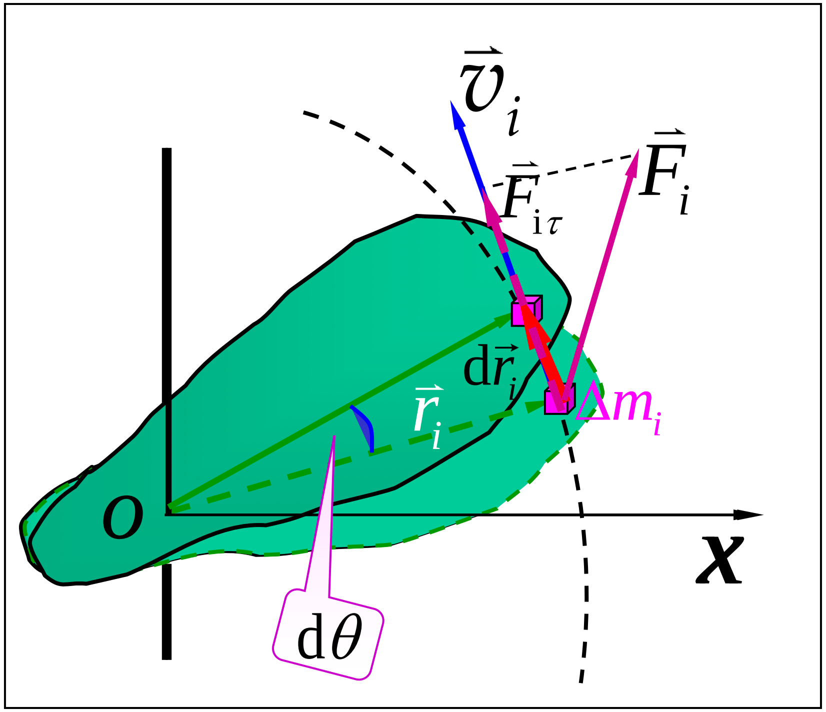
§ 4 刚体定轴转动的动能定理

力的空间累积效应 ⟹ 力的功、动能、动能定理。

力矩的空间累积效应 ⟹ 力矩的功、转动动能、动能定理。

一、力矩做功

当刚体在外力作用下作定轴转动时，考虑质元 Δm_i



$$\mathrm{d}A_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = F_{i\tau}\mathrm{d}s_i$$

$$= F_{i\tau} r_i \mathrm{d}\theta \quad = M_i \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \sum_i \mathrm{d}A_i = \sum_i M_i \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \sum_i M_i \mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

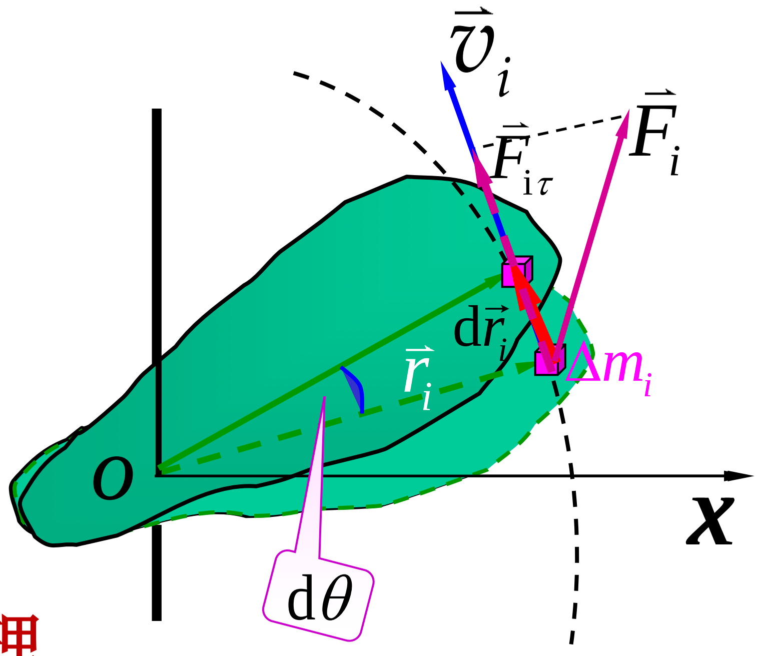
⟹ 力矩的功 $\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta}$

二、转动动能

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$



三、刚体绕定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\beta\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

——合外力矩对绕定轴转动的刚体所做的功数值上等于刚体转动动能的增量。

§5 角动量 角动量守恒定律

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理。

一、质点的角动量定理和角动量守恒定律

1. 质点的角动量

质点作圆周运动时，运动状态的描述

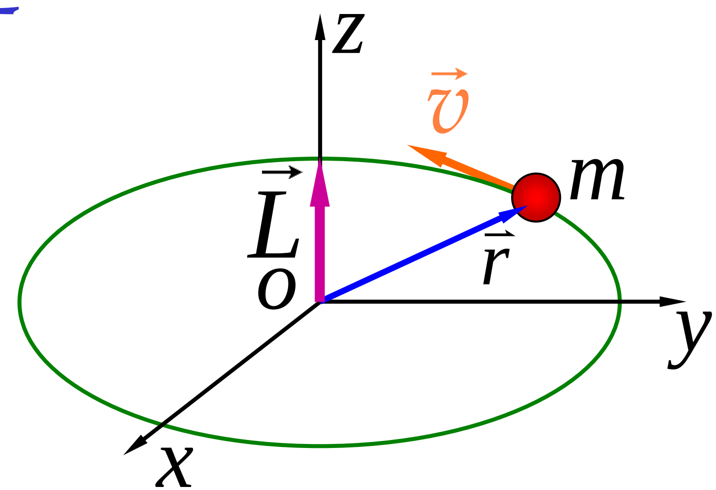
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

——其方向不断随时间而变化。

若定义一个物理量——

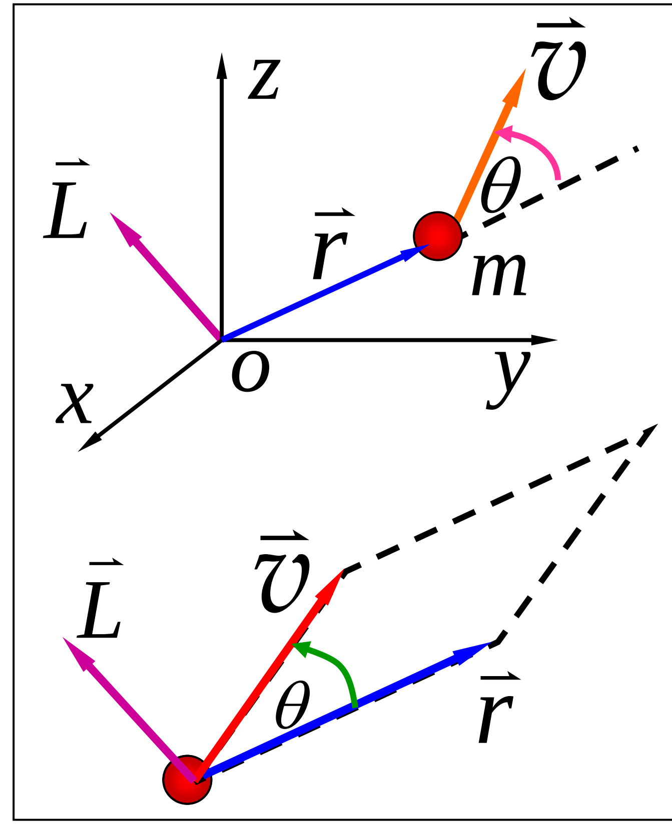
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

——称为质点的角动量，其方向不随时间而变化。



一般而言

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 O 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

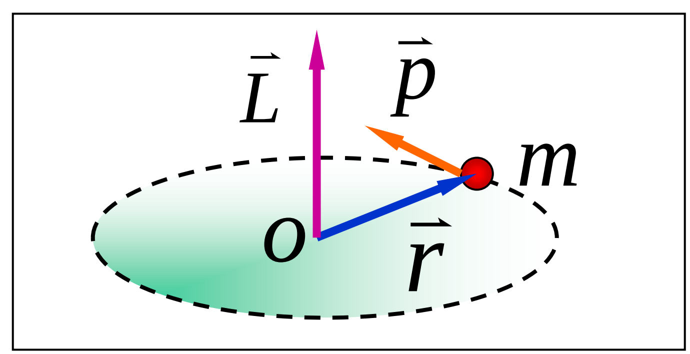


$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

大小 $L=rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则。

➢ 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量



$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}=J\vec{\omega}$$

2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v},\quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

——作用于质点的合力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率。

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

3. 质点的角动量守恒定律

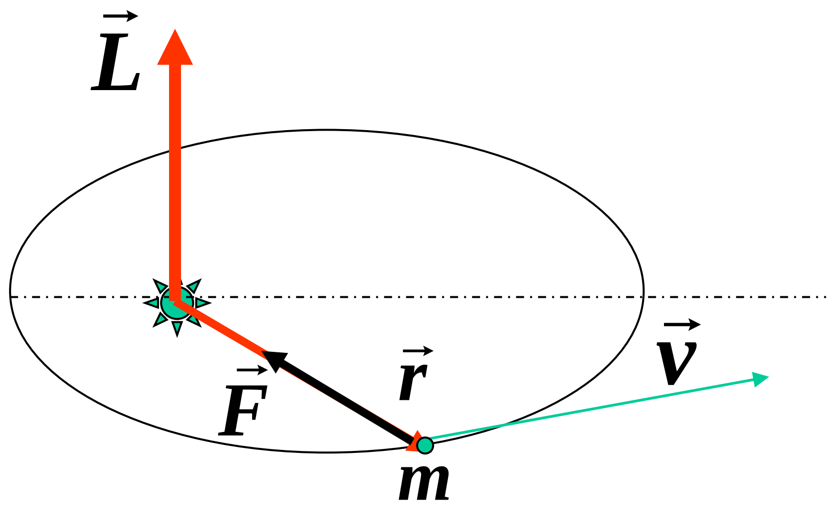
$$\vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = \text{恒矢量}$$

——质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量。

***自然界的普适规律。

$\vec{M}=0$ 的条件是 $\begin{cases} \vec{F}=0 \\ \text{或 } \vec{F} \text{ 过固定点：有心力} \\ \text{（如行星受的万有引力）} \end{cases}$

例. 证明开普勒第二定律：行星对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。



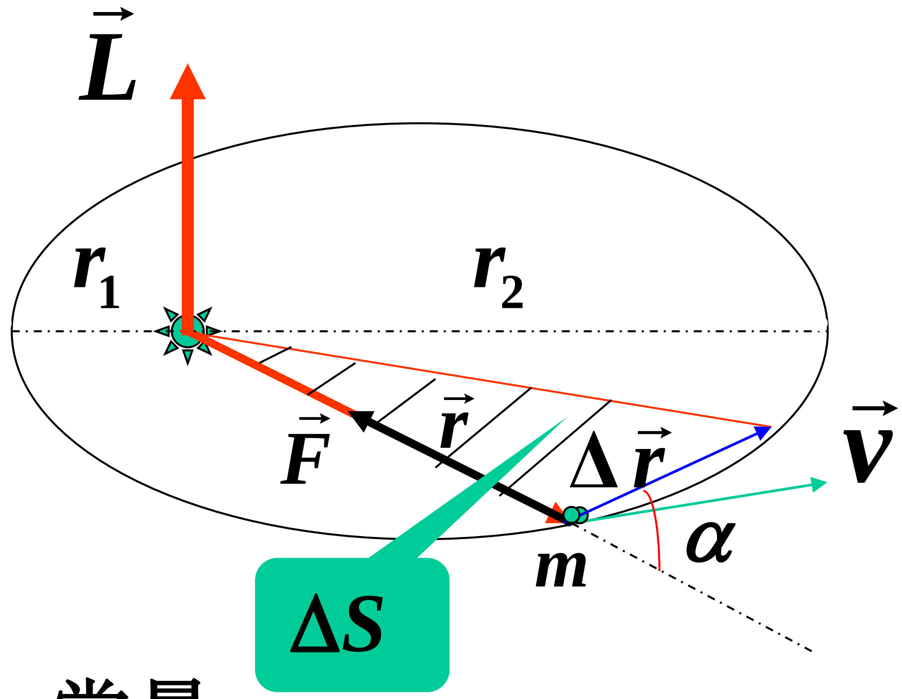
【解】因为是有心力场，
所以力矩 $M=0$，

角动量守恒：$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} =$ 常矢量

所以 $m\vec{v}$ 与 $\vec{r}$ 始终在同一平面内。

若经 Δt 时间， $\Delta S = \frac{1}{2} r |\Delta \vec{r}| \sin\alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$

扫面速度：



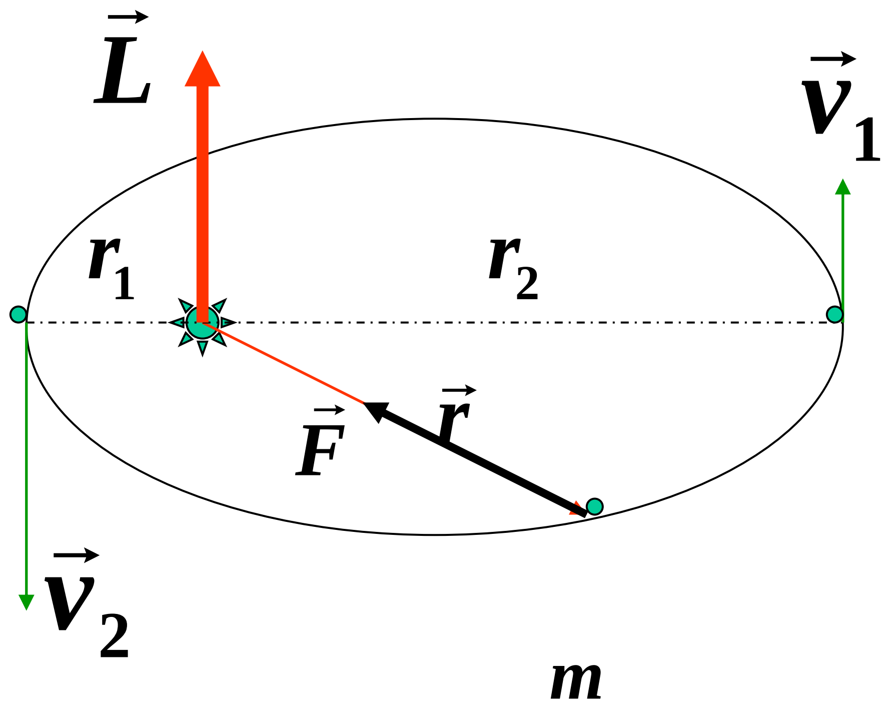
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times \Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

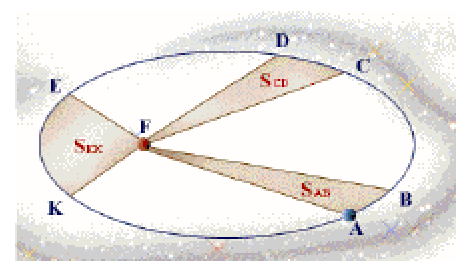
$$= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \text{常量}$$

所以地球人造卫星
在近地点速度大，
在远地点速度小。

1970年，我国发射
了第一颗地球人造
卫星——东方红一号



近地点高度为 439 km, 速度为 8.04 km/s;
远地点高度为 2384 km, 速度为 6.51 km/s;



计算出椭圆的面积,根据“扫面速度”，
就可以得到绕行周期为 114分钟。

东方红一号卫星

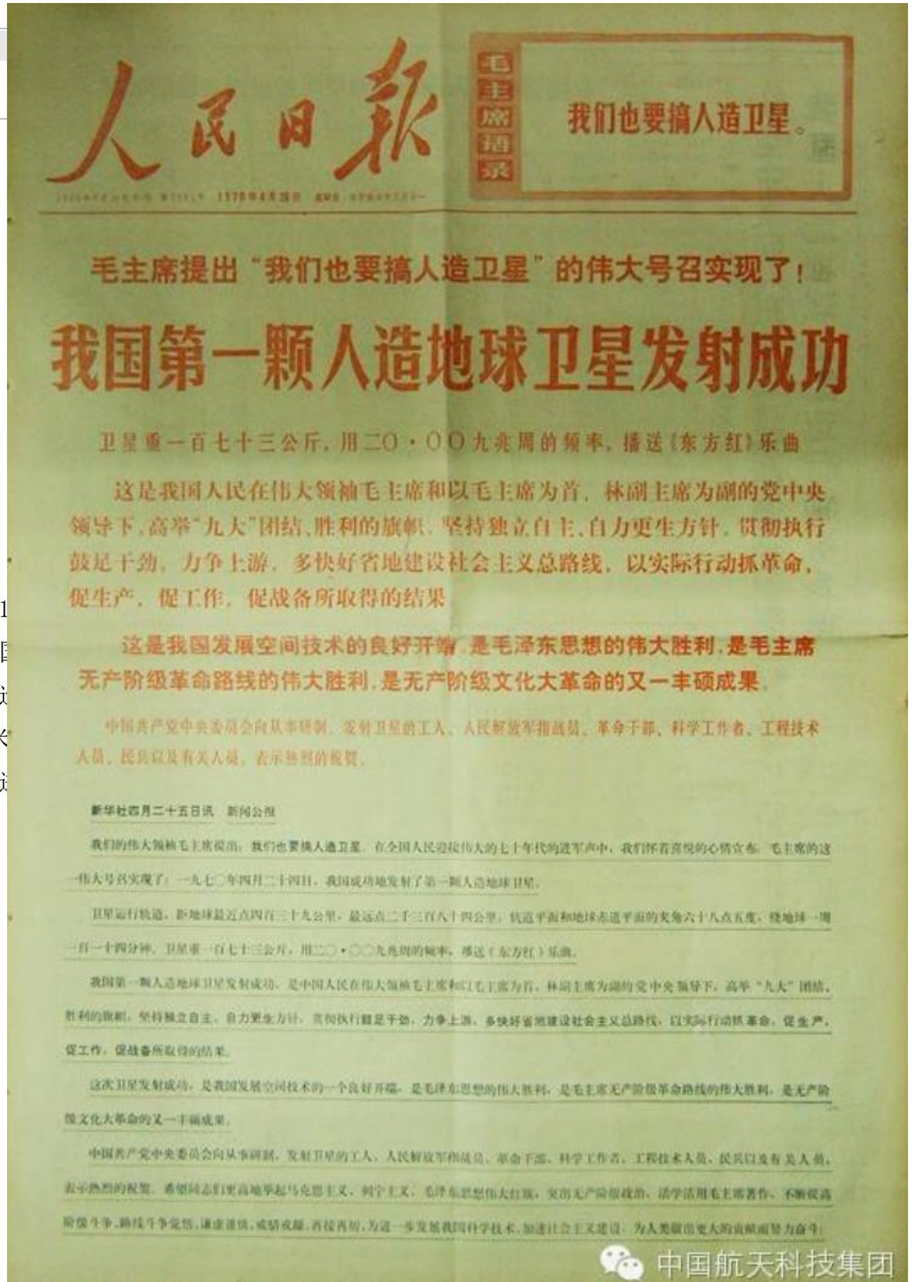
1

开创了中国

并发射人

点441千米

环境，并



人民日报

毛主席语录

我们也要搞人造卫星。

毛主席提出"我们也要搞人造卫星"的伟大号召实现了！

我国第一颗人造地球卫星发射成功

卫星重一百七十三公斤，用二〇·〇〇九兆周的频率，播送《东方红》乐曲

这是我国人民在伟大领袖毛主席和以毛主席为首、林副主席为副的党中央领导下，高举"九大"团结、胜利的旗帜，坚持独立自主、自力更生方针，贯彻执行鼓足干劲、力争上游、多快好省地建设社会主义总路线，以实际行动抓革命，促生产，促工作，促战备所取得的结果

这是我国发展空间技术的良好开端，是毛泽东思想的伟大胜利，是毛主席无产阶级革命路线的伟大胜利，是无产阶级文化大革命的又一丰硕成果

中国共产党中央委员会向从事研制、发射卫星的工人、人民解放军指战员、革命干部、科学工作者、工程技术人员、民兵以及有关人员，表示热烈的祝贺。

新华社四月二十五日讯 新闻公报

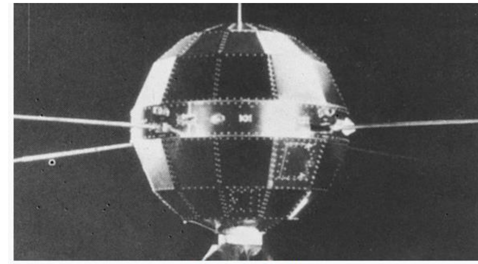
我们的伟大领袖毛主席提出：我们也要搞人造卫星。在全国人民迎接伟大的七十年代的进军声中，我们怀着喜悦的心情宣布：毛主席的这一伟大号召实现了！一九七〇年四月二十四日，我国成功地发射了第一颗人造地球卫星。

卫星运行轨道，距地球最近点四百三十九公里，最远点二千三百八十四公里，轨道平面和地球赤道平面的夹角六十八点五度，绕地球一周一百一十四分钟。卫星重一百七十三公斤，用二〇·〇〇九兆周的频率，播送《东方红》乐曲。

我国第一颗人造地球卫星发射成功，是中国人民在伟大领袖毛主席和以毛主席为首、林副主席为副的党中央领导下，高举"九大"团结、胜利的旗帜，坚持独立自主、自力更生方针，贯彻执行鼓足干劲、力争上游、多快好省地建设社会主义总路线，以实际行动抓革命，促生产，促工作，促战备所取得的结果。

这次卫星发射成功，是我国发展空间技术的一个良好开端，是毛泽东思想的伟大胜利，是毛主席无产阶级革命路线的伟大胜利，是无产阶级文化大革命的又一丰硕成果。

中国共产党中央委员会向从事研制、发射卫星的工人、人民解放军指战员、革命干部、科学工作者、工程技术人员、民兵以及有关人员，表示热烈的祝贺。希望同志们更高地举起马克思主义、列宁主义、毛泽东思想伟大红旗，突出无产阶级政治，活学活用毛主席著作，不断提高阶级斗争、路线斗争觉悟，谦虚谨慎，戒骄戒躁，再接再厉，为进一步发展我国科学技术，加速社会主义建设，为人类做出更大的贡献而努力奋斗！



DFH-1 satellite

Names	The East is Red 1 China **1** PRC 1
Mission type	Technology demonstration
Operator	CAST
COSPAR ID	1970-034A
SATCAT no.	04382
Mission duration	20 days (achieved) 52 years (in orbit)
Spacecraft properties	
Manufacturer	CASC
Launch mass	173 kg (381 lb) [1]
Dimensions	1 m (3 ft 3 in) of diameter
Start of mission	
Launch date	24 April 1970, 13:35:45 GMT[2]
Rocket	Chang Zheng 1
Launch site	Jiuquan, LA-5020
Contractor	China Academy of Launch Vehicle Technology
Entered service	24 April 1970
End of mission	
Last contact	14 May 1970
Orbital parameters	
Reference system	Geocentric orbit[1]
Regime	Medium Earth orbit
Perigee altitude	441 km (274 mi)
Apogee altitude	2,286 km (1,420 mi)
Inclination	68.42°
Period	114.09 minutes

DFH-1 - Orbit

The orbit data is extracted from the following two-line orbital elements,

```
1   4382U 70034A    23075.19057247  .00002619  00000-0  39141-3 0  9992
2   4382  68.4246 318.2670 1045875 327.6149  26.4619 13.09397795489729
```

Epoch (UTC):	16 March 2023 04:34:25
Eccentricity:	0.1045875
inclination:	68.4246°
perigee height:	430 km
apogee height:	2021 km
right ascension of ascending node:	318.2670°
argument of perigee:	327.6149°
revolutions per day:	13.09397795
mean anomaly at epoch:	26.4619°
orbit number at epoch:	48972

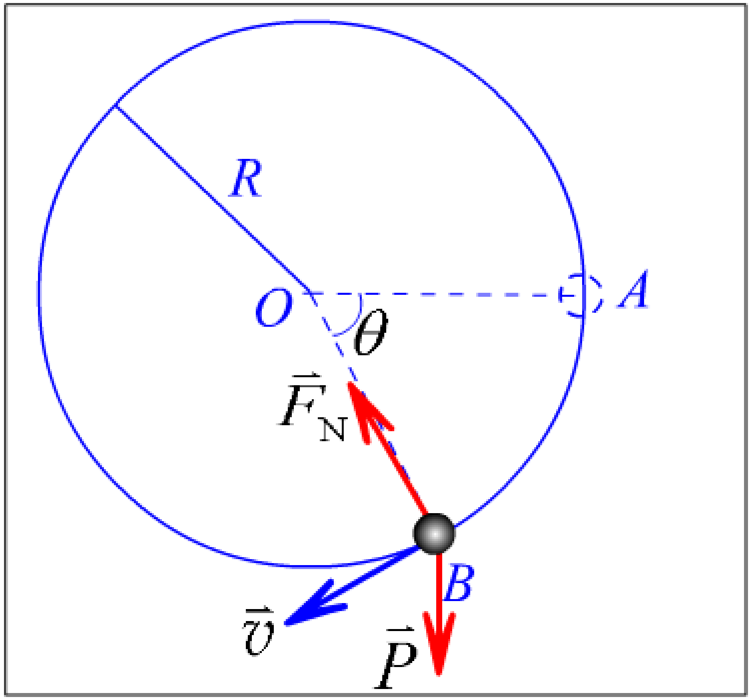
inclination:	68.4246°
perigee height:	430 km
apogee height:	2021 km
right ascension of ascending node:	318.2670°
argument of perigee:	327.6149°
revolutions per day:	13.09397795
mean anomaly at epoch:	26.4619°
orbit number at epoch:	48972

The dashed part of the orbit path shows where the satellite is in the earth's shadow,

例1 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内。一质量为 m 的小球穿在圆环上，并可在圆环上滑动。小球开始时静止于圆环上的点 A（该点在通过环心 O 的水平面上），然后从 A 点开始下滑。设小球与圆环间的摩擦略去不计。求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度。

解　小球受重力和支持力作用，支持力的力矩为零，重力矩垂直纸面向里

$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$$



$$M=mgR\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=mgR\cos\theta$$

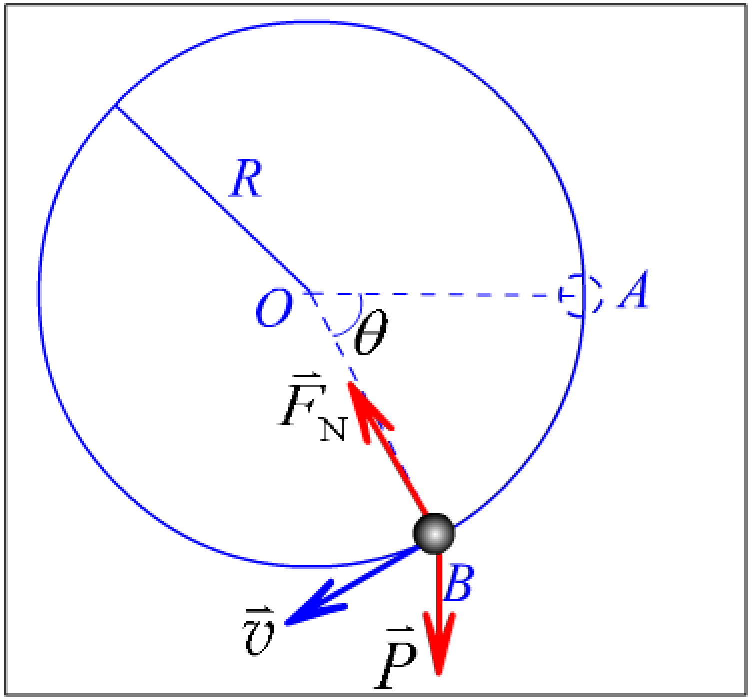
由质点的角动量定理

$$M=mgR\cos\theta=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}L = mgR\cos\theta \mathrm{d}t = mgR\cos\theta \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} = mgR\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega}$$

考虑到 $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ $\quad L = mRv = mR^2\omega$

得 $L\mathrm{d}L = m^2 gR^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$



由题设条件积分上式

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2 gR^3\int_0^\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2}$$

$\because$ $L = mR^2\omega$ $\quad\therefore$ $\omega = (\dfrac{2g}{R}\sin\theta)^{1/2}$

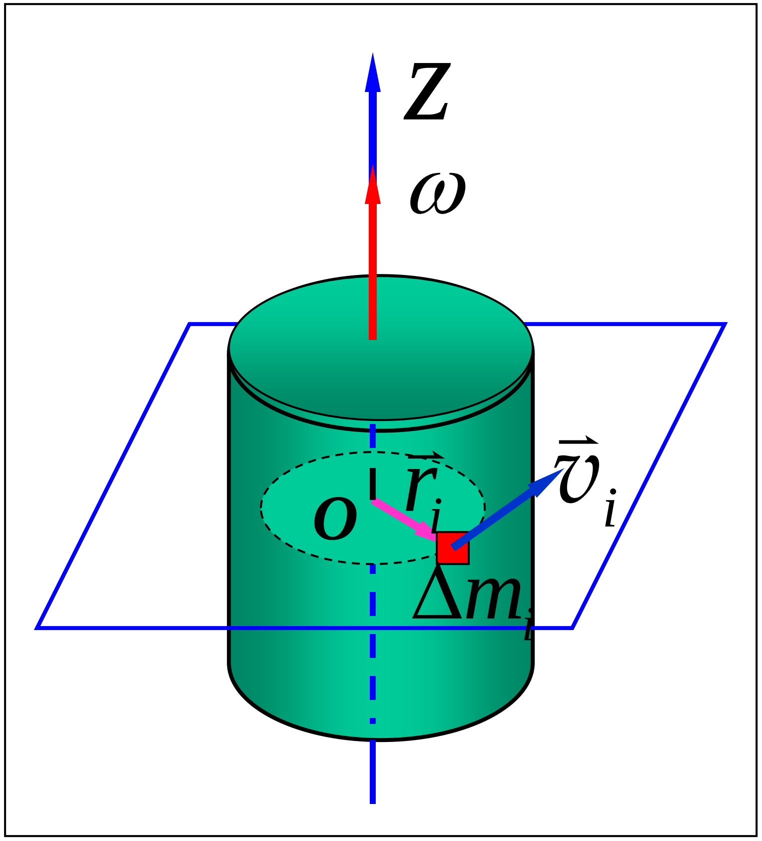
二、 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

$$L_i = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_i v_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$



$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$

——描述刚体定轴转动的状态。

$\vec{L}$、J、$\vec{\omega}$ 应该具有同轴性。

2. 刚体定轴转动的角动量定理

$$\vec{M} = J\vec{\beta} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\vec{\omega}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}\left(J\vec{\omega}\right)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1}$$

**对于非刚体而言，定轴转动的角动量定理可以表述为

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = J_2\vec{\omega}_2 - J_1\vec{\omega}_1}$$

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $\vec{M} = 0$，则 $\vec{L} = J\vec{\omega} = $ 常量

讨论：

- 守恒条件 $M = 0$

  若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变。

- 内力矩不改变系统的角动量。

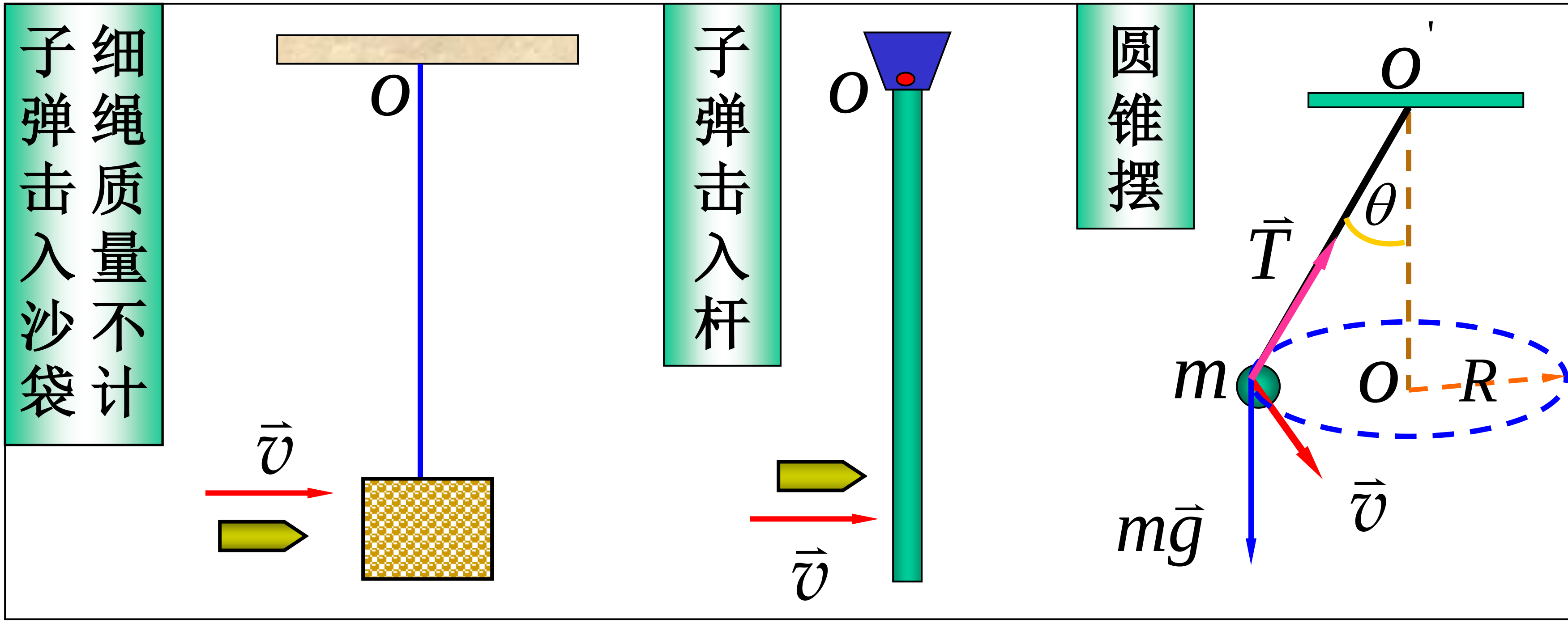
- 在冲击等问题中，$\because M_{内} >> M_{外}$ $\therefore L \approx$ 常量

- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律。

- 有许多现象都可以用角动量守恒来说明

$$J\vec{\omega} = 常量$$

讨 论：



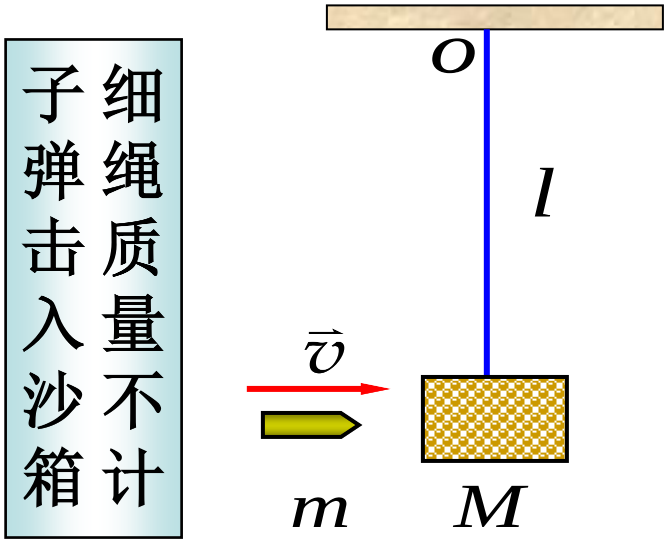
以子弹和沙袋为系统
动量守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒。

以子弹和杆为系统
动量不守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒 。

圆锥摆系统
动量不守恒；
角动量守恒？
机械能守恒 。

求沙箱升高的最大高度h

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$



动量守恒 ？

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？

$$mv=(m+M)v'$$

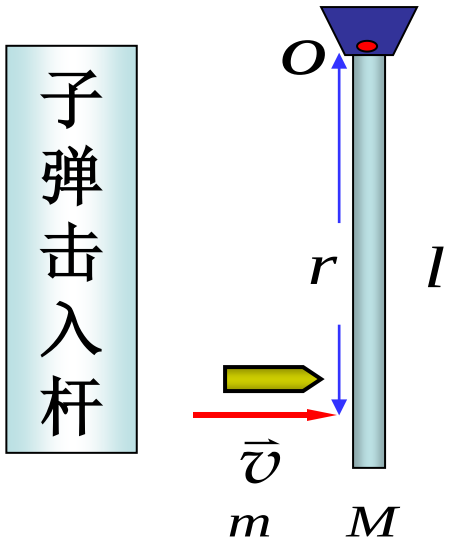
$$mvl=(m+M)v'l$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2=(m+M)gh$$

守恒定律的条件

求杆的最大摆动角度 ϕ

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$



$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

以子弹和杆为系统

动量守恒　？　（不）

角动量守恒　？

机械能守恒　？（不）

$$rmv=(mr^2+\frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

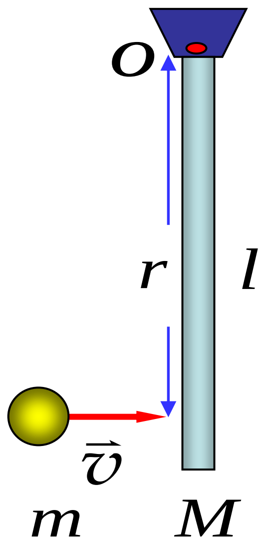
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2+mr^2)\omega^2=$$

$$mgr(1-\cos\phi)+Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

求杆的最大摆动角度 ϕ

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

小球与杆弹性碰撞



以弹性球和杆为系统

动量守恒 ？（不）

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

$$rmv=rmv'+(\frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

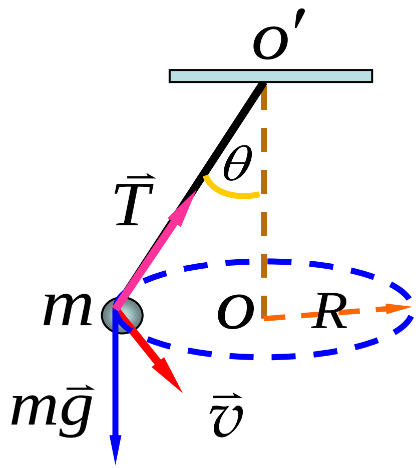
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

守恒定律的条件

过程问题

圆锥摆



圆锥摆系统

动量守恒 ？ （不）

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

对O'点 $\sum \vec{M} \neq 0$，$\vec{L} \neq$ 恒矢量

对O点 $\sum \vec{M} = 0$，$\vec{L} =$ 恒矢量　　$L = Rmv$

$\sum W_{外} = 0$　　$E = \dfrac{1}{2} mv^2 = C$

守恒定律的条件

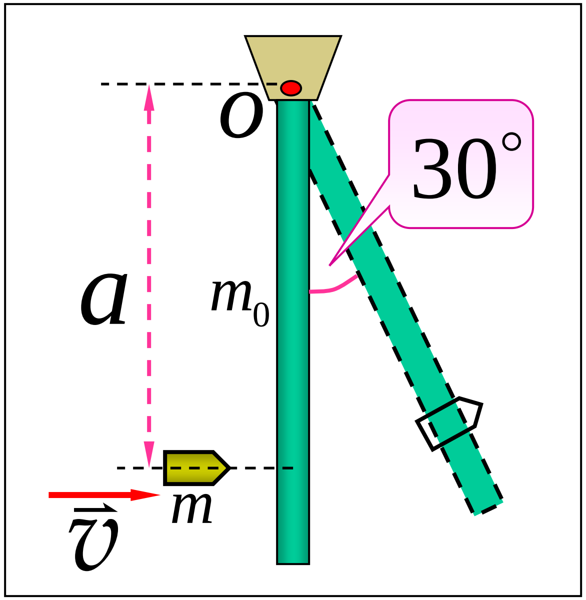
$\vec{M}$，$\vec{L}$ 是对哪一点?

例2 一长为 l ，质量为 m_0 的竿可绕支点O自由转动 。一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30°。问子弹的初速率为多少？

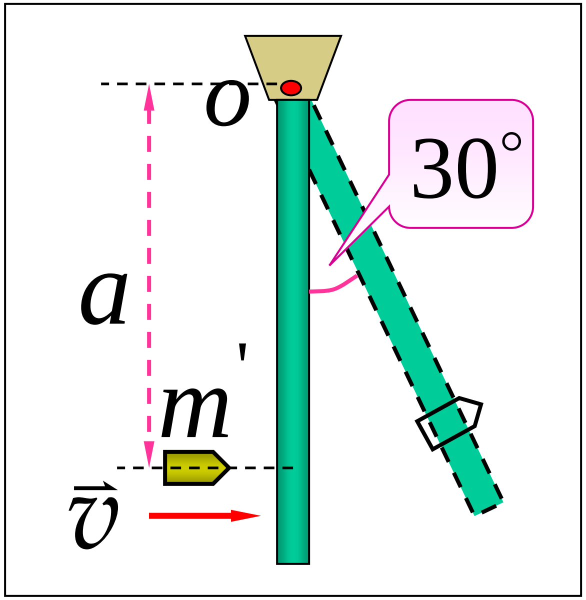
解 把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒

$$mva=(\frac{1}{3}m_0 l^2+ma^2)\omega$$

$$\omega=\frac{3mva}{m_0 l^2+3ma^2}$$



射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。



$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2)\omega^2 =$$

$$= mga\left(1-\cos 30^\circ\right) + m_0 g\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

$$v = \frac{\sqrt{g\frac{(2-\sqrt{3})}{6}(m_0 l + 2ma)(m_0 l^2 + 3ma^2)}}{ma}$$

质点运动学

1、理想模型：质点、质点系

2、运动的描述：

位置矢量 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

位移矢量 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2(t+\Delta t)-\vec{r}_1(t)$ $\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$

速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{v}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $\vec{a}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

矢量性、瞬时性、相对性

常见的运动

掌握

匀变速直线运动

- 沿 x 轴运动(一维)
- 初位置 x_0 ,初速度 v_0
- 加速度 a 恒定

$$v = v_0 + at$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right)$$

抛体运动

- 以仰角 θ 抛出
- 初位置设为原点
- 初速度 v_0
- 加速度 $a_x=0,a_y=-g$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{g x^2}{v_0{}^2\cos^2\theta}$$

圆周运动

- 圆周半径 R
- 线速度 v

$$\omega = v / R, \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n + R\alpha\vec{e}_r$$

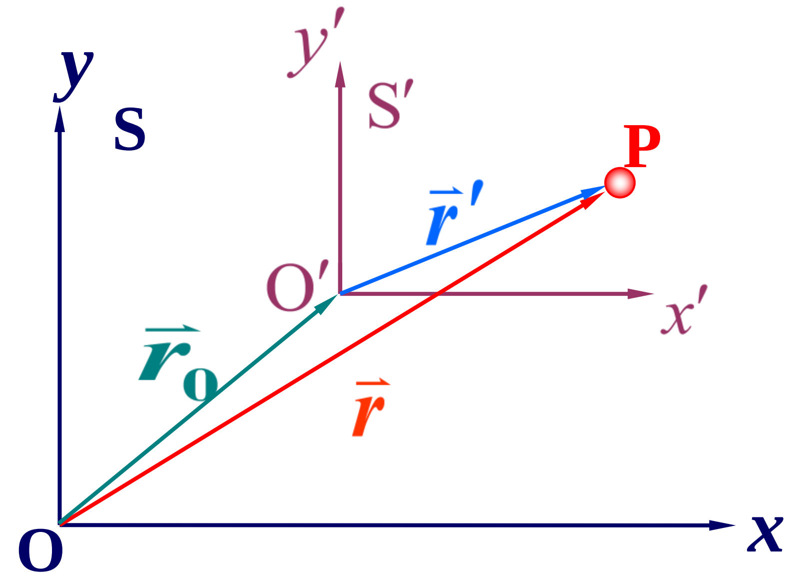
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

3. 相对运动

位矢关系：　$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

速度关系：　$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$

加速度关系：　$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$



$\vec{a}_0 = 0$ → 伽利略变换式

$\vec{v}$:绝对速度

$\vec{v}'$:相对速度

$\vec{v}_0$:牵连速度

伽利略变换式成立的条件：长度与时间的测量与参考系的选择无关（即绝对时空观）

4. 质点运动学两类基本问题

♣ 已知运动方程，求质点在任一时刻的速度和加速度

♣ 已知加速度以及初始速度和初始位置，求任一时刻的速度及运动方程

正问题： $\vec{r} \Rightarrow \vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ ——求导

反问题： $\vec{r}=\int \vec{v}dt \Leftarrow \vec{v}=\int \vec{a}dt \Leftarrow \vec{a}$ ——积分

牛顿定律

1、牛顿运动定律

第一定律　　惯性、惯性系、力的概念

第二定律　　$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}, \vec{p} = m\vec{v}$

当 m 为常量时 $\vec{F} = m\vec{a}$

第三定律　　$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

解题思路:

（1）选对象

（2）看运动（轨迹、速度、加速度）

（3）查受力（隔离物体、画示力图）

（4）列方程（注意标明坐标的正方向；
有时还要从几个物体的
运动关系上补方程）

（5）验结果 （量纲？特例？等）

动量定理及动量守恒

力的时间积累效应

(1) 冲量 $\vec{F}dt$ 动量 $\vec{p}=m\vec{v}$

(2) 动量定理: $\vec{I}=\int_0^t \vec{F}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1$

(3) 动量守恒定律: $\vec{F}_{外}=0$时 $\vec{p}_i+\vec{p}_j=\vec{p}_i'+\vec{p}_j'$

1）适用于惯性系

2）若某方向的合外力为零，则沿该方向动量守恒

3）当内力 >> 外力时，动量近似守恒（碰撞、冲击和爆炸）

动能定理及功能原理

力的空间积累效应

(1) 功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

(2) 动能

质点的动能 $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

质点系的动能 $E_k = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} mv_i^2$

(3) 动能定理

质点的动能定理

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

质点系的动能定理

$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

刚体的定轴转动

1、刚体、刚体的平动

2、刚体绕定轴转动

3、角速度矢量 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

4、刚体的转动动能 $E = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_k r_k^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$

5、刚体的转动惯量 $J = \sum \Delta m_k r_k^2$ $\quad J = \int r^2 dm$

6、刚体的角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ $\quad L = J\omega$

7、力矩的功 $\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$ $\quad A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

8、转动定律

$$\vec{M} = J\vec{\beta}$$

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \frac{dL}{dt}$$

9、转动动能定理

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2) = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

10、定轴转动刚体的角动量定理

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}(J\vec{\omega})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$

11、定轴转动刚体的角动量守恒定律

若　$\vec{M} = 0$

则　$\vec{L} = J\vec{\omega} =$ 恒矢量

质点运动与刚体定轴转动的对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度 加速度	$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ $\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角速度 角加速度	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\quad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	J
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$L=J\omega$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\alpha$
动量定理	$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\,\mathrm{d}t$ $\int\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0$	角动量定理	$\mathrm{d}L=M\,\mathrm{d}t$ $\int M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$
功	$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$
功率	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩的功率	$P=M\omega$
动能	$E_K=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_K=\frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$\int M\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

※ 定轴转动的动力学问题

- 第一类：求刚体转动的角加速度，应用转动定律。对质点列牛顿定律方程，对刚体列转动定律方程，再由角量与线量的关系，联立求解。
- 第二类：刚体与质点的碰撞、打击问题。选系统，当受合外力矩等于零时，可用系统角动量守恒。列方程时，注意角动量中各项的正负。对在有心力场作用下绕力心转动的问题，可直接用角动量守恒定律。
- 第三类：在刚体所受的合外力矩不等于零时，应用刚体的转动动能定理。对仅受保守力矩作用的刚体转动问题，也可用机械能守恒定律。
- 另　外：实际问题中常常有多个复杂过程，要分成几个阶段进行分析，分别列出方程，进行求解。