说明：

1. $$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$$ 波沿x轴正向传播

$$y = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$$ 波沿x轴负向传播

**2.角波数（简称波数）

角波数：2π长度内含的波长数目

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

平面谐波一般表达： $y = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi)$

负（正）号代表向 x 正（负）向传播的简谐波。

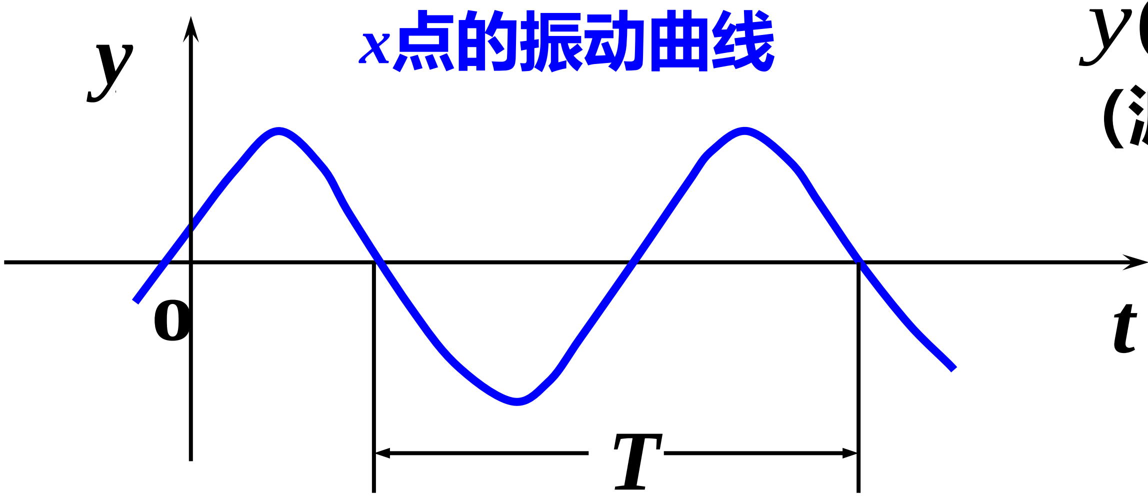
3. 波函数的物理意义

- 当坐标 x 确定，波动方程变成 y - t 关系，表示 x 点的振动，以与 x 轴同向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[\omega t + \left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]$$

令 $\varphi = \varphi_0 - \dfrac{2\pi}{\lambda}x$

则 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$



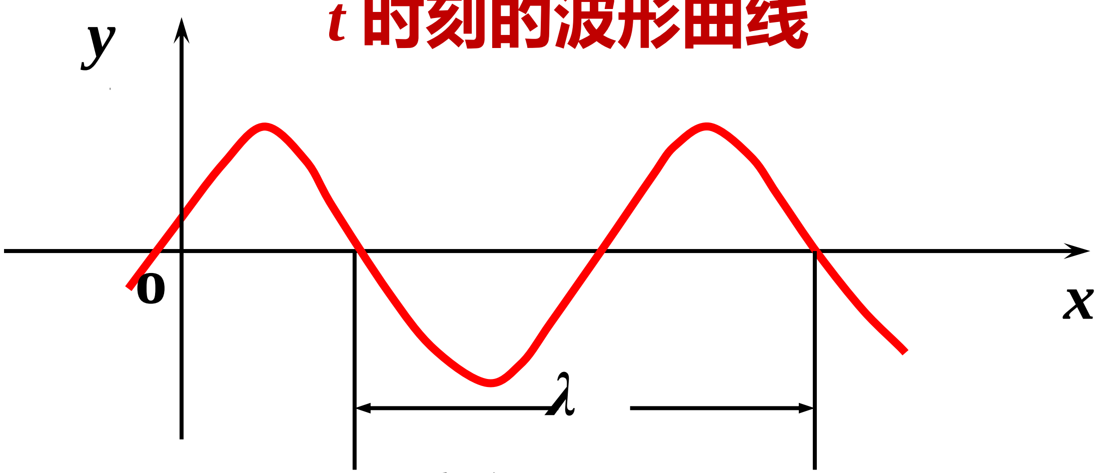
$$y(x,t) = y(x,t+T)$$

(波具有时间的周期性)

- **当时刻 t 确定，**波动方程变成 y- x 关系表达了 t 时刻空间各点位移分布——**波形图 (波形定格照片)**，以与 x 轴同向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[-\frac{2\pi}{\lambda}x + \left(\omega t + \varphi_0\right)\right]$$

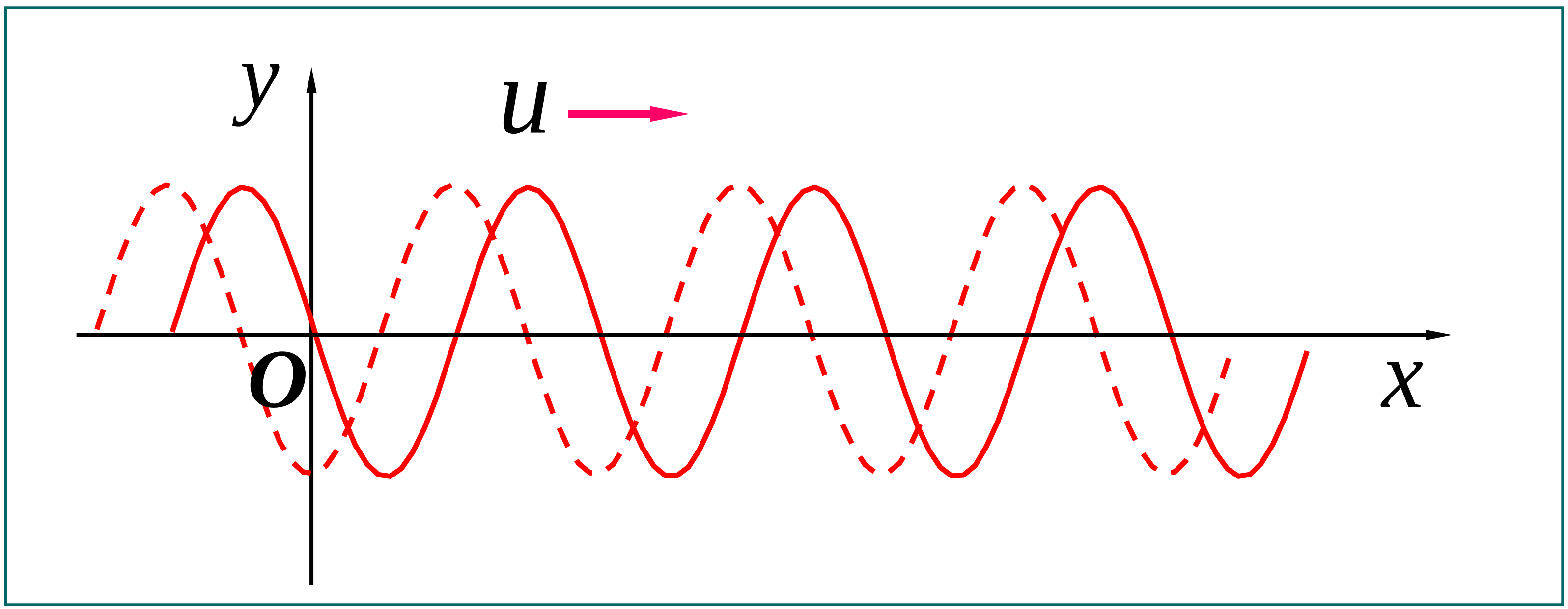
t 时刻的波形曲线



(空间周期)

当 x、t 都变化时，方程表示在不同时刻各质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$



4. 波动传播到的各点媒质质元的振动速度和加速度

- 以沿 x 轴正向传播的平面简谐波为例

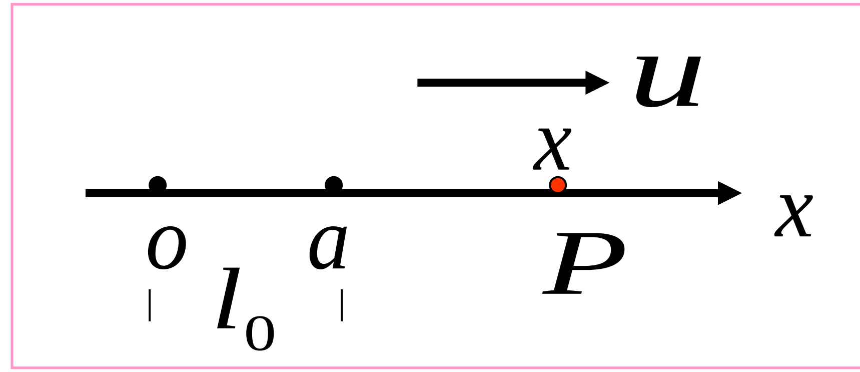
$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

例1 已知：波沿着x轴的正方向传播，波源 a 的振动形式为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



求：波函数的表达式

解： 任意一点 P 坐标为 x

解法一： P 点相位落后于波源 a 的振动相位 $\frac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|$

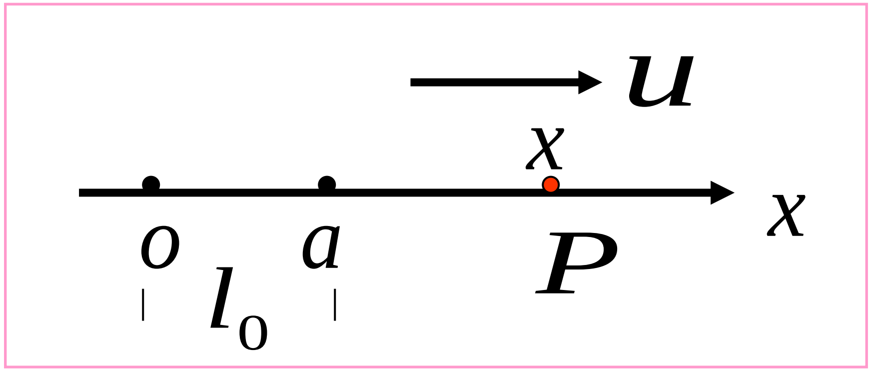
所以就在 a 点振动表达式的基础上改变相位因子就得到了 P 的振动表达式

$$y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|\right]$$

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(x - l_0)\right]}$$

解法二：

时间落后



$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\left|\overline{Pa}\right|}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{\omega}{u}\left(x - l_0\right)\right]$$

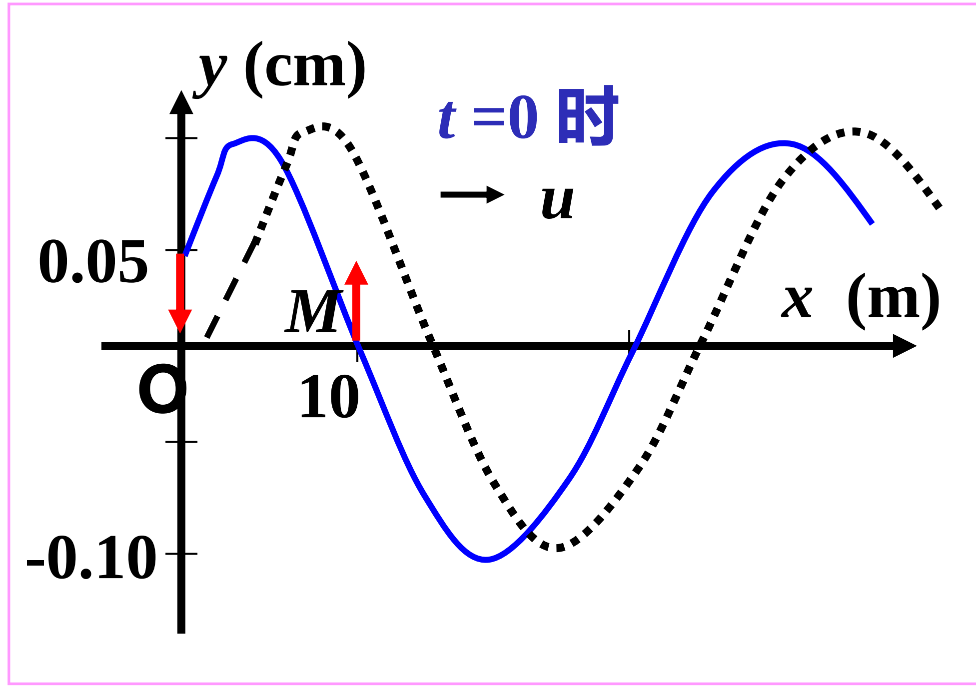
$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x - l_0\right)\right]}$$

例2 **正向波在*t* =0时的波形图，波速u=1200m/s。**

求：波函数和波长

解：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$



由图 $A = 0.10(cm)$

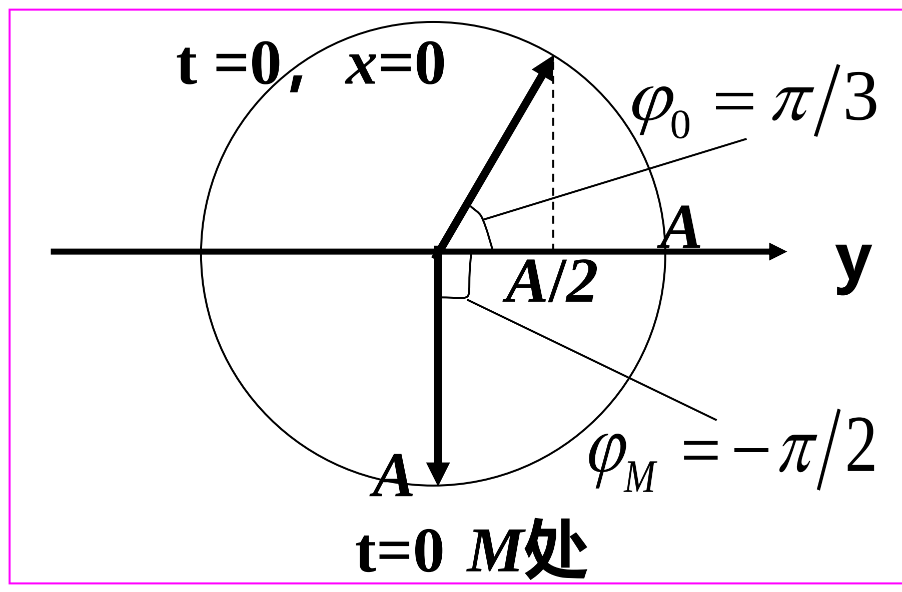
如何确定：$\omega, \quad \varphi_0$

由初始条件： $y_0 = A/2,\ v_0 < 0$

$\longrightarrow \quad \varphi_0 = \pi/3$

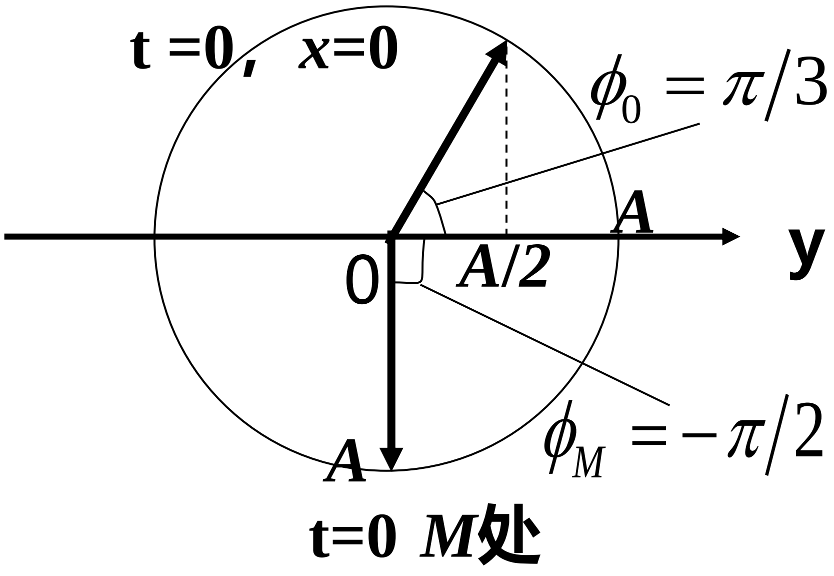
***M*点状态** $y_M = 0,\ v_M > 0$

$\longrightarrow \quad \varphi_M = -\pi/2$



M 点与*O*点的相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_M = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$



M 点与*O*点的时间差：

$$\Delta t = \frac{\overline{OM}}{u} = \frac{10}{1200}s = \frac{1}{120}s$$

则： $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 100\pi$ $\lambda = uT = u\frac{2\pi}{\omega} = 24(m)$

$$y = 0.10\cos\left[100\pi\left(t - \frac{x}{1200}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$$

**三、波动方程的微分形式

- 以沿 x 轴正向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right] \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{u} A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right] \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2} A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

√ 一维**波动方程** (各向同性，无色散介质内)

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

介质中的波速!!!

√ 解的形式之一 —— 特解：

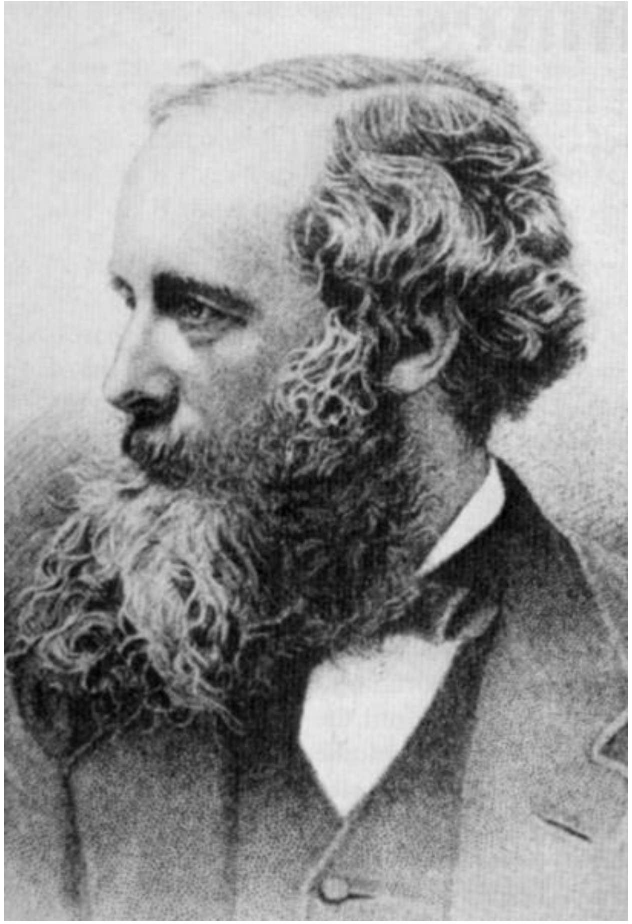
$$y=A\cos\left(\omega t-kx\right)$$ ——平面简谐波

回顾：§5 麦克斯韦电磁场理论

英国物理学家，经典电磁理论的创始人，统计物理学的奠基人之一。

麦克斯韦集成并发展了法拉第关于电磁相互作用的思想，并于1864年发表了著名的《电磁场动力学理论》的论文，将所有电磁现象概括为一组方程组，提出了涡旋电场和位移电流假说，预言了电磁波的存在，并确认光也是一种电磁波，从而创立了经典电动力学。

麦克斯韦还在气体分子运动理论、热力学、光学、弹性理论等方面有重要贡献。



麦克斯韦
James Clerk Maxwell
（1831-1879）

麦克斯韦电磁场方程的微分形式

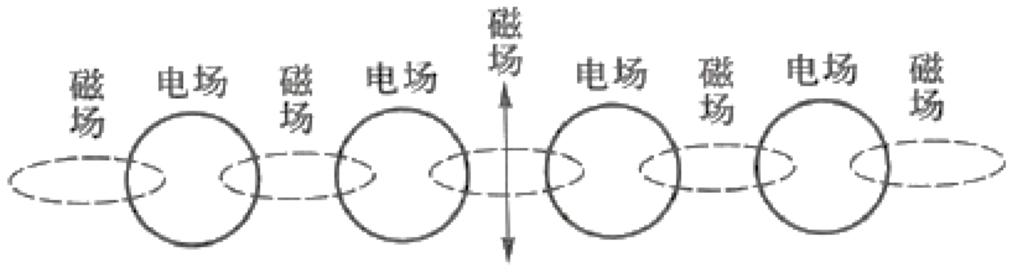
描述电场的高斯定理 $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

描述磁场的高斯定理 $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

磁生电 $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

电生磁 $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

麦克斯韦的发现：



麦克斯韦发现，在**自由空间**中，电磁场之间的相互变化可以沿某些方向传递：磁场的变化在临近的区域内感生出电场，感生出的电场变化又在新的区域感生出新的磁场，假如空间中没有能量损耗，那么这种变化就可以一直传播下去。他对此作了数学的计算：

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\rightarrow\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\rightarrow\boxed{\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0}$$

麦克斯韦的预言：

麦克斯韦发现，电磁场的这种变化的传播过程与简谐振动的传播方程非常相似。如果进行物理量的类比，那么，他所得到的的方程中，$\mu_0\varepsilon_0$ 这一项，将是电磁场变化的传播速度u的平方的导数，即：

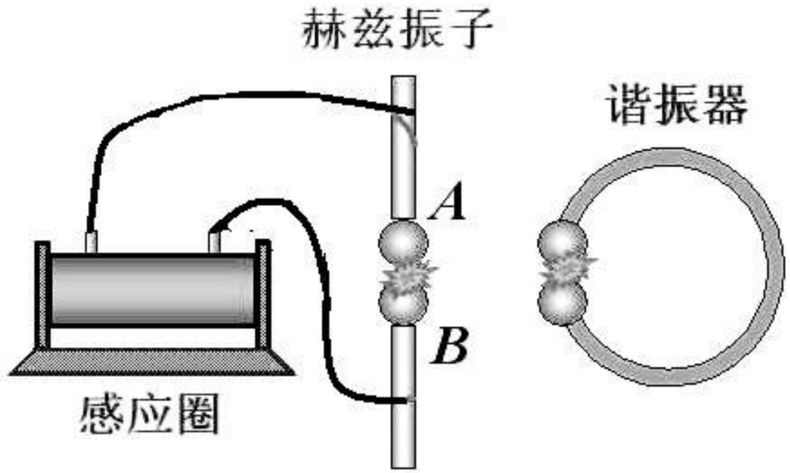
$$\frac{1}{u^2}=\mu_0\varepsilon_0 \qquad u=\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$$

将 $\mu_0\varepsilon_0$ 的值带入，可以得到 $u \approx 3 \times 10^8$ m/s，恰好是当时所知的光在真空中的传播速度。因此，麦克斯韦基于他的理论，做出了一个对物理学的发展至关重要的推论：**电磁场的变化以波的形式传播，且光就是一种电磁波。**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$ （真空中）

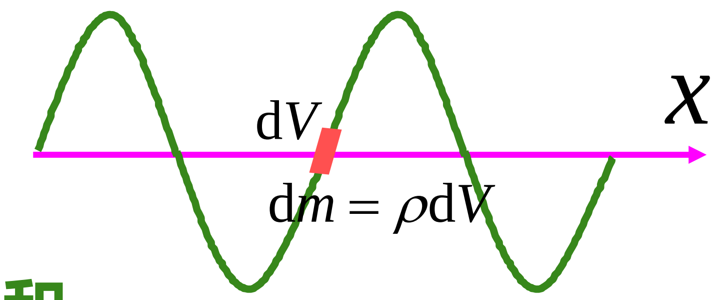
$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$ （介质中）

1887 年赫兹的实验证实了麦克斯的预言。麦克斯韦理论奠定了经典动力学的基础，为无线电技术和现代电子通讯技术发展开辟了广阔前景。



四、波的能量、能流

1. 波的能量



$$\left.\begin{array}{l}\text{每个质元振动所具有的动能}\\ \text{每个质元形变所具有的势能}\end{array}\right\}\text{之和}$$

以平面简谐波为例，波函数（$\varphi_0=0$）为：

$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad v=-A\omega\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\mathrm{d}E_k=\frac{1}{2}\mathrm{d}m\,v^2=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\;A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

可以证明：$\mathrm{d}E_k=\mathrm{d}E_p$

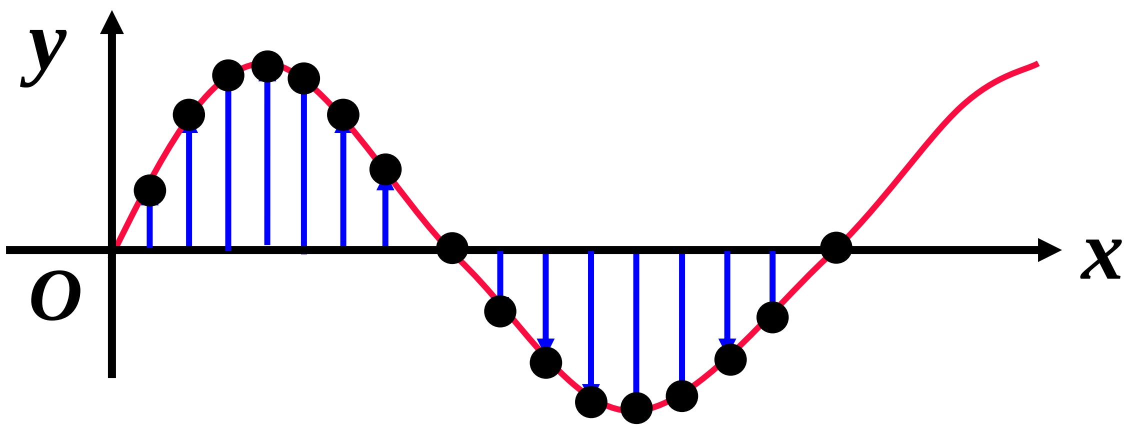
$$\boxed{\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_k+\mathrm{d}E_p}$$

讨 论 (1) 介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随x, t作周期性变化，且变化是**同相位**的。

$$\mathrm{d}E = 2\mathrm{d}E_p = 2\mathrm{d}E_k = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

质元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.

质元的位移最大时，三者均为零.



(2) 任一体积元都在不断地**接收**和**放出**能量，即不断地传播能量。任一体积元的机械能不守恒. 波动是能量传递的一种方式。

能量密度： 波传播所经历媒质中单位体积内的能量

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

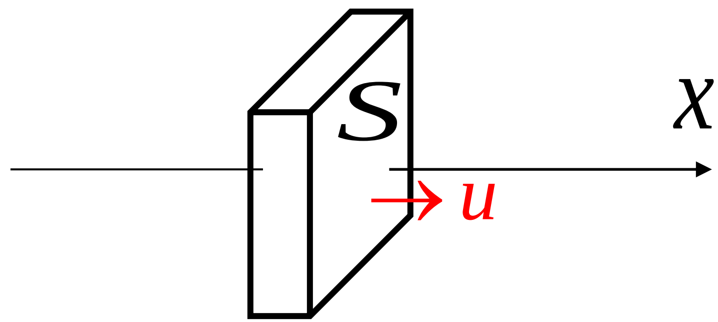
平均能量密度：

$$\bar{w} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

2. 波的能流

能流(瞬时功率)

——单位时间内通过垂直于波传播方向某一面积的能量



$$P = \Delta E / \Delta t$$

$$P = wuS$$ **单位：瓦特（W）**

平均能流 $\overline{P}=\overline{w}Su$

对于平面简谐波 $\overline{P}=\overline{w}Su=\dfrac{1}{2}\rho uA^2\omega^2 S$

3. 能流密度(功率密度)——波的强度

——单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的平均能量。即通过单位面积的平均能流。(也称波的强度)

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}u$$

单位：W m^{-2}

对于平面简谐波 $I=\overline{w}u=\dfrac{1}{2}\rho u A^2\omega^2$

- 能流密度(波的强度)为矢量，其方向与波速相同