数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年11月

真值函数

- 设$D=\{0,1\}$，一个映射f： $D^n \to D$称为一个n元真值函数。
  - $\neg$是一个一元真值函数
  - $\wedge$是二元真值函数
  - $\vee$是二元真值函数
  - $\to$是二元真值函数
  - $\leftrightarrow$是二元真值函数
  - 有多少个二元真值函数?

形式语言的定义

- 字母表：字符的集合称为字母表。命题逻辑中字母表往往包含$Atom(L^p)$。
- 字符串：由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串。字符串中字符的个数称为字符串的长度。长度为0的字符串称为空串，ϵ表示。空串是任何字符的字符串，是一个特殊的字符串。若A是字母表，则用A^*表示所有字符串的集合（包含空串）。
- A^*的子集称为形式语言。

形式语言的例子

- 设字母表$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A^*$是由10个阿拉伯数字组成的所有十进位数的集合且包含空串ϵ和有限个“0”为前缀的字符串（如：00，000，0000，0001，0010等）。下面的（1）-（4）均为字母表A上的形式语言
  - $L_1 = \{0,5,10.15,20,25,30,35,40,45,\cdots\}$表示可以被5整除的所有十进制数的集合。
  - $L_2 = \{0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,0111,\cdots,1111\}$，该形式语言中的字符串是由0和1构成的所有长度为4的序列的集合，可以看成是长度为4的所有二进制数的集合。
  - $L_3 = \{1,3,5,7,9,11,13,15\cdots\}$，该形式语言表示所有奇数的集合。
  - $L_4 = \{0,1,4,9,16,25,36,49\cdots\}$，该形式语言表示所有十进制的平方的集合。

命题变项和指派（赋值）

- Definition（命题变项）：表示命题的变元称为命题变元或命题变项。命题变项的集合用$Atom(L^p)$表示。
- Definition（指派或赋值）：任何一个映射$v: Atom(L^p) \rightarrow \{0，1\}$称为命题演算的一个指派或赋值（valuation）。并且对$p \epsilon Atom(L^p)$，将$v(p)$记作p^v，自然有$p^v \in \{0，1\}$。

命题公式

- $Atom(L^p)$中的元素是命题公式。
- 如果A是命题公式，那么$\neg A$也是命题公式。
- 如果A, B是命题公式，那么$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$都是命题公式。
- 只有1，2，3确定的表达式才是命题公式。

命题公式集合表示为$Form(L^p)$

弄真与弄假

设v是一个指派（赋值），$A \in Form(L^p)$是任意一个命题公式:

- 若在v下，公式A的值为真，则称v弄真A，记作$v(A) = 1$或$A^v = 1$;
- 若在v下，公式的值为假，则称v弄假，记作$v(A) = 0$或$A^v = 0$;

命题公式的赋值

- 命题公式A的指派A^v递归的定义如下：
  - 如果A是原子公式p，则$A^v = p^v$且$p^v \in \{0,1\}$
  - 如果$A = \neg B$且$B^v \epsilon \{0,1\}$，则当$B^v = 1$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 0$时，规$A^v = 1$
  - 如果$A = B \wedge C$且$B^v, C^v \epsilon \{0,1\}$，那么当$B^v = 1$且$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；当$B^v = 0$或$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；
  - 如果$A = B \vee C$且$B^v, C^v \epsilon \{0,1\}$，那么当$B^v = 0$且$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 1$或$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；
  - 如果$A = B \rightarrow C$且$B^v, C^v \epsilon \{0,1\}$，那么当$B^v = 1$且$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 0$或$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；
  - 如果$A = B \leftrightarrow C$且$B^v, C^v \epsilon \{0,1\}$，那么当$B^v = C^v$时，规定$A^v = 1$；当$B^v \neq C^v$时，规定$A^v = 0$；

命题赋值的计算

- 设A，$B \in Form(L^p)$,把0，1看作是通常的实数，并按照通常的实数做运算，那么
  - $(\neg A)^v = 1 - A^v$
  - $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$
  - $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$
  - $(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$
  - $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$
- 赋值的计算与手工列出真值表会得到同样的结果。

公式赋值的性质

真值的确定性：对任意一个赋值v，和任意的命题公式$A \in Form(L^p)$，都有$A^v \in \{0,1\}$。

证明:

- 设v是任意一个赋值，$A \in Form(L^p)$是一个命题公式，
- 如果$A \epsilon Atom(L^p)$是原子公式，由于v是一个赋值，所以它是从集合$Atom(L^p)$到集合$\{0,1\}$的映射，故$A^v \in \{0,1\}$。
- 如果$A = \neg \mathrm{B}$,由数学归纳法知，$B^v \epsilon \{0,1\}$，从而$A^v = 1 - B^v \epsilon \{0,1\}$
- 如果 $\mathrm{A}=B \vee C$，$A = B \wedge C$，$A = B \rightarrow C$，$A = B \leftrightarrow C$ 怎么证?

命题公式的分类

- 设$A \in Form(L^p)$,则
  - 若对任意的赋值v，都有$A^v = 1$，则称A为永真式或重言式（tautology）
  - 若对任意的赋值v，都有$A^v = 0$，则称A为永假式或矛盾式（contradiction）
  - 若 存 在 赋 值 v ， 使 得 $A^v = 1$ ， 则 称 A 为 可 满 足 的 （ satisfiable）

永真式的判定

- 判定$A \to (B \to A)$为永真式。
  - 真值表方法

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- 计算方法

  证明：对任意的指派$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$,

$$\begin{aligned}(A \to (B \to A))^v &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + A^v B^v) \\ &= 1 - A^v B^v + (A^v)^2 B^v \\ &= 1 - A^v B^v + A^v B^v = 1\end{aligned}$$

- 反证法

  对任意指派$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$，若$(A \to (B \to A))^v = 0$，则推出矛盾。

永假式的判定

- 判定$\neg(A \rightarrow A)$为永假式。
  - 真值表方法

A	$A \rightarrow A$	$\neg(A \rightarrow A)$
0	1	0
1	1	0

  - 计算方法

证明：对任意的指派$v{:}\,Atom(L^p) \rightarrow \{0,1\}$,

$$
\begin{aligned}
(\neg(A \rightarrow A))^v &= 1 - (A \rightarrow A)^v \\
&= 1 - (1 - A^v + A^v \cdot A^v) \\
&= A^v - A^v A^v \\
&= 0
\end{aligned}
$$

可满足公式的判定

- 判定$(A \to \neg A) \to A$为可满足的。
  - 真值表方法

A	$\neg A$	$A \to \neg A$	$(A \to \neg A) \to A$
0	1	1	0
1	0	0	1

  - 计算方法

证明：对任意的指派$v\colon Atom(L^p) \to \{0,1\}$,欲使$((A \to \neg A) \to A)^v = 1$

只需：$1-(A \to \neg A)^v + (A \to \neg A)^v \cdot A^v = 1$

只需：$(A \to \neg A)^v\ (1 - A^v) = 0$

只需：$A^v = 1$