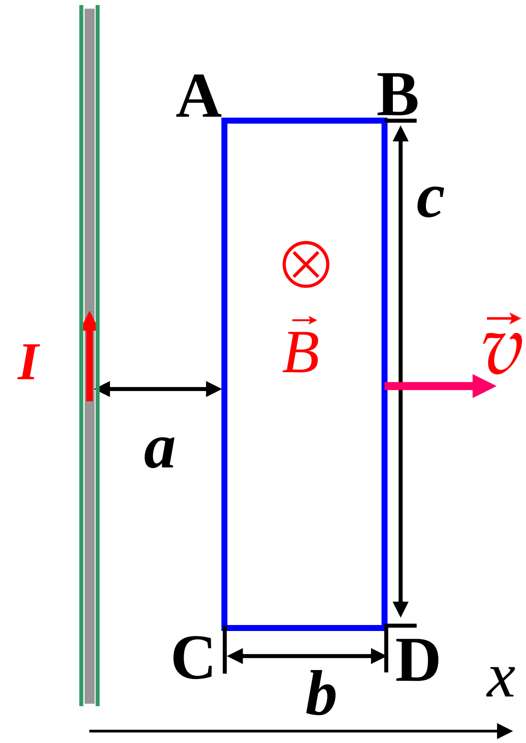
例3 如图，已知无限长载流直导线中通有电流$I=I(t)$，与其共面的矩形导体线框以速度 $\vec{v}$ 垂直于载流直导线向右运动，求矩形导体线框中的感应电动势.

解法一:分别考虑动生电动势和感生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \qquad \mathcal{E}_i = Blv$$




$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad B_{AC} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad B_{BD} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$$

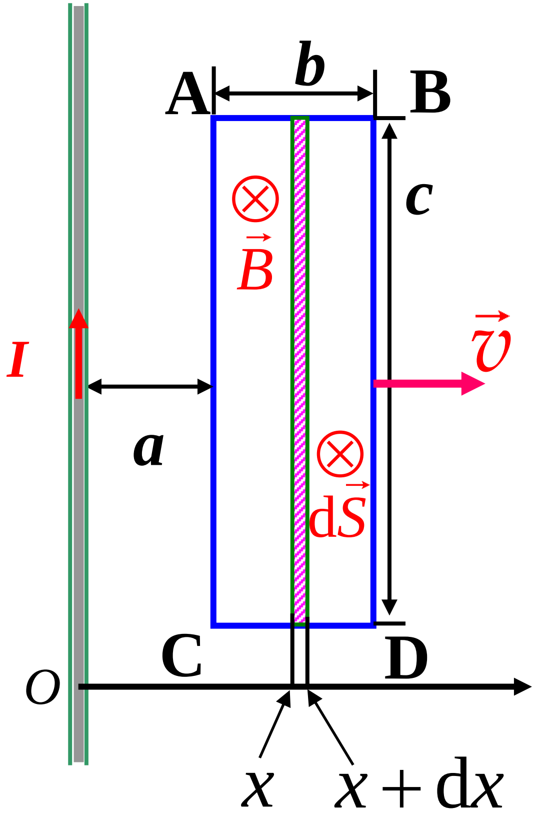
AC: $\mathcal{E}_{i1} = vc\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ C→A

BD: $\mathcal{E}_{i2} = vc\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$ D→B

$$\mathcal{E}_{i动生} = \mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2} = vc\frac{\mu_0 I}{2\pi a} - vc\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)} = vc\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{b}{a(a+b)}$$

方向:C→A →B →D

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Bc\,\mathrm{d}x$$




$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}c\,\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

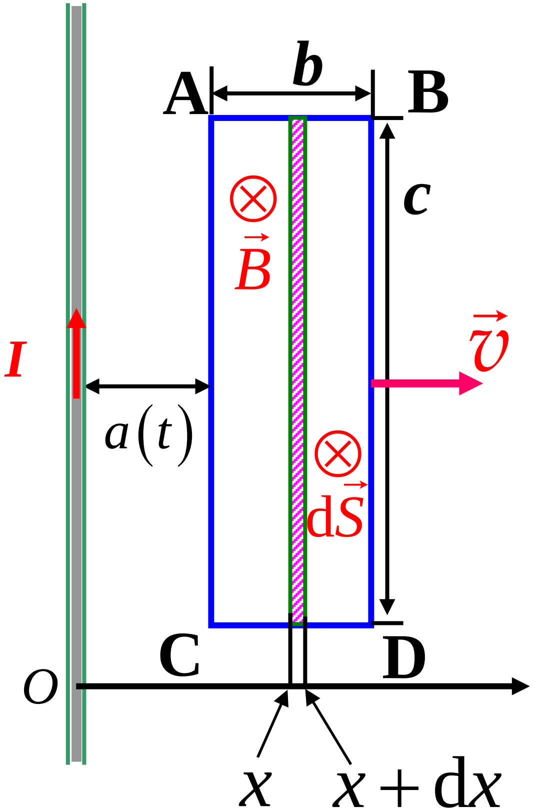
$$\Phi=\int \mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\frac{\mu_0 I(t)c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

$$\mathscr{E}_{\text{i感生}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathscr{E}_{\text{i}}=vc\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\frac{b}{a(a+b)}-\left(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

解法二：直接利用法拉第电磁感应定律




$$\Phi=\frac{\mu_0 I(t)c}{2\pi}\ln\frac{a(t)+b}{a(t)}$$

$$\mathscr{E}_\mathrm{i}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)$$

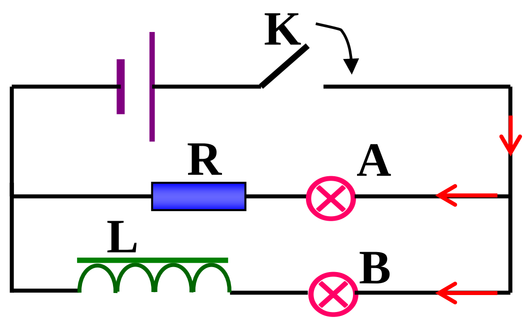
$$=-\left[\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ln\frac{a+b}{a}+\frac{\mu_0 cI(t)}{2\pi}\frac{a}{a+b}\left(-\frac{b}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right]$$

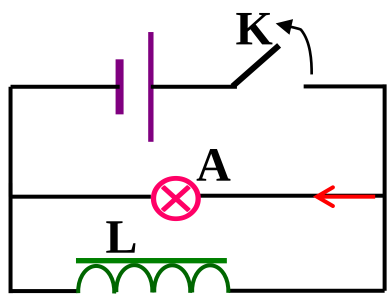
$$=-\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ln\frac{a+b}{a}+\frac{\mu_0 cI(t)}{2\pi}\frac{bv}{a(a+b)}$$

# §3 自感与互感

## 一、自感　自感电动势

### 1. 自感现象和自感



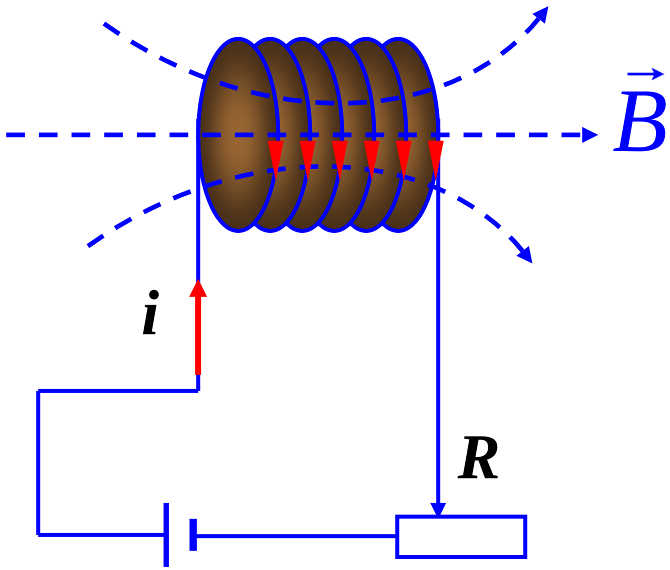




当一个线圈中电流发生变化时，它所激发的磁场穿过该线圈自身的磁通量也随之发生变化，在产生线圈自身激发感应电动势的现象称为自感现象，此感应电动势称为自感电动势。

穿过闭合电流回路的磁通量：

$$\Phi_L = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \sim B \sim i$$

设比例系数为*L*，则：$\Phi_L = Li$




比例系数 *L* 又称为自感系数

$$\boxed{L = \Phi_L / i}$$

自感系数简称自感——与线圈形状、大小、匝数及内部的磁介质有关。

**单位：亨利（H），Wb/A**

若线圈有 *N* 匝，$\psi_L = N\Phi_L$ 磁通链

自感（系数） $L = \psi_L / i$

## 2. 自感电动势

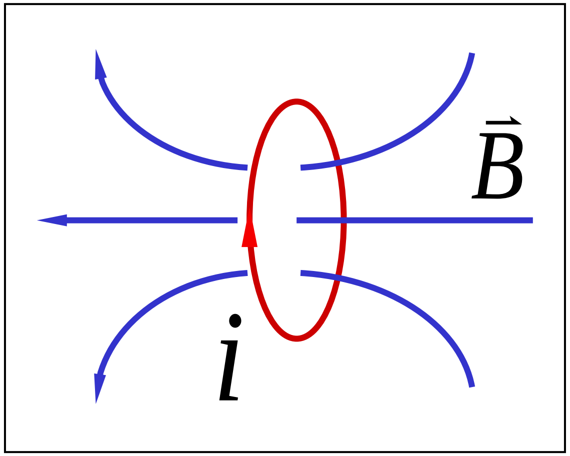
$$\Phi_L = Li$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{L}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = -\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)$$

当 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$ 时，

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{L}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

反抗线圈中电流的变化




自感 $L = -\mathscr{E}_{\mathrm{L}} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 线圈“电磁惯性”的量度

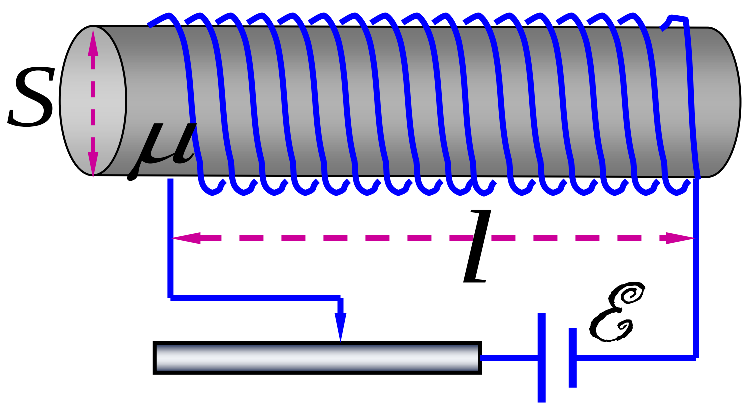
## 3. 自感的计算方法

**例**　如图的长直密绕螺线管，已知 $l$，$S$，$N$，$\mu$，**求**其自感 $L$（忽略边缘效应）.

**解** 先设电流 $i$　根据安培环路定理求得 $H$ $\longrightarrow$

$$\longrightarrow B \longrightarrow \Phi(\psi) \longrightarrow L$$

$$n = N/l \qquad B = \mu H = \mu n i \qquad \psi = N\Phi = NBS = N\mu\frac{N}{l}iS$$




$$\boxed{L = \frac{\psi}{i} = \mu\frac{N^2}{l}S}$$

$$V = lS \qquad \therefore L = \mu n^2 V$$

一般情况可用右式测量自感：　$\mathscr{E}_{\mathrm{L}} = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

# 回顾：有磁介质时的安培环路定理

在真空内：

$$\oint_{(L)} \vec{B}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_{0i}$$

在磁介质内：

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_r \mu_0 \sum_{L内} I_{0i}$$

$$\oint_{(L)} \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{L内} I_{0i}$$

定义：磁场强度矢量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$ ——称为磁介质的磁导率

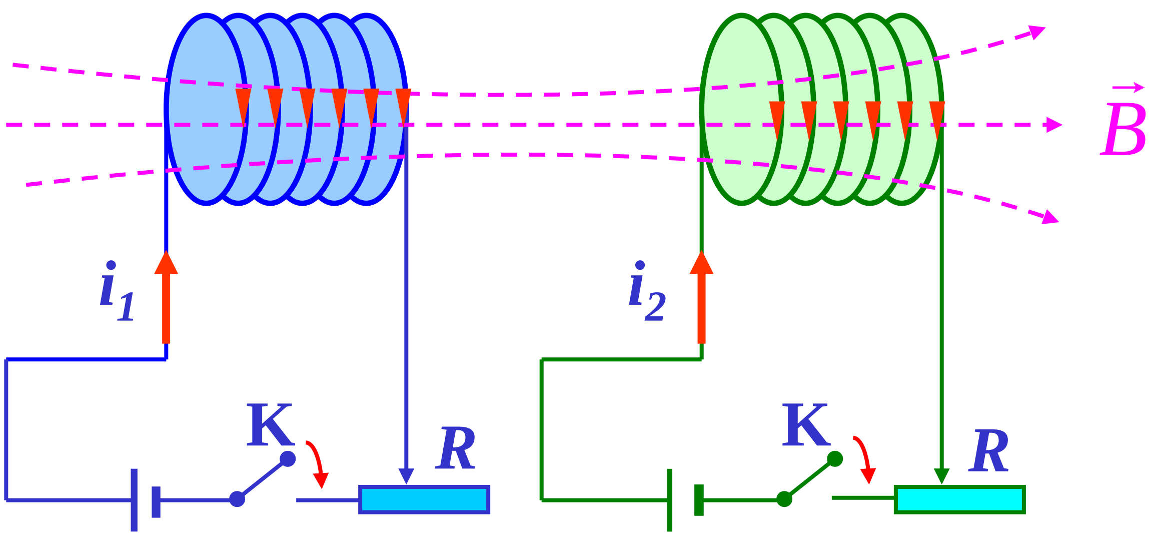
磁介质中的安培环路定理：

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{L内} I_{0i} = I_0$$

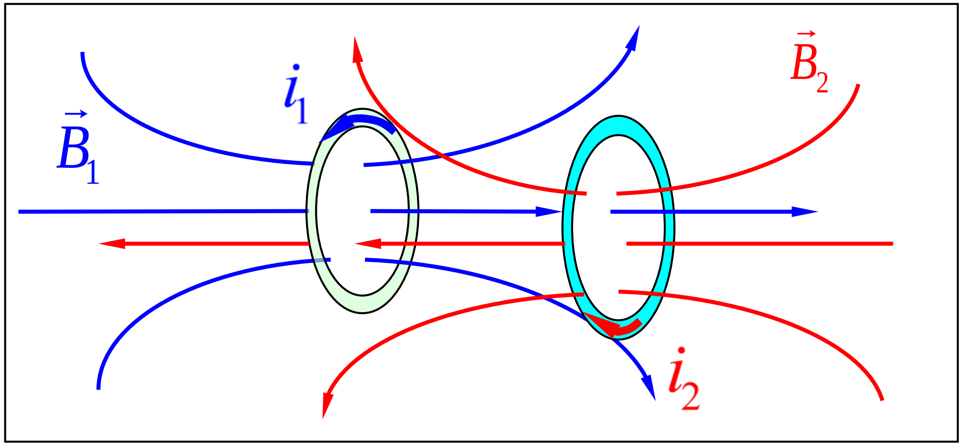
## 二、互感与互感电动势

### 1. 互感现象

一个通电线圈在它周围产生磁场，当线圈中的电流发生变化时，磁场也发生变化，从而使附近的另一个线圈中产生感应电动势，这种现象称为互感现象，该电动势称为互感电动势。



## 2. 互感 互感电动势




$I_1$在 $I_2$电流回路中所产生的磁通量： $\Phi_{21} = M_{21}\, i_1$

$I_2$在 $I_1$电流回路 中所产生的磁通量： $\Phi_{12} = M_{12}\, i_2$

➢ 比例系数$\boldsymbol{M_{12}}$和 $\boldsymbol{M_{21}}$称为互感系数，简称互感。

理论上可证明：

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}$$

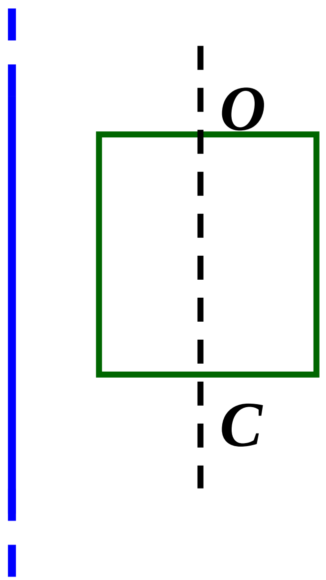
单位：亨利 （ **H** ） **1 H = 1 Wb / A**

➢ 互感仅与两个线圈形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质有关。

➢ 互感电动势

$$\mathscr{E}_{12} = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad \mathscr{E}_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

➢ 互感（系数） $M = -\dfrac{\mathscr{E}_{21}}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathscr{E}_{12}}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}$




问：下列几种情况互感是否变化？

（1）线框平行直导线移动；

（2）线框垂直于直导线移动；

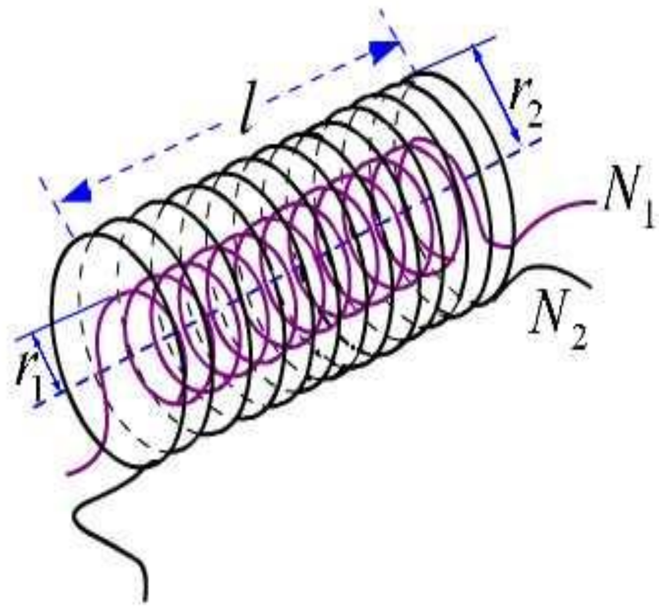
（3）线框绕 $OC$ 轴转动；

（4）直导线中电流变化.

## 3. 互感的计算方法

**解** 先设某一线圈中通以电流 $i$ → 求出另一线圈的磁通量 $\Phi$ → $M$

设半径为 $r_1$ 的线圈中通有电流 $i_1$，则




$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 = \mu_0 n_1 i_1$$

则穿过半径为 $r_2$ 的线圈的磁通匝数为

$$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = n_2 l B_1 (\pi r_1^2)$$

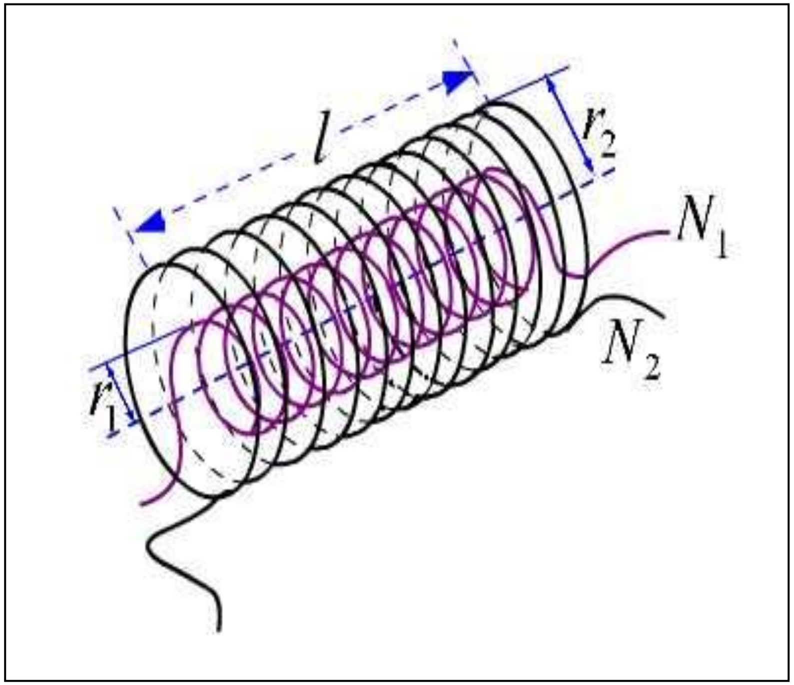
代入 $B_1$ 计算得 $\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$

$$= \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) i_1$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \mu_0 n_1 n_2 l(\pi r_1^2)$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = ? \quad M_{12} = M_{21} = M = \mu_0 n_1 n_2 l(\pi r_1^2)$$

如果 $r_1 = r_2 = r$



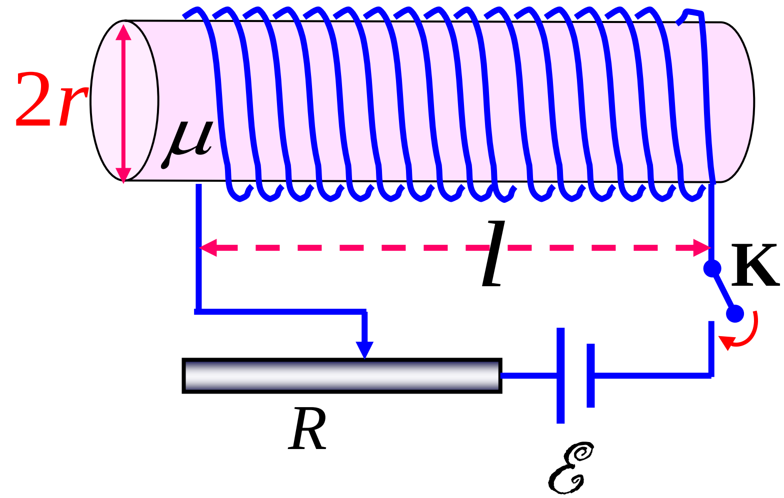

$$M = \mu_0 n_1 n_2 l(\pi r^2)$$
$$= \mu_0 n_1 n_2 V$$

$$\because L_1 = \mu_0 n_1^2 V, \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 V$$

$$\therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$ ← 仅适用于无漏磁（全耦合）情况**

# § 4 磁场的能量

## 一、自感磁能




$$i:0 \rightarrow I$$

稳态→暂态→稳态

暂态电路方程： $\mathscr{E} - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$ $\qquad \mathscr{E}i\mathrm{d}t - Li\mathrm{d}i = Ri^2\mathrm{d}t$

$$\int_0^t \mathscr{E}\, i\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI^2 + \int_0^t Ri^2\mathrm{d}t$$

电源做功

电源反抗自感电动势做的功

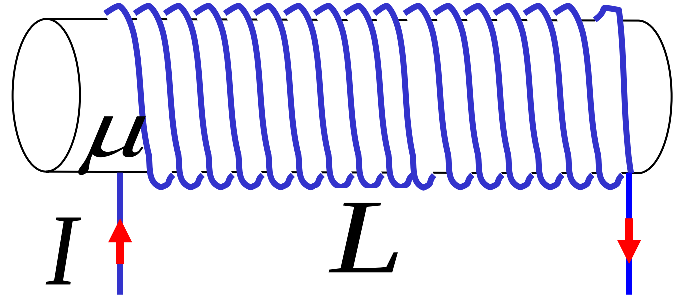
回路电阻所放出的焦耳热

**自感线圈磁能**

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2$$

# 二、磁场的能量密度

——以长直螺线管为例




$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$B = \mu n I \qquad L = \mu n^2 V$$

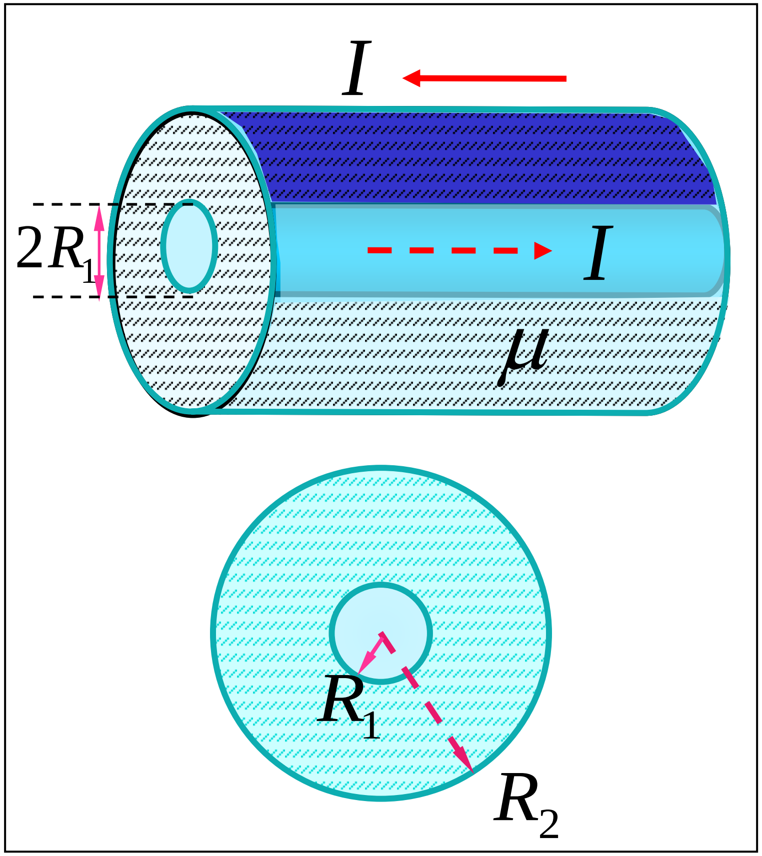
$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left( \mu n^2 V \right) \left( \frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = w_m V$$

$$\boxed{w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H}$$

- 磁场总能量 $W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{B^2}{2\mu} \mathrm{d}V$

例 如图同轴电缆，中间充以磁介质，芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反。已知 $R_1, R_2, I, \mu$。求单位长度同轴电缆的磁能和自感。设金属芯线内的磁场可略。

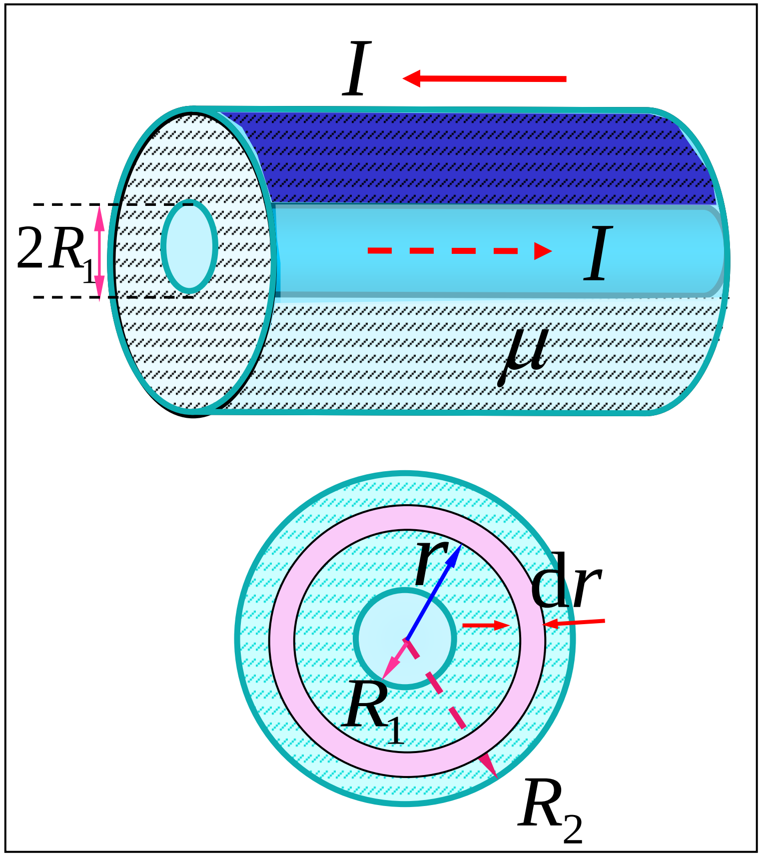
解：由安培环路定律可求 $B$ 的分布




$$\begin{cases} B_1 = 0 \quad (r < R_1) \\ B_2 = \dfrac{\mu I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2) \\ B_3 = 0 \quad (r > R_2) \end{cases}$$

则 $R_1 < r < R_2$ 范围内：

单位长度的体元 $\mathrm{d}V = 2\pi\, r\mathrm{d}r \cdot 1$ 内：




$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

单位长度壳层体积内：

$$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \mathrm{d}V$$

$$= \frac{\mu I^2}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

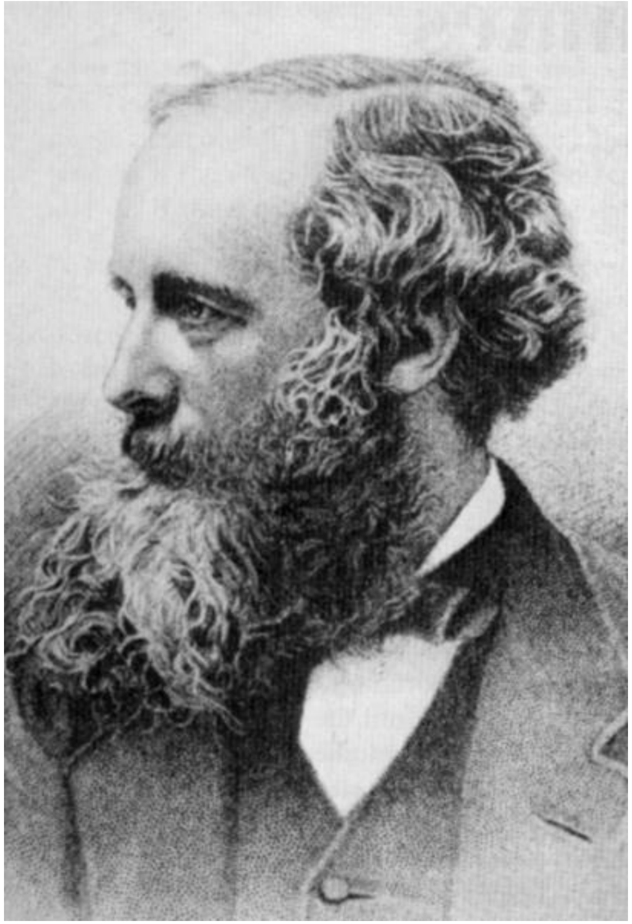
$$\because \quad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2 \qquad \therefore \quad L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

# ** §5 麦克斯韦电磁场理论

英国物理学家，经典电磁理论的创始人，统计物理学的奠基人之一。

麦克斯韦集成并发展了法拉第关于电磁相互作用的思想，并于1864年发表了著名的《电磁场动力学理论》的论文，将所有电磁现象概括为一组方程组，提出了涡旋电场和位移电流假说，预言了电磁波的存在，并确认光也是一种电磁波，从而创立了经典电动力学。

麦克斯韦还在气体分子运动理论、热力学、光学、弹性理论等方面有重要贡献。



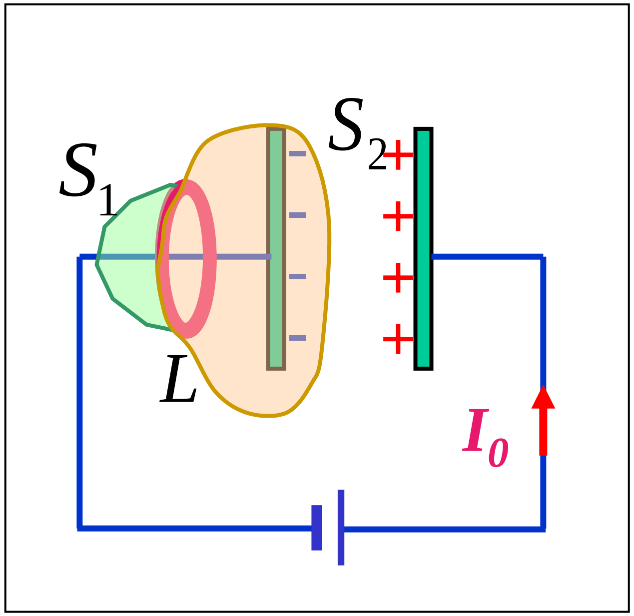
麦克斯韦
James Clerk Maxwell
（1831-1879）

# 一、位移电流

稳恒磁场中，安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_{0i} = \int_S \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

（以 $L$ 为边做闭合曲面 $S_1$ 和 $S_2$ ）




$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = I_0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$S_1$、$S_2$ 均以 $L$ 为边界。

——矛盾！

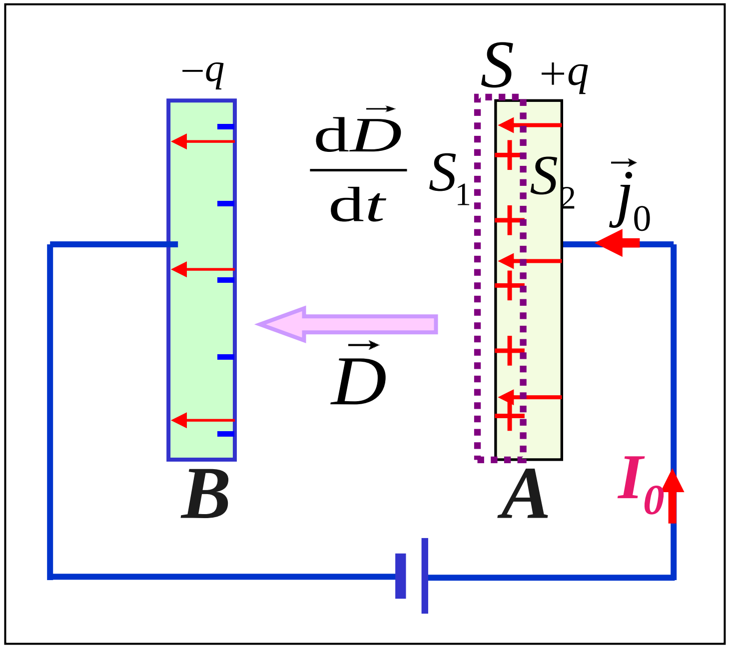
如何统一起来？

$$S = S_1 + S_2, \qquad S_1 = S_2$$

由介质中的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$




$$\frac{dq_0}{dt} = I_0 = \int_{S_2} \vec{j}_0\cdot d\vec{S} \qquad \therefore \int_{S_2} \vec{j}_0\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

设 $\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，称为位移电流密度。

**麦克斯韦假设**：电场中某一点位移电流密度等于该点电位移矢量对时间的变化率。

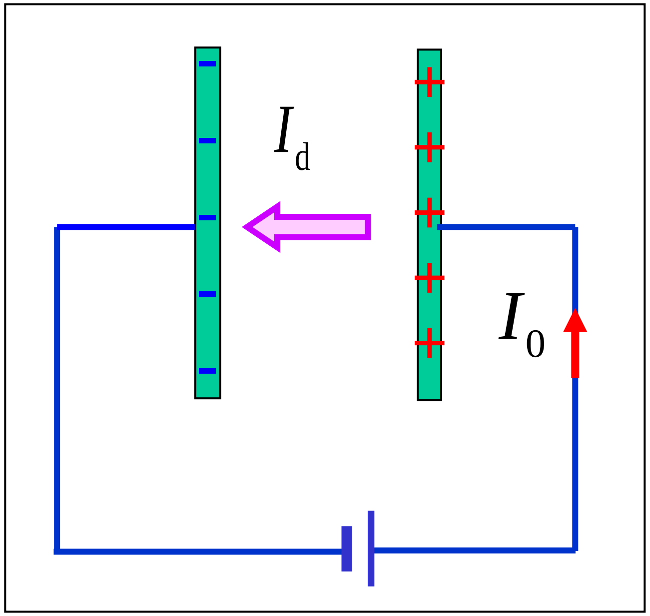
则有：$\vec{j}_0 = \vec{j}_d$ 　　$\vec{j}_0$为传导电流密度。

定义：位移电流

$$I_{\mathrm{d}}=\int_S \vec{j}_{\mathrm{d}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_d$$

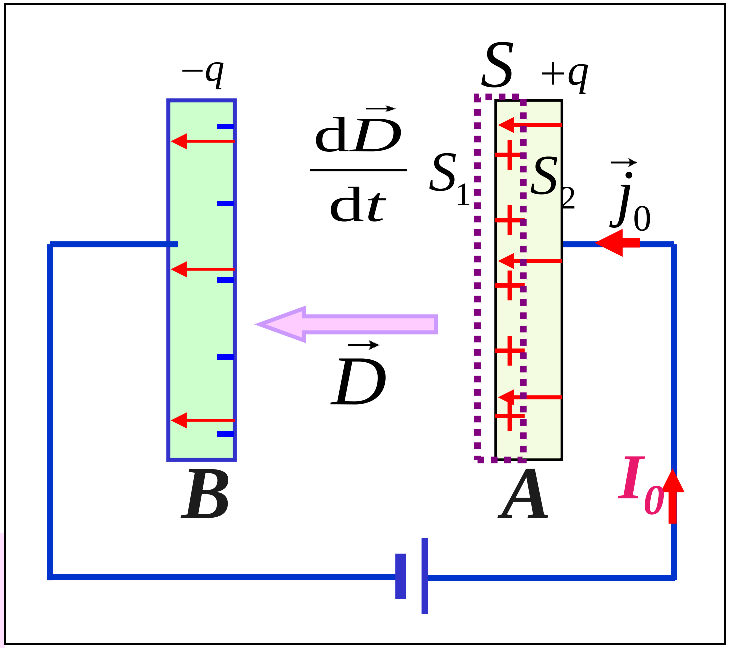
通过电场中某一截面的位移电流等于通过该截面电位移通量对时间的变化率。

则有：$$I_0=\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=I_{\mathrm{d}}$$




➢定义：全电流 $$\boxed{I_{\mathrm{T}}=I_0+I_{\mathrm{d}}}$$

## 二、全电流安培环路定理




- 全电流 $I_{\mathrm{T}} = I_0 + I_{\mathrm{d}}$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 + I_d$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_s (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

说明：

（1）全电流是连续的，极板间位移电流接续了传导电流。

（2）位移电流和传导电流一样激发磁场。

（3）传导电流产生焦耳热，位移电流不产生焦耳热。

## 三、麦克斯韦方程组的积分形式

- 静电场高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 = \sum q_{0i}$
- 静电场环流定理 $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
- 磁场高斯定理 $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$
- 安培环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 + I_d$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

$$I_\mathrm{d} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad I_0 = \frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}$$

# 麦克斯韦电磁场方程的积分形式

$$
\begin{cases}
\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{cases}
$$