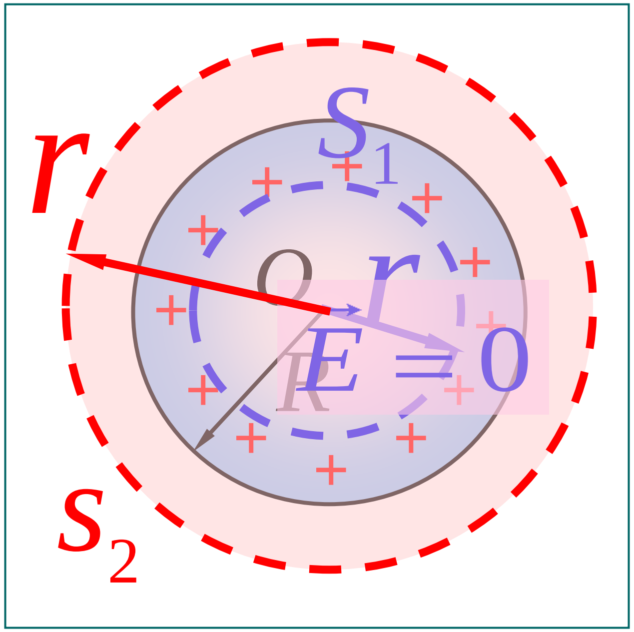
例2 一半径为 R，均匀带电 Q 的薄球壳。

见教材例6-3

求：球壳内外任意点的电场强度。



解（1） $0<r<R$

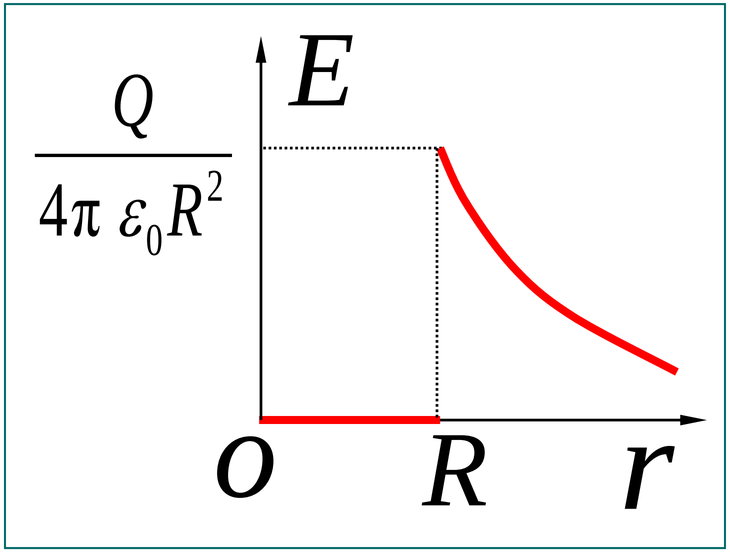
$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

（2） $r>R$

$$\oint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_{S_2}E\cdot dS=4\pi r^2E$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

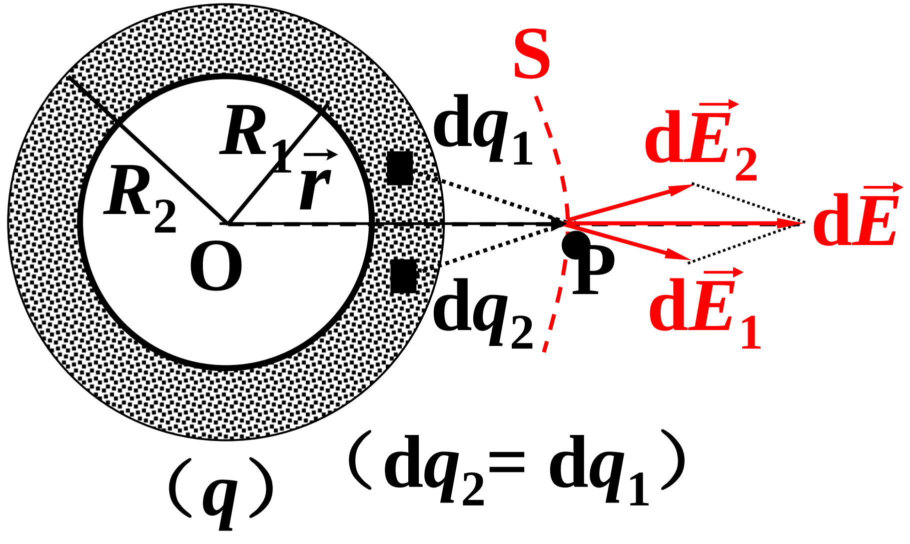


拓展例题. 已知：均匀带电量为q（设$q>0$）的球层，

内、外半径分别为 R_1、R_2 **求：**电场强度的分布。

【解】 电荷体密度 $$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

$r > R_2$：任取一场点 P, **现用高斯定理：**



先分析 $\vec{E}$ 的对称性：

场有球对称

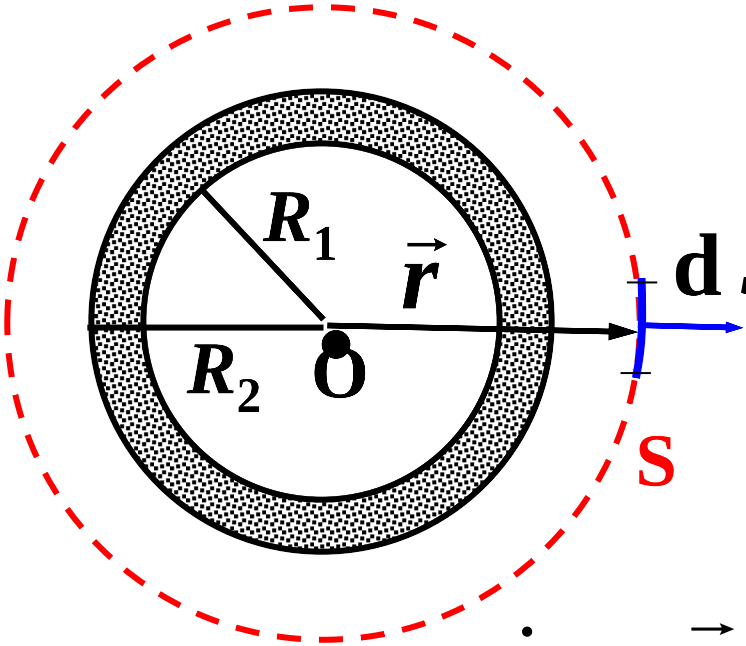
$$\vec{E} = E(r)\cdot\hat{r}$$

作高斯面S如图。

高斯面S 为 过P点、
与带电球层同心的球面。

此高斯面 S上的 E 大小相同,方向处处与面元垂直。

电通量:



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S E(r)\,\mathrm{d}S$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

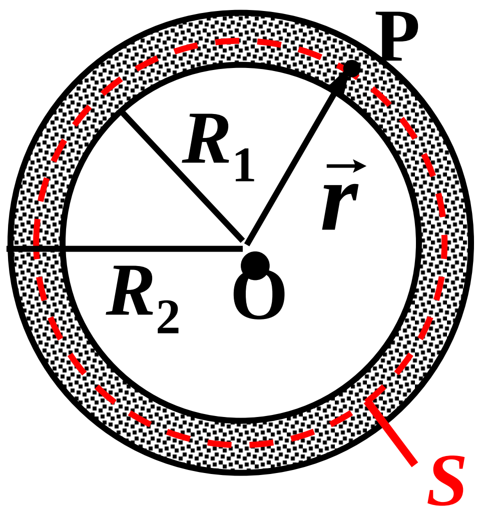
$$= \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

因为 $q_{内} = q$，

有 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ 球层外的电场与全部电荷 q 集中在球心 的点电荷的场强一样。

对 $R_1 < r < R_2$： 任取一场点 P， 同理可得



$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\because q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho,$$

有 $$\vec{E} = \frac{(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\rho\hat{r},$$

可见，在带电球层内的电场分布不同于带电球层外的电场分布。

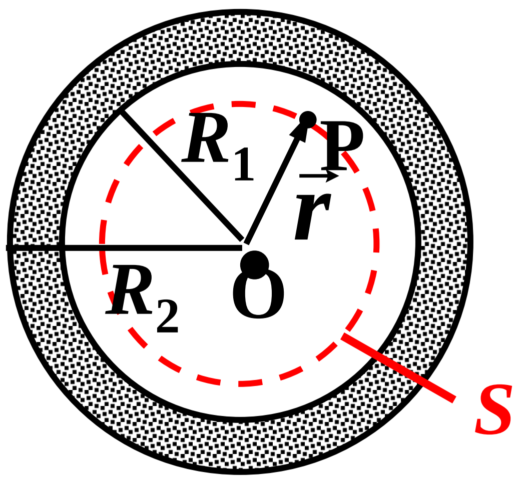
在带电球层内，场强是随着场点 P 与球心O的距离增大而增大。

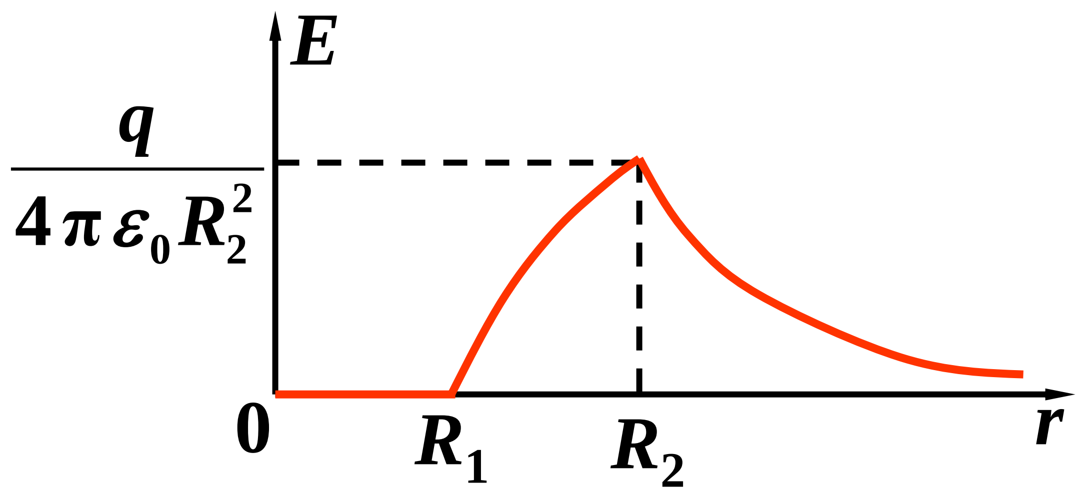
对　$r < R_1$：任取一场点 P，同理可得

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

因为 $q_{内} = 0$，有 $E = 0$

球层内的空腔中没有电场。





讨论：（1）E 的分布图：连续，无突变。

当 q、R_2不变时：

R_1增大，层变薄，$R_1 < r < R_2$ 区域的曲线变陡；

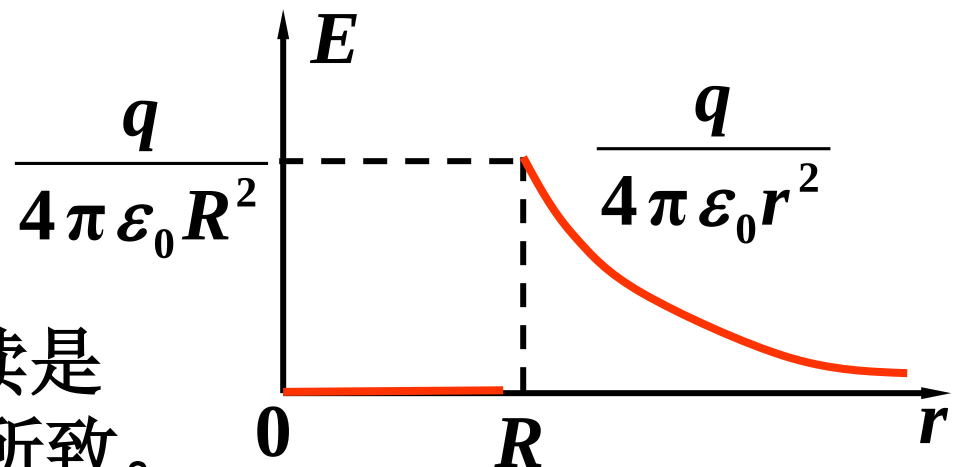
带电层厚度趋于零，场强分布不再连续。

当把电荷从体分布抽象为面分布时，在带电面两侧的电场强度发生突变。……有普遍性

如何理解

在 $r = R$ 处,

E 值的不连续：



答：在 $r = R$ 处 E 不连续是因为忽略了电荷厚度所致。

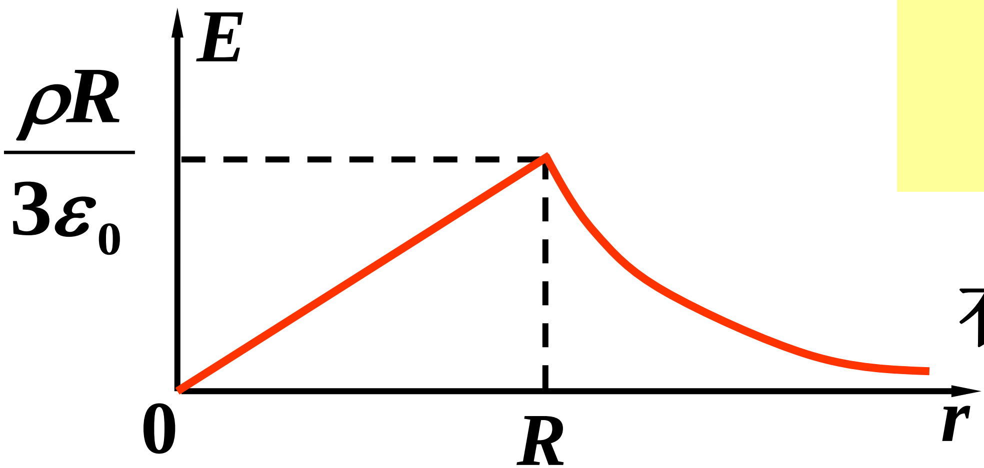
重要结论：

- ♦ 均匀带电球面内部空间的场强，处处为零。
- ♦ 均匀带电球面外部空间的场强，与全部电荷 q 集中在球心的点电荷的场强一样。

（3）令$R_1=0$， $R_2=R$

即均匀带电球体的情形：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & (内)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (外)\end{cases}$$



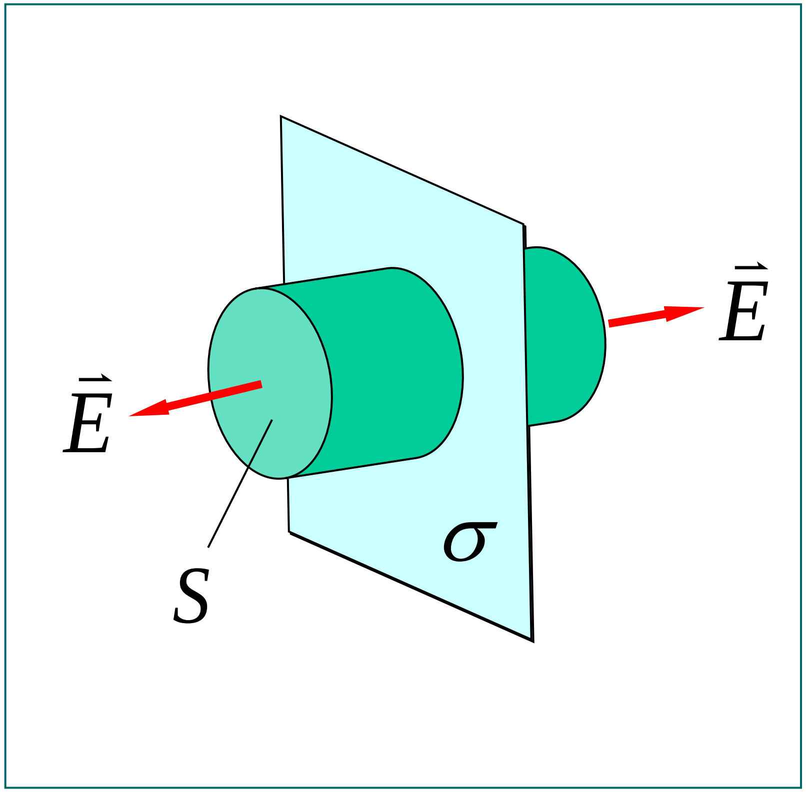
有 $$\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

例3 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为σ，求距平面为r处某点的电场强度.

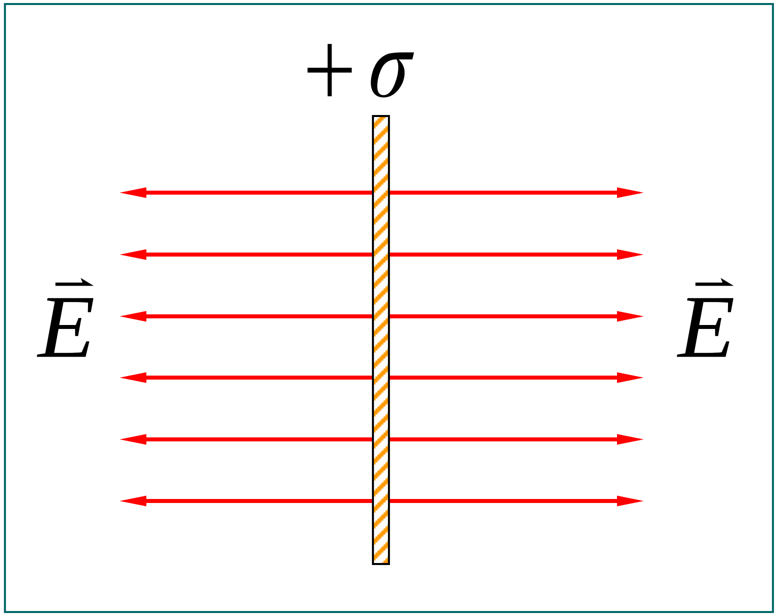
解 对称性分析与高斯面的选取

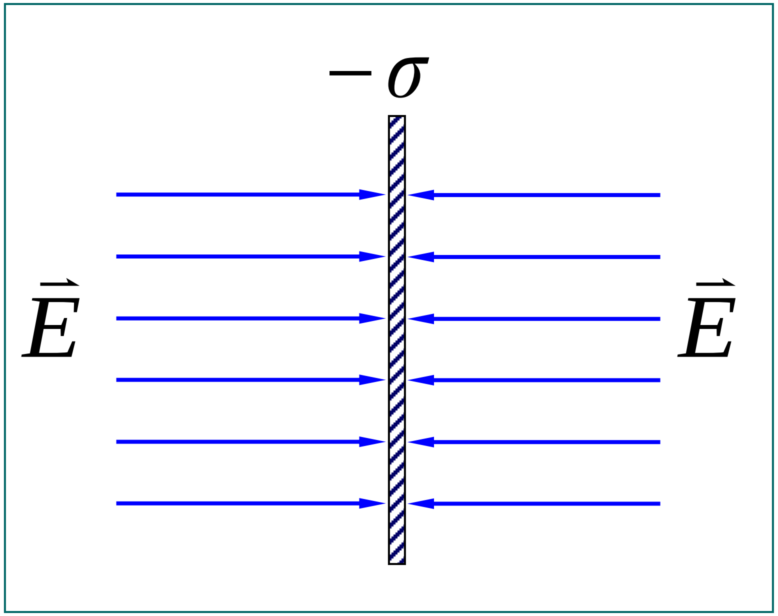
$$2ES=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

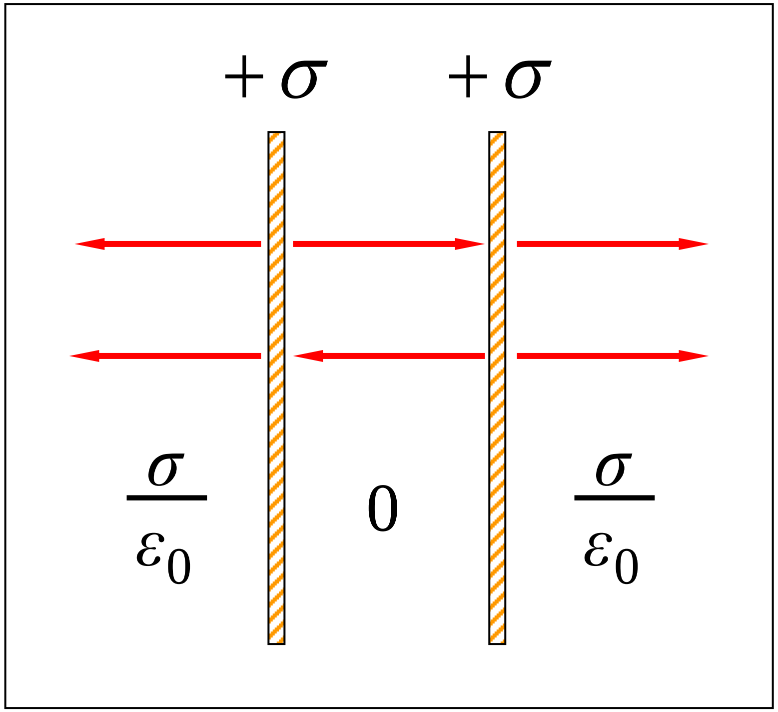


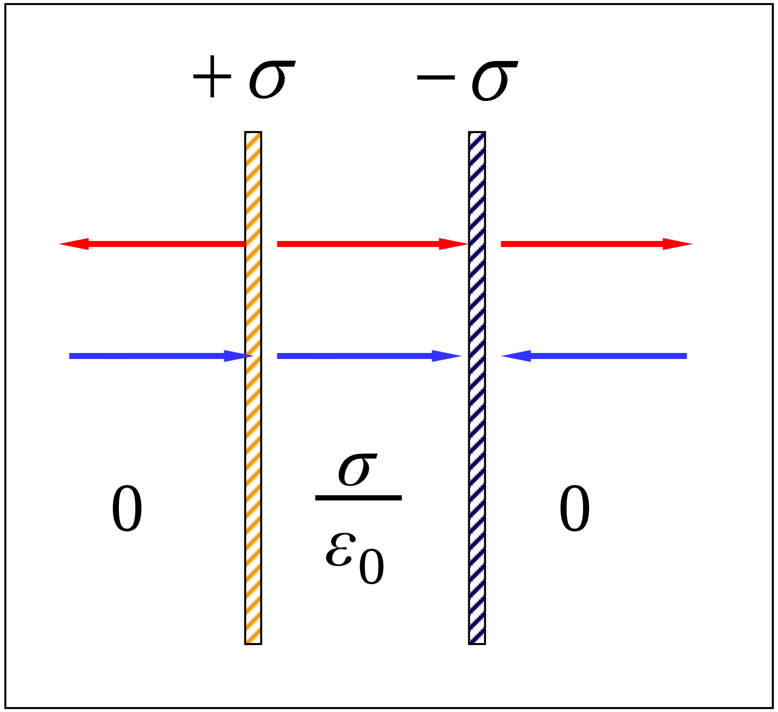
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





无限大带电平面的电场叠加问题





应用高斯定理求 $\vec{E}$ 的关键:

(1) 分析场强的对称性（方向、大小）。

(2) 选择适当的高斯面:

- 高斯面应该通过场点。
- 高斯面各部分或∥ $\vec{E}$，或⊥ $\vec{E}$
- 高斯面上待求的场强只有一个值（可以提出积分号）。

如果带电系统是
球、板、柱 电荷分布的组合,
可以直接利用以上典型结果，再叠加。

§ 4 电势

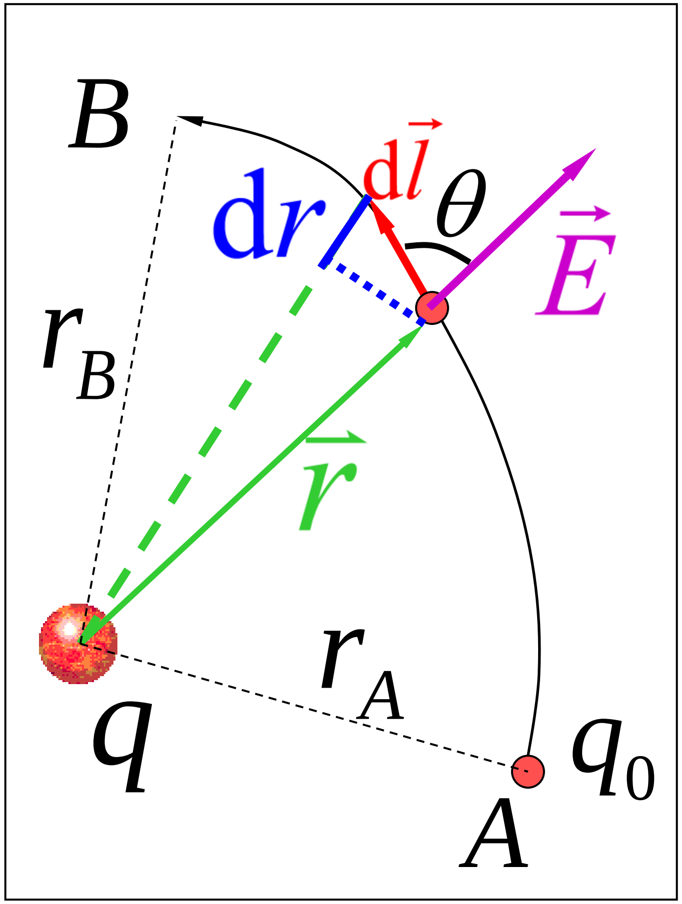
一、静电场力所做的功

1. 点电荷的电场

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{r}_0 \cdot d\vec{l} = dl \cos\theta = dr$$

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$



$$A = \int_A^B dA = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

—— A 仅与 q_0 的始末位置有关，与路径无关。

2. 任意电荷的电场（视为点电荷的集合）

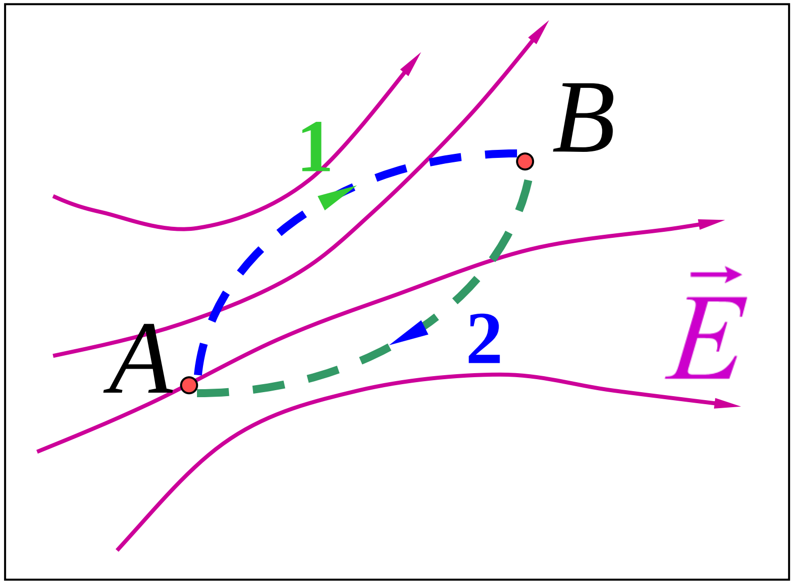
$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \qquad A=q_0\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i q_0\int \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

结论：静电场力做功与路径无关。

二、静电场的环路定理

$$q_0\int_{A1B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{A2B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$q_0\left(\int_{A1B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{B2A} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)=0$$

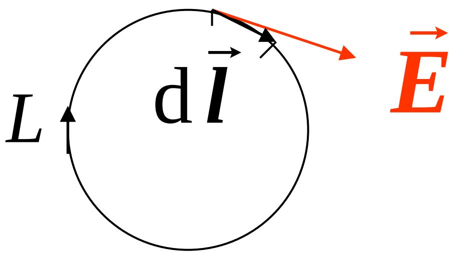


$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$ ⟹ 静电场是保守场

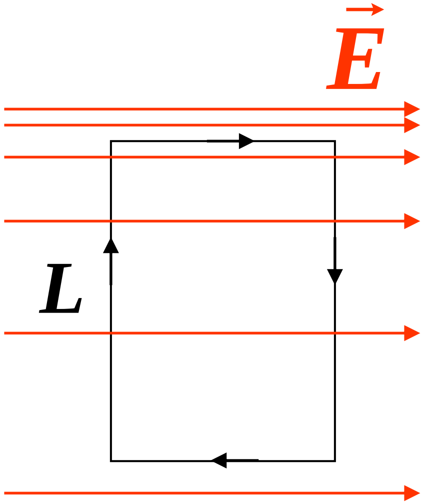
利用环路定理可以分析一些问题：

例1. 电场线闭合的电场肯定不是静电场。

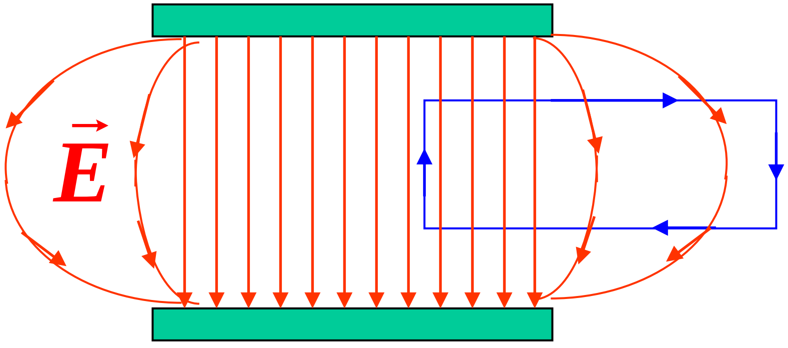
因为 $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$



例2. 电场线为一系列不均匀平行直线的静电场是不存在的。



例3. 平行板电容器必有边缘效应。



三、电势能

静电场是保守场，静电场力是保守力。静电场力所做的功应该等于电荷电势能增量的负值。

$$A_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(W_B - W_A) = -\Delta W$$

令 $W_{B\to\infty} = 0$ 则 $W_A = \int_A^\infty q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

电势能零点

试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功。

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的。

**点电荷电场中试验电荷的电势能

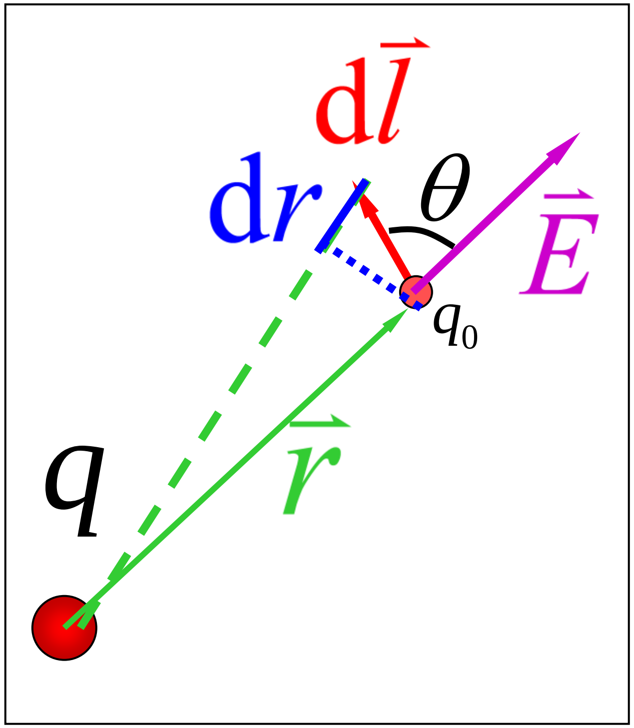
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

令 $W_\infty=0$

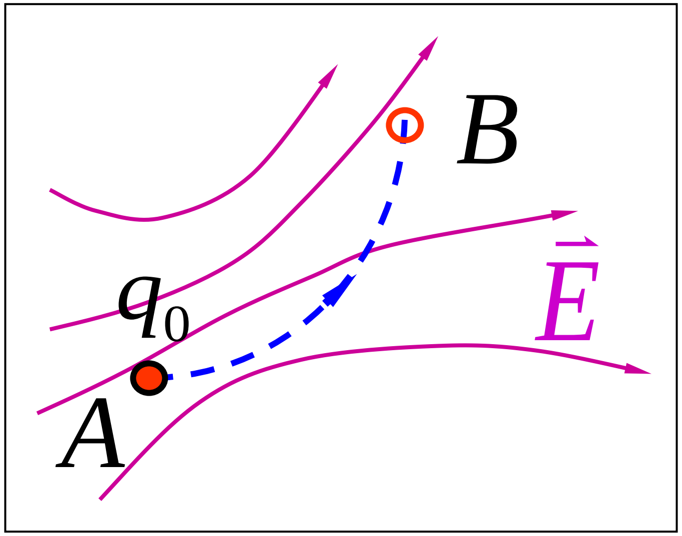
$$W=\int_r^\infty \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_r^\infty \frac{q_0 q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{W=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



四、电势



$$\int_A^B q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(W_B - W_A)$$

$$W_A = \int_A^{\infty} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad (W_{B\to\infty} = 0)$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\left(\frac{W_B}{q_0} - \frac{W_A}{q_0}\right)$$ ——此积分大小与 q_0无关

定义电势：$\boxed{U = \dfrac{W}{q_0}}$ 则：$U_A = \dfrac{W_A}{q_0}$ $U_B = \dfrac{W_B}{q_0}$

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ （U_B为参考电势，其值任选）

说明：

（1）单位：V（伏特）；　$1V=\dfrac{1J}{1C}$

（2）电势零点的选择：有限带电体以无穷远为电势零点。

（实际问题中常常选择地球为零电势体）

令　$U_{B\to\infty}=0$　　则　$U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

（3）电势的物理意义：把单位正试验电荷从点 ***A*** 移到无穷远时，静电场力所作的功。

（4）静电场力的功　　$A_{AB}=q_0\left(U_A-U_B\right)$

五、电势差

$$U_{AB}=U_A-U_B=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

——将单位正电荷从 A 移到 B 静电场力所做的功。

- 电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；
- 电势大小是相对的，与电势零点的选择有关。

几种常见的电势差（V）

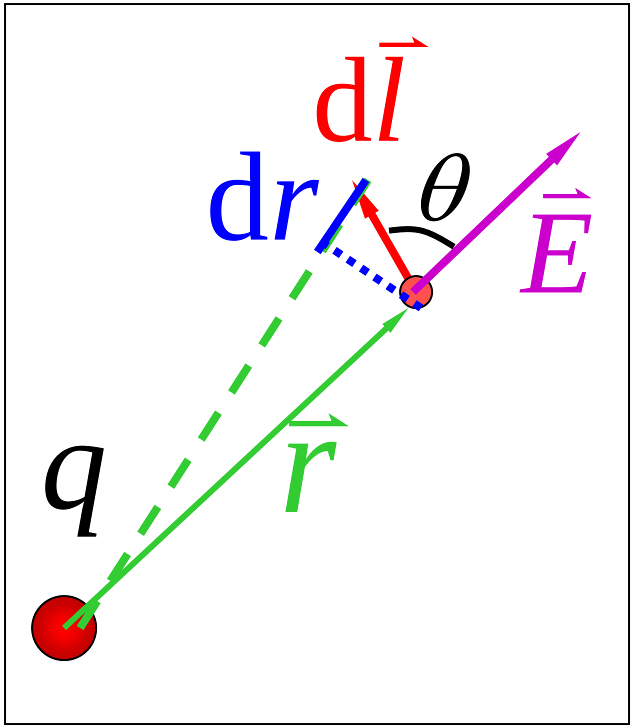
生物电	10^{-3}	家用电器	110或220
普通干电池	1.5	高压输电线	已达5.5×10^5
汽车电源	12	闪电	10^8–10^9

六、电势的计算

1. 点电荷的电势

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

令 $U_\infty = 0$



$$U = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

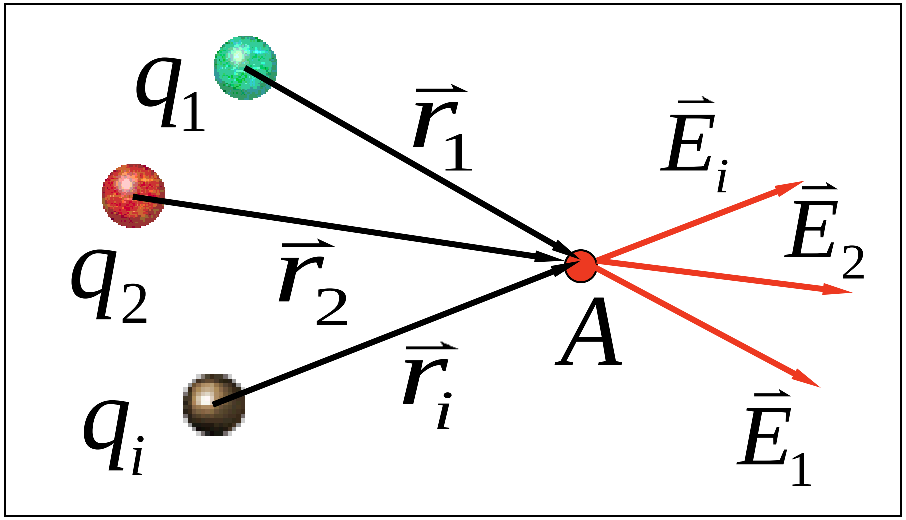
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$\boxed{U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

——球对称性

2. 电势的叠加原理

点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$



$$U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_A^{\infty}\sum_i \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_i\int_A^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i U_i$$

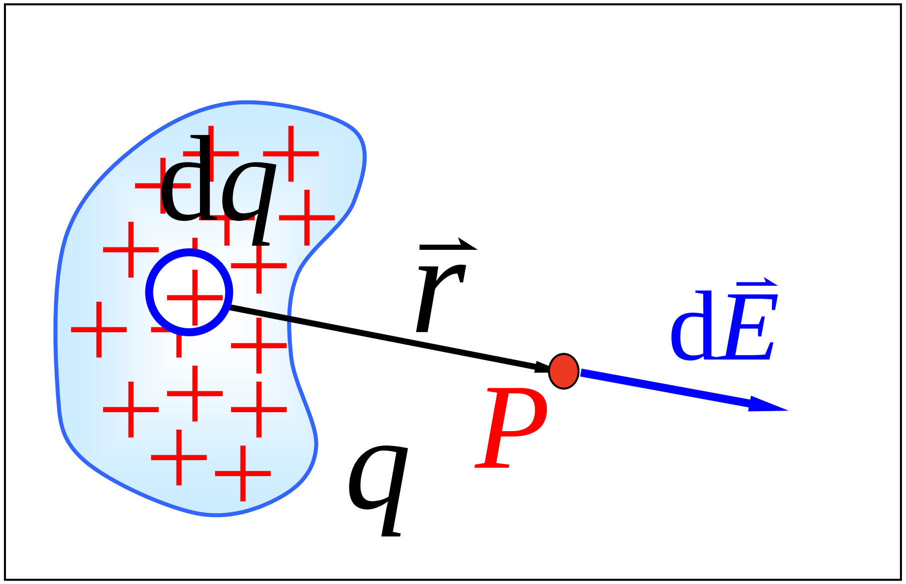
对于点电荷—— $\boxed{U_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

对于点电荷系—— $\boxed{U_A=\sum_i U_{iA}=\sum_i\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

3. 连续分布电荷的电势

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



求电势的方法

- 利用 $U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

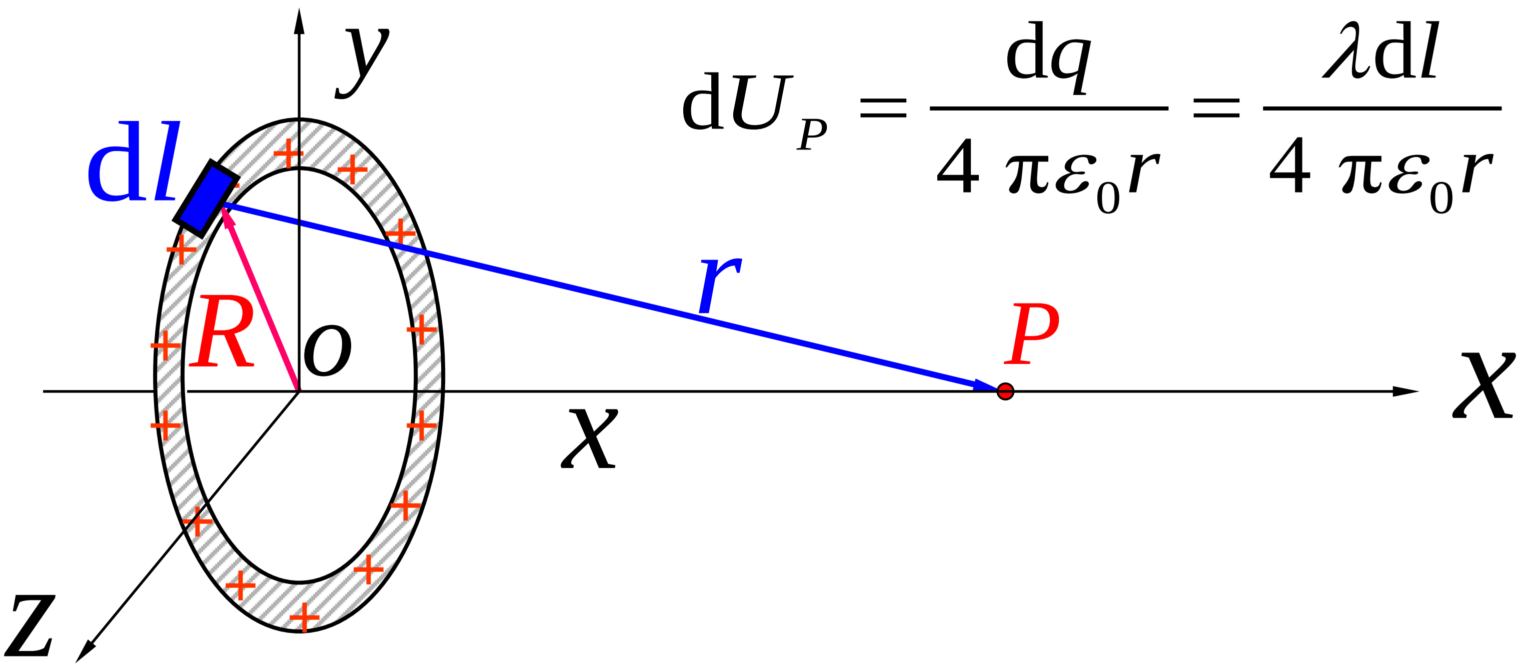
  ——这一结果已选无限远处为电势零点。

- 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

  则 $U_A = \int_A^{U=0\text{点}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

例1 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上。求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势。

解： $\lambda = q/2\pi R$ $\qquad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \dfrac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$



$$\mathrm{d}U_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

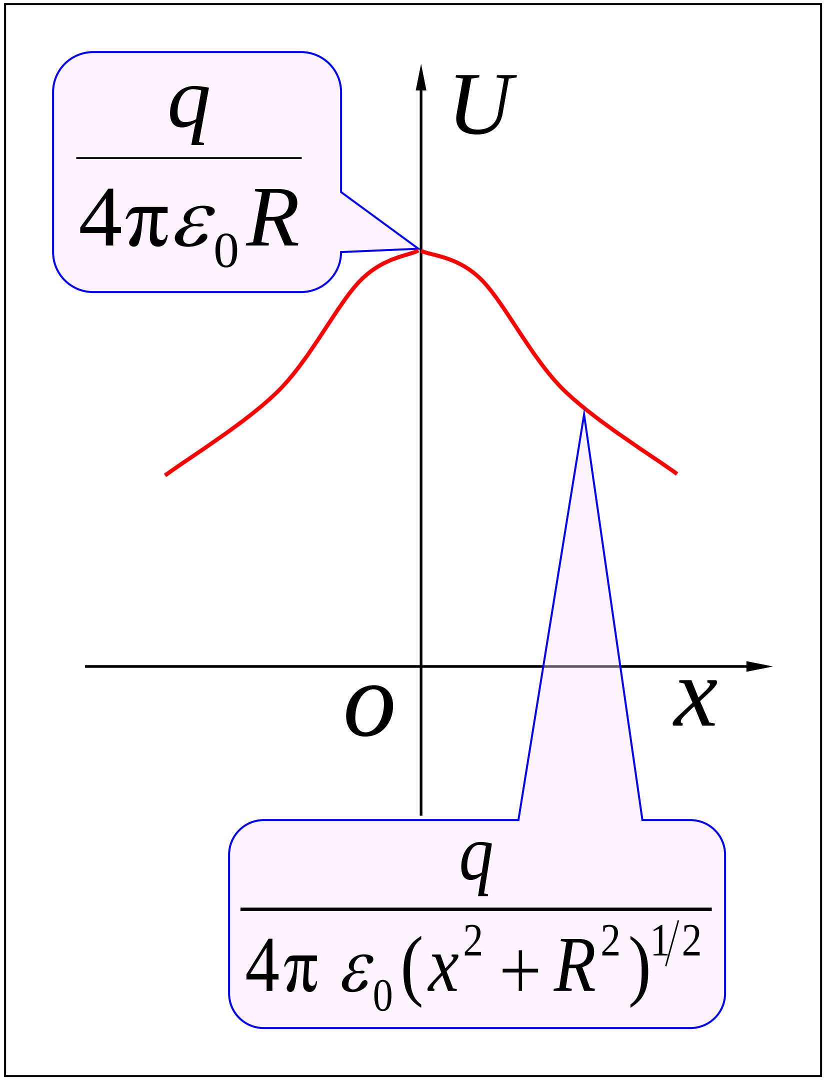
$$U_P = \int_{(q)} \mathrm{d}U_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

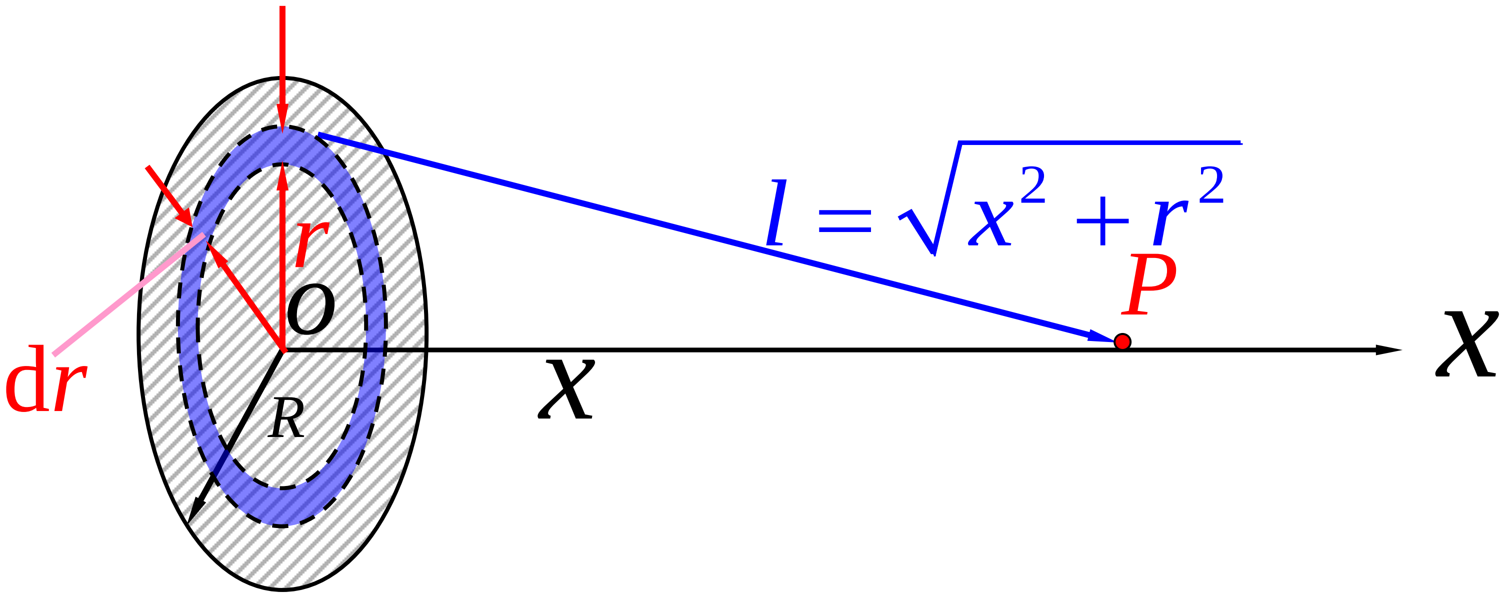
讨 论:

若 $x = 0$, $\quad U_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

若 $x >> R$, $\quad U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$



例2　求均匀带电薄圆盘轴线上的电势。



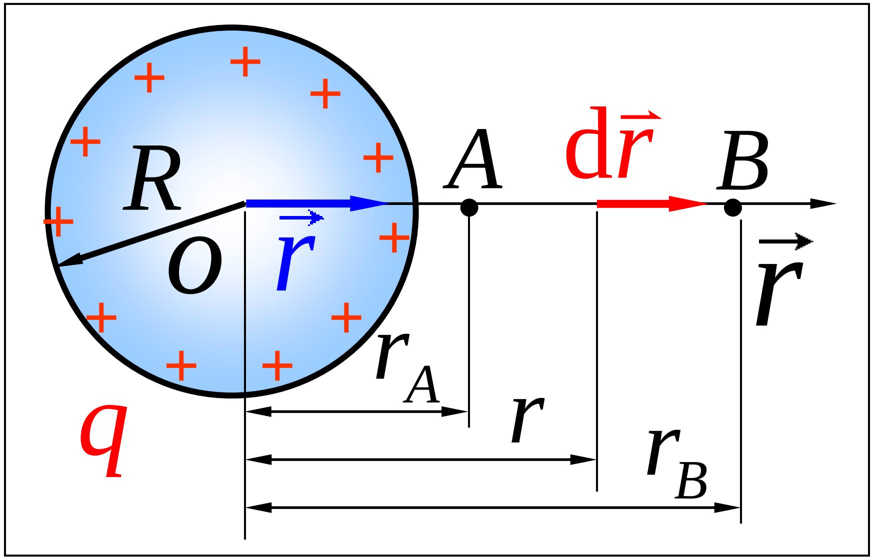
解：　$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$　　$\mathrm{d}U=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 l}=\dfrac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$

$$U_P=\int_{(q)}\mathrm{d}U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

$x>>R$　　$\sqrt{x^2+R^2}\approx x+\dfrac{R^2}{2x}$　　$U\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

例3 真空中，有一带均匀带电球壳，带电量为 q ，半径为R。试求（1）球壳外任意点的电势；（2）球壳内任意点的电势；（3）球壳外两点间的电势差；（4）球壳内两点间的电势差。

解：



$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

（1） $r > R$ 时

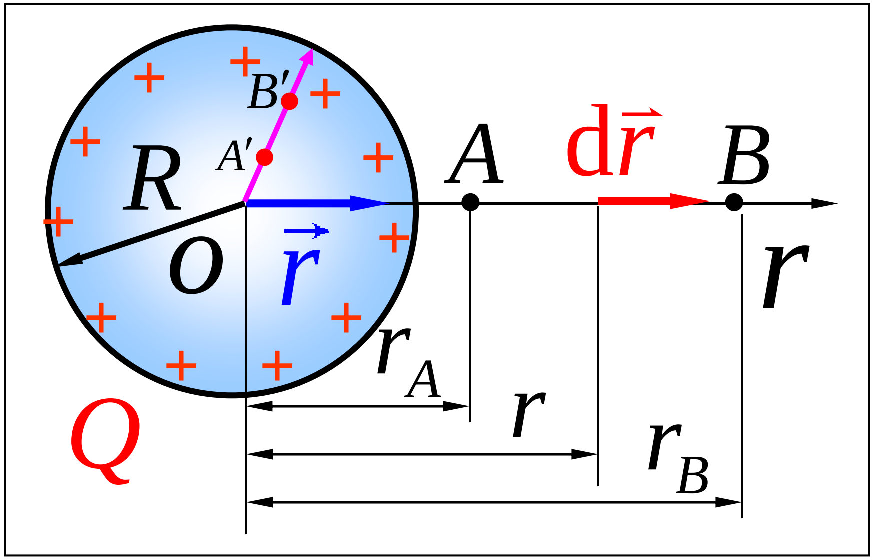
$$U_{外}(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）$r < R$ 时

$$U_{内}(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（3）$r > R$



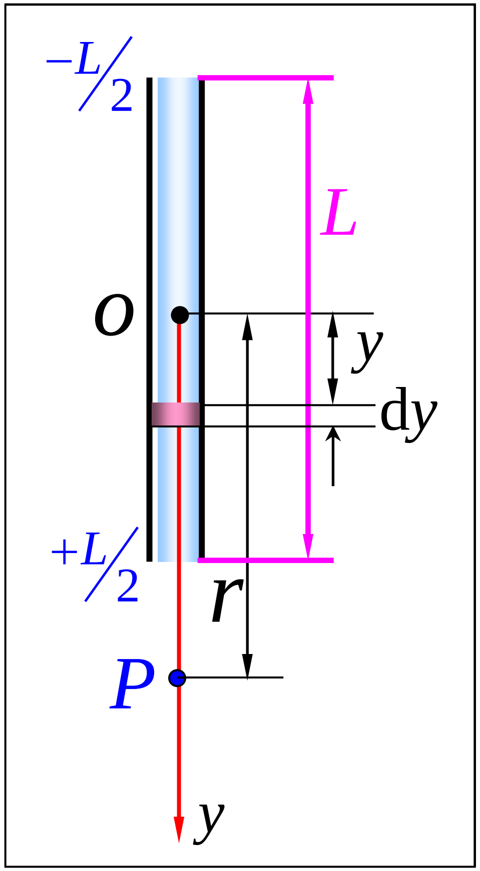
$$U_A - U_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

（4）$r < R$ $\quad U_{A'} - U_{B'} = \int_{r_{A'}}^{r_{B'}} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

例4 求长为 L 的均匀带电 q 直线延长上一点 P 的电势。



解: $\lambda = \dfrac{q}{L}$ $\quad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}y$

令 $U_{\infty} = 0$

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)} = \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}y}{r-y} \quad = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r + \dfrac{L}{2}}{r - \dfrac{L}{2}}$$

补充例题：“无限长”带电直导线的电势.

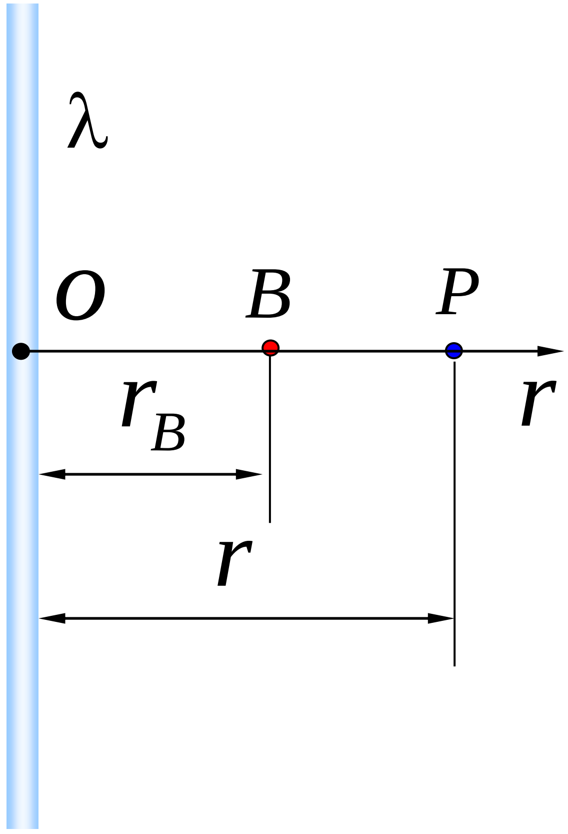
解： 令 $U_B = 0$

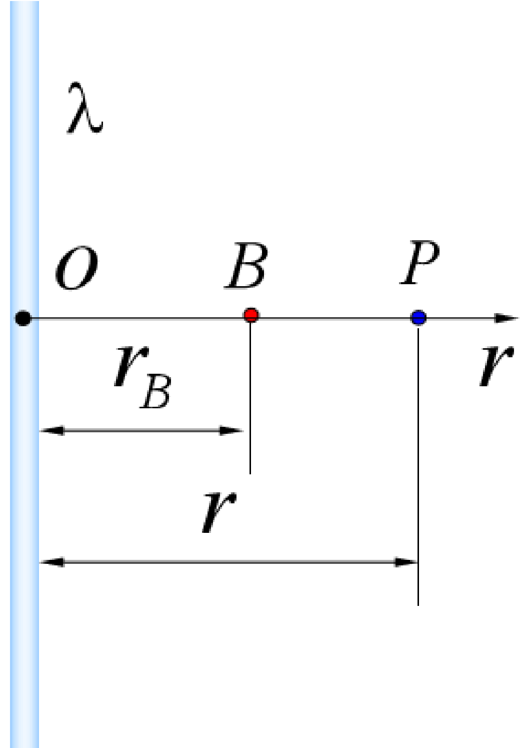
$$U_P = \int_r^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r$$

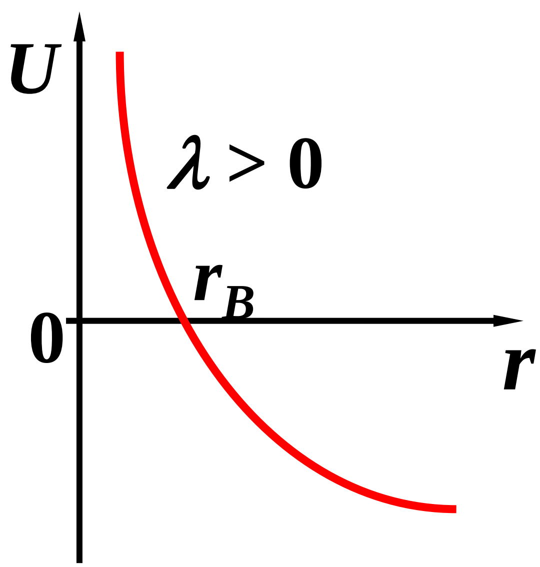
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_B}{r}$$

讨论：能否选 $U_\infty = 0$？





$$U=\int_{r}^{r_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}$$



$r>r_B$ 的点，电势为负，

$r=r_B$ 的点，电势为零，

$r<r_B$ 的点，电势为正。

可以看到，若选无限远为电势零点，会使积分发散。