数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年11月

推理部分

公理集合:

（1） A_1: $A \to (B \to A)$

（2） A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \to B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A, A \to B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m\ (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\ \cdots, m\}$，$A_i$ 是PC中的公理，或是$A_j(j < i)$，或是$A_j, A_k(j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$ 中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \rightarrow A$

定理2：如果$\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$，那么$\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ （前件互换定理）

定理3：$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 定理（2）的另一种形式

定理4：$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$（加前件定理）

定理5：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$（加后件定理）

定理6：$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理7：$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

定理8：如果$\vdash (A \rightarrow B)$，$\vdash (B \rightarrow C)$，那么$\vdash (A \rightarrow C)$（三段论定理）

定理9. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ （反证法）

定理10. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ （反证法）

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

定理1

定理 1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$

证明思路：要证$A \rightarrow A$是PC中的一个定理，即证$A \rightarrow A$在PC中有一个证明，即有一个序列A_1，A_2，$\cdots, A_m (= A \rightarrow A)$。因此只要找到这样的一个序列即可。

证明:

(1) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理1

(2) $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ 公理2

(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ （1）和（2）用rmp分离规则

(4) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理1

(5) $A \rightarrow A$ （4）和（3）用rmp分离规则

定理2

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）

证明思路：由于$\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么必有一个证明序列

（1） A_1

（2） A_2

⋮

（m） $A_m = A \to (B \to C)$

要证$B \to (A \to C)$是PC中的一个定理，只需在此证明序列的基础上，继续推导，找到一个证明序列A_1，A_2，$\cdots, A_m\ A_{m+1}, \cdots, A_n\ (= B \to (A \to C)$)即可。

证明：由$\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么有一个序列

（1） A_1

（2） A_2

⋮

（m） $A_m = A \to (B \to C)$

定理2

（m）　$A_m = A \to (B \to C)$

（m+1）$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（m+2）$(A \to B) \to (A \to C)$ （m）和（m+1） rmp分离规则

（m+3）$((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ 公理1

（m+4）$B \to ((A \to B) \to (A \to C))$(m+2）和（m+3） rmp分离规则

（m+5）$(B \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to ((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C)))$公理2

（m+6）$(B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C))$ （m+4）和（m+5） rmp分离规则

（m+7）$B \to (A \to B)$ 公理1

（m+8）$B \to (A \to C)$ （m+7）和（m+6） rmp分离规则

这个定理叫前件互换定理，很重要！！！

证明序列中的A_i 也可以是已知定理

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m\ (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2, \cdots, m\}$，A_i 是PC中的公理，或是$A_j (j < i)$，或是$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$ 中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

证明序列中的A_i也可以是已知定理

因为$\vdash_{PC} A$，那么有一个公式序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_m (= A)$$

如果A_i是PC中的定理，那么A_i同样有一个公式序列：

$$B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots, B_n (= A_i)$$

那么

$$A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots B_i, \cdots, B_n (= A_i), \cdots, A_m (= A)$$

因此，**证明序列中的A_i是PC中的已知定理也可以。**

定理2证明的简化形式

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）

（1） $A_m = A \to (B \to C)$ 已知定理

（2） $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（3） $(A \to B) \to (A \to C)$ （1）和（2） rmp分离规则

（4） $((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ 公理1

（5） $B \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （3）和（4） rmp分离规则

（6） $(B \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to ((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C)))$ 公理2

（7） $(B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C))$ （5）和（6） rmp分离规则

（8） $B \to (A \to B)$ 公理1

（9） $B \to (A \to C)$ （8）和（7） rmp分离规则

定理3

定理3: $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$（定理（2）的另一种形式）

证明:

（1） $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（2） $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ 对（1）式用前件互换定理2

（3） $((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$

$\to (B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$ 公理1

（4） $B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$ (2）和（3）用rmp分离规则

（5） $(B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$

$\to ((B \to (A \to B)) \to (B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$ 公理2

（6） $(B \to (A \to B)) \to (B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$ （4）和（5）用rmp分离规则

（7） $B \to (A \to B)$ 公理1

（8） $B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ （7）和（6）用rmp分离规则

（9） $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 对（8）用前件互换定理2

定理4

定理4： $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （加前件定理）

证明：

（1）$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（2）$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$\to ((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$ 公理1

（3）$(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4）$((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$

$\to (((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$ 公理2

（5）$((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （3）和（4）用rmp分离规则

（6）$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ 公理1

（7）$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （6）和（5）用rmp分离规则

定理5

定理 5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （加后件定理）

证明：对定理4，利用前件互换定理2得出。

（1）$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 加前件定理4

（2）$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ 对（1）用前件互换定理2

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \to (A \to B)$

证明:

（1） $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ 公理3

（2） $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ 公理1

（3） $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$

$\to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ 公理2

（5） $((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ （3）和（4）用rmp分离规则

（6） $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ 公理1

（7） $\neg A \to (A \to B)$ （1）和（6）用rmp分离规则

定理7

定理7. $\vdash_{PC} A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

证明:

（1） $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

（2） $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 对（1）使用前件互换定理2

定理8

定理8. 如果$\vdash (A \to B)$, $\vdash (B \to C)$, 那么$\vdash (A \to C)$ （三段论定理）

思路：由$A \to B$和$B \to C$，要证$A \to C$，要想办法出现$A \to C$。

证明：

（1） $A \to B$ 已知定理

（2） $B \to C$ 已知定理

（3） $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ 加后件定理5

（4） $(B \to C) \to (A \to C)$（1）和（3）用rmp分离规则

（5） $A \to C$ （2）和（4）用rmp分离规则

定理8

定理8. 如果$\vdash (A \to B)$, $\vdash (B \to C)$, 那么$\vdash (A \to C)$ （三段论定理）

思路：要出现$A \to C$，不仅有刚才用加后件定理5，还可以用加前件定理4

证明:

（1） $A \to B$ 已知定理

（2） $B \to C$ 已知定理

（3） $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 加前件定理4

（4） $(A \to B) \to (A \to C)$ (2）和（3）用rmp分离规则

（5） $A \to C$ (1）和（4）用rmp分离规则

定理9

定理9. $\vdash_{PC} (\neg A \to A) \to A$

思路：匹配相近的公理或已知定理，作为切入点进行证明。这里我们尝试从定理6$\vdash_{PC} \neg A \to (A \to B)$出发证明。

证明：

（1）$\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ 定理6

（2）$(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$ 公理2

（3）$(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4）$(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ 公理3

（5）$(\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))$ (3）和（4）用三段论定理8

（6）$((\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))) \to$

$(((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ 公理2

（7）$((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ （5）和（6）用rmp分离规则

（8）$(\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ 定理1

（9）$(\neg A \to A) \to A$ （8）和（7）用rmp分离规则

定理10

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$

证明:

（1） $\neg\neg A \to (\neg A \to A)$ 定理6

（2） $(\neg A \to A) \to A$ 定理9

（3） $\neg\neg A \to A$ （1）和（2）用三段论定理8

定理11

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$

证明:

（1） $\neg\neg A \to A$ 定理10

（2） $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A))$ 加后件定理5

（3） $(A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to$

$(((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A))$ 加后件定理5

（5） $((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ （3）和（4）用rmp分离规则

（6） $(\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A$ 定理9

（7） $(A \to \neg A) \to \neg A$ （5）和（6）用rmp分离规则

定理12

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$

思路:对比定理11 $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$和要证明的$\vdash A \to \neg\neg A$

证明:

（1） $(\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A$ 定理11

（2） $A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ 定理7

（3） $A \to \neg\neg A$ （2）和（1）用三段论定理8

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \rightarrow A$ √

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$，那么$\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ （前件互换定理） √

定理3：$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 定理（2）的另一种形式 √

定理4：$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$（加前件定理） √

定理5：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$（加后件定理） √

定理6：$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ √

定理7：$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ √

定理8：如果 $\vdash (A \rightarrow B)$，$\vdash (B \rightarrow C)$，那么$\vdash (A \rightarrow C)$（三段论定理） √

定理9. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ （反证法） √

定理10. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ √

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ （反证法） √

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ √