数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年12月

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v: √

$$\vdash_{FC} \forall v A \to A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v \neg A \quad （也即\vdash_{\mathrm{FC}} A \to \exists v A）$$

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} \forall v A \to \exists v A$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：√

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall v A$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：√

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall v A$

FC的基本定理

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma;A \vdash B\text{当且仅当}\Gamma \vdash A \to B$$

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma;A \vdash \neg B\text{当且仅当}\Gamma;B \vdash \neg A$$

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：

$$\Gamma \vdash \neg A$$

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma;A \vdash B$，那么：

$$\Gamma;\forall vA \vdash B\text{、}\Gamma;\forall vA \vdash \forall vB$$

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

$$\text{由}\Gamma \vdash \exists vA\text{以及}\Gamma;A \vdash B\text{可以推出}\Gamma \vdash B$$

定理6

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

证明(充分性)：已知$\Gamma \vdash A \rightarrow B$，往证$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

- 由$\Gamma \vdash A \rightarrow B$，则有演绎过程 $A_1, A_2, \cdots, A_m\ (= A \rightarrow B)$。
- 在此序列中加上公式A、B得到一个演绎过程 $A_1, A_2, \cdots, A_m\ (= A \rightarrow B), A, B$。该演绎序列是一个以$\Gamma \cup \{A\}$为前提对$B$的演绎过程。

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \to B$$

证明(必要性)：已知$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$，往证$\Gamma \vdash_{\mathrm{FC}} A \to B$。对$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$的演绎序列的长度$l$用第二数学归纳法。

- 当$l = 1$时，序列中只有B，那么B有如下可能：
  - B为公理，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个证明，从而$\Gamma \vdash A \to B$。
  - $B \in \Gamma$，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的演绎过程，从而$\Gamma \vdash A \to B$。
  - $B = A$，由$A = B$知$A \to B$是一个定理（PC中定理1），从而$\Gamma \vdash A \to B$。
- 假设当演绎序列的长度$l < n$时结论成立
- 则当长度为$l = n$时，演绎序列为$A_1, A_2, \cdots, A_l\ (= B)$，那么$B$有如下可能：
  - B为公理或者为假设中的元素，可仿照$l = 1$的情形证明结论完全正确。
  - $B = A_j (j < n)$，则由$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，知$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，由归纳假设知$\Gamma \vdash A \to A_j (= B)$。
  - B为A_j, $A_k (j, k < l)$用分离规则导出，不妨设$A_k = A_j \to B$，由$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j \to B$，知$\Gamma \vdash A \to A_j$和$\Gamma \vdash A \to (A_j \to B)$。此两序列加上公式$(A \to (A_j \to B)) \to ((A \to A_j) \to (A \to B))$(公理2)，$(A \to A_j) \to (A \to B)$，$A \to B$，得到一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的一个演绎过程。从而$\Gamma \vdash A \to B$。

FC的演绎定理应用

例1： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

证明思路：

$$\boxed{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB}$$

$\downarrow$ 演绎定理6

$$\boxed{\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB}$$

$\downarrow$ 全称推广定理5，需要验证x在Γ中无自由出现

$$\boxed{\forall x(A \to B), A \vdash B}$$

$\downarrow$ 演绎定理6

$$\boxed{\forall x(A \to B) \vdash A \to B}$$

$\downarrow$ 演绎定理6

$$\boxed{\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)}$$

FC中的定理1

FC的演绎定理应用

例1： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

证明：

（1）$\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理1

（2）$\forall x(A \to B) \vdash (A \to B)$ 对（1）演绎定理6

（3）$\forall x(A \to B), A \vdash B$ 对（2）演绎定理6

（4）$\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$ 对（3）用全称推广定理5

（5）$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$ 对（4）用演绎定理6

FC的演绎定理应用

例2： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现。

证明思路：

$$\boxed{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB}$$

$$\downarrow \text{演绎定理6}$$

$$\boxed{\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)}$$

$$\text{FC定理1} \searrow \quad \nearrow \text{FC中公理6和PC加前件定理4}$$

$$\boxed{(A \to B)}$$

FC的演绎定理应用

例2： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现

证明：

（1）$B \to \forall xB$ 公理6

（2）$(B \to \forall xB) \to ((A \to B) \to (A \to \forall xB))$ PC中加前件定理4

（3）$(A \to B) \to (A \to \forall xB)$ (1)与(2)用rmp分离规则

（4）$\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ FC中定理1

（5）$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$ (4)与(3)用PC中三段论定理8

（6）$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$ 对（5）用演绎定理6

定理7

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{当且仅当} \Gamma; B \vdash \neg A$$

证明（必要性）：由$\Gamma; A \vdash \neg B$证$\Gamma; B \vdash \neg A$

（1）$\Gamma; A \vdash \neg B$ 已知

（2）$\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$ 对（1）用演绎定理6

（3）$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ PC中定理15

（4）$\Gamma \vdash B \rightarrow \neg A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$\Gamma; B \vdash \neg A$ 对（4）用演绎定理6

定理7

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{当且仅当} \Gamma; B \vdash \neg A$$

证明（充分性）：由$\Gamma; B \vdash \neg A$证$\Gamma; A \vdash \neg B$

（1）$\Gamma; B \vdash \neg A$　　已知

（2）$\Gamma \vdash B \rightarrow \neg A$　　对（1）用演绎定理6

（3）$(B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$　　PC中定理15

（4）$\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$　　（2）（3）用rmp分离规则

（5）$\Gamma; A \vdash \neg B$　　对（4）用演绎定理6

定理8

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：

$$\Gamma \vdash \neg A$$

证明：

（1） $\Gamma; A \vdash B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

（2） $\Gamma; A \vdash \neg B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

（3） $\Gamma \vdash A \to B$ 对（1）用演绎定理6

（4） $\Gamma \vdash A \to \neg B$ 对（2）用演绎定理6

（5） $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ PC中定理17

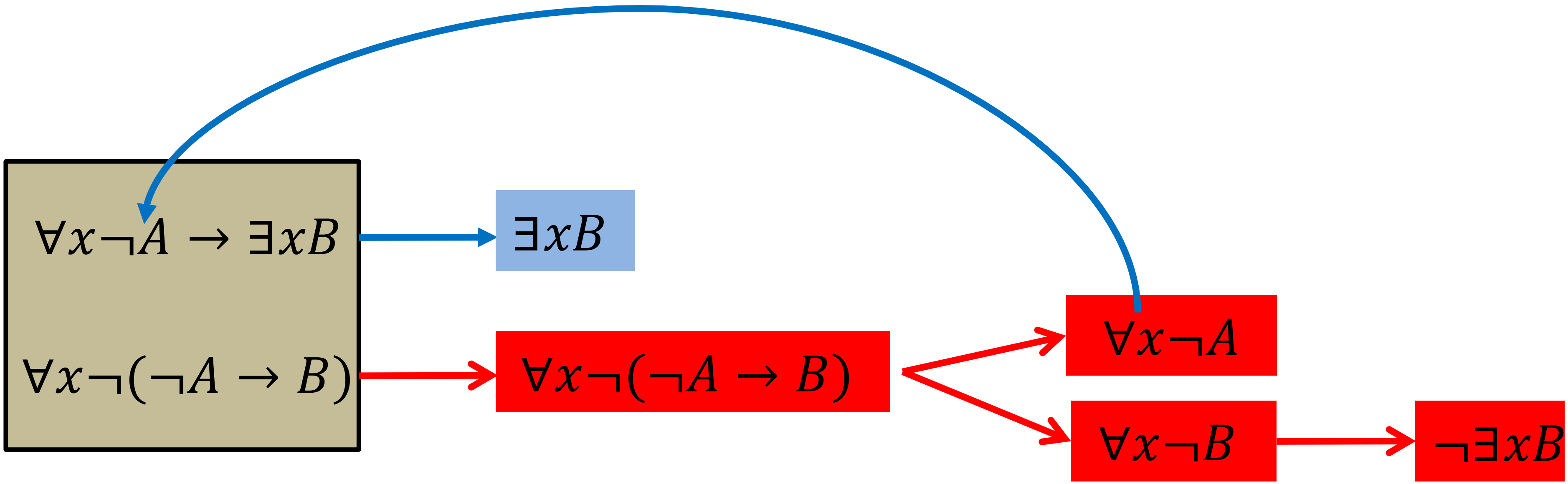
（6） $\Gamma \vdash (A \to \neg B) \to \neg A$ （3）（5）用rmp分离规则

（7） $\Gamma \vdash \neg A$ （4）（6）用rmp分离规则

定理8应用

.例4：证明$\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \exists x(\neg A \rightarrow B)$

证明思路：使用FC定理8反证法



定理8应用

例4： 证明$\forall x\neg A\to\exists xB\vdash\exists x(\neg A\to B)$

证明：

> **定理8**（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma\cup\{A\}$是不一致的，那么：$\Gamma\vdash\neg A$

（1） $\neg(\neg A\to B)\to\neg A$ PC中定理7逆否

（2） $\neg(\neg A\to B)\to\neg B$ 公理1逆否

（3） $\forall x(\neg(\neg A\to B)\to\neg A)$ (1)用全称推广定理4

（4） $\forall x(\neg(\neg A\to B)\to\neg B)$ (2)用全称推广定理4

（5） $\forall x(\neg(\neg A\to B)\to\neg A)\to(\forall x\neg(\neg A\to B)\to\forall x\neg A)$ 公理5

（6） $\forall x\neg(\neg A\to B)\to\forall x\neg A$ (3)与(5)用rmp分离规则

（7） $\forall x(\neg(\neg A\to B)\to\neg B)\to(\forall x\neg(\neg A\to B)\to\forall x\neg B)$ 公理5

（8） $\forall x\neg(\neg A\to B)\to\forall x\neg B$ (4)与(7)用rmp分离规则

（9） $\forall x\neg A\to\exists xB$ 已知假设

（10） $\forall x\neg(\neg A\to B)\to\exists xB$ (6)与(9)用PC中三段论定理8

（11） $\forall x\neg A\to\exists xB,\forall x\neg(\neg A\to B)\vdash\forall x\neg B$ （$\neg\exists xB$） （8）用演绎定理6

（12） $\forall x\neg A\to\exists xB,\forall x\neg(\neg A\to B)\vdash\neg\forall x\neg B$ （$\exists xB$） （10）用演绎定理6

（13） $\forall x\neg A\to\exists xB\vdash\neg\forall x\neg(\neg A\to B)$ (11)(12)用FC中定理8反证法

（14） $\forall x\neg A\to\exists xB\vdash\exists x(\neg A\to B)$ 定义式

定理9

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B，\ \Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

证明思路：

- 由$\Gamma; A \vdash B$及演绎定理可知：

$$\Gamma \vdash A \to B$$

- 由v不在Γ中自由出现，由全称推广定理5知

$$\Gamma \vdash \forall v(A \to B)$$

- 再由公理5：$\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$，知：

$$\Gamma \vdash \forall v A \to \forall v B$$

- 从而再由演绎定理知：

$$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

- 再由FC中定理1：$\forall v B \to B$知：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B$$

定理9

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B、\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

证明：

（1）$\Gamma; A \vdash B$ 已知

（2）$\Gamma \vdash A \rightarrow B$ 对（1）用演绎定理6

（3）$\Gamma \vdash \forall v(A \rightarrow B)$ 对（2）用全称推广定理5

（4）$\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$ 公理5

（5）$\Gamma \vdash \forall v A \rightarrow \forall v B$ （3）（4）用rmp分离规则

（6）$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$ 对（5）用演绎定理6

（7）$\forall v B \rightarrow B$ FC中定理1

（8）$\Gamma; \forall v A \vdash B$ （6）（7）用rmp分离规则

定理10

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists v A$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

证明思路：

- 由$\Gamma; A \vdash B$及演绎定理知：$\Gamma \vdash A \rightarrow B$
- 由PC中定理13：$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$知：$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A$
- 再由演绎定理知：$\Gamma; \neg B \vdash \neg A$
- 由v在Γ及$\neg B$中无自由出现及全称推广定理5知：$\Gamma; \neg B \vdash \forall v \neg A$
- 再由演绎定理知：$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \forall v \neg A$
- 由PC中定理14：$(\neg B \rightarrow \forall v \neg A) \rightarrow (\neg \forall v \neg A \rightarrow B)$知：$\Gamma \vdash \neg \forall v \neg A \rightarrow B$
- 也即：$\Gamma \vdash \exists v A \rightarrow B$
- 再由已知条件$\Gamma \vdash \exists v A$知：$\Gamma \vdash B$

定理10应用

例5： 证明 $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$，其中$v$在$A$中无自由出现。

定理10（**定理5.2.10**）：（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B 为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

证明：

（1） $\exists v(A \to B), A \vdash \exists v(A \to B)$ $(\in)$

（2） $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A$ $(\in)$

（3） $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A \to B$ $(\in)$

（4） $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash B$ $(2)(3)(\to -)$

（5） $B \to \exists vB$ FC中定理2

（6） $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash \exists vB$ (4)(5)rmp分离规则

（7） $\exists v(A \to B), A \vdash \exists vB$ (6)(1)用FC中定理10

（8） $\exists v(A \to B) \vdash A \to \exists vB$ 对 (7)用演绎定理6

（9） $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$ 对 (8)用演绎定理6

FC的基本定理

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：√

$$\Gamma; A \vdash B\text{当且仅当}\Gamma \vdash A \to B$$

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：√

$$\Gamma; A \vdash \neg B\text{当且仅当}\Gamma; B \vdash \neg A$$

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：√

$$\Gamma \vdash \neg A$$

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：√

$$\Gamma; \forall v A \vdash B\text{、}\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：√

$$\text{由}\Gamma \vdash \exists v A\text{以及}\Gamma; A \vdash B\text{可以推出}\Gamma \vdash B$$

FC的基本定理

定理11（定理5.2.11）：（替换原理）设A,B为FC中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。

定理13（定理5.2.13）：

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

定理14（定理5.2.14）：

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$

定理15（定理5.2.15）：

（1）$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$

（2）$\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$

（3）$\exists x \forall y B(x,y) \vdash \forall y \exists x B(x,y)$

定理11

定理11（定理5.2.11）：（替换原理）设A, B为FC中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

例6： $\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$

证明：

（1）$A \to B \vdash\dashv \neg B \to \neg A$　　PC中定理13和公理3

（2）$\forall x(A \to B) \vdash\dashv \forall x(\neg B \to \neg A)$　　由（1）使用替换原理

（3）$\forall x(\neg B \to \neg A) \to (\forall x\neg B \to \forall x\neg A)$　　公理5

（4）$\forall x(A \to B) \vdash \forall x\neg B \to \forall x\neg A$　　（2）（3）用rmp分离规则

（5）$(\forall x\neg B \to \forall x\neg A) \to (\neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B)$　　PC中定理13

（6）$\forall x(A \to B) \vdash \neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B$　　（4）（5）用rmp分离规则

（7）$\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$　　定义式

定理12

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。

例如：$\forall x A \vdash\dashv \forall y A_y^x$

定理13

定理13（定理5.2.13）：

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

证明：先证 $\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$

（1）$A \to \neg\neg A$　PC 中的定理12

（2）$\forall x(A \to \neg\neg A)$　对（1）用全称推广定理4

（3）$\forall x(A \to \neg\neg A) \to (\forall x A \to \forall x \neg\neg A)$　公理5

（4）$\forall x A \to \forall x \neg\neg A$　（2）（3）用rmp分离规则

（5）$(\forall x A \to \forall x \neg\neg A) \to (\neg \forall x \neg\neg A \to \neg \forall x A)$　PC中的定理13

（6）$\neg \forall x \neg\neg A \to \neg \forall x A$　（4）（5）用rmp分离规则

（7）$\exists x \neg A \to \neg \forall x A$　定义式

（8）$\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$　对（7）演绎定理6

定理13

定理13（定理5.2.13）：

（1） $\exists x \neg A \vdash\dashv \neg\forall x A$

（2） $\forall x \neg A \vdash\dashv \neg\exists x A$

证明： 再证$\neg\forall x A \vdash \exists x \neg A$

（1） $\neg\neg A \to A$ PC 中的定理10

（2） $\forall x(\neg\neg A \to A)$ 对（1）用全称推广定理4

（3） $\forall x(\neg\neg A \to A) \to (\forall x \neg\neg A \to \forall x A)$ 公理5

（4） $\forall x \neg\neg A \to \forall x A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5） $(\forall x \neg\neg A \to \forall x A) \to (\neg\forall x A \to \neg\forall x \neg\neg A)$ PC中的定理13

（6） $\neg\forall x A \to \neg\forall x \neg\neg A$ （4）（5）用rmp分离规则

（7） $\neg\forall x A \to \exists x \neg A$ 定义式

（8） $\neg\forall x A \vdash \exists x \neg A$ 对（7）演绎定理6

定理14

定理14（定理5.2.14）：

（1） $\forall x(A \land B) \vdash\dashv \forall xA \land \forall xB$

（2） $\exists x(A \lor B) \vdash\dashv \exists xA \lor \exists xB$

证明： 先证 $\forall x(A \land B) \vdash \forall xA \land \forall xB$

（1） $\forall x(A \land B) \to A \land B$ FC中的定理1

（2） $\forall x(A \land B) \vdash A \land B$ 对（1）用演绎定理6

（3） $\forall x(A \land B) \vdash A$ （2） $(\land -)$

（4） $\forall x(A \land B) \vdash B$ （2） $(\land -)$

（5） $\forall x(A \land B) \vdash \forall xA$ 对（3）用全称推广定理5

（6） $\forall x(A \land B) \vdash \forall xB$ 对（4）用全称推广定理5

（7） $\forall x(A \land B) \vdash \forall xA \land \forall xB$ （5） （6） $(\land +)$

定理14

定理14（定理5.2.14）：

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

证明：再证$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$

（1）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ （$\in$）

（2）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA$ （1） （$\wedge -$）

（3）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xB$ （1） （$\wedge -$）

（4）$\forall xA \to A$ FC中的定理1

（5）$\forall xB \to B$ FC中的定理1

（6）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash A$ （2） （4）用rmp分离规则

（7）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash B$ （3） （5）用rmp分离规则

（8）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash A \wedge B$ （6） （7） （$\wedge +$）

（9）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$ 对（8）用全称推广定理5

定理15

定理15（定理5.2.15）：

（1） $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$

（2） $\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$

（3） $\exists x\forall yB(x,y) \vdash \forall y\exists xB(x,y)$

证明:

（1） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A \wedge B$ （$\in$）

（2） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A$ （1） （$\wedge -$）

（3） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash B$ （1） （$\wedge -$）

（4） $A \to \exists xA$ FC中的定理2

（5） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA$ （2） （4）用rmp分离规则

（6） $B \to \exists xB$ FC中的定理2

（7） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xB$ （3） （6）用rmp分离规则

（8） $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ （5） （7） （$\wedge +$）

（9） $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x(A \wedge B)$ （$\in$）

（10） $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ 对（9）和（8）用存在消除10

> **定理10（定理5.2.10）：**（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：
>
> 由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

FC的基本定理

定理11（定理5.2.11）：（替换原理）设A,B为FC中的公式，且满足$A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。√

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。√

定理13（定理5.2.13）：√

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

定理14（定理5.2.14）：√

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$

定理15（定理5.2.15）：√

（1）$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$

（2）$\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$

（3）$\exists x \forall y B(x,y) \vdash \forall y \exists x B(x,y)$