数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年11月

上章内容回顾

- 真值表方法研究命题逻辑
  - 命题公式的分类：重言式、矛盾式、可满足式
  - 命题公式的逻辑等价，逻辑蕴含
  - 等价命题公式的共同规范化形式（范式）
  - 命题公式的对偶式和内否式（选修）

能否利用公理化方法研究命题逻辑？

第三章 命题演算形式系统

- 命题逻辑演算形式系统
- 自然演绎推理系统

命题逻辑演算形式系统

形式系统

- 形式系统的语言：基本符号集和语法规则
- 形式系统的公理：其余命题推导的出发点
- 形式系统推理规则：公理推导定理
- 形式系统的定理：推理结果

- 推理：从前提出发推出结论的思维过程。
- 前提：是已知的命题公式集合。
- 结论：从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

什么样的推理是正确的呢？

形式语言的定义

- **字母表：** 字符（symbol）的集合称为字母表。命题逻辑中字母表往往包含$Atom(L^p)$。
- **字符串：** 由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串（symbol string）。字符串中字符的个数称为字符串的长度。长度为0的字符串称为空串（empty string），ϵ表示。空串是任何字符的字符串，是一个特殊的字符串。若A是字母表，则用A^*表示所有字符串的集合（包含空串）。
- A^*的子集称为形式语言。

语言部分

命题演算（Propositional Calculus，PC)的字母表是集合：

$$\sum = \{(,),\neg,\rightarrow,p,q,r,p_1,p_2,\cdots\}$$

注释：

（1）三个部分构成：助记符 + 联结词 + $Atom(L^p)$。

（2）$\{p,q,r,p_1,p_2,\cdots\}$ 就是 $Atom(L^p)$。

（3）$\{\neg,\rightarrow\}$是联结词。为什么只有两个联结词?

（4）$\{(,)\}$是助记符。目的是体现公式的层次感。

语言部分

字母表：$\sum = \{(,),\neg,\rightarrow,p,q,r,p_1,p_2,\cdots\}$

助记符+完备联结词组+ $Atom(L^p)$

$\sum^*$=$\{\varepsilon,(,),\neg,p,q,r,p\rightarrow,p(,\cdots\}$

PC的公式（递归定义）：

（1） $p,q,r,p_1,p_2,p_3,\cdots$为（原子）公式。

（2）如果A, B 是公式，那么$(\neg A)$，$(A\rightarrow B)$ 也是公式。

（3）只有（1）和（2）确定的$\sum^*$的字符串才是公式。（有限次）

在不产生歧义的情况下，公式中最外层的括号可以省略。

语言部分

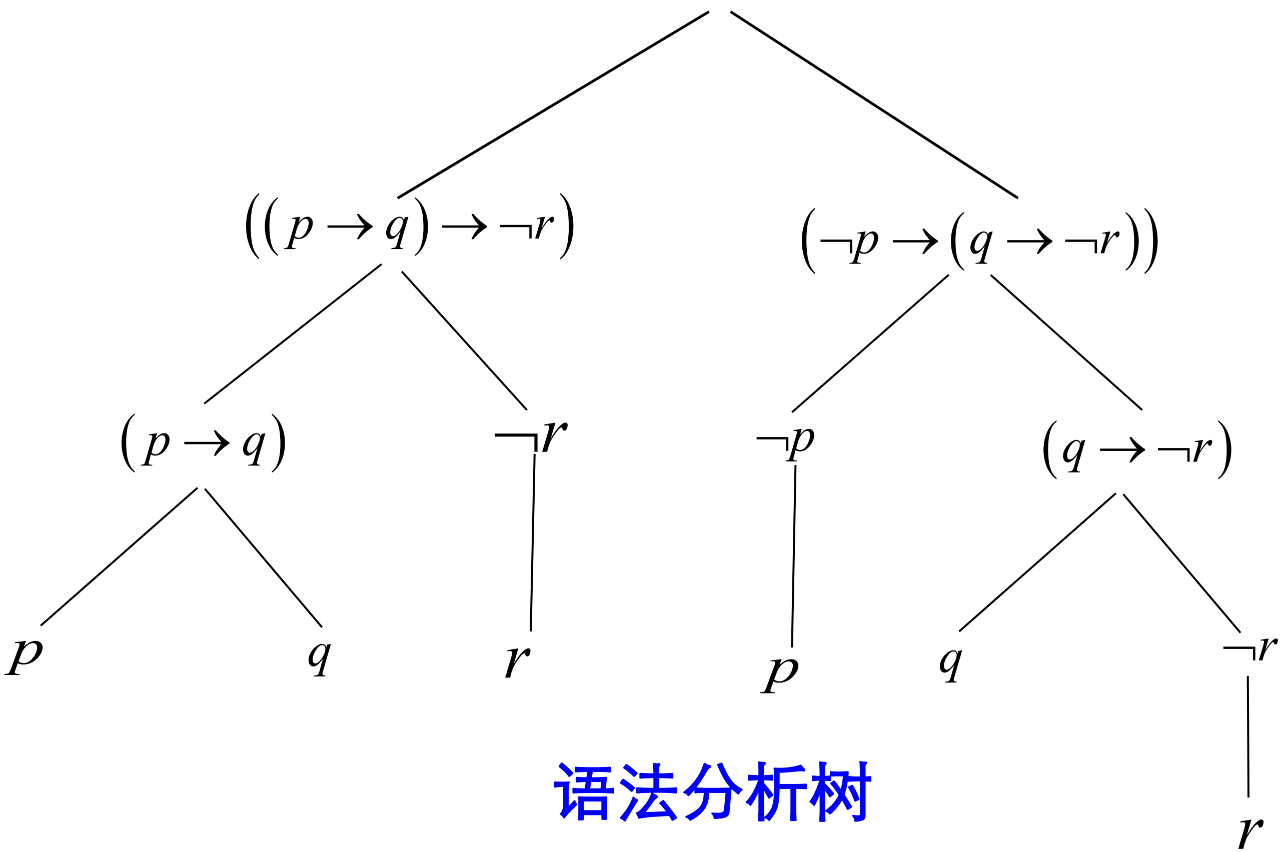
例1：$\rightarrow p$， $p($，$(p\wedge\neg q)\vee r$，是不是PC中的公式。

- $\rightarrow p$ 和$p($是$\sum^*$的子集，但是不满足PC的公式的定义。
- $(p\wedge\neg q)\vee r$ 不是$\sum^*$的子集，也不是PC中的公式。

语言部分

例2： 字符串l的长度是？字符串l是公式吗？

$$l = ((p \to q) \to \neg r) \to (\neg p \to (q \to \neg r)) \in \Sigma *$$



语法分析树

$p, q, r, \neg r, (p \to q),$
$((p \to q) \to \neg r),$
$\neg p, (q \to \neg r),$
$(\neg p \to (q \to \neg r)),$
$((p \to q) \to \neg r),$
$\to (\neg p \to (q \to \neg r)).$

字符串L的形成过程

PC系统中的公理

公理集合：

（1） A_1: $A \to (B \to A)$

（2） A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A, B, C代表PC中的公式。三个公理实际上表示了三个公理模板

例：$\boldsymbol{A_1}$: $\boldsymbol{A \to (B \to A)}$

- 当$A = p, B = q$， $p \to (q \to p)$
- 当$A = p \to q, B = q$， $(p \to q) \to (q \to (p \to q))$
- 当$A = A, B = A \to A$， $A \to ((A \to A) \to A)$

PC系统中的公理

例： $\boldsymbol{A_2}$: $(\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})) \to ((\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}))$

- 当$A = p$、 $B = q$、$C = r$

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

- 当$A = p, B = p \to q, C = p \to r$

$$(p \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((p \to (p \to q)) \to (p \to (p \to r)))$$

例： $\boldsymbol{A_3}$: $(\neg\boldsymbol{A} \to \neg\boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A})$

- 当$A = p \to q, B = p \to r$

$$(\neg(p \to q) \to \neg(p \to r)) \to ((p \to r) \to (p \to q))$$

PC系统中的公理

三个公理的含义：

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

含义：蕴含式后件为真，那么蕴含式为真一定成立

$$A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

含义：由$A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$A \rightarrow B$，$A$三个条件成立，一定可以推出$C$成立

$$A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

含义：逆否命题成立，一定可以推出原命题成立

推理规则

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \rightarrow B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为：

$$r_{mp}: \frac{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}}$$

如果A和$A \rightarrow B$为真，那么必有B为真。推理规则用于从已知的公理和已知定理，推导新的结论。

证明

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \ (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\ \cdots, m\}$，$A_i$ 是PC中的公理，或是$A_j (j < i)$，或是$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$ 中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

定理

定理： 称序列A是PC中的定理，记为$\vdash_{PC} A$，如果公式A在PC中有一个证明。

（1）符号$\vdash$表示其后的公式在PC中是可证明的。

（2）公理一定是定理；

（3）证明序列$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的A_1一定是公理（**或已知定理**）。

（4）证明序列$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的任何一个都是定理，即$\vdash_{PC} A_i, i = 1,2,\cdots,m$

演绎

演绎： 设Γ为PC的公式集合，称以下公式序列为公式A的一个以Γ 为前提在PC 中的演绎：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \ (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，A_i或者是 Γ 的成员，或者是PC中的公理，$A_j(j < i)$，或者$A_j, A_k(j,k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A 。

演绎结果

演绎结果：称A是前提Γ 在PC 中的演绎结果，记为$\Gamma \vdash_{PC} A$，如果公式A 有一个以Γ 为前提在PC 中的演绎。

- 如果$\Gamma = \{B\}$，则用$B \vdash_{PC} A$表示$\Gamma \vdash_{PC} A$；（去掉了{}）
- 如果$B \vdash_{PC} A$并且$A \vdash_{PC} B$，则记为$A \vdash\dashv B$（A、B相互演绎）。

若$\Gamma \vdash_{PC} A$，则有$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$:

（1）若$\Gamma = \phi$（空集），$\Gamma \vdash_{PC} A$即$\phi \vdash_{PC} A$，那么$\vdash_{PC} A$，即**演绎**退化为**证明**。

（2）若$A \in \Gamma$，则必有$\Gamma \vdash_{PC} A$（此时的序列是A）

（3）$\{A\} \vdash_{PC} A$，$\{A, B, C\} \vdash_{PC} A$，$\{A, B, C\} \vdash_{PC} B$，$\{A, B, C\} \vdash_{PC} C$