数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年11月

推理部分

公理集合:

（1） A_1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

（2） A_2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

（3） A_3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \rightarrow B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m\ (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\ \cdots, m\}$，$A_i$ 是PC中的公理，或是$A_j(j < i)$，或是$A_j, A_k(j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$ 中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ √

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）√

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 定理（2）的另一种形式 √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$（加前件定理）√

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$（加后件定理）√

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ √

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$ √

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$（三段论定理）√

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ （反证法）√

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$ √

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ （反证法）√

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$ √

基本定理

定理13: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理A_3的逆命题）

定理14: $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

定理15: $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

定理16: $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）

定理13

定理13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

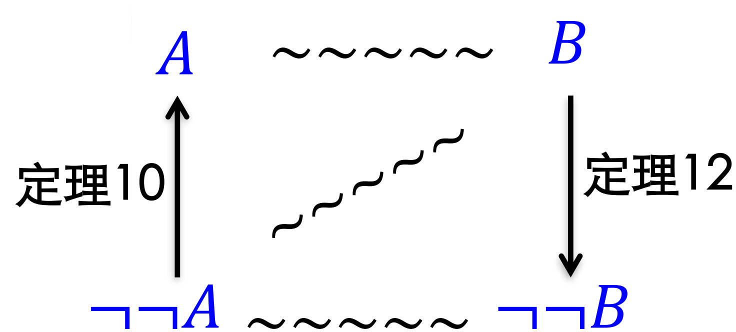
证明思路：

（1）此定理是公理3：$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$的逆命题

（2）$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理3）

（3） 若能证明出 $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$，利用三段论定理8，则得证。

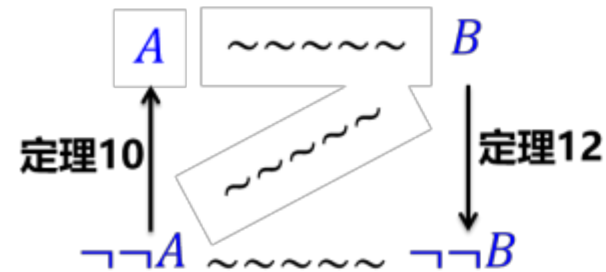
- $\neg\neg A \to A$ （定理10）
- $B \to \neg\neg B$ （定理12）



定理13

定理13. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

证明:



(1) $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理10

(2) $B \rightarrow \neg\neg B$ 定理12

(3) $(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow B))$ 加后件定理5

(4) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow B)$ （1）和（3）用rmp分离规则

(5) $(B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B))$ 加前件定理4

(6) $(\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ （2）和（5）用rmp分离规则

(7) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ （4）和（6）用三段论定理8

(8) $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理3

(9) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ （7）和（8）用三段论定理8

定理14

定理14. $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

证明:

（1） $B \rightarrow \neg\neg B$ 定理12

（2） $(B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B))$ 对（1）用加前件定理4

（3） $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ 公理3

（5） $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ （3）和（4）用三段论定理8

定理15

定理15. $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

证明:

（1） $\neg\neg A \to A$　定理10

（2） $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$ 加后件定理5

（3） $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ 公理3

（5） $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ （3）和（4）用三段论定理8

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）

证明思路：要证$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$，只需证

$$(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)) \quad \text{（逆否命题）}$$

发现上式前件一致，利用公理2，只需证

$$\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$$

利用前件互换定理2，只需证

$$B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$$

结合公理3证明 $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ 的逆否命题，只需证

$$B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$$

利用前件互换定理2，只需证

$$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \text{(公理3)}$$

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

证明:

（1） $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 公理3

（2） $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 对（1）用前件互换定理2

（3） $((\neg A \to \neg B) \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$定理13

（4） $B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ （2）和（3）用三段论定理8

（5） $\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$ 对（4）用前件互换定理2

（6） $(\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))) \to$

$$((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)))$$公理2

（7） $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ （5）和（6）用rmp分离规则

（8） $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$公理3

（9） $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （7）和（8）用三段论定理8

基本定理

定理13: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理A_3的逆命题） √

定理14: $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ √

定理15: $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ √

定理16: $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法） √

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路(利用反证法)：

假设上述命题为假，则：一个蕴含式只有一种情况为假，就是前真后假，即：

$$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{A}\text{为真，}\boldsymbol{A}\text{为假}$$

那么，A为假并且使得$(A \to B) \to A$为真，则：

$$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})\text{一定为假。}$$

又已知A为假，则$(A \to B)$一定为真，

那么$(A \to B)$真假性就产生了矛盾。**根据假设可知上述定理是真。**

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明（**反证法思想**）：

令$P = ((A \to B) \to A) \to A$

（1）$\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 定理6

（2）$(\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$

$\to (\neg(((A \to B) \to A) \to A) \to ((A \to B) \to A))$ 定理14

（3） $\boldsymbol{\neg P \to ((A \to B) \to A)}$（1）和（2）用rmp分离规则而得

（4）$A \to P$ 即 $A \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 公理1

（5）$(A \to P) \to (\neg P \to \neg A)$ 定理13

（6） $\boldsymbol{\neg P \to \neg A}$（4）和（5）用rmp分离规则而得

（7） $\boldsymbol{((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))}$ 定理13

（8） $\boldsymbol{\neg A \to (A \to B)}$ 定理6

反证法思想的运用

（接上页）

(9) $\neg P \to (A \to B)$ 由(6)和(8)用三段论定理8

(10) $(\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$

$\to ((\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B)))$ 公理2

(11) $\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 由(3)和(7)用三段论定理8

(12) $(\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B))$(10)和(11)用rmp分离规则

(13) $\neg P \to \neg(A \to B)$ (6)和(12)用rmp分离规则

(14) $(\neg P \to (A \to B)) \to ((\neg P \to \neg(A \to B)) \to P)$ 定理16

(15) $(\neg P \to \neg(A \to B)) \to P$ (9)和(14)用rmp分离规则

(16) P (13)和(15)用rmp分离规则而得

总结：通过假定字符串P为假，那么其否定$\neg P$为真，推出$(\neg P \to Q)$和$(\neg P \to \neg Q)$都成立，再由定理16 $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ 通过分离规则，分离得到P成立。

反证法思想的运用(简化)

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明（反证法思想）：

(1) $\neg P \to ((A \to B) \to A)$ 分析而得

(2) $\neg P \to \neg A$ 分析而得

(3) $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 分析而得

(4) $\neg A \to (A \to B)$ 分析而得

(5) $\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 由(1)和(3)用三段论定理8

(6) $\neg P \to (A \to B)$ 由(2)和(4)用三段论定理8

(7) $(\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$
$\to ((\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B)))$ 公理2

(8) $(\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B))$(6)和(7)用rmp分离规则

(9) $\neg P \to \neg(A \to B)$ (2)和(8)用rmp分离规则

(10) $(\neg P \to (A \to B)) \to ((\neg P \to \neg(A \to B)) \to P)$ 定理16

(11) $(\neg P \to \neg(A \to B)) \to P$ (9)和(11)用rmp分离规则

(12) P (6)和(11)用rmp分离规则而得

例1的其他证明方法（1）

例：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：用反证法的思想证明过程过于复杂，是否有更简化的证明方式？如果可证明$(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$成立，结合定理13：$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$，和三段论定理8，是否可以证明?

证明:

(1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理6

(2) $(\neg A \to (A \to B)) \to ((\neg A \to \neg(A \to B)) \to A)$定理16

(3) $(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$ 由(1) 和(2) 用分离规则

(4) $(A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B)$ 定理13, 逆否命题

(5) $((A \to B) \to A) \to A$ (4) 和(3)用三段论定理8

例1的其他证明方法（2）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ 形式上比较相似，是否可以从定理6出发证明，通过加后件构造出要证的公式。

证明：

（1）$\neg A \to (A \to B)$ 定理6

（2）$(\neg A \to (A \to B))$

$\to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ 加后件定理5

（3）$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ 由(1) 和 (2)用rmp分离规则

（4）$(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$

$\to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$ 加后件定理5

（5）$((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 由(3) 和 (4)用rmp分离规则

（6）$(\neg A \to A) \to A$ 定理9

（7）$((A \to B) \to A) \to A$ 由(6) 和 (5)用rmp分离规则

例1的其他证明方法（3）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ 形式上比较相似，从定理6出发，结合三段论定理证明。

证明：

（1） $\neg A \to (A \to B)$ 定理6

（2） $(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ 加后件定理5

(3) $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ 由(1) 和 (2)用rmp分离规则

(4) $(\neg A \to A) \to A$ 定理9

（5） $((A \to B) \to A) \to A$ 由(3) 和(4)用三段论定理8

从例1的证明可以看出，命题的证明方法并不唯一，需要自己仔细分析找到切入点，用定理一步一步推理，所得的结果就都是正确的。

基本定理

定理17： $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

定理18： $\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

定理19： $\vdash A \to A \vee B$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to A \vee B \Leftrightarrow A \to (\neg A \to B)$$ （等价于定理7）

定理20： $\vdash A \to B \vee A$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to B \vee A \Leftrightarrow A \to (\neg B \to A)$$ （等价于公理1）

定理21： $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$ （二难推理）

定理17

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

证明思路： 要证$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$成立，因为定理15，只需证

$$(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$$

前件一致，逆向运用公理2，只需证

$$A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$$

只需证（逆否命题）

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

前件互换定理2，只需证

$$(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)\text{(定理1)}$$

定理17

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$（与定理16恰好相反）

证明:

（1） $(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$ 定理1

（2） $A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$前件互换定理2

（3） $((A \to \neg B) \to \neg B) \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 定理15

（4） $A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 由(2) 和(3)用三段论定理8

（5） $(A \to (B \to \neg(A \to \neg B)))$

$\to ((A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B)))$公理2

（6） $(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$ (4) 和(5)用rmp 分离规则

（7） $(A \to \neg(A \to \neg B)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 定理15

（8） $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 由(6) 和(7)用三段论定理8

定理17另一种证明方法

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$（与定理16恰好相反）

证明：

(1) $(A \to B) \to ((B \to \neg A) \to (A \to \neg A))$ 加后件定理5

(2) $(A \to \neg A) \to \neg A$ 定理11

(3) $((A \to \neg A) \to \neg A)$

$\to (((B \to \neg A) \to (A \to \neg A)) \to ((B \to \neg A) \to \neg A))$ 加前件定理4

(4) $((B \to \neg A) \to (A \to \neg A)) \to ((B \to \neg A) \to \neg A)$ (2)和(3)用rmp分离规则

(5) $(A \to B) \to ((B \to \neg A) \to \neg A)$ (1)和(4)用三段论定理8

(6) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ 定理15

(7) $((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$

$\to (((B \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ 加后件定理5

(8) $((B \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (6)和(7)用rmp分离规则

(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (5)和(8)用三段论定理8