经典力学

第一章：质点运动学

第二章：质点动力学

第三章：刚体的定轴转动

- 经典力学
  - “运动学”
    - 质点运动的描述
    - 圆周运动
    - 相对运动
  - “动力学”
    - 牛顿定律
    - 动量/能量守恒定律
    - 刚体的定轴转动

第三章 刚体的定轴转动

§1 刚体、刚体的运动

一、刚体

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。

或：在受力或运动过程中任意两部分之间的距离和相对位置保持不变物体。

说明：

（1）刚体也是一个理想化模型。

（2）刚体可以看作是由“一系列”质点组成的，称为质点系或质元组。质元的运动遵守质点运动的规律性。

（3）刚体的选取具有相对性，某一物体有些情况下可以描述为刚体，有时则不能。

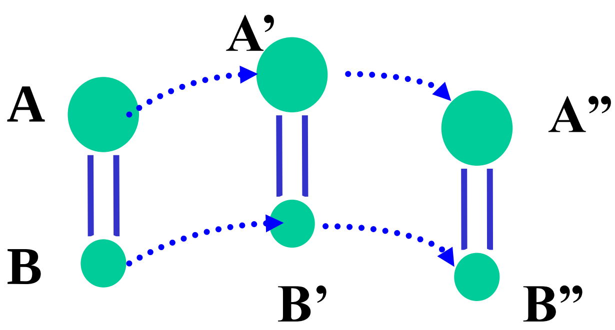
二、刚体的运动

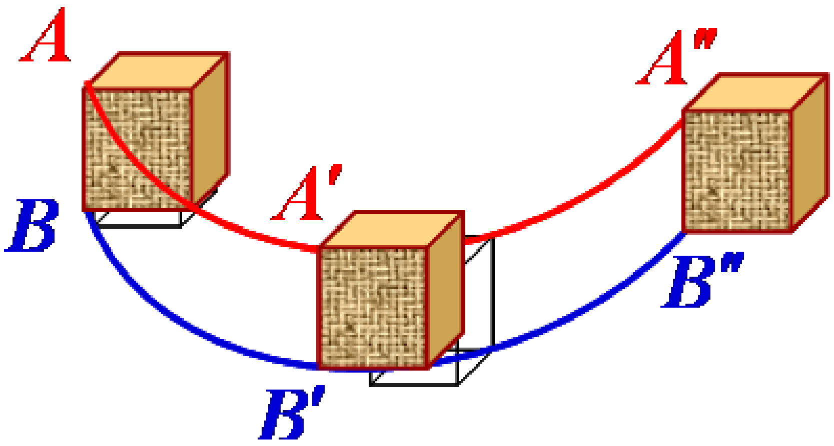
刚体的运动包括平动、转动、滚动 。

1. 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。或，在运动过程中刚体上的任意一条直线在各个时刻的位置都相互平行。

刚体的平动可以由其质心的质点运动来描述。或者任意质元运动都代表整体运动。

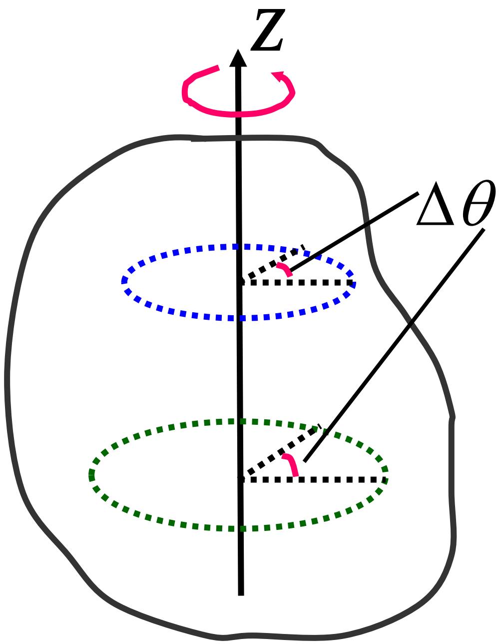




2. 转动

组成刚体的各质点都绕同一直线做圆周运动。

这条线为**转轴**。

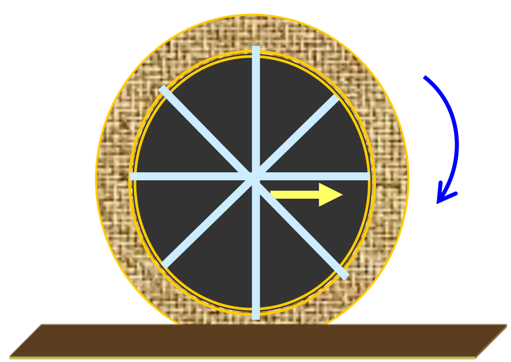


定轴转动：若转轴相对于给定的参考系在空间固定不动，则称**刚体**做**定轴转动**。

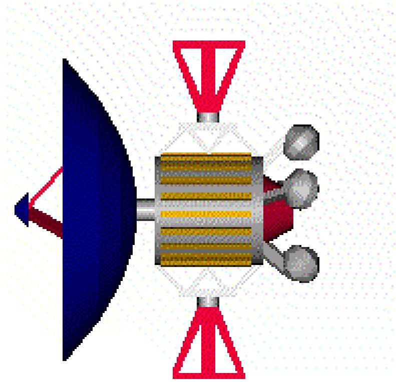
刚体的一般运动（如：运行的车轮），

可以描述为：随某点(基点)的平动 +

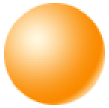
过该点的定轴转动。



转动的例子——



滚动的例子——



刚体的一般运动 = 质心的平动 + 绕质心的转动

§2 刚体定轴转动的描述

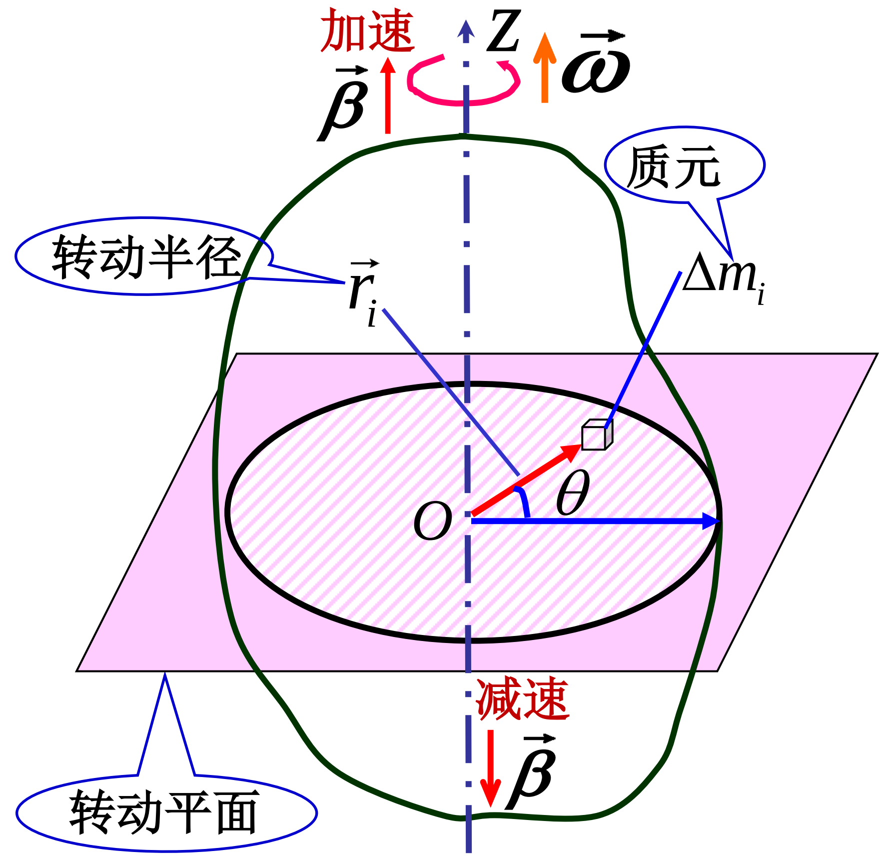
一、 定轴转动的描述

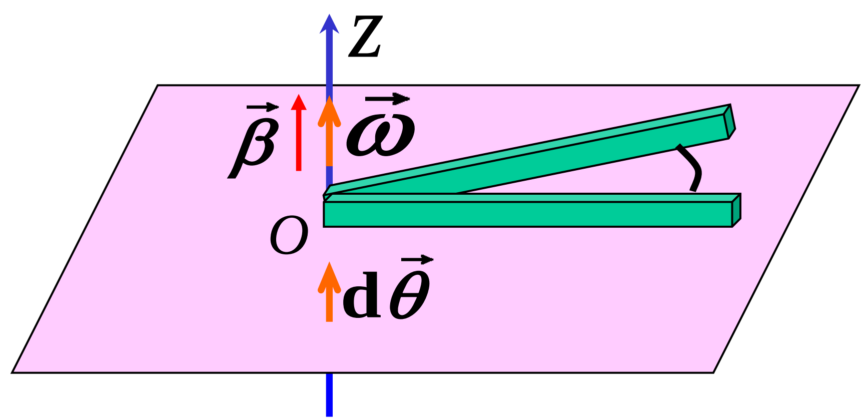
（1）研究刚体定轴转动的——转动平面、质元、转动半径。

（2）各质元都绕同转轴做圆周运动。圆面为转动平面。

（3）刚体上所有质元都具有相同的角位移$d\vec{\theta}$、相同的角速度$\vec{\omega}$、相同的角加速$\vec{\beta}$。

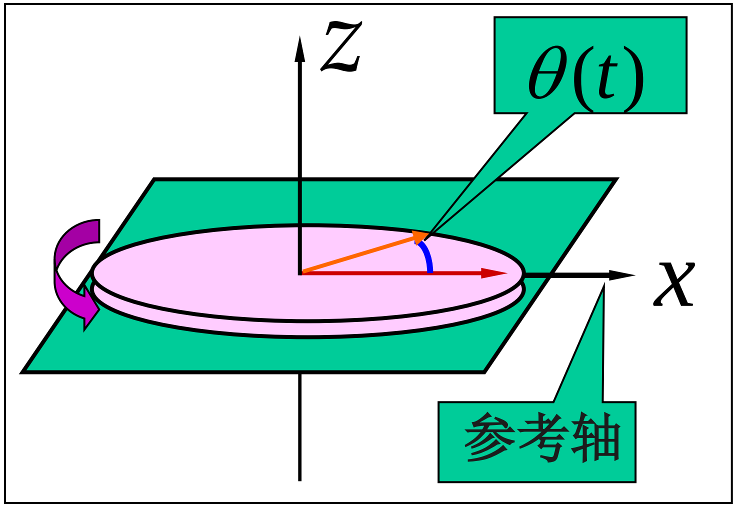
（4）运动描述仅需一个坐标 。





二、 刚体转动的角速度和角加速度

1. 角坐标 $\theta = \theta(t)$



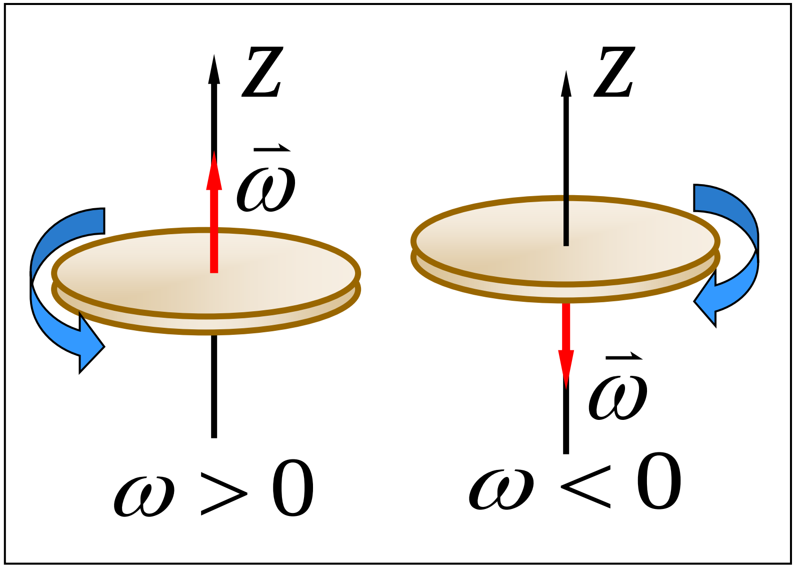
约定：$\vec{r}$ 沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

$\vec{r}$ 沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

2. 角位移的大小

$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

3. 角速度的大小 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$



刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示。

4. 角加速度的大小 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

5. 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角速度为恒量时，刚体做匀速转动 。

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动 。匀变速转动的角加速度为恒量。

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

三、 刚体上某一质元的运动

$$d\vec{r}_i = d\vec{\theta} \times \vec{r}_i$$

$$|d\vec{r}_i| = ds_i = r_i d\theta$$

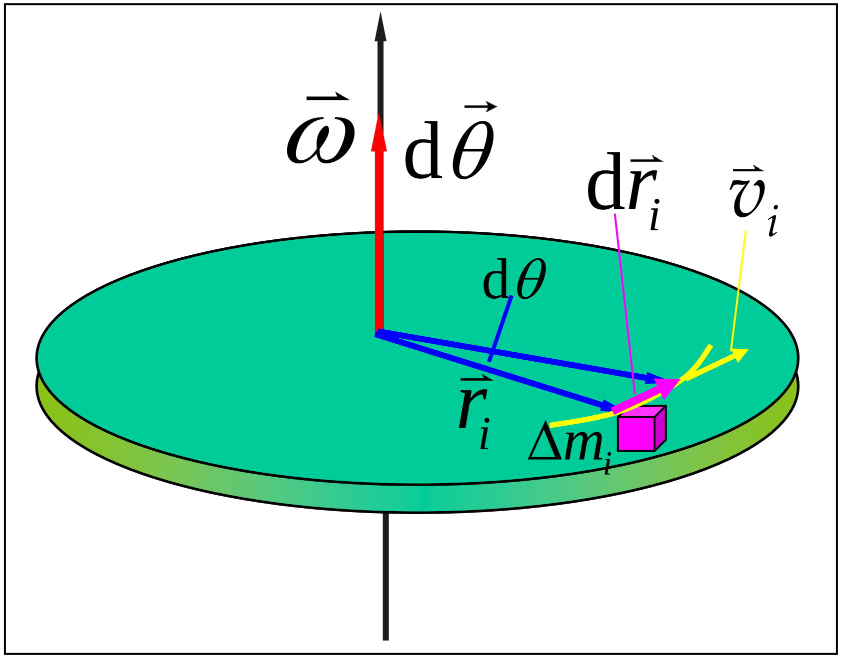
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

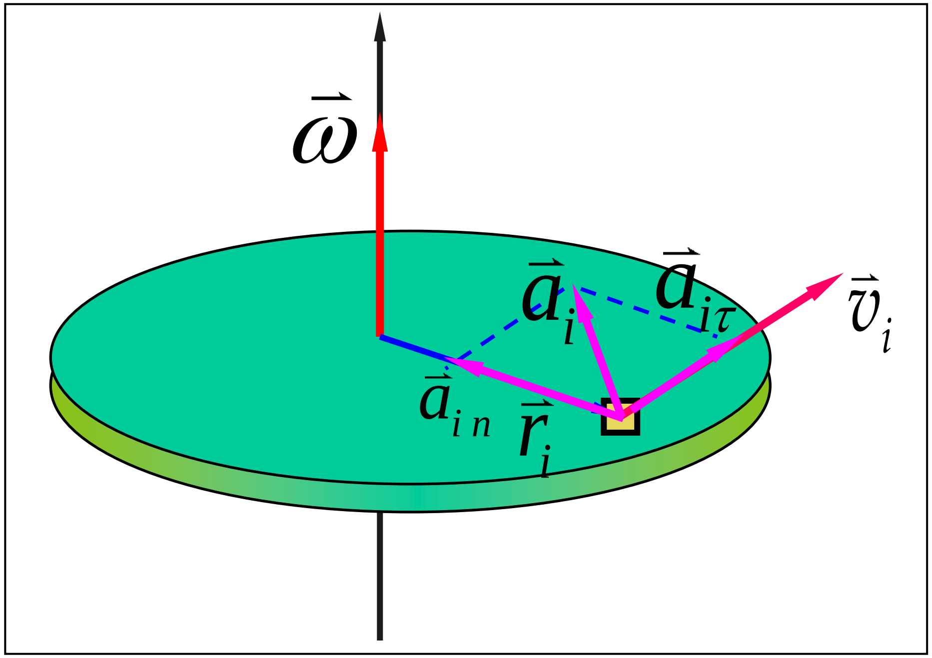
$$v_i = r_i \omega = v_{i\tau}$$

$$\vec{a}_i = a_{i\tau}\vec{\tau}_0 + a_{in}(-\vec{r}_0)$$

$$a_{i\tau} = \frac{dv_i}{dt} = r_i \beta$$

$$a_{in} = v_i \omega = \omega^2 r_i = \frac{v_i^2}{r_i}$$





§3 刚体定轴转动的转动定律

一、力矩

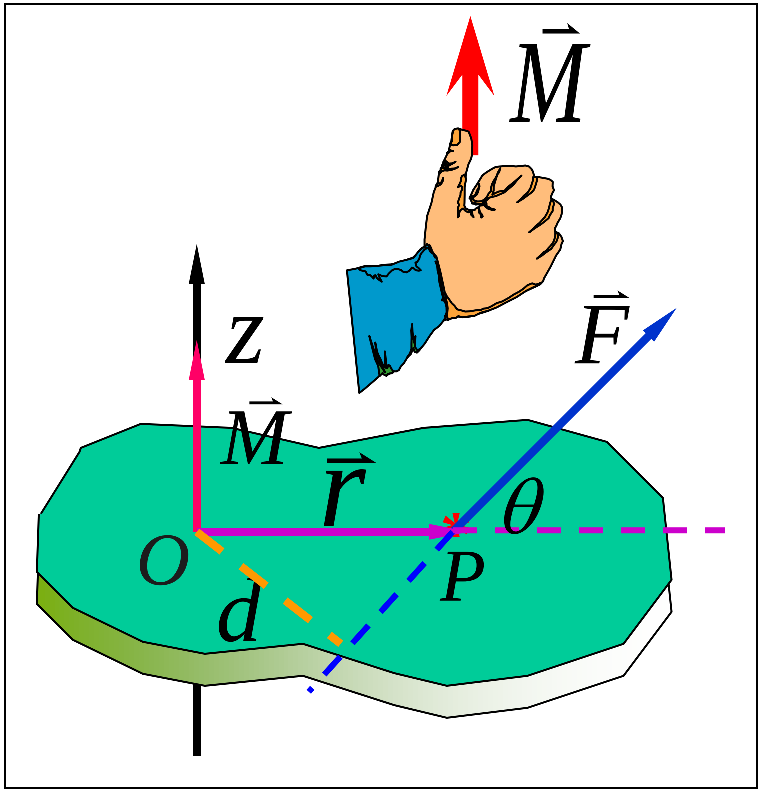
刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点O 到力的作用点 P 的径矢。

$\vec{F}$ 对转轴 Oz 的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

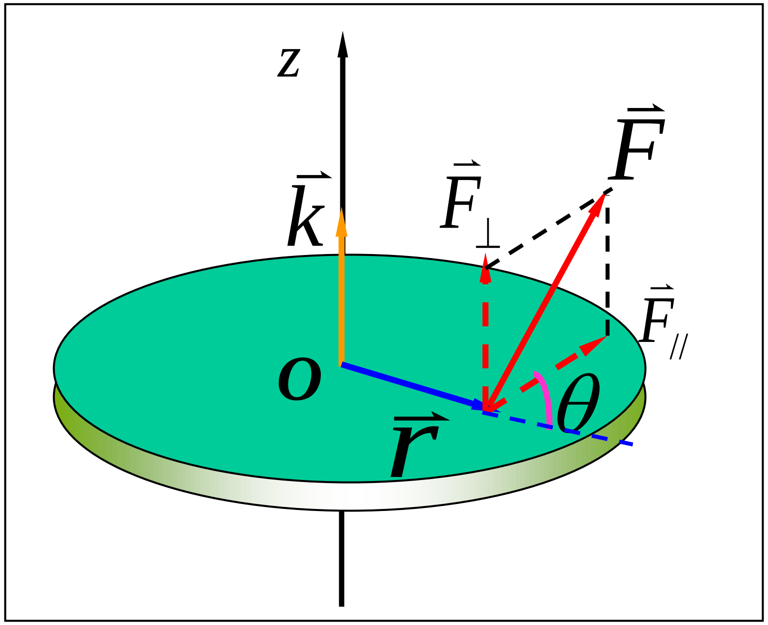
$$M = Fr\sin\theta = Fd$$

$d = r\sin\theta$: 力臂



讨论：

（1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转动平面的两个分量



$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{//}$$

其中 $\vec{F}_{\perp}$ 对转轴的力矩为零，故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩为

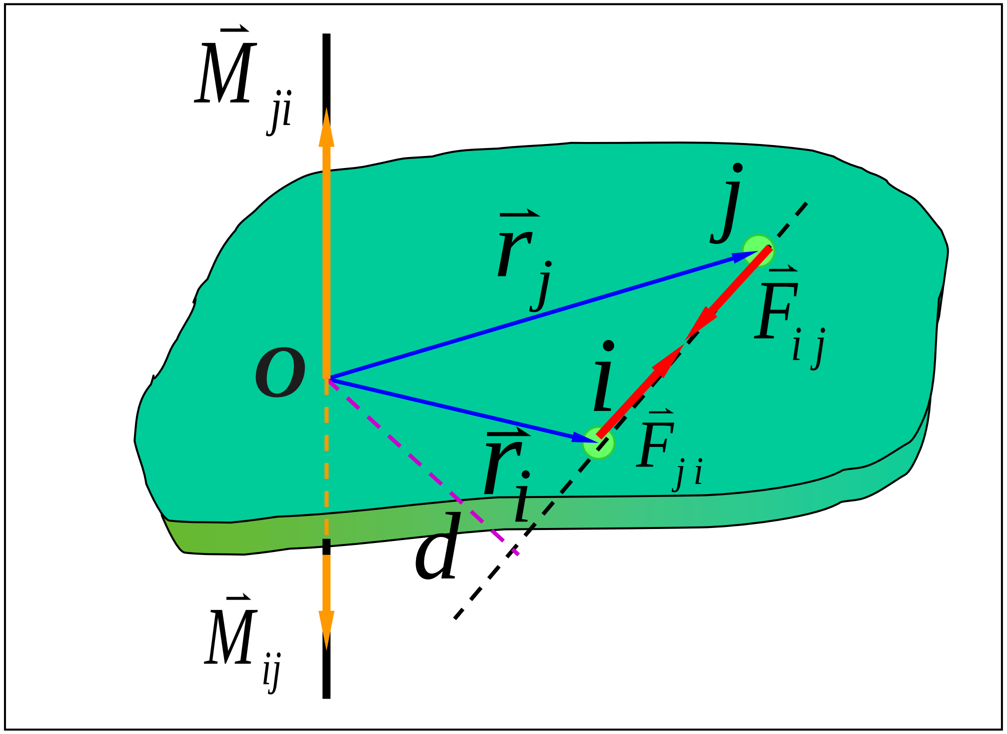
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_z = rF_{//} \sin\theta$$

（2）合力矩等于各分力矩的矢量和。

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

（3）刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消。

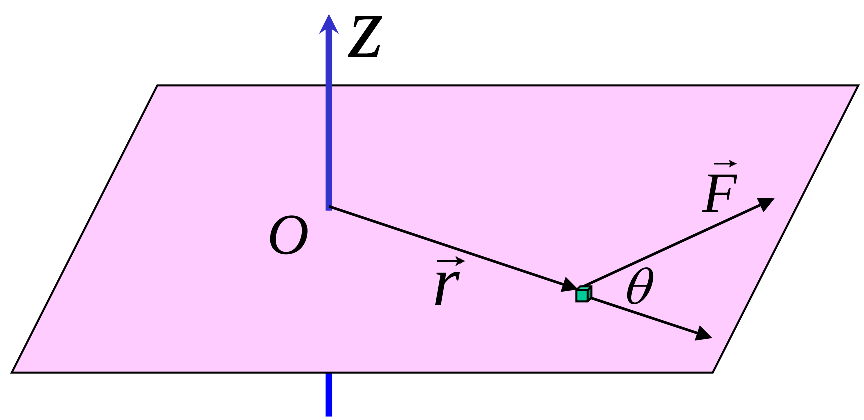


$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

（4）对于质点

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

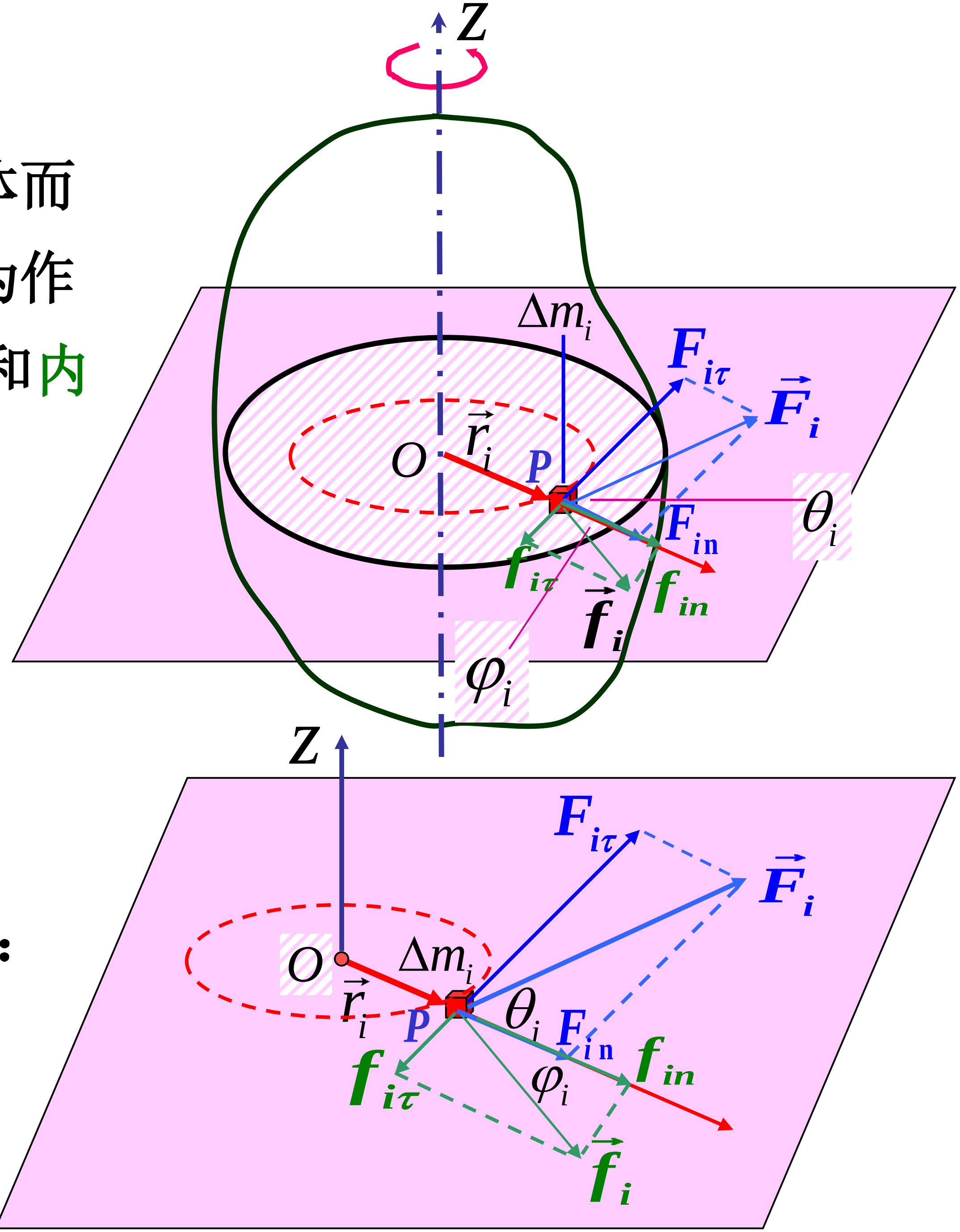
$$M = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$$



二、转动定律

对于定轴转动的刚体而言，设 $\vec{F}_i$ 和 $\vec{f}_i$ 分别为作用于质元 Δm_i 上的外力和内力在转动平面内的分量。

Δm_i 为刚体内任意质元。



根据牛顿第二定律：

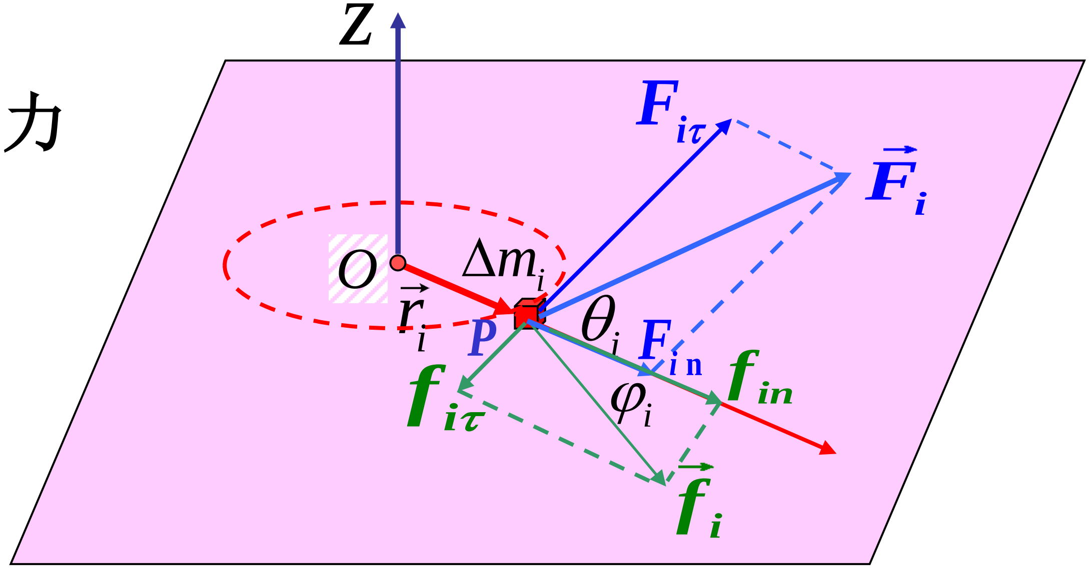
$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

自然坐标系下的分量式：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$$

$$F_{in} + f_{in} = \Delta m_i a_{in}$$

法向分量 $\vec{F}_{in}$ 和 $\vec{f}_{in}$ 对转轴力矩为零。



切向分量式两端同乘 r_i ，

并考虑到：$a_{i\tau} = r_i\beta$

$$(F_{i\tau} + f_{i\tau})r_i = \Delta m_i r_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 直至取遍整个刚体。

则对整个刚体，有： $\sum_i F_{i\tau} r_i + \sum_i f_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$

作用于刚体内每一质元上的内力矩的矢量和为零，即

$$\sum_i f_{i\tau} r_i = 0$$

$$\sum_i F_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

$\sum_i F_{i\tau} r_i$ 为作用于刚体内每一质元上的外力矩的矢量和。

$$M = \sum_i F_{i\tau} r_i$$

定义：刚体的转动惯量 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

则有： $M = J\beta$ 即： $\boxed{\vec{M} = J\vec{\beta}}$

刚体定轴转动的转动定律：刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

——刚体定轴转动的基本动力学规律。

三、转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

- 物理意义：刚体转动惯性的量度。
- 对于质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+\cdots\cdots$$

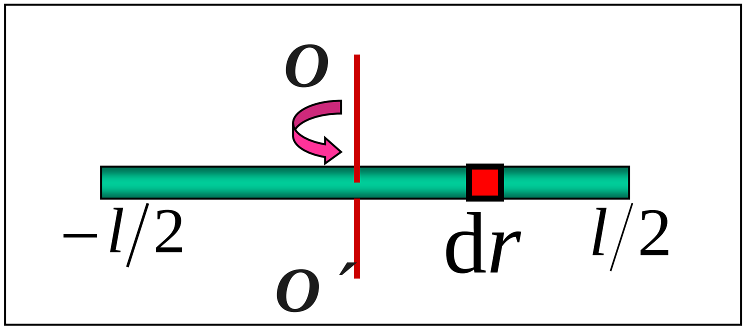
- 质量连续分布刚体的转动惯量

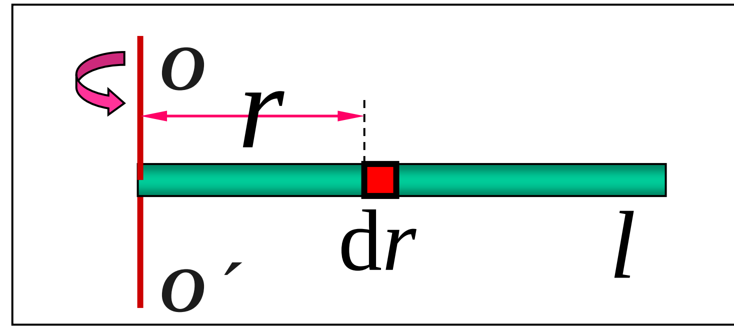
$$\boxed{J=\lim_{\Delta m_i\to 0}\sum_i \Delta m_i r_i^2=\int r^2 dm}$$

$\mathrm{d}m$ ：质量的微元

- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$　　λ 为质量线密度
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$　　σ 为质量面密度
- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$　　ρ 为质量体密度

例1　一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量。





解　设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = \lambda r^2 \mathrm{d}r$$

$$J = 2\lambda \int_0^{l/2} r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{12}\lambda l^3$$

$$= \frac{1}{12} m l^2$$

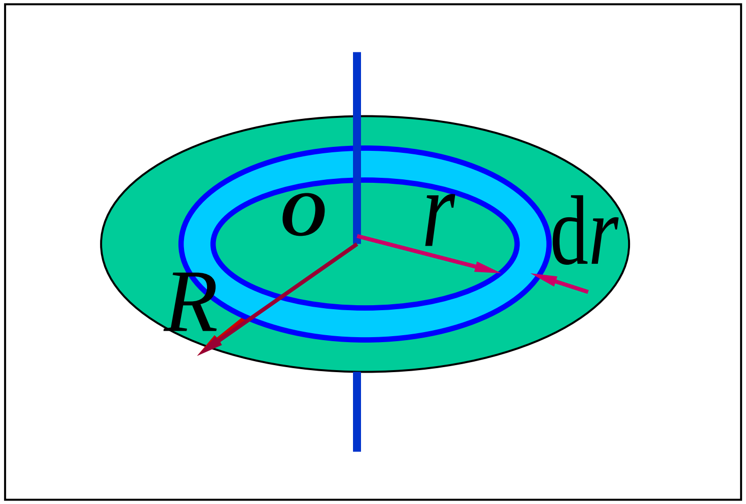
如转轴过端点垂直于棒

$$J = \lambda \int_0^{l} r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3} m l^2$$

例2　一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 。

解：设圆盘面密度为 σ，在盘上取半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = 2\pi\, \sigma r^3\mathrm{d}r$$

$$J = \int_0^R 2\pi\, \sigma r^3\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi\, R^4$$

而 $\sigma = m/\pi\, R^2$　　所以 $J = \frac{1}{2}mR^2$

➢转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置 。

➢ 转动定律应用

$$\boxed{M = J\beta}$$

说明:（1） $M = J\beta$, β 与M 方向相同.

（2） 为瞬时关系.

（3） 转动中 $M = J\beta$ 与平动中 $F = ma$ 地位相同.

解题思路:

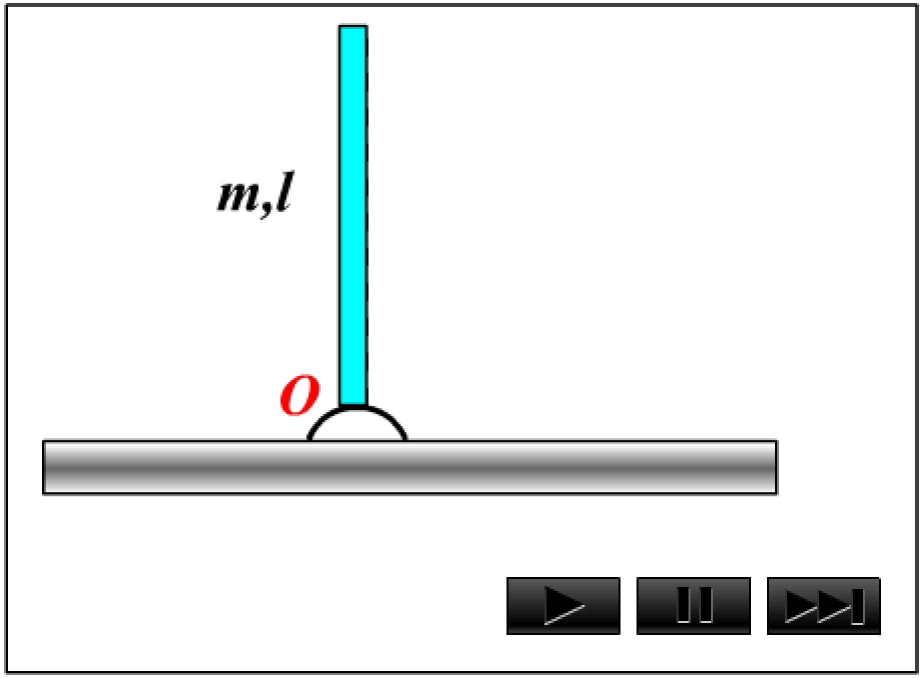
（1）选物体
（2）看运动
（3）查受力和力矩（注意:画隔离体受力图）
（4）列方程（注意:定义坐标系）

例3　一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动。由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动。试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度。

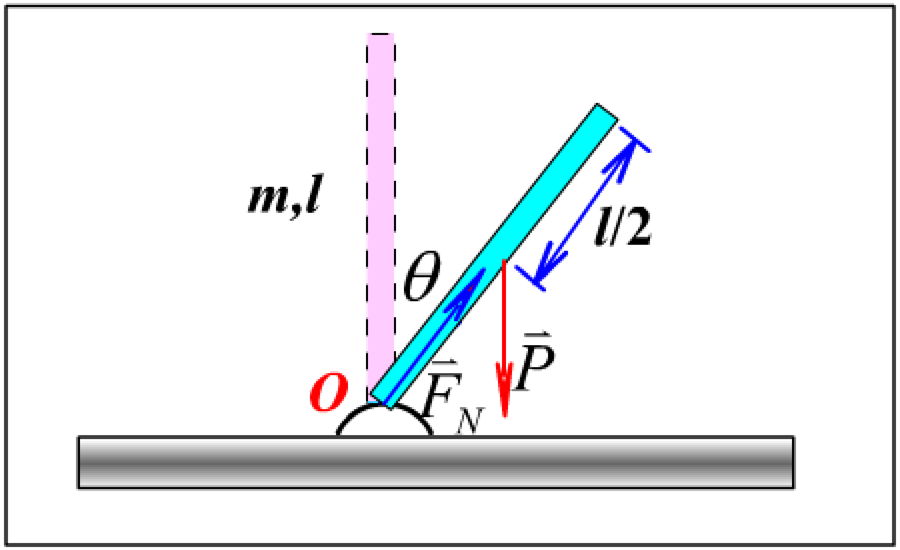
解：细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\beta$$

式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$



得： $\beta = \dfrac{3g}{2l}\sin\theta$



由角加速度的定义：

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

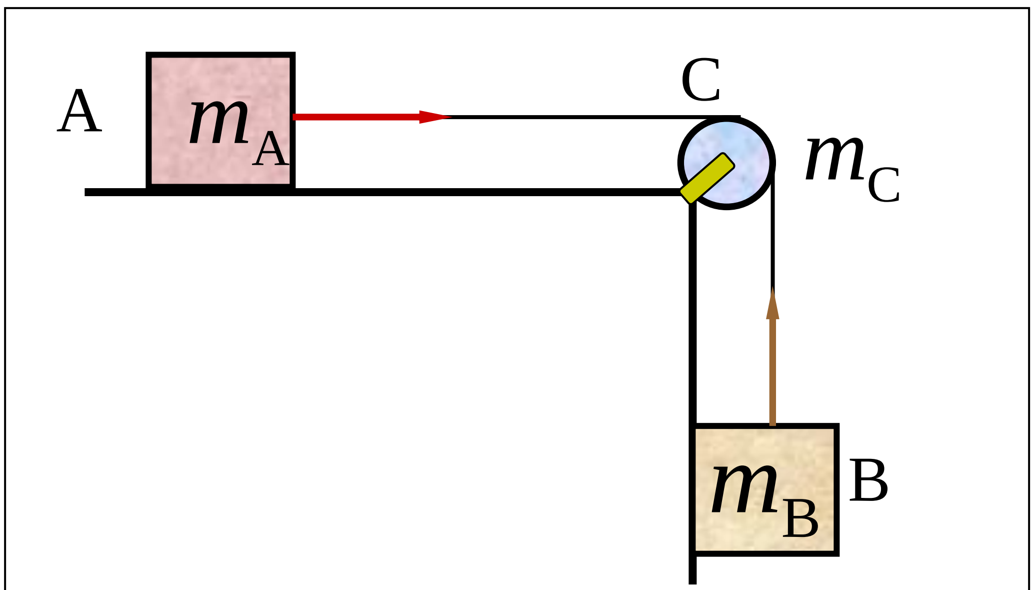
$$\omega\mathrm{d}\omega = \beta\mathrm{d}\theta = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分：

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

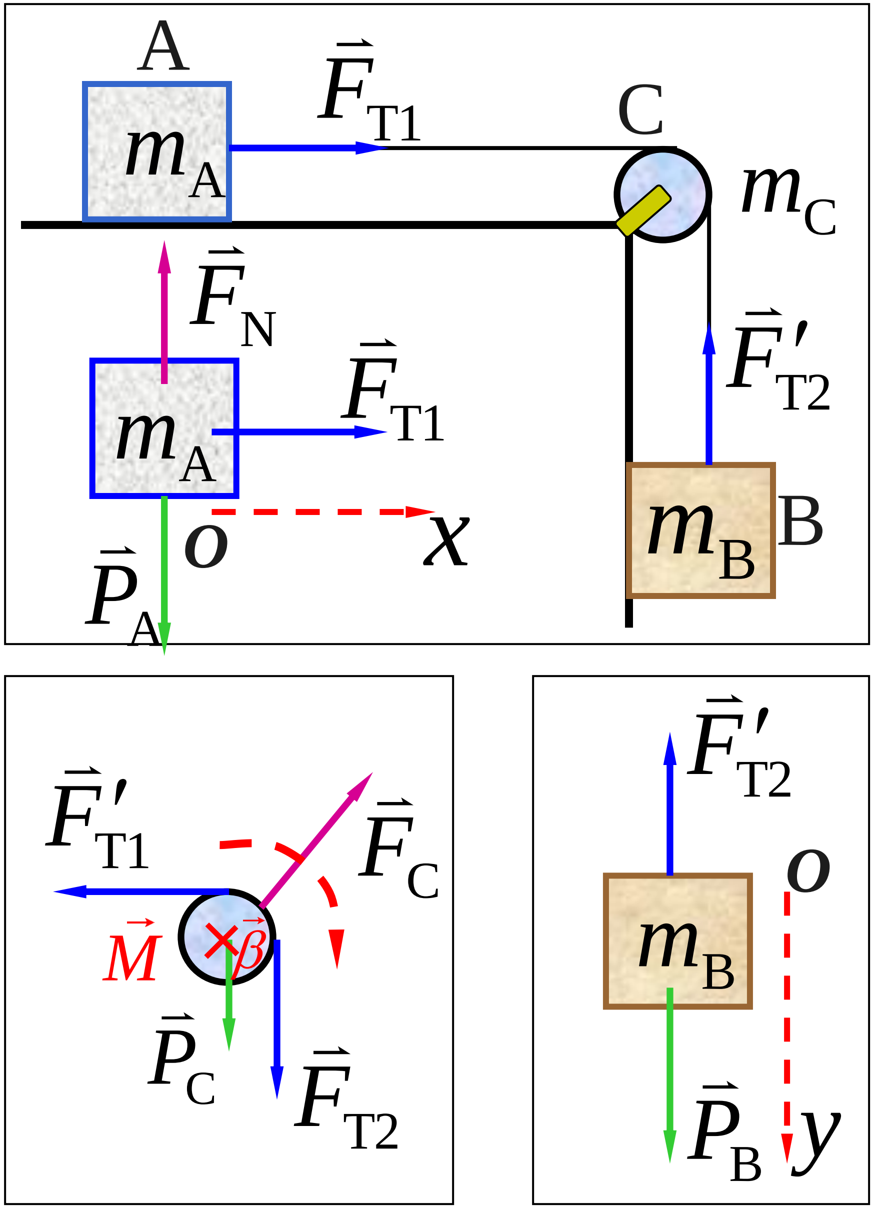
得：$\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

例4 质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上。滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。问：（**1**） 两物体的线加速度为多少？ 水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（**2**） 物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？



（**3**）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为M_f 再求线加速度及绳的张力。

解 （1）隔离物体分别对物体A、B及滑轮作受力分析。

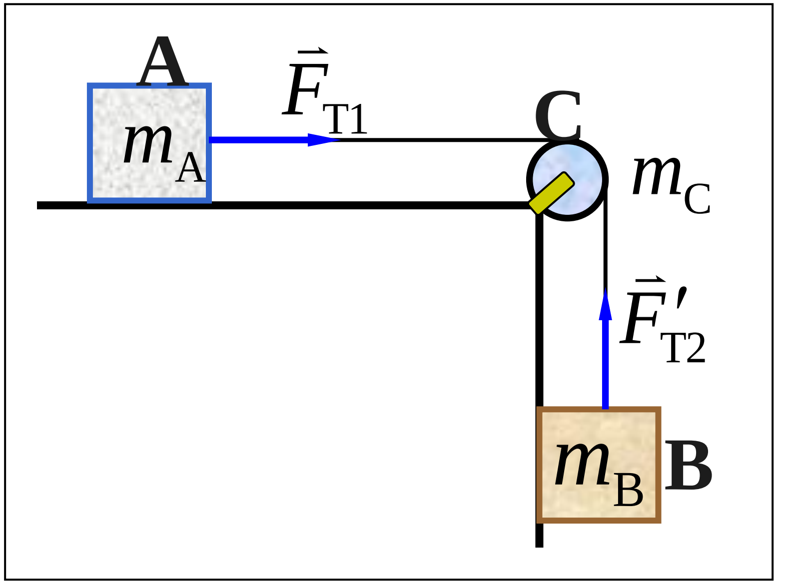


取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程 。

$$
\begin{cases}
F_{T1} = m_A a \\
m_B g - F'_{T2} = m_B a \\
RF_{T2} - RF'_{T1} = J\beta \\
F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2} \\
a = R\beta
\end{cases}
$$

由上述方程组解得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\ F_{T1} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\ F_{T2} = \dfrac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \end{cases}$$



如令 $m_C = 0$，可得 $F_{T1} = F_{T2} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$

（2）B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

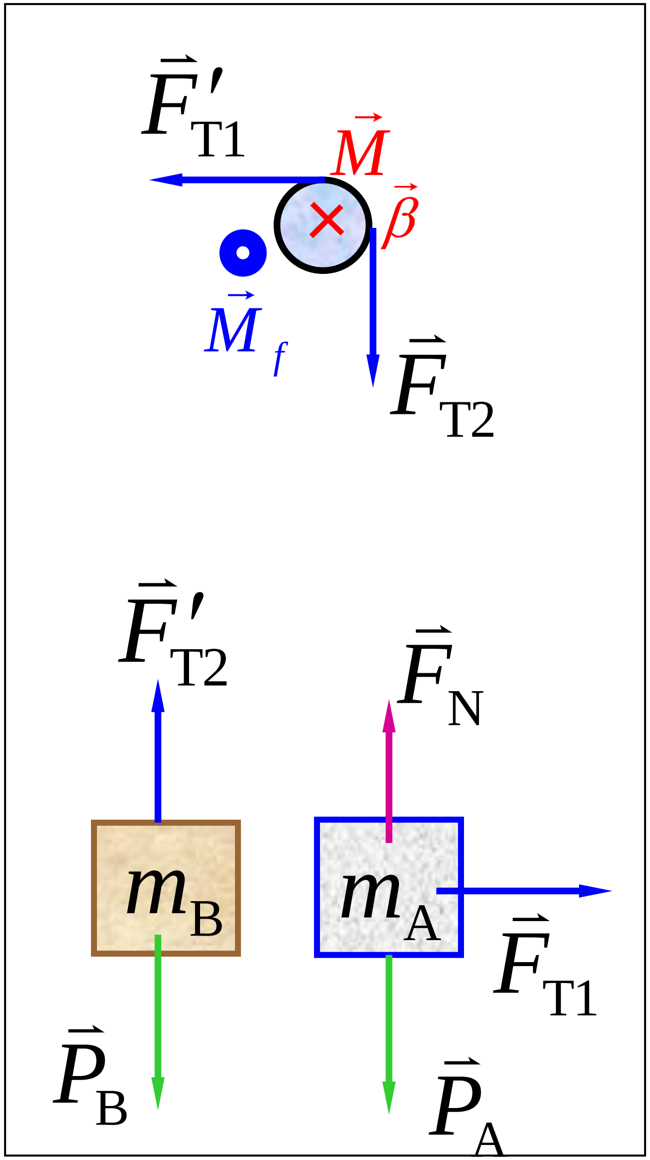
$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2m_B g y}{m_A + m_B + m_C/2}}$$

（3）考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，转动定律

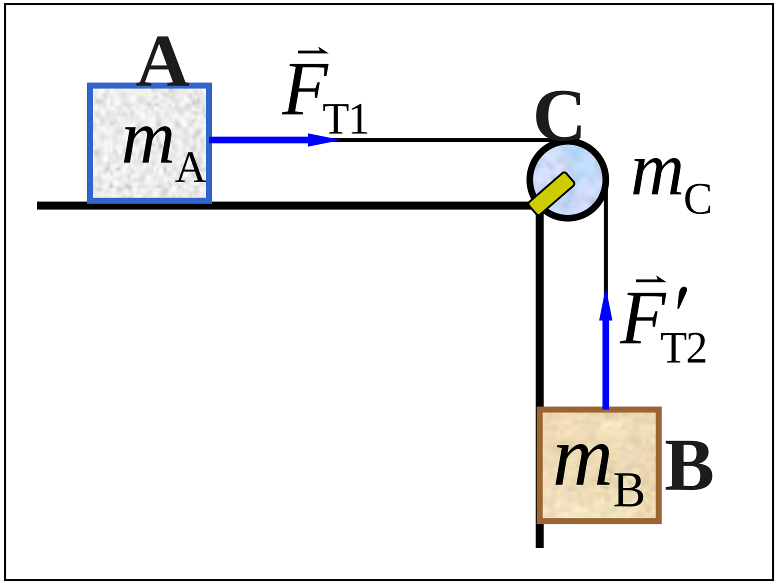
$$RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta \\ a = R\beta \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
F_{T1} = m_A a \\
m_B g - F_{T2} = m_B a \\
RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta \\
a = R\beta
\end{cases}
$$



由上述方程组解得：

$$a = \frac{m_B g - M_f / R}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

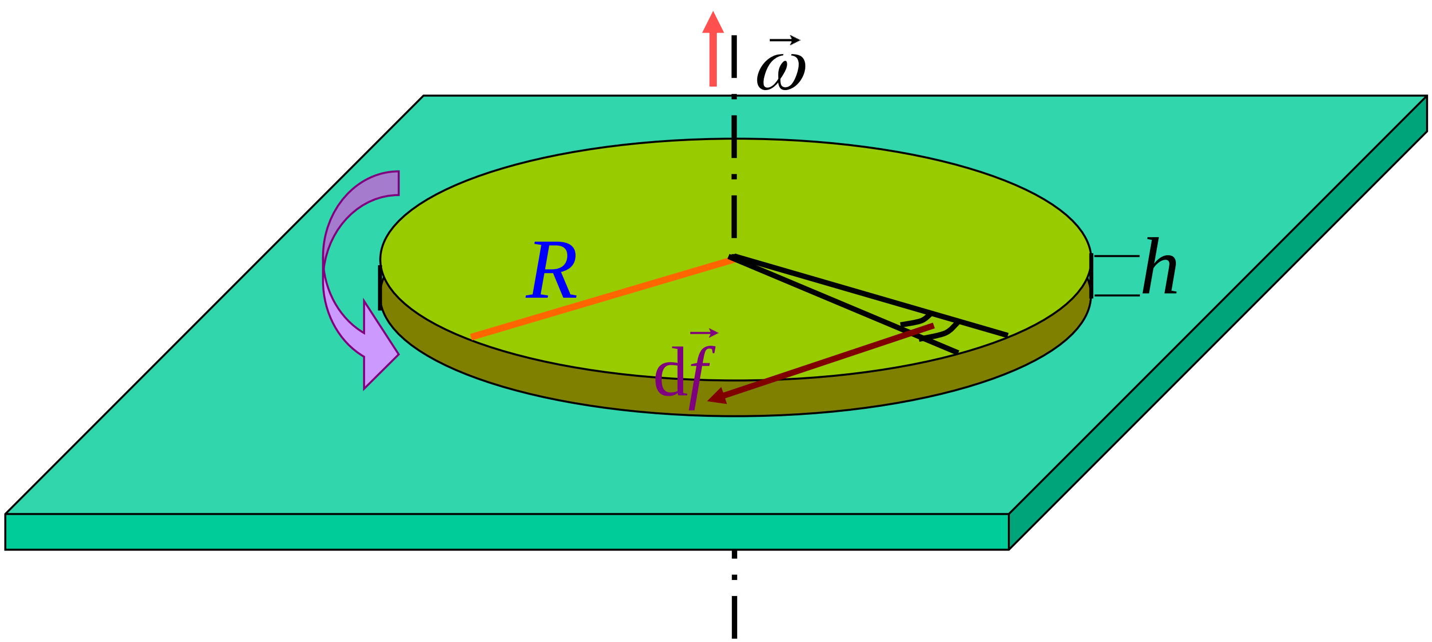
$$F_{T1} = \frac{m_A (m_B g - M_f / R)}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_B \left[(m_A + m_C / 2) g + M_f / R \right]}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

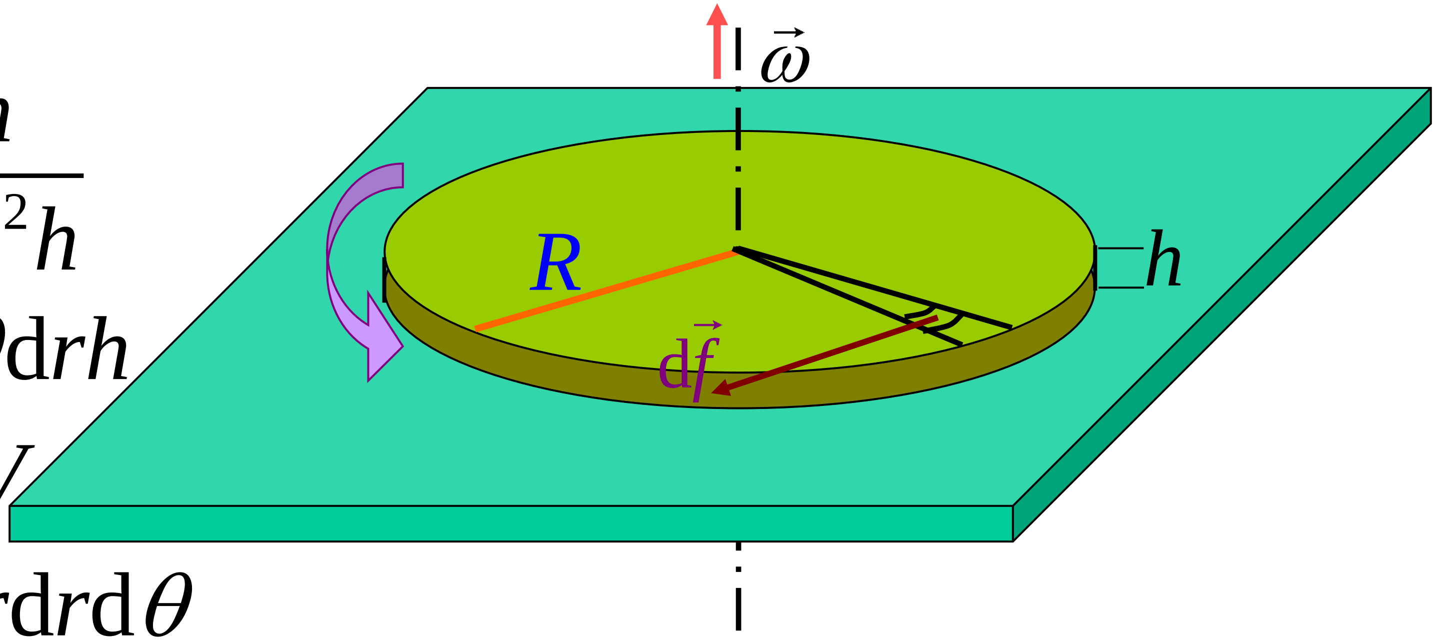
类似题目：教材61页例3-1

选讲

**例5 一长质量为 m 半径为 R 厚 h 的匀质圆盘水平放置在一个固定的桌面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ，匀质圆盘可绕过其圆心的轴转动。设初始 $t_0=0$ 时刻圆盘角速度为 ω_0，求：（1）圆盘由于受到摩擦阻力作用所产生的角加速度，（2）从初始时刻算起，当圆盘停住转动时转过了多少圈？



解：（1）



$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\theta \mathrm{d}rh$$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

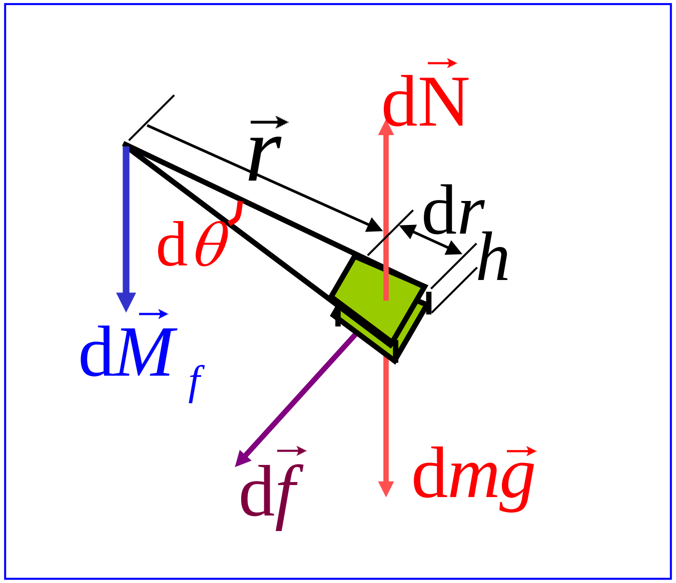
$$\mathrm{d}m = \rho hr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}mg = \rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N = \mu\rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

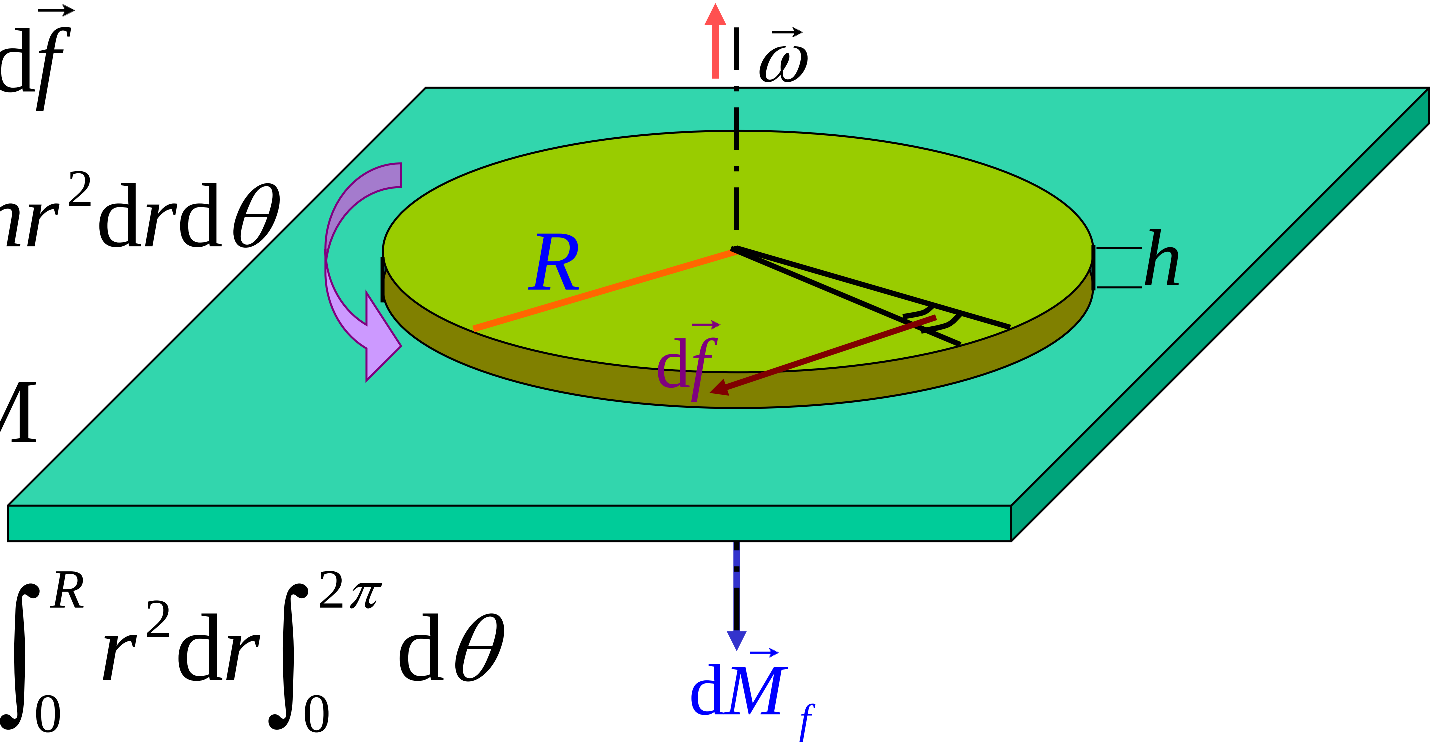
$$\mathrm{dM} = r\mathrm{d}f = \mu\rho ghr^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

$$\mathrm{dM} = \mu\rho g h r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{M} = \int_{(\mathrm{m})} \mathrm{dM}$$



$$= \mu\rho g h \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\mu m g R$$

（2） $M = J\beta$ $\quad \frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2} m R^2 \beta \quad \beta = \frac{4\mu g}{3R}$

$$0 = \omega_0^2 - 2\beta\Delta\theta \qquad n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$