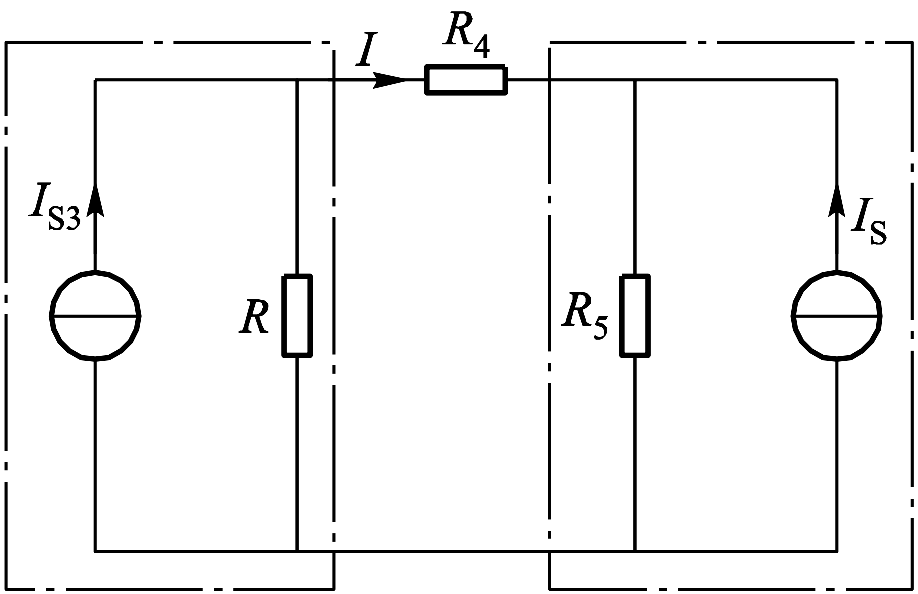
$$I_{S3}=I_{S1}+I_{S2}=2+1=3\text{A}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{5}{3}\Omega$$

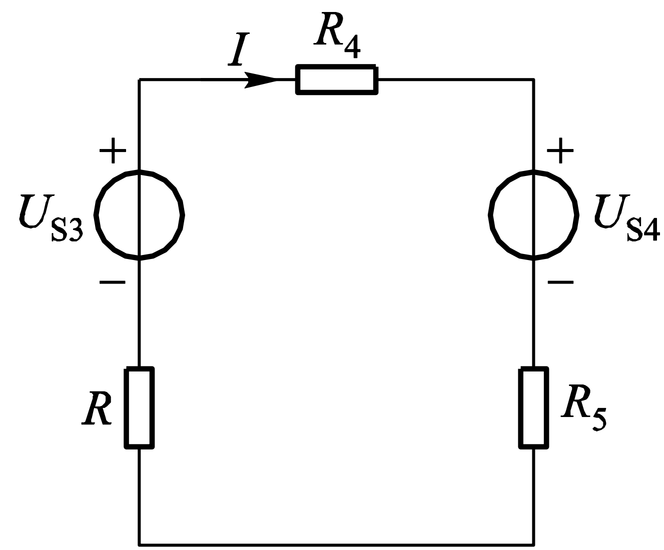
$$R=\frac{3}{5}=0.6\Omega$$



(c) 等效电路



(c) 等效电路



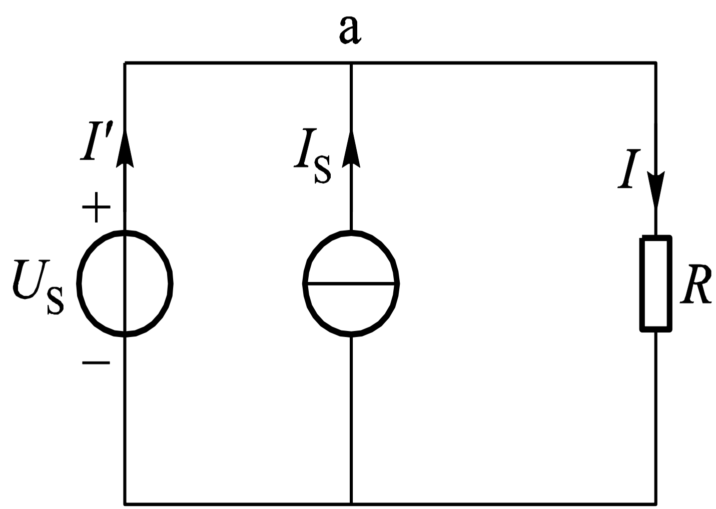
(d) 等效电路

$$U_{S3} = I_{S3}R = 3 \times 0.6 = 1.8\text{V}$$

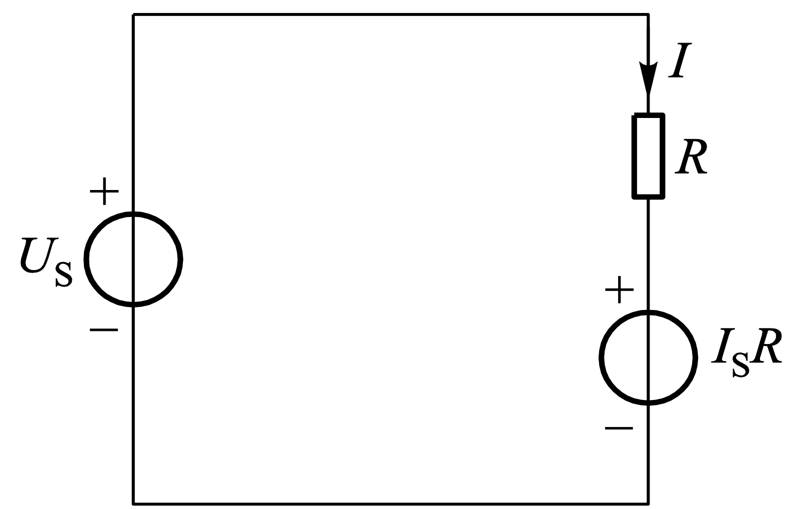
$$U_{S4} = I_S R_5 = 1 \times 2 = 2\text{V}$$

$$I = \frac{U_{S3} - U_{S4}}{R + R_4 + R_5} = \frac{1.8 - 2}{0.6 + 2.4 + 2} = -0.04\,\text{A}$$

【思考题1】如何理解电压源与电流源等效变换的等效电路只是对外电路等效？在图（a）中，求电阻R的电流，能否把电流源I_S与电阻R的并联等效变换成电压源与电阻R的串联，将电路化成如图（b）所示电路，从而求出电阻R的电流。



（a）



（b）

【思考题2】电压源和电流源在实际使用时是否允许开路或短路？

1. 电压源不允许短路；

2. 电流源不允许开路；

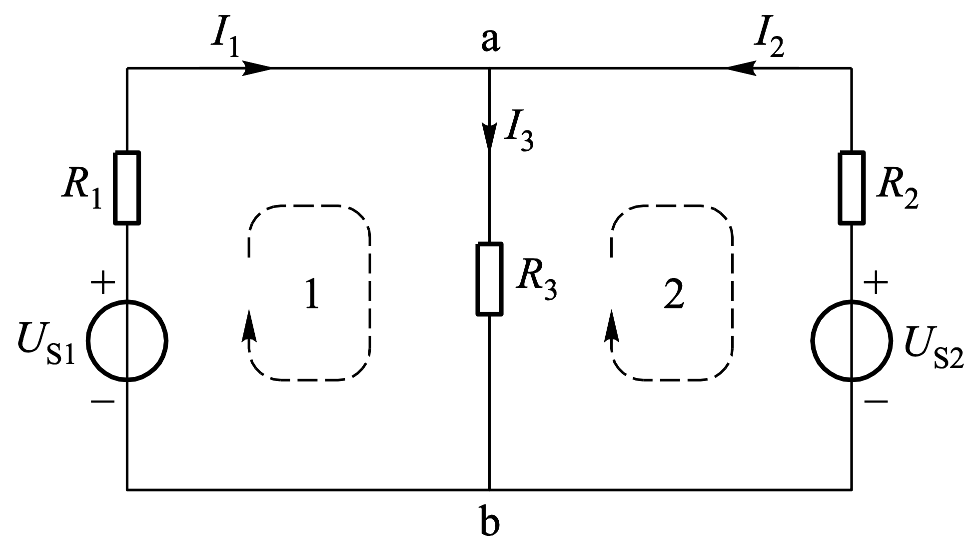
2.3 支路电流法

未知数：各支路电流

解题思路：根据基尔霍夫定律，列KCL和KVL独立方程，然后联立求解。

一般情况下，对于含有n个结点、b条支路的电路，未知数为b个，因此需要列出b个独立的电路方程进行求解。

(1) 标出各支路电流的参考方向(I_1、I_2、I_3)。



(2) 列出独立的KCL方程，方程数为n−1。

$$I_1 + I_2 = I_3$$

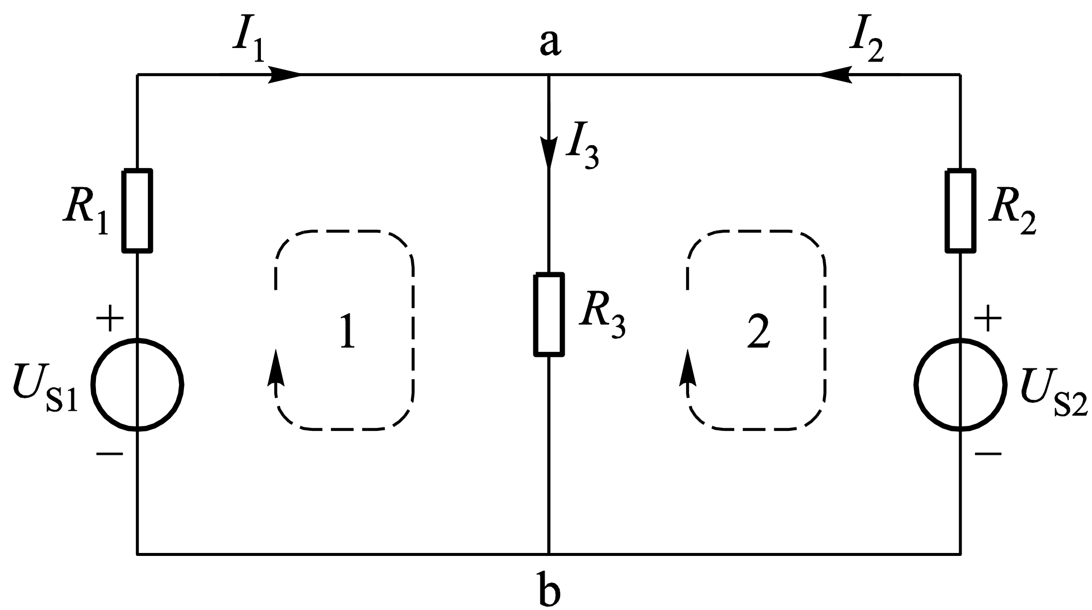
(3) 列出独立的KVL方程，方程数为b−(n−1)。

网孔1： $I_1R_1 + I_3R_3 - U_{S1} = 0$

网孔2： $-I_2R_2 + U_{S2} - I_3R_3 = 0$

(4) 解联立方程组。

【例 2.3.1】在图示电路中，若U_{S1}=70V，U_{S2}=120V，R_1=10Ω，R_2=15Ω，R_3=12Ω。求各支路电流。

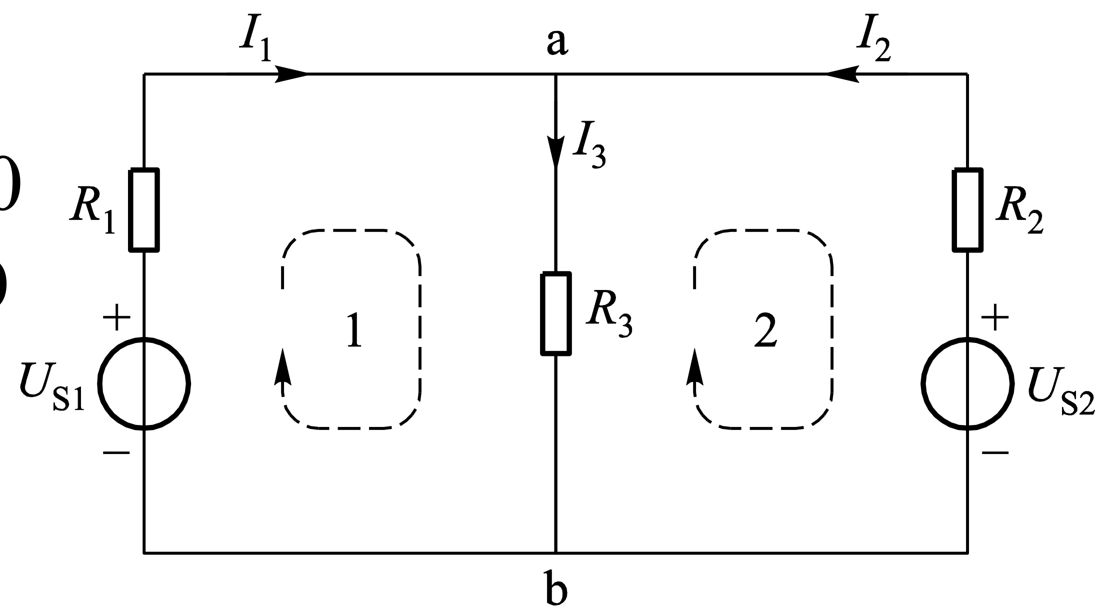


【解】根据KCL和KVL列出的方程组为

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$I_1R_1 + I_3R_3 - U_{S1} = 0$$

$$-I_2R_2 + U_{S2} - I_3R_3 = 0$$



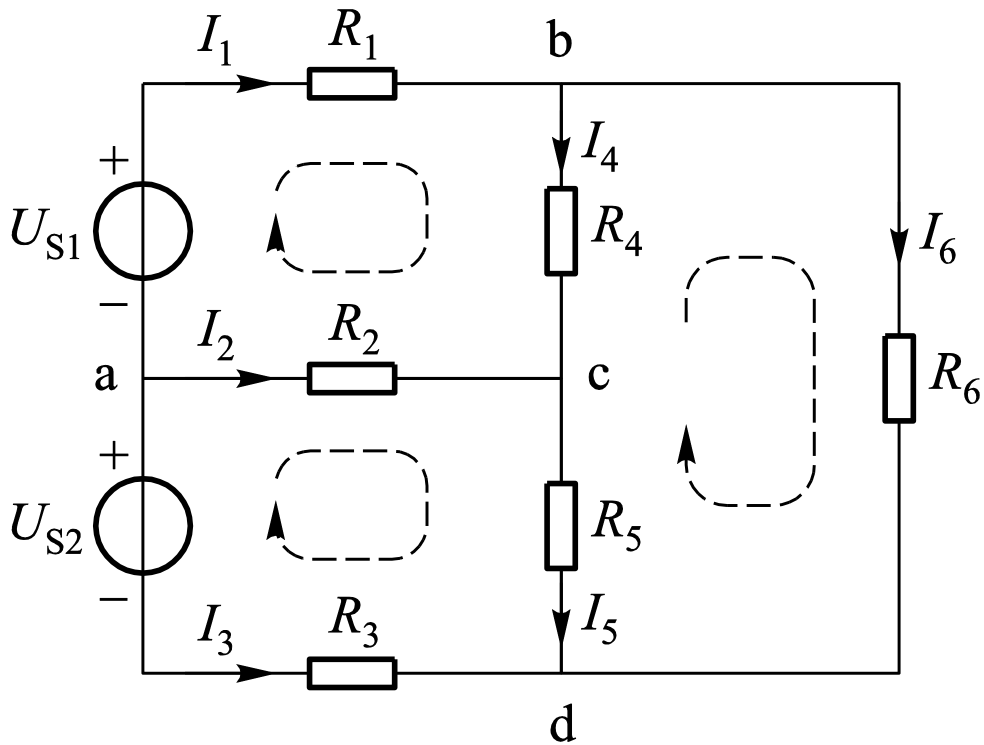
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 10I_1 + 12I_3 - 70 = 0 \\ -15I_2 + 120 - 12I_3 = 0 \end{cases}$$

U_{S1}=70V，U_{S2}=120V，R_1=10Ω，R_2=15Ω，R_3=12Ω。

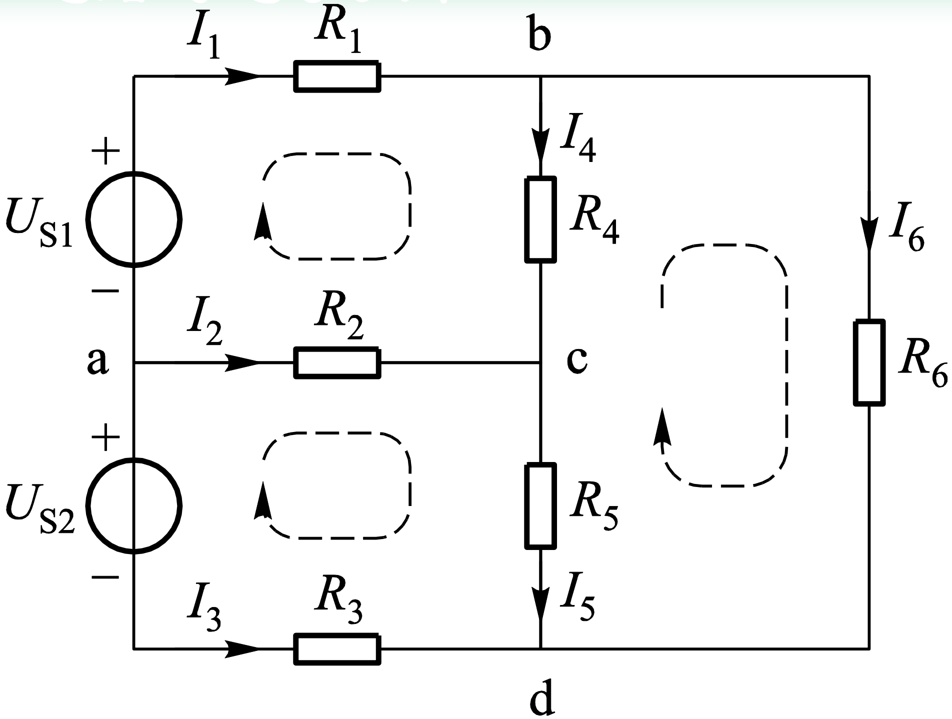
解方程组得

$$I_1 = 1\text{A} \quad I_2 = 4\text{A} \quad I_3 = 5\text{A}$$

【例 2.3.2】用支路电流法求图示电路的各支路电流。只需列出电路方程即可。



【解】（1）电路中有六条支路，标出I_1至I_6的参考方向。



（2）对4个结点中的任意3个，选结点a、b、c应用KCL，即

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 = I_4 + I_6$$

$$I_2 + I_4 = I_5$$

（3）对3个网孔应用KVL，即

$$I_1R_1 + I_4R_4 - I_2R_2 - U_{S1} = 0$$

$$I_2R_2 + I_5R_5 - I_3R_3 - U_{S2} = 0$$

$$I_6R_6 - I_5R_5 - I_4R_4 = 0$$

联立以上6个独立方程，可以求解出I_1至I_6。

2.4 结点电压法

未知数：结点电压

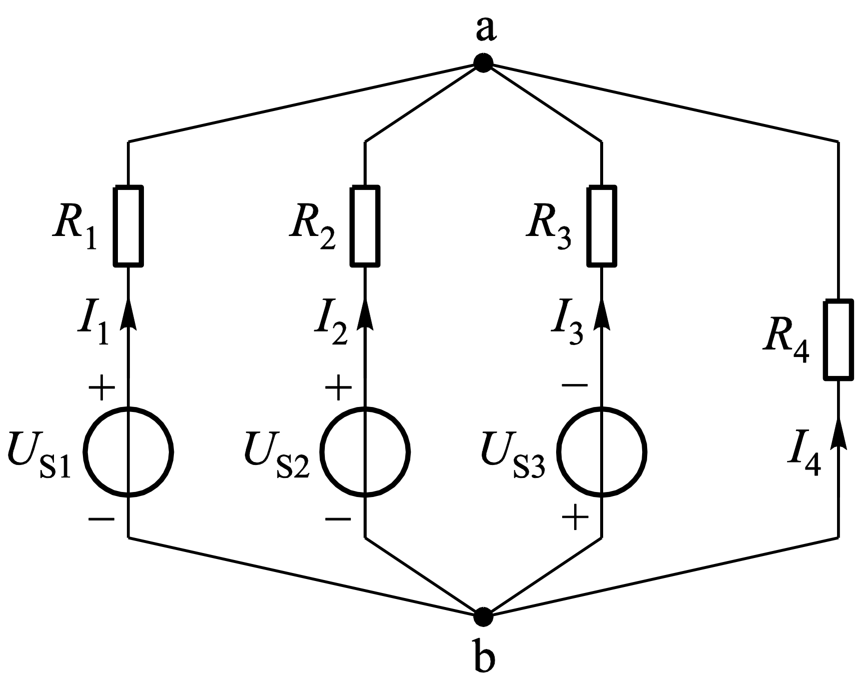
在电路中设一个参考点，令其电位为零。

⇒ 列出其它结点的结点电流方程，

⇒ 求出其它各结点的电位，

⇒ 再求出各支路电流。

下面推导结点电压方程。



（1）设b结点为参考点，即

$$V_b = 0\text{V}$$

（2）由KCL有

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

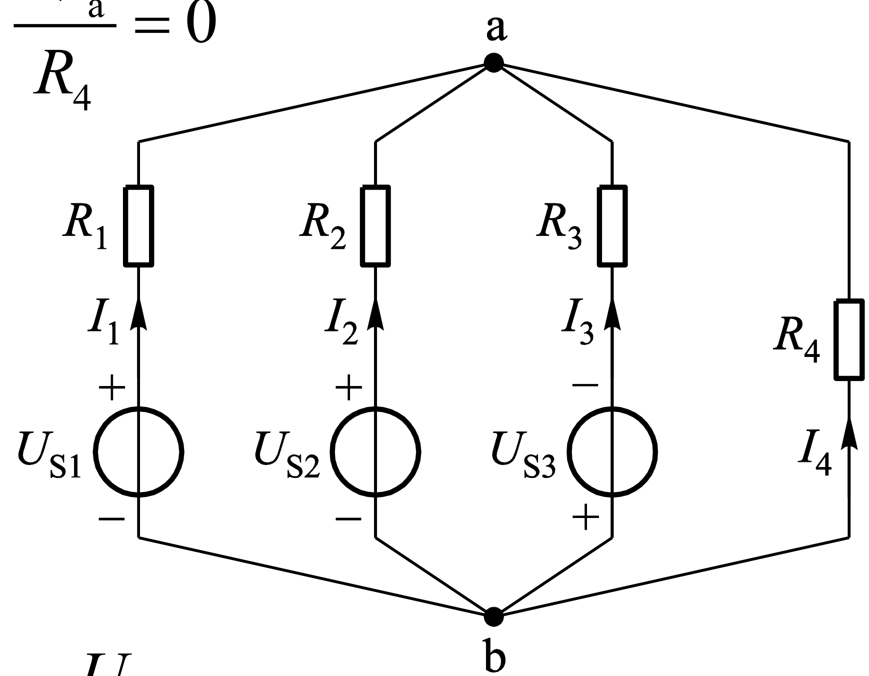
（3）用电位表示各电流，即

$$I_1 = \frac{U_{S1} - V_a}{R_1} \quad I_2 = \frac{U_{S2} - V_a}{R_2} \quad I_3 = \frac{-U_{S3} - V_a}{R_3} \quad I_4 = \frac{-V_a}{R_4}$$

代入支路电流方程，即

$$\frac{U_{S1} - V_a}{R_1} + \frac{U_{S2} - V_a}{R_2} + \frac{-U_{S3} - V_a}{R_3} + \frac{-V_a}{R_4} = 0$$

$$\frac{U_{S1}-V_a}{R_1}+\frac{U_{S2}-V_a}{R_2}+\frac{-U_{S3}-V_a}{R_3}+\frac{-V_a}{R_4}=0$$



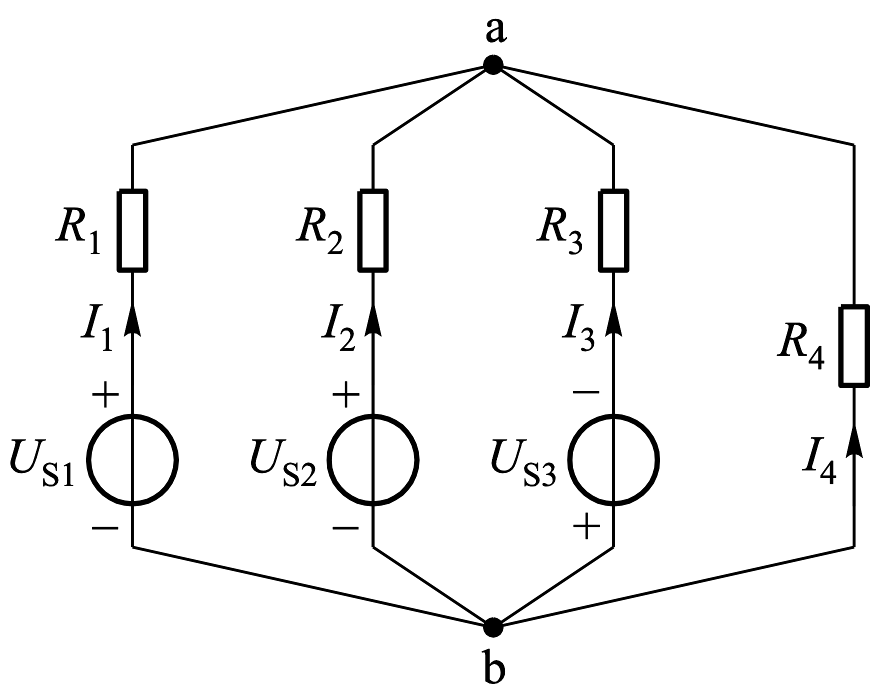
短路电流流入结点则取正号，流出结点取负号

整理得

$$V_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=\frac{U_{S1}}{R_1}+\frac{U_{S2}}{R_2}-\frac{U_{S3}}{R_3}$$

左边是各支路电阻的倒数之和乘以该点的电位。

方程右边是各支路的短路电流的代数和。



（4）未知的结点电压为

$$V_a=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}-\dfrac{U_{S3}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}$$

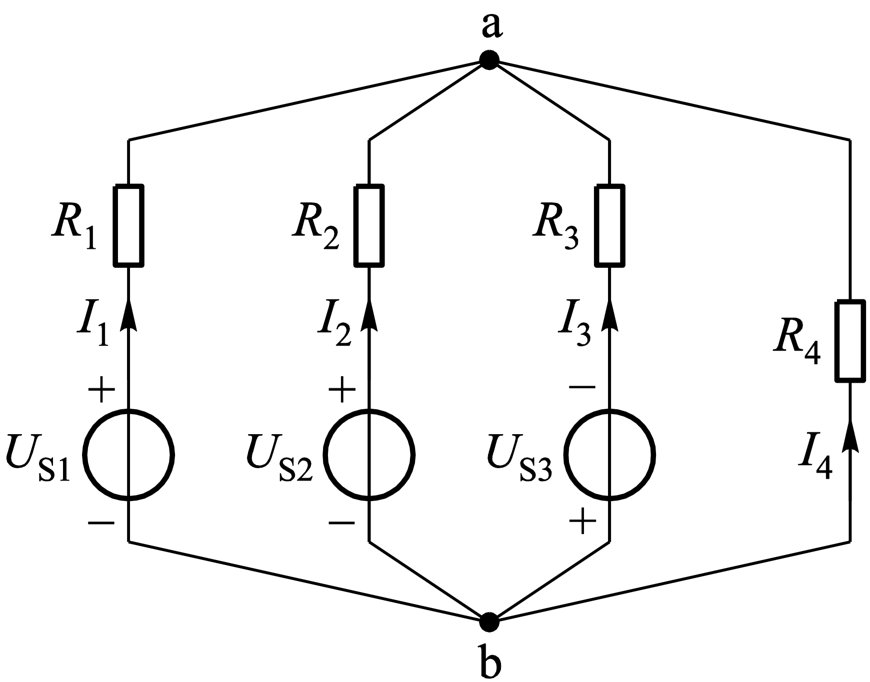
两个结点的结点电压公式：

$$U=\frac{\sum I_S}{\sum \dfrac{1}{R}}$$

其中，$\boxed{I_S=\dfrac{U_S}{R}}$

分子是各支路的短路电流的代数和，

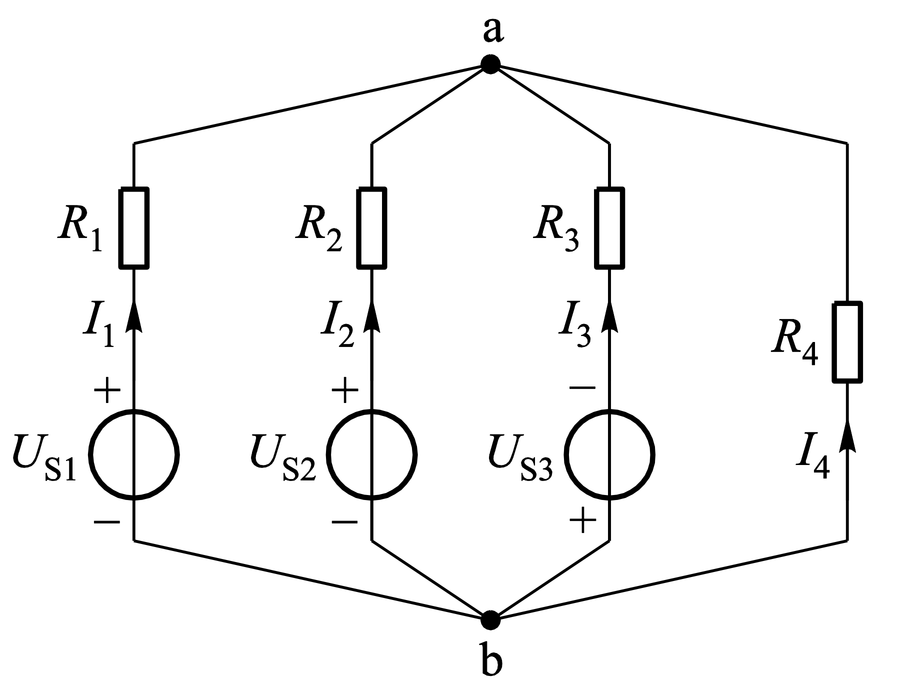
分母是各支路电阻的倒数之和。



$$V_a = \frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1} + \dfrac{U_{S2}}{R_2} - \dfrac{U_{S3}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}$$

$$I_1 = \frac{U_{S1} - V_a}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_{S2} - V_a}{R_2} \qquad I_3 = \frac{-U_{S3} - V_a}{R_3} \qquad I_4 = \frac{-V_a}{R_4}$$

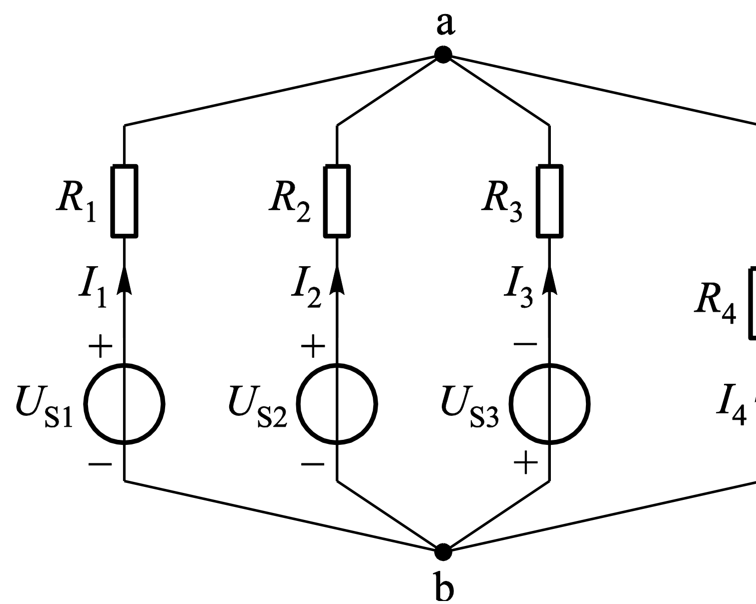
【例 2.4.1】在图示电路中，已知U_{S1}=240V，U_{S2}=100V，U_{S3}=30V，R_1=12Ω，R_2=2Ω，R_3=3Ω，R_4=12Ω。求支路电流I_1、I_2、I_3、I_4。



【解】

$$V_a=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}-\dfrac{U_{S3}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}=\frac{\dfrac{240}{12}+\dfrac{100}{2}-\dfrac{30}{3}}{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}}=60\text{V}$$

各支路电流为



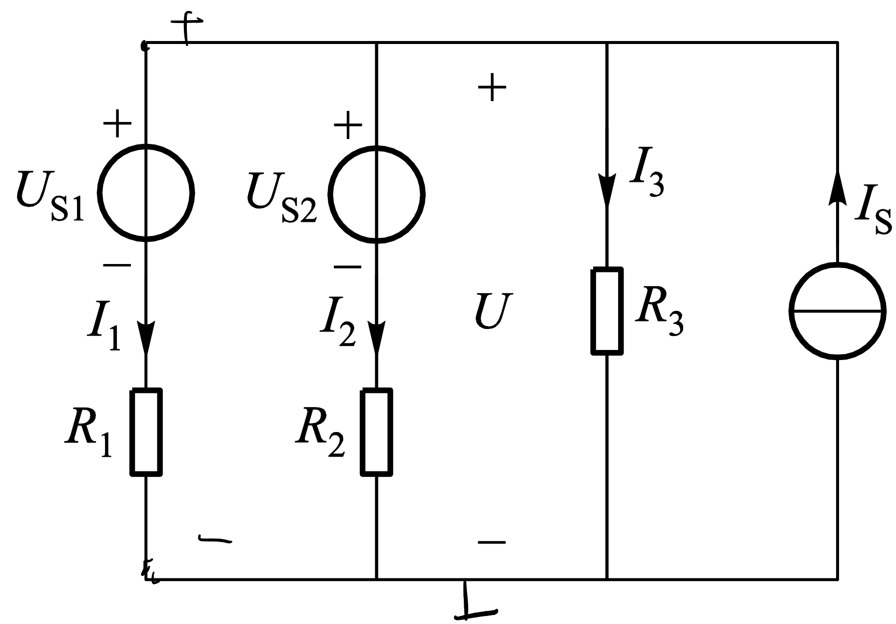
$$I_1=\frac{U_{S1}-V_a}{R_1}=\frac{240-60}{12}=15\text{A}$$

$$I_2=\frac{U_{S2}-V_a}{R_2}=\frac{100-60}{2}=20\text{A}$$

$$I_3=\frac{-U_{S3}-V_a}{R_3}=\frac{-30-60}{3}=-30\text{A}$$

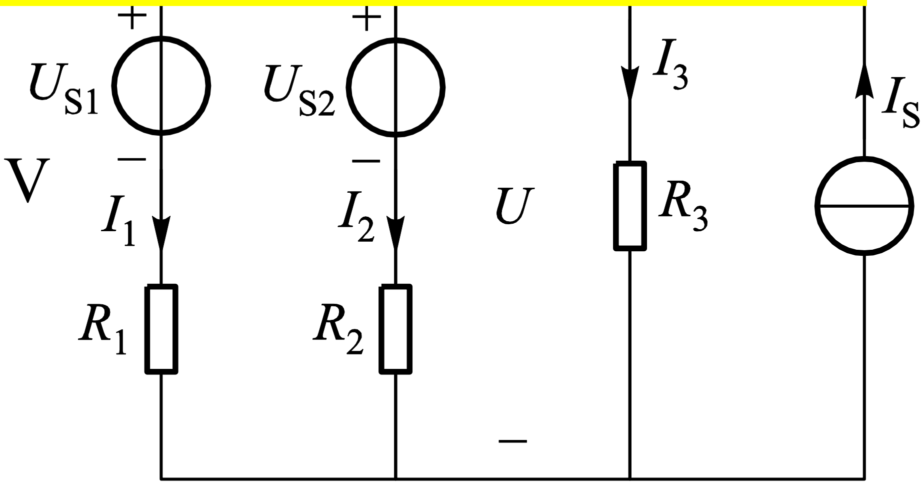
$$I_4=\frac{-V_a}{R_4}=\frac{-60}{12}=-5\text{A}$$

【例 2.4.2】电路如图所示，已知U_{S1}=40V，U_{S2}=15V，I_S=5A，R_1=2Ω，R_2=3Ω，R_3=1.2Ω。求未知的支路电流I_1、I_2、I_3。



公式中的I_S和$\dfrac{U_S}{R}$在概念上是相同的，都是支路的短路电流。

$$U=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}+I_S}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}=\frac{\dfrac{40}{2}+\dfrac{15}{3}+5}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1.2}}=18\text{V}$$



（2）计算各支路电流。

$$I_1=\frac{U-U_{S1}}{R_1}=\frac{18-40}{2}=-11\text{A}$$

$$I_2=\frac{U-U_{S2}}{R_2}=\frac{18-15}{3}=1\text{A}$$

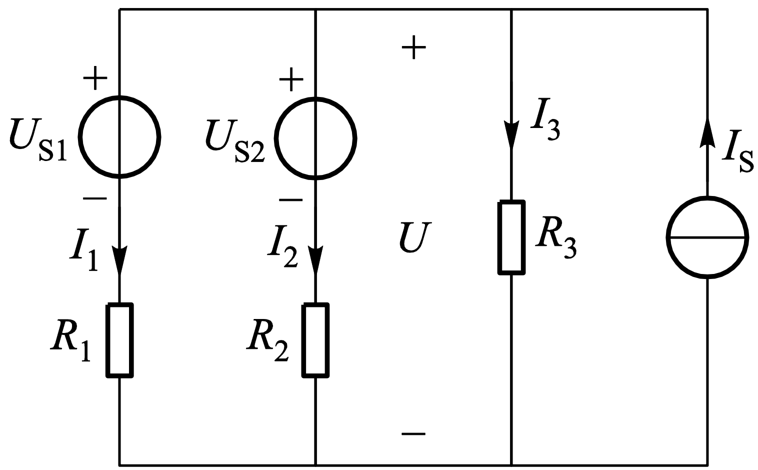
$$I_3=\frac{U}{R_3}=\frac{18}{1.2}=15\text{A}$$

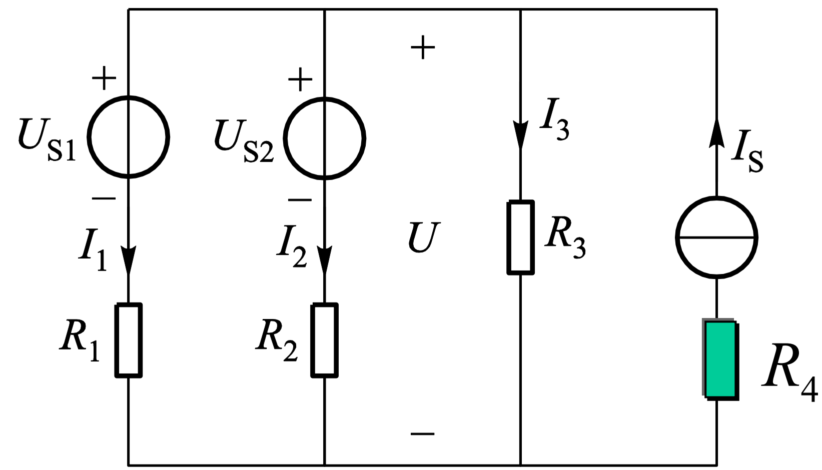
U_{S1}=40V，
U_{S2}=15V，

I_S=5A，R_1=2Ω，

R_2=3Ω，R_3=1.2Ω

思考：



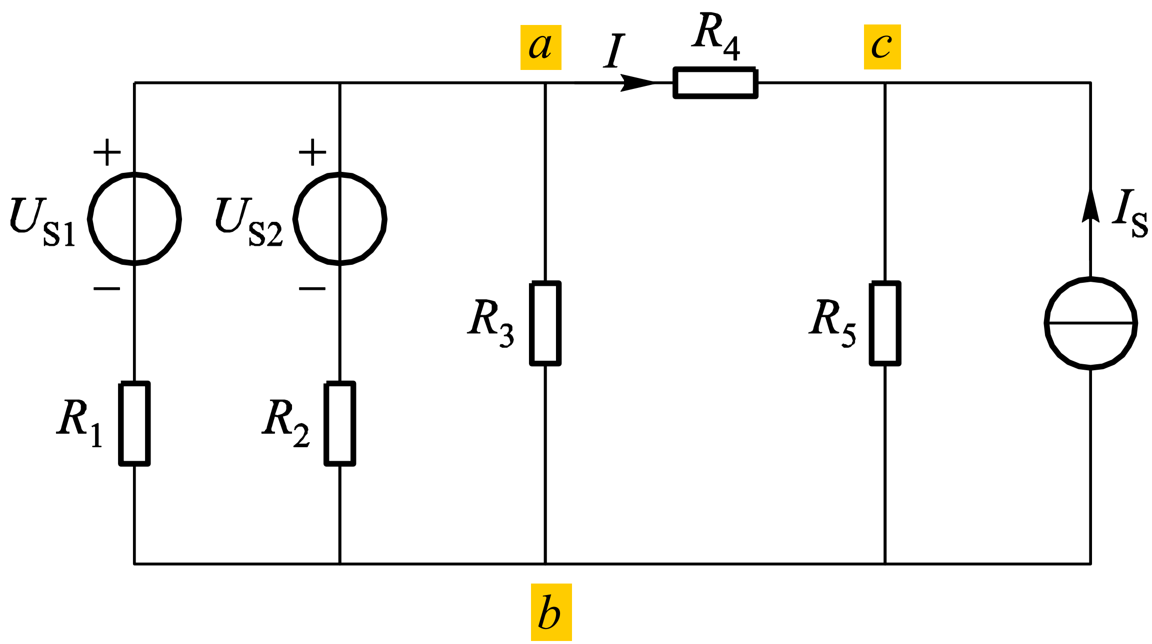


$$U=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}+I_S}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

$$U=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}+I_S}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

分子是各支路的短路电流的代数和；分母是各支路电阻的倒数之和（电流源支路的电阻除外）。

【例 2.4.3】试用结点电压法求I。

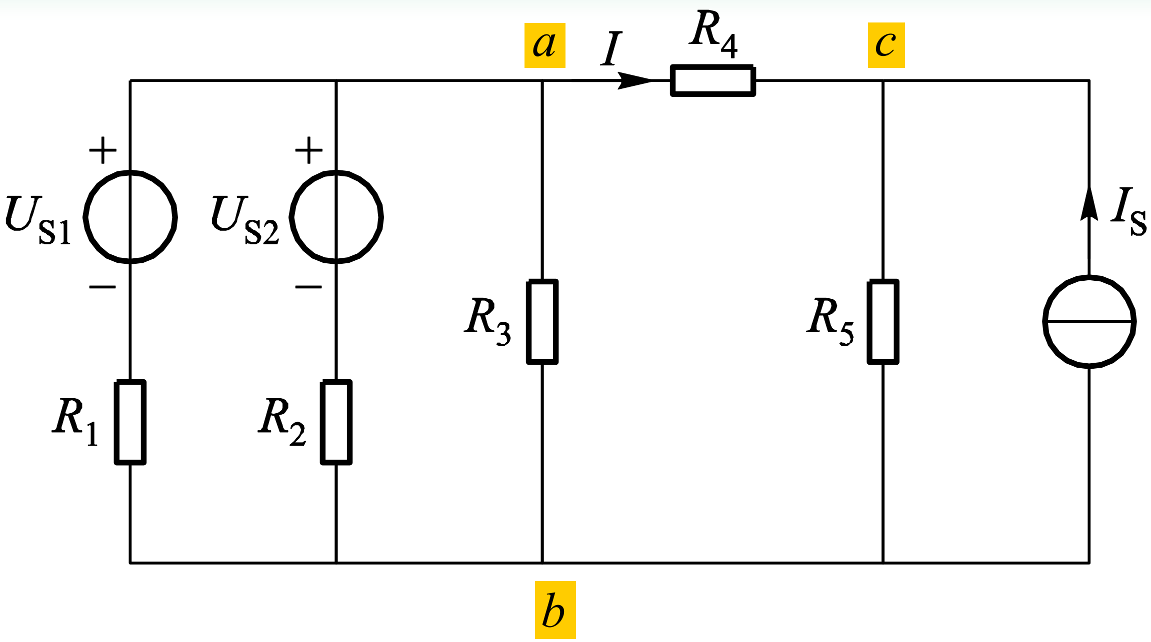


U_{S1}=4V，U_{S2}=3V、I_S=1A、

R_1=2Ω、R_2=3Ω、R_3=1.2Ω、

R_4=2.4Ω、R_5=2Ω

【解】图示电路中有3个结点，先用电压源与电流源的等效变换将3个结点的电路变成2个结点的电路，再用两个结点电压公式计算I。



(a) 原图

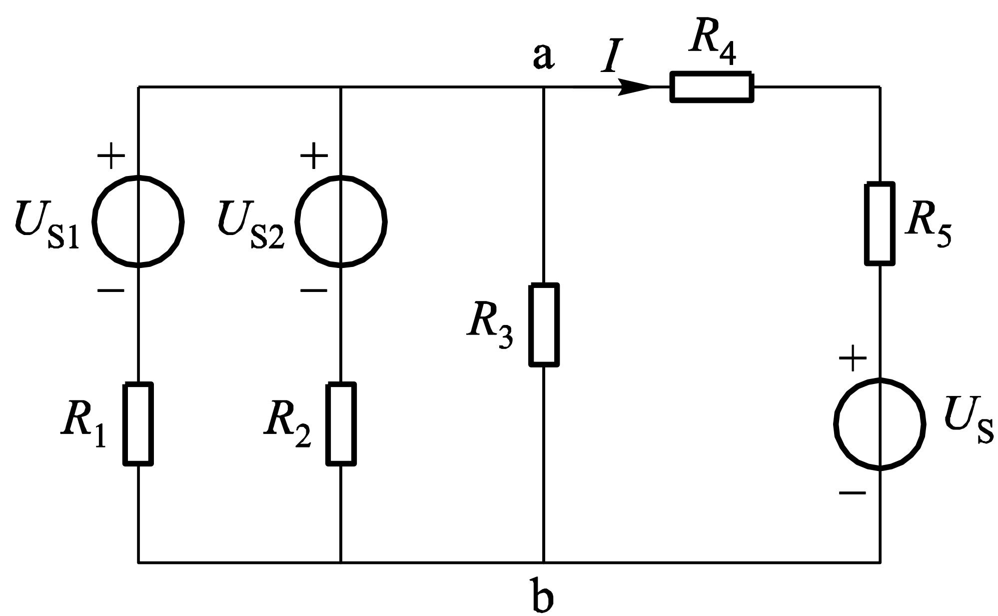
U_{S1}=4V，U_{S2}=3V、I_S=1A、

R_1=2Ω、R_2=3Ω、R_3=1.2Ω、

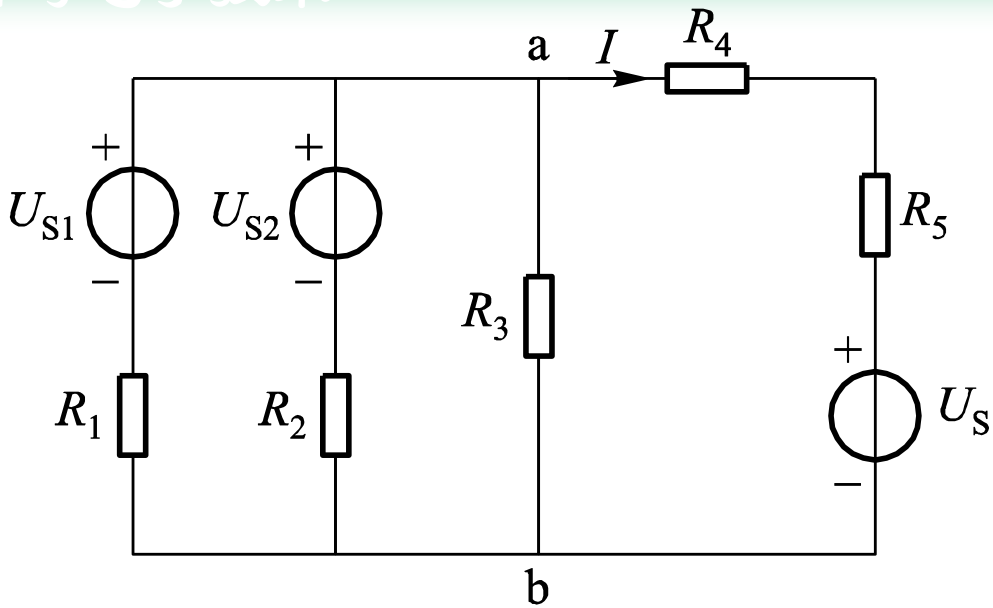
R_4=2.4Ω、R_5=2Ω

【解】（1）利用电源的等效变换可得电路(b)，其中，

$$U_S = I_S R_5 = 1 \times 2 = 2\text{V}$$



(b) 两个结点电路



(b) 两个结点电路

U_{S1}=4V，U_{S2}=3V、I_S=1A、

R_1=2Ω、R_2=3Ω、R_3=1.2Ω、

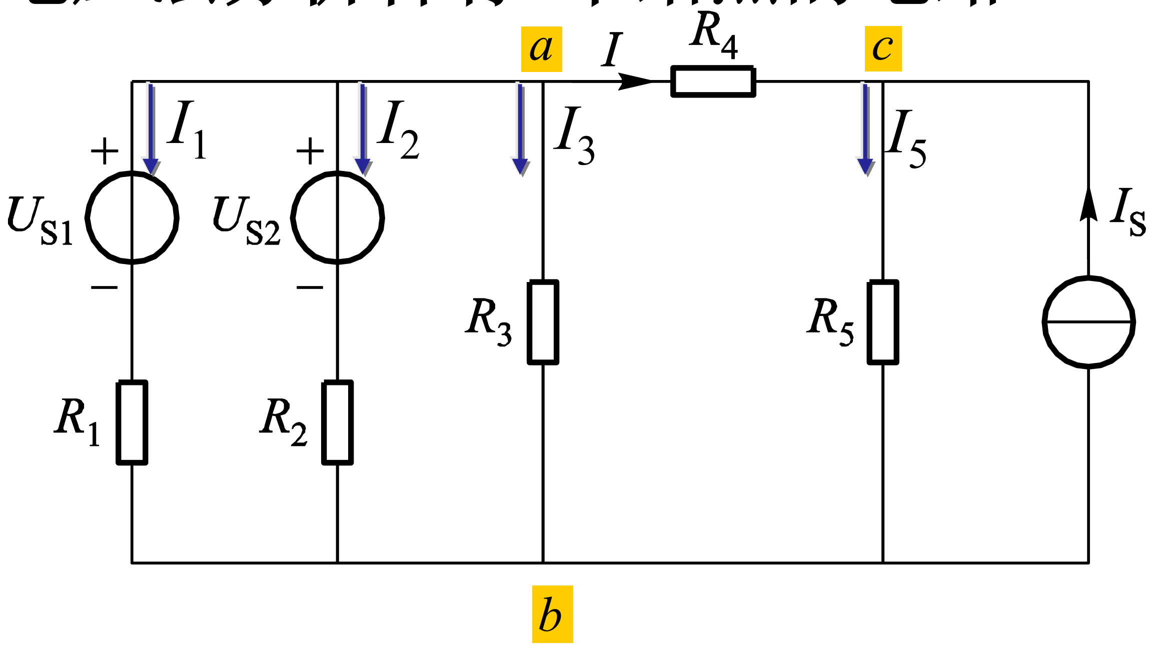
R_4=2.4Ω、R_5=2Ω

（2）以b点作为参考点，运用结点电压公式得

$$V_a=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}+\dfrac{U_S}{R_4+R_5}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4+R_5}}=\frac{\dfrac{4}{2}+\dfrac{3}{3}+\dfrac{2}{2+2.4}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2+2.4}}=1.824\text{V}$$

（3）由欧姆定律得 $I=\dfrac{V_a-U_S}{R_4+R_5}=\dfrac{1.824-2}{2+2.4}=-0.04\text{A}$

思考：不通过实际电源两种模型的等效变换，能否按照本节推导两个结点的结点电压法的步骤，直接利用结点电压法分析含有3个结点的电路？

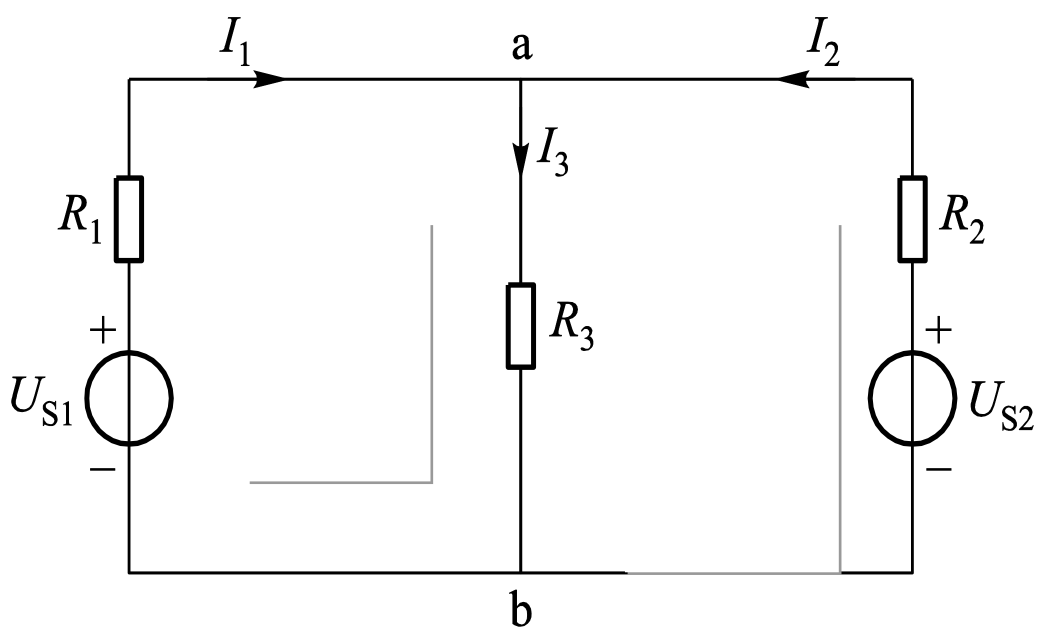


$$\begin{cases}\dfrac{U_a-U_{s1}}{R_1}+\dfrac{U_a-U_{s2}}{R_2}+\dfrac{U_a}{R_3}+\dfrac{U_a-U_c}{R_4}=0\\[2ex]\dfrac{U_a-U_c}{R_4}+I_s=\dfrac{U_c}{R_5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)U_a+\left(-\dfrac{1}{R_4}\right)U_c=\dfrac{U_{s1}}{R_1}+\dfrac{U_{s2}}{R_2}\\[2ex]-\dfrac{1}{R_4}U_a+\left(\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)U_c=I_s\end{cases}$$

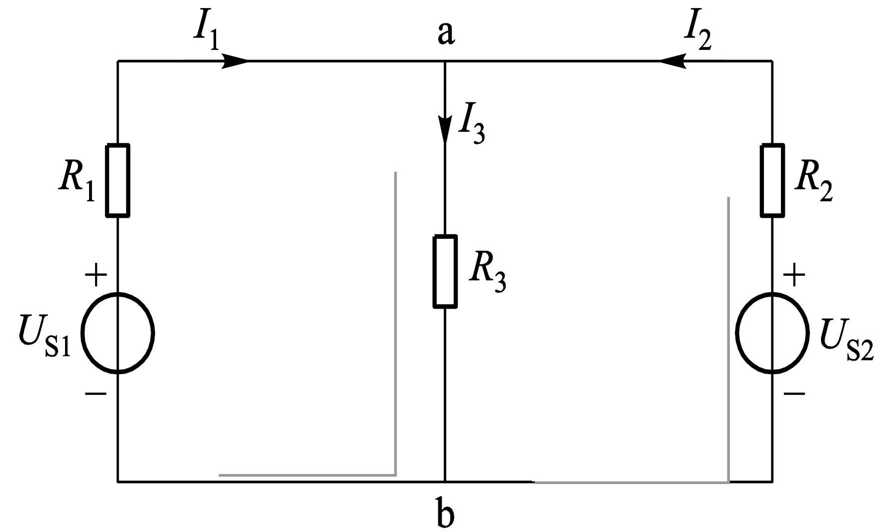
2.5 叠加原理

对于多个电源同时作用的线性电路，电路中的任何一条支路的电流或任意两点之间的电压，等于单个电源单独作用的结果的代数和。

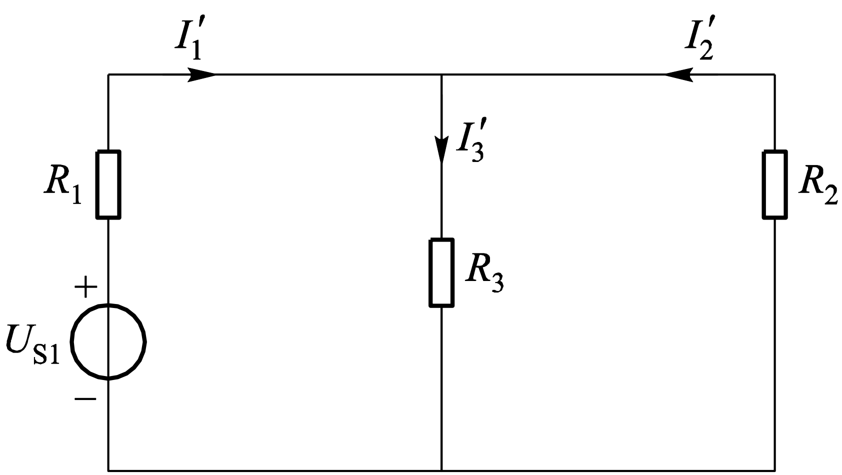


原电路

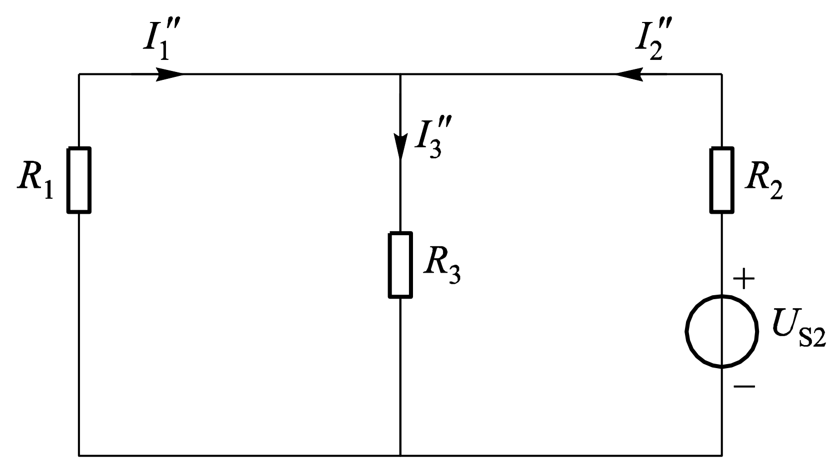
（1）画出单个电源单独作用时的分电路，在分电路中标出各电源单独作用时支路电流参考方向。



原电路

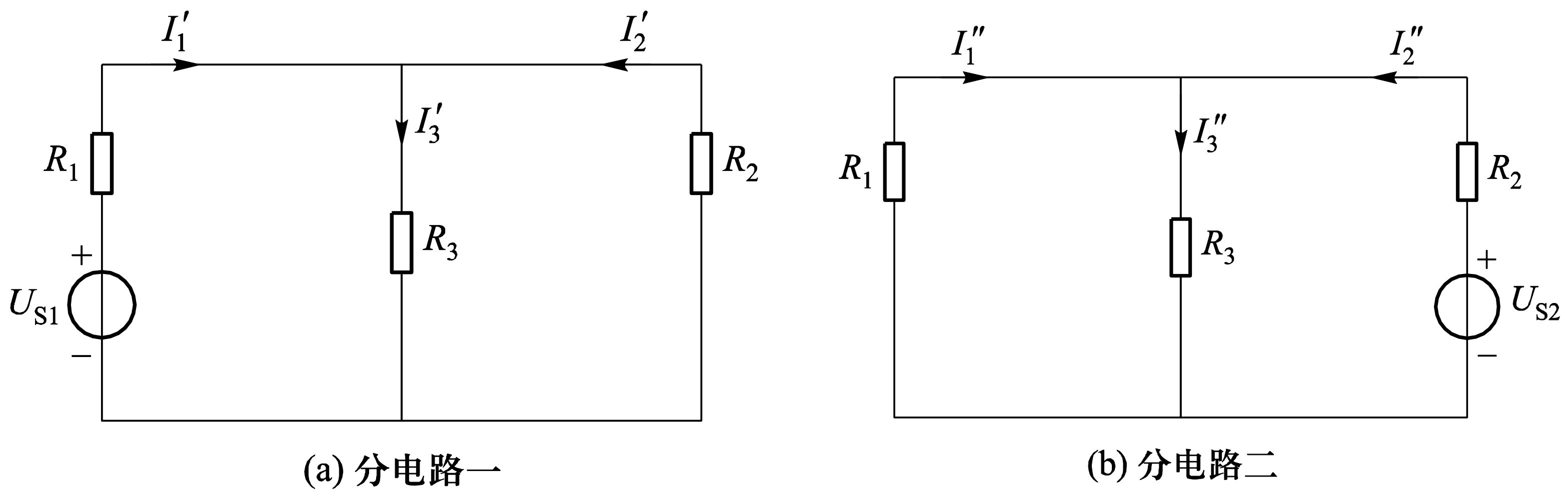


(a) 分电路一



(b) 分电路二

（2）求解各分电路中的电流分量。



$$I_1' = \frac{U_{S1}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$I_2'' = \frac{U_{S2}}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

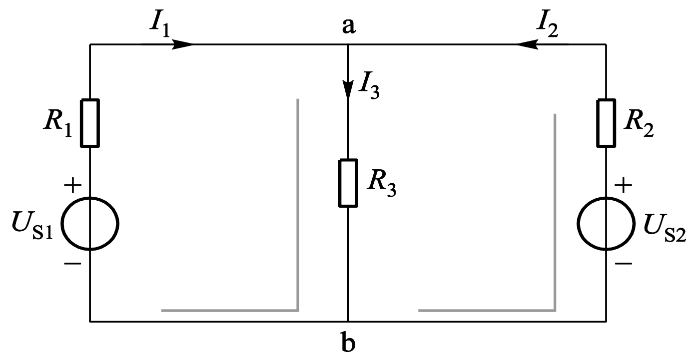
$$I_3' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1'$$

$$I_3'' = \frac{R_1}{R_1 + R_3} I_2''$$

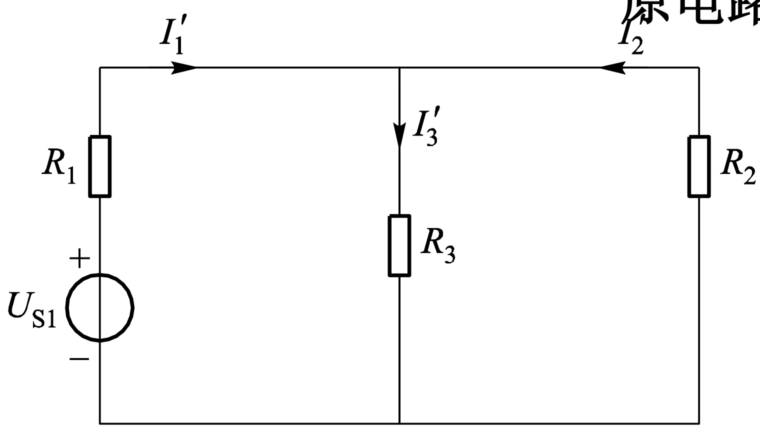
$$I_2' = I_3' - I_1'$$

$$I_1'' = I_3'' - I_2''$$

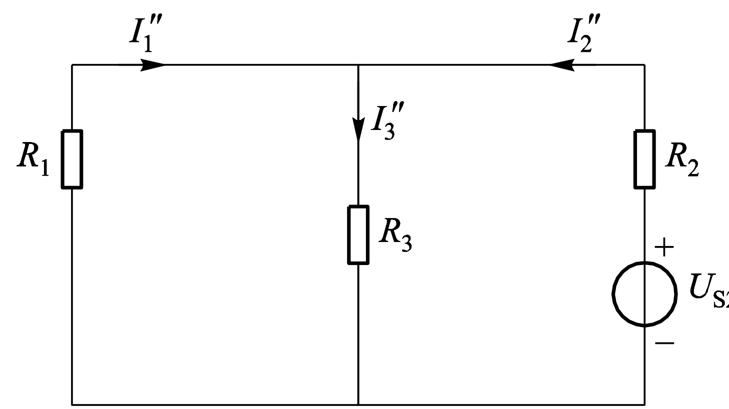
（3）将各分电路中的电流分量进行叠加。



原电路



(a) 分电路一



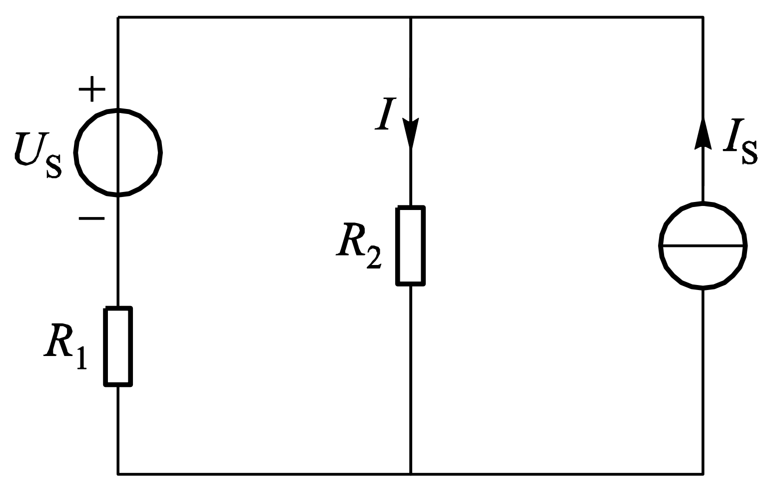
(b) 分电路二

$$I_1 = I_1' + I_1'' \qquad I_2 = I_2' + I_2'' \qquad I_3 = I_3' + I_3''$$

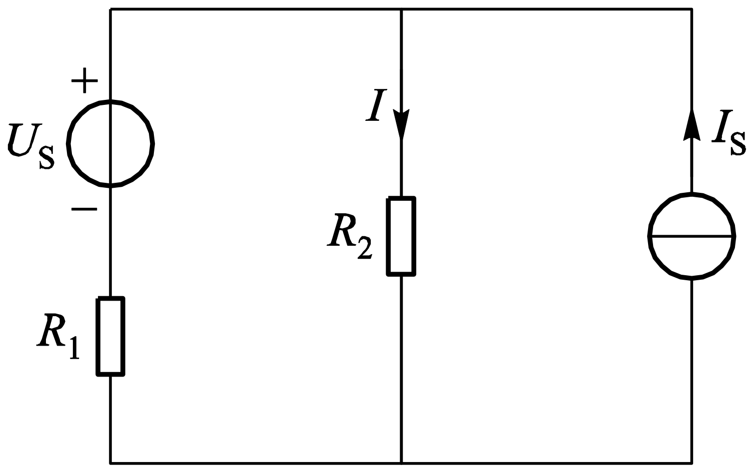
注意事项：

- 叠加原理只适用于线性电路。
- 某个电源单独作用时，其他电源置零，即理想电压源短路处理，理想电流源开路处理。电路中的其他结构和参数不变。
- 叠加原理不适用于计算功率。
- 当电路中有三个或三个以上电源同时作用时，可把电源分成两组，再用叠加原理求解。

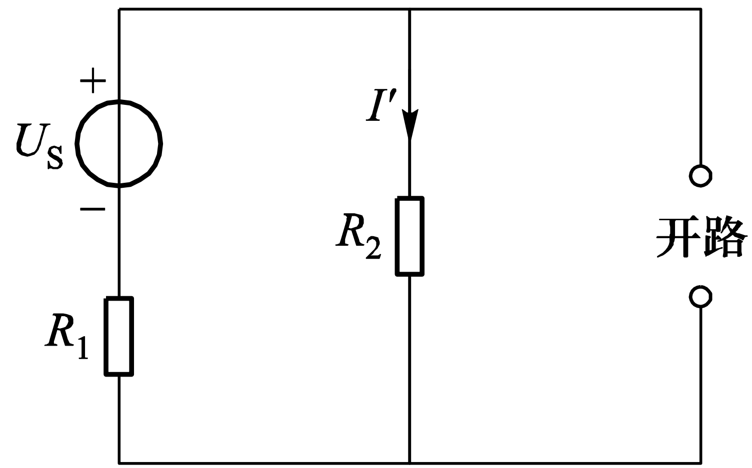
【例 2.5.1】电路如图所示，已知U_S=12V，I_S=3A，R_1=2Ω，R_2=10Ω。求电阻R_2的电流I和电源发出或吸收的功率。



U_S=12V，I_S=3A，R_1=2Ω，R_2=10Ω



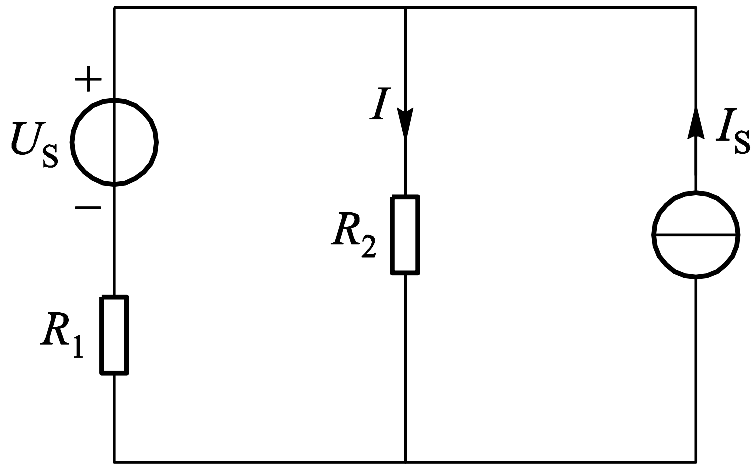
(a) 原电路



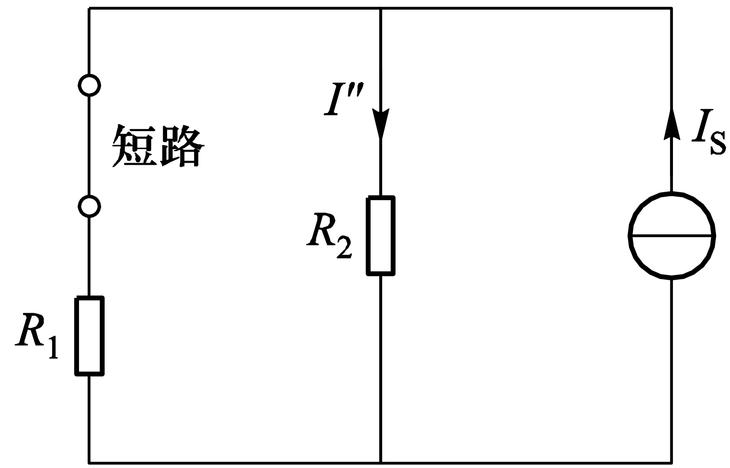
(b) U_S单独作用

【解】（1）电压源U_S单独作用时的分电路如图 (b) 所示。

$$I' = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{12}{2+10} = 1\text{A}$$



(a) 原电路



(c) I_S单独作用

（2）电流源I_S单独作用时的分电路如图 (c)所示。

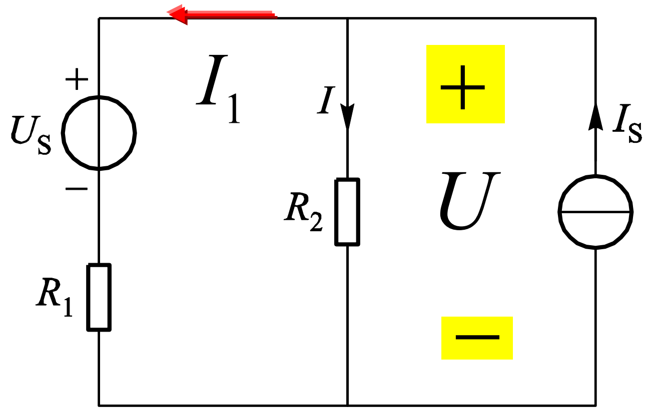
$$I''=\frac{R_1}{R_1+R_2}I_S=\frac{2}{2+10}\times 3=0.5\text{A}$$

（3）两个电源同时作用时：

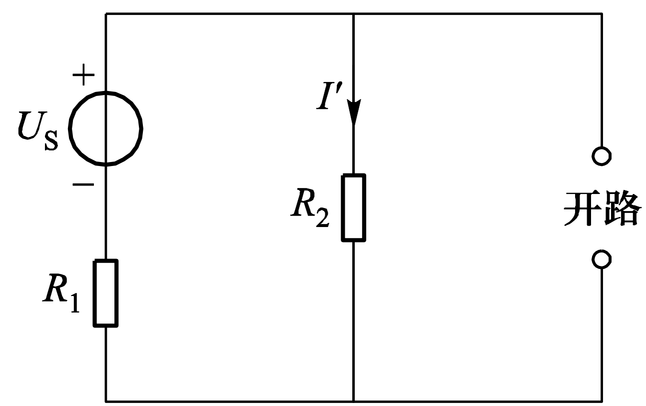
$$I=I'+I''=1+0.5=1.5\text{A}$$

$I' = 1\text{A}$

$I'' = 0.5\text{A}$



(a) 原电路



(b) U_S单独作用

U_S=12V，

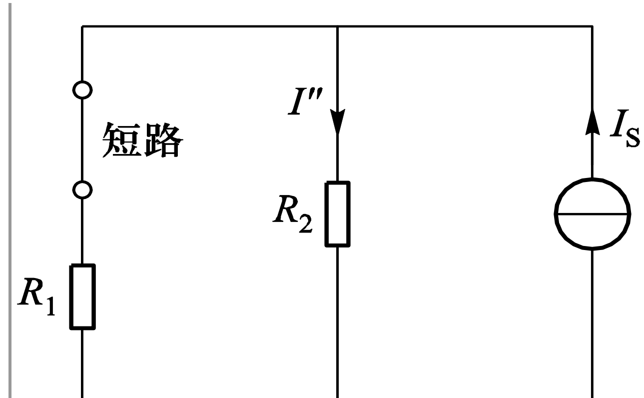
I_S=3A，R_1=2Ω，R_2=10Ω

（3）两个电源同时作用时：

$$I = I' + I'' = 1 + 0.5 = 1.5\text{A}$$

$$U = IR_2 = 1.5 \times 10 = 15\text{V}$$

$$I_1 = I_S - I = 3 - 1.5 = 1.5\text{A}$$

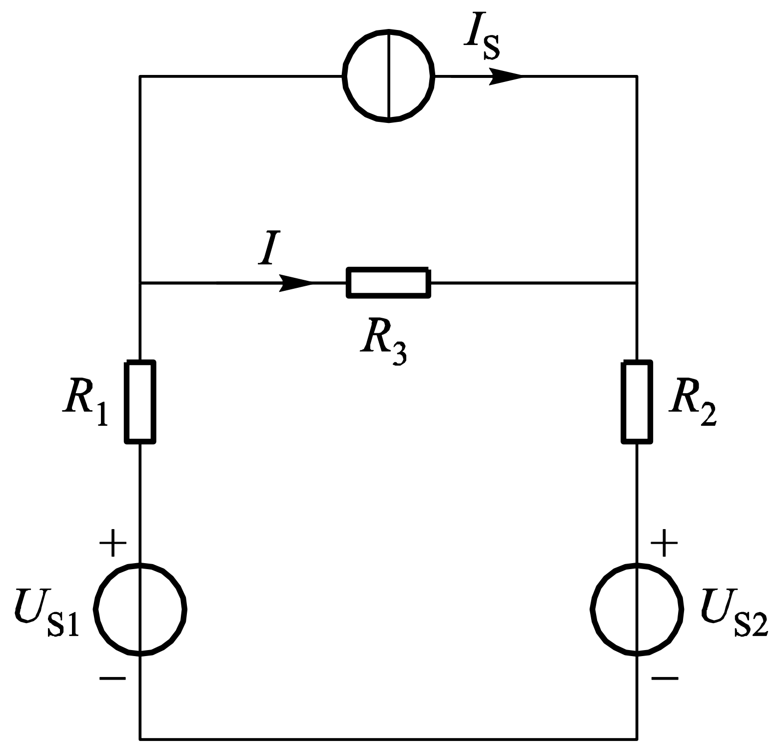


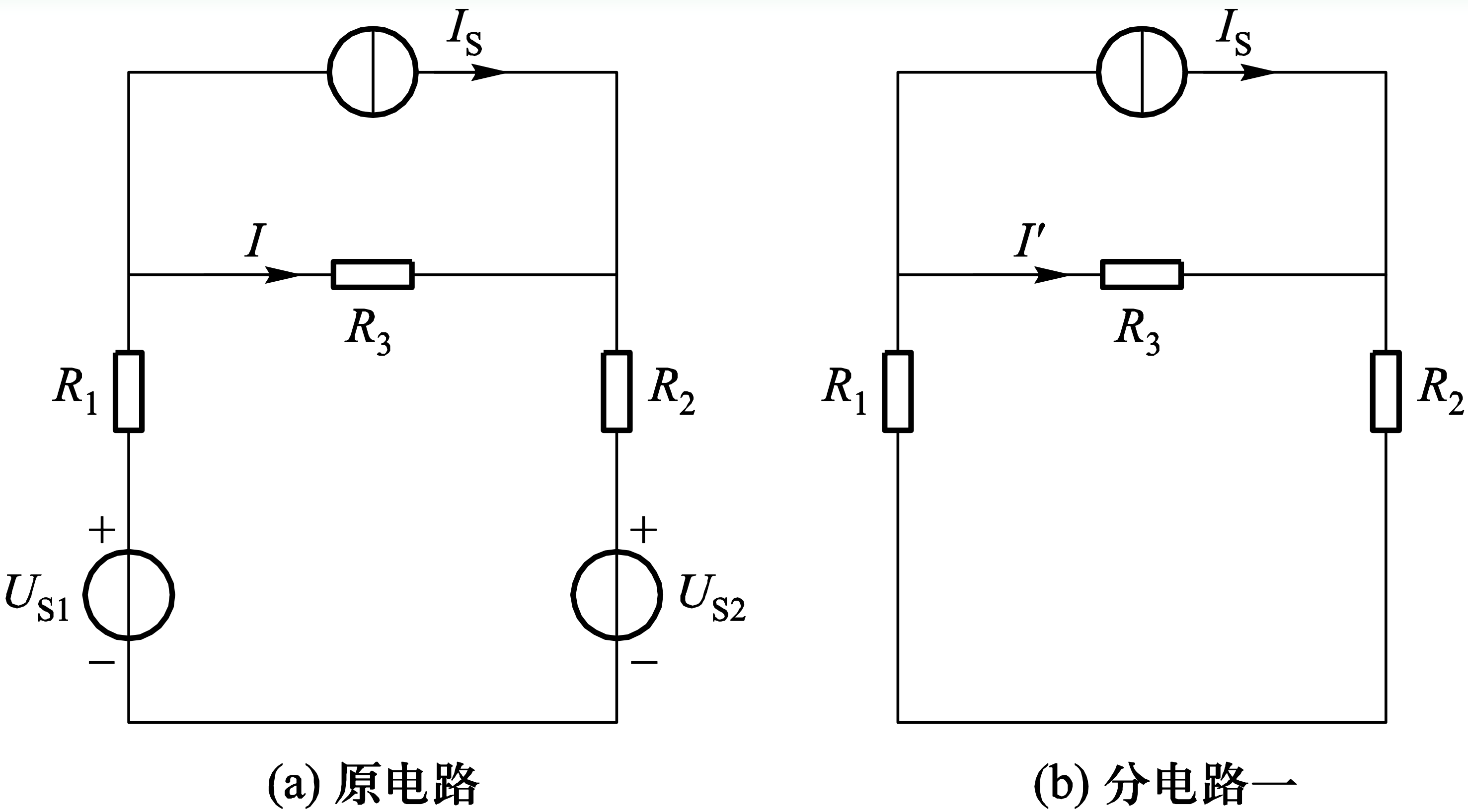
(c) I_S单独作用

$$P_{US} = I_1 U_S = 1.5 \times 12 = 18\text{W}$$

$$P_{IS} = -I_S U = \text{-}3 \times 15 = -45\text{W}$$

【例 2.5.2】电路如图所示，已知U_{S1}=4V，U_{S2}=12V，I_S=8A，R_1=10Ω，R_2=12Ω，R_3=10Ω。用叠加原理计算R_3支路的电流I。

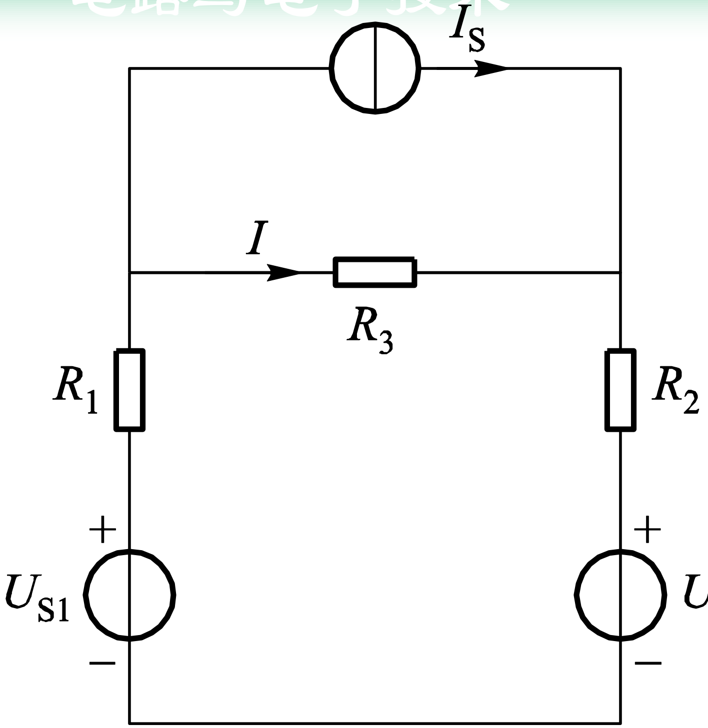




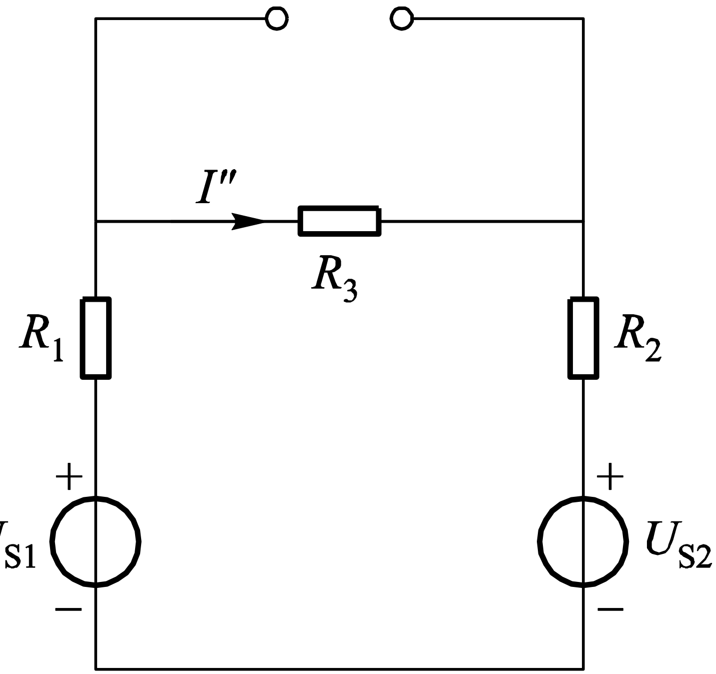
U_{S1}=4V，
U_{S2}=12V，
I_S=8A，
R_1=10Ω，
R_2=12Ω，
R_3=10Ω。

【解】将电流源I_S作为一组，电压源U_{S1}和U_{S2}作为一组，电流源I_S单独作用的分电路如图（b）所示。

$$I' = -\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3}I_S = -\frac{10+12}{10+12+10}\times 8 = -5.5\text{A}$$



(a) 原电路



(c) 分电路二

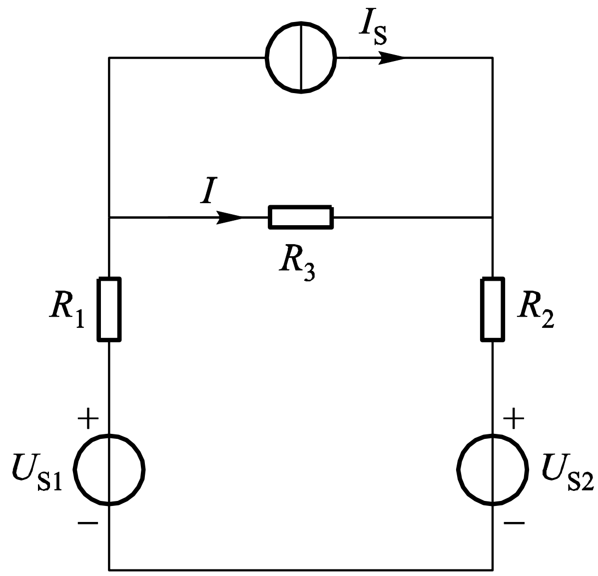
U_{S1}=4V，
U_{S2}=12V，
I_S=8A，
R_1=10Ω，
R_2=12Ω，
R_3=10Ω。

电压源U_{S1}和U_{S2}作用的分电路如图（c）所示。

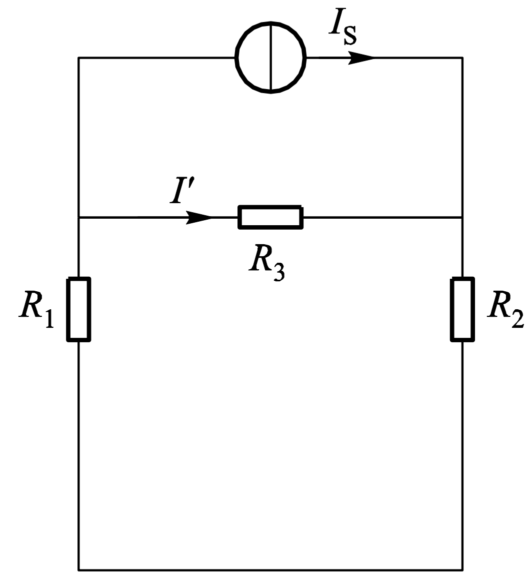
$$I'' = \frac{U_{S1} - U_{S2}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4 - 12}{10 + 12 + 10} = -0.25\text{A}$$

$$I' = -5.5\text{A}$$

$$I'' = -0.25\text{A}$$



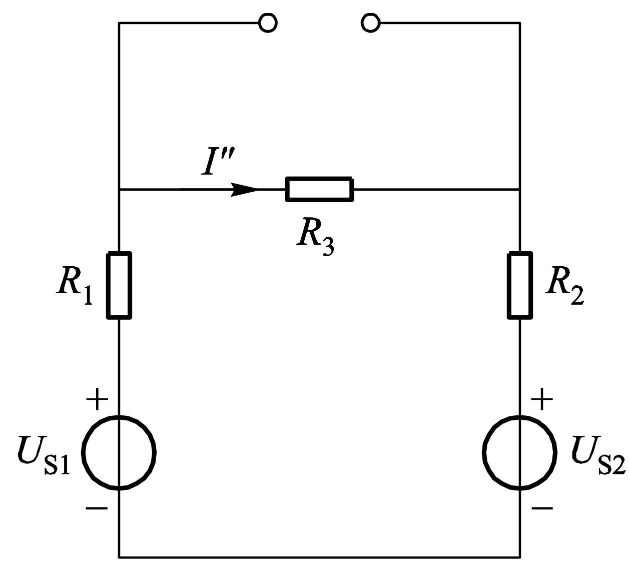
(a) 原电路



(b) 分电路一

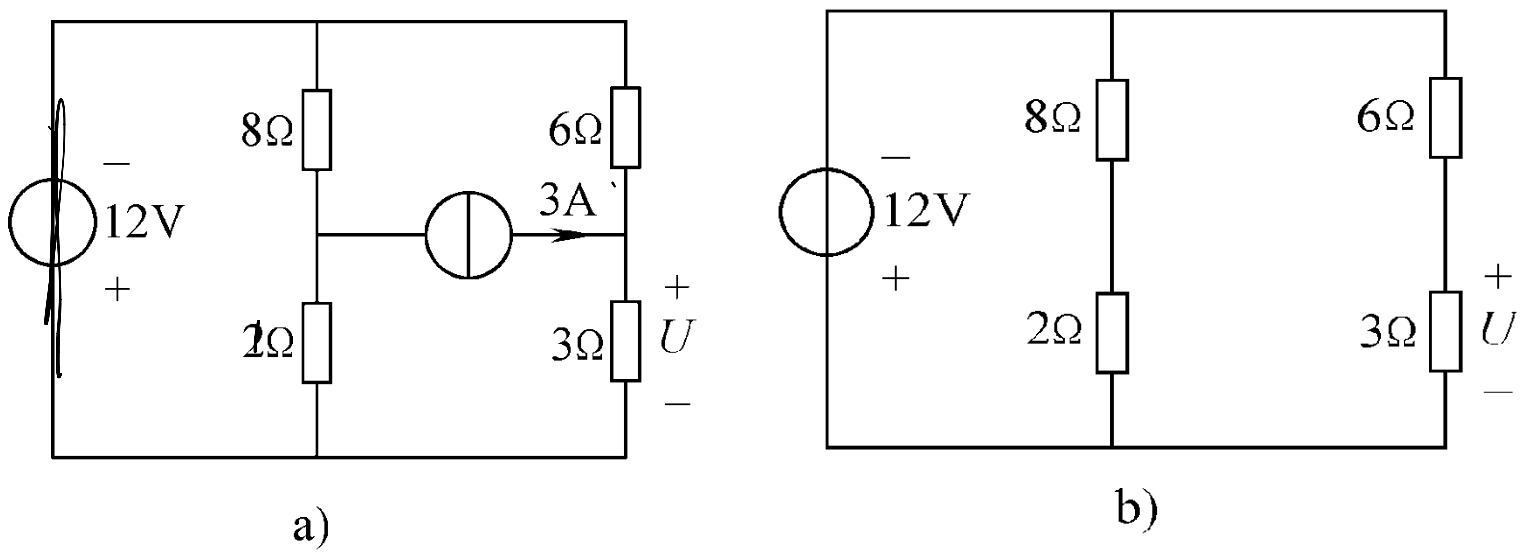
两个电源同时作用时

$$I = I' + I'' = -5.5 - 0.25 = -5.75\text{A}$$



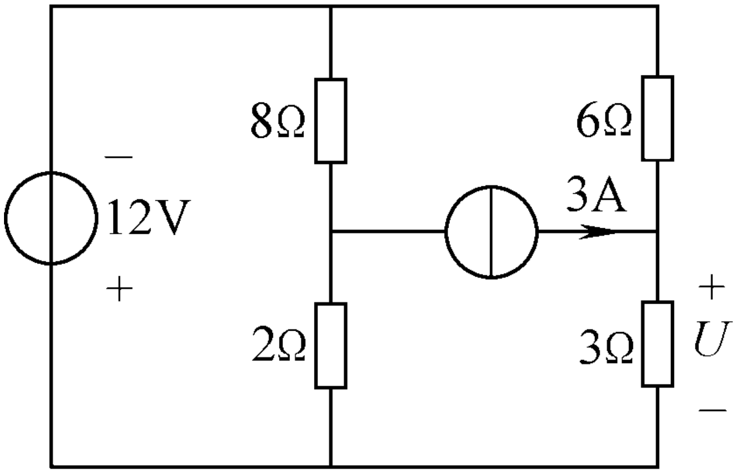
(c) 分电路二

【例2.5.3】 如图a所示的电路，试用叠加定理求电压U。

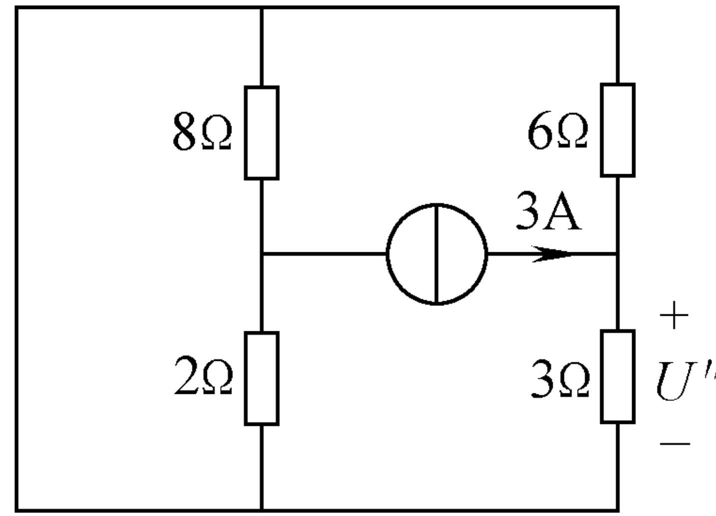


【解】 (1)计算12V电压源单独作用于电路时产生的电压 U' 如图b所示。

$$U' = -\frac{12}{6+3} \times 3\text{V} = -4\text{V}$$



a)



c)

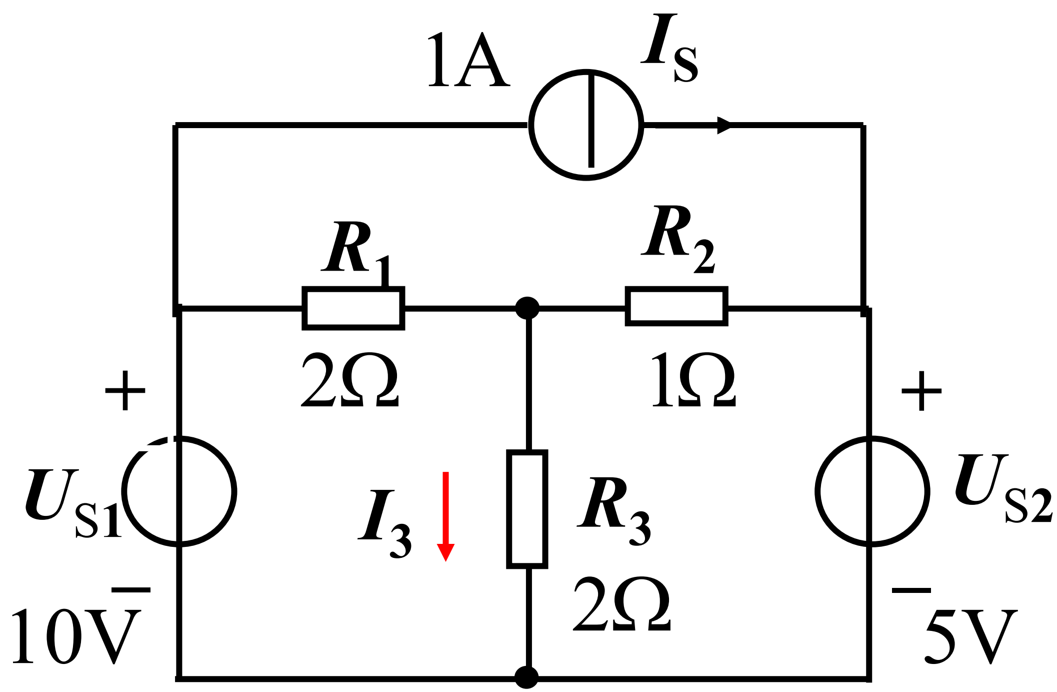
(2) 计算3A电流源单独作用于电路时产生的电压U''，如图c所示。

$$U'' = 3\times\frac{6\times 3}{6+3}\text{V} = 6\text{V}$$

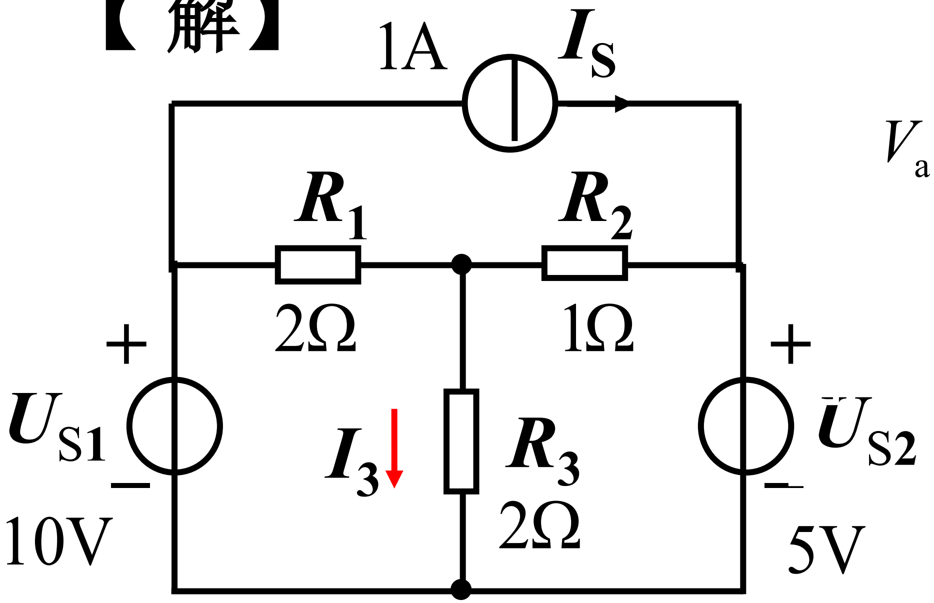
(3) 计算两个电源共同作用于电路时产生的电压U。

$$U = U' + U'' = (-4+6)\text{V} = 2\text{V}$$

【2.5.4】在图示电路中，试用叠加原理求电流 I_3 。



【解】

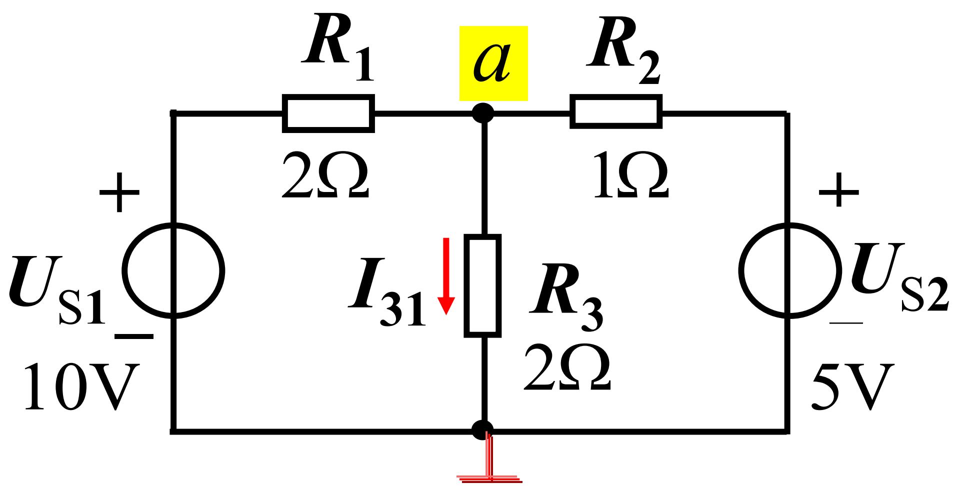


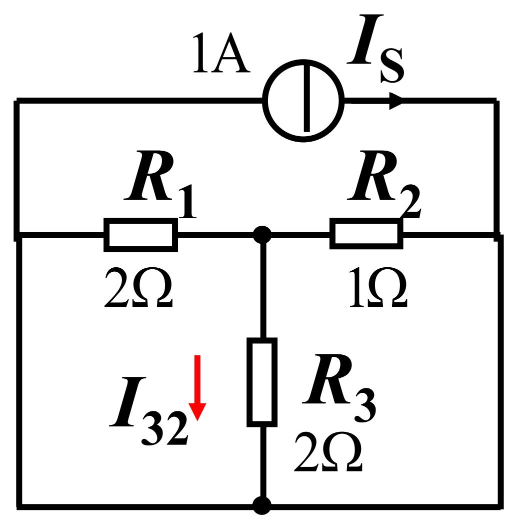
$$V_a=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S2}}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}=\frac{\dfrac{10}{2}+\dfrac{5}{1}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}}=\frac{10}{2}=5\text{V}$$

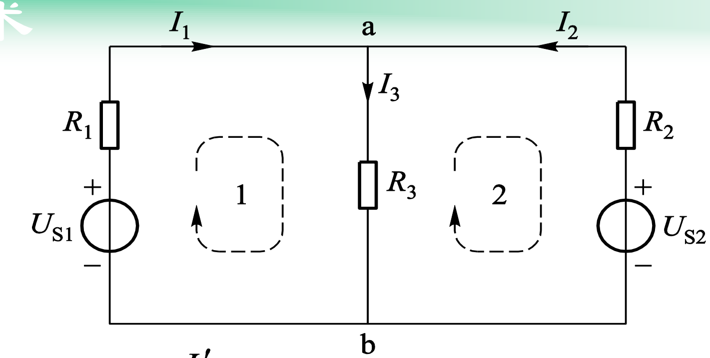
$$I_{31}=\frac{V_a}{R_3}=\frac{5}{2}=2.5\text{A}$$

$$I_{32}=0$$

$$\boxed{I=I_{31}=2.5\text{A}}$$

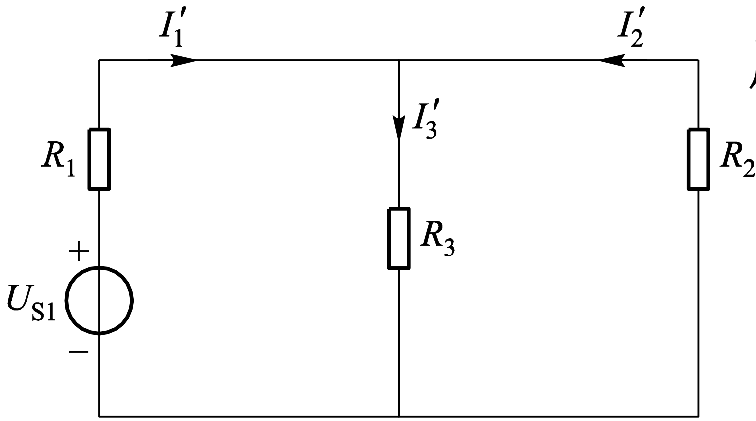




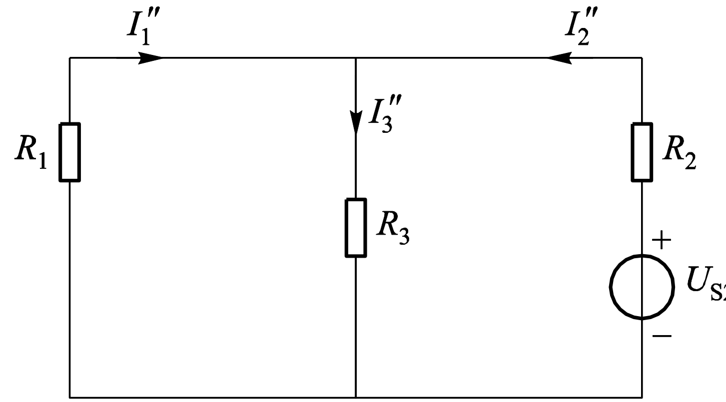


原电路

$$-I_2R_2+U_{s2}-U_{s1}+I_1R_1=0$$



(a) 分电路一



(b) 分电路二

$$-I_2'R_2-U_{s1}+I_1'R_1=0 \quad (1)$$

$$-I_2''R_2+U_{s2}+I_1''R_1=0 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \qquad -\left(I_2'+I_2''\right)R_2+U_{s2}-U_{s1}+\left(I_1'+I_1''\right)R_1=0$$

$$\begin{cases} I_2=I_2'+I_2'' \\ I_1=I_1'+I_1'' \end{cases}$$

从数学上看，叠加定理的本质是线性方程的可加性。

齐性定理

在只有一个激励*X*作用的线性电路中，设任一响应为*Y*，记作*Y*=*f*(*X*)，若将该激励乘以常数*K*，则对应的响应*Y'*也等于原来响应乘以同一常数，即

$$Y' = f(kX) = kY$$

从数学上看，齐性定理的本质是线性方程的齐次性。

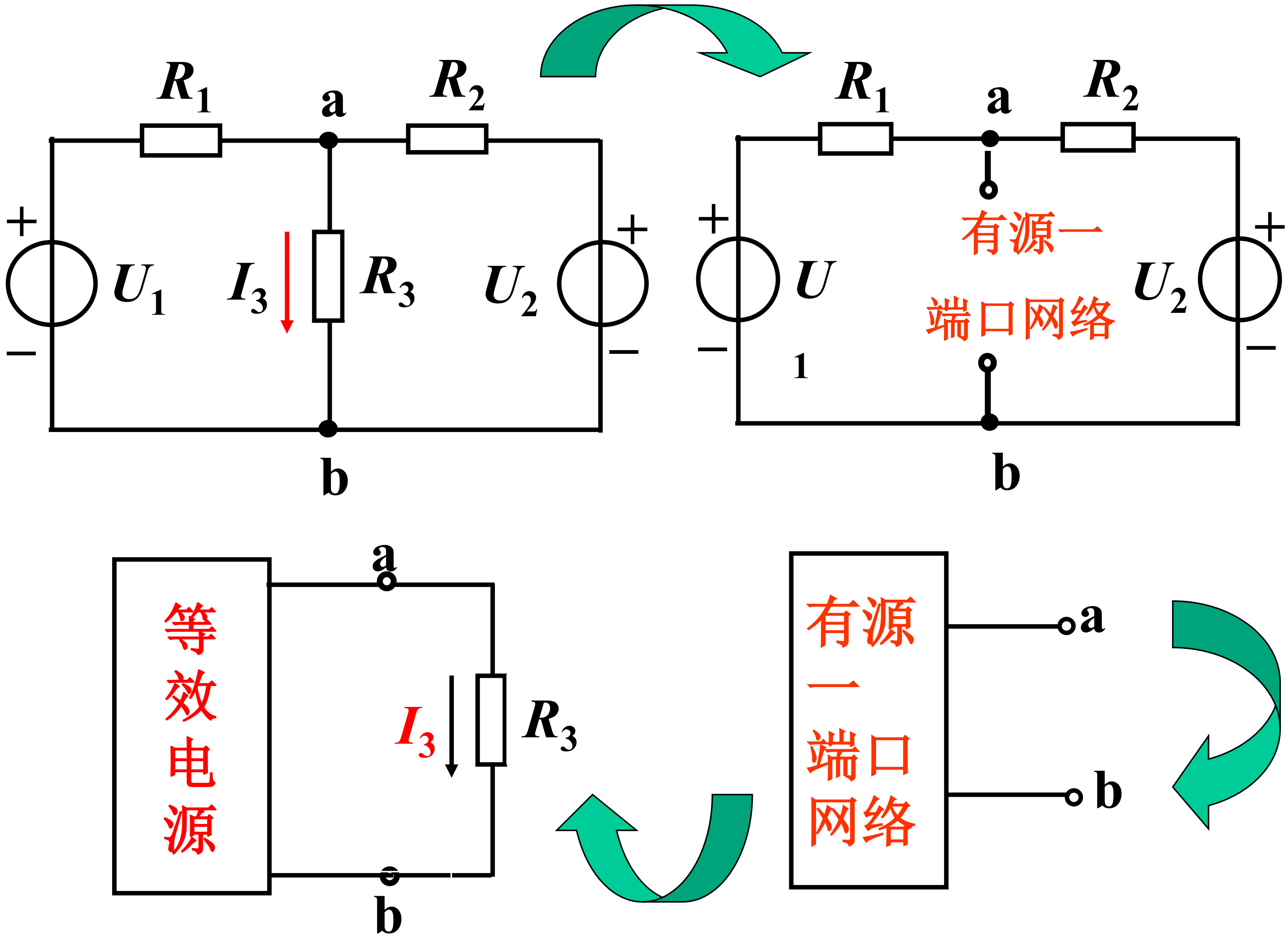
对于线性直流电路，其方程为线性方程，其解都具有齐次性和可加性。

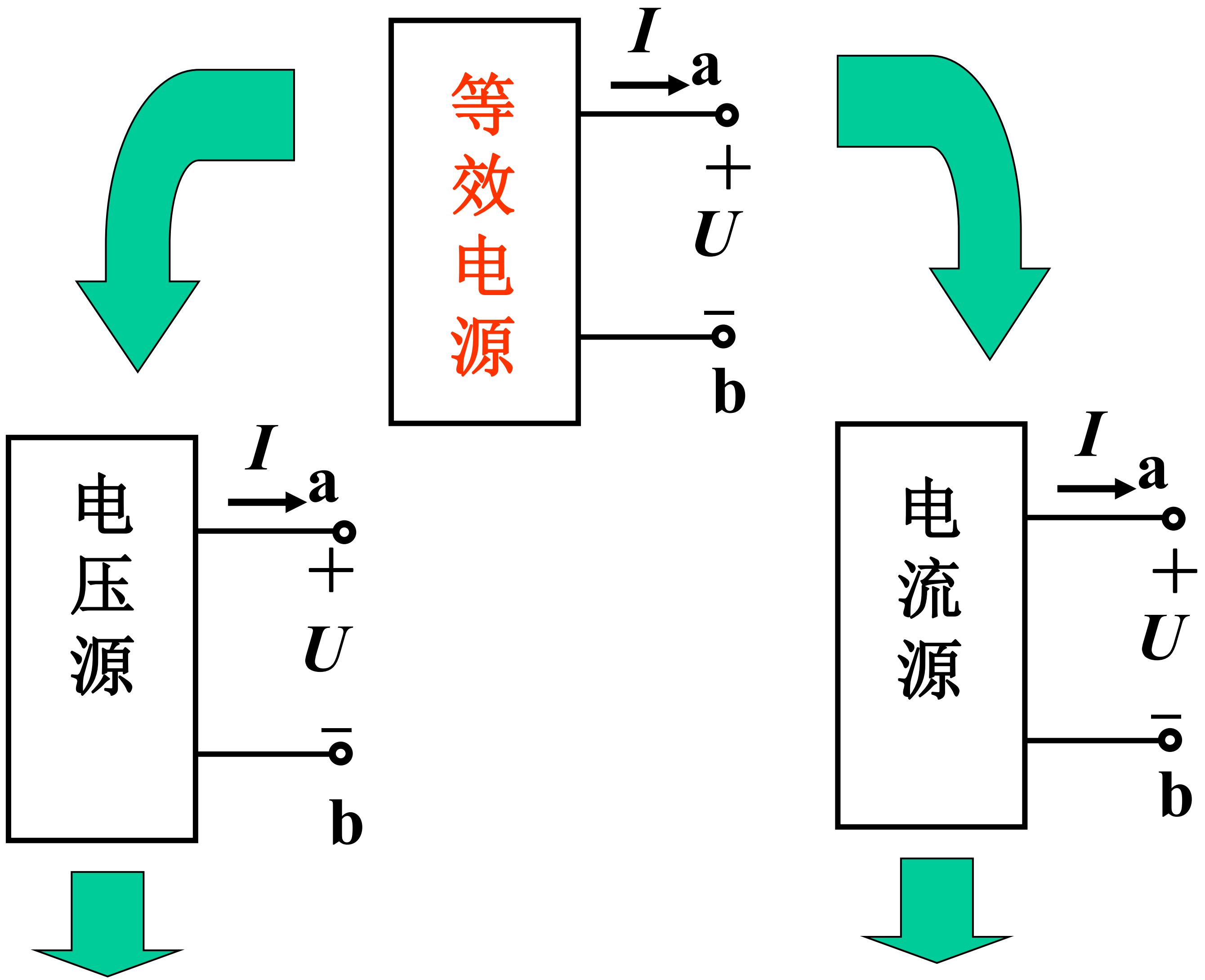
2.6 戴维宁定理

当只需要计算电路中的一个支路电流或电压时，常采用等效电源的方法。

等效电源： 如果只需要计算电路中的一个支路电流或电压时, 可将这个支路划出，把其余的部分看作是一个有源一端口网络。这个有源一端口网络对被求支路来说相当是一个电源；所以，这个有源一端口网络可以简化为一个等效电源。

上述内容可用如下各图表示。


R1
a
R2
+
U1
I3
R3
U2
+
−
−
b
R1
a
R2
+
U
有源一
端口网络
U2
+
−
1
−
b
a
等
效
电
源
I3
R3
b
有源
一
端口
网络
a
b

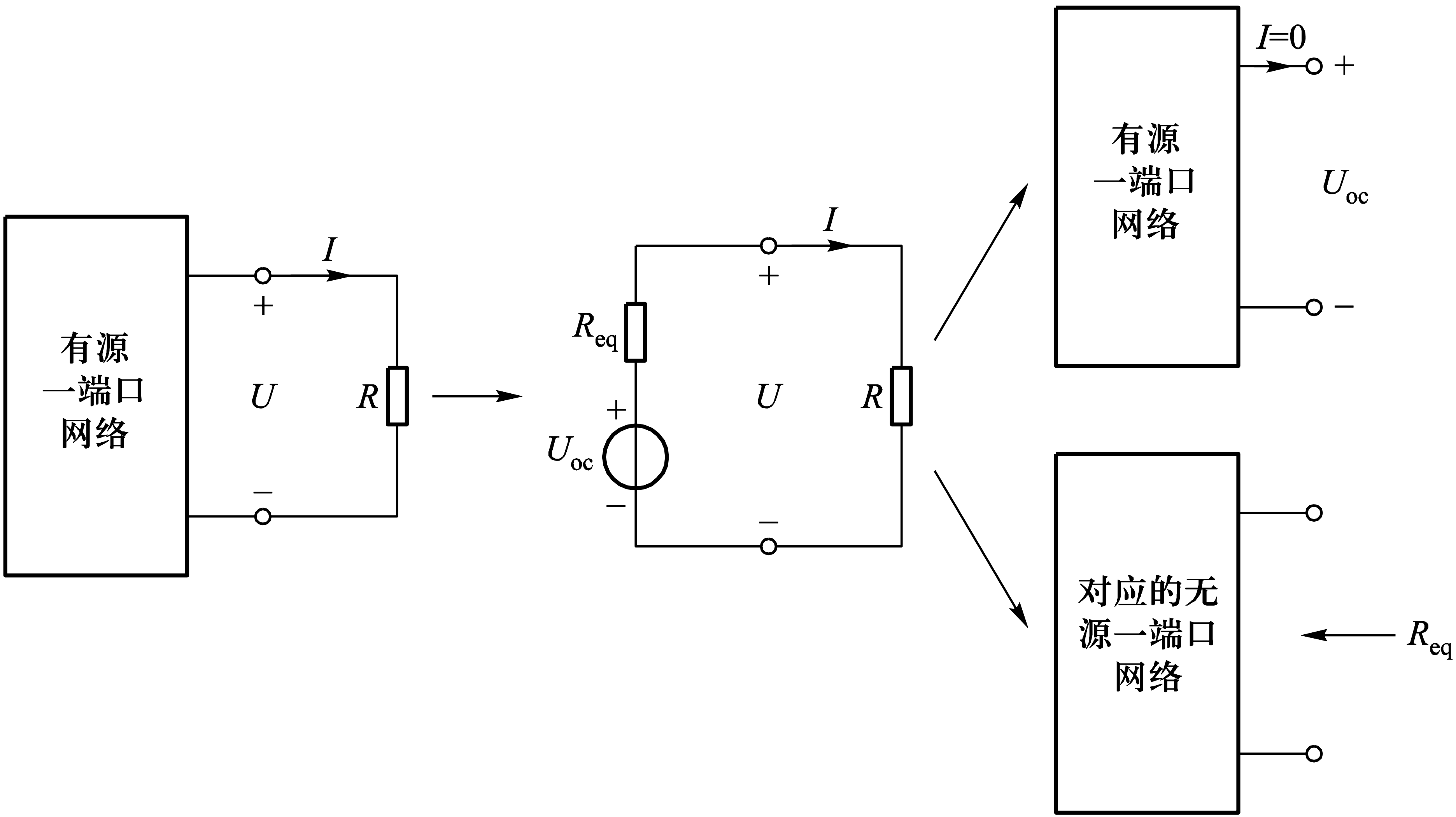


戴维宁定理
(Thevenin’s theorem)

诺顿定理
(Norton’s theorem)

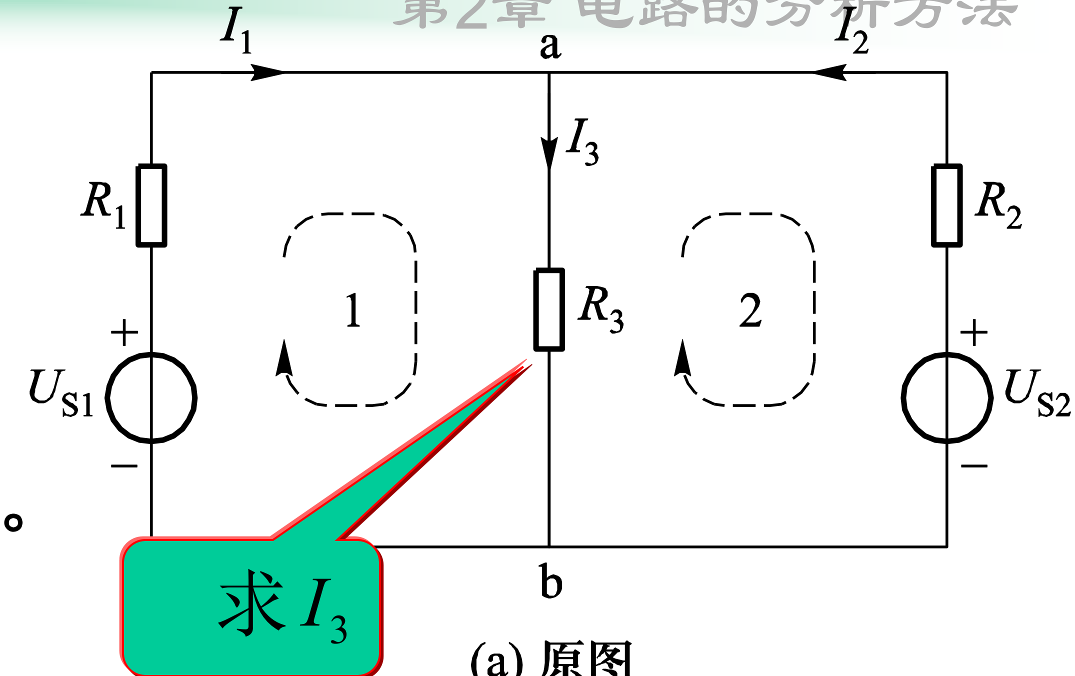
戴维宁定理

任何线性有源一端口网络，都可以用理想电压源和电阻串联的电路模型进行等效，其中理想电压源的电压U_S等于该有源一端口网络的开路电压U_{oc}，电阻等于从有源一端口网络看进去，所有独立电源置零的等效电阻R_{eq} 。

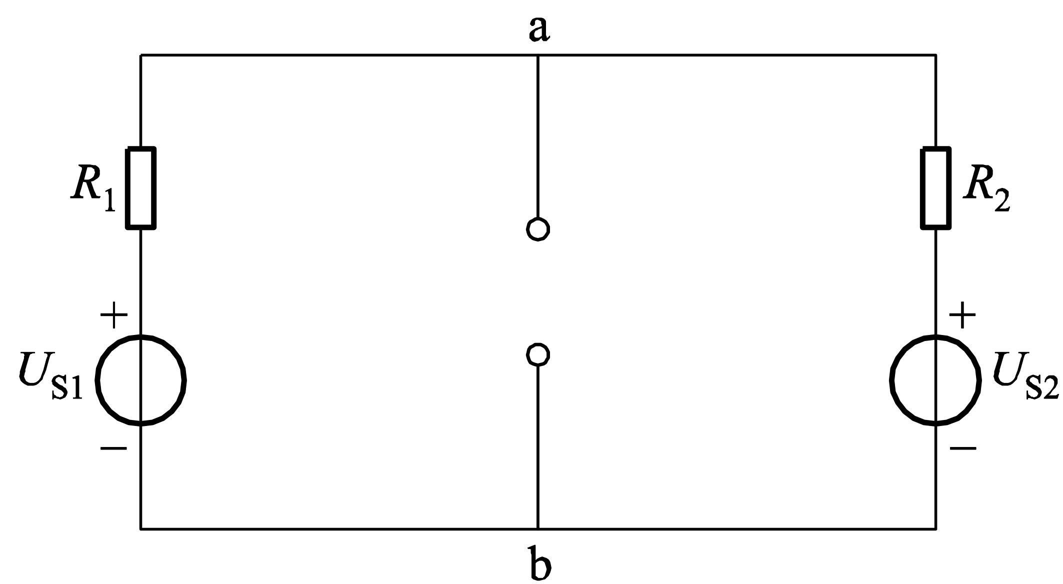

有源
一端口
网络
I
+
U
R
−
Req
+
Uoc
−
I
+
U
R
−
I=0
+
有源
一端口
网络
Uoc
−
对应的无
源一端口
网络
Req

应用戴维宁定理分析电路的步骤为：

（1）断开被求支路，获得有源一端口网络。



(a) 原图

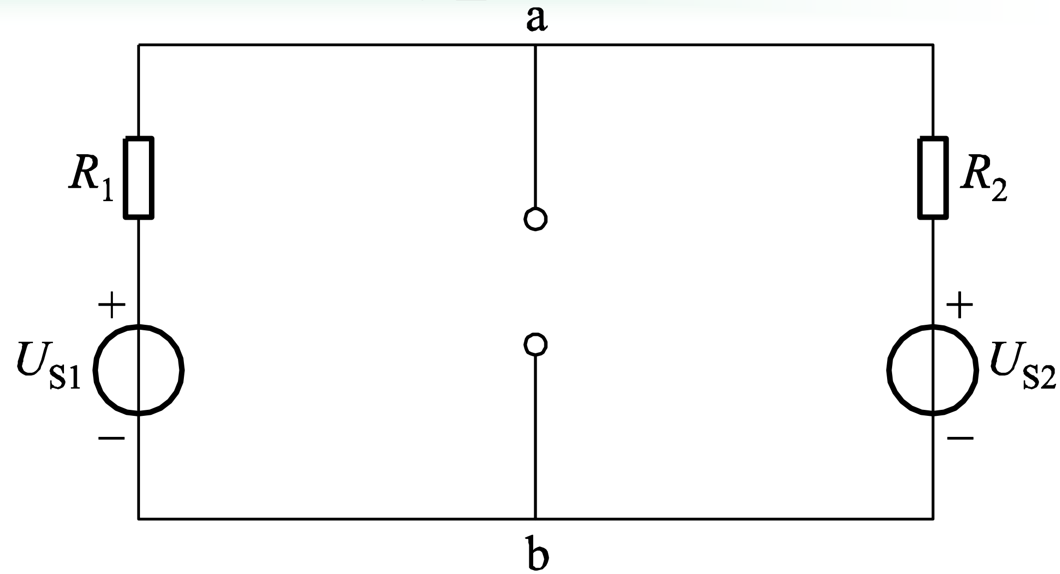


(b) 移除被求支路

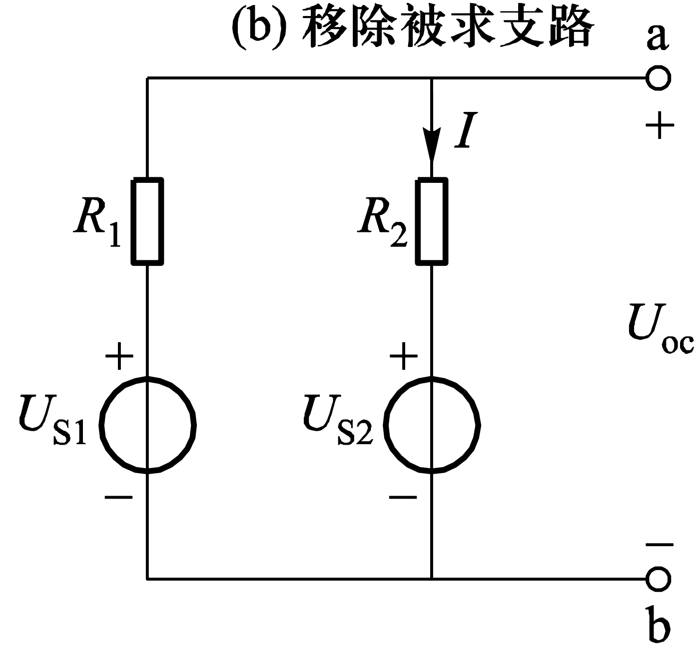
（2）求有源一端口网络的开路电压U_{oc}。

$$U_{oc} = U_{S2} + IR_2$$

$$= U_{S2} + \frac{U_{S1} - U_{S2}}{R_1 + R_2} R_2$$

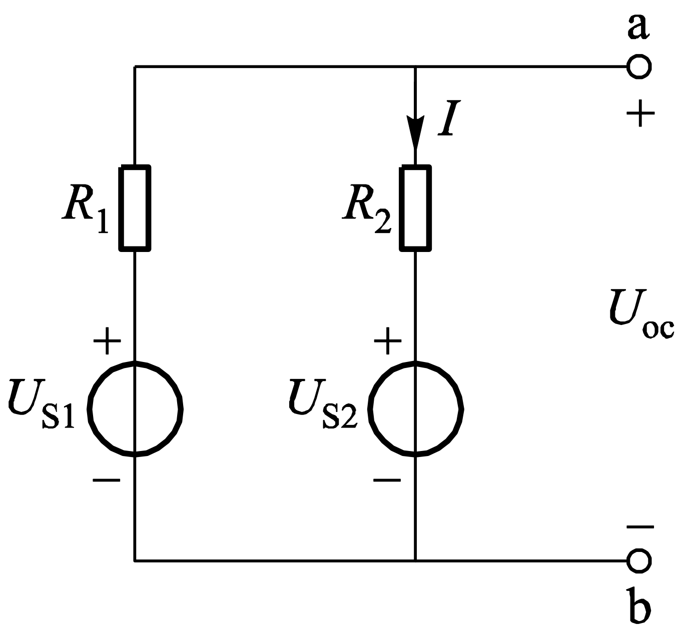


(b) 移除被求支路

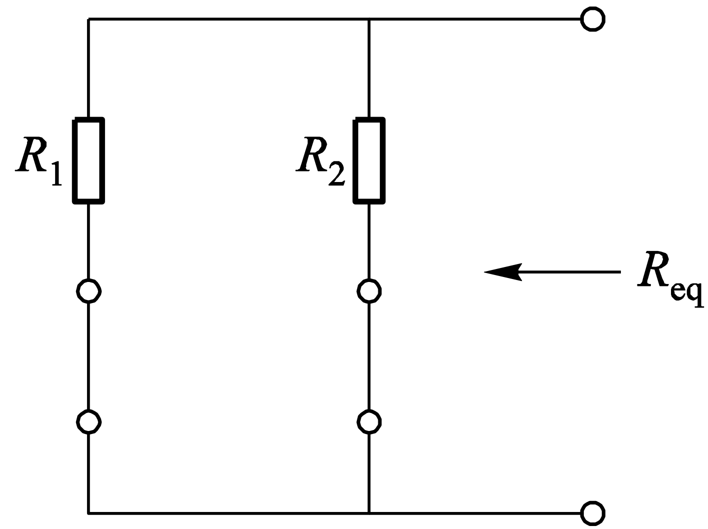


(c) 求开路电压

（3）将有源一端口网络中所有独立电源置零，得到对应的无源一端口网络的等效电阻R_{eq}。



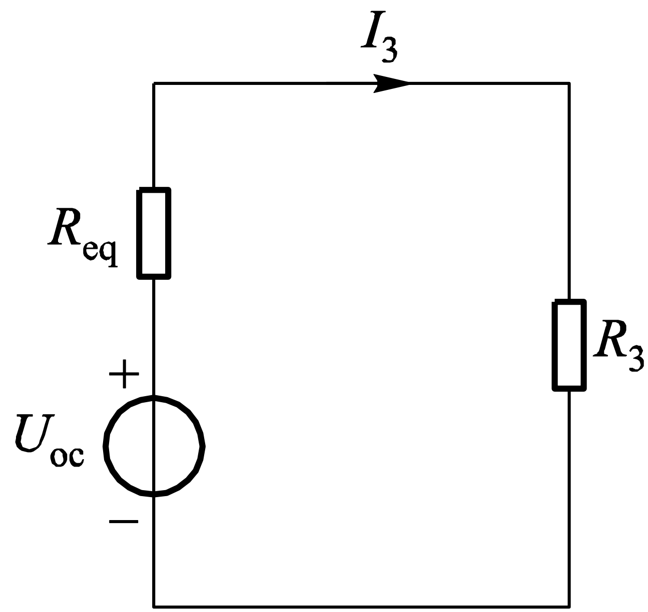
(c) 求开路电压



(d) 求等效电阻

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

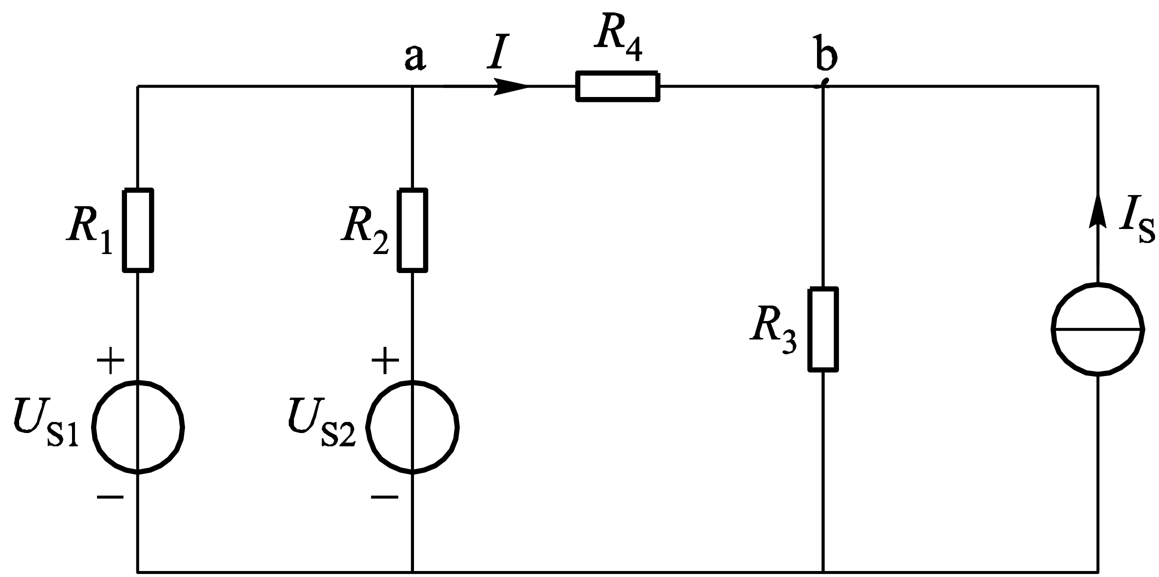
（4）画出戴维宁等效电路图，求I_3

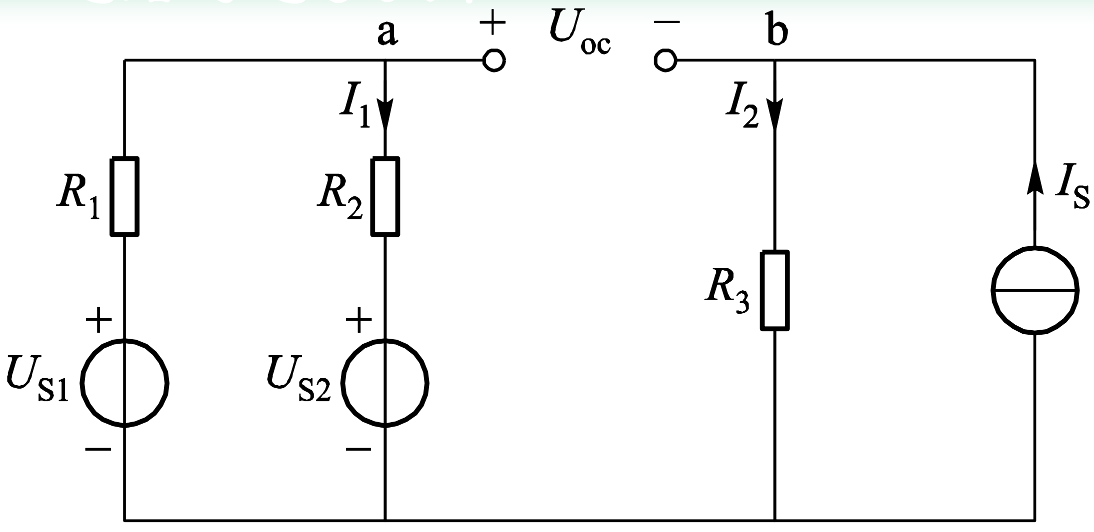


(e) 求未知电流

$$I_3 = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_3}$$

【例 2.6.1】电路如图所示，U_{S1}=12V，U_{S2}=7V，I_S=3A，R_1=2Ω，R_2=3Ω，R_3=1Ω，R_4=1.8Ω。求电流I。





(b) 移除被求支路

U_{S1}=12V， U_{S2}=7V，
I_S=3A， R_1=2Ω，
R_2=3Ω， R_3=1Ω，
R_4=1.8Ω。

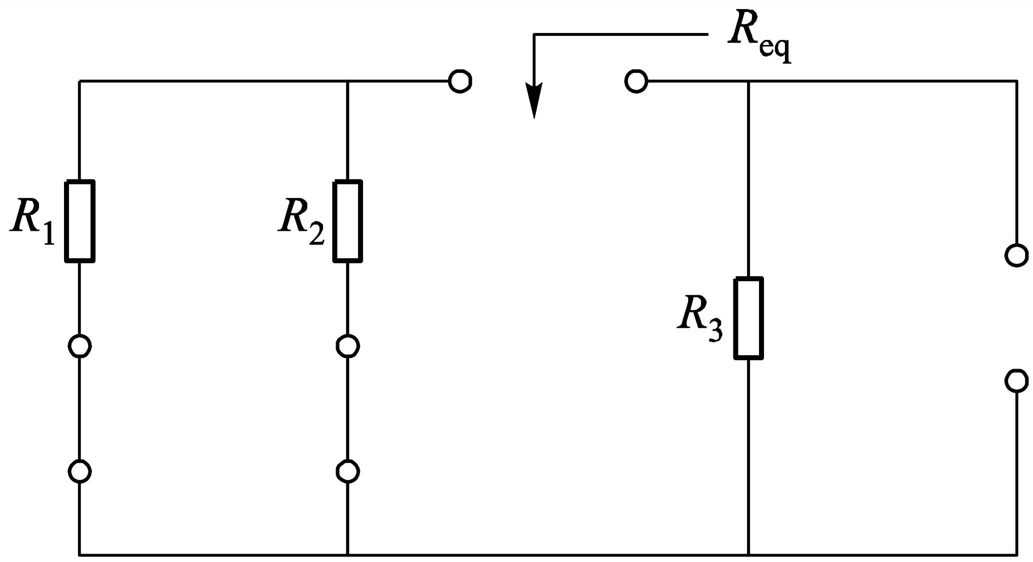
【解】（1）断开被求支路，获得有源一端口网络如图（b）所示。

（2）求有源一端口网络的开路电压U_{oc}。

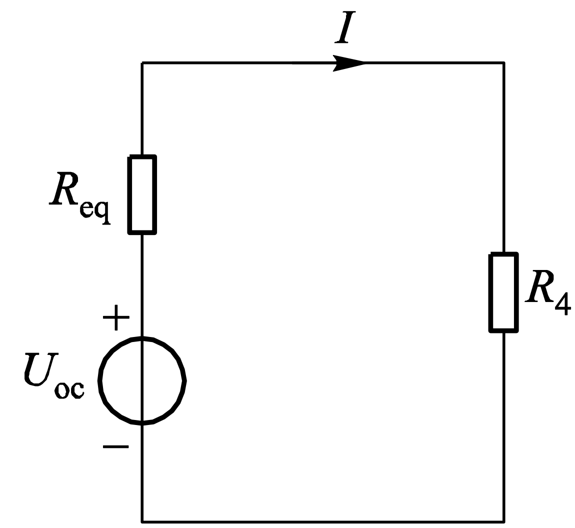
$$I_1=\frac{U_{S1}-U_{S2}}{R_1+R_2}=\frac{12-7}{2+3}=1\text{A}$$

$$U_{oc}=U_{S2}+I_1R_2-I_2R_3=U_{S2}+I_1R_2-I_SR_3=7+1\times3-3\times1=7\text{V}$$

$$\boxed{U_{oc}=V_a-V_b=I_1R_2+U_{S2}-I_SR_3=10-3=7\text{V}}$$



(c) 求等效电阻



(d) 求未知电流

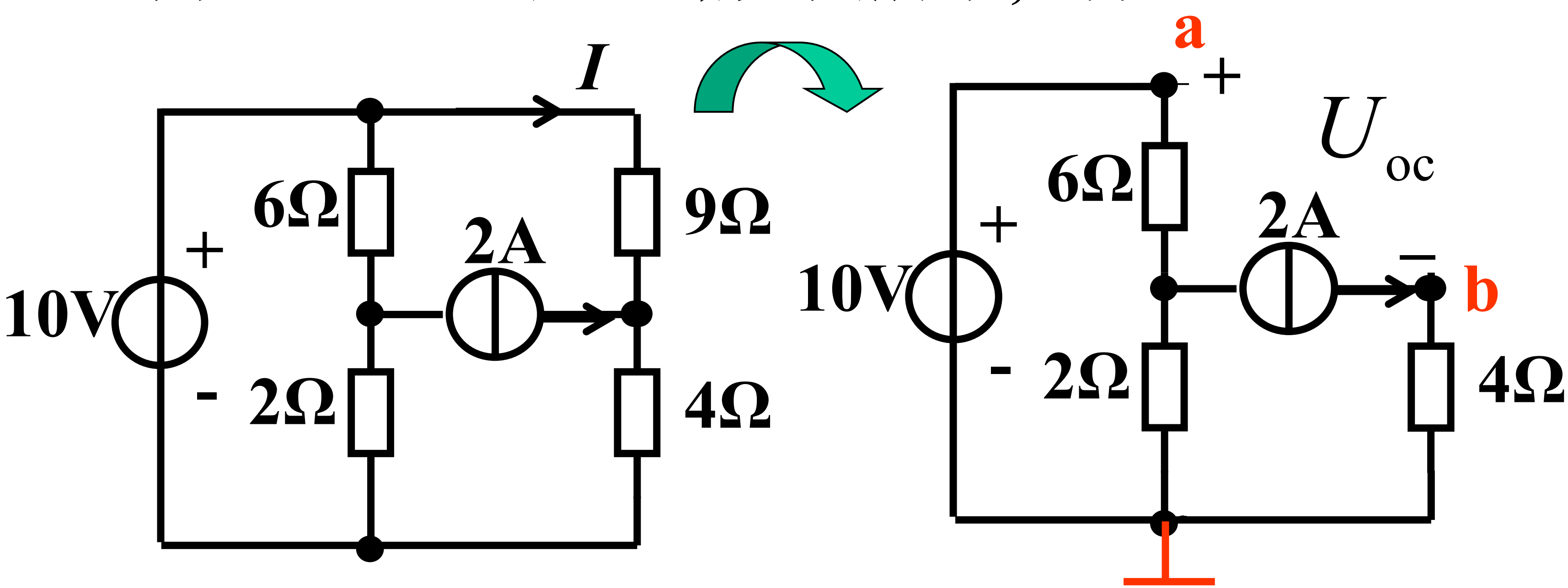
（3）求等效电阻。

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=\frac{2\times 3}{2+3}+1=2.2\Omega$$

（4）画出戴维宁等效电路图，求 I

$$I=\frac{U_{oc}}{R_{eq}+R_4}=\frac{7}{2.2+1.8}=1.75\text{A}$$

【例 2.6.3】 已知电路如图所示,试求 I。



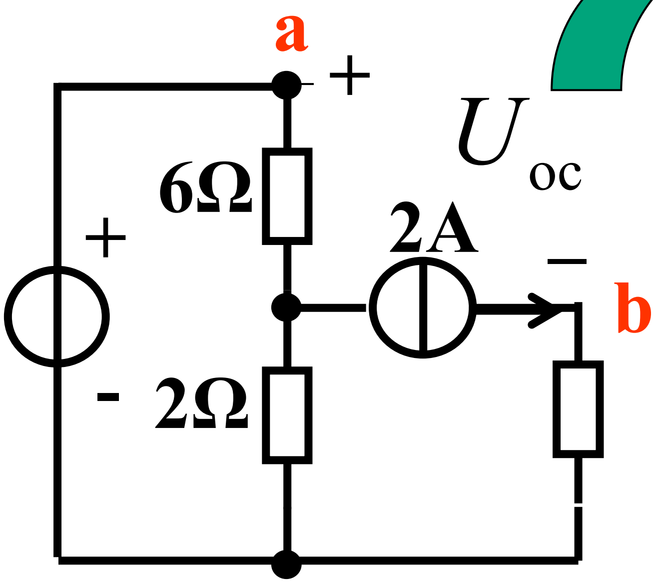
【解】 将被求的支路断开，求开路电压 U_{oc}。

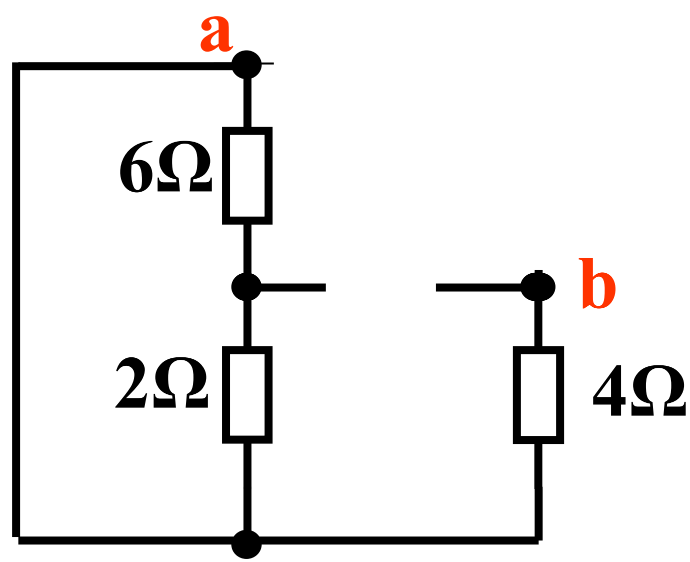
设参考点如图所示， 则 $V_a = 10\text{V}$

所以 $V_b = 2 \times 4 = 8\text{V}$

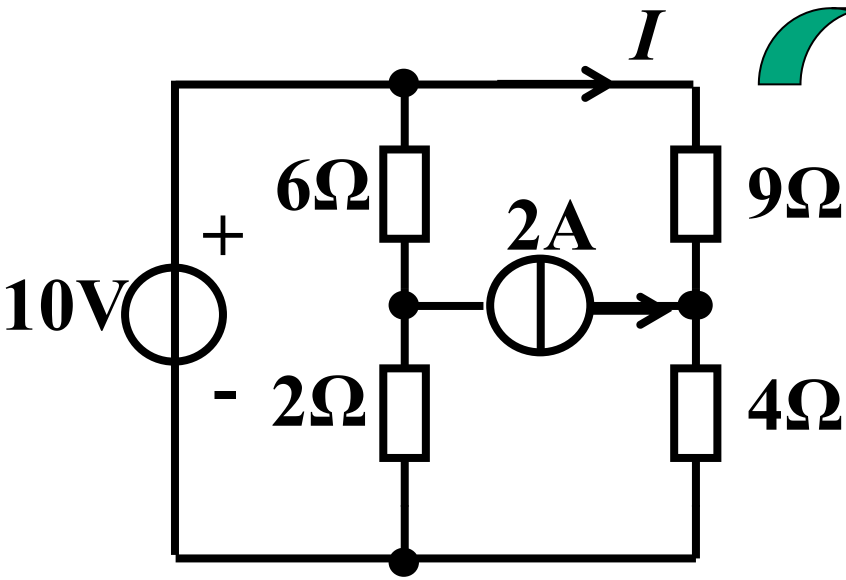
$$U_{oc} = V_a - V_b = 10 - 8 = 2\text{V}$$

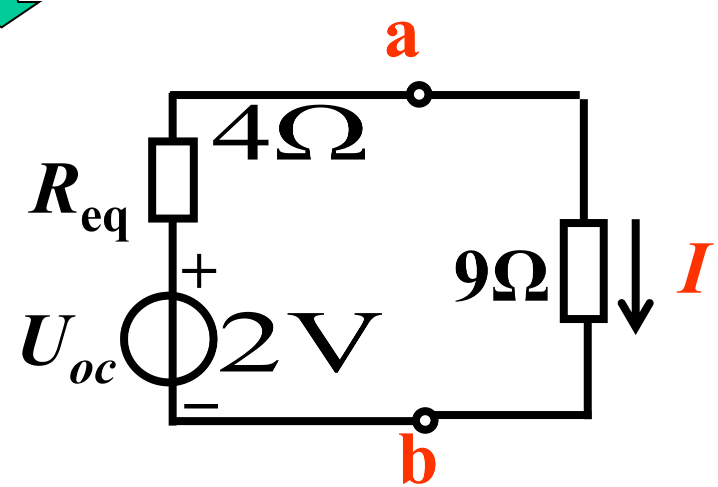
求等效电阻 R_{eq}





$$R_{eq} = 4\Omega$$



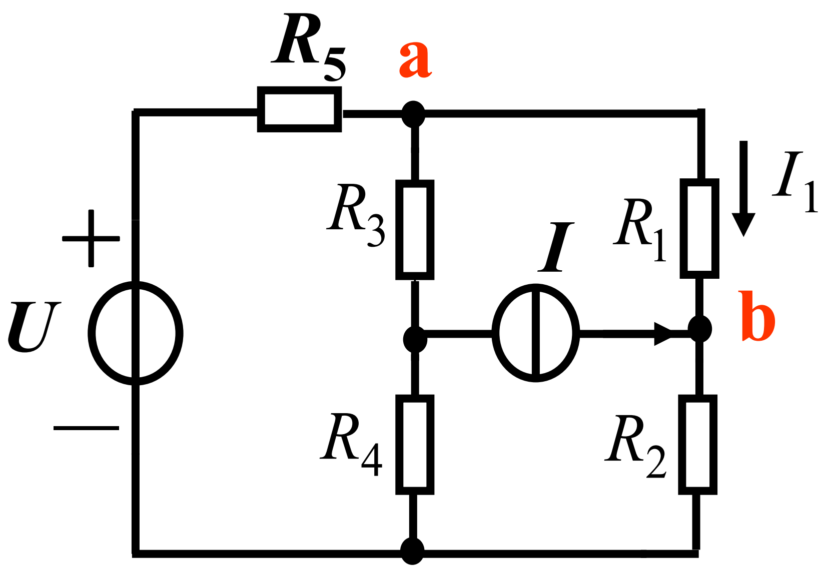


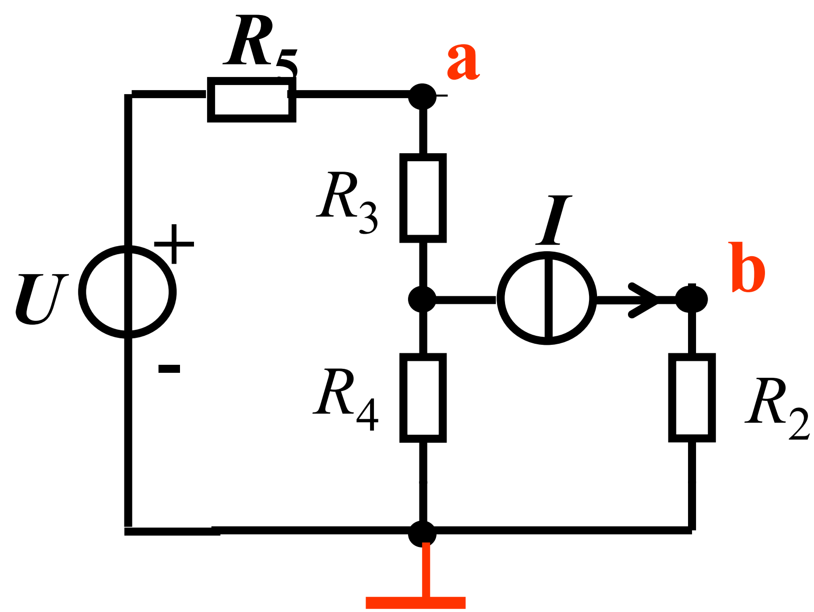
$$I=\frac{U_{oc}}{R_{eq}+9}=\frac{2}{4+9}=\frac{2}{13}\text{A}$$

【例 2.6.4】在图示电路中，$U = 16\text{V}$, $I = 1\text{A}$, $R_1 = R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 8\Omega$.

试求电流I_1。

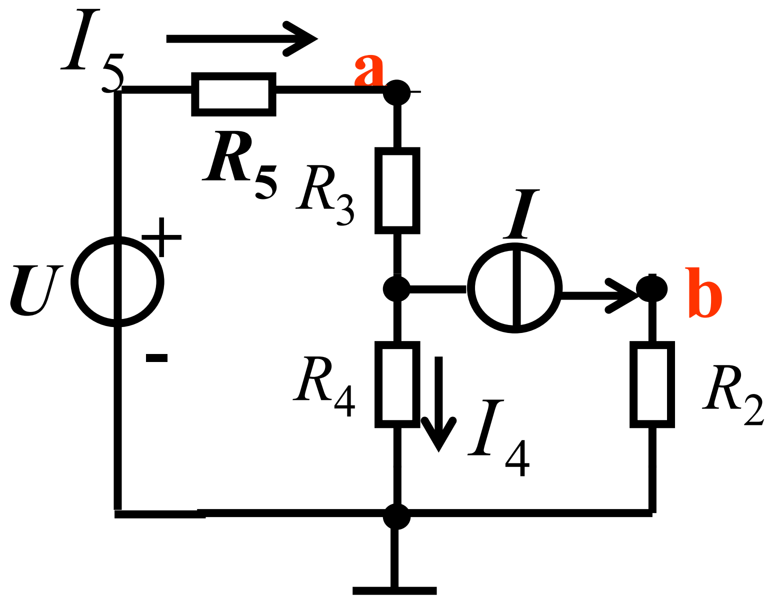
【解】用戴维宁定理





1. 求开路电压U_{oc}:

设参考点如图所示。



求 I_5需要列出如下方程

$$\begin{cases} I_5 = I + I_4 \\ I_5(R_5 + R_3) + I_4 R_4 = U \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_5 = 1 + I_4 \\ 12I_5 + 20I_4 = 16 \end{cases}$$

$$V_b = IR_2 = 1 \times 3 = 3\text{V}$$

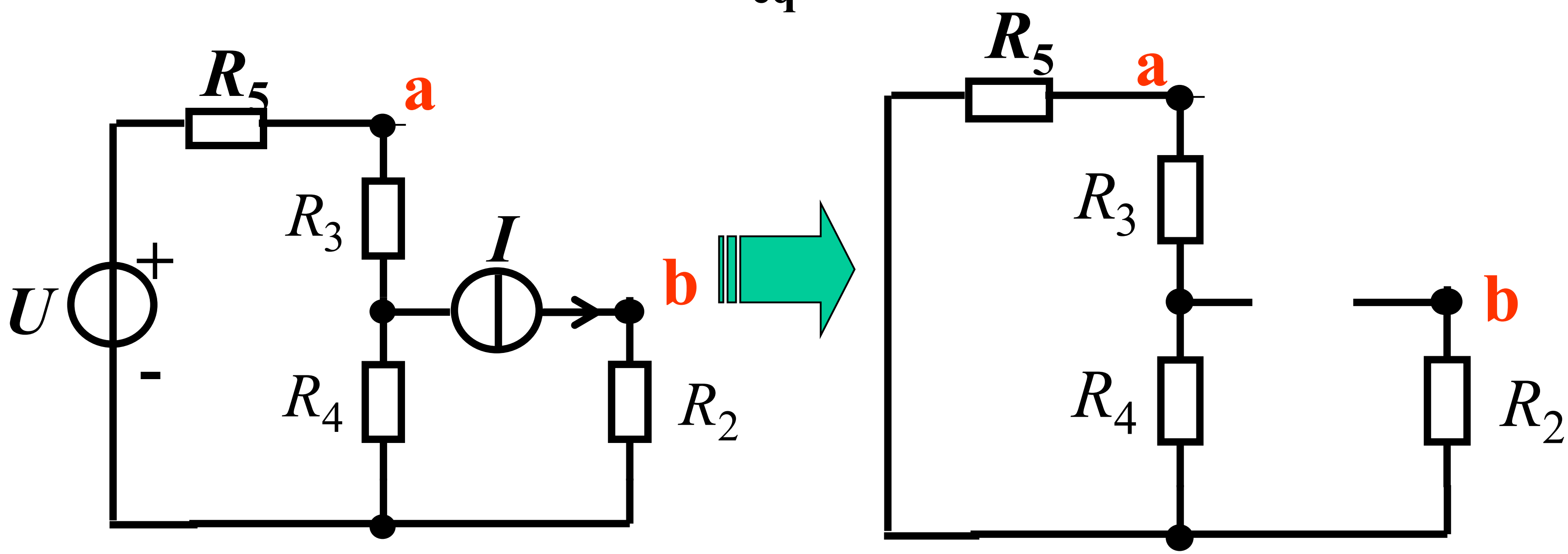
$$V_a = U - I_5 R_5$$

求出 $I_5 = \dfrac{9}{8}\text{A}$

$$V_a = 16 - \frac{9}{8} \times 8 = 7\text{V}$$

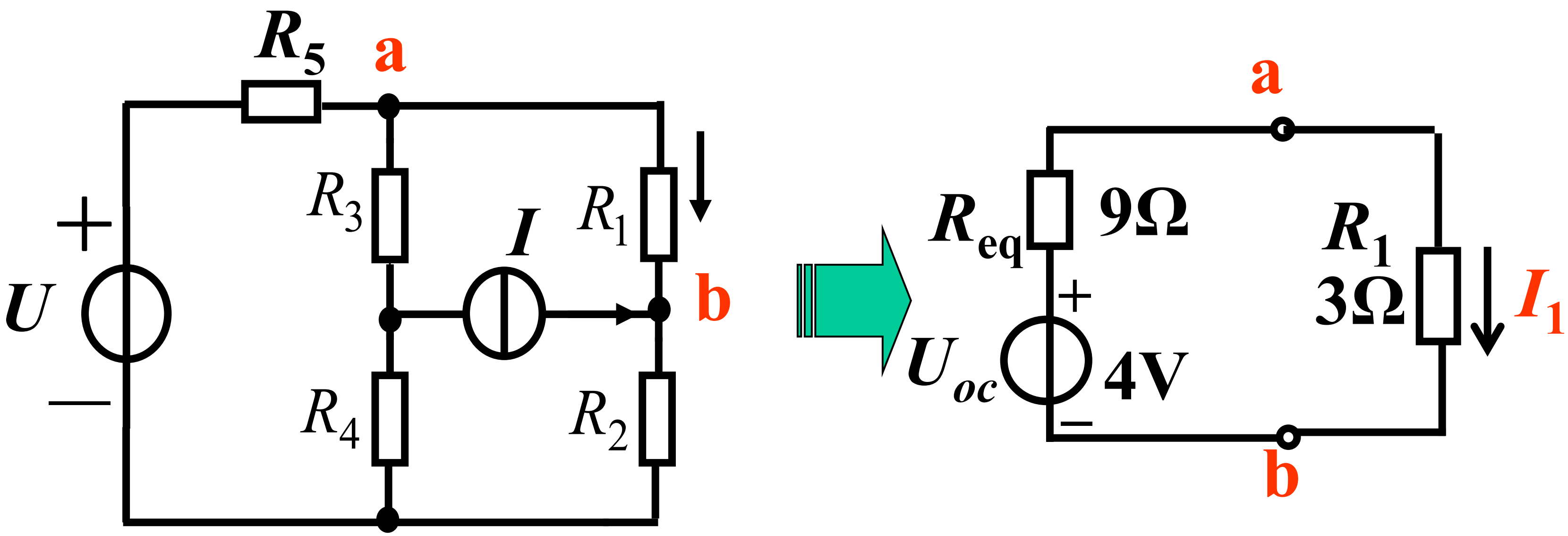
$$\boxed{U_{oc} = 7 - 3 = 4\text{V}}$$

2．求原电路的等效电阻R_{eq}



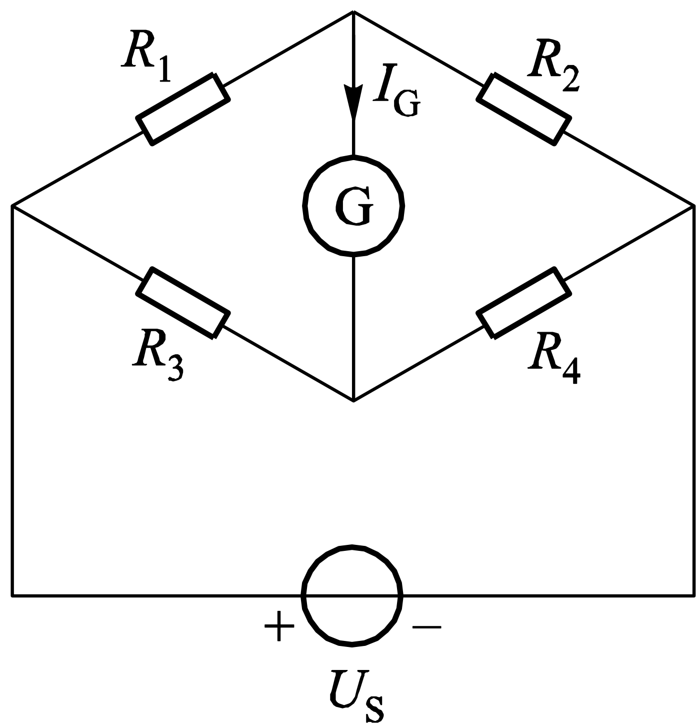
$$R_{eq}=\left[(R_3+R_4)//R_5\right]+R_2$$
$$=\left[(4+20)//8\right]+3$$
$$=6+3$$
$$=9\Omega$$

3. 求I_1



$$I_1 = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_1} = \frac{4}{9+3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\text{A}$$

【引例分析】在图示的电桥电路中，若U_S=12V，R_1=12Ω，R_2=18Ω，R_3=R_4=3Ω，检流计I_G的电阻R_G=1.3Ω。试求流过检流计的电流I_G。



U_S=12V，
R_1=12Ω，
R_2=18Ω，
R_3=3Ω，
R_4=4Ω。

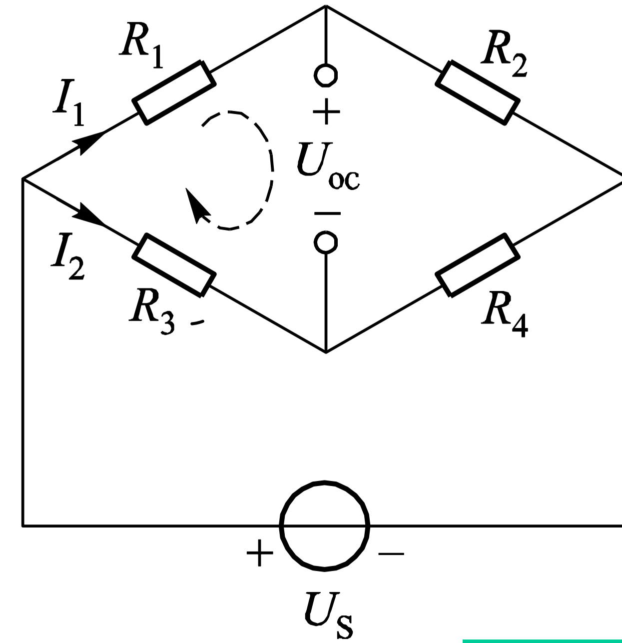
【解】（1）断开被求支路，获得有源一端口网络如图（b）所示。

（2）求有源一端口网络的开路电压U_{oc}。

$$I_1=\frac{U_S}{R_1+R_2}=\frac{12}{12+18}=0.4\text{A}$$

$$I_2=\frac{U_S}{R_3+R_4}=\frac{12}{3+3}=2\text{A}$$

$$U_{oc}=I_2R_3-I_1R_1=2\times3-0.4\times12=1.2\text{V}$$



(b) 移除被求支

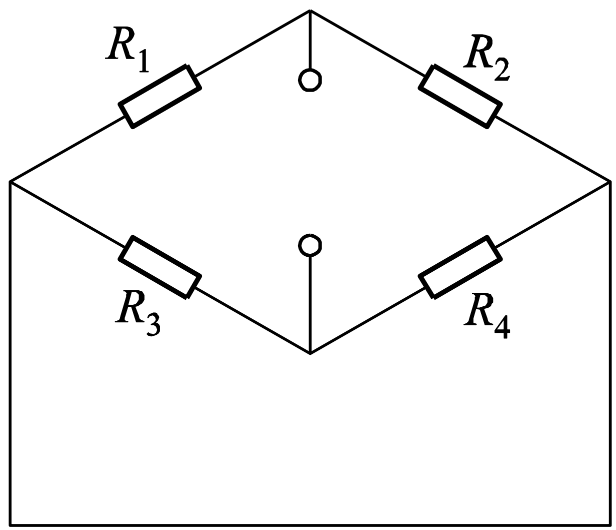
U_{S1}=12V

R_1=12Ω

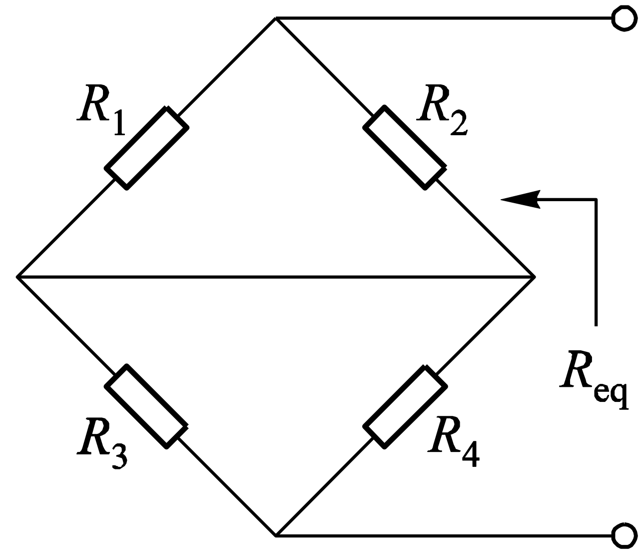
R_2=18Ω

R_3=3Ω

R_4=3Ω



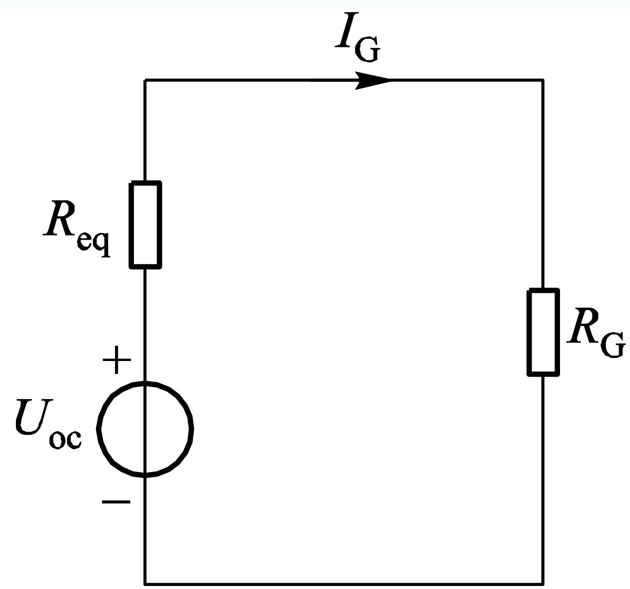
(c) 对应无源一端口网络



(d) 无源一端口网络等效电路

（3）求等效电阻。

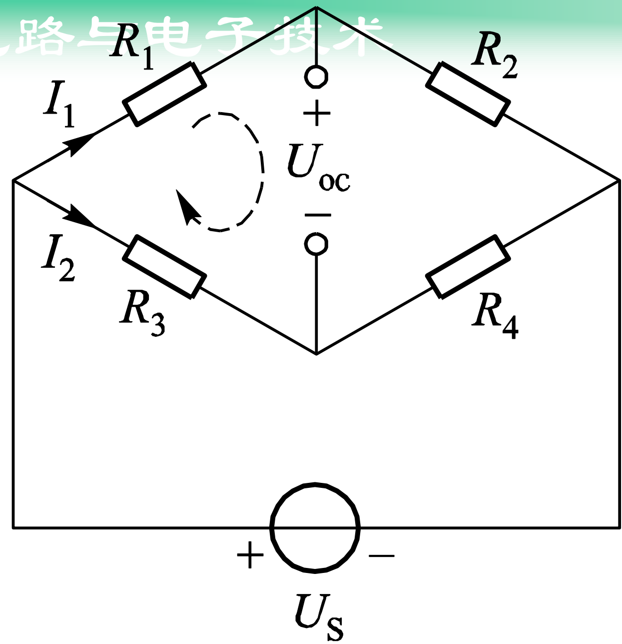
$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}=7.2+1.5=8.7\Omega$$



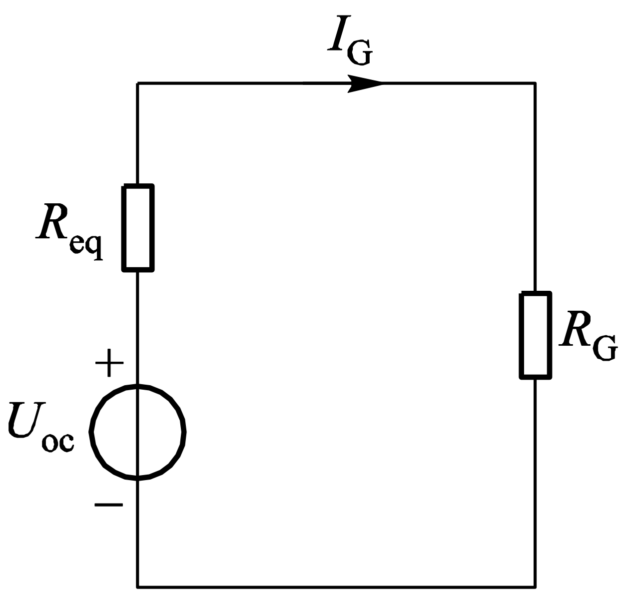
(e) 求未知电流

（4）画出戴维宁等效电路图，求被求电流。

$$I_G = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_G} = \frac{1.2}{8.7 + 1.3} = 0.12\text{A}$$



(b) 移除被求支路



(e) 求未知电流

$$
\begin{aligned}
U_{oc} &= I_2R_3 - I_1R_1 \\
&= \frac{U_S}{R_3+R_4}R_3 - \frac{U_S}{R_1+R_2}R_1 \\
&= U_S\left(\frac{1}{R_3+R_4}R_3 - \frac{1}{R_1+R_2}R_1\right) \\
&= U_S\left(\frac{1}{1+\frac{R_4}{R_3}} - \frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}}\right)
\end{aligned}
$$

第 2 章

结　束