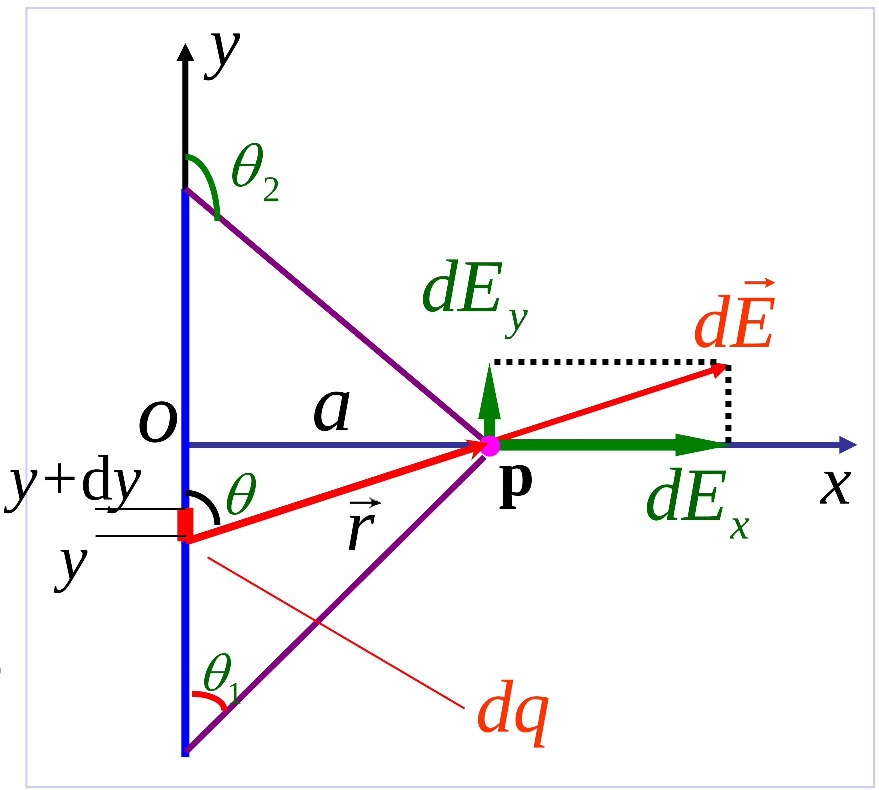
例3 如图所示，求均匀带电直线周围电场分布。

解：电荷的线密度为λ $\mathrm{d}q=\lambda \mathrm{d}y$



$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}y}{r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}y}{r^2}\sin\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}y}{r^2}\cos\theta$$

$$r=\frac{a}{\sin\theta}\qquad y=-a\mathrm{ctg}\theta\qquad \therefore \mathrm{d}y=\frac{a\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

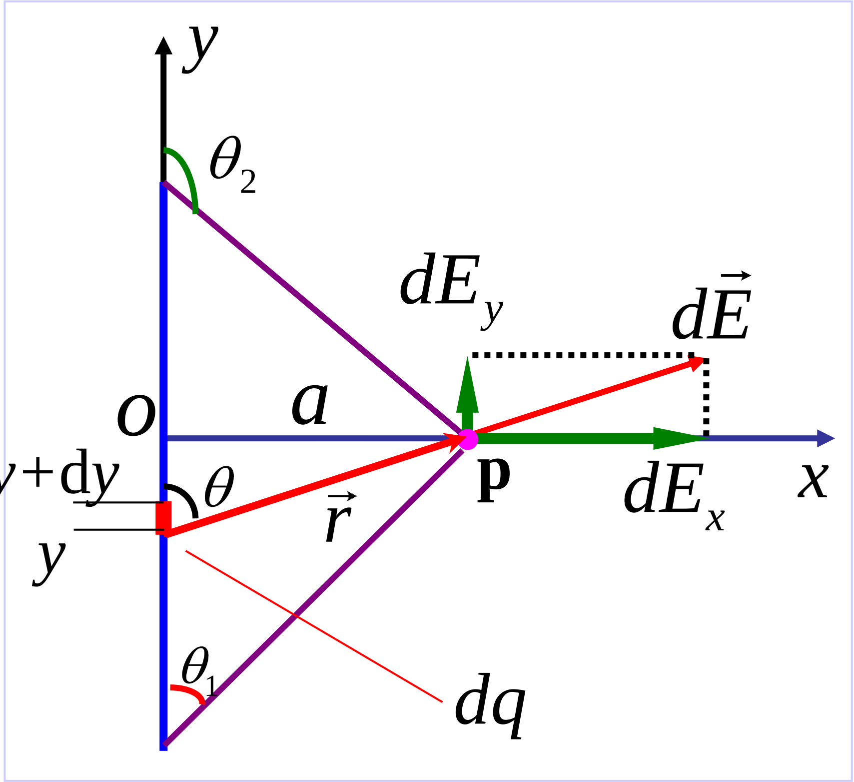
$$\mathrm{d}E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta\qquad \mathrm{d}E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$$

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

讨论:（1）当 p 点落在带电直线的中垂线上时，$\theta_1 + \theta_2 = \pi$

$$E_y = 0$$

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta_1$$

（2）当带电直线为无限长时，$\theta_1 \to 0 \quad \theta_2 \to \pi$

$$E_y = 0$$

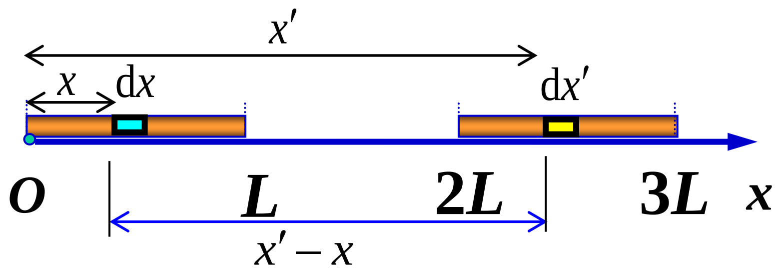
$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

选讲

****补充题：** 已知两带电细杆电荷线密度均为λ、长度为L，相距L，如图所示。

求： 两带电直杆间的电场力。



解: 建立如图所示坐标系

在左、右两杆上分别选电荷元

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}q' = \lambda \mathrm{d}x'$$

根据库仑定律

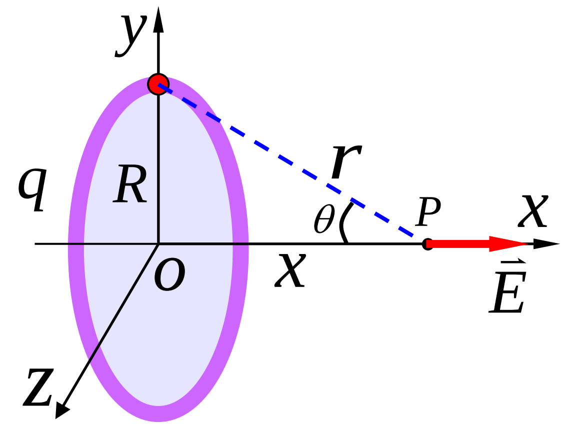
$$\mathrm{d}F = \frac{\lambda \mathrm{d}x \lambda \mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2}$$

$$F = \int_{2L}^{3L} \mathrm{d}x' \int_0^L \frac{\lambda^2 \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{4}{3}$$

几种典型带电体的电场强度分布

1.带电圆环（轴线上）

$$\boxed{E=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}}$$



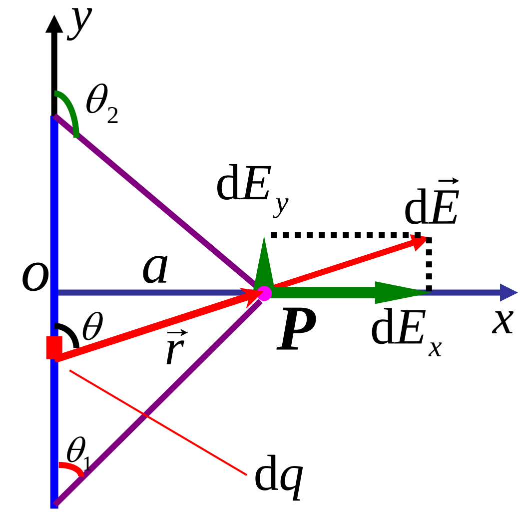
2.均匀带电圆盘(轴线上)

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)}$$

3.无限大带电平面

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

4.均匀带电直线



$$\boxed{E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)}$$

$$\boxed{E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)}$$

5.无限长带电直线

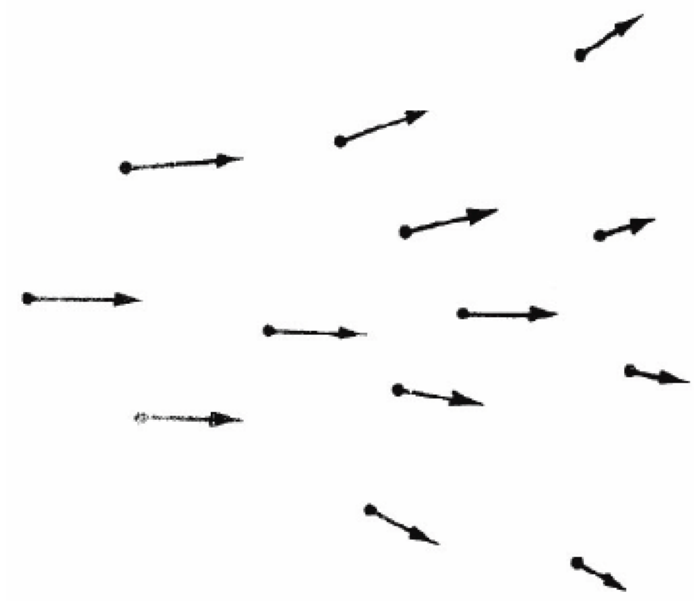
$$\boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

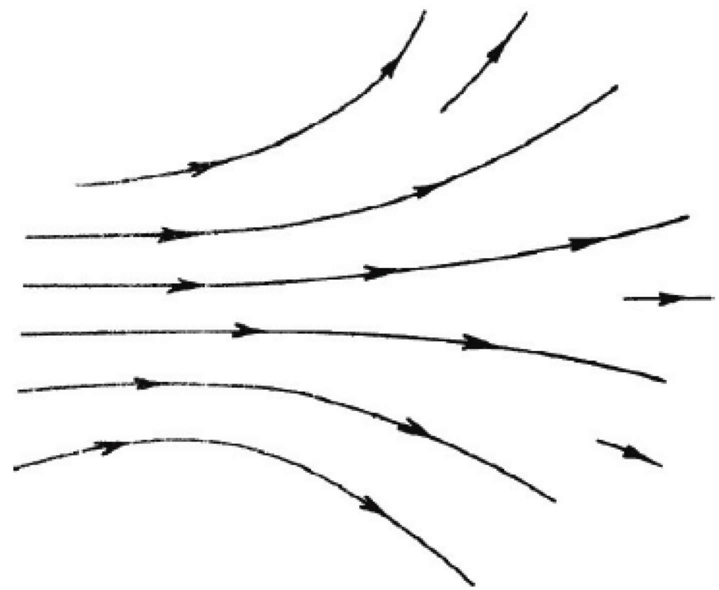
§3 真空中的高斯定理

高斯（C. F. Gauss 1777–1855）

德国数学家、天文学家和物理学家，有“数学王子”美称，他与韦伯制成了第一台有线电报机和建立了地磁观测台，高斯还创立了电磁量的绝对单位制.

矢量场线





矢量场可用一组箭头来表示。每支箭头的大小和方向为所画箭头的那一点的矢量场之值

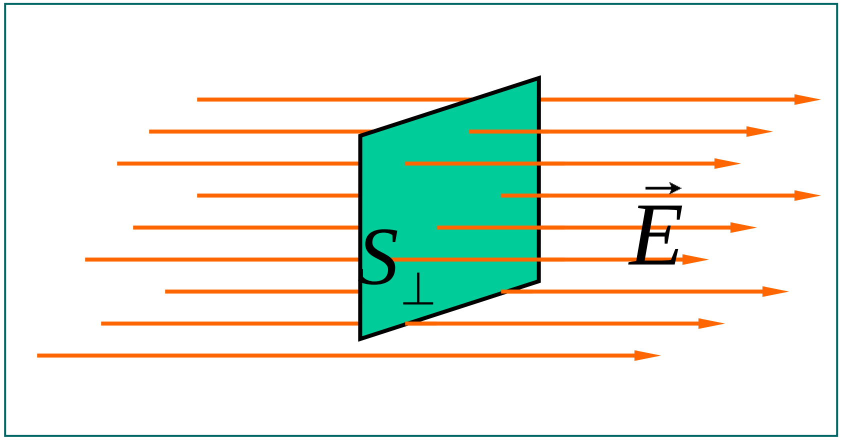
矢量场可用一些线来表示，这些线在每一点与场矢量的方向相切，而线的密度则与场矢量的大小成正比

一、电场线

静止带电体所激发的静电场中，各点电场强度的大小和方向是确定的，可以用矢量场形式表示出来——

规定：（1）电场线上每一点切线方向为该点电场强度方向；

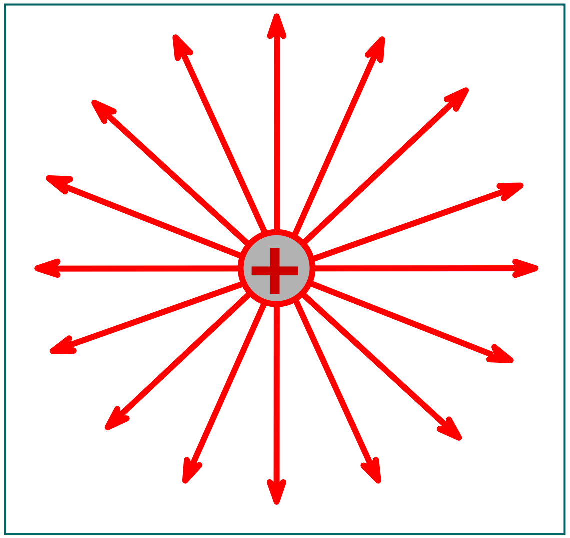
（2）在场中任意点附近，穿过垂直于电场方向上单位面积上电场线条数与该点电场强度大小成正比



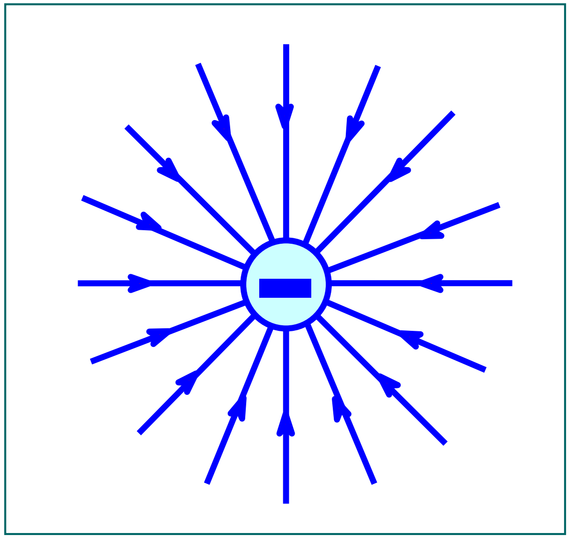
$$\vec{E}(x, y, z, t)$$

点电荷的电场线

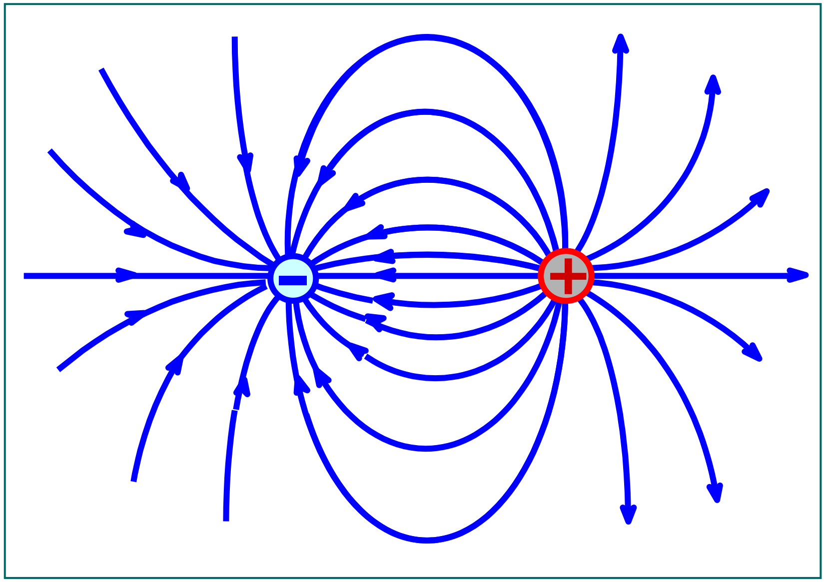
正点电荷



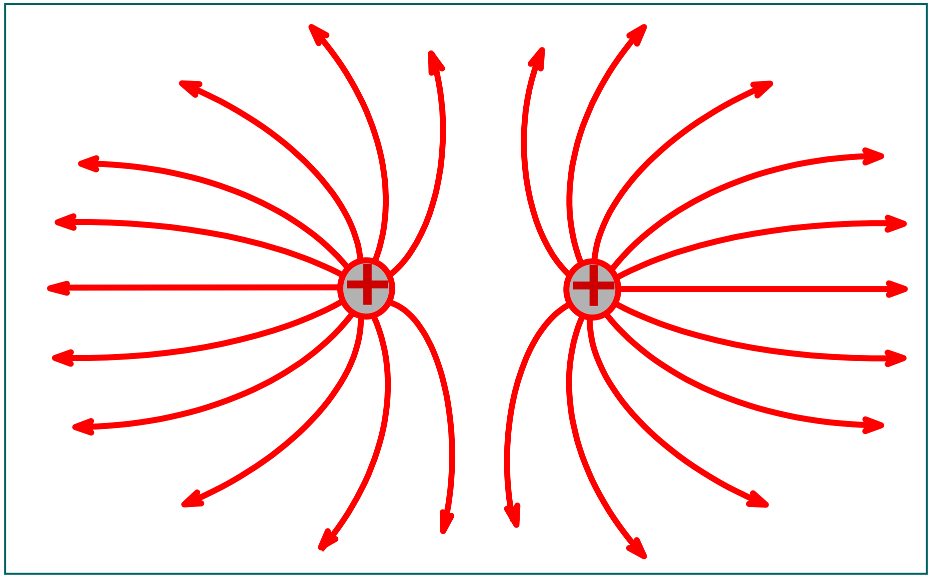
负点电荷



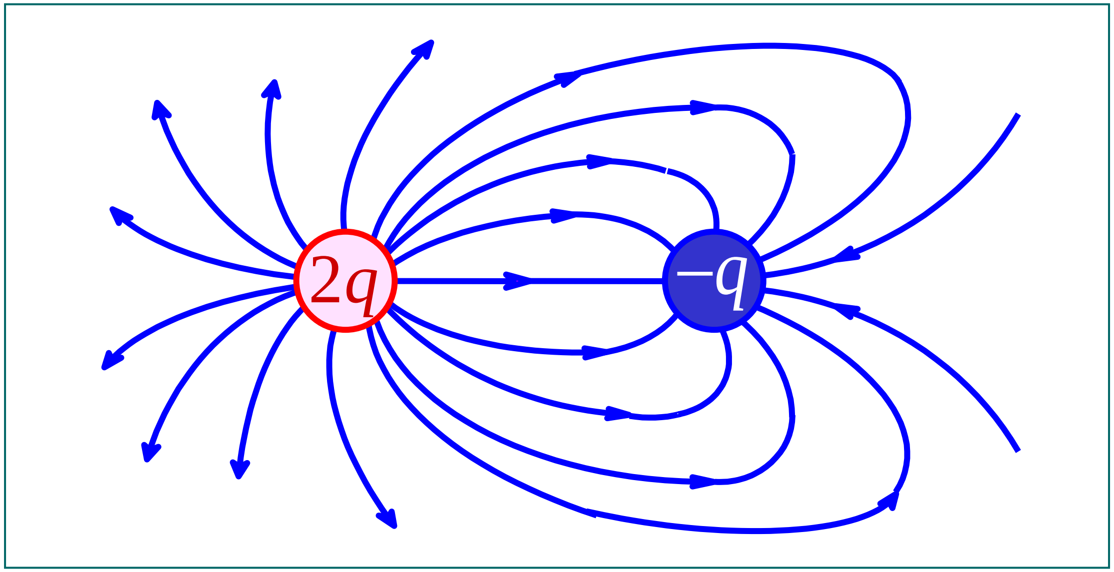
等量异号点电荷的电场线



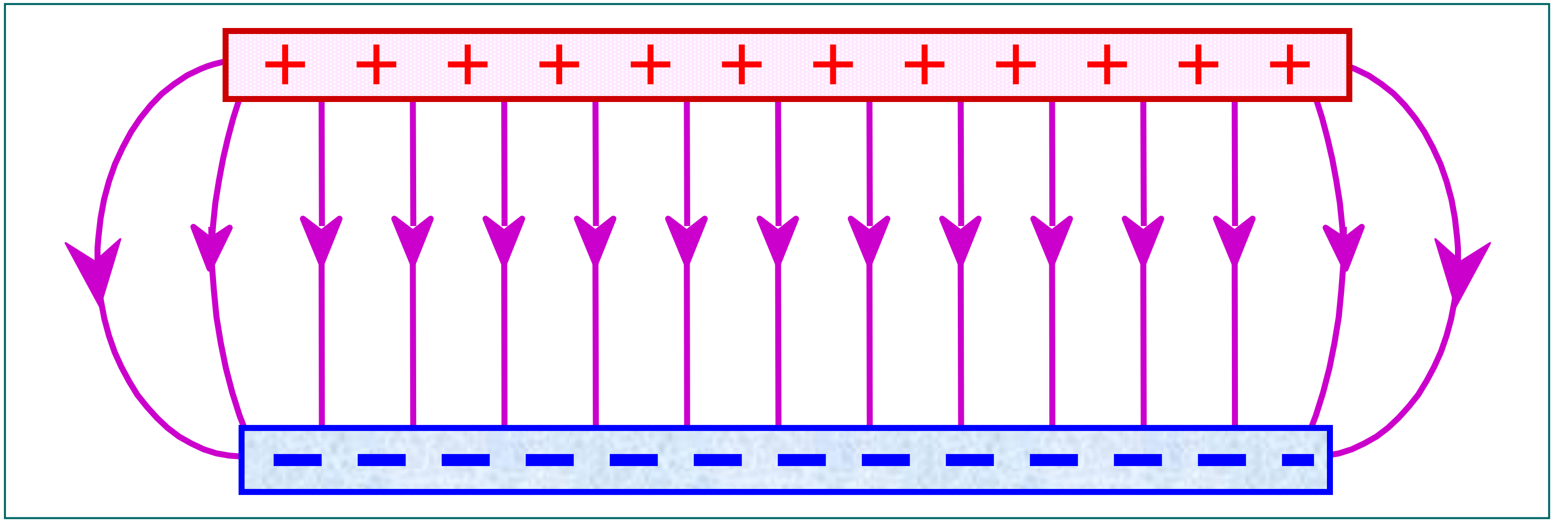
等量正点电荷的电场线



非等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线的特性：

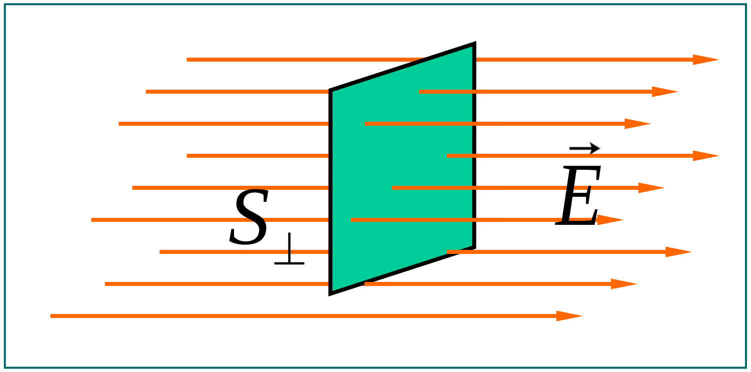
（1）始于正电荷，止于负电荷(或来自无穷远,去向无穷远)；

（2）电场线不相交；

（3）静电场电场线不闭合。

二、电场强度通量 —单位：$N \cdot m^2 \cdot C^{-1}$或$V \cdot m$

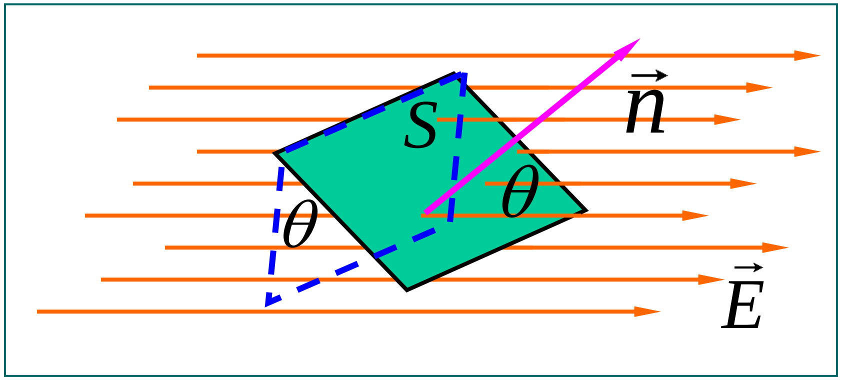
电场中通过某一面积的电场线数称为通过这个面的电场强度通量“Φ_e”。



- 匀强电场，$\vec{E}$垂直平面

$$\Phi_e = ES_\perp$$

- 匀强电场，$\vec{E}$与平面夹角θ



$$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

非均匀电场强度电通量

$$\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\cdot\vec{n}$$

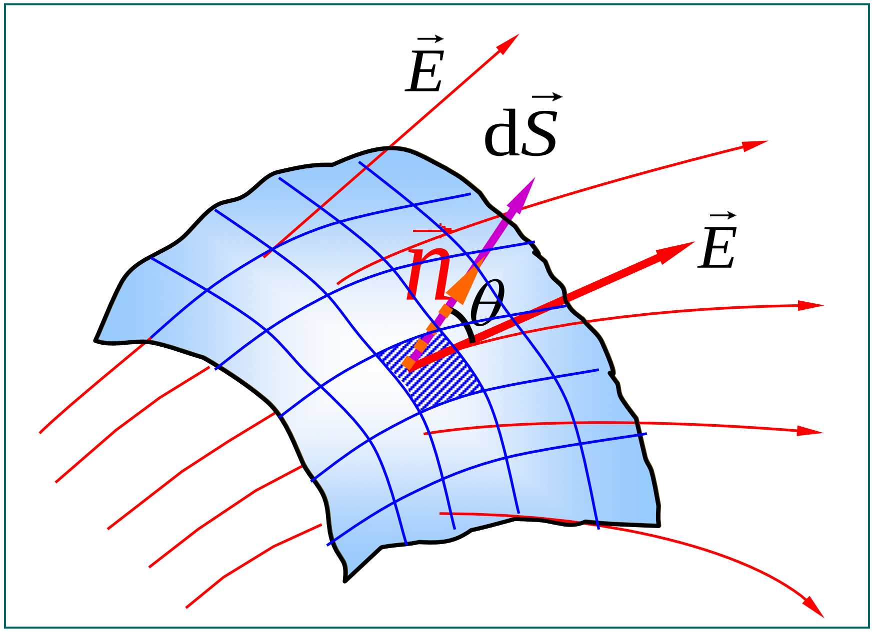
$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\theta<\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}>0$$

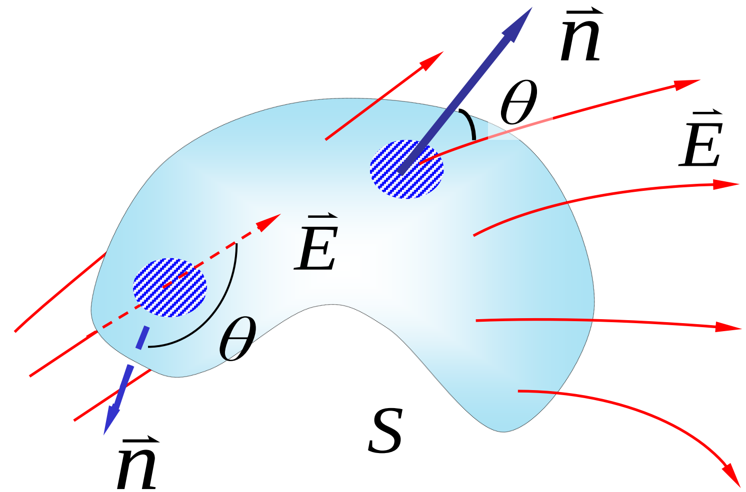
$$\theta>\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}<0$$

$$\Phi_{\mathrm{e}}=\int_{S}\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\int_{S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_{S}E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$



- 通过闭合曲面的通量



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$

S 为闭合曲面

“穿出”

$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} > 0$$

$$\theta > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} < 0$$

“穿入”

三、真空中的高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数 ε_0。与闭合曲面外电荷无关。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

说明：

（1）高斯定理描述了静电场的基本性质，说明静电场是有源场。

（2）闭合曲面称为高斯面。

（3）$\sum_{i=1}^{n} q_i$ 仅仅表示高斯面内的电荷的代数和。

（4）仅高斯面内的电荷对通过高斯面的电通量有贡献。

（5）高斯面上的 $\vec{E}$ 与高斯面内外所有电荷有关。

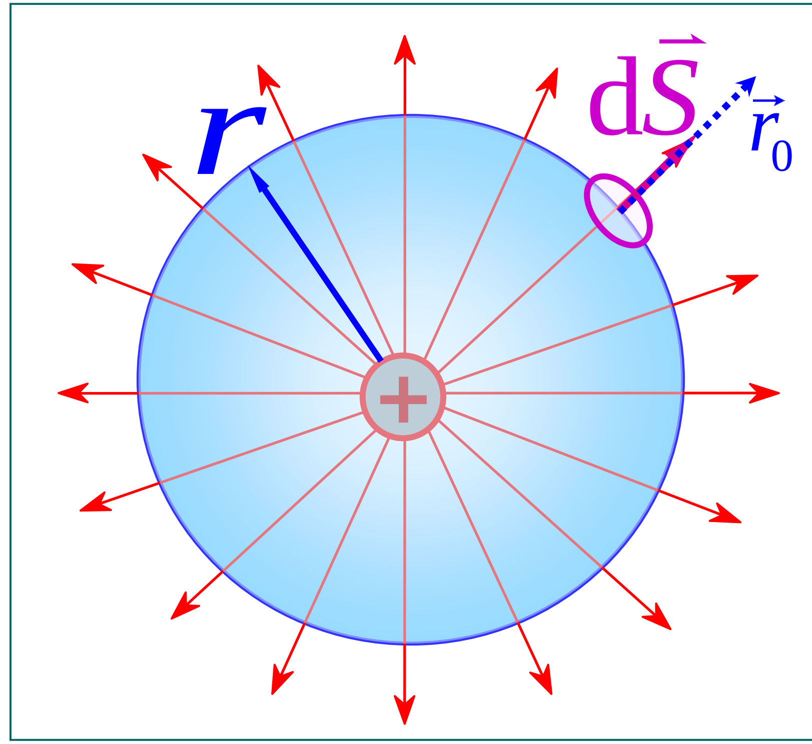
**下面从点电荷和点电荷系出发验证高斯定理。

（1）点电荷位于球面中心

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

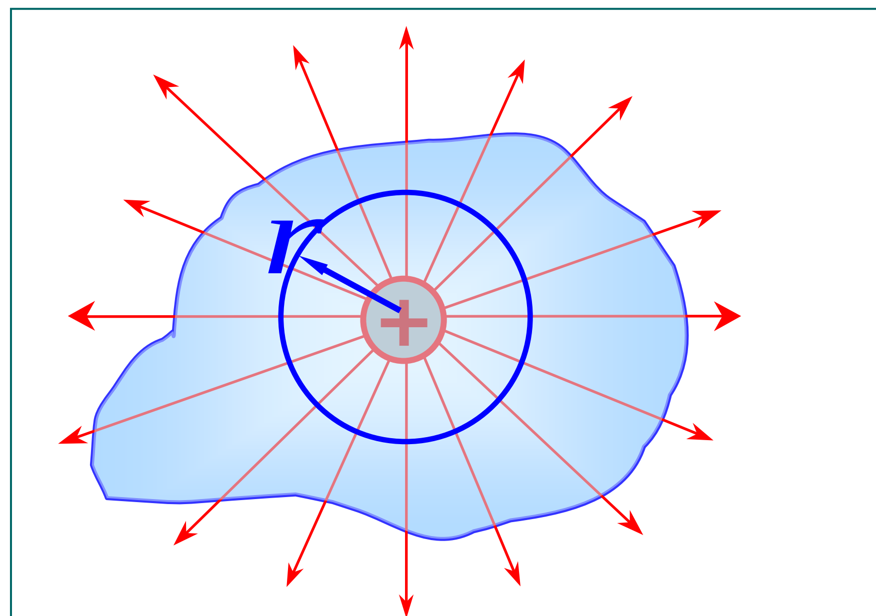
$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



（2）点电荷在任意封闭曲面内

总可以在封闭曲面内做一个以点电荷为球心的球面，由于电场线的连续性，穿出球面和穿出封闭曲面的电通量相等，仍然有：$\Phi_e=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$。



选讲

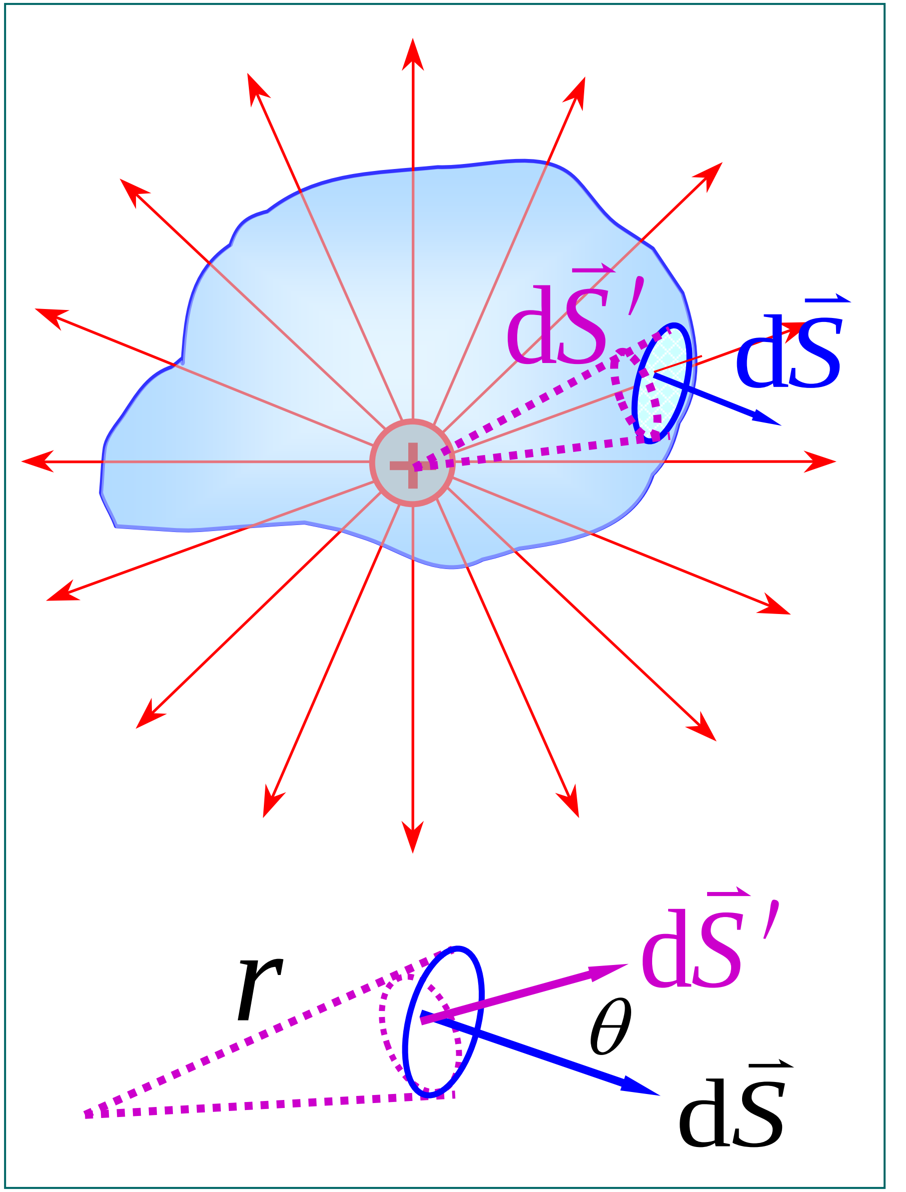
也可以严格证明“点电荷在任意封闭曲面内”的情形。

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

其中立体角 $\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{d}S'}{r^2}$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



（3）点电荷在闭合曲面外

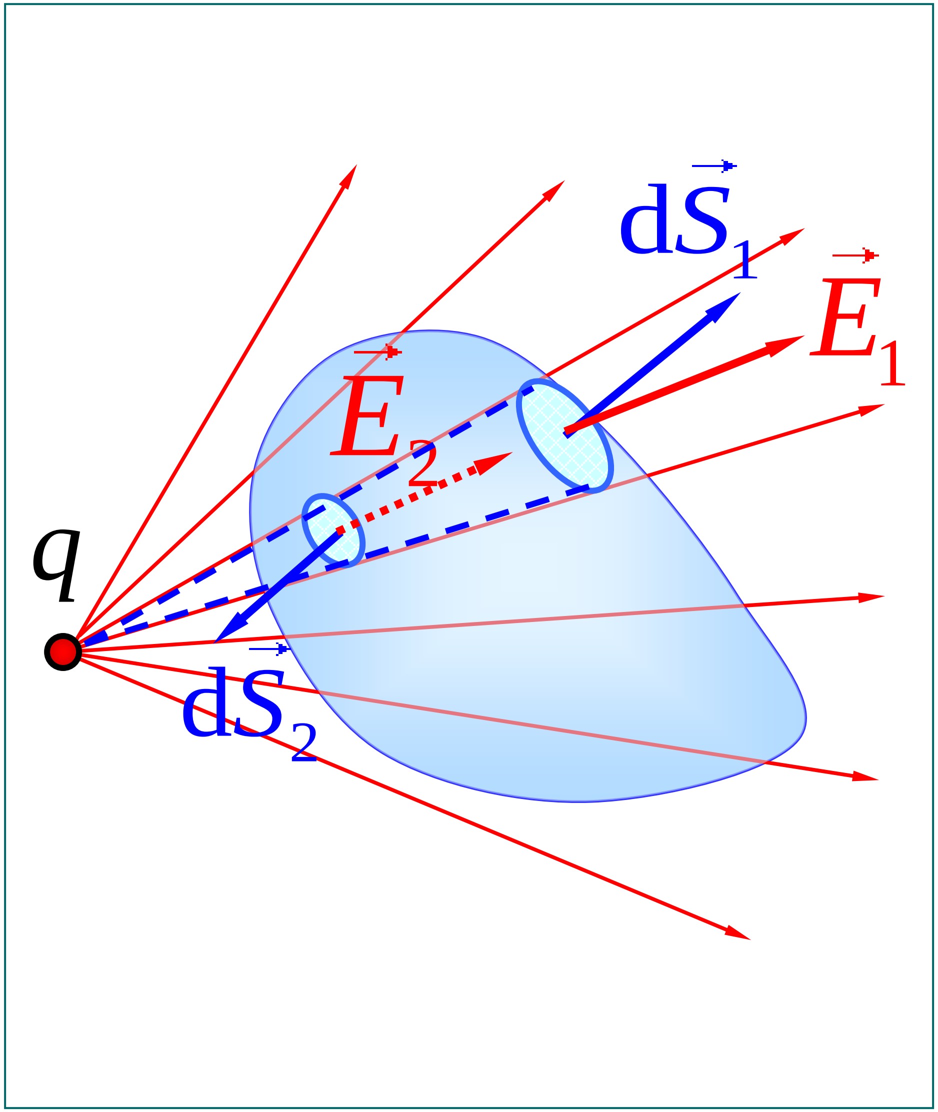
$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\left|\mathrm{d}\Phi_1\right| = \left|\mathrm{d}\Phi_2\right|$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



（4）由多个点电荷构成的点电荷系产生的电场中

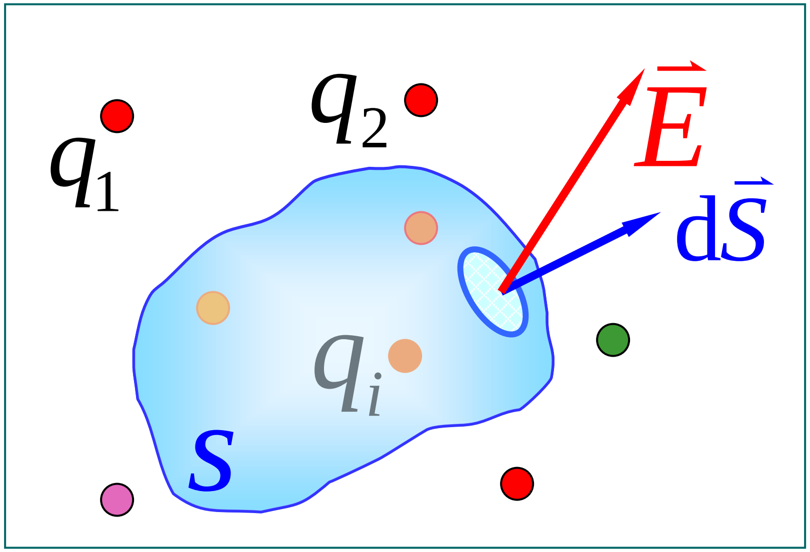
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$= \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$+ \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$



$$\therefore \Phi_e = \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\text{内})} q_i$$

高斯定理：

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

总结：

（1）高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度。

（2）高斯面一定为封闭曲面。

（3）穿出高斯面的电通量为正，穿入为负。

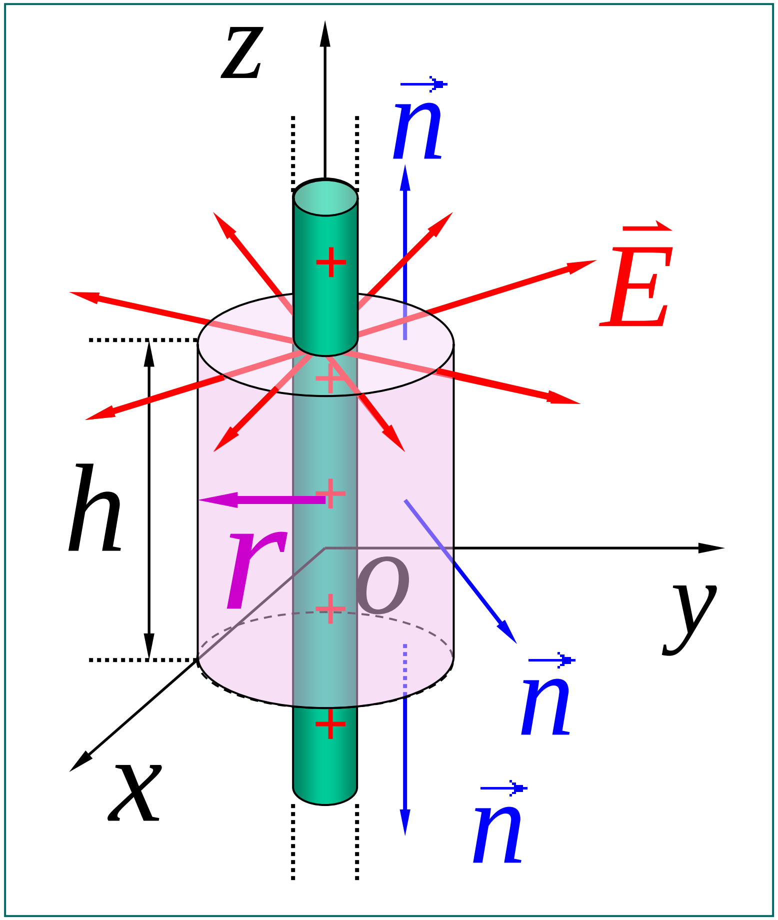
（4）仅高斯面内的电荷对高斯面的电通量有贡献。

（5）静电场是有源场。

例1 无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ，求距直线为 r 处的电场强度。

解：电场分布具有柱对称性，带电体轴线即为对称轴。

选取**闭合的柱形高斯面**，侧面上各点电场强度大小相等，且平行于侧面各处的法线；上下底面的法线与场强方向垂直。



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$+ \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E dS = E2\pi rh$$

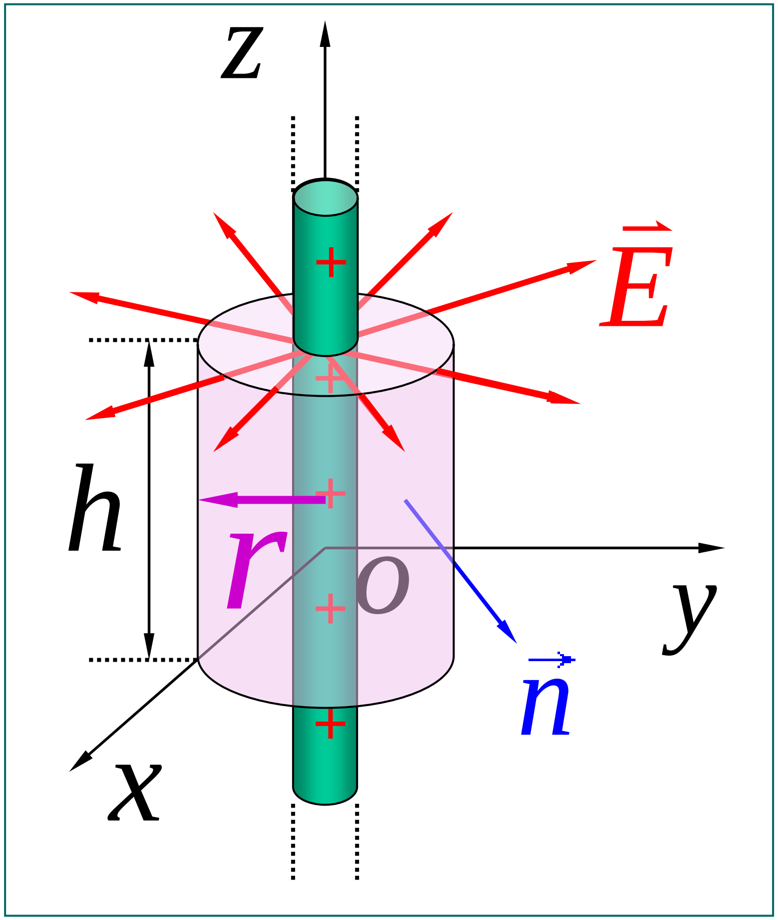
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$r > R$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}_0$$



思考： 若求 $r < R$ 空间内的电场强度分布，如何求？