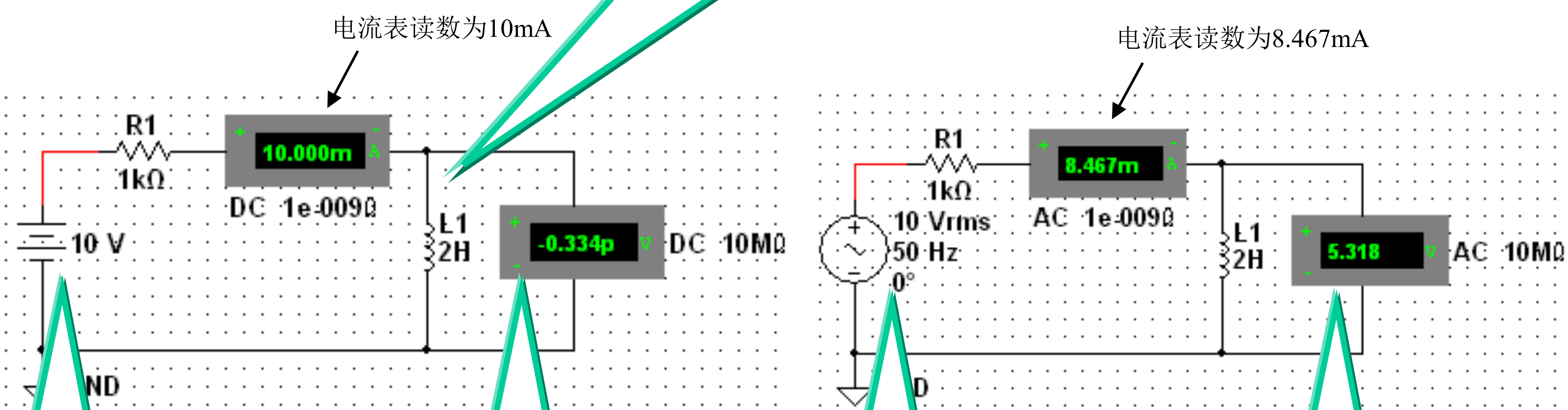
第3章 正弦交流电路

【引例】

电感元件



外加直流电源

电压表读数0V

外加交流电源

读数为5.318V

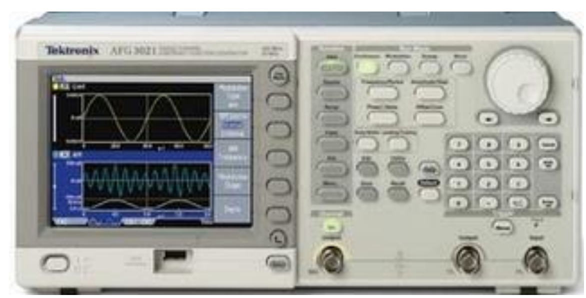
可见，电感元件外加不同电源时，在电路中的工作状态是不同的。它为何有这样的特性？通过对本章的学习便能得到解答。

3.1 正弦量的三要素

正弦交流电路： 电路外加正弦电源，电路中产生的电压与电流都按正弦规律变化。

正弦电源 {
- 交流发电机 （强电领域）
- 信号发生器 （弱电领域）

交流发电机

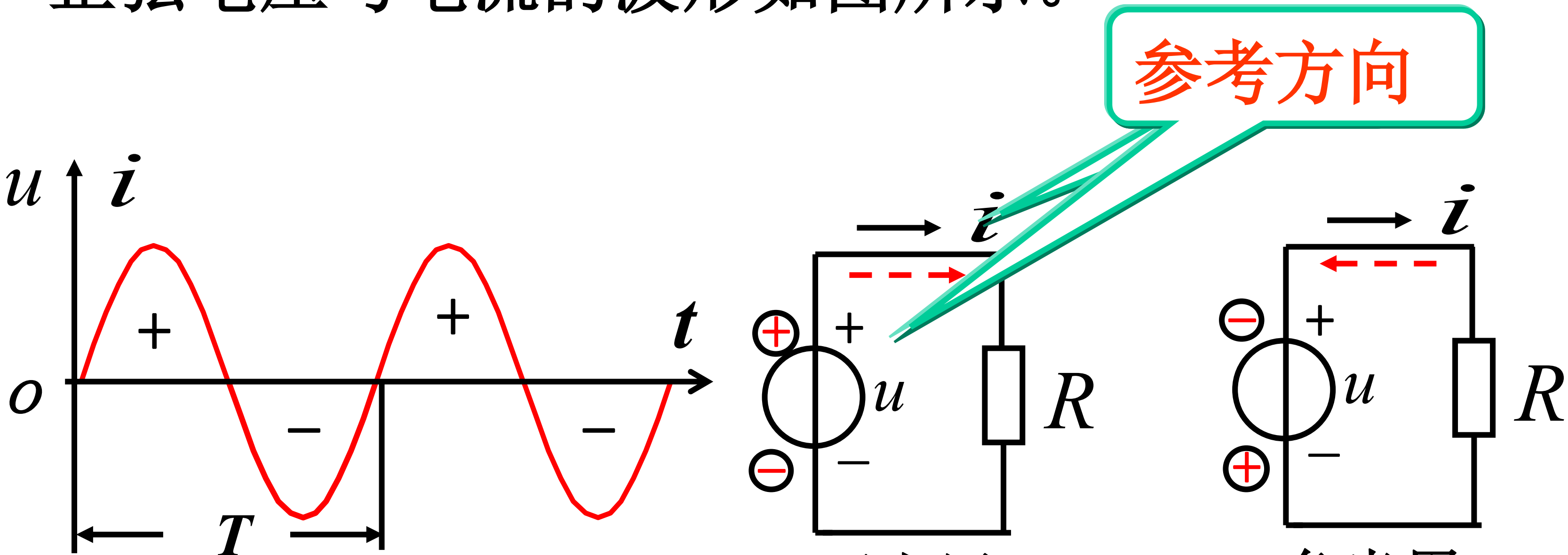


信号发生器

3.1.1 正弦量

正弦量： 在时间上，按正弦规律变化的电压或电流。

正弦电压与电流的波形如图所示。



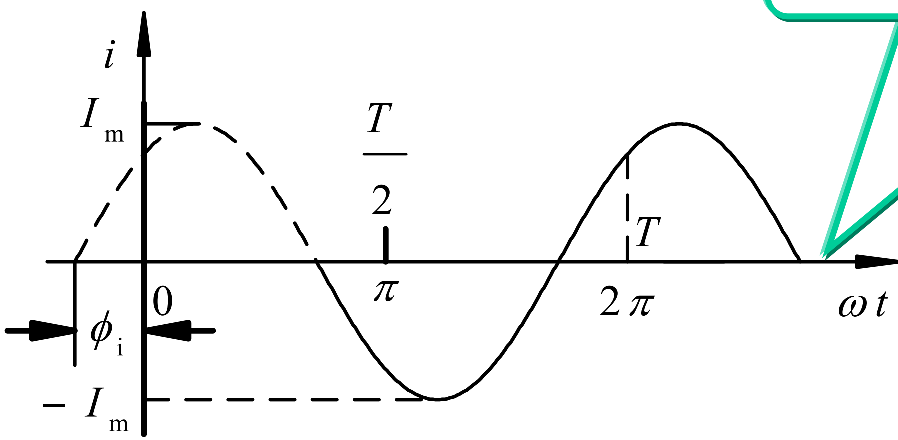
正半周　　负半周

正弦量的数学表达式为

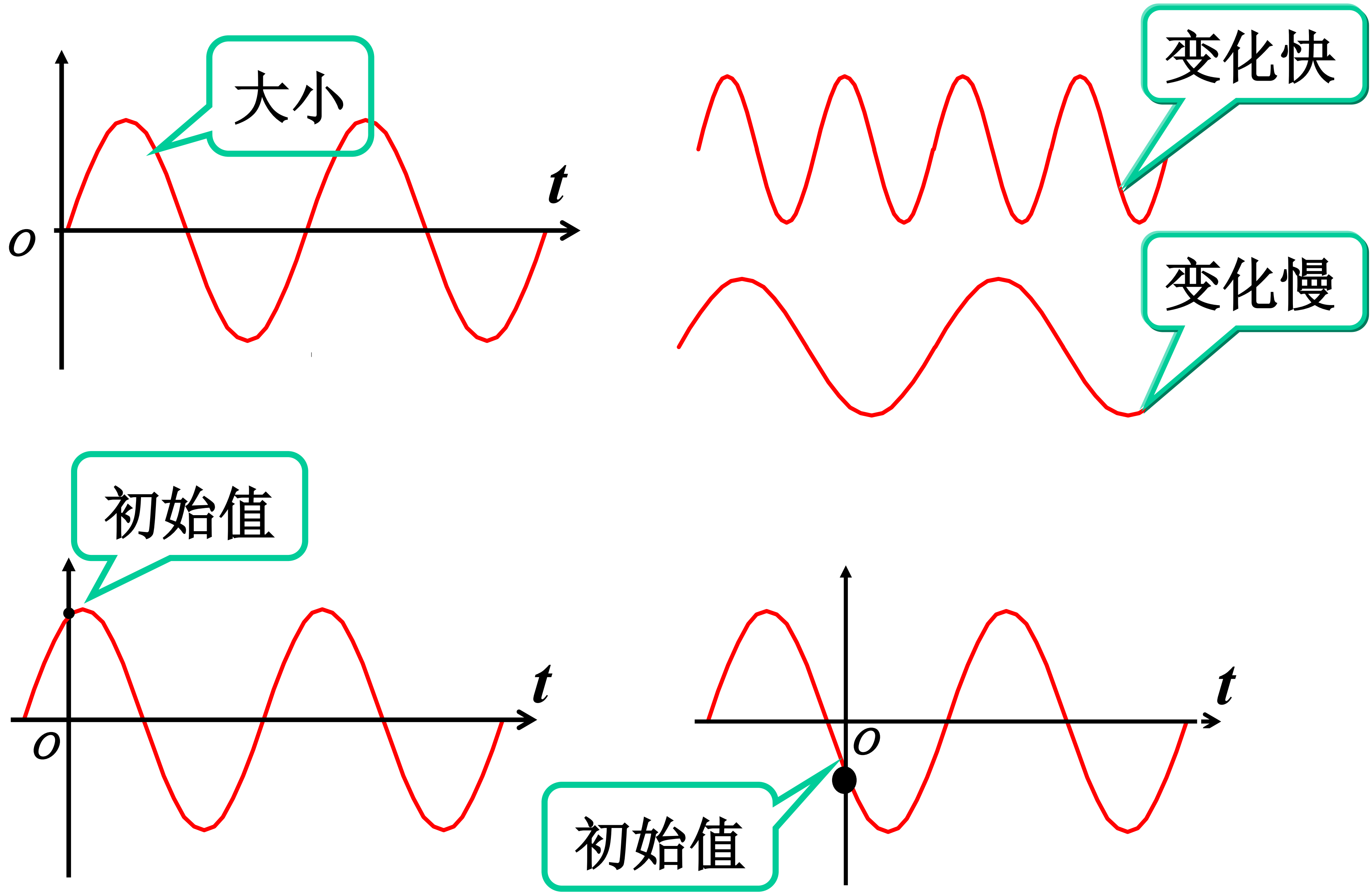
$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})$$

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

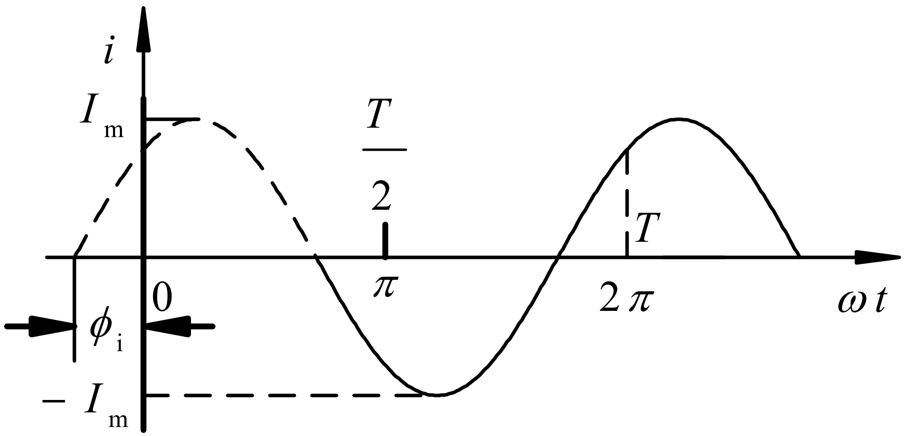
横轴也可用时间*t*表示



正弦量的特征：大小、快慢、初始值



3.1.2 正弦量的三要素



三要素

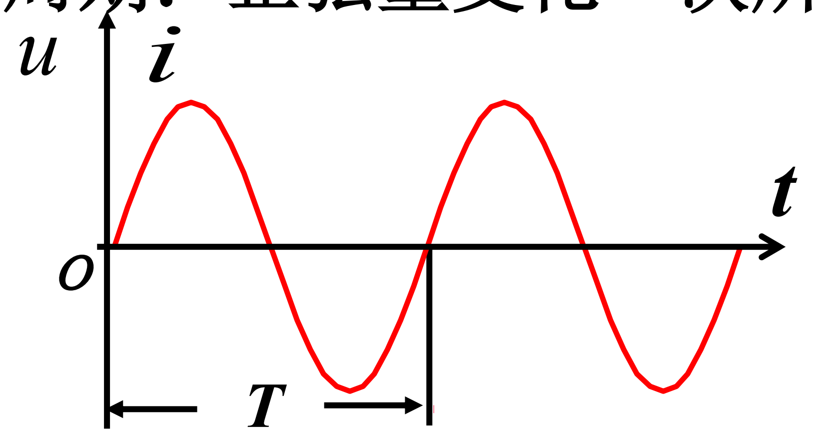
$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$$

正弦量的特征

- 大小 → 幅值（或有效值）
- 快慢 → 频率（或周期或角频率）
- 初始值 → 初相位

1. 频率、周期和角频率

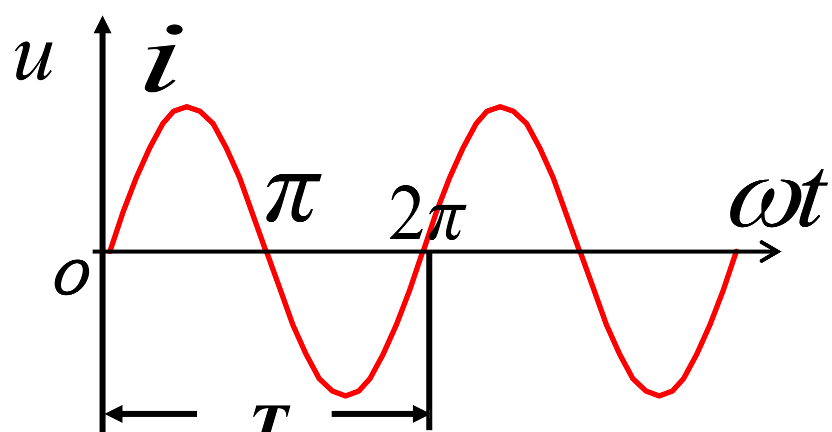
周期：正弦量变化一次所用的时间称为周期T。



频率f：每秒变化的次数。

$$f = \frac{1}{T}$$ 单位：Hz

正弦量一个周期内角度变化2π rad。

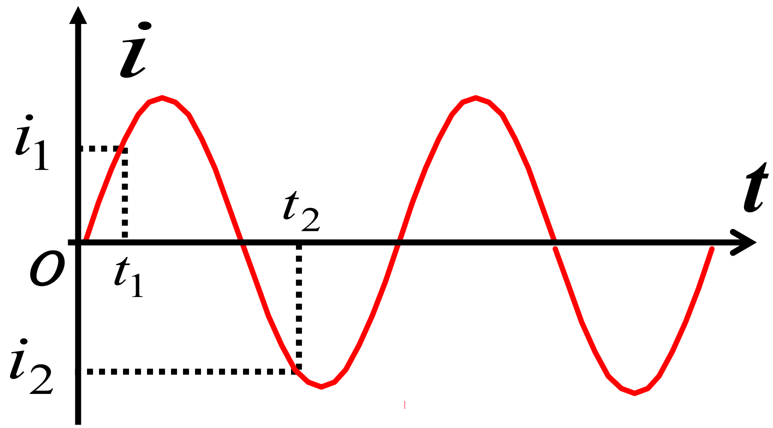


角频率ω：每秒变化的弧度。

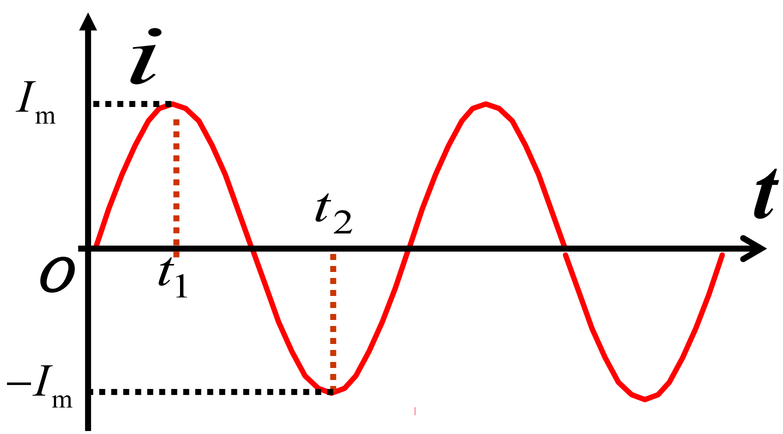
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$ 单位：rad/s

2. 幅值和有效值

瞬时值：任一瞬间的值。用 i 、u 表示。



幅值：瞬时值中的最大值。用 I_m、U_m 表示。

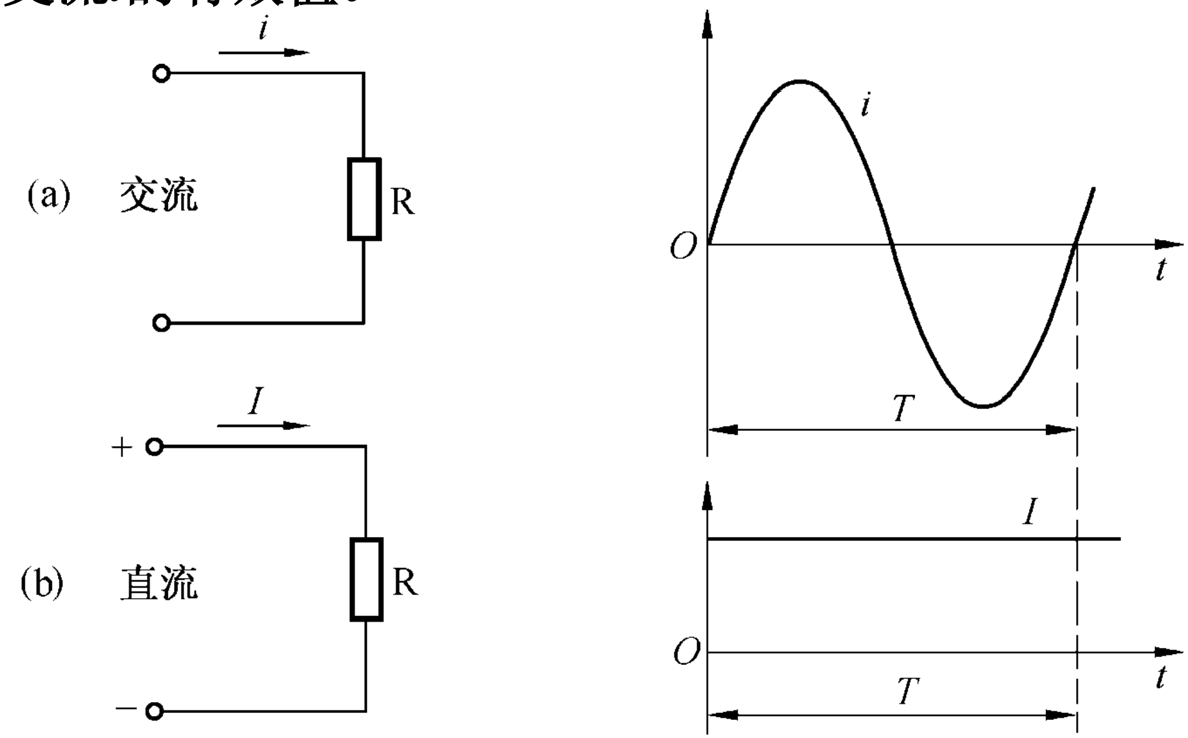


数学表达式为

$$i = I_m \sin \omega t$$

有效值概念(用*U*、*I*表示)：

令正弦电流i和直流电流I分别流过电阻R，在一个周期内，两个电阻消耗的能量相等，则可用直流电流I来表示正弦电流i在电路中的实际效果，直流电流I为正弦交流i的有效值。



发热量相等 $\underbrace{\int_0^T i^2 R\,dt}_{\text{交流}} = \underbrace{I^2RT}_{\text{直流}}$

$$\int_0^T i^2 R\,dt = I^2 RT$$

交流 直流

则有 $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2 dt}$ （方均根值 **RMS,rms**）

当 $i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_i)$ 时， 可得

$$\boxed{I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}}$$

同理，

$$\boxed{U = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}}$$

引入有效值后，正弦电流和电压的表达式可表示为

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})$$

在工程应用中，用**有效值**表示正弦量的大小。常用的交流电表指示的电压和电流值就是有效值。

我国民用电网的供电电压为**220V**，其幅值为

$\sqrt{2} \times 220 \approx 311\mathrm{V}$，其频率为**50Hz**,则角频率为

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314\ \mathrm{rad/s}$$

3. 相位和初相位

（1）初相位

正弦量随时间变化的角度称为正弦量的相位，或称为相位角，即

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}I\sin\boxed{(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})}$$

相位

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2}U\sin\boxed{(\omega t+\phi_{\mathrm{u}})}$$

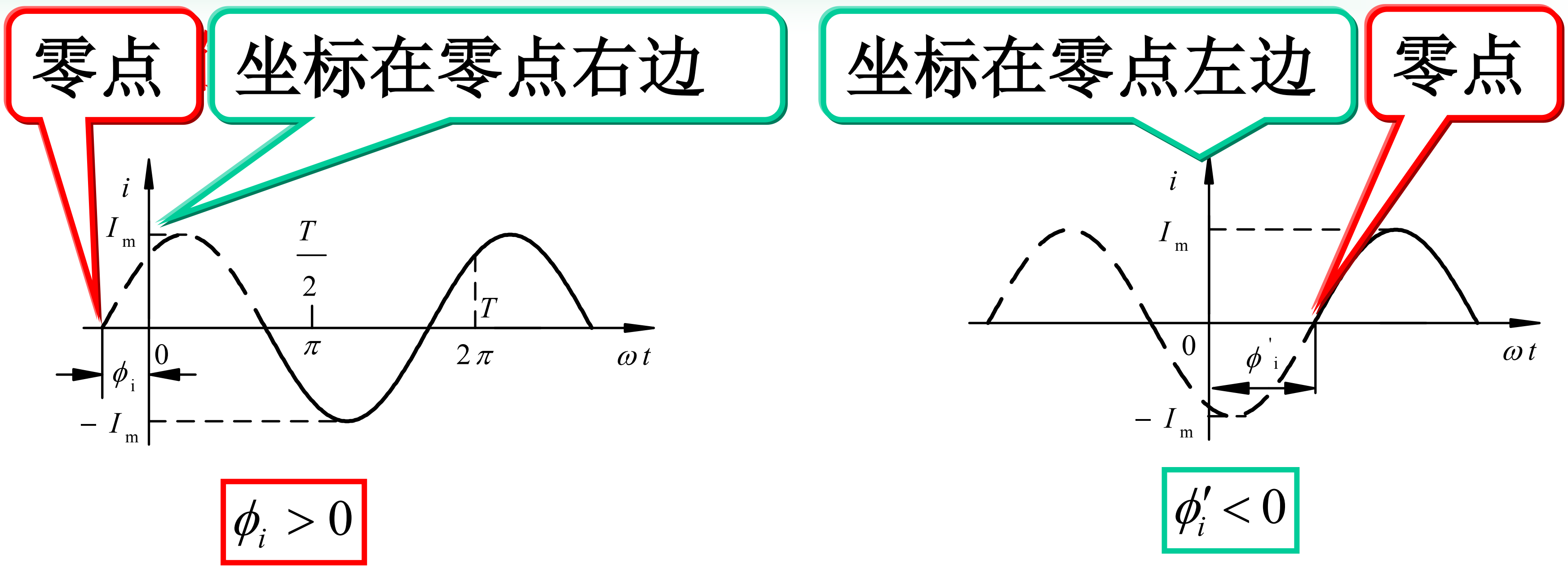
t **=0**时所对应的相位称为正弦量的初

初相位

或称初相位角,即

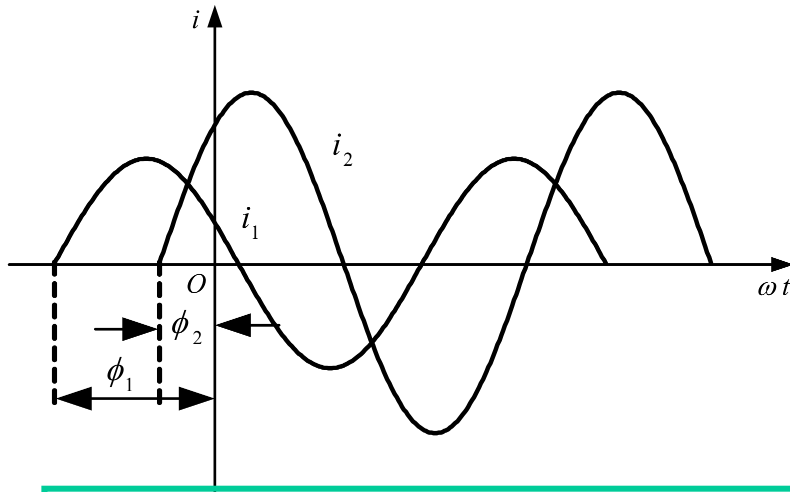
$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}I\sin(\omega t+\boxed{\phi_{\mathrm{i}}})$$

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2}U\sin(\omega t+\boxed{\phi_{\mathrm{u}}})$$



可见，初相位角与计时起点的选择有关。对于同一正弦量，如果计时起点不同，其初相位角的大小不同，正角和负角也不同。

（2）相位差



$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

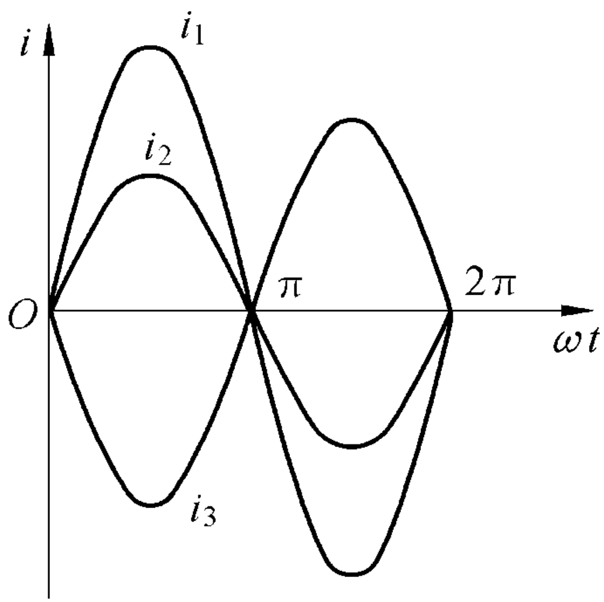
$$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2}$$

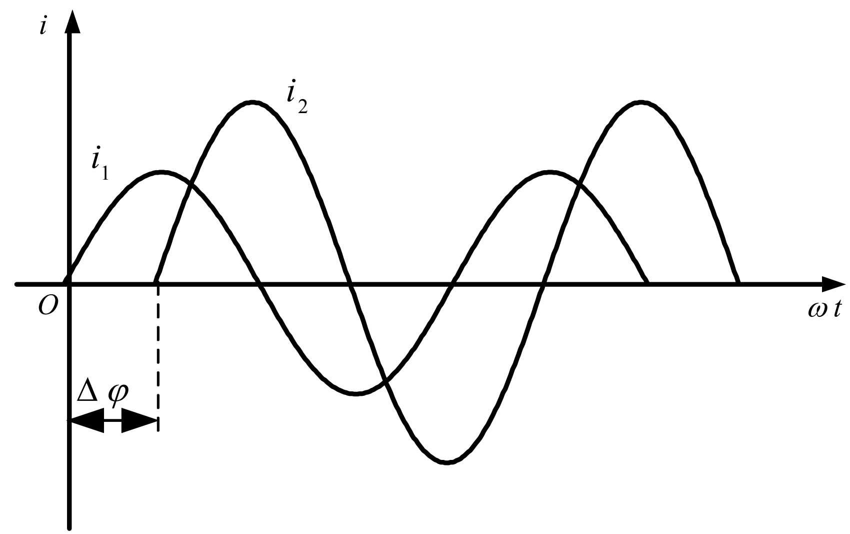
两同频率正弦量的相位差等于它们的初相位之差。

相位差的取值范围为 $\boxed{|\Delta\varphi| \le 180^\circ}$

在相位上，$\Delta\phi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$　i_1超前i_2，或者说i_2滞后i_1。

正弦量的同相、反相和正交：





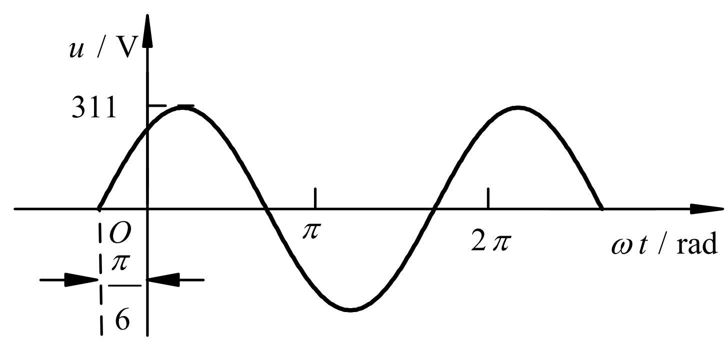
【例 3.1.1】已知正弦量 $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{6})\text{V}$ 求电压的有效值、幅值、频率、初始值、初相位，画出波形图。

【解】 $U = 220\text{V}$， $U_m = 220\sqrt{2} \approx 311\text{V}$，

$$\omega = 314\text{rad/s}, \quad f = \frac{314}{2\pi} = 50\text{Hz},$$

$$u(0) = 311\sin(\frac{\pi}{6})\text{V} = 311\sin 30^\circ = 155.5\text{V}$$

$$\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$



【例 3.1.2】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\mathrm{A}$, $i_2 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)\mathrm{A}$, $i_3 = \sqrt{2}\sin(\omega t)\mathrm{A}$, 比较它们的相位关系。

【解】三个电流是同频率的正弦量，其初相位分别为

$$\phi_1 = 30^\circ, \ \phi_2 = -60^\circ, \ \varphi_3 = 0^\circ$$

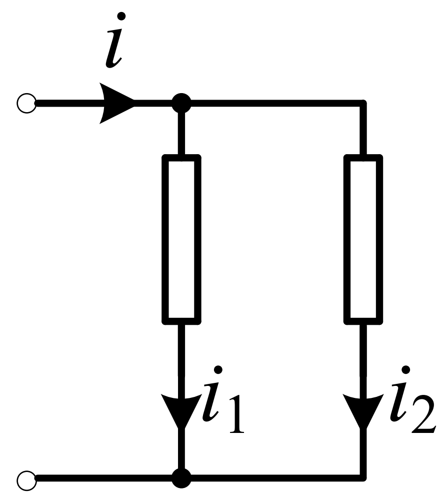
i_1和i_2的相位差为 $\varphi_1 - \varphi_2 = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ$ $\boxed{i_1\text{超前}i_2\,90^\circ;}$

i_1和i_3的相位差为 $\varphi_1 - \varphi_3 = 30^\circ - 0^\circ = 30^\circ$ $\boxed{i_1\text{超前}i_3\,30^\circ;}$

i_2和i_3的相位差为 $\varphi_2 - \varphi_3 = -60^\circ - 0^\circ = -60^\circ$ $\boxed{i_2\text{滞后}i_3\,60^\circ。}$

3.2 正弦量的相量表示法

问题:



$$i_1 = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ)$$

$$i = i_1 + i_2 = ?$$

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ) + 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ) \\ &= \ldots. \\ &= 10\sqrt{2}\cos(314t - 23.1^\circ) \end{aligned}$$

繁琐计算

3.2 正弦量的相量表示法

特别的是，在含有电感和(或)电容的正弦电路中

$$i = C\frac{du}{dt} \qquad u = L\frac{di}{dt}$$

因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程。

正弦电流电路 $\xrightarrow{\text{分析}}$ 建立电路方程(或含微积分方程) $\xrightarrow{\text{求解}}$ 得时域响应表达式

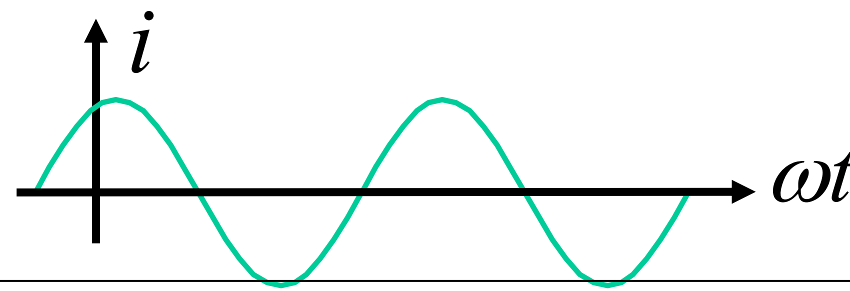
时域分析过程示意图

3.2 正弦量的相量表示法

正弦量的表示方法为

瞬时值表达式：$i=\sqrt{2}I\sin\left(\omega t+30^{\circ}\right)$

波形图：



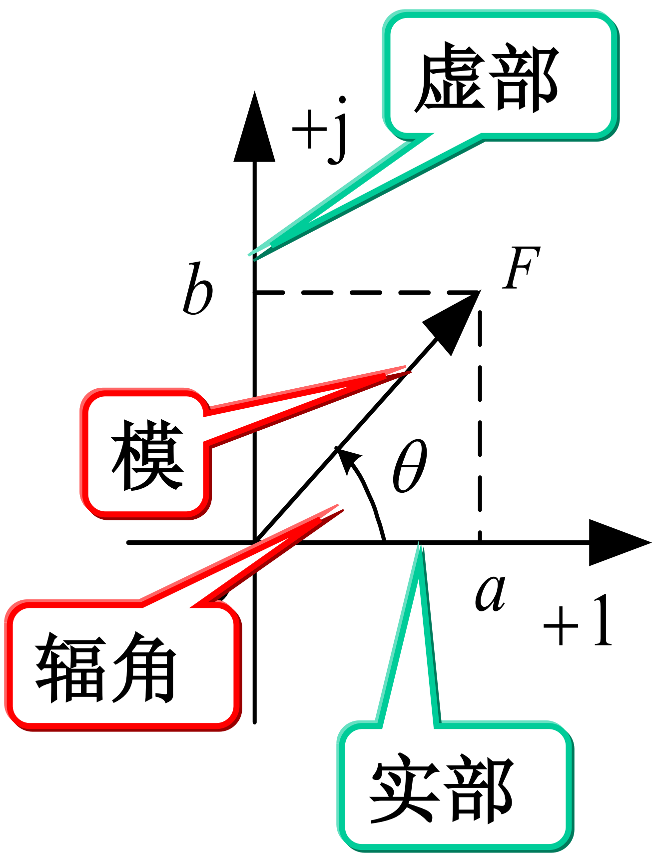
思考：**1.** 正弦量用前两种方法计算麻烦。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？

2.正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。因此，正弦量的三要素中，关键要确定有效值（或最大值）和初相位。

3.2 正弦量的相量表示法

1. 复数的表示法　$j=\sqrt{-1}$ 虚数单位

复数可用复平面上的有向线段 F 表示，即



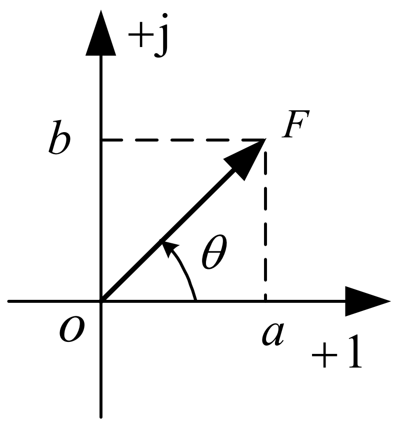
复数的代数式为

$$F = a + \mathrm{j}b$$

实部(*Re*)　虚部(*Im*)

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$

3.2 正弦量的相量表示法



复数的表示形式为

$$F = a + \mathrm{j}b$$

代数式

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$

$$F = a + \mathrm{j}b = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

根据欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$，有

$$F = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = |F|e^{\mathrm{j}\theta}$$

指数式

$$F = |F|\angle\theta$$

极坐标式

3.2 正弦量的相量表示法

$$F = a + \mathrm{j}b = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = |F|e^{\mathrm{j}\theta} = |F|\angle\theta$$

代数式　　指数式　　极坐标式

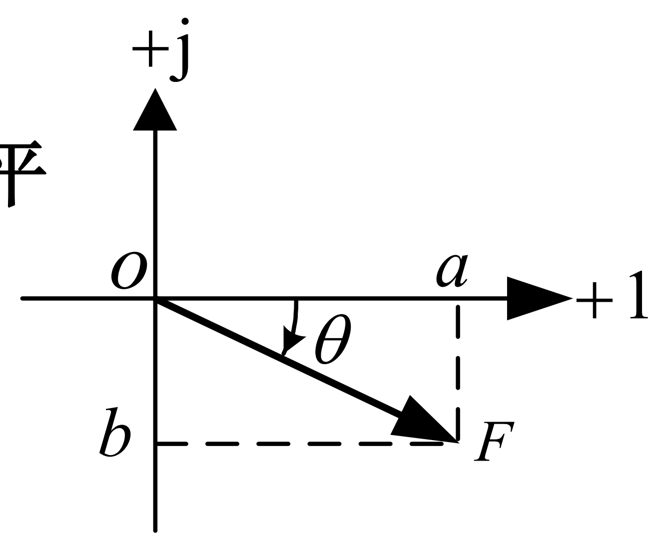
两组参数（相互关系）

$$\begin{cases} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

取值由复数在复平面上的象限而定

$(-\pi < \theta < \pi)$

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$



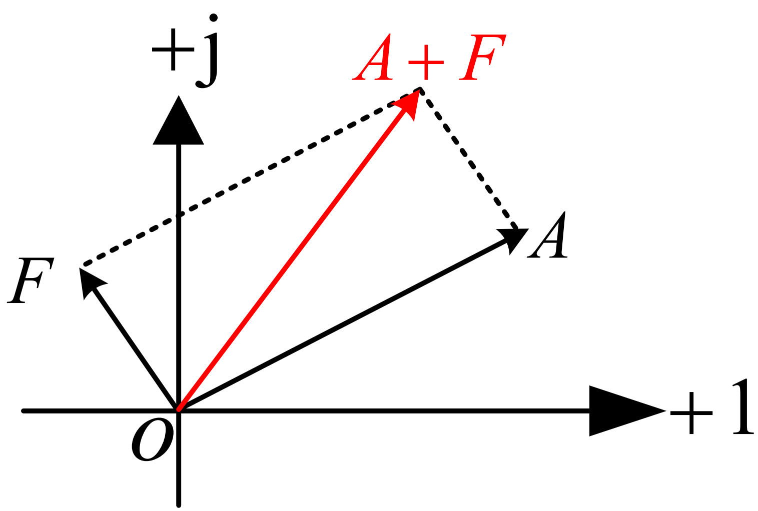
$(-90^\circ, 0^\circ)$

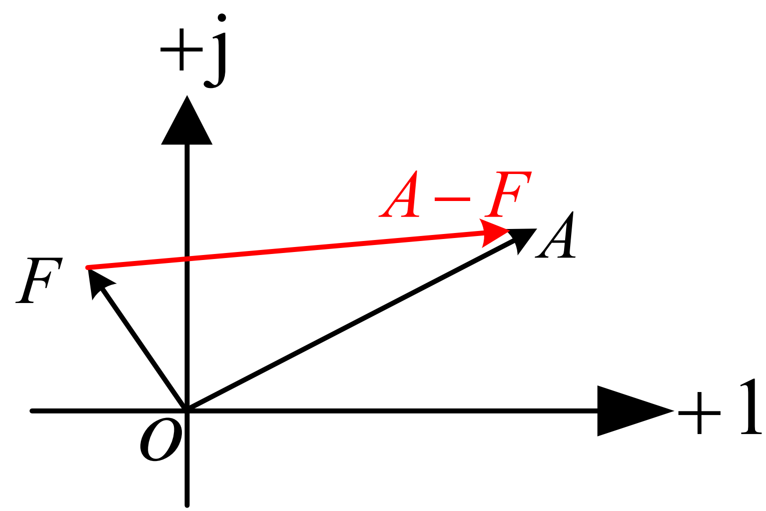
复数的运算规则:

1. 加 、减运算　　　　加减法可用图解法

设 $\begin{cases} A = a + \mathrm{j}b \\ F = c + \mathrm{j}d \end{cases}$

则 $A \pm F = (a + \mathrm{j}b) \pm (c + \mathrm{j}d) = (a \pm c) + \mathrm{j}(b \pm d)$





2. 乘除法运算

设 $\begin{cases} A = |A|\angle\theta_1 \\ F = |F|\angle\theta_2 \end{cases}$

则

$$\boxed{\begin{aligned} AF &= |A|\angle\theta_1 \times |F|\angle\theta_2 = |A||F|\angle(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{A}{F} &= \frac{|A|\angle\theta_1}{|F|\angle\theta_2} = \frac{|A|}{|F|}\angle(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}}$$

乘法：模相乘，辐角相加

除法：模相除，辐角相减

2. 正弦量的相量表示

在线性正弦稳态电路中，只要电源的频率给定，电路响应（电流或电压）是同频率的正弦量。

正弦量的三要素中，关键要确定有效值（或最大值）和初相位。

$$F = \left|F\right| \angle \theta \quad \begin{cases} \text{模} \longleftrightarrow \text{有效值（或最大值）} \\ \text{幅角} \longleftrightarrow \text{初相位} \end{cases}$$

2. 正弦量的相量表示

正弦量一般表达式为: $f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$

设一复指数函数$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}$根据欧拉公式得

$$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi)+j\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

得

$$f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}]$$

$$=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$

其中复常数 $\dot{I}=Ie^{j\varphi}=I\angle\varphi$ ——相量（phasor）

正弦量有效值

正弦量初相位

3.2 正弦量的相量表示法

$$f(t)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$

一个正弦 $f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$ 能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{I}$

$$f(t)\rightleftharpoons\dot{I}$$

反之，若已知 $\dot{I}$ 和角频率 ω，也能唯一地确定 $\dot{I}$ 所代表的正弦量 $f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$

3.2 正弦量的相量表示法

为了和一般的复数相区别，相量在大写字母上加小圆点来区分。

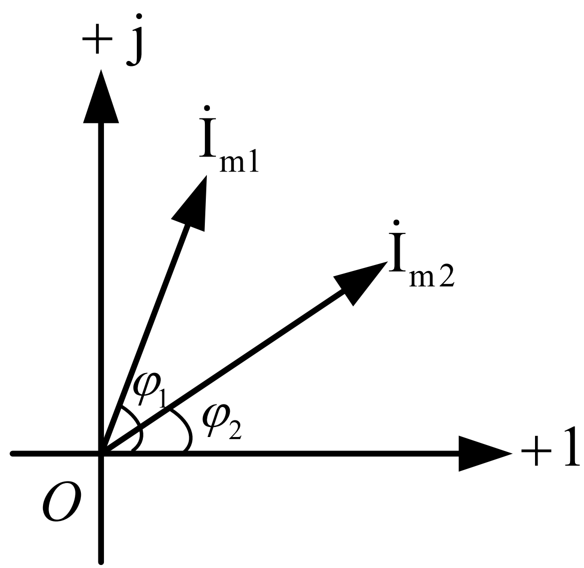
$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$	$\dot{I}=I\angle\varphi_i$	有效值相量
$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$	$\dot{U}=U\angle\varphi_u$	有效值相量

$i=\mathrm{I_m}\sin(\omega t+\varphi_i)$	$\dot{I}=\mathrm{I_m}\angle\varphi_i$	最大值相量
$u=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$	$\dot{U}=U_m\angle\varphi_u$	最大值相量

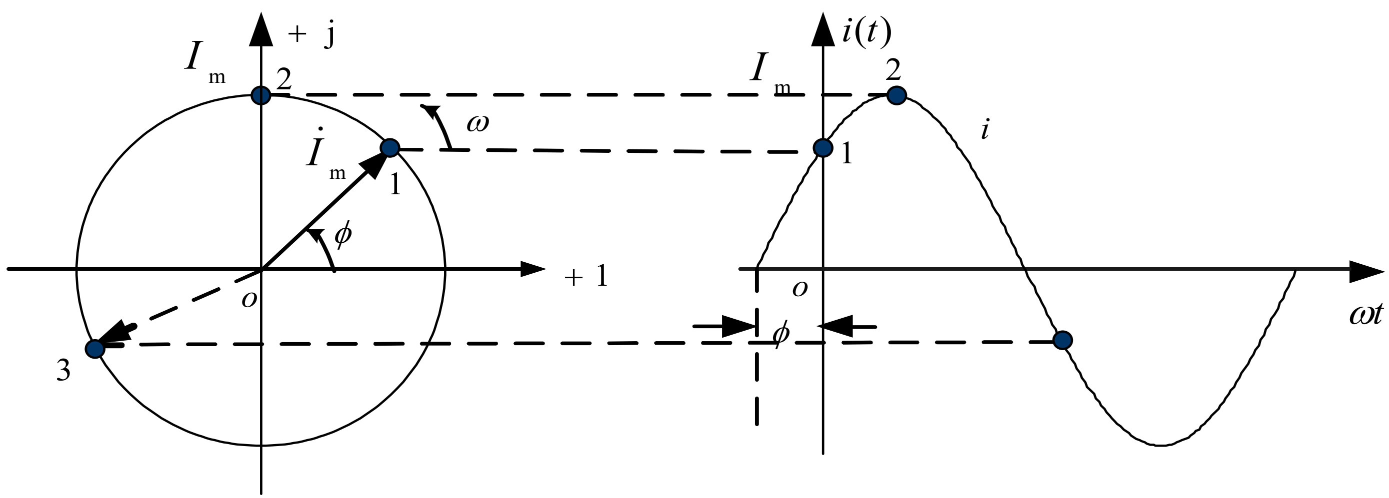
关于相量说明

1. 相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。正弦量是时间的正弦函数，而相量是复常数，其模是该正弦量的有效值，其幅角是该正弦量的初相位。

2. 相量也可以用有向线段表示，按着一定的大小和相位关系画出若干相量的图形 ——相量图。



3. 复指数$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}$的幅角$\omega t+\varphi$是随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心逆时针方向旋转，旋转角速度为$\frac{d(\omega t+\varphi)}{dt}=\omega$，称为旋转相量。



旋转相量在虚轴上的投影是正弦量的瞬时值

$$f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}]$$

$$=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$

4. 旋转因子：$e^{\pm j\theta^\circ}$

旋转因子作用： 当 $\dot{F}\times e^{\pm j\theta}$ 时，$\dot{F}$ 相量逆时针方向旋转 θ 角或顺时针方向旋转 θ 角，其相量的幅值或有效值不变。

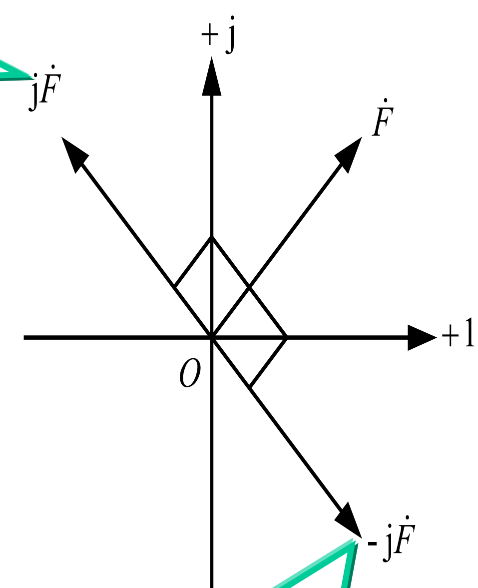
$+j$乘上$\dot{F}$

$$e^{\pm j\theta^\circ}=e^{\pm j90^\circ}$$

90°旋转因子

$$\begin{cases} e^{j90^\circ}=\cos 90^\circ+j\sin 90^\circ=j \\ e^{-j90^\circ}=\cos(-90^\circ)+j\sin(-90^\circ)=-j \end{cases}$$

$$\boxed{e^{\pm j90^\circ}=\pm j}$$



$-j$乘上$\dot{F}$

5. 注意大小写符号的意义

瞬时值 ⟶ 小写 u、i

有效值 ⟶ 大写 U、I

最大值 ⟶ 大写带下标 U_{m}

相量（复数）⟶ 大写，头上加“.” $\dot{U}$

正弦量的加减、微积分运算都可用对应的相量来进行

1. 两同频率正弦电流相加，设
$$i_1 = \sqrt{2}I_1\sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$i_2 = \sqrt{2}I_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$i = i_1 + i_2$$

将i_1和i_2写成
$$i_1 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_1 e^{j\omega t}]$$
$$i_2 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$$

则
$$i = i_1 + i_2 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_1 e^{j\omega t}] + \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$$
$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)e^{j\omega t}]$$

令
$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}]$$

则
$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)e^{j\omega t}] \qquad \boxed{\dot{I} = \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)}$$

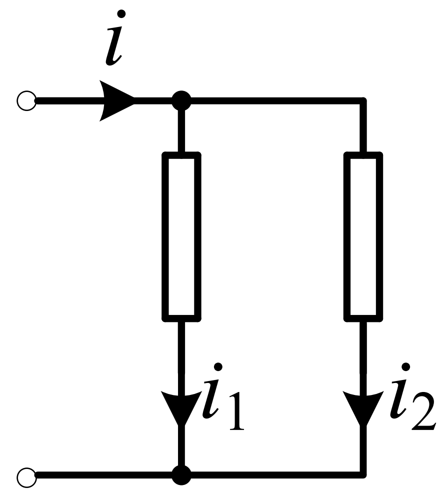
同频率正弦量相加减运算变成对应的相量相加减运算。

问题：

$$i_1 = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ)$$

$$i = i_1 + i_2 = ?$$



$$\dot{I}_1 = 6\angle 30^\circ$$

$$\dot{I}_2 = 8\angle -60^\circ$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6\angle 30^\circ + 8\angle -60^\circ$$

$$= (5.2 + j3) + (4 - j6.9)$$

$$= 10\angle -23.1^\circ$$

$$i = 10\sqrt{2}\cos(314t - 23.1^\circ)$$

2. 正弦量的微分

设 $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$

则 $$\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\left(\sqrt{2}(j\omega\dot{I})e^{j\omega t}\right)\right]$$

正弦量的微分，其对应的相量等于原正弦量对应的相量乘以 jω。

证明：$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)=j\omega e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]\\ &= -\omega\sin(\omega t) + j\omega\cos(\omega t)\\ &= j^2\omega\sin(\omega t) + j\omega\cos(\omega t)\\ &= j\omega\left[j\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right]\\ &= j\omega e^{j\omega t}\end{aligned}$$

证明：$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}(e^{j\omega t})\right]=\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\right]$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}(e^{j\omega t})\right]=\frac{d}{dt}[\sin(\omega t)]$$
$$=\omega\cos(\omega t)$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\right]=\mathrm{Im}\left[j\omega e^{j\omega t}\right]$$
$$=\mathrm{Im}\left[j\omega\left(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right)\right]$$
$$=\mathrm{Im}\left[j\omega\cos(\omega t)-\omega\sin(\omega t)\right]$$
$$=\omega\cos(\omega t)$$

3. 正弦量的积分

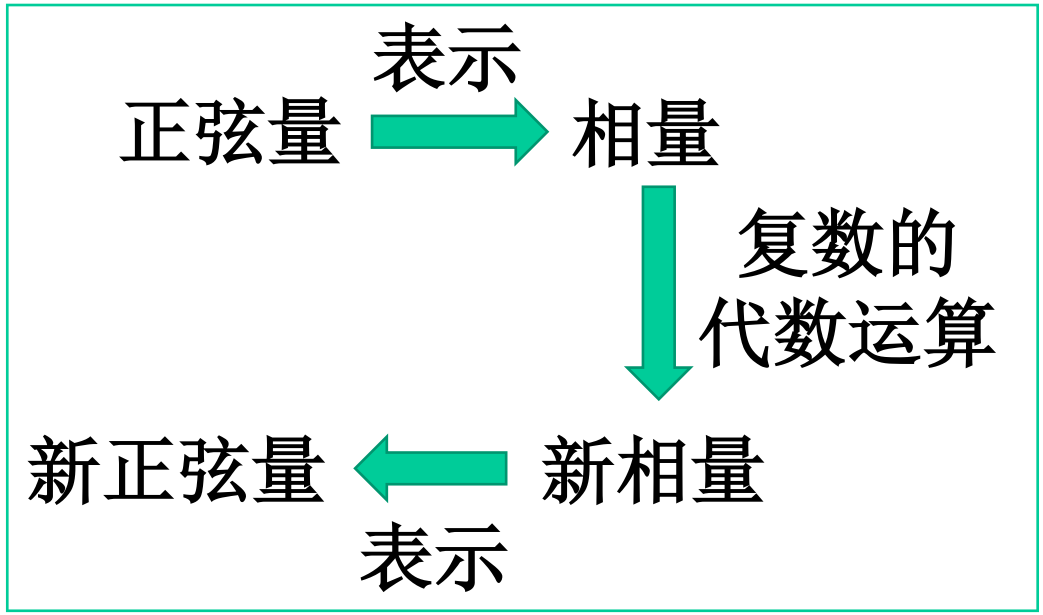
设 $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$

则
$$\int i dt=\int\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)dt$$
$$=\int \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]dt$$
$$=\mathrm{Im}\left[\int\left(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right)dt\right]$$
$$=\mathrm{Im}\left[\left(\sqrt{2}\dot{I}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\right)\right]$$

正弦量的积分，其对应的相量等于原正弦量对应的相量除以 jω。

将正弦量用相量表示，用相量形式求解正弦交流电路中的电压和电流——**相量法**。

相量法的过程



相量法的优点：

（1）将时域问题变为复数问题

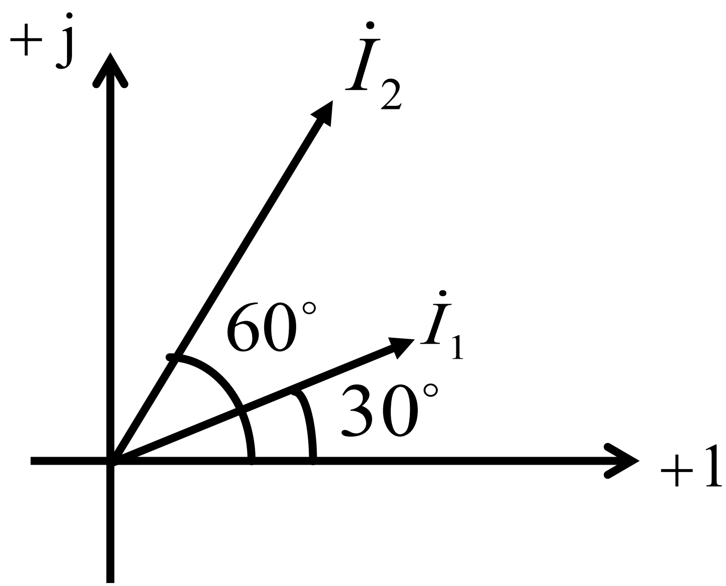
（2）将微积分方程的运算变为复数方程运算

注意：相量法只适用于激励为同频正弦量的线性电路

【例 3.2.1】已知 $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$，$i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)\text{A}$，画出这两个正弦量的相量图。

【解】正弦量的有效值为 $I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = 5\text{A}$。

它们的初相位分别是 $+30^\circ$、$+60^\circ$，则相量图为



注意：只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。

【例 3.2.2】已知 $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\mathrm{A}$，$i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)\mathrm{A}$，写出它们的相量代数式、指数式和极坐标式。

【解】首先写出指数式和极坐标式为

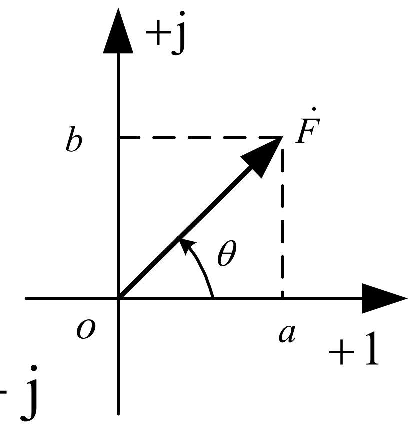
$$\dot{I}_1 = 2e^{\mathrm{j}30^\circ} = 2\angle 30^\circ\ \mathrm{A} \qquad \dot{I}_2 = 5e^{\text{-j}60^\circ} = 5\angle -60^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_1 = 2e^{\mathrm{j}30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + \mathrm{j}\sin 30^\circ) = 2\times(0.866 + 0.5) = (1.73 + \mathrm{j}1)\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = 5e^{\text{-j}60^\circ} = 5(\cos 60^\circ - \mathrm{j}\sin 60^\circ) = 5\times(0.5 + 0.866) = (2.5 - \mathrm{j}4.33)\mathrm{A}$$

【例 3.2.3】已知 $\dot{I}_1=(1.73+\mathrm{j}1)\mathrm{A}$，$\dot{I}_2=(2.5-\mathrm{j}4.33)\mathrm{A}$。写出它们的指数式和极坐标式，并画出其相量图。

【解】根据 $\dot{F}=a+\mathrm{j}b=Fe^{\mathrm{j}\theta}$ 公式有

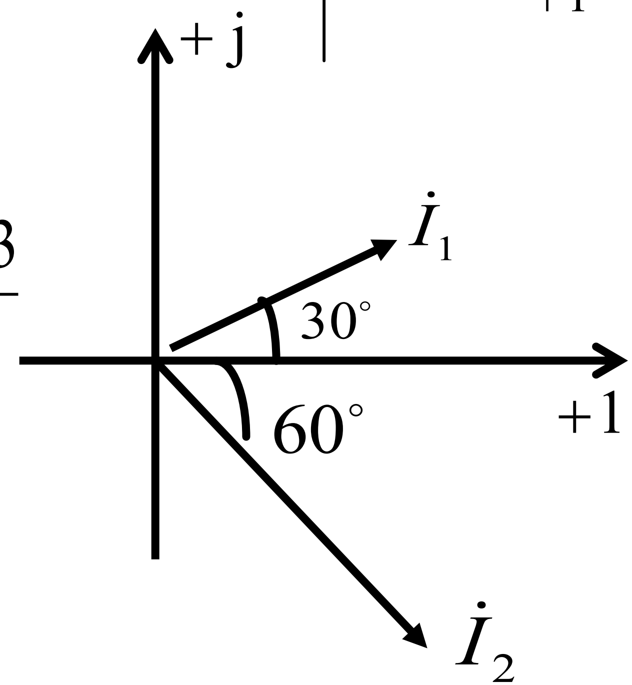


$$\dot{I}_1=1.73+\mathrm{j}1=\sqrt{1.73^2+1^2}\angle\arctan\frac{1}{1.73}$$

$$=2\angle 30^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=2.5-\mathrm{j}4.33=\sqrt{2.5^2+4.33^2}\angle\arctan\frac{-4.33}{2.5}$$

$$=5\angle-60^\circ\ \mathrm{A}$$



【例 3.2.4】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t)\text{A}$， $i_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)\text{A}$，求$i = i_1 + i_2$。

【解】解法一，用相量式求解

$$\dot{I}_1 = 3\angle 0^\circ = 3\text{A}$$

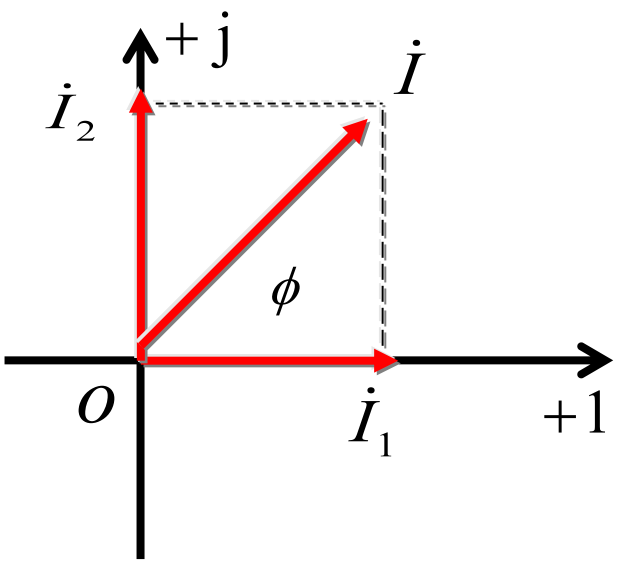
$$\dot{I}_2 = 4\angle 90^\circ = 4(\cos 90^\circ + \text{j}\sin 90^\circ) = \text{j}4\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 3 + \text{j}4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\angle \arctan\frac{4}{3} = 5\angle 53.1^\circ\text{A}$$

所以 $i = i_1 + i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 53.1^\circ)\text{A}$

【例 3.2.4】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t)\mathrm{A}$，$i_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)\mathrm{A}$，求$i = i_1 + i_2$。

【解】解法二，用相量图解



$$I = \sqrt{I_1^{\,2} + I_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\mathrm{A}$$

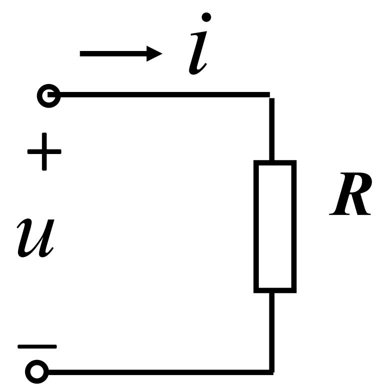
$$\varphi = \arctan\frac{I_2}{I_1} = \arctan\frac{4}{3} = 53.1^\circ$$

$$\dot{I} = 5\angle 53.1^\circ\,\mathrm{A}$$

总电流为 $i = i_1 + i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 53.1^\circ)\mathrm{A}$

3.3 电阻元件的正弦交流电路

为了利用相量法分析正弦交流电路，我们先建立电阻、电感和电容的单一元件的电路模型，然后再对正弦交流电路进行分析。



$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})$$

$$u=Ri=\sqrt{2}RI\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})$$

从两数学表达式可以看出：

频率相同， 相位相同。

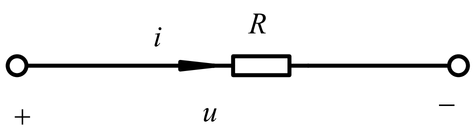
有效值关系： $U=IR$

用相量表示其大小和相位关系，即

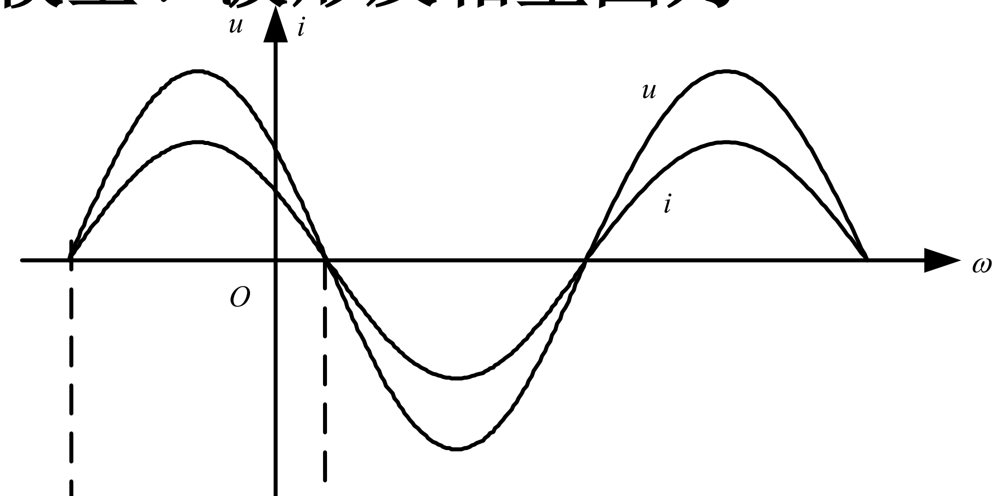
$$\dot{U}=Ue^{\mathrm{j}\phi_i}\qquad \dot{I}=Ie^{\mathrm{j}\phi_i}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{Ue^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}}}{Ie^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}}}=R$$ 或 $$\boxed{\dot{U}=R\dot{I}}$$ 欧姆定律的相量表示式

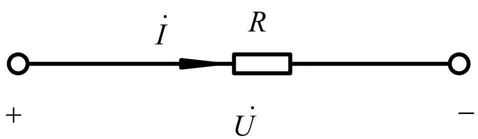
电阻元件的相量模型、波形及相量图为



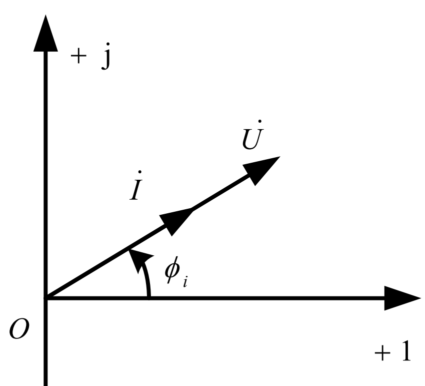
(a)瞬时电压和电流



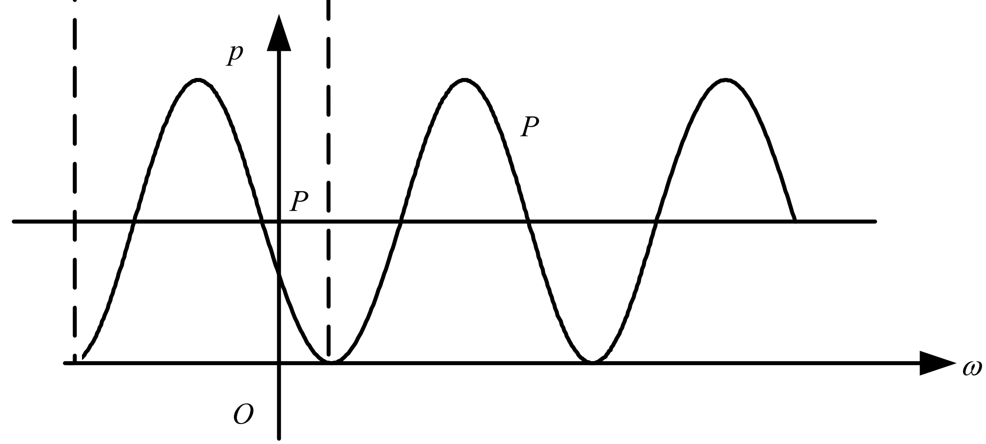
(b)电压、电流的波形图



(c)电阻的相量模型



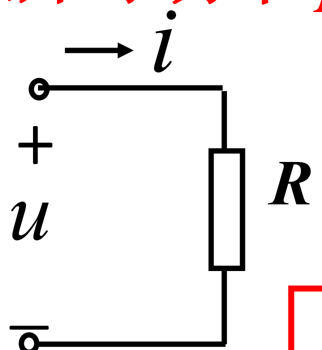
(d)电压、电流的相量



(e)瞬时功率波形

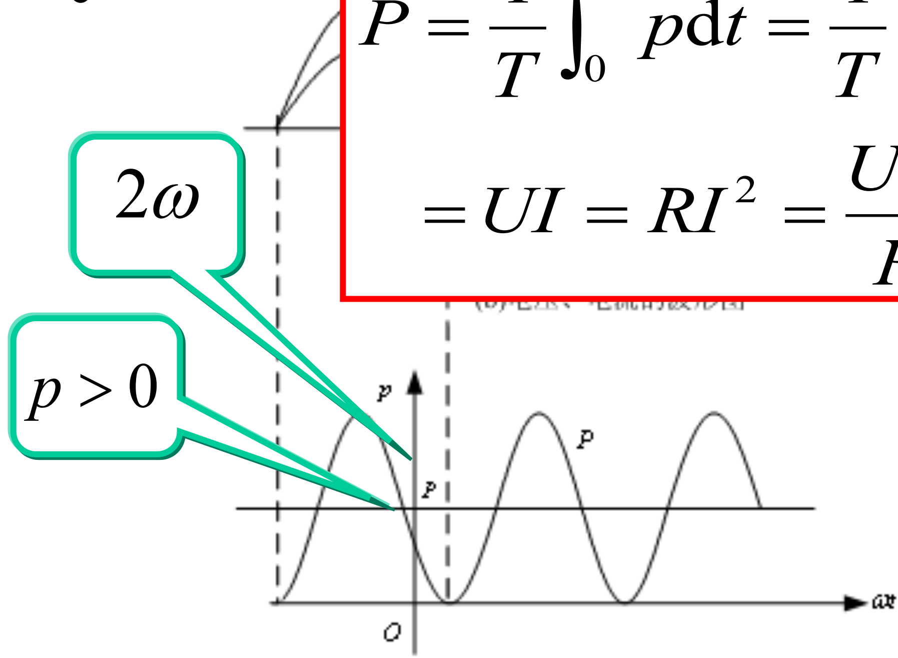
3.3.2 功率和能量

瞬时功率 p： 瞬时电压与瞬时电流的乘积



$$p = ui = \sqrt{2}U\sin(\omega t+\phi_i)\sqrt{2}I\sin(\omega t+\phi_i)$$
$$= UI[1-\cos 2(\omega t+\phi_i)]$$

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T UI[1-\cos 2(\omega t+\phi_i)]\mathrm{d}t = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$



(e)瞬时功率波形

实际应用中，电阻消耗多少电能是用**平均功率P**计算。

【例3.3.1 】一个额定功率为3W、阻值为20k 的电阻接于频率为50Hz、电压有效值为220V的正弦电源上。求（1）通过电阻的电流；（2）电阻实际消耗的功率；（3）当电源频率变为500Hz时，通过电阻的电流和消耗的功率有何变化？

【解】（1）$I=\dfrac{U}{R}=\dfrac{220}{20\times10^3}=0.011\text{A}$

（2）$P=I^2R=0.011^2\times20\times10^3=2.42\text{W}$

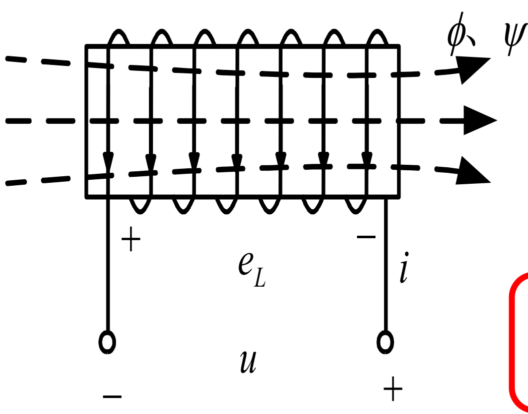
电阻实际消耗功率小于额定功率，电路正常工作。

（3）由于电阻的阻值与电源频率无关，所以电流和功率都不变。

3.4 电感元件的正弦交流电路

3.4.1 电感元件的定义

电流产生的磁链



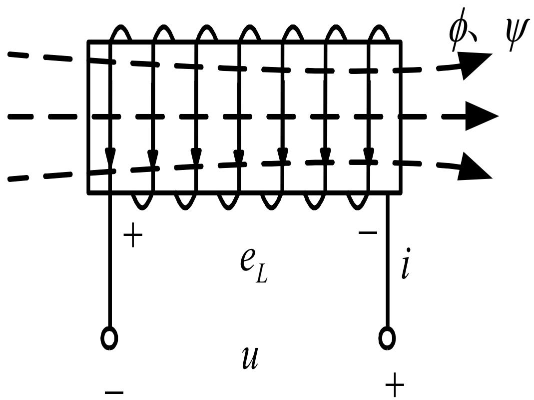
匝数 磁通 磁链

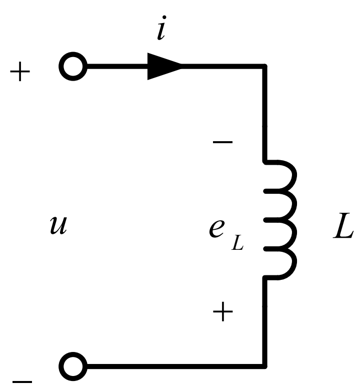
$$Li = N\Phi = \psi$$

电感

$$L = N\frac{\Phi}{i}$$

（单位：**H, mH, μH**）





由电磁感应定律和楞次定律可知

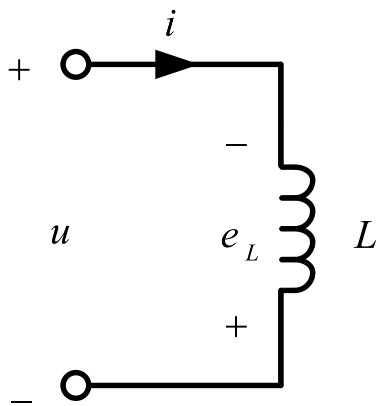
$$e_{\mathrm{L}}=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

自感电动势将阻碍电流变化

电压与电流之间的关系为

$$\boxed{u=-e_{\mathrm{L}}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

3.4.2 电压、电流的大小和相位关系

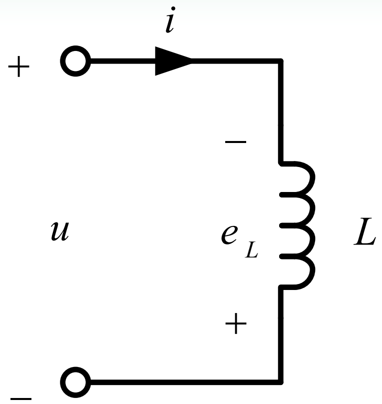


$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

设 $i = \sqrt{2}I\sin\omega t$

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}I\sin\omega t] = \sqrt{2}\omega LI\cos\omega t$$

$$= \sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + 90^\circ)$$



$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + 90^\circ)$$

从两数学表达式可以看出：

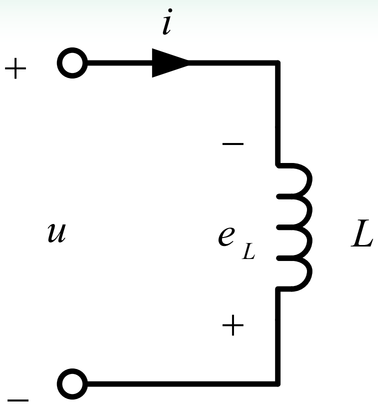
频率相同，相位差90°。

有效值关系：

具有电阻的单位

$$U = \omega L I \quad 或 \quad \frac{U}{I} = \omega L$$

感抗 $X_L = \omega L = 2\pi f L$ 感抗与电源的频率有关



$$i=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$u=\sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}U\sin(\omega t+90^\circ)$$

用相量表示其大小和相位关系，即

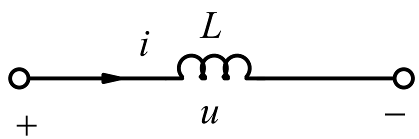
$$\dot{I}=Ie^{\mathrm{j}0^\circ}=I \qquad \dot{U}=Ue^{\mathrm{j}90^\circ}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{Ue^{\mathrm{j}90^\circ}}{I}=\frac{U}{I}e^{\mathrm{j}90^\circ}=\mathrm{j}X_{\mathrm{L}}$$

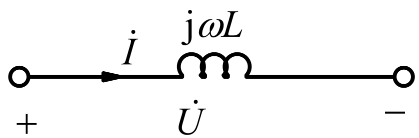
或 $$\boxed{\dot{U}=\mathrm{j}X_{\mathrm{L}}\dot{I}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}}$$

电压超前电流

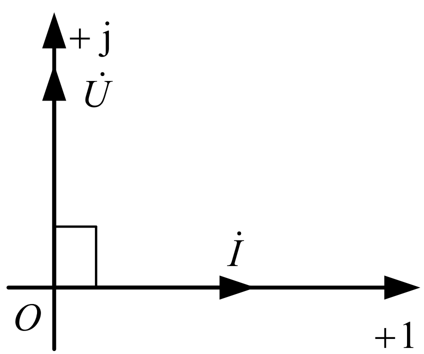
电感元件的相量模型、波形及相量图为



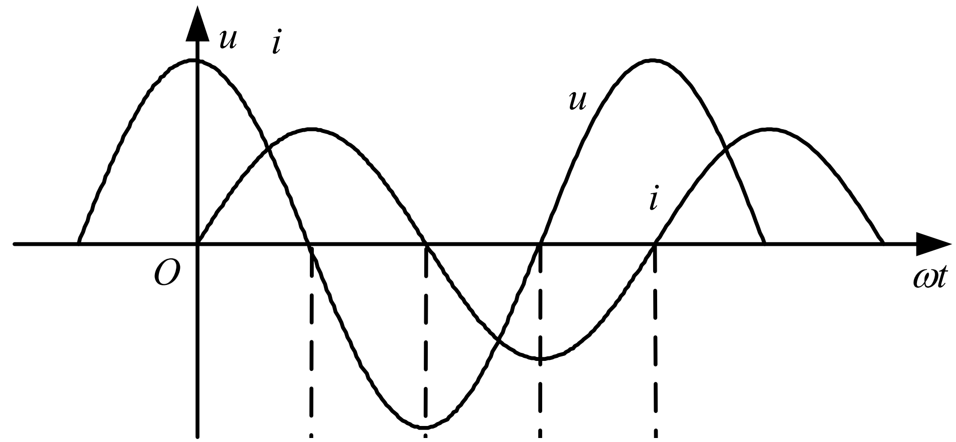
(a) 瞬时电压和电流



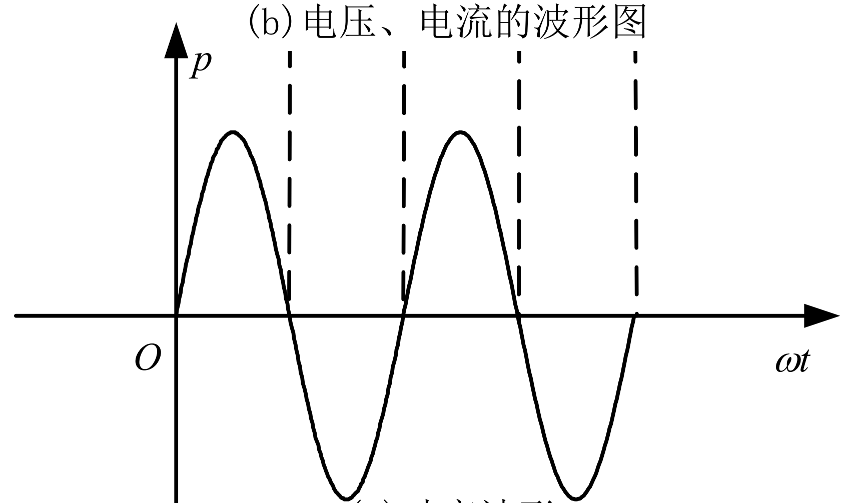
(c) 电感的相量模型



(d) 电压、电流的相量图

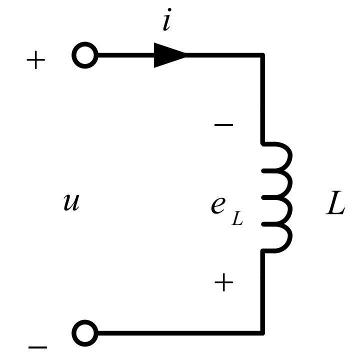


(b) 电压、电流的波形图



(e) 功率波形

3.4.3 功率和能量



瞬时功率 *p*： 瞬时电压与瞬时电流的乘积

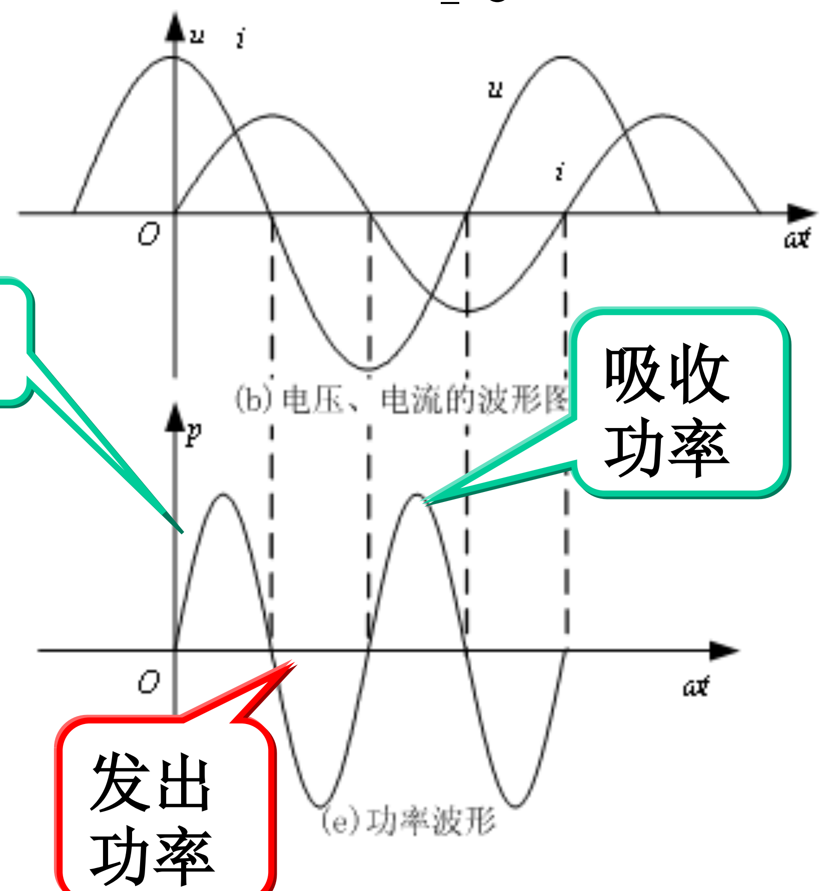
设电感电流为参考正弦量，即

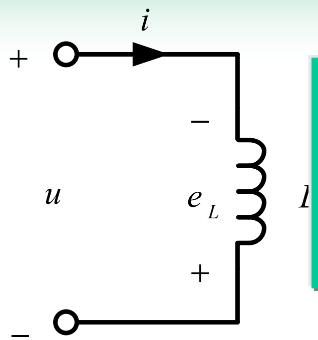
$$i = \sqrt{2}I\sin\omega t$$

则电感两端电压为

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

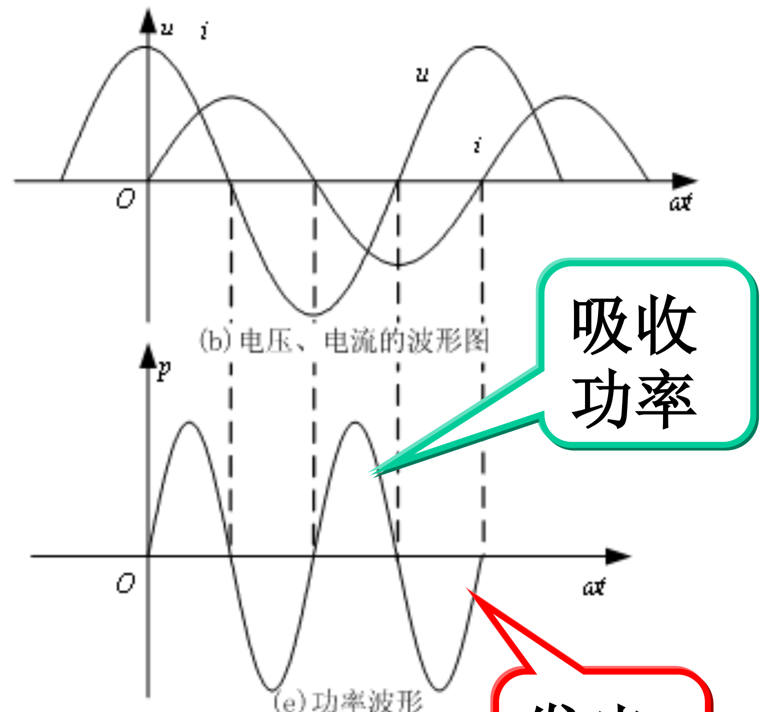
$$\boxed{\begin{aligned} p &= ui \\ &= \sqrt{2}I\sin\omega t\sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2UI\cos\omega t\sin\omega t \\ &= UI\sin 2\omega t \end{aligned}}$$





电感是个储能元件

电感并不消耗能量，只和电源进行能量交换。其能量交换的规模用无功功率来衡量。



发出功率

无功功率在数值上等于瞬时功率的幅值，即

$$\boxed{Q_L = UI = \frac{U^2}{X_L} = I^2 X_L}$$

单位：乏(Var)

注意：无功功率≠无用功率！

如：一盏20W的日光灯，其功率因数约为0.5，工作时除需约20W的有功功率发光外，还需约35Var的无功功率供整流器的线圈建立交变磁场。

有电磁线圈的电气设备（如电动机、变压器等），正常情况下不但从电源取得有功功率，同时还需从电源取得无功功率。

【例3. 4. 1】一个0. 8H的电感元件接到电压有效值为220V的正弦交流电源上。当电源的频率分别为50Hz和500Hz时，求电感元件中的电流。

【解】

$f=50\text{Hz}$时，$X_{\text{L}}=2\pi fL=2\pi\times 50\times 0.8=251.2\Omega$

$$I=\frac{U}{X_{\text{L}}}=\frac{220}{251.2}=0.88\text{A}=880\text{mA}$$

$f=500\text{Hz}$时，$X_{\text{L}}=2\pi fL=2\pi\times 500\times 0.8=2512\Omega$

$$I=\frac{U}{X_{\text{L}}}=\frac{220}{2512}=0.088\text{A}=88\text{mA}$$

当电压一定时，频率越高，感抗越大，电流越小。