§5 电场强度与电势的微分关系

1. 等势面

空间**电势相等点**的集合所成曲面称为等势面。为了描述空间电势的分布，规定任意两**相邻等势面**间的**电势差相等**。

- 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力做功；

$$A_{ab}=q_0(U_a-U_b)=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

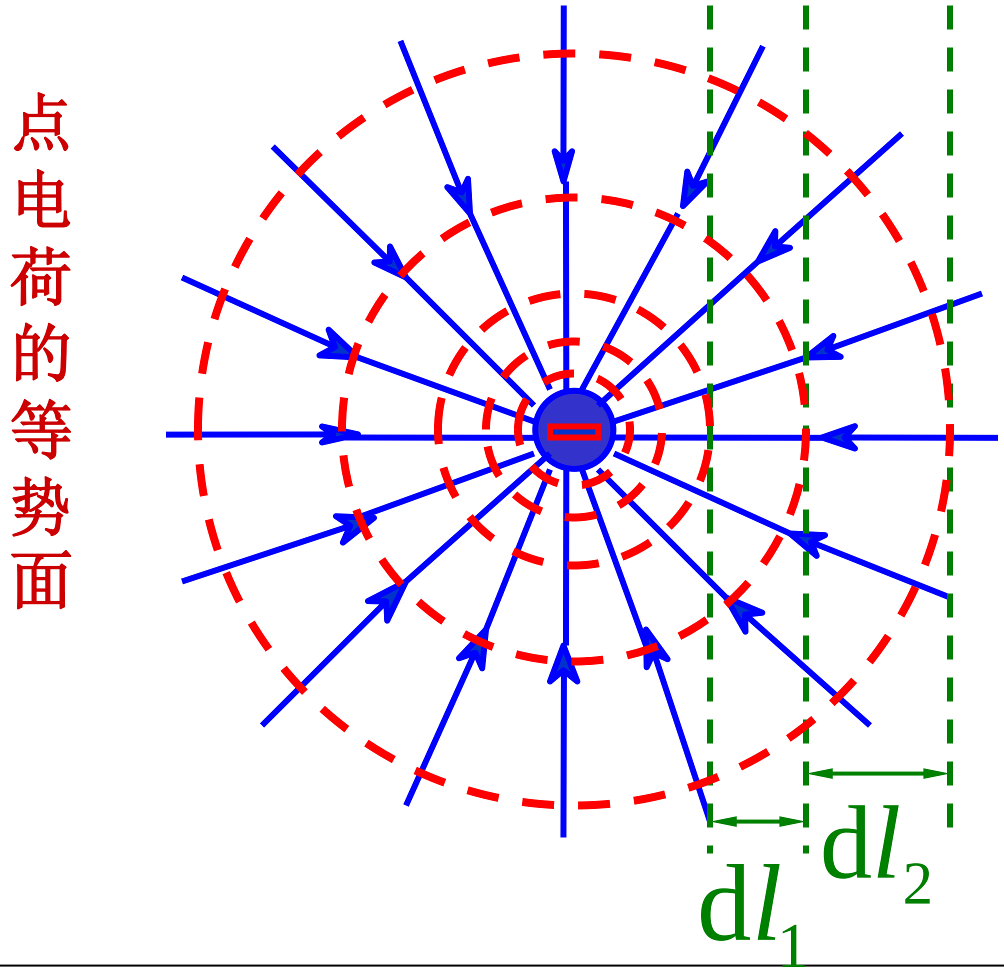
- 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面**正交**的曲线簇；

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$\because q_0\neq 0,\quad \vec{E}\neq 0,\quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

$$\therefore\quad \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{l}$$

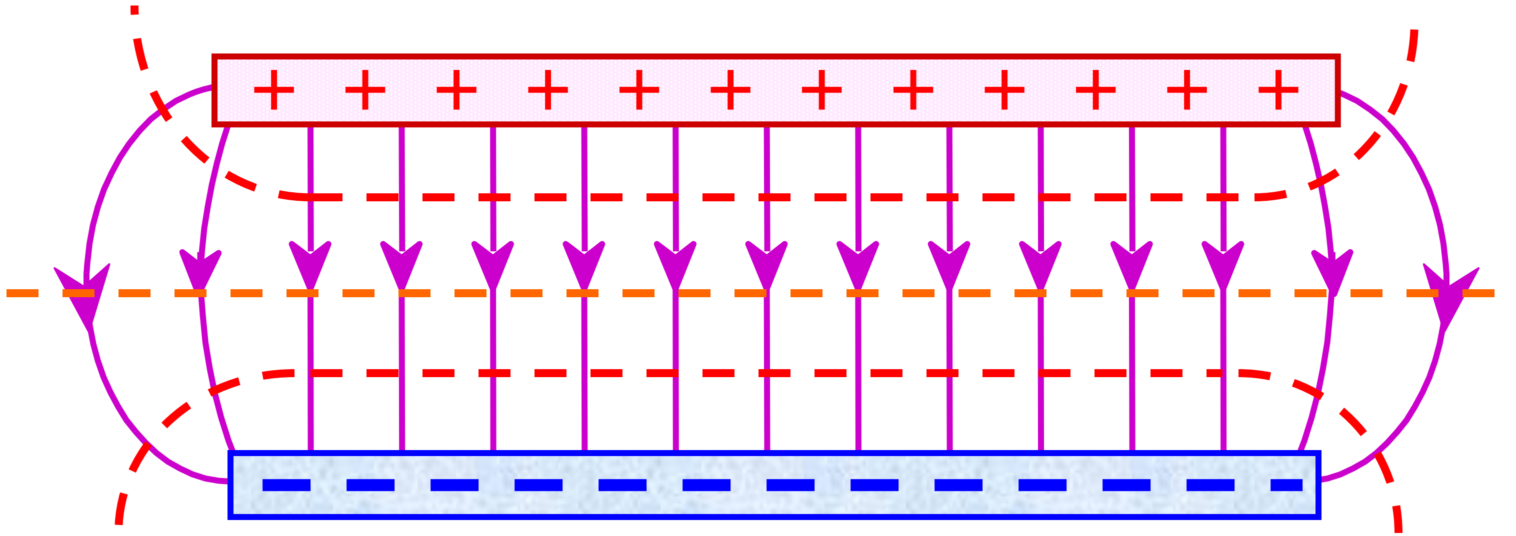
- 规定：电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小。



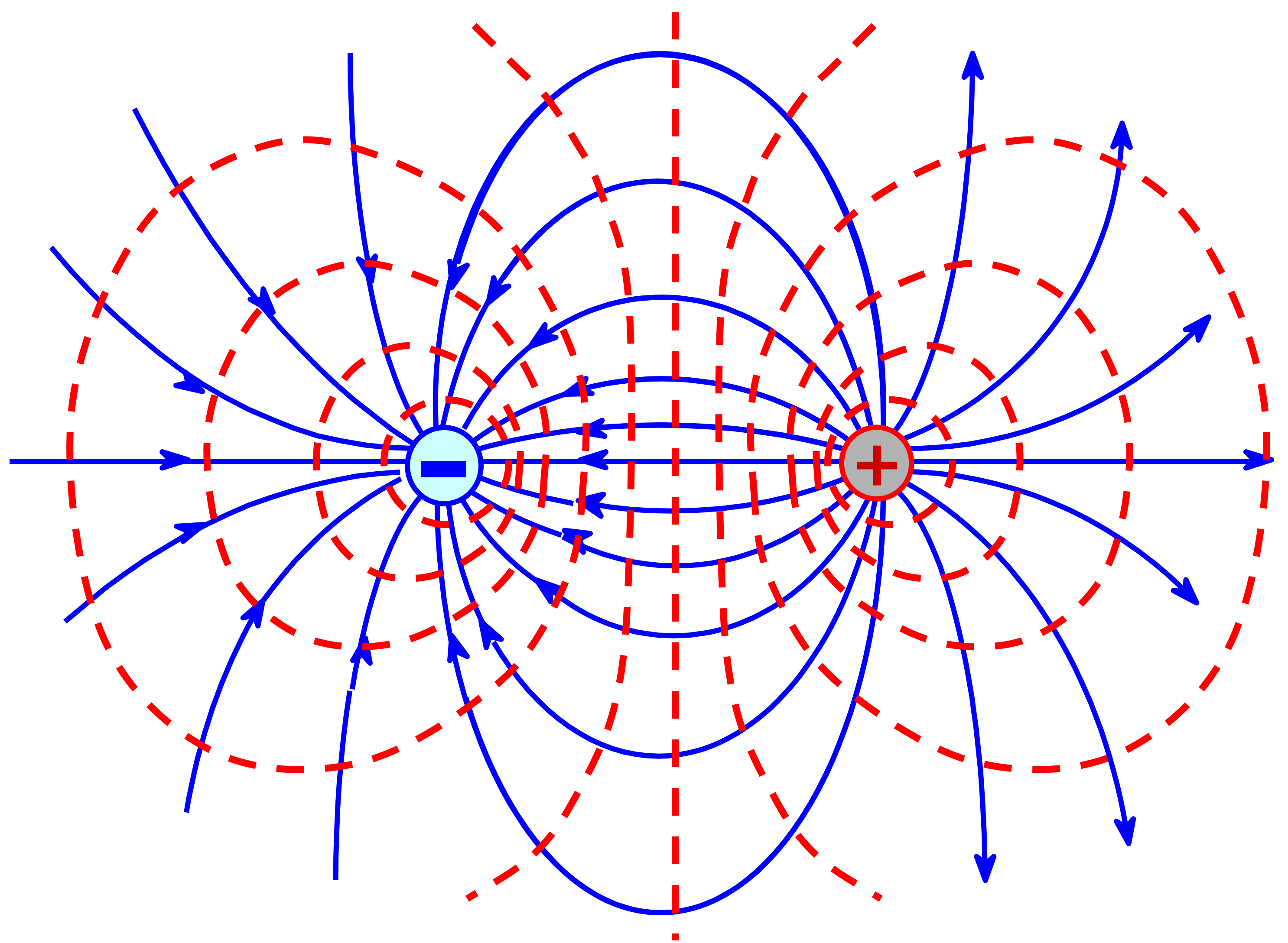
$$\mathrm{d}l_2 > \mathrm{d}l_1$$

$$E_2 < E_1$$

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



2. 电场强度与电势的微分关系

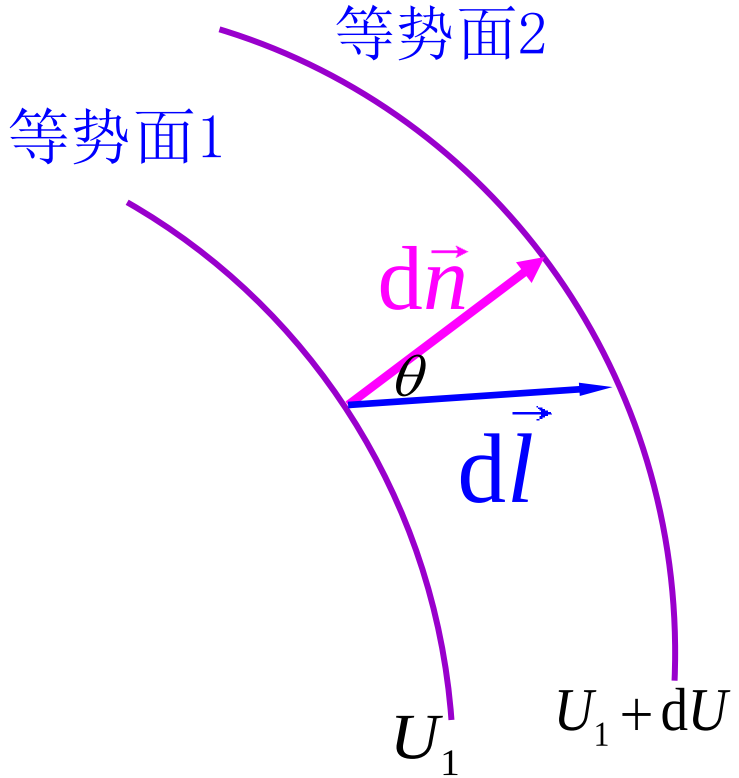
$\mathrm{d}\vec{n}$ 的正向为电势增加的方向。

$$\because U_1-\left(U_1+dU\right)=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\because \left(U_1+dU\right)-U_1=-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=-E\,\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}U=-E\,\mathrm{d}l\cos\theta=-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$



$$\therefore \mathrm{d}U = -E\,\mathrm{d}l\cos\theta = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

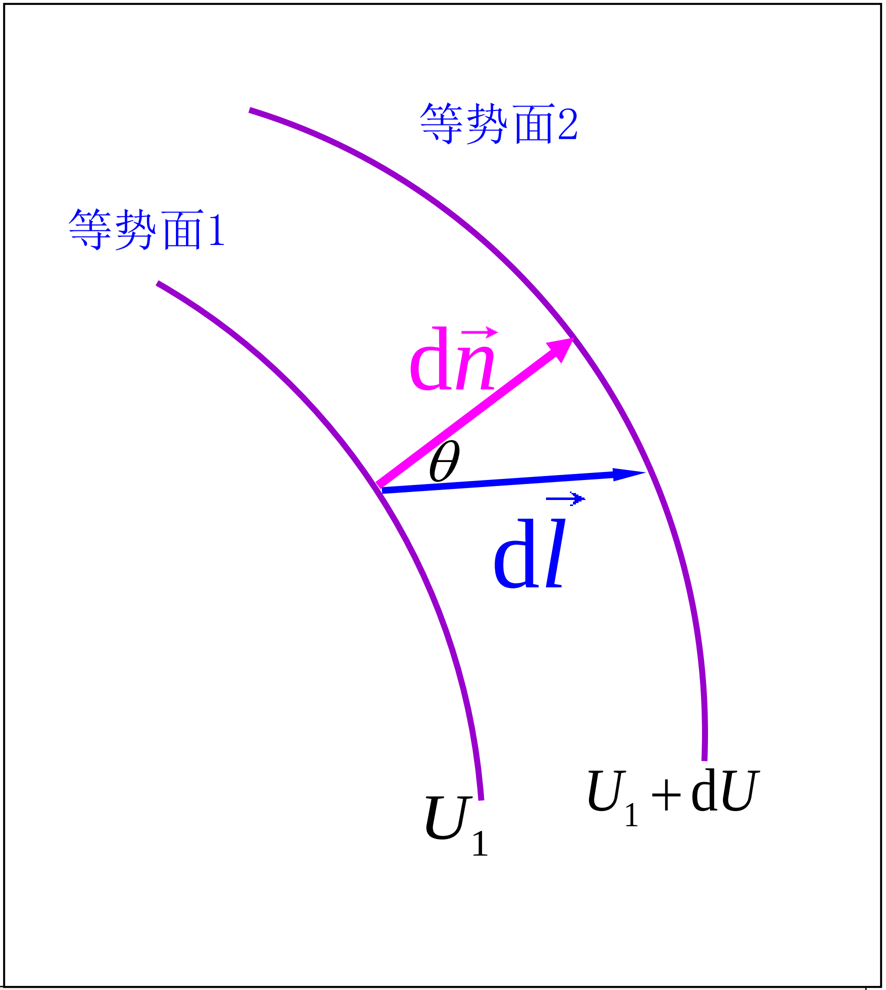
$$\because \mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}n$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -E\,\mathrm{d}n$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$

即： $$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0$$

或： $$\vec{E} = -\nabla U$$



——静电场中某点的电场强度等于该点的电势梯度的负值。

说明：

（1）空间某点电场强度的大小取决于该点邻域内电势 U 的空间变化率。

（2）电场强度的方向恒指向电势减小的方向。

- 直角坐标系中

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,U$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

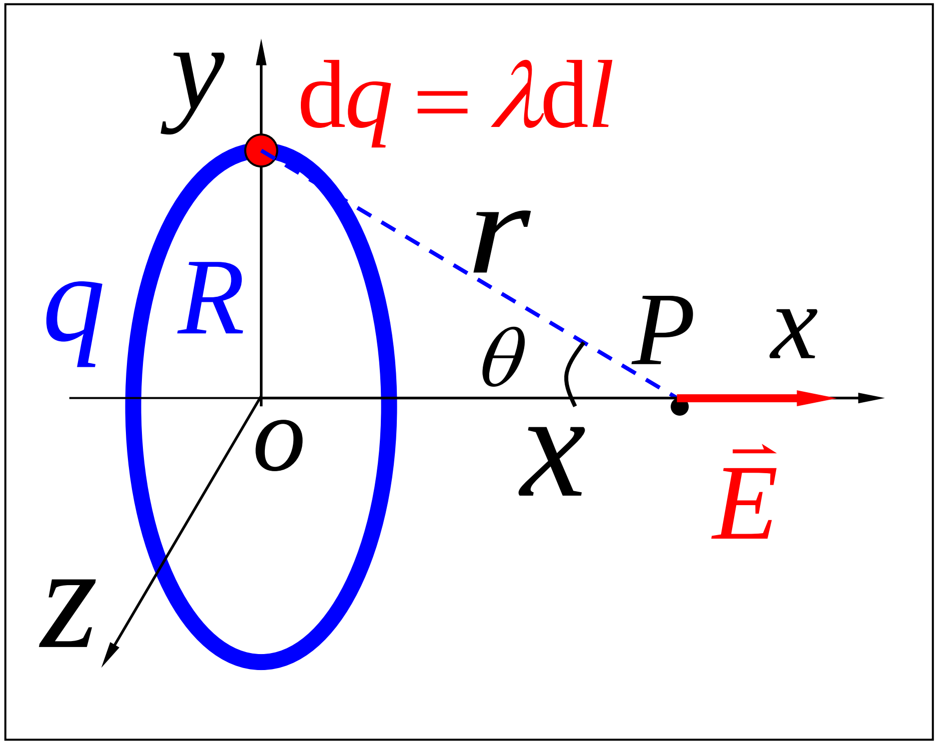
（3）电场线与等势面处处正交。

（即：在等势面上移动电荷，电场力不做功。）

（4）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小。

求 $\vec{E}$ 的三种方法
$\left\{\begin{array}{l}\text{利用微元叠加方法；}\\ \text{利用高斯定理；}\\ \text{利用电势与电场强度的关系。}\end{array}\right.$

例： 求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度。



解： $\vec{E} = -\nabla U$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

梯度（Gradient）、散度（Divergence）和旋度（Curl）

矢量函数*E*的散度定义为：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

矢量函数*E*的旋度定义为：

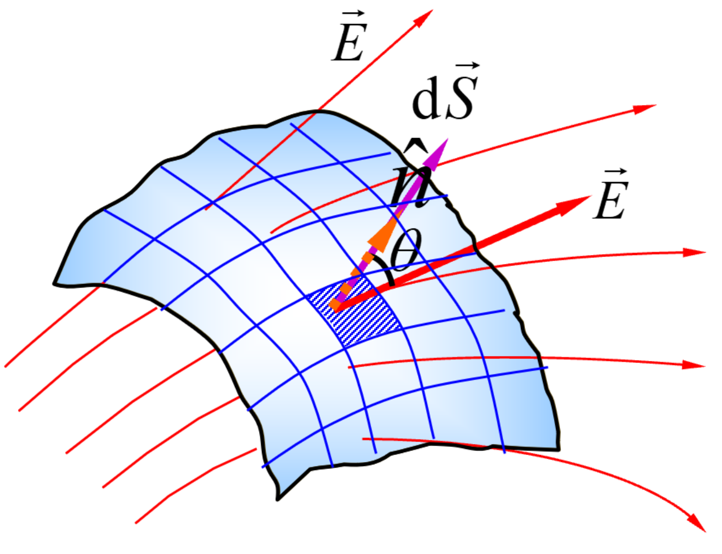
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

电场的散度（Divergence）$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

电场的散度代表了电场在某一点的发散程度。 更形象一点，散度描述的是电场里一个点是汇聚点还是发源点，或者说，包含这一点的一个微小体元中的电场线是“向外”居多还是“向内”居多。

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Delta V} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

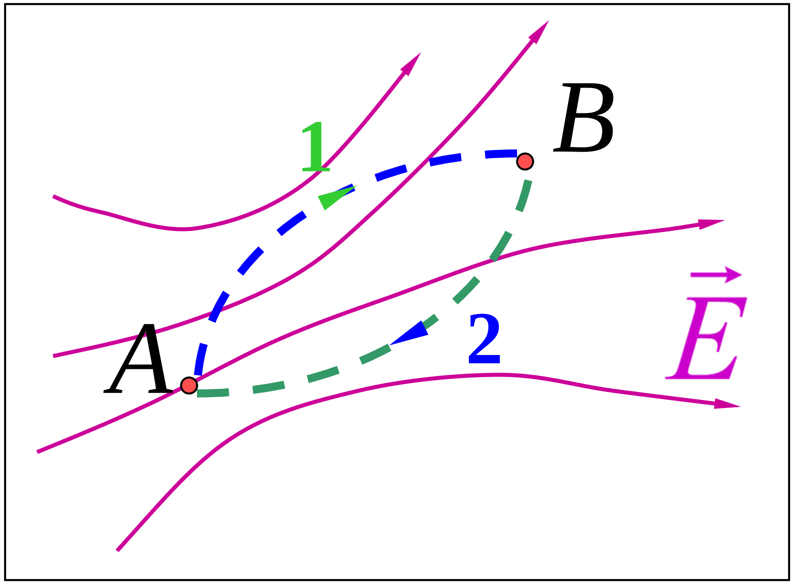
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



电场的旋度（curl） $\vec{\nabla}\times\vec{E}$

我们可以想象河水的水流绕着一点旋转——漩涡。在漩涡范围内，水流围绕某一点旋转，我们就可以说在这个范围内，水流的旋度大于零。若水流没有绕某一点旋转的趋势，那么旋度就等于零。物理上，电场的旋度也代表了电场在某一闭合回路内的旋转程度，对于静电场而言，我们有：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$



静电场的性质：

积分形式

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

微分形式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

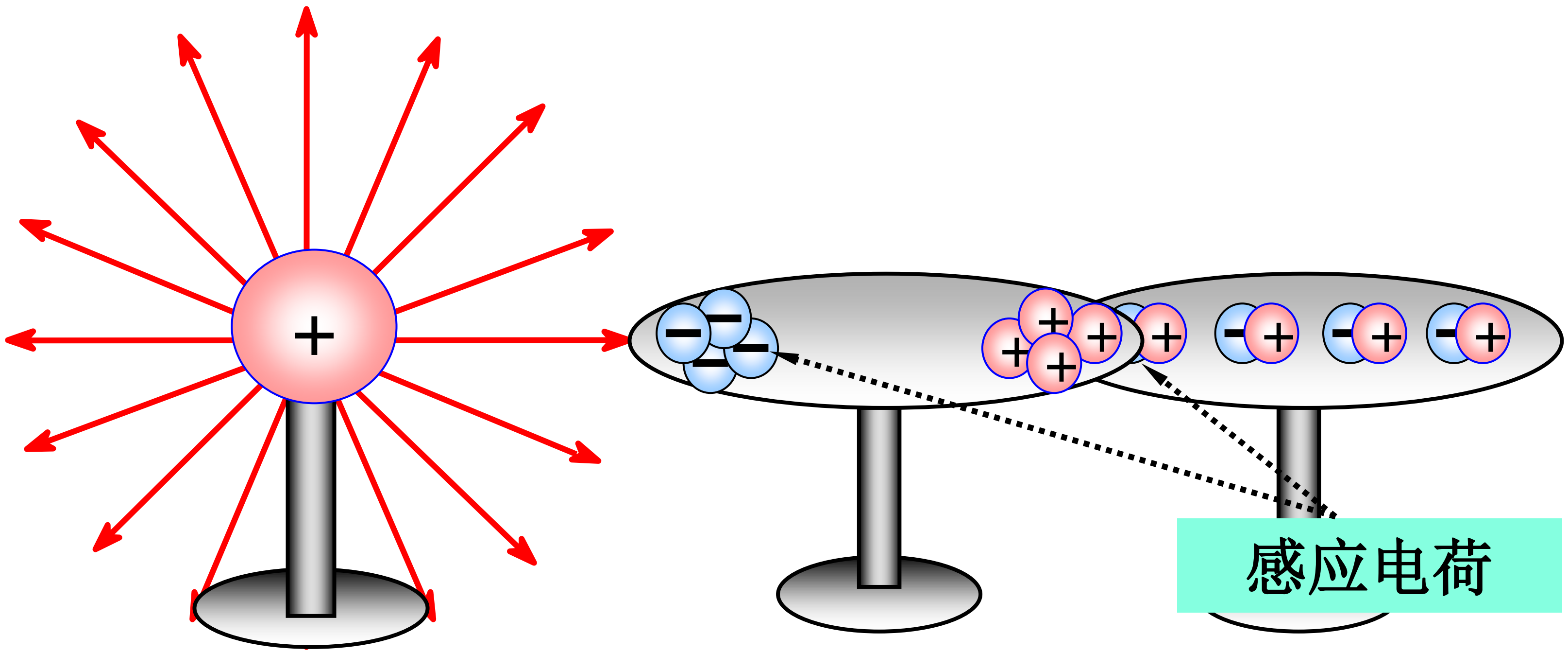
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

§6 静电场中的导体 电容

一、静电感应 静电平衡条件

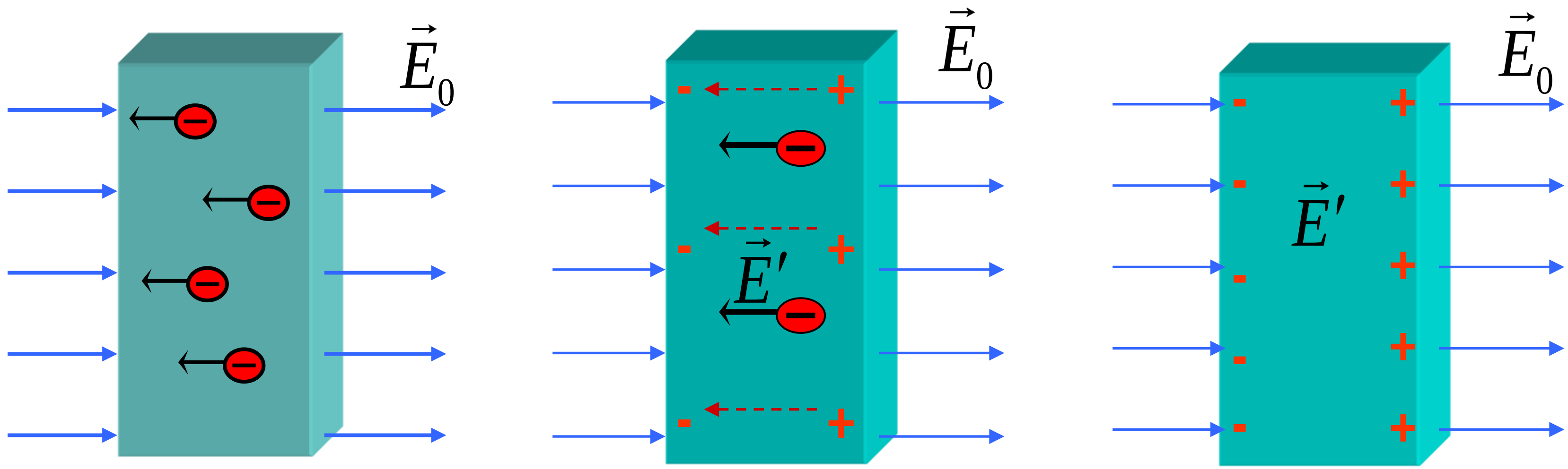
1. 静电感应



2. 静电平衡

导体的特点：有可以移动的自由电子。

导体在电场中，自由电子就要受到电场力而运动，这就改变了导体上原来的电荷分布。



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \qquad \vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

静电感应　　**静电平衡**

导体的**静电平衡状态：**导体的内部和表面都没有电荷作任何宏观定向运动的状态.

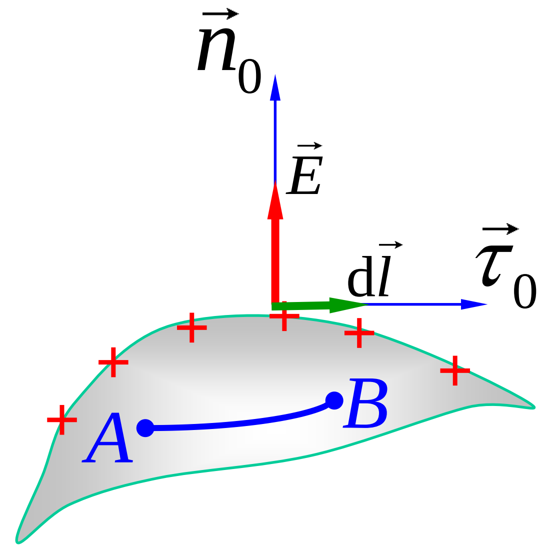
静电平衡条件

（1）导体内部任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向，都与导体表面垂直。

推论：

——导体是等势体



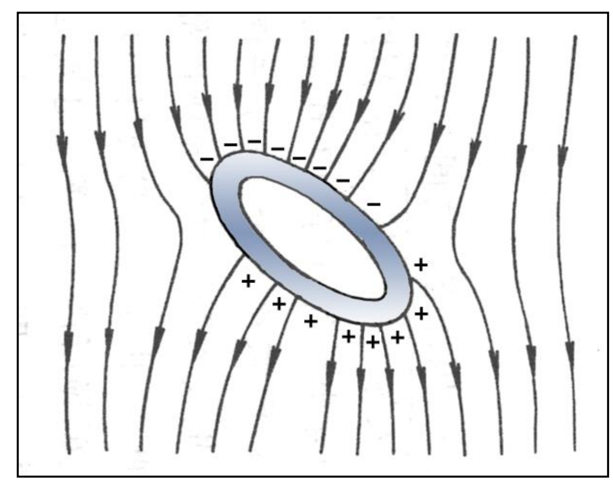
➢ 导体表面是等势面

$$\because \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

➢ 导体内各处电势相等

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

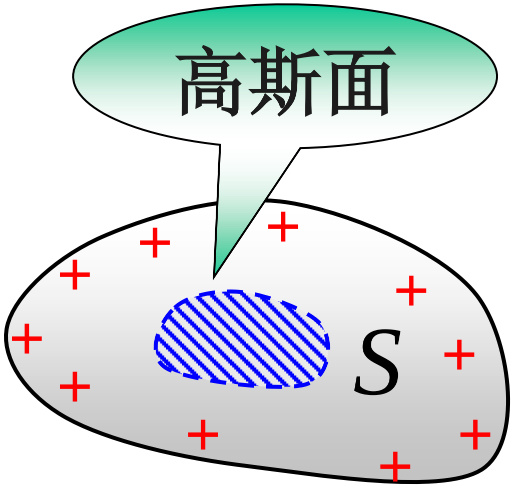


二、静电平衡时导体上电荷的分布

1. 实心导体

$$\because \vec{E} = 0 \qquad \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

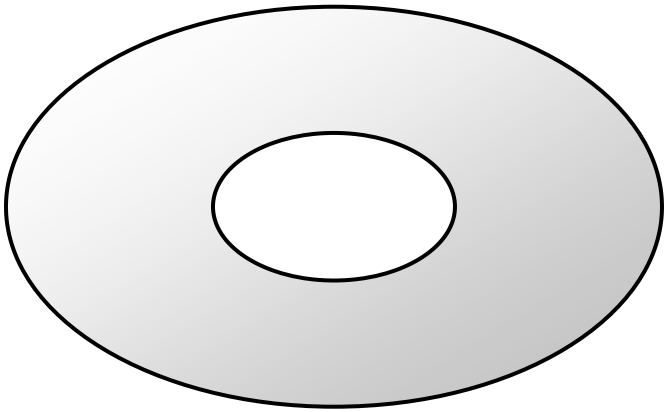
$$\therefore \sum_i q_i = 0$$



结论： 导体内部无电荷

2. 空腔导体

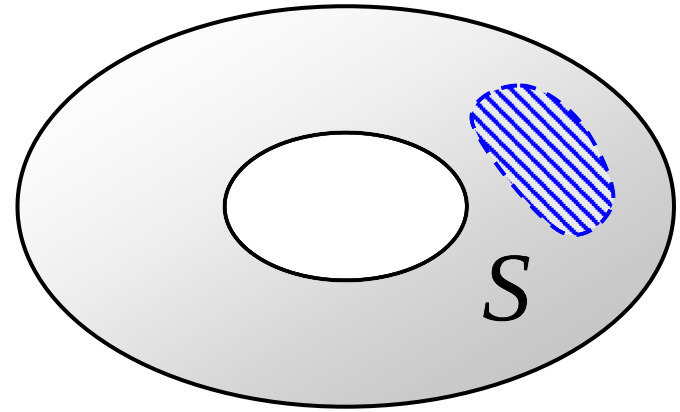
- 空腔内无电荷



电荷只能分布在空腔的外表面上（内表面无电荷）

➢ 对于空腔导体内取高斯面，有

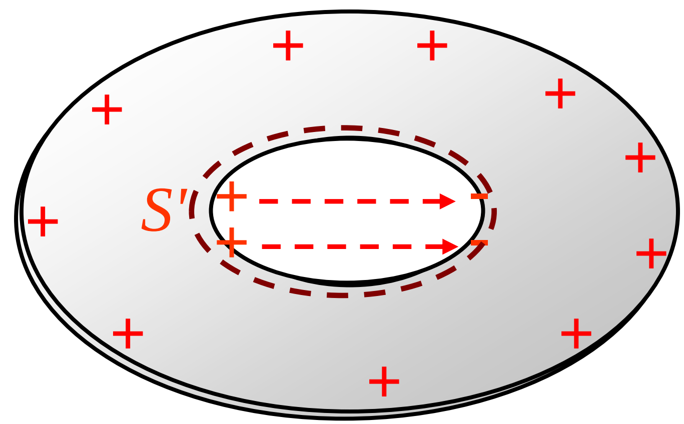
$$\because \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i = 0$$



——电荷只能分布在表面上

➢ 对于空腔的内表面，有

$$\because \oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i = 0$$



➢ 若内表面带等量异号的电荷，则

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot d\vec{l}\neq 0$$

——与“静电平衡状态的导体是等势体”相矛盾，故空腔的内表面不带电。

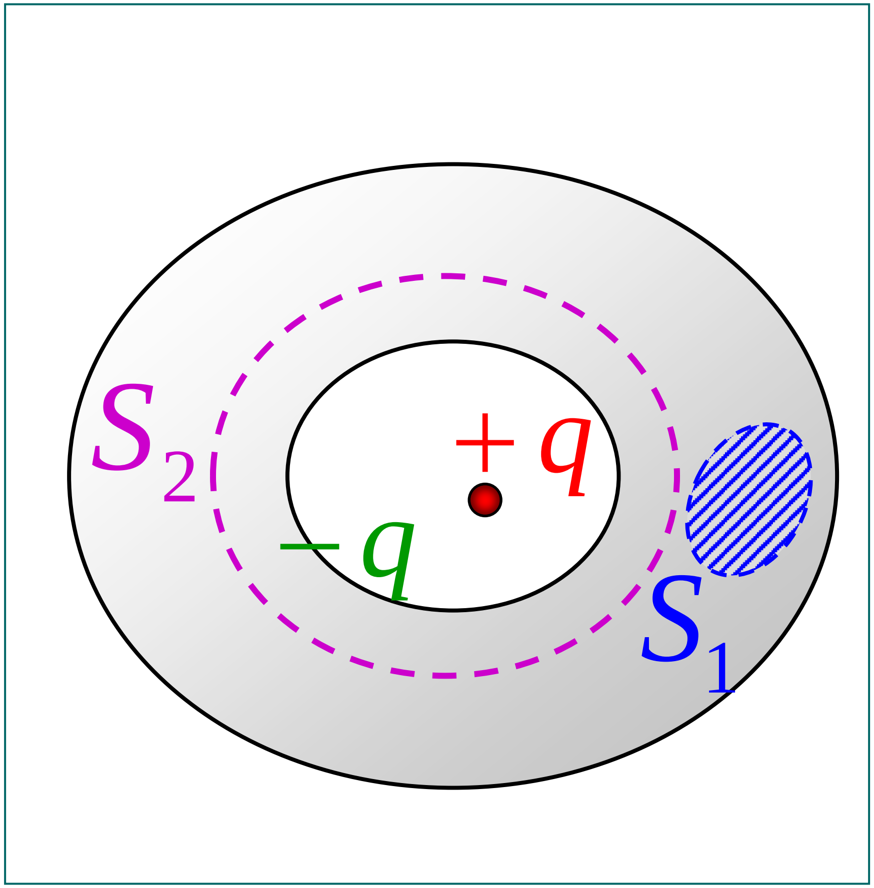
结论： 空腔内无电荷时，内表面无电荷，电荷分布在外表面，且腔内无电场线

空腔内有电荷

$\because \quad \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

$\therefore \quad \sum q_i = 0$

——电荷只能分布在表面上。



内表面上有电荷吗?

$\because \quad \sum q_i = q_{内} + q = 0$

$\therefore \quad q_{内} = -q$

结论：当空腔内有电荷$+q$时，内表面因静电感应出现等量异号的电荷$-q$，外表面同时出现等量同号的感应电荷$+q$。

3. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

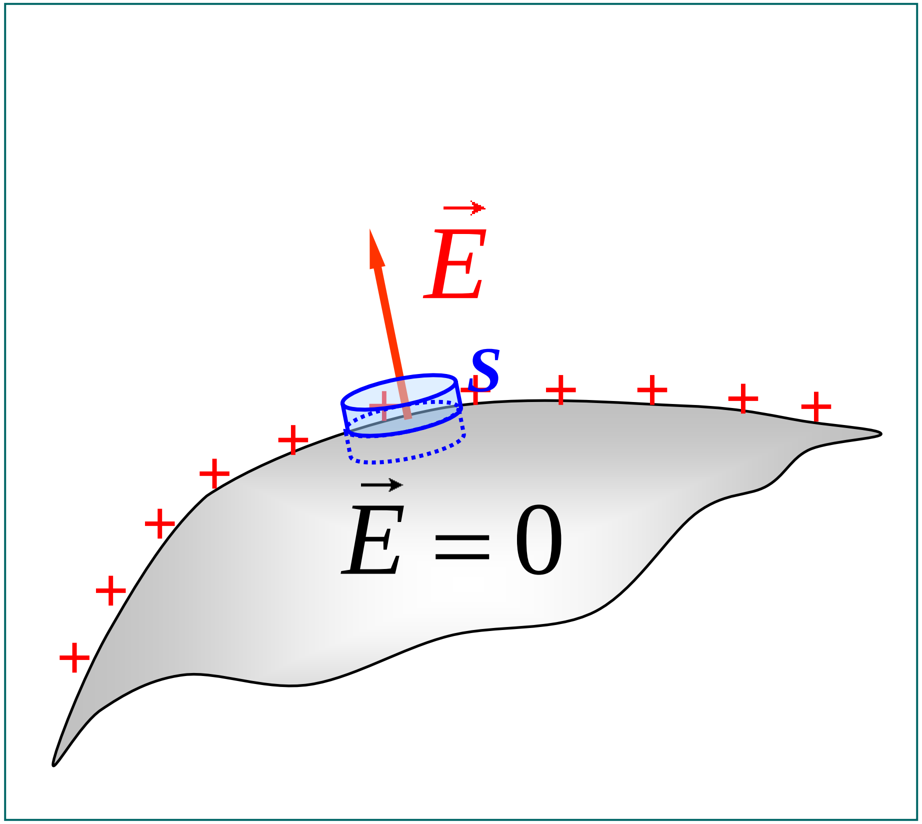
作圆柱形高斯面 **s**，使其一个底在导体内。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

σ 为表面电荷面密度

$$ES_{底} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

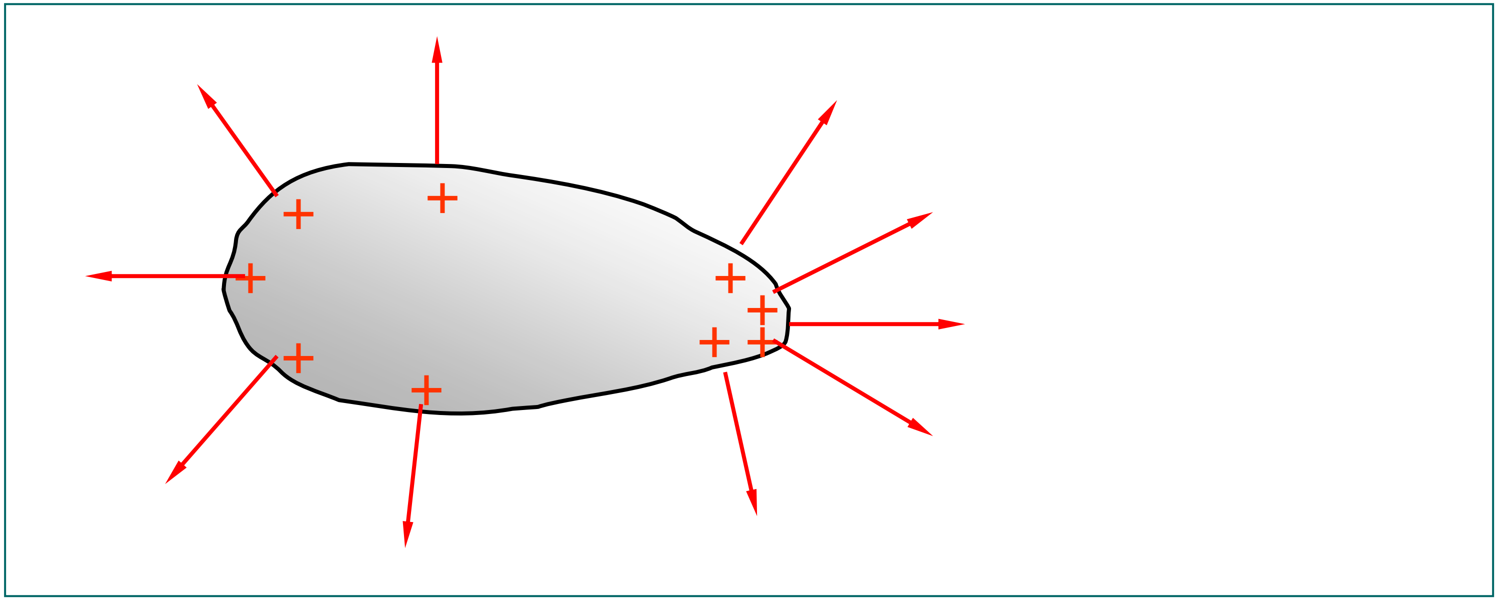
$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



结论：导体表面附近某处的电场强度大小与该处表面电荷面密度成正比。

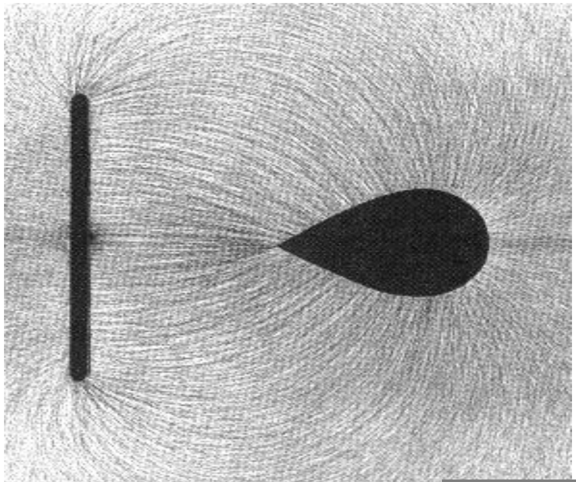
4. 导体表面电荷密度与导体表面曲率的关系

$$\sigma \sim \frac{1}{\boxed{\rho}}$$ 曲率半径

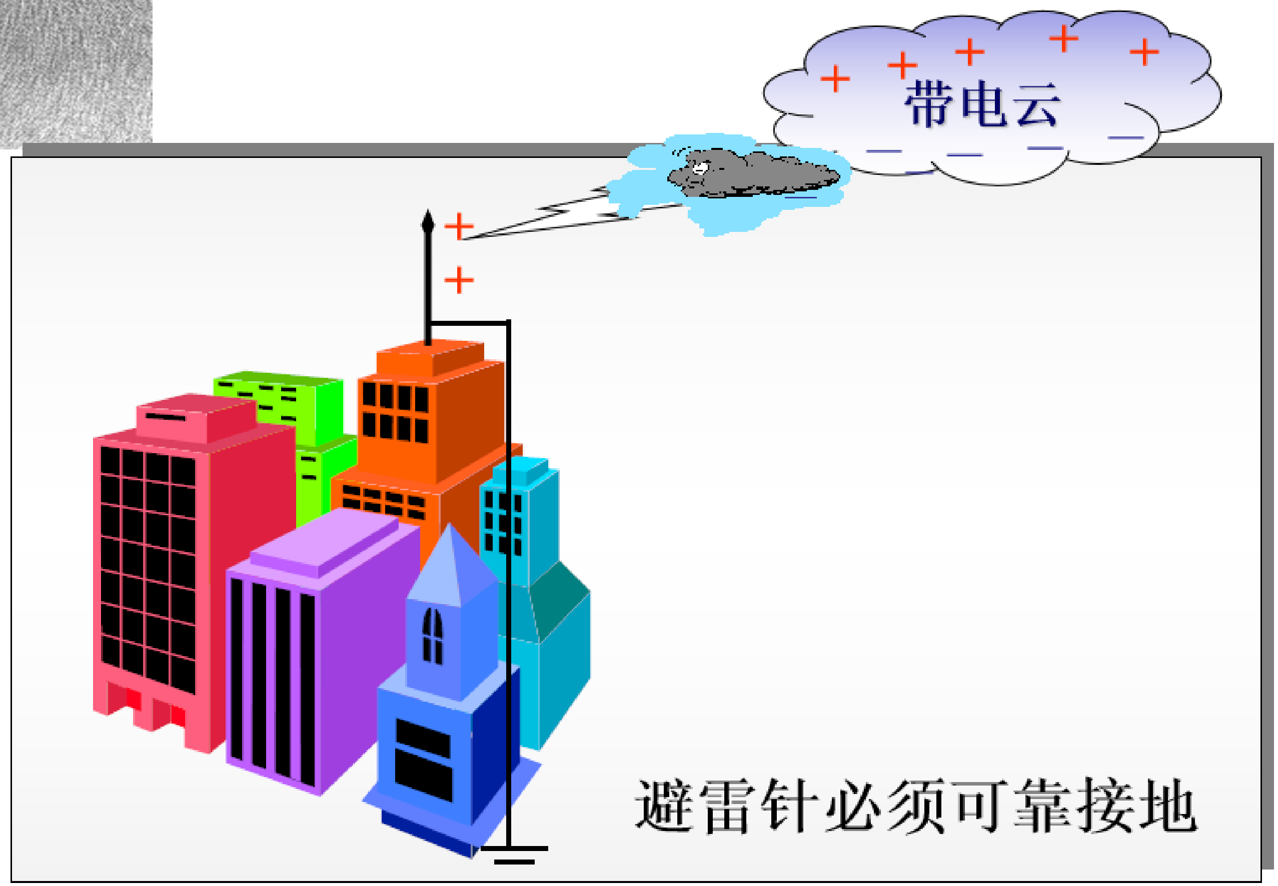


- 导体表面电荷分布密度与导体表面的曲率半径成反比。

尖端放电现象

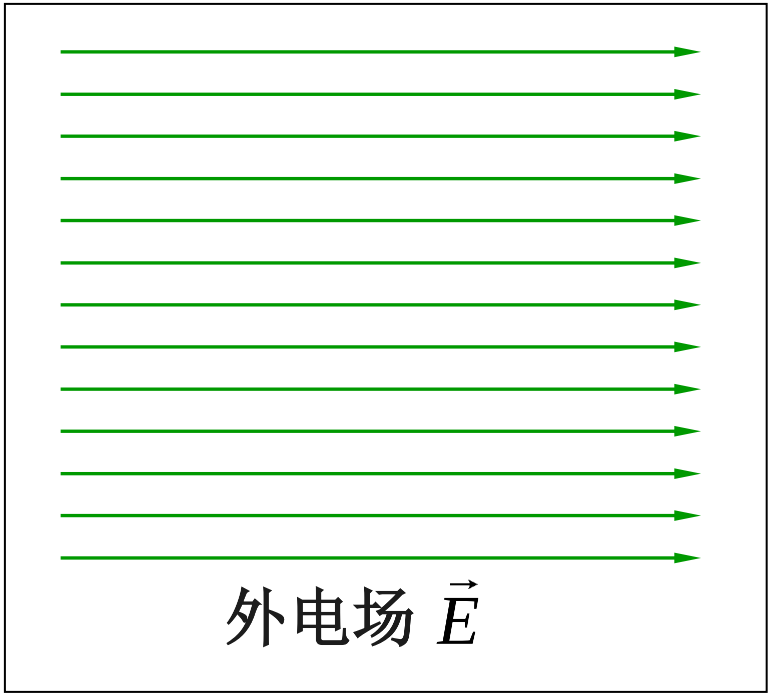


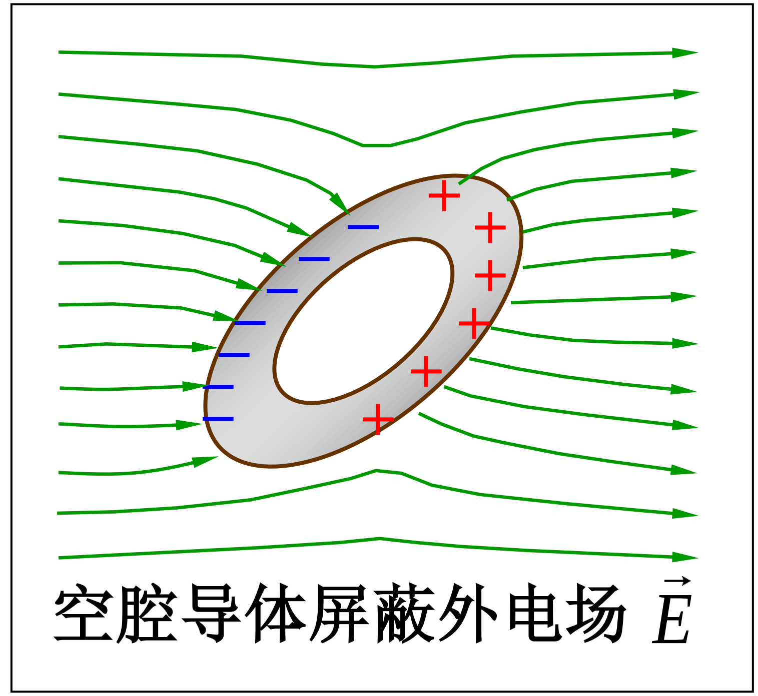
带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象.



5. 静电屏蔽

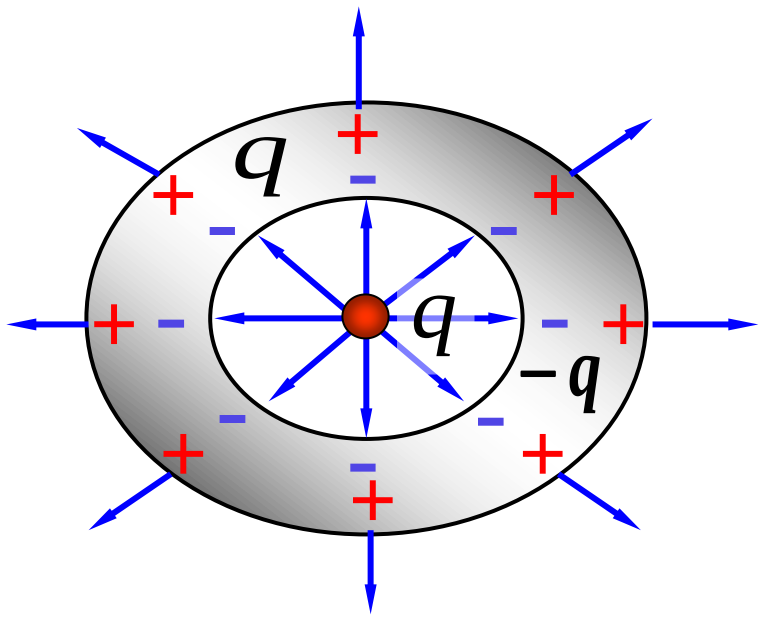
（1）屏蔽外电场



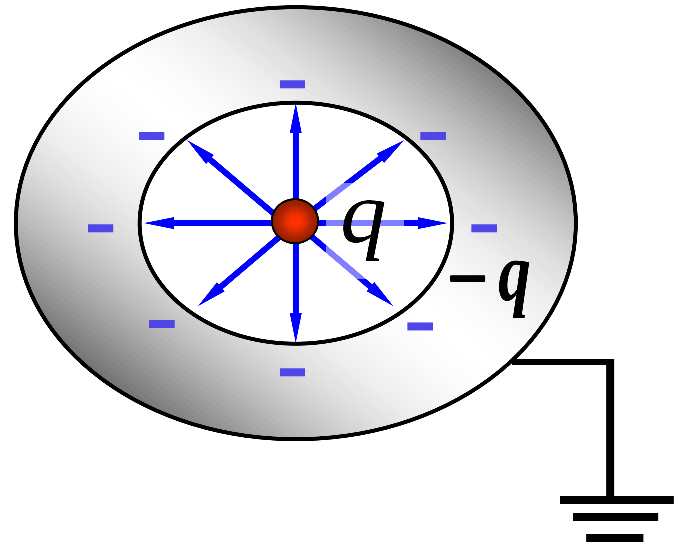


结论：空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响。此时，整个空腔导体和腔内的电势处处相等。

（2）屏蔽腔内电场



接地空腔导体屏蔽内电场

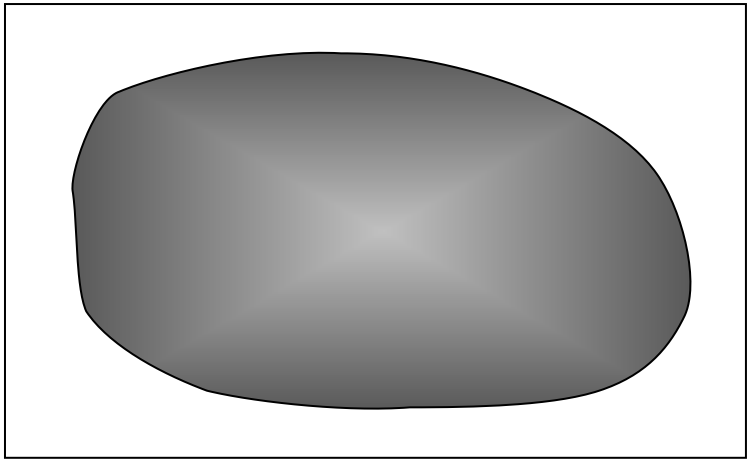


结论：接地空腔导体将使外部空间不受空腔内的电场影响。

综合以上两种情形可知：一个接地的封闭导体壳，可以起到壳内外互不影响的屏蔽作用。

三、孤立导体的电容

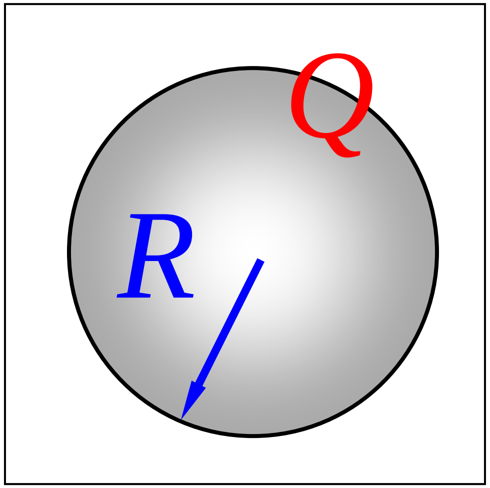
$$C = \frac{Q}{U}$$



单位：法拉（F）

$$1\text{F} = 1\text{C/V} \quad 1\text{F} = 10^{6}\mu\text{F} = 10^{12}\text{pF}$$

例如：孤立的导体球的电容



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

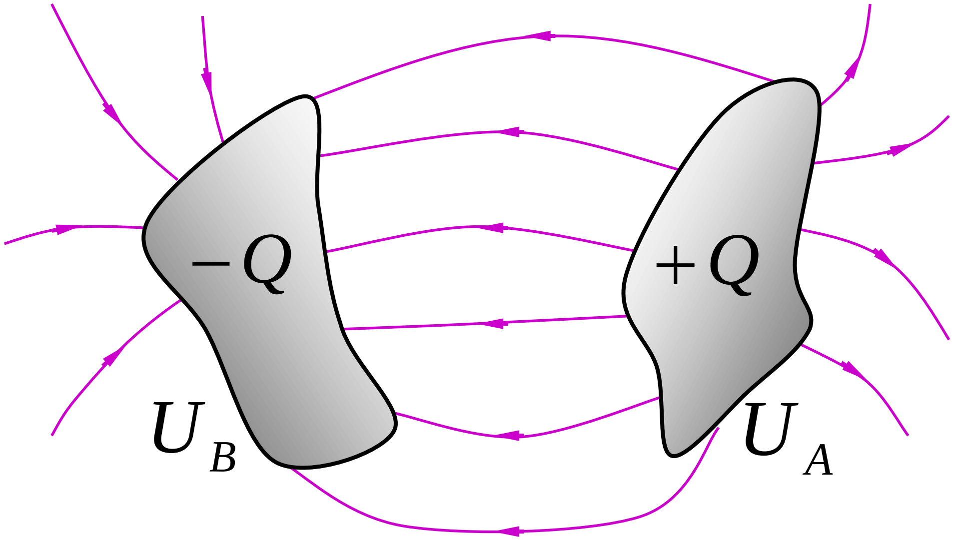
- 若是地球大小，$R = 6.4\times10^{6}\,\text{m}$，则

$$C \approx 7\times10^{-4}\,\text{F}$$ ——很小！

四、电容器

电容器由两个导体极板构成，串接在电路中，彼此带有等量异号的电荷。

以 $\dashv\vdash$ 符号表示。



电容器的电容

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{Q}{\Delta U}$$

$$\Delta U=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电容器电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关。与所带电荷量无关。