数理逻辑

郑为杰

e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

n元联结词的个数

命题：n元命题公式的全体可以划分为2^{2^n}个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，都等价于它们公共的主合取范式（主析取范式）。

一元联结词

$n=1$，即 $2^{2^1}=4$种

表：一元联结词

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

其中，Δ_1、Δ_4为常联结词，Δ_2为幺联结词，Δ_3为否定词。

$$\Delta_{1(p)} \Leftrightarrow F,\quad \Delta_4(p) \Leftrightarrow T$$

$$\Delta_2(p) \Leftrightarrow p,\ \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

二元联结词

$n=2$，即 $2^{2^2}=16$种

表：二元联结词

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$p *_i q = \neg(p *_{17-i} q), i = 1,2,\cdots,8$$

二元联结词

我们有下面的等式:

- $p *_1 q \Leftrightarrow 0$, $p *_{16} q \Leftrightarrow 1$, 即$*_1, *_{16}$为常联结词
- $p *_4 q \Leftrightarrow p$, $p *_6 q \Leftrightarrow q$, 即$*_4, *_6$为投影联结词
- $p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p$, $p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q$, 即$*_{13}, *_{11}$为二元否定词
- $p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$， $*_9$称为或非词，用记号$\downarrow$表示，$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$
- $p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$， $*_{15}$称为与非词，用记号$\uparrow$表示，$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
- $p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$， $p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$ 即$*_3, *_5$为蕴含否定词
- $p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, $*_7$称为异或词，用记号$\bar{V}$（或者$\oplus$， $\forall$）表示，

联结词的表示与完备词组

联结词的可表示：称n元联结词h是由m个联结词g_1，g_2，⋯，g_m可表示的，如果$h(p_1, p_2, \dots, p_n) \Leftrightarrow A$，而$A$中所含的联结词仅取自$g_1$，$g_2$，⋯，$g_m$。

- 任何一元、二元联结词都可以通过$\neg, \vee, \wedge$表示出来。
- 任何一个命题公式，都存在与之等价的合取和析取范式。

联结词的表示与完备词组

- 若联结词$\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$可表示所有一元、二元联结词时，称其为完备联结词组。
- {¬,∨,∧}是完备的联结词组。
- 有没有更小的完备联结词组?

联结词的表示与完备词组

命题1：$\{\neg, \rightarrow\}$是完备联结词组。

思路：因为$\{\neg,\vee,\wedge\}$是完备的联结词组，只需要证明$\{\neg,\vee,\wedge\}$可被$\{\neg, \rightarrow\}$所表示的，就可以证明$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的联结词组。

证明：

（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg p$

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$ （对合律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q$ （对合律）

$\Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

因此，$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

思路：因为$\{\neg,\vee,\wedge\}$是完备的联结词组，只需要证明$\{\neg,\vee,\wedge\}$可被$\{\Delta_1, \rightarrow\}$表示，就可以证明$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

证明：

（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg p \vee \Delta_1(p)$ （析取永假项，真值不变）

$\Leftrightarrow p \rightarrow \Delta_1(p)$

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \Delta_1(p \rightarrow \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow \Delta_1(q)) \rightarrow \Delta_1(p \rightarrow \neg q)$ （两次利用(1)）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

$\Leftrightarrow (p \rightarrow \Delta_1(p)) \rightarrow q$ （利用（1））

因此，$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\downarrow\}$(或非) 是完备联结词组。

证明：（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p)$　　（幂等律和替换定理）

$\Leftrightarrow p \downarrow p$

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$　　（对合律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$　　（利用(1)）

$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$　（利用(1)）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$　（对合律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q))$

$\Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$　（利用(1)）

$\Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$　（利用(1)）

因此，$\{\downarrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题： $\{\uparrow\}$ (与非)是完备联结词组。

证明： （1） $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p)$ （幂等律和替换定理）

$\Leftrightarrow p \uparrow p$

（2） $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$ （对合律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q))$

$\Leftrightarrow \neg\,(p \uparrow q)$ （利用（1））

$\Leftrightarrow ((p \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow q))$

（3） $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$ （对合律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q$ （两次利用（1））

$\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

因此， $\{\uparrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

例：用$\{\uparrow\}$表示$(p \to \neg q) \to \neg r$

解：$(p \to \neg q) \to \neg r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \to \neg r$ （消去蕴含）

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$ （再次消去蕴含）

$\Leftrightarrow \neg\neg (p \wedge q) \vee \neg r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg (p \uparrow q) \vee \neg r$ （与非的原始定义）

$\Leftrightarrow \neg ((p \uparrow q) \wedge r)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow r$ （与非的原始定义）

联结词的表示与完备词组

命题：任何n元联结词$h(p_1,p_2,\cdots,p_n)$都可通过$\{\neg,\rightarrow\}$表示。

证明思路：使用第一数学归纳法，$n=1$、2时，显然成立。因为$\{\neg,\rightarrow\}$是完备联结词组，即可以表示所有一元、二元联结词。

假设任何n-1元联结词可以通过联结词$\{\neg,\rightarrow\}$表示。只需证明，

$$h(p_1,p_2,\cdots,p_n)\Leftrightarrow(p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))\wedge(\neg p_1\rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n))$$

联结词的表示与完备词组

证明：当$n=1,2$时，显然成立。假设任何n-1元联结词都可以通过$\{\neg,\rightarrow\}$来表示，需证：

$$h(p_1,p_2,\cdots,p_n)\Leftrightarrow(p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))\wedge(\neg p_1\rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n))$$

1) 对于任意的指派v，当$(h(p_1,p_2,\cdots,p_n))^v=1$

- 若 $p_1^v=1$，则$(\neg p_1)^v=0$，那么$(\neg p_1\rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n))^v=1$，

  由$(h(p_1,p_2,\cdots,p_n))^v=h(p_1^v,p_2^v,\cdots,p_n^v)=h(1,p_2^v,\cdots,p_n^v)=(h(1,p_2,\cdots,p_n))^v=1$

  知$(p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))^v=1$。

  故$((p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))\wedge(\neg p_1\rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n)))^v=1$

- 若 $p_1^v=0$，则$(\neg p_1)^v=1$，那么$(p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))^v=1$

  由$(h(p_1,p_2,\cdots,p_n))^v=h(p_1^v,p_2^v,\cdots,p_n^v)=h(0,p_2^v,\cdots,p_n^v)=(h(0,p_2,\cdots,p_n))^v=1$

  知$(\neg \mathrm{p}_1\rightarrow \mathrm{h}(0,\mathrm{p}_2,\cdots,\mathrm{p}_n))=1$

  故$((p_1\rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n))\wedge(\neg p_1\rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n)))^v=1$

对偶式（选修）

对偶式：在仅含有联结词$\neg,\vee,\wedge$的公式A中，将$\wedge$换成$\vee$，$\vee$换成$\wedge$，0换成1，1换成0，得到的公式为A 的对偶式，记为A^*。

原式A	对偶式A^*
$(p\wedge\neg q)\vee r$	$(p\vee\neg q)\wedge r$
$\neg p\vee(q\wedge\neg r)$	$\neg p\wedge(q\vee\neg r)$
$\neg((\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)$	$\neg((\neg p\vee\neg q)\wedge\neg r)$

$(\neg A)^*\Leftrightarrow\neg A^*$ 否定词对于对偶式不起作用

$(A^*)^*\Leftrightarrow A$

内否式（选修）

内否式：设有命题公式$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，对A中的$p_i(i=1,2,\cdots,n)$用$\neg p_i$做代入，所得的结果为A的内否式，记为A^-。

原式A	内否式A^-
$(p\wedge\neg q)\vee r$	$(\neg p\wedge\neg\neg q)\vee\neg r$
$\neg p\vee(q\wedge\neg r)$	$\neg\neg p\vee(\neg q\wedge\neg\neg r)$
$\neg((\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)$	$\neg((\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\vee\neg\neg r)$

$$(\neg A)^-=\neg A^-$$
$$(A^-)^-\Leftrightarrow A$$

相关定理（选修）

1、$(A^{-})^{-} \Leftrightarrow A$

2、$(\neg A)^{*} \Leftrightarrow \neg(A^{*}) \Leftrightarrow A^{-}$

3、$\neg A \Leftrightarrow (A^{*})^{-} \Leftrightarrow (A^{-})^{*}$

4、$\neg (A^{-}) \Leftrightarrow (\neg A)^{-}$

5、$(\neg A)^{-} \Leftrightarrow A^{*}$

6、$(A^{*})^{*} = A$

定理：若$A \Leftrightarrow B$，则$A^{*} \Leftrightarrow B^{*}$。

证明：因为$A \Leftrightarrow B$，推得$\neg A \Leftrightarrow \neg B$（替换定理），再由$\neg A \Leftrightarrow (A^{*})^{-}$，推得$(A^{*})^{-} \Leftrightarrow (B^{*})^{-}$，最终推得$A^{*} \Leftrightarrow B^{*}$。

相关定理（选修）

定理：若$A \rightarrow B$永真，则$B^* \rightarrow A^*$也永真。

证明：若$A \rightarrow B$永真，则$\neg B \rightarrow \neg A$永真。由（3）：$\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$，得$(B^*)^- \rightarrow (A^*)^-$永真。由永真式的定义：任意的赋值（指派），$(B^*)^- \rightarrow (A^*)^-$都为真那么两边都取内否式，蕴含式仍然是永真的，得$B^* \rightarrow A^*$。得证。

例：$A(p,q,r)$为永真，那么$A(\neg p,\neg q,\neg r)$为永真。

相关定理（选修）

定理：若$A \to B$永真，则$B^* \to A^*$也永真。

例：$p \wedge q \to p$为永真，那么$p \to p \vee q$为永真。

总结

- 命题与联结词
- 范式
- 联结词的扩充与归约
- 对偶式（选修）