

数理逻辑

郑为杰

e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年10月



课程信息

- 授课教师：郑为杰
- 办公室：信息楼1805
- 邮箱：zhengweijie@hit.edu.cn
- 助教：李明峰、邓仁忠
- 课程QQ群：扫码加入，以班级-姓名（如，0班-张三）格式实名



课程信息

课程教材：李涛，张岩，刘峰主编.任世军主审.《数理逻辑引论》
修订版，哈尔滨工业大学出版社，2016.06

参考书：王捍贫.《数理逻辑》（离散数学一分册），北京大学出版社，1997



课程考核方法

考核环节	所占分值	考核与评价细则
平时作业及考核	30	学生们上课考勤，对提问的回答等，占5分；课程测试与作业，占25分，最后合计成绩占30分。
期末考试	70	卷面成绩100分，以卷面成绩按比例折算成实际得分；考试命题以大纲中的应知应会内容为主，并保证逐年有所变化。

什么是逻辑

“事物发展有其内在的**逻辑**”

“这个人为人处世，有他自己的**逻辑**”

“按照对方辩友的**逻辑**，岂不是说 ……”

“说话、写文章都要讲**逻辑**”

“这篇论文结构严谨，**逻辑**严密。”

“他的发言颠三倒四，**逻辑**混乱”



什么是逻辑

帝国主义者的**逻辑**和人民的**逻辑**是这样的不同。捣乱，失败，再捣乱，再失败，直至灭亡——这就是帝国主义和世界上一切反动派对待人民事业的**逻辑**，... 斗争，失败，再斗争，再失败，再斗争，直至胜利——这就是人民的**逻辑**。

（毛泽东：《丢掉幻想准备斗争》）



什么是逻辑

- 逻辑一词最早来自古希腊语logos（逻各斯）
 - 语言、命题、说明、解释、论证
 - 理性、理念、推理、推理能力
 - 尺度、关系、比例、价值
 -
- 逻辑一词的不同含义
 - 客观事物的规律性
 - 某种理论、观点、行为方式



什么是逻辑学

- 逻辑学作为一门学科是以推理形式为主要研究对象
 - 推理：从已知条件（前提）得出结论的过程
- 推理形式：推理的结构，同类的不同具体推理具有共同的结构

所有人都是会死的
苏格拉底是人

苏格拉底是会死的

所有金属都是导体
铜是金属

铜是导体

所有A都是B
C是A

C是B

什么是逻辑学

所有的金属都是导体
铜是金属

铜是导体

所有的金属都是导体
铜是导体

铜是金属

所有A都是B
C是A

C是B

所有A都是B
C是B

C是A



什么是逻辑学

- 逻辑学是研究有效推理形式
- 有效推理形式：真前提通过有效推理形式只能得到真结论，即：
：通过有效推理形式，从真前提不会得到假结论。

所有的金属都是导体
铜是金属

铜是导体

所有的金属都是导体
铜是导体

铜是金属

所有A都是B
C是A

C是B



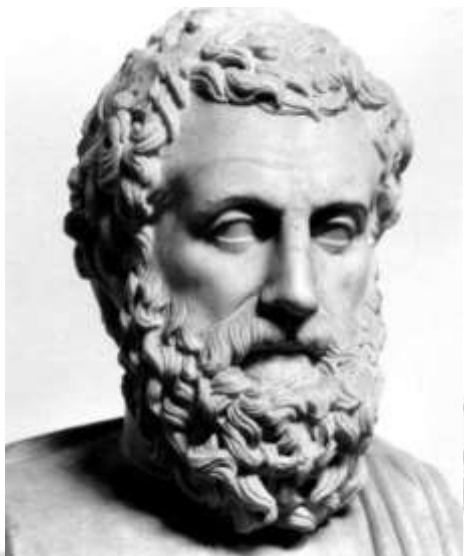
所有A都是B
C是B

C是A



什么是逻辑学

- 逻辑学是一门高度抽象的学科，是其他学科的工具，应用范围非常广
- 逻辑学分为传统逻辑和数理逻辑
 - 传统逻辑：古典（形式）逻辑，古希腊亚里士多德为代表
 - 数理逻辑：现代逻辑，莱布尼茨为创始人



（亚里士多德，公元前384年
-公元前322年）



（莱布尼茨，1646 – 1716）

中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

子曰：必也正名乎！。。。。名不正则言不顺，言不顺则事不成，事不成则礼乐不兴，礼乐不兴则刑罚不中，刑罚不中，则民无所措手足。故君子名之必可言也，言之必可行也。君子于其言，无所苟而已矣。

——《论语·子路篇》



中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

庄子与惠子游于濠梁之上。

庄子曰：“鲦鱼出游从容，是鱼乐也。”

惠子曰：“子非鱼，安知鱼之乐？”

庄子曰：“子非我，安知我不知鱼之乐？”

惠子曰：“我非子，固不知子矣，子固非鱼也，子不知鱼之乐，全矣。”

庄子曰：“请循其本。子曰汝安知鱼乐云者，既已知吾知之而问我，我知之濠上也。”

——《庄子·外篇·秋水第十七》



中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

“楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：

‘吾盾之坚，物莫能陷也。’又誉其矛曰：‘吾矛之利，于物无不陷也。’或曰：‘以子之矛，陷子之盾，何如？’其人弗能应也。

夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。

——《韩非子·难一》



中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

曰：“白马非马，可乎？”

曰：“可。”

曰：“何哉？”

曰：“马者，所以命形也。白者，所以命色也。命色者，非命形也，故曰白马非马。”。。。

曰：“求马，黄、黑马皆可致。求白马，黄、黑马不可致。”

——公孙龙子：《白马论》

- 《墨经》提出了比较完整的逻辑体系

夫辩者，将以明是非之分，审治乱之纪，明同异之处，察名实之理，处利害，决嫌疑焉。”

以名举实，以辞抒意，以说出故。

——《墨经·小取》



什么是数理逻辑

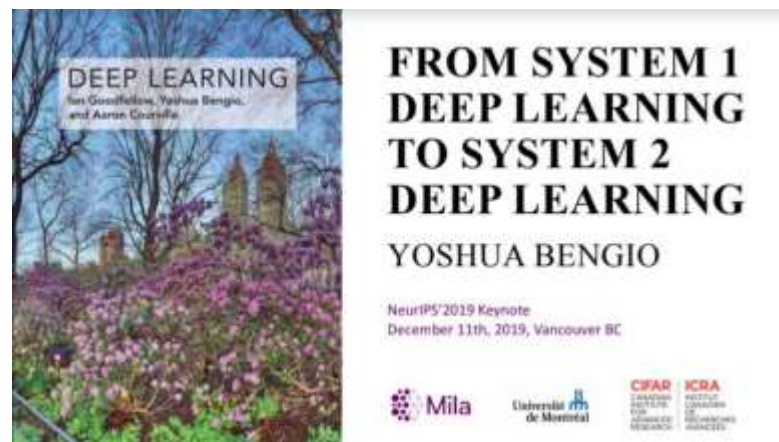
- 数理逻辑是用数学的方法，数学的语言，数学的工具研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的可行性等这类现象中的逻辑问题。

其研究对象是对证明和计算进行符号化以后的形式系统。数理逻辑的研究范围是逻辑学中可被数学模式化的部分

- 数理逻辑的内容
 - 逻辑演算（命题逻辑、谓词逻辑）
 - 证明论
 - 集合论（公理集合论和朴素集合论）
 - 递归论
 - 模型论

什么是数理逻辑

- 数理逻辑与集合论，图论，近世代数组成离散数学
- 数理逻辑是很多课程的基础
 - 人工智能
 - 形式语义学
 - 程序设计方法学



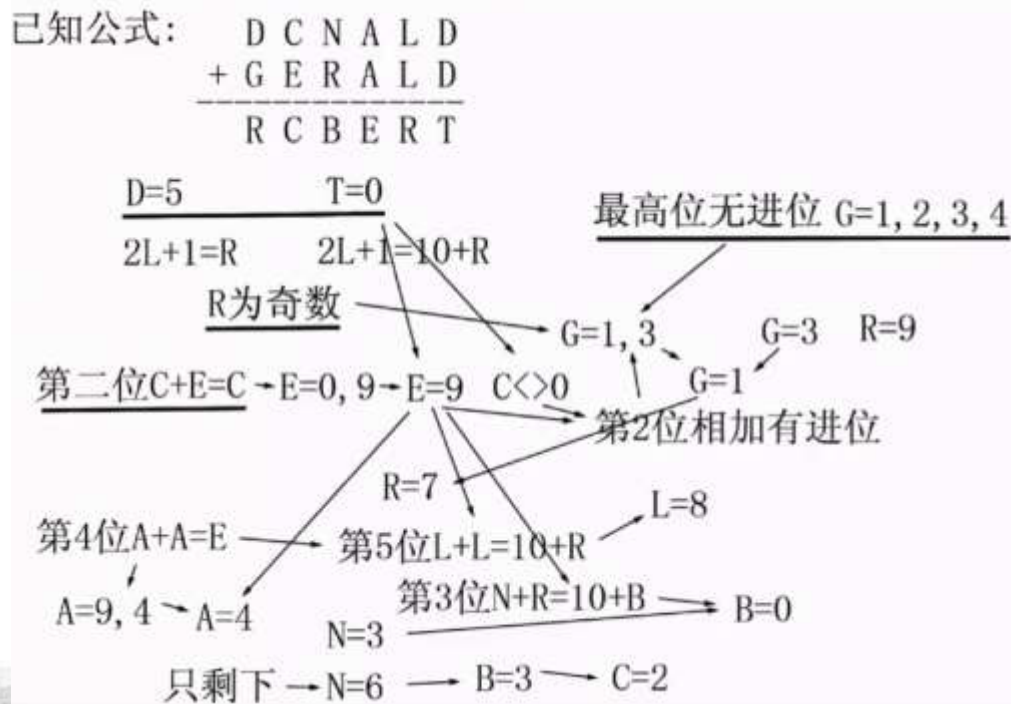
未来的深度神经网络应当能够实现 System2（逻辑分析系统），实现的是有意识的、有逻辑的、有规划的、可推理以及可以语言表达的系统

数字字谜问题

已知公式：

$$\begin{array}{r} \text{D C N A L D} \\ + \text{G E R A L D} \\ \hline \text{R C B E R T} \end{array}$$

共有10个字母A,B,C,D,E,G,N,L,R,T,每个字母代表0-9中的一个，没有重复。已知D=5，计算其余9个字母所代表的数字。



$$\begin{array}{r} 526485 \\ + 197485 \\ \hline 723970 \end{array}$$

数理逻辑的发展简史

- 初始阶段（1660-19世纪末）
 - 亚里士多德
 - 莱布尼茨
 - 布尔代数
- 过渡阶段（1900-1940）
 - 非欧几何公理方法
 - 实数理论皮亚诺算术
 - 集合论、数学基础及希尔伯特计划
- 成熟阶段（1930-）
 - 哥德尔不完全定理
 - 四论（证明论、模型论、递归论、公理化集合论）



传统（形式）逻辑与数理逻辑

曰：“白马非马，可乎？”

曰：“可。”

曰：“何哉？”

曰：“马者，所以命形也。白者，所以命色也。命色者，非命形也，故曰白马非马。”。。。

曰：“求马，黄、黑马皆可致。求白马，黄、黑马不可致。”

——公孙龙子：《白马论》

概念



集合

判断



元素与集合的关系

推理

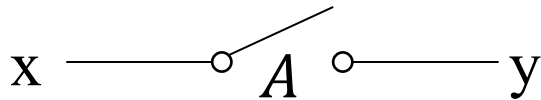
命题逻辑

- 命题与联结词
- 形式语言与命题公式
- 范式
- 联结词的扩充与归约
- 命题演算形式系统PC
- 命题演算形式系统PC的定理

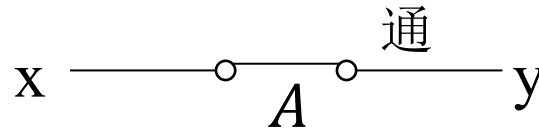
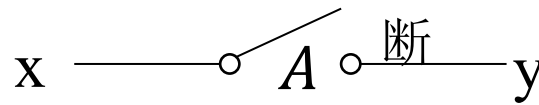


电路中的逻辑—开关

- 开关及其两种状态



开关

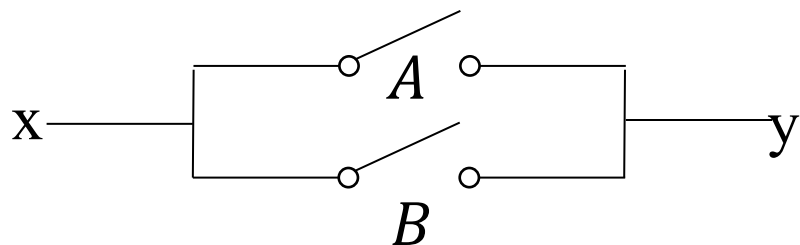


开关的两种闭合状态

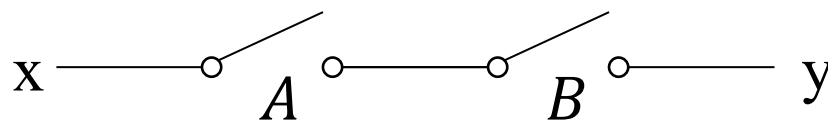
- 开关→事件
 - 可以从开关 A 得到一个事件：“ x 和 y 两点是连通的。”
 - 用 A 表示此事件。
 - 对立事件 \bar{A} 就是：“ x 和 y 两点是切断的。”

电路中的逻辑—复杂开关

- 开关 A 和 B 有对应的事件 A 和 B ， $A \vee B$ 和 $A \wedge B$ 在电路中意味着什么呢？
- 事件 $A \vee B$ 表示“或者 A 通或者 B 通”。因此， $A \vee B$ 的发生等价于 A 与 B 之一是通的，这说明事件 $A \vee B$ 对应于开关 A 和 B 并联所得到的电路。



表示事件 $A \vee B$ 的开关



表示事件 $A \wedge B$ 的开关

- 事件 $A \wedge B$ 表示“ A 通并且 B 通”。因此， $A \wedge B$ 的发生等价于 A 与 B 是两者都是通的，这说明事件 $A \wedge B$ 对应于开关 A 和 B 串联所得到的电路。

电路中的逻辑—通断表

- 复杂开关 $A \vee B$ 的通断表

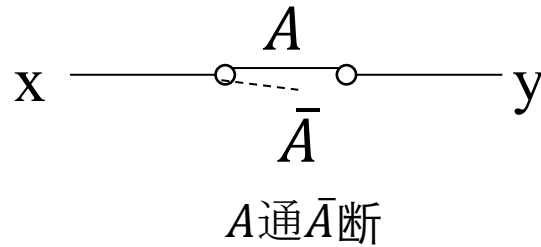
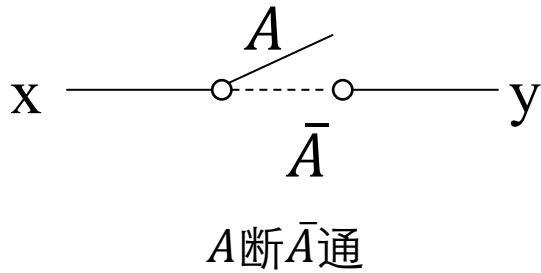
开关 A	开关 B	复杂开关 $A \vee B$
通	通	通
通	断	通
断	通	通
断	断	断

- 复杂开关 $A \wedge B$ 的通断表

开关 A	开关 B	复杂开关 $A \wedge B$
通	通	通
通	断	断
断	通	断
断	断	断

电路中的逻辑—状态相反的开关

- 与开关 A 相反的开关 \bar{A}



- 开关 \bar{A} 的通断表

开关 A	开关 \bar{A}
通	断
断	通

电路中的逻辑—真值表

- 通断表→真值表

- 通→真→1→T

- 断→假→0→F

- 开关的通断对应事件的真假

A	\bar{A}
真(1)	假(0)
假(0)	真(1)

- 真值表

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0



电路中的逻辑—应用

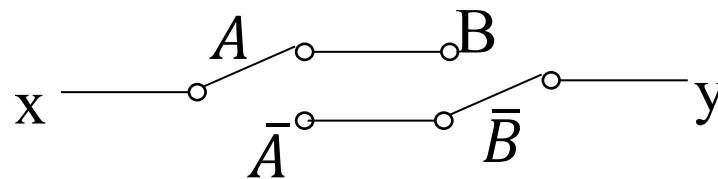
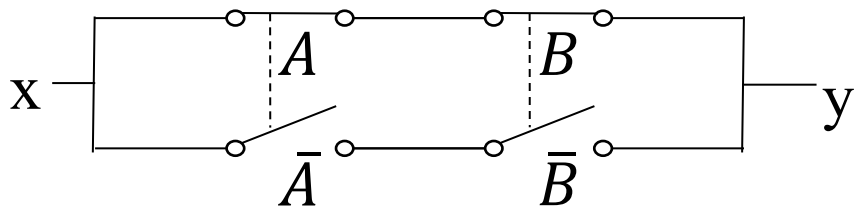
- 楼梯上有一盏灯，如何设计电路使楼上、楼下均能自由开关？
 - 设楼下的开关为 A ，楼上的开关为 B
 - 如果开关 A ， B 已经接入电路并已达到要求，那么这个电路就是一个新的开关 P
 - 设 $A = B = 1$ ，那么 $P = 1$

A	B	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

电路中的逻辑—应用

A	B	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- 由真值表知, $P = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$

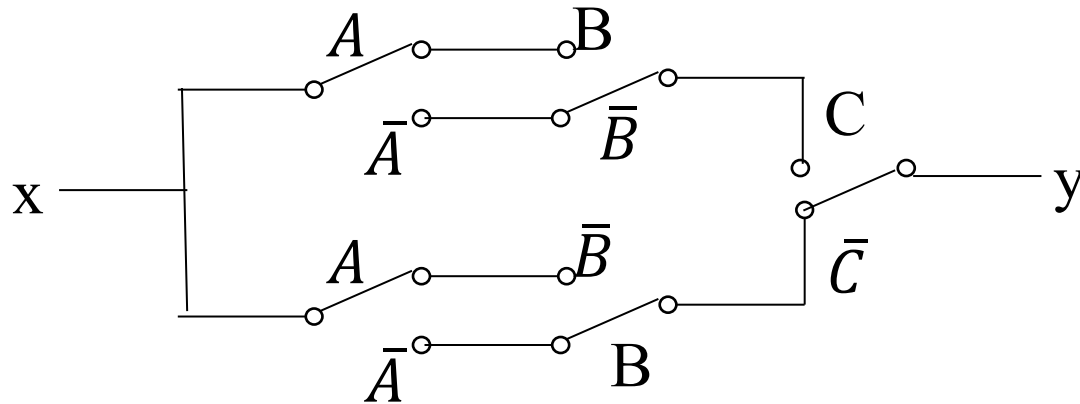


电路中的逻辑—应用

- 一个展览大厅有三个门，如何设计电路使三个门的任何一个均能自由开关展览厅的灯？
- 设三个门处的开关分别为 A 、 B 和 C ，应如何设计电路才能达到预定的要求？

A	B	C	P
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

电路中的逻辑—应用



命题

- 命题：命题是一个能判断真假的陈述句。
- 原子命题：不包含其他命题成分的命题称为简单命题。
- 复合命题：至少包含一个其他命题成分的命题称为复合命题。
- 支命题：组成复合命题的那些命题称为支命题。



逻辑联结词

- 对把几个支命题联结起来构成复合命题的**词项**叫作**逻辑联结词**。
 - ……并且……
 - 并非……
 - ……或（者）……
 - 如果……那么……
 - ……当且仅当……
- 命题的真假
 - 简单命题的真假取决于它**是否反映了客观世界**
 - 复合命题的真假也是如此，但是复合命题是由其支命题组成的
 - **支命题的真假完全可以决定**复合命题的真假



逻辑联结词

- p 表示“2是素数”， q 表示“3是偶数”
 - “2是素数并且3也是偶数”可以表示成“ p 并且 q ”
- 在“ p 并且 q ”形式的复合命题中，只有当两个支命题 p 和 q 都真时，“ p 并且 q ”才真，否则就是假。
 - 2是素数并且3也是素数（真命题）
 - 2是素数并且3也是偶数（假命题）



例子

- 雪是白的。
- 雪是黑的。
- 好大的雪啊！
- 任何一个大偶数可以表示成两个素数之和。
- 太阳有第11颗行星。
- $2+2=5$.
- 2是素数又是偶数。
- 陈胜吴广起义之日杭州下雨。
- 你礼貌吗？
- 这句话是假的。
- $x+y<0$



自然语言中的联结词

- 逻辑中的联结词可以用某种自然语言来表述，但绝不等同于任何一种自然语言中相关的词。
- 在汉语中说：“甲和乙有了孩子，并且结婚了”与说“甲和乙结婚了，并且有了孩子”含义有所不同。
- 在汉语里“并且”作为联结词，它联结的句子不仅有递进的意思还有时间的先后顺序。但是逻辑中的联结词仅与真假值有关系。



联结词的符号表示

- 否定词 \neg ：对应于“并非……”
- 合取词 \wedge ：对应于“……并且……”
- 析取词 \vee ：对应于“……或者……”
- 蕴涵词 \rightarrow ：对应于“如果……那么……”
- 等价词 \leftrightarrow ：对应于“……当且仅当……”

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1



符号化表示

- A 当且仅当 B 。可表示为, $A \leftrightarrow B$
- A 当 B 。可表示为, $B \rightarrow A$
- A 仅当 B ; 只有 B 才有 A ; 非 B 一定非 A 。均可表示为, $A \rightarrow B$
- A 的充分必要条件是 B 。可表示为, $A \leftrightarrow B$
- A 的充分条件是 B 。可表示为, $B \rightarrow A$
- A 的必要条件是 B 。可表示为, $A \rightarrow B$



符号化表示

1、用 p 表示“今天是星期五”

“今天不是星期五”可表示为， $\neg p$

2、用 p 表示“2是素数”， q 表示“2是偶数”

“2是素数并且2也是偶数”可表示为， $p \wedge q$

3、用 p 表示“研一上组合数学课”， q 表示“研一上算法设计课”

“研一或者上组合数学课，或者上算法设计课”可表示为， $p \vee q$

4、用 p 表示“明天下雨”， q 表示“我在家看书”

“如果明天下雨，那么我在家看书”可表示为， $p \rightarrow q$

5、用 p 表示“你是大一新生”， q 表示“你能在寝室用电脑”

“只有你不是大一新生，才能在寝室用电脑”可表示为， $(q \rightarrow \neg p)$

6、用 p 表示“三角形是等腰三角形”， q 表示“三角形中有两个角相等”

“三角形是等腰三角形当且仅当三角形中有两个角相等”可表示为， $p \leftrightarrow q$