# 第8.3章 集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 自然数与自然数集合
- 集合的基数
- 可数集

# 第一节 集合的等势与优势

集合的势是度量集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含的元素越多。

## 一、集合的等势

### 1. 等势定义

定义 9.1 设 $A, B$ 是集合，如果存在着从 $A$ 到 $B$ 的双射函数，就称 $A$ 和 $B$ 是等势的，记作 $A \approx B$. 如果 $A$ 不与 $B$ 等势，则记作 $A \not\approx B$.

### 2. 集合等势的实例.

例（1）$Z \approx N$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Z***: | **0** | **–1** | **1** | **–2** | **2** | **–3** | **3 …** |
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| ***N***: | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6 …** |

$$f: Z \to N, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 $f$ 是 $Z$ 到 $N$ 的双射函数. 从而证明了 $Z \approx N$.

得到一个“数遍”这些点的方法，这个计数过程就是建立Z到N的双射过程。

(2) $N\times N\approx N$.

$N\times N$ 中所有的元素排成有序图形

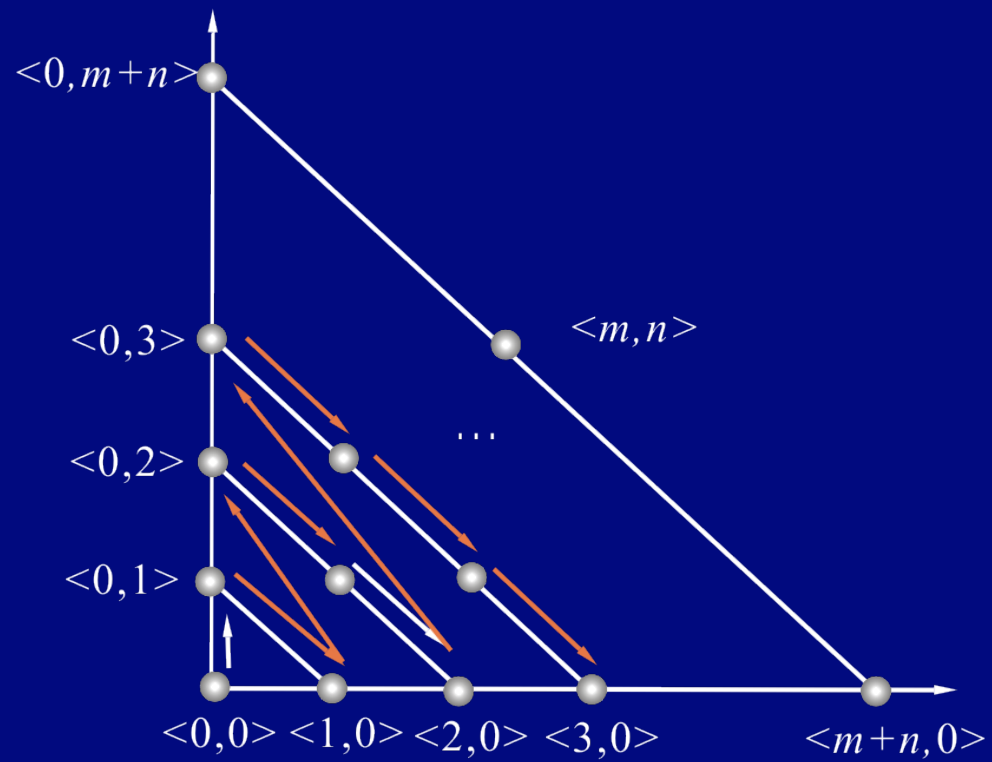


图 1

计数过程

〈0, 0〉 → 0
〈0, 1〉 → 1
〈1, 0〉 → 2
〈0, 2〉 → 3
〈1, 1〉 → 4
〈0, 2〉 → 5
…

〈m, n〉所在的直线方程是 x+y=m+n

每条斜线包含的点数分别是1，2，3，…,〈m, n〉所在斜线包含的点数是m+n+1。

〈m, n〉所在斜线下方的平面上的所有的斜线包含的点数是：1+2+…+(m+n)

〈m, n〉所在斜线按照箭头方向位于〈m, n〉之前的点数是m。

双射函数 $f: N\times N\to N,\quad f(<m,n>)=\dfrac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$

得到一个“数遍”这些点的方法，这个计数过程就是建立N×N到N的双射过程。

任何有理数都可以表示为分数。

（3） $N \approx Q$.

为建立 $N$ 到 $Q$ 的双射函数，先把所有形式为 $p/q$ ($p,q$ 为整数且 $q>0$) 的数排成一张表.在计数中只考虑每个数的第一次出现. 表中数 $p/q$ 上方的方括号内标明了这个有理数所对应的计数结果.

双射函数 $f: N \to Q$，其中 $f(n)$是$[n]$下方的有理数. 从而证明了 $N \approx Q$.

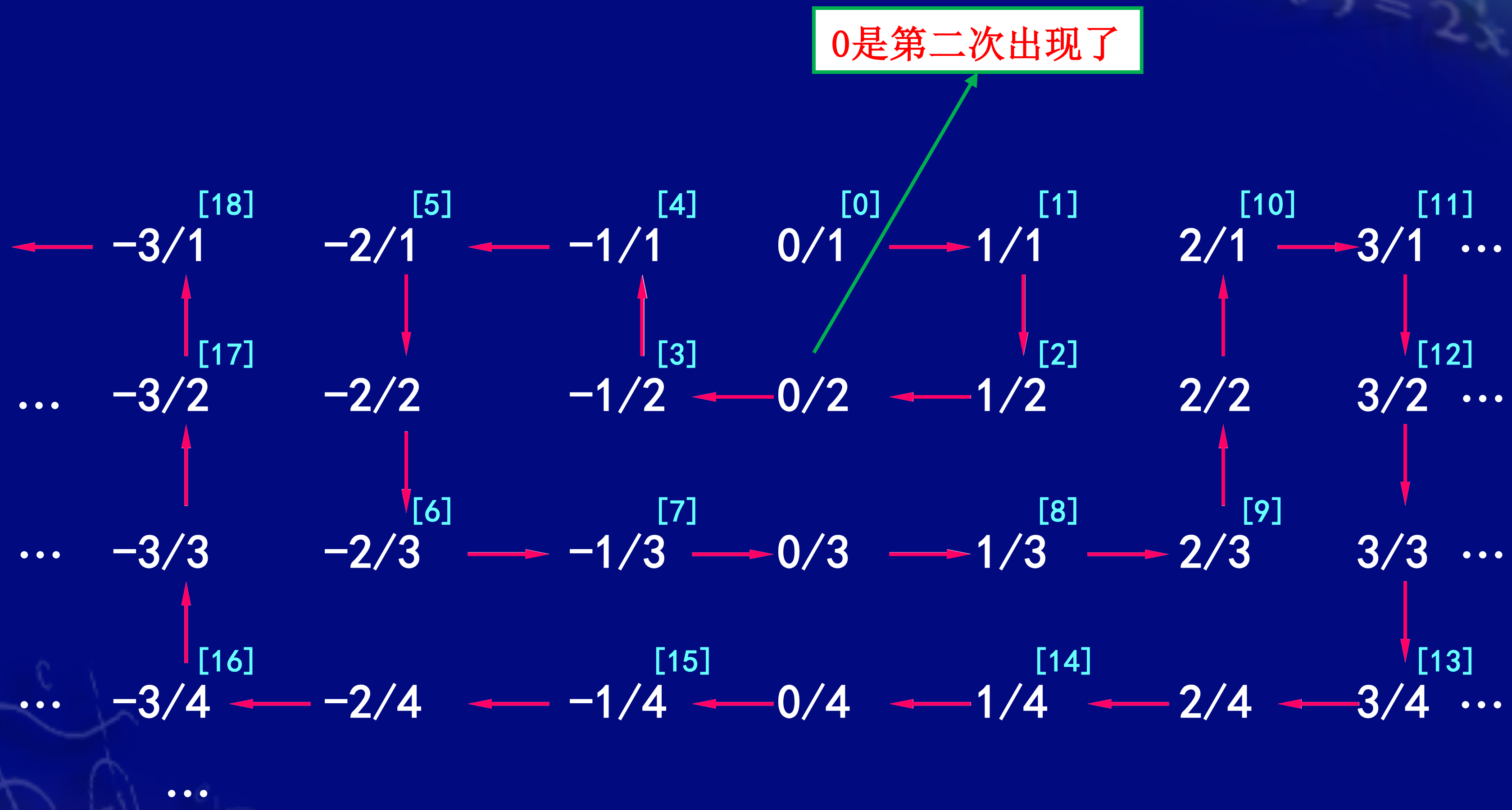
0是第二次出现了
[18] [5] [4] [0] [1] [10] [11]
−3/1 −2/1 −1/1 0/1 1/1 2/1 3/1 …
[17] [3] [2] [12]
… −3/2 −2/2 −1/2 0/2 1/2 2/2 3/2 …
[6] [7] [8] [9]
… −3/3 −2/3 −1/3 0/3 1/3 2/3 3/3 …
[16] [15] [14] [13]
… −3/4 −2/4 −1/4 0/4 1/4 2/4 3/4 …
…

图 2

（4）$(0,1)\approx R$. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x\in R\wedge 0<x<1\}$. 令

双射函数 $f:(0,1)\to R,\quad f(x)=\tan\pi\dfrac{2x-1}{2}$

（5）$[0,1]\approx(0,1)$. 其中$(0,1)$和$[0,1]$分别为实数开区间和闭区间.

双射函数 $f:[0,1]\to(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ 1/2^2 & x=1\\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n,\ n=1,2,\dots\\ x & \text{其它}x\end{cases}$$

关键：
解决端点0和1的对应问题

（6）对任何 $a,b\in R$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$.

双射函数 $f$: $[0,1]\to[a,b]$, $f(x)=(b-a)x+a$

找到一个过点（0，a）和（1，b）的单调函数，比如一次线性函数：
y = px+q
则：p*0+q=a
p*1+q=b
=> p=b-a, q=a

类似地可以证明，对任何 $a,b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

设 $A$ 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$, $A'$的特征函数

$\chi_{A'}$： $A\to\{0,1\}$定义为

$\chi_{A'}(a)=1, a\in A'$

$\chi_{A'}(a)=0, a\in A-A'$

例 设 $A$ 为任意集合，则 $P(A)\approx\{0,1\}^A$.

A的每个子集对应一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数

证 如下构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f: P(A)\to\{0,1\}^A, f(A')=\chi_{A'}, \forall A'\in P(A).$$

其中$\chi_{A'}$是集合 $A'$的特征函数. 易证 $f$ 是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$，那么有 $g$：$A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{x \mid x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则 $B\subseteq A$，且$\chi_B=g$，即$\exists B\in P(A), f(B)=g$. 从而证明了 $f$ 是满射的. 由等势定义得

$$P(A)\approx\{0,1\}^A.$$

3．等势的性质

定理 9.1 设 $A$，$B$，$C$ 是任意集合，

（1）$A \approx A$.

（2）若 $A \approx B$，则 $B \approx A$.

（3）若 $A \approx B$，$B \approx C$，则 $A \approx C$.

证明思路：利用等势的定义.

（1）$I_A$ 是从 $A$ 到 $A$ 的双射

（2）若 $f$: $A \to B$ 是双射，则 $f^{-1}$：$B \to A$ 是从 $B$ 到 $A$ 的双射.

（3）若 $f$: $A \to B$，$g$：$B \to C$ 是双射，则 $f \circ g$：$A \to C$ 是从 $A$ 到 $C$ 的双射.

## 二、重要的等势或不等势的结果

1. 等势结果

$$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$$

任何实数区间都与实数集合 $R$ 等势

$$\boxed{R \approx [0,1] \approx (0,1) \approx [a,b],\ a,b \in R,\ a<b}$$

2．不等势的结果

定理 9.2 (康托定理)

（1）$N \not\approx R$

（2）对任意集合 $A$ 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明思路:

（1）只需证明任何函数 $f$: $N\to[0,1]$都不是满射的.

任取函数 $f$: $N\to[0,1]$, 列出 $f$ 的所有函数值.

然后构造一个[0,1]区间的小数 $b$，使得 $b$ 与所有的函数值都不相等.

（2）任取函数 $f$: $A\to P(A)$，构造 $B\in P(A)$，使得 $B$ 与 $f$ 的任何函数值都不等.

证　(1) 首先规定[0,1]中数的表示. 对任意的 $x\in[0,1]$, 令

$$x = 0.x_1x_2\ldots,\ 0\le x_i\le 9$$

注意在 $x$ 的表示式中不允许在某位（比如第 $i$ 位为 4）之后有无数个 9 的情况. 若遇到这种情况, 则将 $x$ 的第 $i$ 位加 1（比如变成 4+1=5），而后面全是 0. （e.g., 0.24999.... 表示成 0.25000...)

用十进制表示，0.24999… 和 0.25000… 表达同一个实数，为了表达唯一性，只取其一表示方法。

设 $f$: $N\to[0,1]$是从 $N$ 到[0,1]的任何一个函数. 如下列出 $f$ 的所有函数值:

$$f(0)=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$
$$f(1)=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$
$$\ldots$$
$$f(n-1)=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$
$$\ldots$$

构造一个y不在这个f的值域里：使得y的第n位表示$b_n$不等于第n个数f(n-1)的第n位表示$a_n^{(n)}$，此时y不等于任何一个列出的f函数值，而我们总能构造出这样的y。

令 $y$ 的表示式为 $0.b_1b_2\ldots$, 并且满足 $b_i\ne a_i^{(i)}$, $i$=1,2,…,那么 $y\in[0,1]$, 且 $y$ 与上面列出的任何一个函数值都不相等. 这就推出 $y\notin\mathrm{ran}f$, 即 $f$ 不是满射的.

对于任意一个x∈A, 有两种情况：
1）如果$x \in g(x)$，那么$x \notin B$, 从而$B \neq g(x)$;
2）如果$x \notin g(x)$，那么$x \in B$, 从而$B \neq g(x)$;
因此，都有$B \neq g(x)$;

（2）我们将证明任何函数 $g: A \to P(A)$都不是满射的.

设 $g: A \to P(A)$是从 $A$ 到 $P(A)$的函数，如下构造集合 $B$：

$$B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \in P(A)$，但对任意 $x \in A$ 都有

如果B是空集，也就是说对于所有的x，x∈g(x)，那么说明$\emptyset \notin \mathrm{ran}\ g$.

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$. 即 $B \notin \mathrm{ran}\ g$

注意：根据这个定理可以知道 $N \not\approx P(N)$，$N \not\approx \{0,1\}^N$.

## 三．优势

### 1．优势定义

定义 9.2

（1）设 $A, B$ 是集合，如果存在从 $A$ 到 $B$ 的单射函数，就称 $B$ 优势于 $A$，记作 $A \preccurlyeq\cdot B$.

如果 $B$ 不是优势于 $A$，则记作 $A \not\preccurlyeq\cdot B$.

（2）设 $A, B$ 是集合，若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $A \not\approx B$，则称 $B$ 真优势于 $A$，记作 $A \prec\cdot B$.

如果 $B$ 不是真优势于 $A$，则记作 $A \not\prec\cdot B$.

实例 $N \preccurlyeq\cdot N$, $N \preccurlyeq\cdot R$, $A \preccurlyeq\cdot P(A)$,

$R \not\preccurlyeq\cdot N$

$N \prec\cdot R$, $A \prec\cdot P(A)$，但 $N \not\prec\cdot N$.

2. 优势的性质.

定理 9.3 设 $A, B, C$ 是任意的集合，则

（1）$A \preccurlyeq\cdot A$

（2）若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $B \preccurlyeq\cdot A$，则 $A \approx B$

（3）若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $B \preccurlyeq\cdot C$，则 $A \preccurlyeq\cdot C$

证明：略

（2）为证明集合之间的等势提供了一个有力的工具。因为在某些情况下，直接构造从A到B的双射函数相当困难，但是可以分别构造从A到B的单射函数和从B到A的单射函数可能更容易。

例 证明 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$.

设 $x \in [0,1)$, $0.x_1x_2\ldots$是 $x$ 的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个 1.

用二进制表示，0. 01111… 和 0. 10000… 表达同一个实数，为了表达唯一性，只取其一表示方法。

对于 $x$，如下定义 $f$: $[0,1) \to \{0,1\}^N$，使得

$$f(x) = t_x,\ \text{且}\ t_x: N \to \{0,1\},\quad t_x(n) = x_{n+1},\ n = 0,1,2,\ldots$$

例如 $x = 0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ldots$，则对应于 $x$ 的函数 $t_x$ 是:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_x(n)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0… |

易见 $t_x \in \{0,1\}^N$，且对于 $x,y \in [0,1)$, $x \neq y$，必有 $t_x \neq t_y$，即 $f(x) \neq f(y)$.

这就证明了 $f$: $[0,1) \to \{0,1\}^N$ 是单射的.

考虑 $t\in\{0,1\}^N$，其中

$t(0)=0,\ t(n)=1,\ n=1, 2, \ldots.$

按照 $f$ 的定义，只有 $x=0.011\ldots$才能满足 $f(x)=t$. 但根据规定，这个数 $x$ 应该记为 $0.100\ldots$，所以根本不存在 $x\in[0,1)$，满足 $f(x)=t$.

定义函数 $g$：$\{0,1\}^N\rightarrow[0,1)$. $g$ 的映射法则恰好与 $f$ 相反．即

$\forall t\in\{0,1\}^N,\quad t\text{：}N\rightarrow\{0,1\},\quad g(t)=0.x_1x_2\ldots$，其中 $x_{n+1}=t(n)$.

但不同的是，将 $0.x_1x_2\ldots$看作数 $x$ 的十进制表示．这样就避免了形如 $0.0111\ldots$和 $0.1000\ldots$在二进制表示中对应了同一个数的情况，从而保证了 $g$ 的单射性.

根据定理 9.3 有$\{0,1\}^N\approx[0,1)$．再使用等势的传递性得$\{0,1\}^N\approx R$.

但是f不是满射的，所以f不是双射函数，所以不能通过f直接证明等势。

g也不是满射的，因为用十进制表示，$x_1, x_2, x_3\cdots$大于1的时候，并没有对应的t。所以g也不是双射函数，所以不能通过g直接证明等势。

总结：

重要的等势或优势的结果.

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $R \approx [a,b] \approx (c,d) \approx \{0,1\}^N \approx P(N)$
- $\{0,1\}^A \approx P(A)$
- $N \prec\cdot R$
- $A \prec\cdot P(A)$

其中$[a,b]$, $(c,d)$代表任意的实数闭区间和开区间.

# 第二节 集合的基数

## 一．自然数与自然数集合

### 1. 定义

定义 9.3 设 $a$ 为集合，称 $a\cup\{a\}$为 $a$ 的后继，记作 $a^+$，

即 $a^+=a\cup\{a\}$.

如下定义自然数：

$0=\varnothing$

$1=0^+=\varnothing^+ = \{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+= \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}= \{0,1,2\}$

…

$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$

…

定义 9.4 设 $A$ 为集合,如果满足下面的两个条件:

(1) $\varnothing \in A$

(2) $\forall a(a \in A \rightarrow a^{+} \in A)$

则称 $A$ 是归纳集.

例如下面的集合

$$\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots\}$$

$$\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a,a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots\}$$

都是归纳集.

定义 9.5

(1) 一个自然数 $n$ 是属于每一个归纳集的集合.

(2) 自然数集 $N$ 是所有归纳集的交集.

两个定义得到同样的结果.

鉴于自然数都是集合，有关集合的运算对自然数都是适用的，例如:

$2\cup5$，$3\cap4$ 等

2．自然数的性质

（1）对任何自然数 $n$ 有 $n \approx n$.

（2）对任何自然数 $n, m$, 若 $m \in n$, 则 $m \subseteq n$.

（3）对任何自然数 $n$ 和 $m$, 以下三个式子：

$$m \in n, m \approx n, n \in m$$

必成立其一且仅成立其一. 这个性质称为自然数的三歧性.

3. 自然数的相等与大小顺序

对任何自然数 $m$ 和 $n$,

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n$$

## 二、有穷集和无穷集.

定义 9.6

一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势;

如果一个集合不是有穷的，就称作无穷集.

实例:

$\{a,b,c\}$是有穷集，因为 $3=\{0,1,2\}$，且

$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$

$N$ 和 $R$ 都是无穷集，因为没有自然数与 $N$ 和 $R$ 等势

利用自然数的性质可以证明:任何有穷集只与惟一的自然数等势.

## 三、基数

### 1. 集合基数的定义

定义 9.7

（1）对于有穷集合 $A$，称与 $A$ 等势的那个惟一的自然数为 $A$ 的基数，记作 card$A$，即

$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$ （对于有穷集 $A$, card$A$ 也可以记作$|A|$）

（2）自然数集合 $N$ 的基数记作 $\aleph_0$，即

$\mathrm{card}N = \aleph_0$

（3）实数集 $R$ 的基数记作 $\aleph$ （读作阿列夫），即

$\mathrm{card}R = \aleph$

2. 基数的相等和大小

定义 9.8 设 $A, B$ 为集合，则

（1） $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$

（2） $\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$

（3） $\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow \mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \wedge \mathrm{card}A\ne\mathrm{card}B$

根据上一节关于势的讨论不难得到：

$$\mathrm{card}Z = \mathrm{card}Q = \mathrm{card}N\times N = \aleph_0$$

$$\mathrm{card}P(N) = \mathrm{card}2^N = \mathrm{card}[a,b] = \mathrm{card}(c,d) = \aleph$$

$$\aleph_0<\aleph$$

集合的基数就是集合的势，
基数越大，势就越大。

其中 $2^N = \{0,1\}^N$.

由于对任何集合 $A$ 都满足 $A \prec \cdot P(A)$，所以有

$$\mathrm{card}A < \mathrm{card}P(A)$$

因为总可以通过集合的幂集构造更大的集合

这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中：

$0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数，是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷基数，

$\aleph_0$ 是最小的无穷基数，$\aleph$ 后面还有更大的基数，如 $\mathrm{card}P(R)$等.

## 四．可数集

### 1．可数集的定义

定义 9.9 设 $A$ 为集合，若 card$A \le \aleph_0$，则称 $A$ 为可数集或可列集.

实例：$\{a,b,c\}$, 5，整数集 $Z$，有理数集 $Q$, $N\times N$ 等都是可数集。

实数集 $R$ 不是可数集，与 $R$ 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集，它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说，都可以找到一个"数遍"集合中全体元素的顺序. 回顾前边的可数集，特别是无穷可数集，都是用这种方法来证明的.

2．关于可数集有下面的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集 $A$ 的幂集 $P(A)$不是可数集.

例　求下列集合的基数.

（1）$T=\{x \mid x$ 是单词“*BASEBALL*”中的字母$\}$

（2）$B=\{x \mid x\in R \wedge x^2=9 \wedge 2x=8\}$

（3）$C=P(A)$, $A=\{1, 3, 7, 11\}$

解　（1）由 $T=\{B, A, S, E, L\}$ 知 $\mathrm{card}T=5$.

（2）由 $B=\varnothing$，可知 $\mathrm{card}B=0$.

（3）由 $|A|=4$ 可知 $\mathrm{card}C=\mathrm{card}P(A)=|P(A)|=2^4=16$.

例 设 $A, B$ 为集合，且

$\mathrm{card}A=\aleph_0$, $\mathrm{card}B=n$, $n$ 是自然数, $n\neq 0$.

求 $\mathrm{card}A\times B$.

解 方法一

由 $\mathrm{card}A=\aleph_0$, $\mathrm{card}B=n$，可知 $A, B$ 都是可数集．令

$$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$$

$$B=\{b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}\}$$

对任意的$\langle a_i,b_j\rangle$, $\langle a_k,b_l\rangle\in A\times B$ 有

$$\langle a_i,b_j\rangle=\langle a_k,b_l\rangle \Leftrightarrow i=k\wedge j=l$$

定义函数

$$f: A\times B\to N$$

得到一个“数遍” N×N中元素的方法

$$f(\langle a_i,b_j\rangle)=in+j,\quad i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,n-1$$

易见 $f$ 是 $A\times B$ 到 $N$ 的双射函数，所以

$$\mathrm{card}A\times B=\mathrm{card}N=\aleph_0$$

方法二

直接使用可数集的性质求解.

因为 $\mathrm{card}A=\aleph_0$, $\mathrm{card}B=n$，所以 $A$, $B$ 都是可数集.

根据性质（3）可知 $A\times B$ 也是可数集，所以

$$\mathrm{card}A\times B\leq\aleph_0$$

显然当 $B\neq\varnothing$时, $\mathrm{card}A\leq\mathrm{card}A\times B$，这就推出

$$\aleph_0\leq\mathrm{card}A\times B$$

综合上述得到 $\mathrm{card}A\times B=\aleph_0$.

# 作业

- 29
- 34
- 37
- 39

# 第8.3章 习题课

一、本章的主要内容及要求

1．主要内容

- 集合等势的定义
- 等势的性质
- 集合优势的定义
- 优势的性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 自然数及其自然数集合的定义
- 可数集与不可数集
- 集合的基数

2．要求

- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

## 二、练习

1．设 $A, B$ 为二集合，证明：如果 $A \approx B$，则 $P(A) \approx P(B)$

证　因为 $A \approx B$，存在双射函数 $f$：$A \to B$，因此存在反函数 $f^{-1}$：$B \to A$，如下构造函数

关键是如何构造双射函数

$$g: P(A) \to P(B),$$

$$g(T) = f(T), \forall T \subseteq A$$　（这里的 $f(T)$ 是 $T$ 在函数 $f$ 的像）

证明 $g$ 的满射性. 对于任何 $S \subseteq B$，存在 $f^{-1}(S) \subseteq A$，且

$$g(f^{-1}(S)) = f^{-1} \circ f(S) = S$$

证明 $g$ 的单射性.

$$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1) = f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1) = I_A(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$$

综合上述得到 $P(A) \approx P(B)$.

说明：证明集合 $A$ 与 $B$ 等势的方法

方法一：直接构造从 $A$ 到 $B$ 的双射函数

给出一个从 $A$ 到 $B$ 的函数 $f: A \to B$

证明 $f$ 的满射性

证明 $f$ 的单射性

方法二：利用定理 9.3，构造两个单射函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$.

给出函数 $f$ 和 $g$

证明 $f$ 和 $g$ 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算 $A$ 与 $B$ 的基数，得到 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$.

注意：

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合 $A$ 与自然数集合 $N$ 等势的方法就是找到一个“数遍” $A$ 中元素的顺序.

2．已知 $A=\{n^7|n\in N\}, B=\{n^{109}|n\in N\}$，求下列各题：

（1）$\mathrm{card}A$;

（2）$\mathrm{card}B$;

（3）$\mathrm{card}(A\cup B)$

（4）$\mathrm{card}(A\cap B)$

解：（1）构造双射函数 $f$：$N\to A, f(n)=n^7$，因此 $\mathrm{card}A=\aleph_0$,

（2）构造双射函数 $g$：$N\to A, g(n)=n^{109}$，因此 $\mathrm{card}B=\aleph_0$,

（3）可数集的并仍旧是可数集，因此 $\mathrm{card}(A\cup B)\le \aleph_0$,

但是 $\mathrm{card}(A\cup B)\ge\mathrm{card}A=\aleph_0$,

从而得到 $\mathrm{card}(A\cup B)=\aleph_0$.

（4）因为 7 与 109 互素，$\mathrm{card}(A\cap B)=\{n^{7\times109}\mid n\in N\}$，

与（1）类似得到 $\mathrm{card}(A\cap B)=\aleph_0$

3．已知 card$A=\aleph_0$，且 card$B<$card$A$，求 card$(A-B)$

解：由 $A-B\subseteq A$ 得到 card$(A-B)\le$card$A$，即

$$\text{card}(A-B)\le \aleph_0$$

由 card$B<$card$A$ 可知 $B$ 为有穷集，

即存在自然数 $n$ 使得 card$B=n$.

假设 card$(A-B)<\aleph_0$，那么存在自然数 $m$，

使得 card$(A-B)=m$.

从而得到

$$\text{card}A \le \text{card}(A\cup B) = \text{card}((A-B)\cup B) \le n+m,$$

与 card$A=\aleph_0$ 矛盾.

因此，card$(A-B)=\aleph_0$.