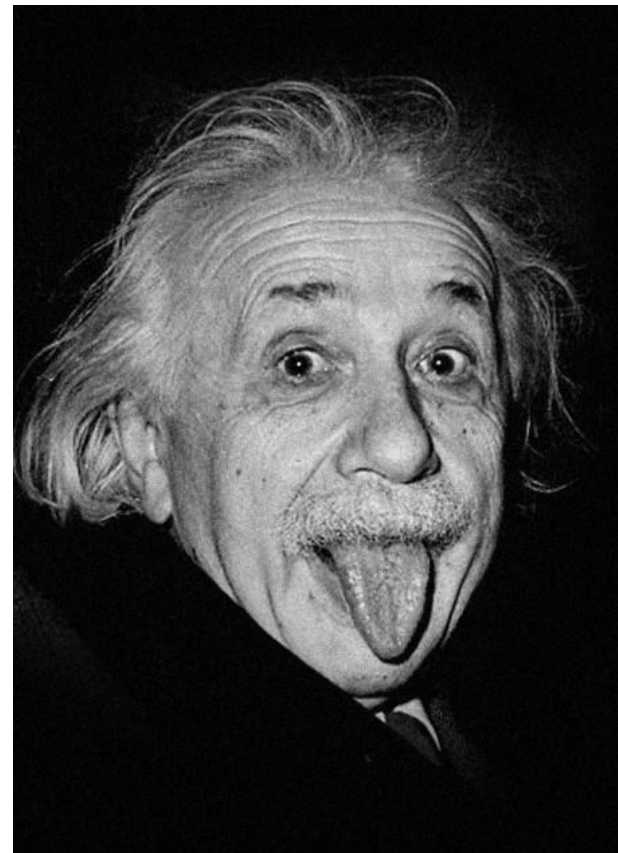
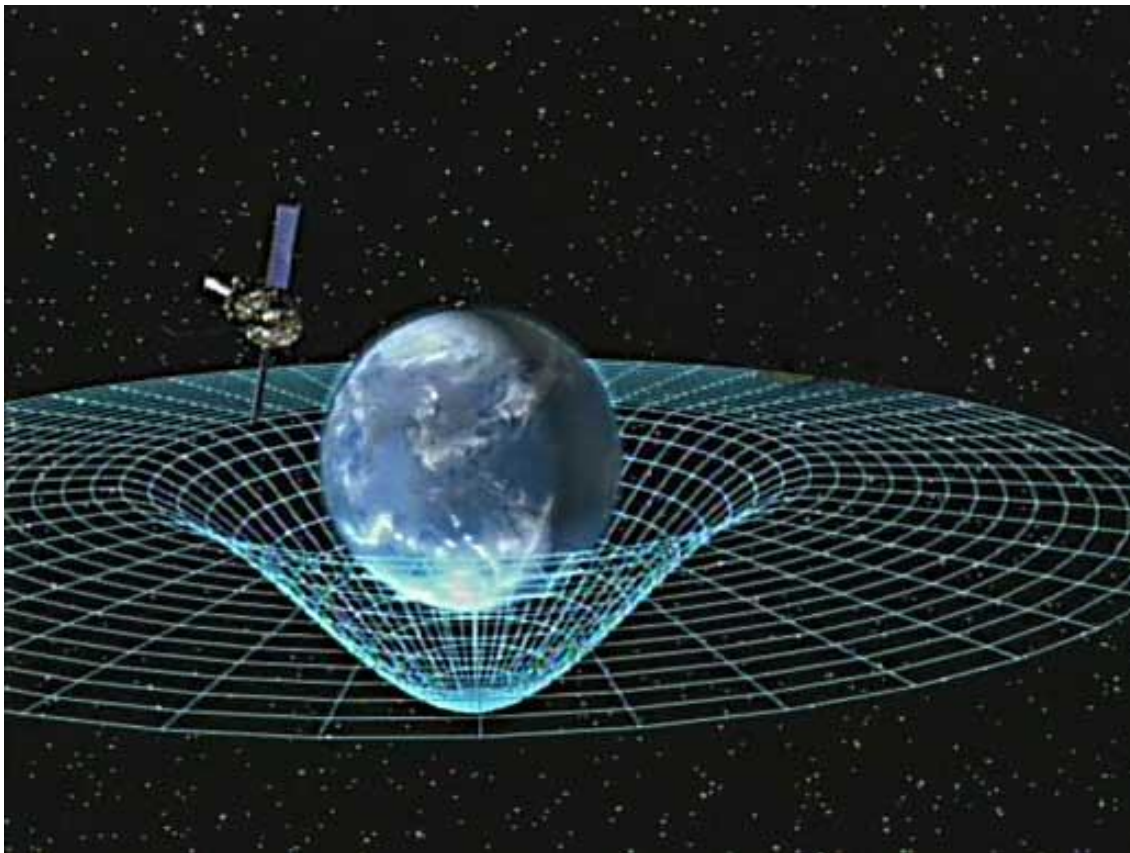


狭义相对论基础




19世纪末的物理学

从伽利略开始，物理学发展到19世纪末，经典力学、电磁学、光学、热力学被麦克斯韦形成统一的理论——于是，19世纪末的许多物理学家认为，当时的他们几乎已经知晓了物理学全部知识，包括物质与能量的相互作用，物体运动的规律等等，至少在理论上，他们几乎可以解释全部的物理现象，除了两个与光学相关的现象——“两朵乌云”。



迈克耳孙-莫雷实验



黑体辐射理论

两朵乌云：

在1900年4月27日，开尔文在英国皇家研究所做了一篇名为《在热和光动力理论上空十九世纪乌云》的发言，演讲中开尔文称：“动力学理论认为热和光都是运动的方式，现在这一理论的优美和明晰，正被两朵乌云笼罩着。”

开尔文所言的两朵乌云分别是指**迈克尔逊-莫雷实验中对光速测量的实验结果**和**黑体辐射理论对光的能量**解释中出现的问题。开尔文相信这两个问题会被最终扫清，并针对这两个问题提出了自己的解决方案。但他很有可能没有想到的是，这两朵乌云给物理学带来的是一场突如其来的风暴，这场风暴颠覆了旧理论体系的框架，分别导致了二十世纪物理学的两大理论体系：相对论和量子力学的诞生。

第一朵乌云：迈克尔孙-莫雷实验

从惠更斯开始，光的波动说中的一个重要理论就是：光的传播介质是“以太”。而光的偏振现象说明，光的传播介质“以太”与声音的传播媒介空气不一样，它需要具有如同固体一般的“弹性”性质，但又必须非常稀薄，对光的传播不能有任何阻力。

同时，以太的存在还产生了一个重要的问题：以太的假设事实上代表电磁波的传播需要一个“绝对静止”的参照系，**不然，当参照系改变时，光速也会改变**。地球以每秒30公里的速度绕太阳运动，就必然迎面受到每秒30公里的“以太风”，从而必然对光的传播产生影响。这个问题出现以后，立即引起人们探讨“以太风”存在与否。迈克尔孙-莫雷实验就是在这个基础上进行的。

§ 1 伽利略变换 经典力学的相对性原理

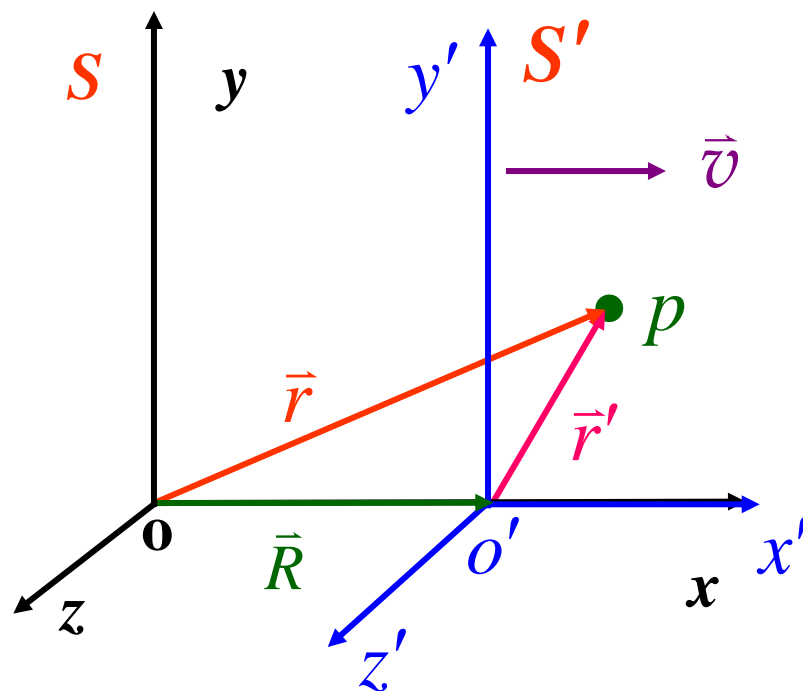
一、伽利略变换

$$\vec{R} = \vec{v} t$$

坐标变换: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$

$$\begin{cases} x' = x - v t & x = x' + v t' \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = t & t = t' \end{cases}$$

速度变换: $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$



加速度变换: $\vec{a}' = \vec{a}$

二、经典力学相对性原理

$$S \quad \vec{F} \quad m \quad \vec{a} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$S' \quad \vec{F}' \quad m' \quad \vec{a}' \quad \vec{F}' = m'\vec{a}'$$

在牛顿力学中力与参考系无关，质量与运动无关。

力学的相
对性原理

力学定律在一切惯性系内是相同的，并不存在一个比其他惯性系优越的惯性系。

或 牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变

三、经典时空观

$$\begin{cases} x' = x - vt & x = x' + vt' \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = t & t = t' \end{cases}$$

推导过程中默认了空间间隔、时间间隔与惯性参考系的选择无关

时间间隔度量绝对不变

$$t' = t \longrightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'$$

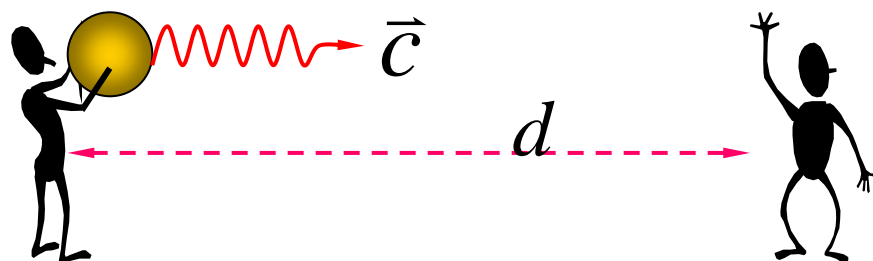
空间间隔度量绝对不变

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1) \\ &= x_2 - x_1 = \Delta x \end{aligned}$$

例 试计算球被投出前后的瞬间，所发出的光波达到观察者所需时间。

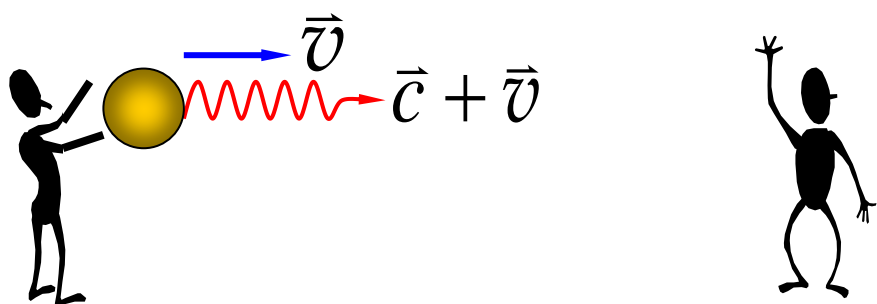
(根据伽利略变换)

球投出前



$$\Delta t_1 = \frac{d}{c}$$

球投出后



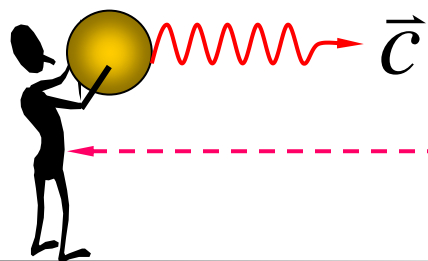
$$\Delta t_2 = \frac{d}{c + v}$$

$$\Delta t_1 > \Delta t_2$$

结果: 观察者先看到投出后的球,
后看到投出前的球.

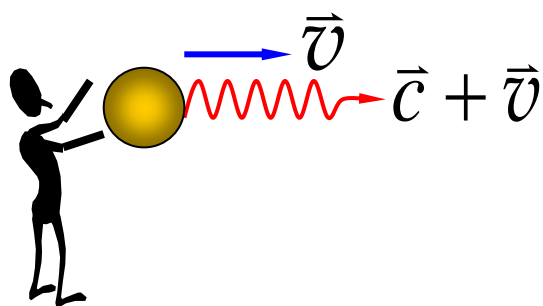
(根据伽利略变换)

球投出前



$$\Delta t_1 = \frac{d}{c}$$

球投出后



$$\Delta t_2 = \frac{d}{c + v}$$

$$\Delta t_1 > \Delta t_2$$

经典力学遇到的困难

19世纪下半叶，得到了电磁学的基本规律即麦克斯韦电磁场方程组。

麦克斯韦电磁场方程组中有真空中的电磁波速（光速）

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8.85 \times 10^{-12})}} \\ = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

光的传播速度仅与真空介电常数及磁导率有关

光的速度

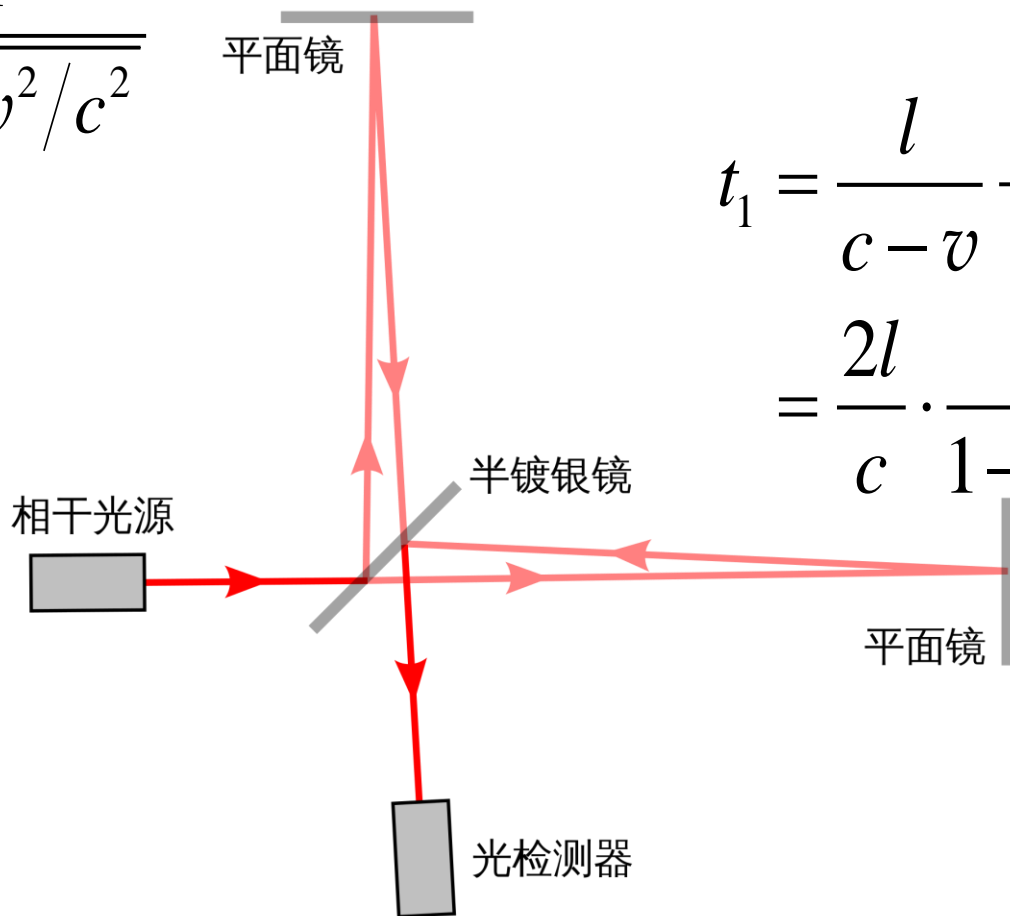
从惠更斯开始，到光的波动说占据光本性解释的上风，光的速度得到充分精确的测量，甚至在麦克斯韦写出麦克斯韦方程组并预言了光是电磁波之后，物理学家们都认为，与声速的一样，光速 c 是光相对于传播介质“以太”的运动速度，光相对“以太”沿各个方向的运动速度都是 c 。由于地球在不断地运动，假设“以太”相对于地球静止，那么在地面上让光线在平行和垂直于以太的方向上传播，它们应有不同的速度。假设“以太”相对于地球有一定的速度，那么这种光速的变化应当更为容易测量——于是，迈克尔孙在1879年开启了对以太速度的测量。

迈克尔孙—莫雷实验（1887年）

假设干涉仪在“以太”中的运动速度为 v ，光在以太中的传播速度为 c ，那么光通过两个干涉臂的时间分别为：

$$t_2 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} \\ = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$



迈克尔孙—莫雷实验（1887年）

迈克尔逊和莫雷在19世纪末利用干涉仪做了许多次有关光速的测量实验，在不同的地点，不同的季节，然而每一次测量，得到的光速除了更加精确外，没有太大的变化，即光速似乎是不变的——即不管如何移动装置，光总是同时到达两个干涉臂。对于这个结果，当时的迈克尔孙自己都不相信。



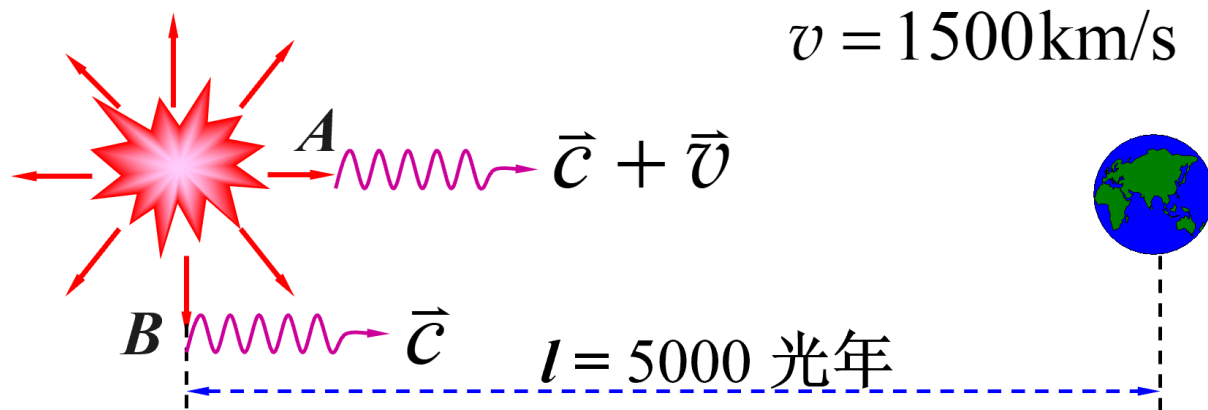
The experiments on the relative motion of the earth and ether have been completed and the result decidedly negative. The expected deviation of the interference fringes from the zero should have been 0.40 of a fringe – the maximum displacement was 0.02 and the average much less than 0.01 – and then not in the right place. As displacement is proportional to squares of the relative velocities it follows that if the ether does slip past the relative velocity is less than one sixth of the earth's velocity.

— *Albert Abraham Michelson, 1887*



光的速度

值得一提的是一件从侧面验证迈克尔逊实验结果的事情——我国古籍《宋会要》中有记载：客星（超新星）最初出现在北宋至和元年（公元1054年），位置在金牛座天关附近，白昼看起来赛过金星，历时23天，后慢慢暗下来，两年后“隐没”。这就是我们今天看到的金牛座蟹状星云。



超新星在爆发时会喷射出大量具有极高能量的物质，这些物质在快速飞散时会发光，光到达地球后被观察到。

第一朵乌云

迈克尔孙-莫雷实验测得的光速永远没有变化，这其实与麦克斯韦对电磁波的预言结果一致。

另一方面，当19世纪末的其他物理学家**试图将麦克斯韦方程做伽利略变换**时，他们发现，麦克斯韦方程组无法保持相同的形式。这意味着，电与光的现象在参照系运动时与静止时不一样。

看来相当明显的是，这些方程是错误的，所以要做的事就是这样来改变它们，使得相对性原理在伽利略变换下能够得到满足。在这种尝试中，必须在方程组中引入一些新的项，而这些项预言了一些新的电现象，但一旦用实验来检验它们时，这些现象就根本不存在，因而，这个尝试必须予以放弃。于是人们逐渐明白，麦克斯韦电动力学方程组是正确的，必须到其他地方去寻找症结所在。

洛伦兹的发现

迈克耳孙-莫雷实验的结果令人迷惑不解和十分困扰。摆脱这个绝境的第一个有成效的观念是荷兰物理学家洛伦兹想到的。他提出，物体运动时，物体的长度会收缩，收缩只发生在运动方向上。为了满足迈克尔逊-莫雷的实验结果，他发现，当物体运动时的长度收缩具有如下表达时，迈克尔逊-莫雷实验成立：

$$L' = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

收缩假设虽然成功地解释了实验的负结果，在当时却也被认为这只是专门用来解释所遇到的困难而发明的，因而是过于牵强的，不过，洛伦兹还有第二个发现。

洛伦兹变换

洛伦兹同时注意到一件令人注目的奇怪事情，那就是当他在麦克斯韦方程组中进行以下变换时，发现方程组在这种变换下可以保持其原有形式不变！他的变换具有如下形式：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases}$$

洛伦兹变换

洛伦兹变换

洛伦兹于1892年发表了他的洛伦兹变换用于在数学上解释以太和麦克斯韦方程组的问题，但自己并不能对他发现的变换做出合理的物理解释。在他之后，数学家庞加莱猜测洛伦兹变换可能与时空的性质有关。

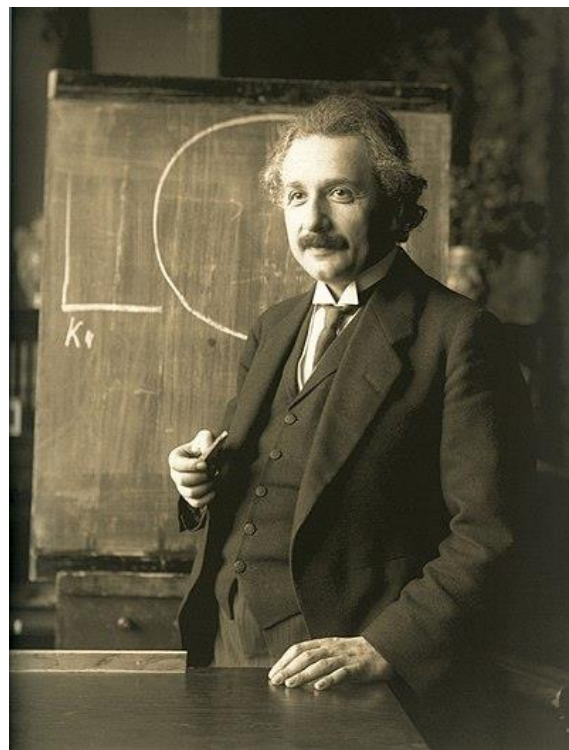


亨德里克·洛伦兹（**Hendrik Lorentz, 1853-1928**），荷兰物理学家，以其在电磁学与光学领域的研究工作闻名于世。与彼得·塞曼共同获得1902年诺贝尔物理学奖——“关于磁场对辐射现象影响的研究”（**[for] their researches into the influence of magnetism upon radiation phenomena**）

狭义相对论

洛伦兹自己并不能对他发现的变换做出合理的物理解释，但另外一位伟大的物理学家，爱因斯坦做出了一个非常大胆的假设：**所有的物理定律都应该是这样的定律——它们应该在洛伦兹变换下保持不变，而不是以往的物理学家所熟知的伽利略变换。**换句话说，需要予以改变的，不应当是麦克斯韦的电动力学定律，而应当是牛顿的力学定律。

阿尔伯特·爱因斯坦 Albert Einstein (1879-1955, 犹太裔理论物理学家)，是20世纪最重要的科学家之一，有“现代物理学之父”之誉。1905年，爱因斯坦在德国杂志《物理年鉴》(Annalen der Physik)发表了四篇论文，第一篇论文解释了**光电效应**，第二篇论文解释了布朗运动，第三篇论文介绍了**狭义相对论**，第四篇论文介绍了**质能等价**。



3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper,
von A. Einstein.

[illegible]

[2] Beispiele ähnlicher Art, sowie die mitfliegenden Versuchsaufstellungen, führen zu der Vermutung, daß „Lichtmedien“ zu verschiedenen Zeiten nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik gewisse Eigenschaften aufzuweisen sprechen, sondern das vielmehr für alle Koordinatensysteme, welche die mechanischen Gleichungen genau, auch die elektrodynamischen und optischen Gesetze, auch die Wellen der Größen erster Ordnung genau erfüllen, wie die Relativität voraussetzt (denn Licht wird als „Wellen der ersten Ordnung“ genannt werden wird) im folgenden „Prinzip haben und ändern die mit ihm zur Voraussetzung er-

[3]
[4]

199

11] 6. Über einen
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;
von A. Einstein.
Zwischen den theoretischen
Physiker abgefaßt.

[illegible]

der Physik, in denen Körper aus der gewöhnlichen Materie aufzufassen, die Energie als schwebende Substanz während die Atome und Elektronen als Punkte darstellen ist. Die Körper kann nicht in beliebig vielen, sondern nur in zwei, nämlich in Lichtkörpern und in Materiekörpern, während sich die Energie eines von beiden in beliebig vielen Teilchen aufspalten kann. Die Theorie (oder die Theorie) der Lichtkörper (oder der Materiekörper) ist die Theorie der Lichtstrahlen (oder der Materie), die Theorie (oder die Theorie) der Lichtstrahlen (oder der Materie) ist die Theorie der Lichtstrahlen (oder der Materie).

Die mit kontinuierlichen Raumfunktionen operierende Un-
diskontinuitätstheorie des Lichtes hat sich zur Darstellung der rein
optischen Phänomene vortrefflich bewährt und wird wohl nie
aufgegeben werden, daß sich die optischen Beobachtungen auf
keine Weise erklären lassen, wenn man sich nicht an der Annahme
festhält, daß sich die optischen Erscheinungen auf
einen kontinuierlichen Raum beziehen lassen. Es ist jedoch im
allgemeinen nicht möglich, die optischen Erscheinungen auf
einen kontinuierlichen Raum zu beziehen, wenn man sich nicht
an der Annahme festhält, daß sich die optischen Erscheinungen
auf einen kontinuierlichen Raum beziehen lassen. Es ist jedoch im
allgemeinen nicht möglich, die optischen Erscheinungen auf
einen kontinuierlichen Raum zu beziehen, wenn man sich nicht
an der Annahme festhält, daß sich die optischen Erscheinungen
auf einen kontinuierlichen Raum beziehen lassen.

... ist jedoch im
nicht aber auf Momentenwerte beruhen,
Biegung, Reflexion, Brechung, Dispersion etc. durch das

... ist jedoch im
nicht aber auf Momentenwerte beruhen,
Biegung, Reflexion, Brechung, Dispersion etc. durch das

狭义相对论

1905年，爱因斯坦在他的论文《Zur Elektrodynamik bewegter Körper》（On the Electrodynamics of Moving Bodies）提出了两条狭义相对论的基本原理：

1. **相对性原理**—物理定律在所有的惯性系中都应当是一样的。
2. **光速不变原理**—真空中的光速是常量，光速与光源或观察者的运动无关，不依赖于（惯性）参考系的选择。

在这两条基本原理的假设下，**所有的物理定律应该在洛伦兹变换下保持不变**，而并非伽利略定律——换句话说，时间和空间将会随着物体的运动而改变。

洛伦兹变换

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{array} \right.$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) \end{array} \right.$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases}$$

当 $v \ll c$ 时

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

洛伦兹变换的逆变换

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \gamma (x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \end{cases}$$

洛伦兹速度变换

S系中的速度为 u

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

S'系中的速度为 u'

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right) \end{cases}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{\beta}{c} dx \right)} = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

相对论速度的逆变换

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, u_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

讨论:

1) 速度的变换公式, 保证了各个参照系中**光速 c 的不变性**。

如:

若在 S 系中 $u_x = c, u_y = u_z = 0$.

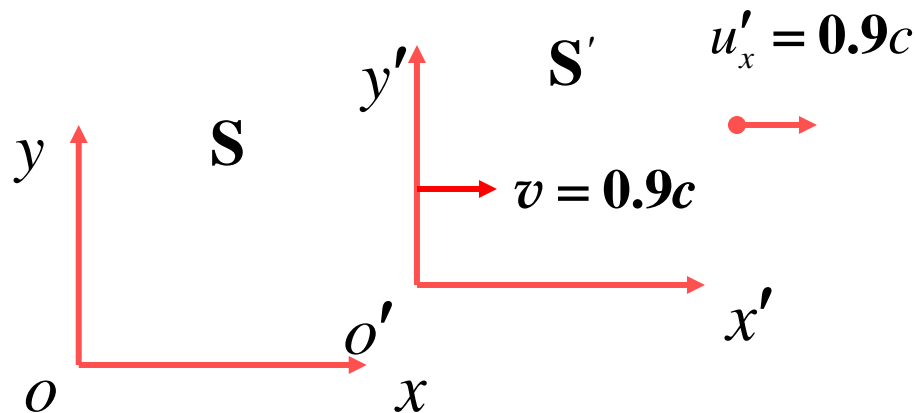
则 S' 系中 $u'_x = ?$ u'_y 、 $u'_z = ?$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = c$$

$$u'_y = u'_z = 0.$$

2) 无论在真空还是在介质中, 无论用什么方法, **都不可能使一信号速度大于光速**

S'系相对于S系运动速度 $v = 0.9c$. 而在S'系中一粒子的运动速度 $u'_x = 0.9c$, $u'_y = u'_z = 0$. 求S系的 $u_x = ?$



$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + \frac{0.9c}{c^2} 0.9c} = 0.994c .$$

例. 在 S' 系中一束光沿 y' 方向传播, 速率为 c , S' 系相对与 S 系沿 x 轴以速度 v 运动。

在 S 系中, 此束光的速率多大?

解 由洛伦兹速度逆变换公式

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0 + v}{1 + 0} = v,$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

$$u_x = v$$

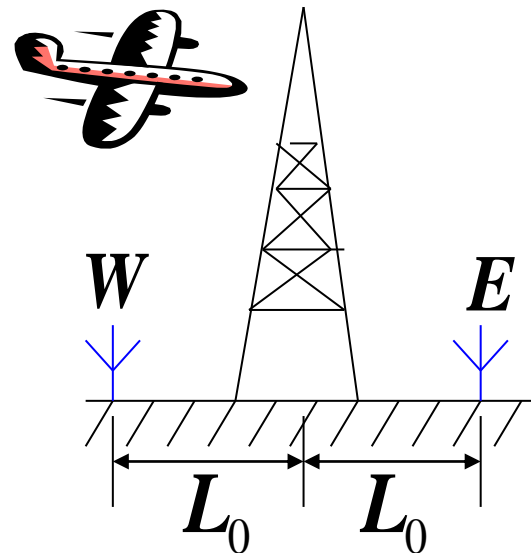
$$u_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)} = 0,$$

$$\begin{aligned} u^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\ &= v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 = c^2 \end{aligned}$$

光的速度方向发生了改变，但光的速率不变。

例：一发射台向东西两侧距离均为 L_0 的两个接收站 E 与 W 发射讯号，如图，今有一飞机以匀速度 v 沿发射台与两接收站的连线由西向东，
求：在飞机上测得两接收站收到发射台同一讯号的时间间隔是多少？



解：设东西接收到讯号为两个事件，时空坐标为地面为S系 $(x_E, t_E), (x_W, t_W)$ 飞机为S'系 $(x_E', t_E'), (x_W', t_W')$

$$\Delta t = t_E - t_W = \frac{L_0}{c} - \frac{L_0}{c} = 0 \quad \text{由洛伦兹时空变换得}$$

$$\Delta t' = t_E' - t_W' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_E - x_W)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-2L_0v}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

负号表示东先接收到讯号。

§ 3 狭义相对论时空观

一、同时性的相对性

$$S \text{系} \quad A(x_1, t_1) \quad B(x_2, t_2) \quad t_2 = t_1 \quad x_2 \neq x_1$$

不同地点同时发生两事件A、B.

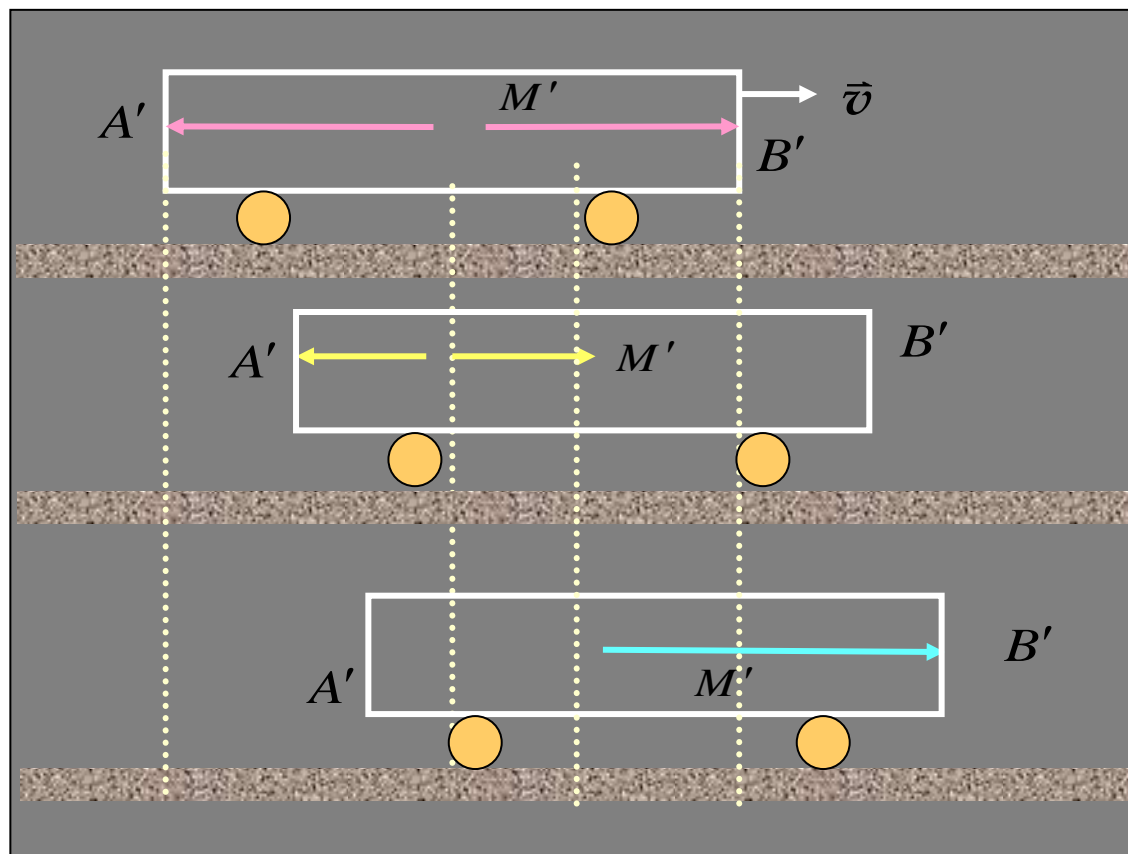
$$S' \text{系} \quad A(x'_1, t'_1) \quad B(x'_2, t'_2) \quad \text{时间} \quad t'_2 \neq t'_1$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

火车参考系 S'

站台参考系 S



S' 系中 A' B' 同时

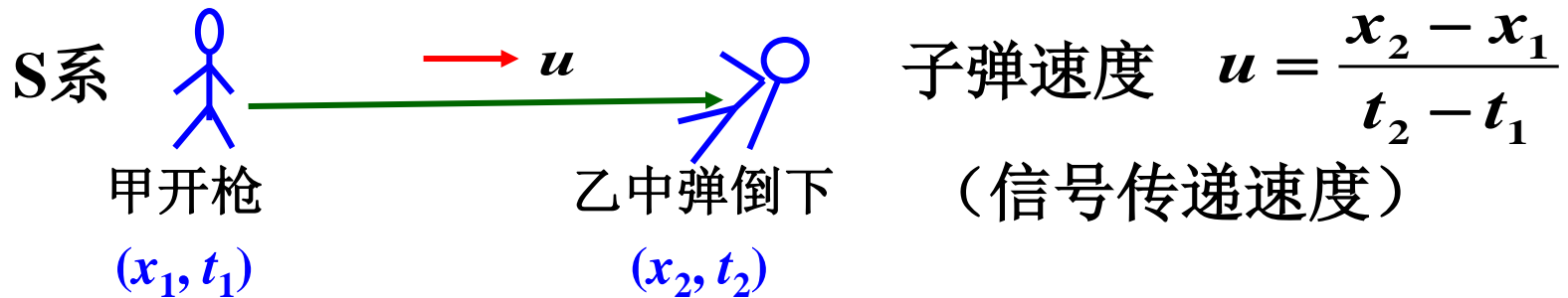
S 系中 A' 先 B' 后

同时相对性：两个惯性系存在相对运动时，在其中一个惯性系中同时发生的两个事件，在另一个惯性系中不一定同时发生。

同时的相对性是建立在光速不变原理上的

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{若 } t_2 > t_1 \quad \begin{cases} \Delta t' > 0 \\ \Delta t' \leq 0 \end{cases}$$

同时的相对性是否会改变相关事件的因果关系？



甲先开枪，乙后中弹倒下。即： $t_2 > t_1$

S'系中观察 是否会有 $t'_2 < t'_1$ ，即：乙先中弹倒下，甲后开枪？

S'系中:

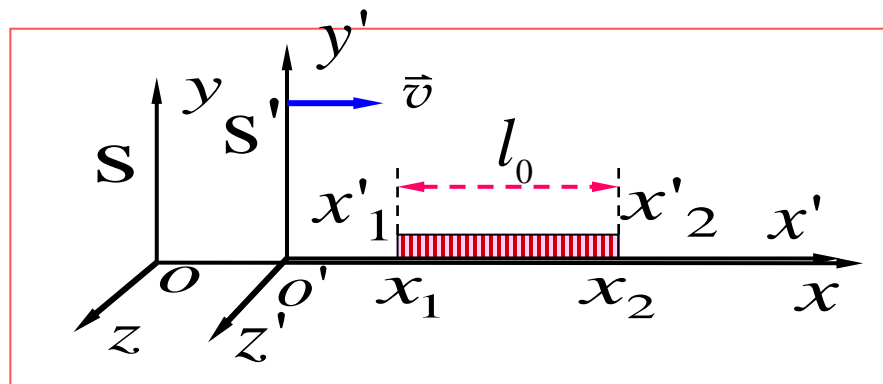
$$\Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[1 - \frac{v}{c^2} \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \right] > 0$$

$$(\because u < c)$$

即当 $t_2 > t_1$ 时, 始终有 $t'_2 > t'_1$

同时的相对性不会改变相关事件的因果关系

二、长度的相对性（运动的尺收缩）



S'系: 尺**静止**放在 x' 轴上,

$$l_0 = l' = |x'_2 - x'_1|$$

(**原长**: 相对**静止**的参考系中测量的长度)

S系中: 观测者必须同时测 x_1 、 x_2 , $t_2 = t_1 = t$

得: $l = |x_2 - x_1| = ?$