讨论：

1 加速度为恒矢量时质点的运动方程

已知一质点作平面运动，其加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量, 有

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t\vec{a}\mathrm{d}t$$

积分可得 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$

写成分量式

$$v_x=v_{0x}+a_xt \qquad v_y=v_{0y}+a_yt$$

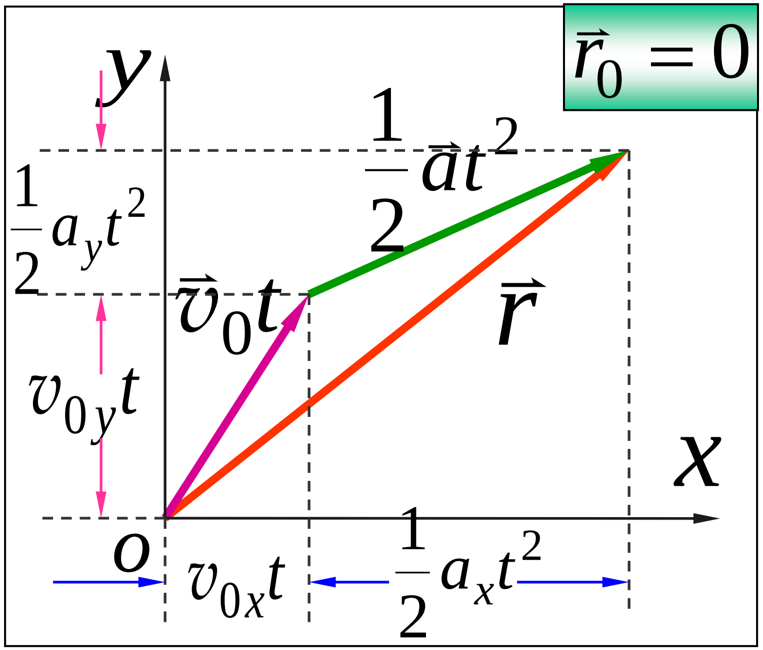
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t \qquad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\mathrm{d}t$$

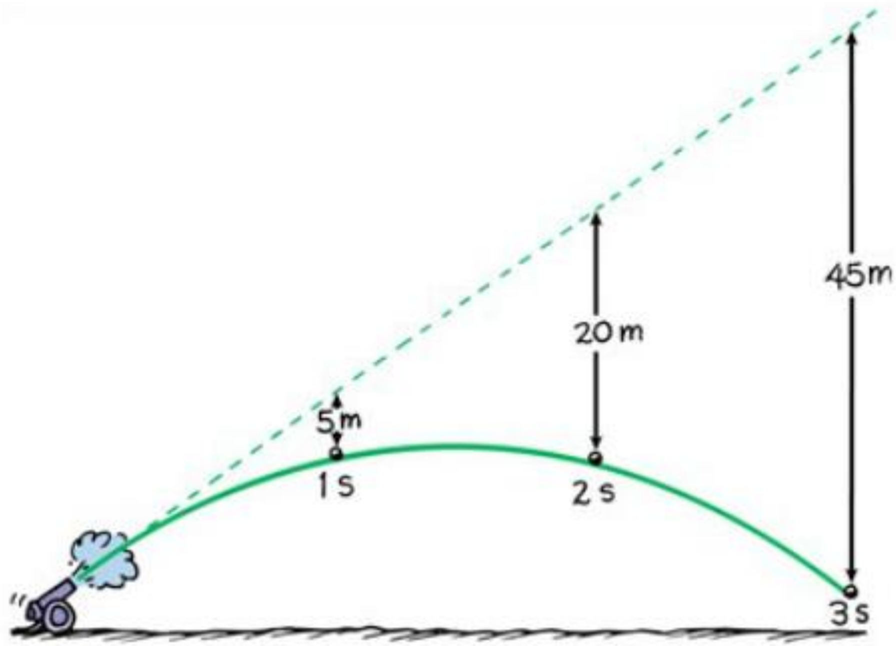
积分可得 $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

写成分量式为

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$



2 斜抛运动——运动的叠加

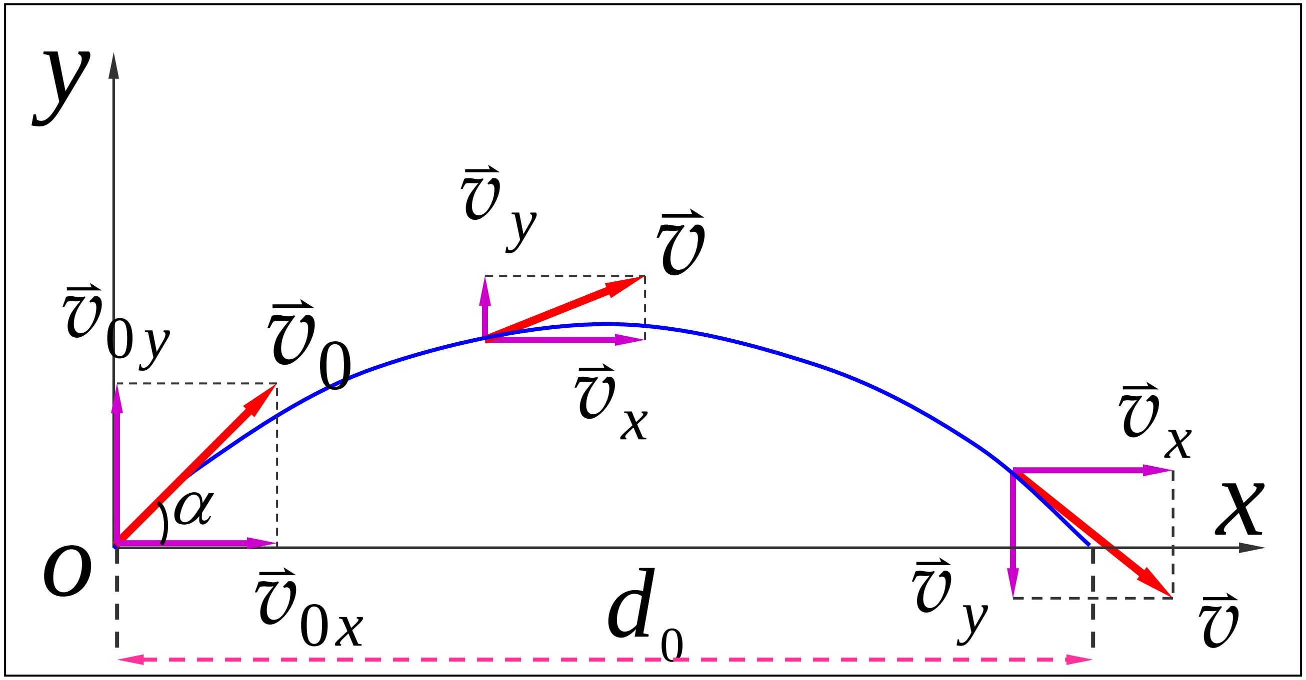


世界现役射程最远的坦克炮：炮口初速大约是1750米/秒，最大射程约5000米。

求斜抛运动的轨迹方程和最大射程

已知 $a_x = 0 \quad a_y = -g，\quad t = 0$ 时 $\quad x_0 = y_0 = 0$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$



$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

消去方程中的参数 t 得轨迹： $y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$

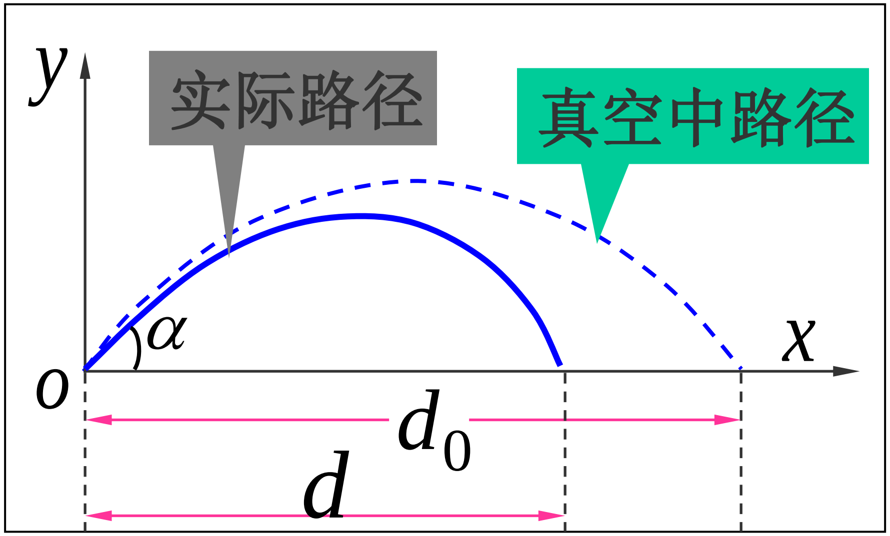
求最大射程

$$d_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}d_0}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi/4$$

最大射程 $d_{0\mathrm{m}} = v_0^2 / g$

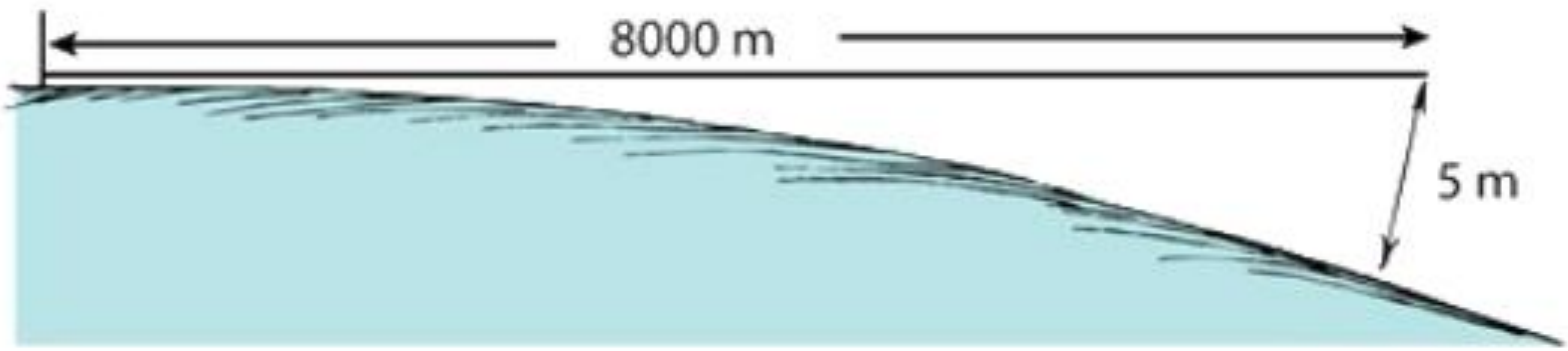


由于空气阻力，实际射程小于最大射程。

抛物运动

有没有可能，当物体的速度足够大时，物体可以不落地呢？

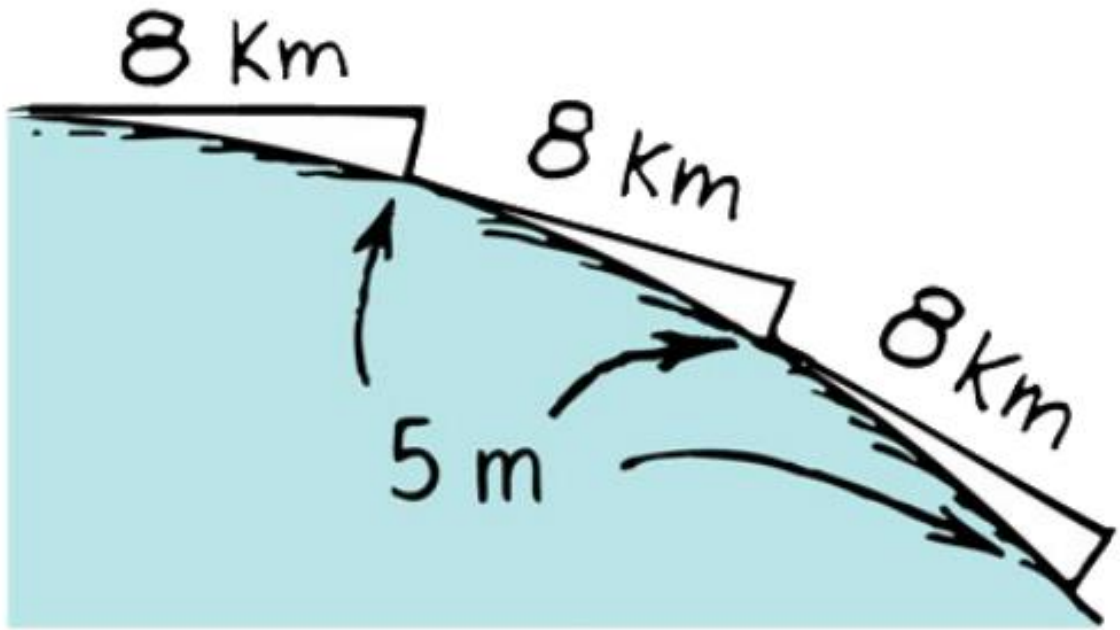
地球的曲率: 地球是一个半径约6000 *km*的球体，因此在地球表面，每平移8000米，垂直距离相差近5米。



因此，如果物体的水平速度为 8000 m/s，其“坠落”将与地球的曲率相匹配。

物体会不断“下落”，但不会落到地面。

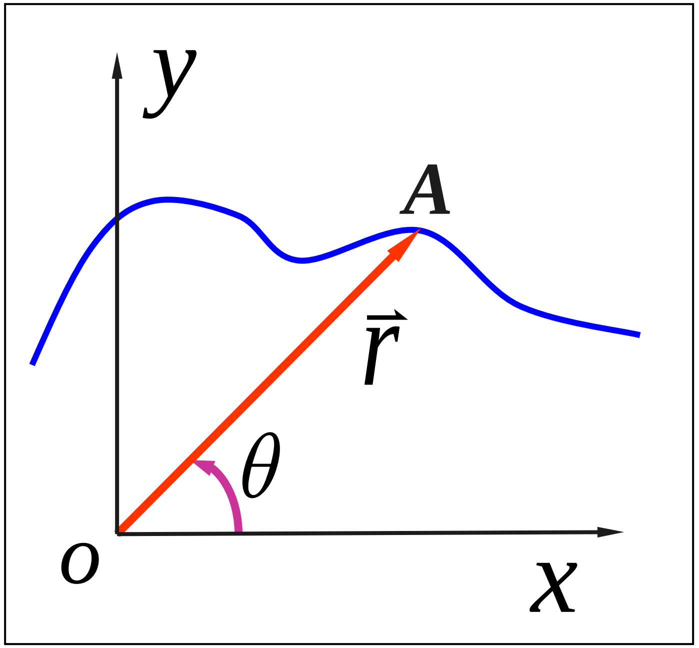
这种不断的“下落”，最终让物体的运动轨迹变为一个圆形。



§ 2 圆周运动

一、平面极坐标

设一质点在 Oxy 平面内运动，某时刻它位于点 A。矢径 $\vec{r}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ。于是质点在点 A 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定。



以 (r,θ) 为坐标的参考系为平面极坐标系。

它与直角坐标系之间的变换关系为 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

二、圆周运动的角速度和角加速度

1 角位移 微小角位移矢量

角坐标（角位置）$\theta(t)$

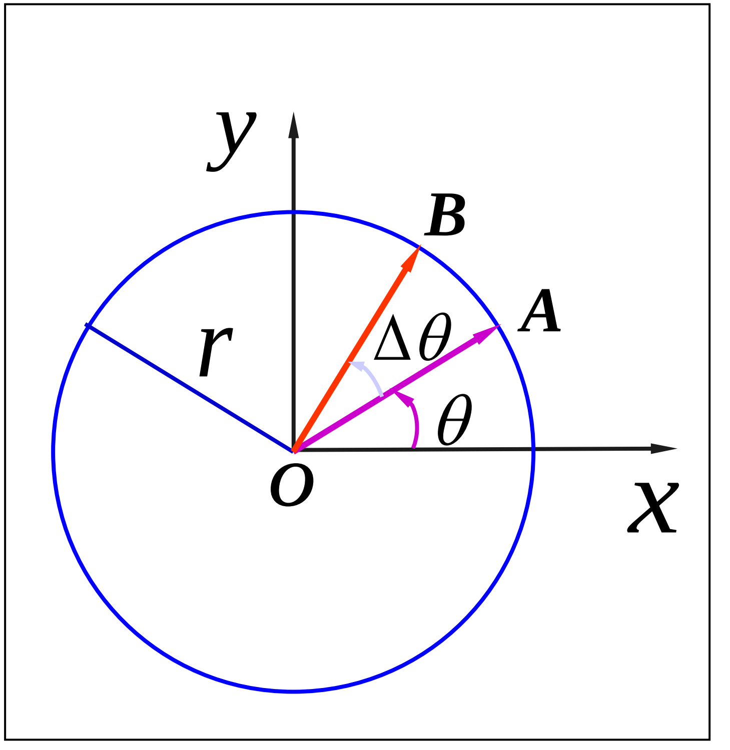
经过 Δt 时间角位置变化的大小为 $\Delta\theta = \theta(t_B) - \theta(t_A)$

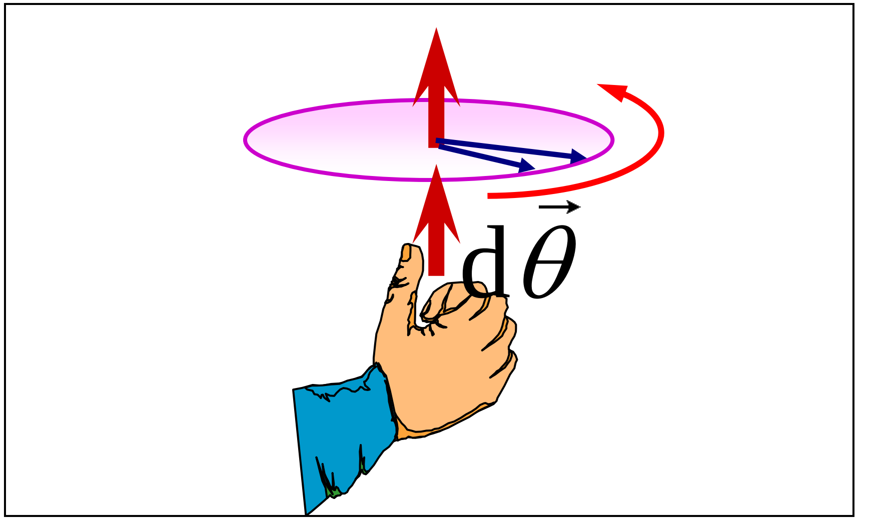
当 $\Delta t \to 0$时，角位置变化的大小为 $\Delta\theta \to d\theta$

$d\theta$ 为微小角位移矢量 $d\vec{\theta}$ 的大小。

$d\vec{\theta}$ 的方向为角度增加的右手螺旋前进方向。

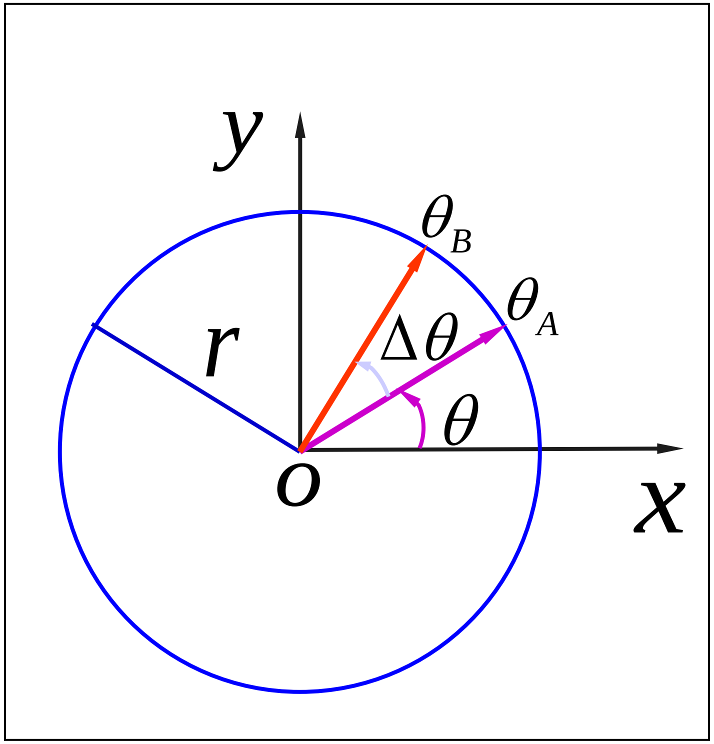
单位：弧度（rad）





2. 圆周运动的角速度

平均角速度 $\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta_B-\theta_A}{\Delta t}$

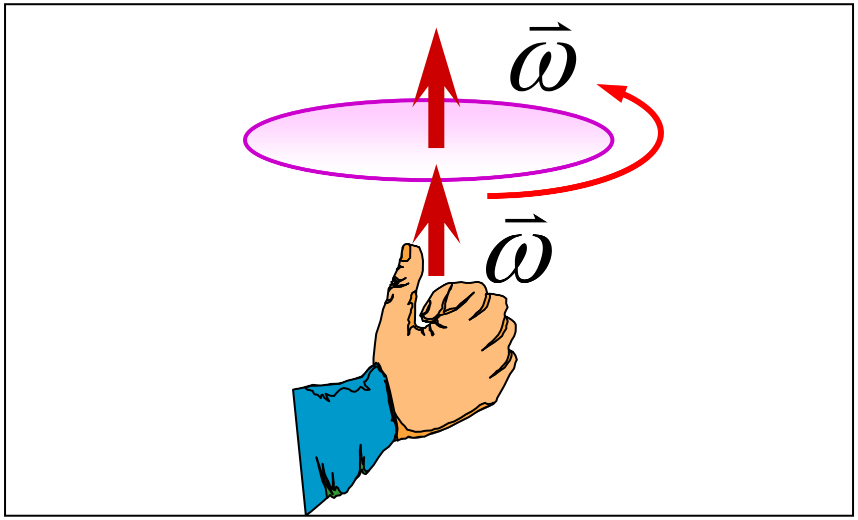


瞬时角速度大小（角速度）

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与微小角位移矢量 $d\vec{\theta}$ 同方向。

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}$$



单位：弧度/秒（rad·s^{-1}）

3 圆周运动的角加速度

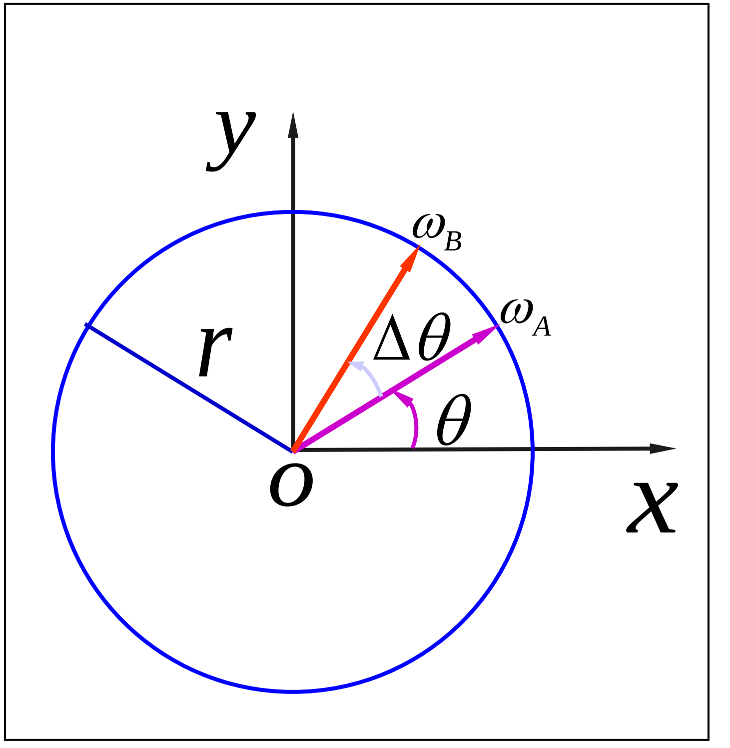
平均角加速度

$$\bar{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_B - \omega_A}{\Delta t}$$

瞬时角加速度大小（角加速度）

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

单位：弧度/秒^2（$\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$）



角加速度矢量 $\vec{\beta}$ 的方向与角速度矢量的变化有关：当角速度增加时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 同方向；当角速度减小时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 反方向。

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

4 圆周运动的角量和线量的关系

$$ds = AB = rd\theta$$

$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

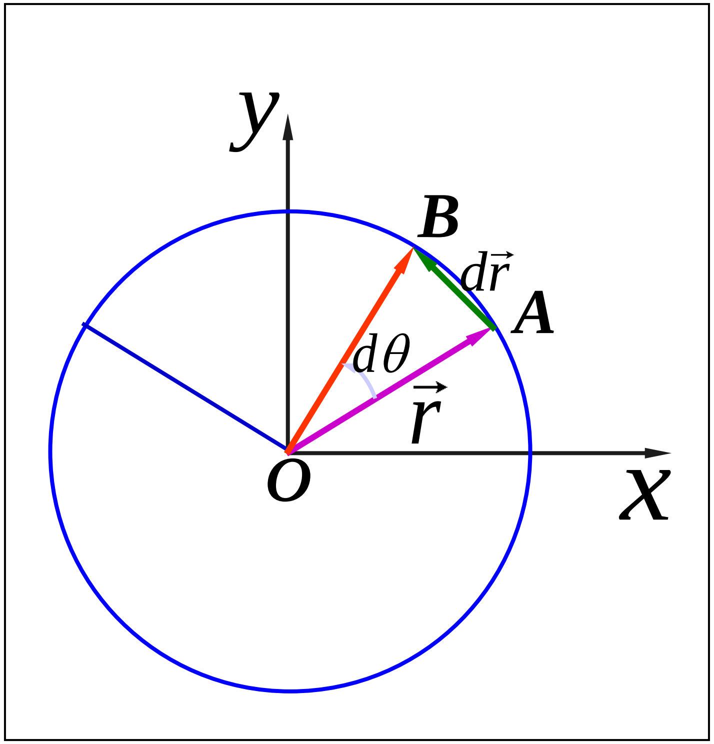
上式两侧除以 d*t* 有：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\because \quad \vec{\omega} \perp \vec{r}$$

$$\therefore \quad v = r\omega = v_{\tau}$$

v_{τ} 称为切向速度的大小。



三、圆周运动的加速度

1 匀速率圆周运动的加速度

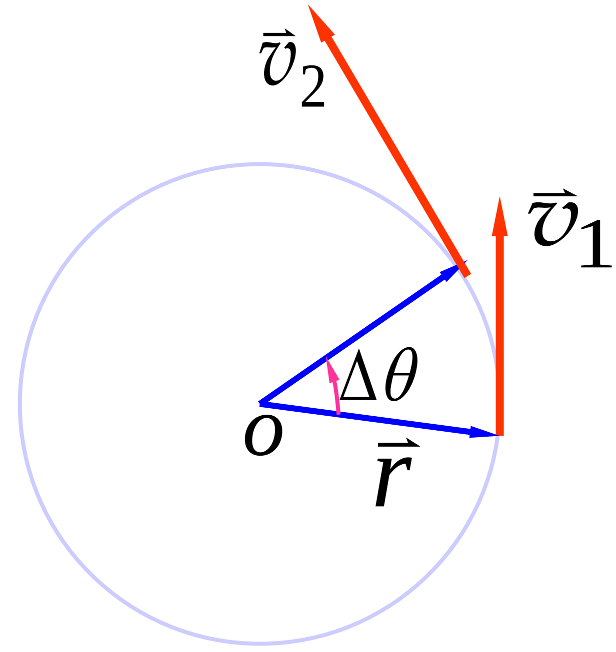
质点作匀速率圆周运动时，$\omega = const.$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{v} \quad = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right) \quad = -\omega^2\,\vec{r}$$



$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2\,\vec{r} = r\omega^2\left(-\vec{r}_0\right) = \frac{v^2}{r}\left(-\vec{r}_0\right)$$ ——称为法向加速度。

$\vec{r}_0 = \hat{r}$ 称为径向单位方向矢量 。

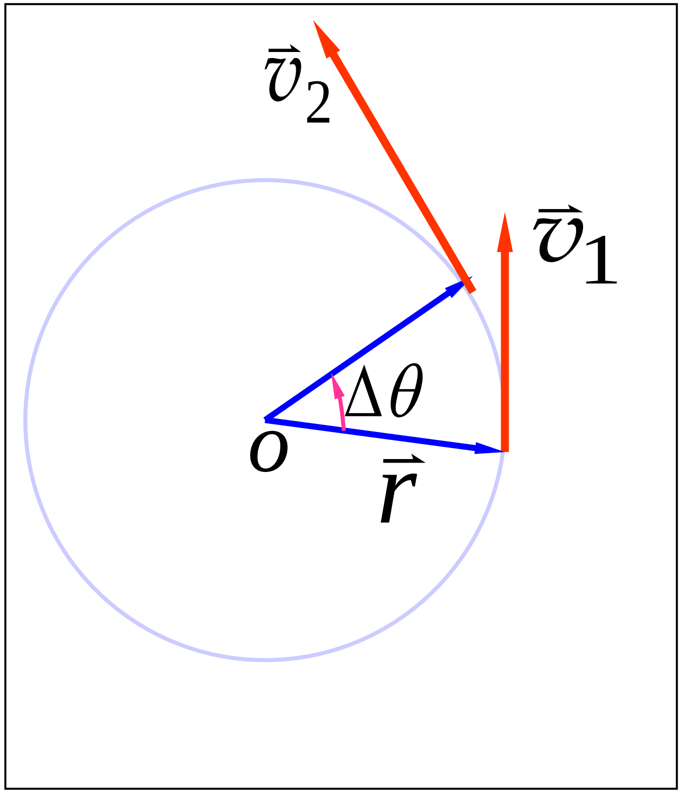
2 变速率圆周运动的加速度

质点作变速率圆周运动时，$\omega \neq const.$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_n=-\omega^2\,\vec{r}=r\omega^2\left(-\vec{r}_0\right)=\frac{v^2}{r}\left(-\vec{r}_0\right)=v\,\omega\left(-\vec{r}_0\right)$$

——法向加速度。



$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}=\vec{\beta}\times\vec{r}=r\beta\vec{\tau}_0=\vec{a}_\tau$$

$\vec{\tau}_0=\hat{\tau}$ 称为切向单位方向矢量 。

$$\vec{a}_\tau=r\beta\vec{\tau}_0=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0$$

——切向加速度。

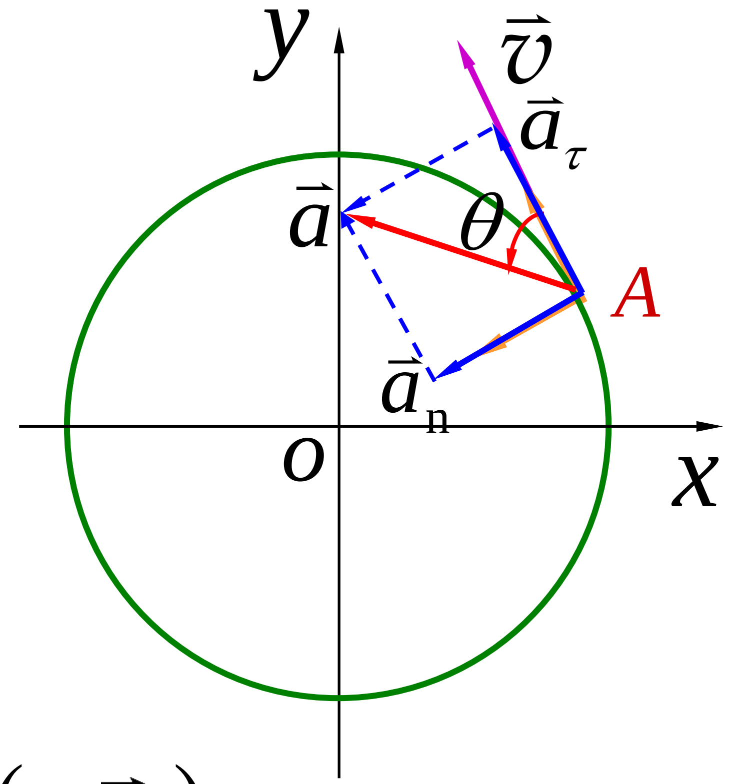
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0+\frac{v^2}{r}\left(-\vec{r}_0\right)=r\beta\vec{\tau}_0+r\omega^2\left(-\vec{r}_0\right)$$

切向加速度（速度大小变化）

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\beta$$

法向加速度（速度方向变化）

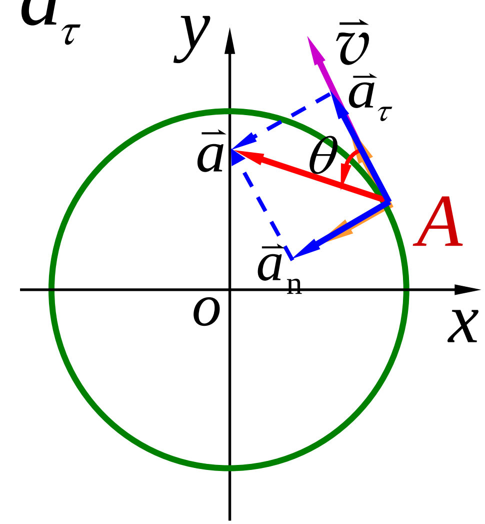
$$a_n=v\omega=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$$



圆周运动加速度 $\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}_0+a_n\left(-\vec{r}_0\right)$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}_0 + a_n(-\vec{r}_0) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_\tau}$$

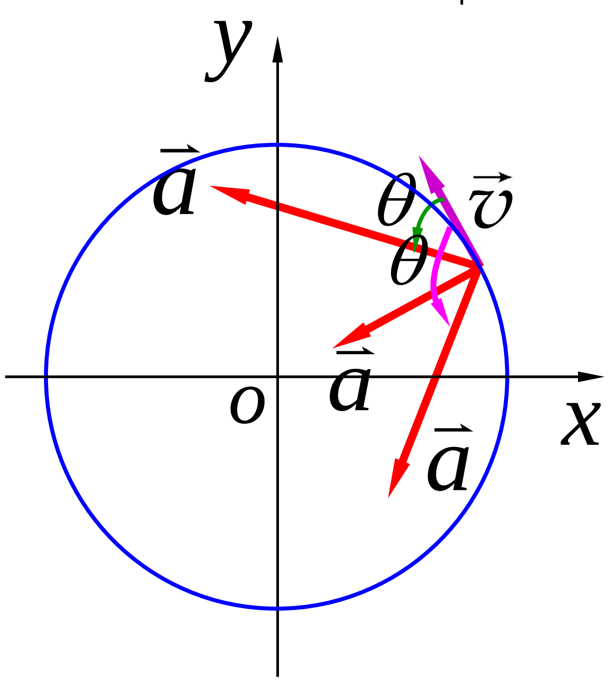


$$\because a_n > 0 \ \therefore 0 < \theta < \pi$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

$$a_\tau \begin{cases} >0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ v\,\text{增大} \\ =0,\ \theta=\frac{\pi}{2},\ v\equiv\text{常量} \\ <0,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi,\ v\,\text{减小} \end{cases}$$



说明：

1. 匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量 。

$$a_\tau = 0 \qquad a = a_{\mathrm{n}} = r\omega^2 = v^2 / r$$

2. 匀变速率圆周运动

$$\beta = const.$$

如 $t=0$ 时， $\theta=\theta_0, \omega=\omega_0$

与匀变速率直线运动类比

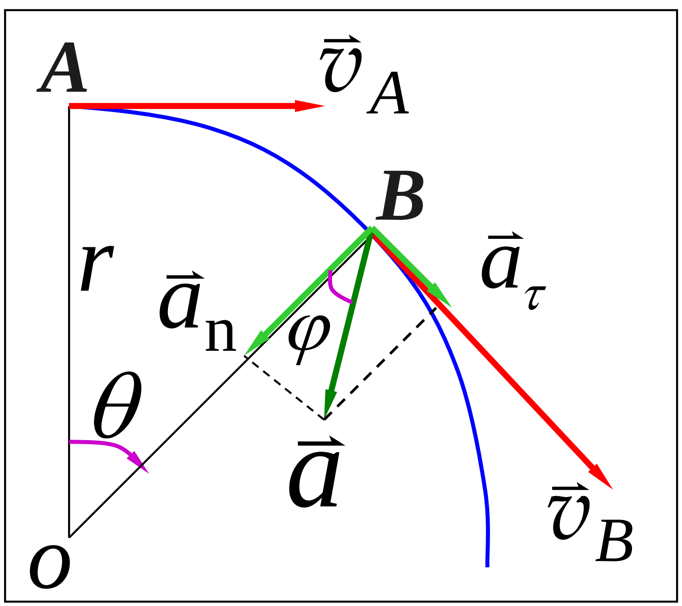
$$\begin{cases} \omega=\omega_0+\beta t \\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0) \end{cases}$$

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

例 如图一超音速歼击机在高空 ***A*** 时的水平速率为 1940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 ***B***，其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\widehat{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从***A*** 到***B*** 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：**(1)** 飞机在点***B*** 的加速度；**(2)**飞机由点***A*** 到点***B*** 所经历的路程 。



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_τ 和 β 为常量。

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t$

已知： $v_A = 1940\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ $v_B = 2192\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$

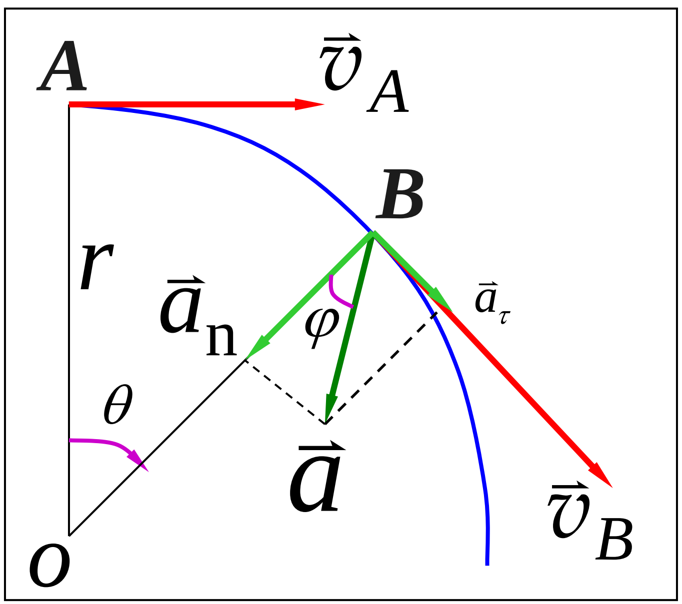
$t = 3\mathrm{s}$ $\widehat{AB} = 3.5\mathrm{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t \qquad a_\tau = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

在点 **B** 的法向加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

在点 **B** 的加速度

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} = 109\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$



$\vec{a}$ 与法向之间夹角 φ 为

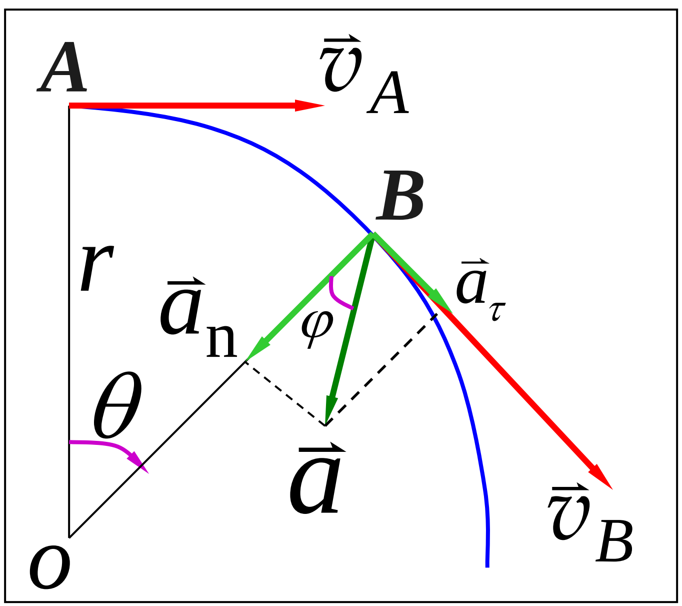
$$\varphi = \arctan\frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = 12.4^\circ$$

已知：$v_A = 1940\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$　　$v_B = 2192\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\text{s}$　　$\overset{\frown}{AB} = 3.5\text{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\beta t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\text{m}$$

§3 相对运动

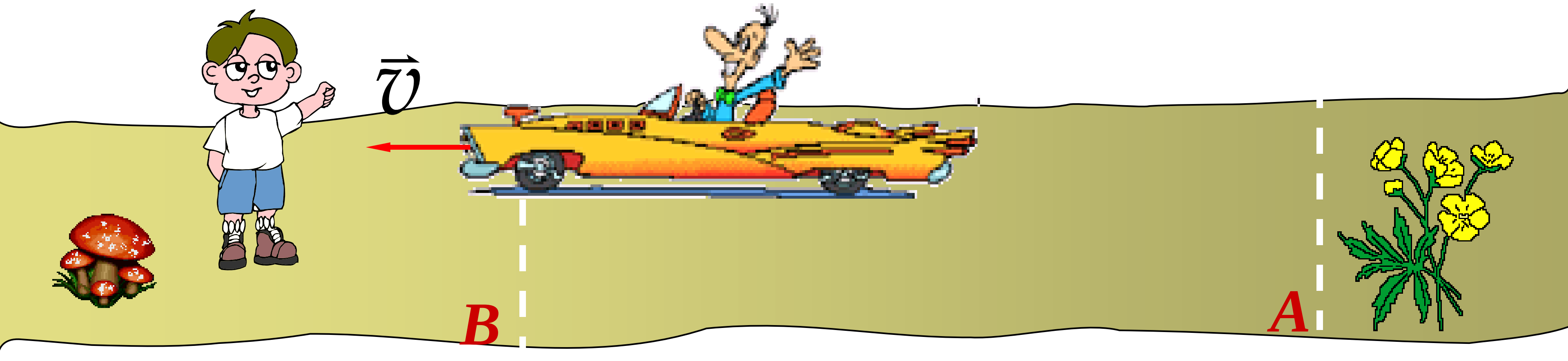
一、运动的相对性

同一物体的运动，由于所选参考系的不同，而有不同的描述，这一事实称为**运动描述的相对性**。

同一运动在不同参考系中的运动学方程也不相同。

二、相对与绝对

小车以较低的速度 $\vec{v}$ 沿水平轨道先后通过点 A 和点 B。 地面上人测得车通过 A、B 两点间的距离和时间与车上的人测量结果相同 。



在两个相对作直线运动的参考系中， 时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础 。

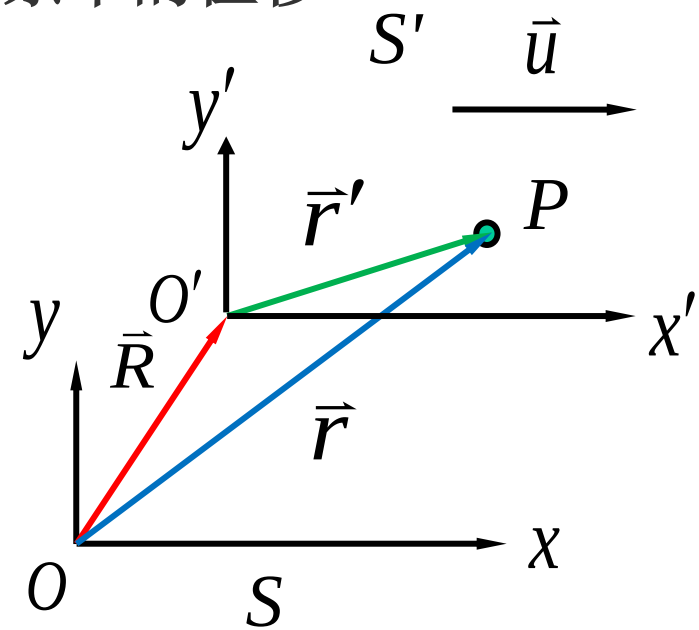
而位移、速度和加速度是相对的，与参考系的选择有关。

三、伽利略变换

➢ 伽利略坐标变换

质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

S 系	$(Oxyz)$
S'系	$(O'x'y'z')$



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{R}$$

绝对位移　　相对位移　　牵连位移

$$\Delta\vec{r}_{\text{人对地}} = \Delta\vec{r}'_{\text{人对车}} + \Delta\vec{R}_{\text{车对地}}$$

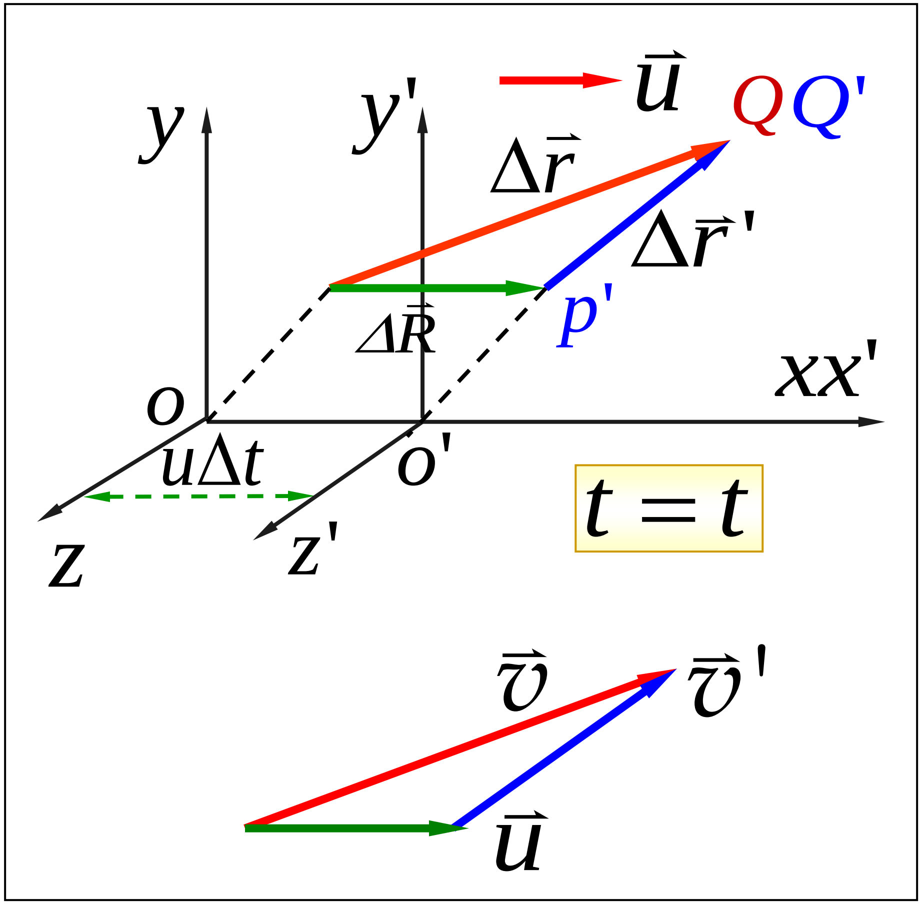
伽利略速度变换

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{R}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + u\Delta t$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$



绝对速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

相对速度 $\vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$

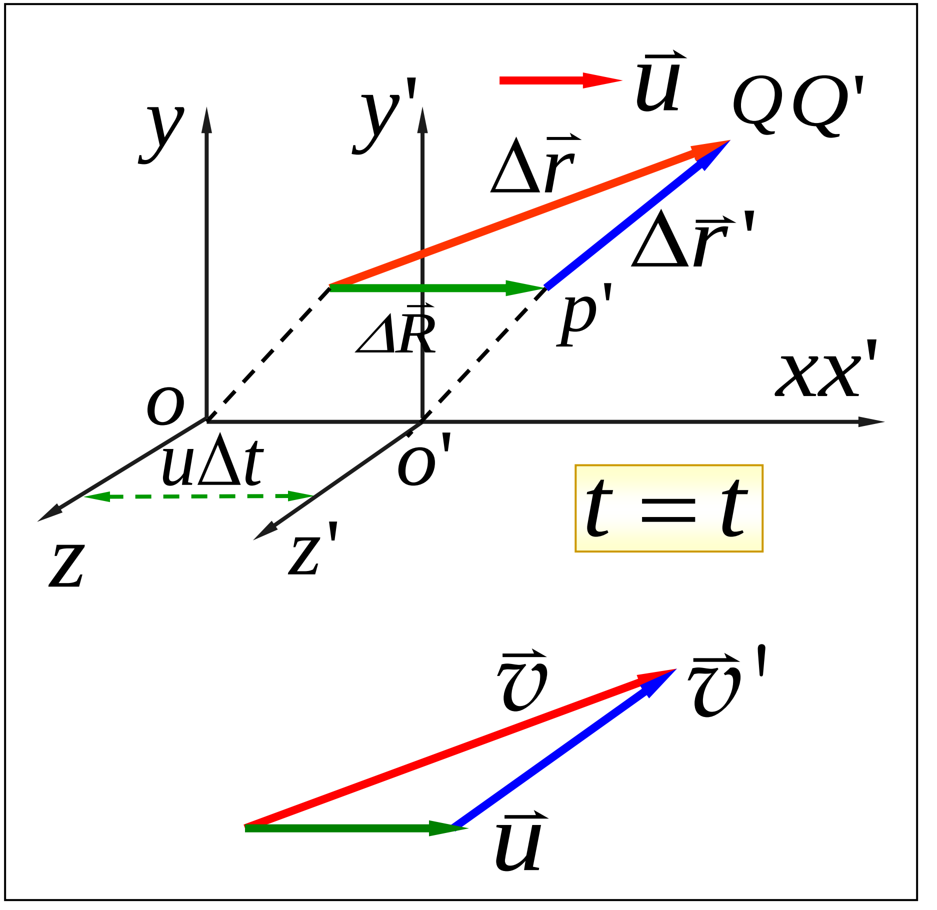
$$\vec{v}_{人对地} = \vec{v}'_{人对车} + \vec{u}_{车对地}$$

牵连速度 $\vec{u}$

绝对速度

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$ 牵连速度

相对速度



注意

当 $\vec{u}$ 接近光速时，

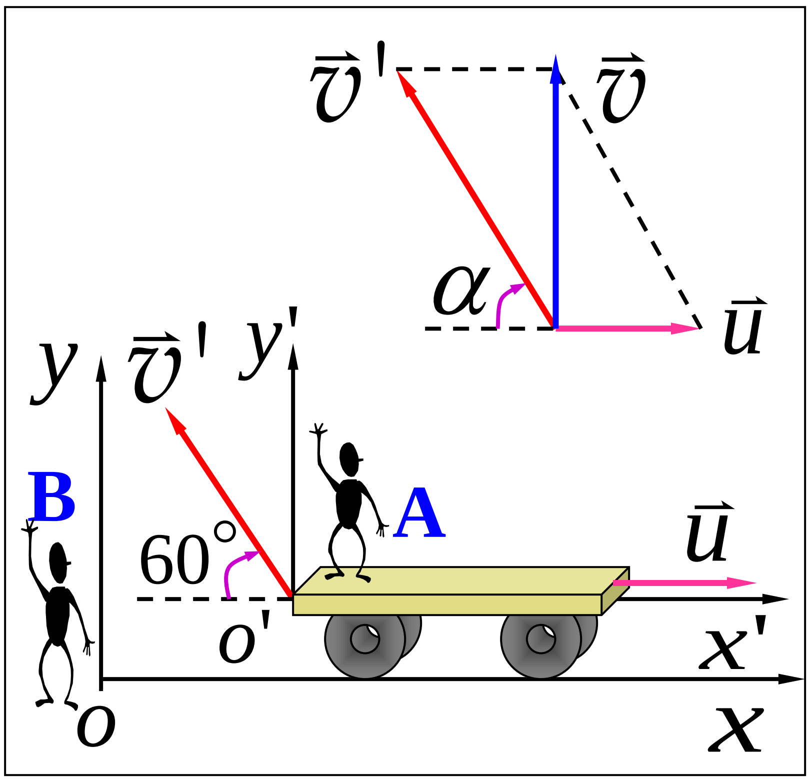
伽利略速度变换不成立！

加速度关系 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$ 若 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$，则 $\vec{a} = \vec{a}\,'$。

（如：两参考系相对做匀速直线运动时）

例 如图示，一实验者 A 在以 10 m/s 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台射弹器，此射弹器以与车行进的水平方向呈 60° 度角斜向上射出一弹丸。 此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动，求弹丸上升的高度 。



解： 地面参考系为 S 系

平板车参考系为 S'系

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

速度变换

$$v_x = u + v'_x$$

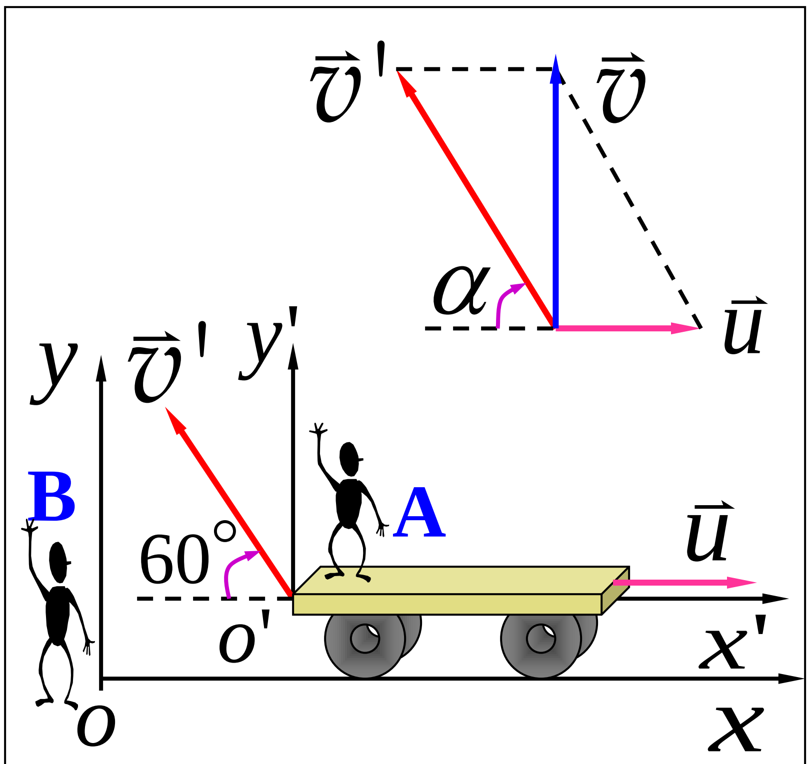
$$v_y = v'_y$$

$$\because v_x = 0 \qquad \therefore v'_x = -u = -10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x \tan\alpha| \qquad |v_y| = 17.3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

弹丸上升高度

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\,\mathrm{m}$$



在质点运动学讲课中曾有两式

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad 与 \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

在数学上都是矢量合成，在物理上有何差别？

【答】

（1）前者为运动的正交分解，各量对同一参考系；
后者是相对运动关系，各量对不同参考系。

（2）前者与速率大小无关，为普遍关系；
后者是伽利略变换（绝对时空），
以后可知它只适用于低速情况。