第十八章 支配集、覆盖集、独立集与匹配

本章的主要内容

- （点）支配集、点覆盖集、点独立集.
- 边覆盖集、边独立集（匹配）
- 二部图中的匹配

本章的先行准备：

- 第十四章——第十七章

第一节 支配集、点覆盖集与点独立集

一、支配集与支配数

1. 定义

该定义一般针对G是无向简单图

定义 18.1 设 $G=<V,E>$，$V^*\subseteq V$.

并称v_j支配v_i

(1) V^*为支配集——$\forall v_i\in V-V^*,\exists v_j\in V^*$，使得$(v_i,v_j)\in E$

(2) V^*为极小支配集——V^*的真子集不是支配集

(3) 最小支配集——元素最少的支配集

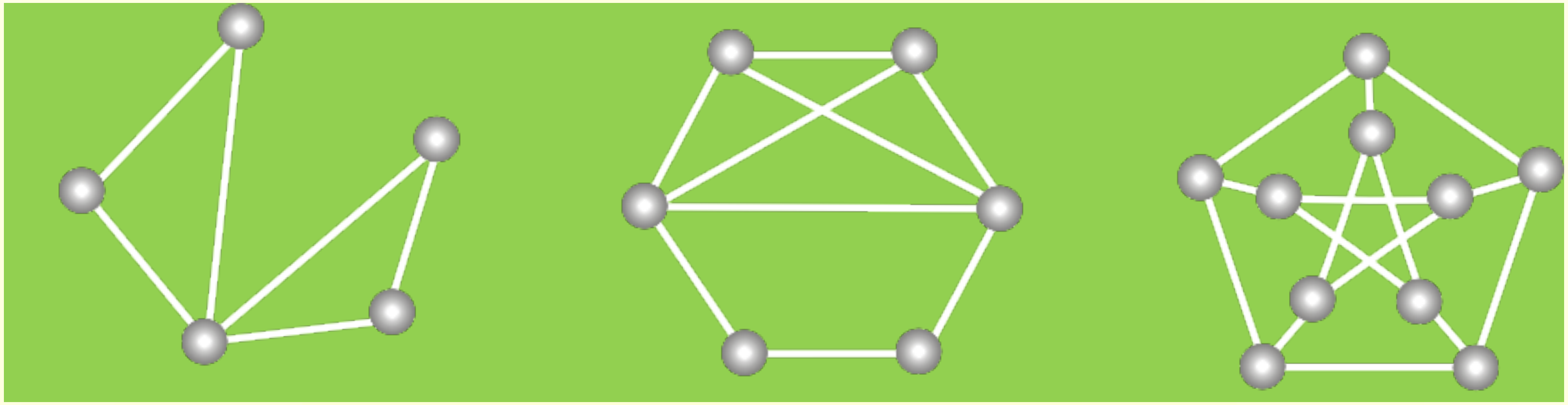
(4) 支配数 $\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数

2．极小与最小支配集之间的关系.

最小支配集为极小支配集，但反之不真.

另外，极小支配集与最小支配集都可能不惟一.

又易知完全图、轮图、星形图的支配数均是 1.



(1) (2) (3)

图 1

图 1 中，(1)，(2)，(3)（彼得松图）的支配数分别为 1，2，3. 请各找出一个最小支配集.

二、点独立集与点独立数

1． 定义

该定义一般针对G是无向简单图

定义 18.2　设 $G=<V,E>$，$V^*\subseteq V$.

（1）点独立集 V^*——V^*中顶点彼此不相邻

（2）V^*为极大点独立集——V^*中再加入任何顶点就不是点独立集

（3）最大点独立集——元素最多的点独立集

（4）点独立数——最大点独立集中的元素个数，记为β_0

在图 1 所示图中，点独立数依次为 2, 2, 4.

2. 独立集与支配集的关系

G是无向简单图

定理 18.1 设 $G=\langle V,E\rangle$中无孤立点，则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

证明线索：

（1）设 V^*为 G 的极大点独立集，证明它也是支配集. $\forall v\in V-V^*$，必$\exists v'\in V^*$，使$(v,v')\in E$，否则$\exists v_0\in V-V^*$不与 V^*中任何顶点相邻，则 $V^*\cup\{v_0\}$仍为点独立集，这与 V^*是极大点独立集矛盾.

（2）证 V^*是极小支配集. 只需证 V^*的真子集不是支配集.

特别注意，定理 18.1 其逆不真.

由于V^*是点独立集，因此任何的$V_1\subset V^*$, V^*-V_1中的顶点都不受V_1中顶点支配，所以V_1不是支配集。

三、点覆盖集与点覆盖数

1．定义

该定义一般针对G是无向简单图

定义 18.3　设 $G=<V,E>$, $V^*\subseteq V$.

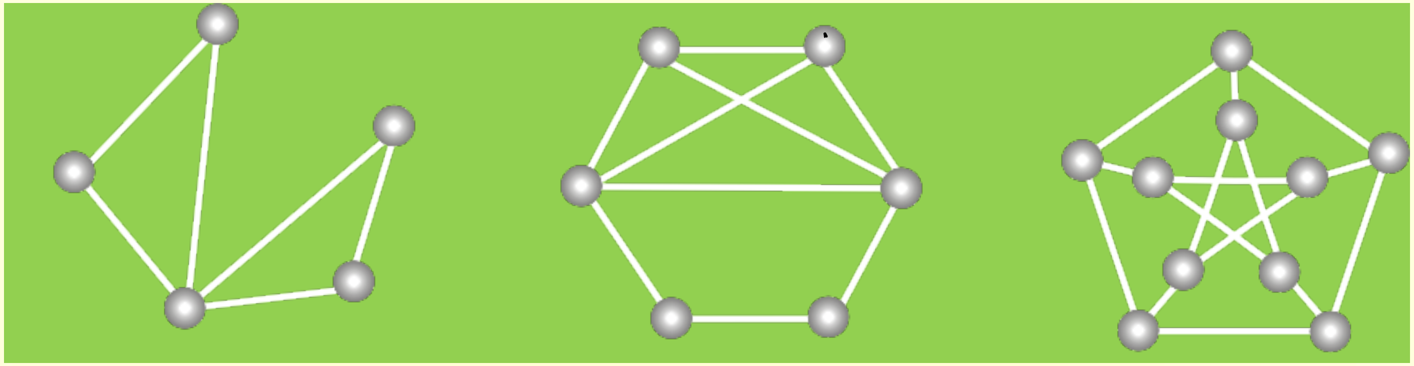
（1）V^*是点覆盖集——$\forall e\in E$，$\exists v\in V^*$，使 e 与 v 关联 并称v覆盖e

（2）V^*是极小点覆盖集——V^*的任何真子集都不是点覆盖集

（3）最小点覆盖集（或最小点覆盖）——顶点数最少的点覆盖集

（4）点覆盖数——$\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

下图（图 1）中，点覆盖数依次为 3，4，6.



2. 点覆盖集与点独立集的关系

一般针对G是无向简单图

定理 18.2 设 $G=<V,E>$无孤立点，$V^*\subset V$，则 V^*是点覆盖集当且仅当$\overline{V}^*=V-V^*$为点独立集

证 必要性. 若$\exists v_i, v_j\in \overline{V}^*$相邻，即$(v_i,v_j)\in E$，则 V^*中顶点不能覆盖(v_i,v_j)，这是矛盾的.

充分性. 由于$\overline{V}^*$是点独立集，因而$\forall e\in E$，e 的两个端点至少一个在 V^*中.

推论 设 G 为 n 阶无孤立顶点图，则 V^*是极小（最小）点覆盖当且仅当$\overline{V}^*=V-V^*$是极大（最大）点独立集，从而有

$\alpha_0+\beta_0=n$

第二节 边覆盖集与匹配

一、边覆盖集与边覆盖数

该定义一般针对G是无向简单图

定义 18.4　设 $G=<V,E>$，$E^* \subseteq E$，

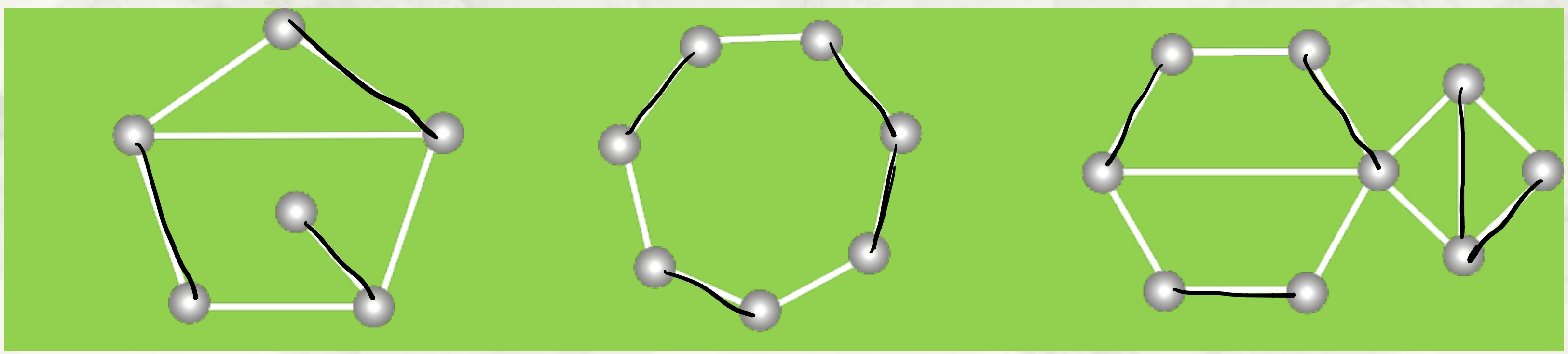
(1) E^* 为边覆盖集——$\forall v \in V$，$\exists e \in E^*$，使得 v 与 e 关联

并称e覆盖v

(2) E^* 为极小边覆盖——E^* 的真子集不是边覆盖

(3) 最小边覆盖——边数最少的边覆盖

(4) 边覆盖数α_1——最小边覆盖中元素个数



(1)　　　　(2)　　　　(3)　　图 2

图 2 中各图的边覆盖数依次为 3, 4, 5. 请各找出一个最小边覆盖.

该定义一般针对G是无向简单图

二、匹配（边独立集）与匹配数（边独立数）

定义 18.5　设 $G=\langle V,E\rangle$, $E^*\subseteq E$，

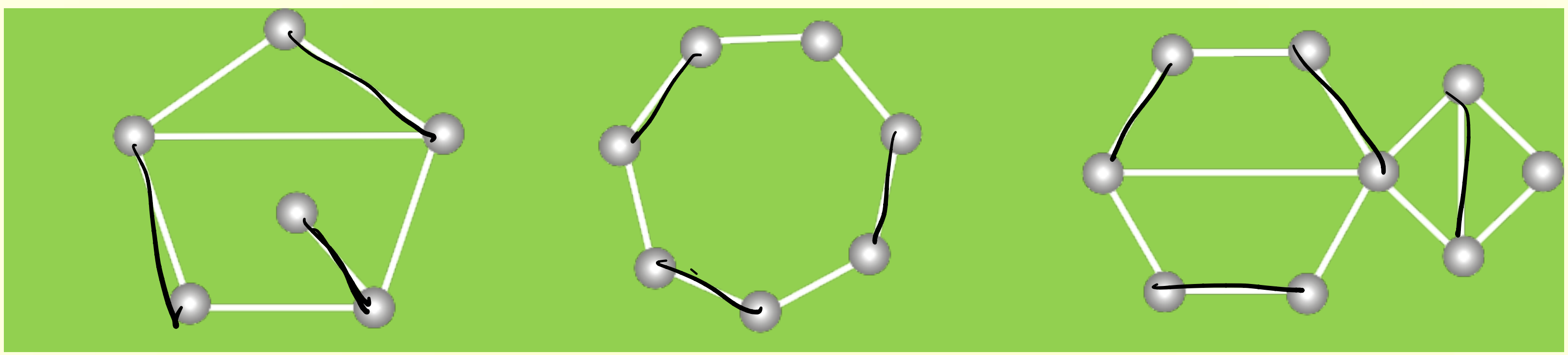
(1) 匹配（边独立集）E^*——E^*中各边均不相邻

(2) 极大匹配 E^*——E^*中不能再加其他边了

(3) 最大匹配——边数最多的匹配

(4) 匹配数——最大匹配中的边数，记为β_1

在下图（图 2）中所示各图的匹配数依次为 3, 3, 4.



三、关于匹配中的其他概念

M中的边为匹配边，不在M中的边称为非匹配边。

定义 18.6　设 M 为 G 中一个匹配.

(1) v_i 与 v_j 被 M 匹配——$(v_i,v_j)\in M$

(2) v 为 M 饱和点——有 M 中边与 v 关联

(3) v 为 M 非饱和点——无 M 中边与 v 关联

(4) M 为完美匹配——G 中无 M 非饱和点

对于简单图，n为偶数时，才可能有完美匹配

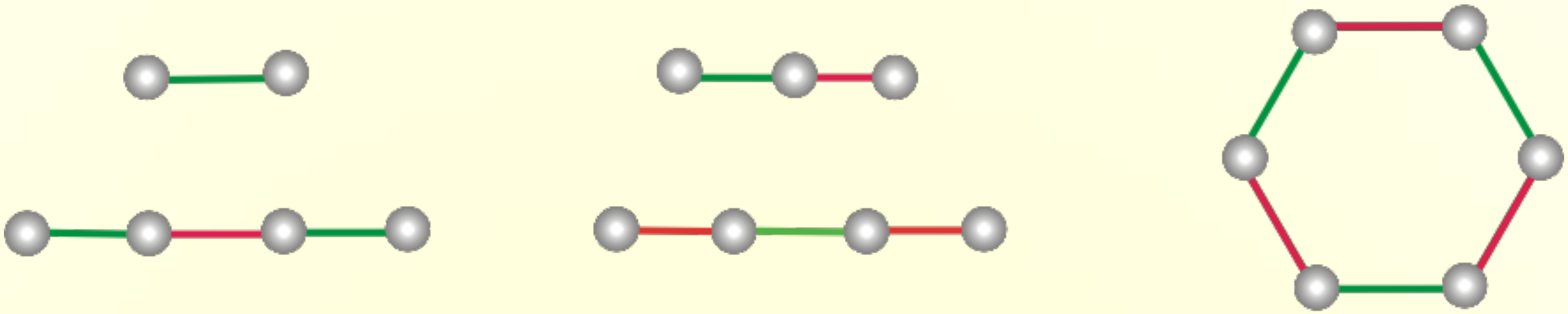
(5) M 的交错路径——从 M 与 $E-M$ 中交替取边构成的 G 中的路径

(6) M 的可增广交错路径——起、终点都是 M 非饱和点的交错路径

(7) M 的交错圈——由 M 与 $E-M$ 中的边交替出现构成的 G 中的圈

在图 2 中，(1) 存在完美匹配，(2) 与 (3) 均无完美匹配.

在图 3 中给出了交错路径及交错圈示意图.



(1)　　(2)　　(3)

图 3

设红色边在匹配 M 中，绿色边不在 M 中，则图 3（1）中的两条路径均为可增广的交错路径；(2) 中的全不是可增广的交错路径；（3）中是一个交错圈.

不难看出，可增广交错路径中，不在 M 中的边比在 M 中的边多一条. 交错圈一定为偶圈.

四、最大匹配与最小边覆盖之间的关系

定理 18.3　设 n 阶图 G 中无孤立顶点.

(1) 设 M 为 G 中一个最大匹配，对于 G 中每个 M 非饱和点均取一条与其关联的边，组成边集 N，则 $W=M\cup N$ 为 G 中最小边覆盖.

(2) 设 W_1 为 G 中一个最小边覆盖；若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条，设移去的边集为 N_1，则 $M_1=W_1-N_1$ 为 G 中一个最大匹配.

(3) G 中边覆盖数 α_1 与匹配数 β_1 满足 $\alpha_1+\beta_1=n$.

证明.

1）M 为 G 中一个最大匹配，$|M| = \beta_1$，所以 G 有 $n - 2\beta_1$ 个 M-非饱和点，$W=M\cup N$ 显然为 G 中一个边覆盖，且

$$|W| = |M| + |N| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1$$

对于每个非饱和点对应的N中的边，没有重合。因为如果有两个非饱和点对应同一条N中的边，那么这条边应该加入M中。

2）M_1 显然是 G 的一个匹配。W_1 为 G 中一个最小边覆盖，W_1 中任何一条边的两个端点不可能都与 W_1 中的其他边相关联，因此构造 M_1 时每移去其中的一条时产生并产生一个 M_1 非饱和点。于是

否则该边可以去掉，不影响W_1是边覆盖。

$$|N_1| = |W_1| - |M_1| = \text{"}M_1\text{ 非饱和点数"} = n - 2|M_1|$$

$$\alpha_1 = |W_1| = n - |M_1|$$

3）M_1 是匹配，W 是边覆盖，有$|M_1| \leqq \beta_1$，$|W| \geqq \alpha_1$

$$\alpha_1 = n - |M_1| \geqq n - \beta_1 = |W| \geqq \alpha_1$$

所以，（1） $|M_1| = \beta_1$， 即 M_1 是最大匹配；

（2）$|W| = \alpha_1$， 即 W 是最小边覆盖集；

（3） $\alpha_1+\beta_1=n$.

推论 设 G 是 n 阶无孤立顶点的图. M 为 G 中的匹配，W 是 G 中的边覆盖，则 $\overset{\beta_1}{|M|} \overset{\le}{\le} \overset{\alpha_1}{|W|}$，等号成立时，$M$ 为 G 中完美匹配，W 为 G 中最小边覆盖.

$\boxed{\alpha_1=\beta_1=n/2}$

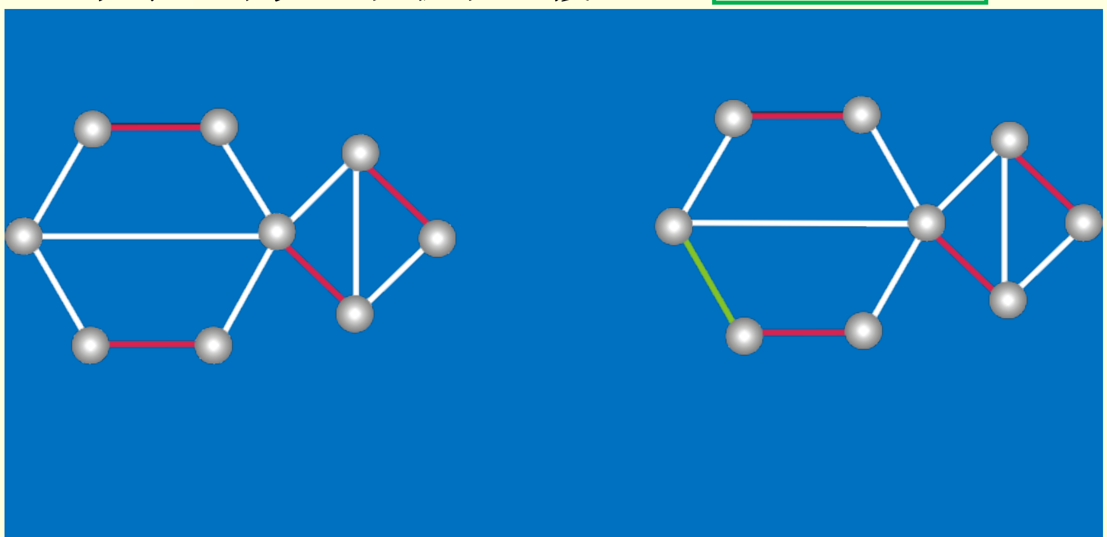


图 4

图 4 中，红边为匹配 M 中的边. （1）中匹配是最大匹配. （2）中红边与绿边组成最小边覆盖 W.

反之，由（2）的最小边覆盖 W 产生（1）中的最大匹配 M.

五、最大匹配判别定理

定理 18.4（贝尔热，1957） M 为 G 中最大匹配当且仅当 G 中不含 M 的可增广交错路径.

设可增广路径为τ， 将τ的匹配边变成非匹配边，非匹配边变成匹配边，M中非τ中的边保持不变，得到新的匹配M'，且比M多一条边。

证明线索：

必要性. 若含可增广交错路径，可生成比 M 更大的匹配.

充分性. 设 M 和 M_1 分别为不含可增广路径的匹配和最大匹配，只要证明 $|M|=|M_1|$ 即可. 由必要性知，M_1 也不含可增广交错路径. 设 $H = G[M_1 \oplus M]$，若 $H=\varnothing$，$M=M_1$，结论为真. 否则 $H\neq\varnothing$. 此时，H 中的交错圈（若存在），其上 M 与 M_1 的边数相等，且所有交错路径上，M 与 M_1 中的边数也相等（因为 M 与 M_1 均无可增广路径）.

H中各连通分支要么是由M和M_1中的边组成的交错圈，要么是由M和M_1中的边组成的交错路径。交错圈中M和M_1中边数相等。交错路径中，如果M和M_1中边数不相等，那么假设M_1的边多一条，那么会形成M的可增广路径。

注：贝尔热定理给我们提供了扩充G的匹配的思路。

贝尔热(1926---2002) 法国著名数学家。他的《无限图理论及其应用》(1958) 是继哥尼之后的图论历史上的第二本图论专著。他不仅在图论领域做出了许多贡献，而且四处奔波传播图论，推动了图论的普及和发展。

1993年，他获得组合与图论领域颁发的欧拉奖章。

贝尔热在博弈论、拓扑学领域里也有杰出贡献。在博弈领域，他引入了Nash均衡之外的另一种均衡系统。Nash的生活被改编成电影《美丽的心灵》，获02年奥斯卡金像奖。

贝尔热对中国的手工艺很感兴趣。他也是一位象棋高手，还创作过小说《谁杀害了Densmore公爵》。

第三节 二部图中的匹配

完备匹配一定是最大匹配，但最大匹配不一定是完备匹配

一、二部图中的完备匹配

定义 18.7　设 $G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M 是 G 中最大匹配，若 V_1 中顶点全是 M 饱和点，则称 M 为 G 中完备匹配. $|V_1|=|V_2|$ 时完备匹配变成完美匹配.

即 $|M|=|V_1|$，且称为 V_1 到 V_2 的完备匹配

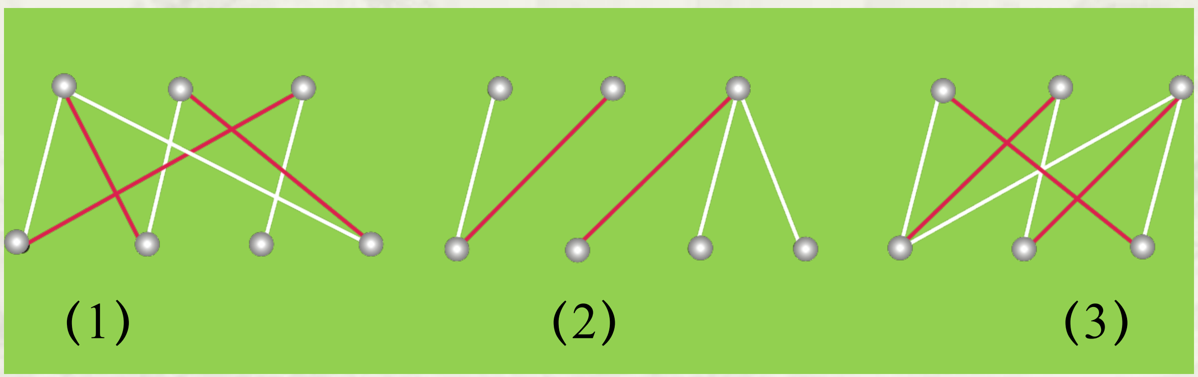


图 5

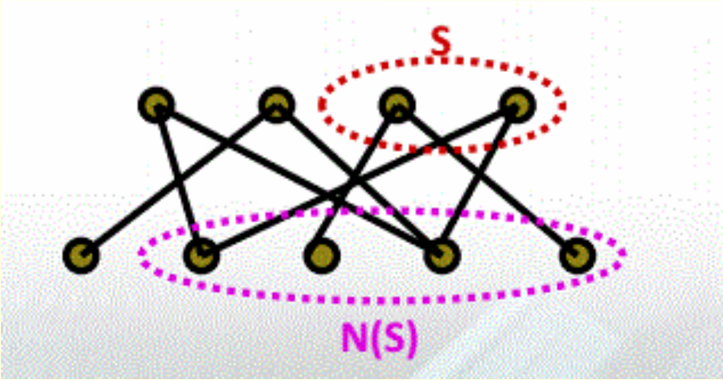
在图 5 中，红边组成各图的一个匹配，(1) 中为完备匹配，(2) 中匹配不是完备的，其实 (2) 中无完备匹配，(3) 中匹配是完备的，也是完美的.

|X|≤|Y|，即完备匹配

定理18.5（Hall定理）设G=(X, Y)是二部图，则G存在 饱和X每个顶点的 匹配的充要条件是：

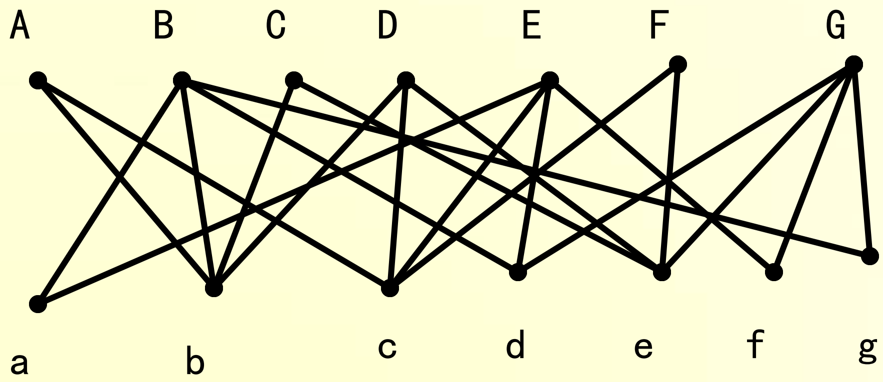
该条件也称为相异性条件

$$对\forall S \subseteq X, 有 |N(S)| \geq |S| \cdots (*)$$



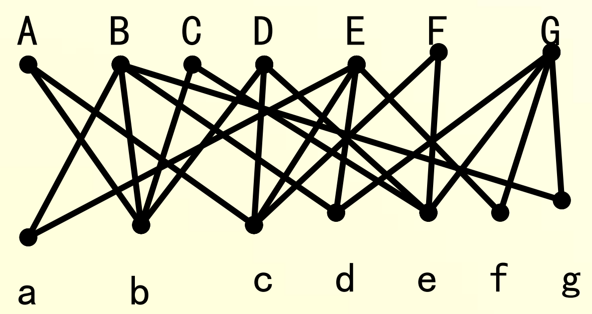
N(S) = { u | ∃v∈S, (v,u)∈E }

例1，图中，是否存在饱和X=｛A, B, C, D, E, F, G｝的每个顶点的匹配？



解：(1) 当S取X中单元点时，容易验证：$|N(S)|>|S|$

(2) 当S取X中二元点集时，容易验证：$|N(S)|\geqq|S|$



(3) 当S取X中三元点集时，容易验证：$|N(S)|\geqq|S|$

(4) 当S取X中四元点集时，若取$S=\{A,C,D,F\}$，则有$3=|N(S)|<|S|=4$

所以，不存在饱和X每个顶点的匹配。

下面我们证明Hall定理。

证明：“必要性”

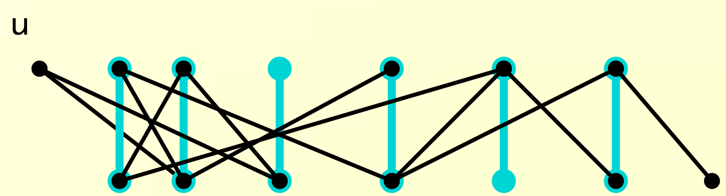
如果G存在饱和X每个顶点的匹配，由匹配的定义，X的每个顶点在Y中至少有一个不同的邻接点，所以:

$$\text{对}\forall S \subseteq X, \text{有} |N(S)| \geq |S|$$

“充分性”

反证法：如果G是满足条件(*)的二部图，但是不存在饱和X每个顶点的匹配。

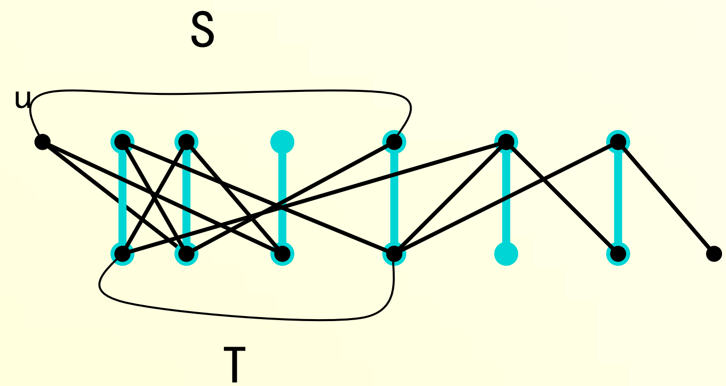
令M*是G的一个最大匹配，但是X的顶点u不是饱和点.



示意图G

又令Z是通过M*与点u相连形成的（从u出发的）所有M*交错路上的点集。

因M*是最大匹配，所以u是所有从u出发的交错路上唯一的一个未饱和点。所以每条交错路径长度为偶数，另一个端点一定在X中。每条路径除了u，其他端点一一对应。



否则形成可增广交错路径，与最大匹配矛盾。

令S=X∩Z ， T=Z∩Y ，

显然，S-｛u｝中点与T中点在M*下配对（一一对应），即：

$$|T| = |S| -1 < |S|$$

即： $|N(S)| = |T| = |S| -1 < |S|$ ，与条件矛盾。

因为是所有的交错路，所以涵盖了所有的N(S)

注：（1） G=(X, Y)存在饱和X每个顶点的匹配也常说成存在由X到Y的匹配。

即完备匹配

（2）Hall定理也可表述为：设G=(X,Y)是二部图，如果存在X的一个子集S,使得|N(S)| < |S| ，那么G中不存在由X到Y的匹配。

（3）Hall定理也称为“婚姻定理”，表述如下：

“婚姻定理”：在一个由r个女人和s个男人构成的人群中，$1 \leqq r \leqq s$。在熟识的男女之间可能出现r对婚姻的充分必要条件是，对每个整数$k(1 \leqq k \leqq r)$,任意k个女人共认识至少k个男人。

（4）Hall定理是在二部图中求最大匹配算法的理论基础，即匈牙利算法基础。

（5）Hall（1904---1982）英国人，20世纪最伟大的数学家之一。主要功绩是在代数学领域。在剑桥大学工作期间，主要研究群论，1932年发表的关于素数幂阶群论文是他最有名的工作。匹配定理是他1935年在剑桥大学做讲师时发表的结果。Hall是一名雅致的学者，对学生特别友好，当他觉得有必要批评学生时，他都会以一种十分温和的方式建议他们改正。

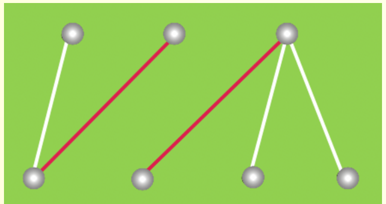
二、Hall 定理

教科书中的说法，本质和之前的说法一致

定理 18.5　（Hall 定理）设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k（$k=1,2,\ldots,|V_1|$）个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.

证明过程和之前的Hall定理证明一样

本定理中的条件常称为“相异性条件”.



(2)

由 Hall 定理立刻可知，图 5 中（2）为什么没有完备匹配.

定理 18.6　设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$中，V_1 中每个顶点至少关联 $t\,(t\ge1)$ 条边，而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

注意：只是充分条件，不是充要条件

证明要点：满足相异性条件. 定理 18.6 中的条件称为 t（$t\ge1$）条件.

V_1中任意k个顶点至少关联到kt条边，而V_2中每个顶点至多关联t条边，所以这kt条边至少关联到V_2中k个顶点。满足相异性条件。

推论：若G是k（k>0）正则二部图，则G存在完美匹配。

证明：一方面，由于G是k（k>0）正则二部图，所以k|X|=k|Y|，于是得|X| = |Y|；

另一方面，对于X的任一非空子集S，设E_1与E_2分别是与S和N(S)关联的边集，显然有：$E_1 \subseteq E_2$ 即：

$$|E_1| = k|S| \leq |E_2| = k|N(S)|$$

即|S|≤|N(S)|

由Hall定理，存在由X到Y的完备匹配。又|X| = |Y|，所以G存在完美匹配。

三、一个应用实例

某课题组要从 a, b, c, d, e 5 人中派 3 人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 a 只想去上海，b 只想去广州，c, d, e 都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案?

解　用二部图中的匹配理论解本题方便.

问题转化为求完备匹配

令 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中 $V_1=\{s, g, x\}$，s, g, x 分别表示上海、广州和香港. $V_2=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v$ 想去 $u\}$. G 如图 6 所示.

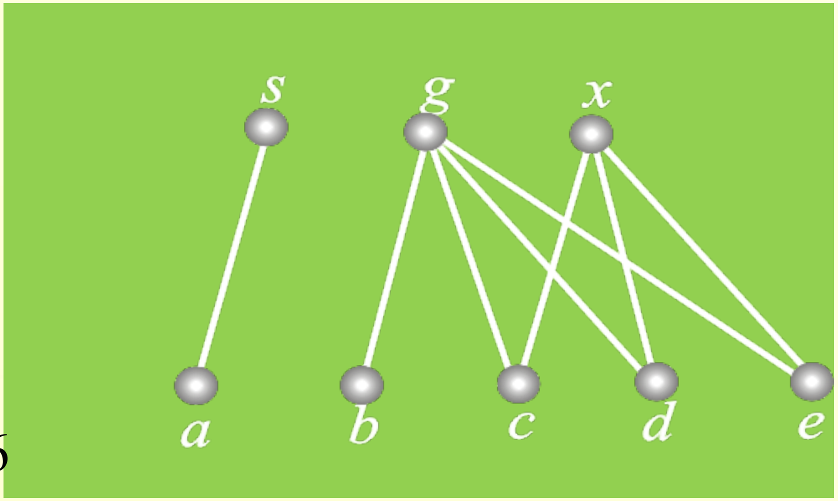


图 6

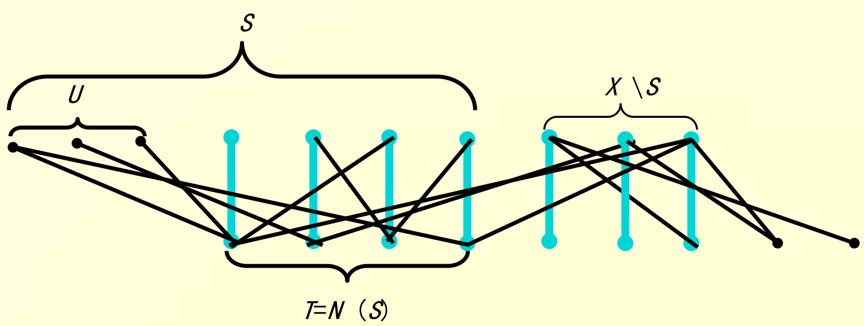
G 满足相异性条件，因而可派遣，共有 9 种派遣方案（请给出这 9 种方案）.

(2)、二部图的点覆盖与二部图匹配间的关系----哥尼定理

定理（哥尼，1931）在二部图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

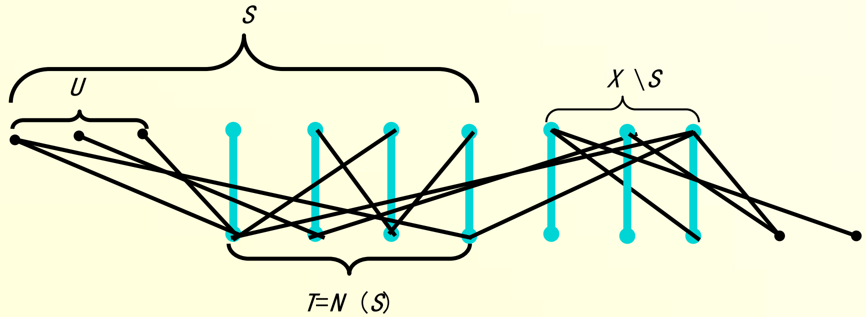
证明：设G=(X, Y)， M*是二部图G的最大匹配。U表示X中M*非饱和点集。Z表示由M*交错路连到U的顶点的所有路上的点作成的集合。且令S=Z∩X, T=Z∩Y。

注意：Z未必包括所有X中的饱和点



参见Hall定理的证明过程：
因为最大，所以不存在可增广交错路径，所以所有路径上除了U中的点，其他点都是饱和点，且通过所有交错路径涵盖了所有的N(S)。

由M*的最大性，T中点是M*饱和的，且N(S)=T。 且(S-U)中的点与T中点在M*下配对（一一对应）



现在，令K* =(X-S)∪T。

可以证明：K* =(X-S)∪T是G的一个点覆盖集。

事实上，若K* =(X-S)∪T不是G的一个覆盖。则存在G的一条边,其一个端点在S中，而另一个端点在Y-T中，这与N(S)=T矛盾！

显然|K*| = |M*|。要覆盖|M*|条匹配边，至少需要|M*|个点，因为任意匹配边之间均不相邻。所以K*是最小覆盖。

T中的每个点与M*中的一条边关联。而X-S中的点也与M*中的一条边关联，且T与X-S没有共享的边属于M*（否则这条边关联的T的这个点同时通过M*关联到S和X-S中的两个点，与M*是匹配矛盾）

哥尼(KÖnig)——第一本图论教材的撰写者

到了1936年，第一本图论教材才与读者见面。作者是哥尼(1884----1944).哥尼早期学习拓扑学，但对图论兴趣特别大。他一直工作在布达佩斯工业大学。讲课很有激情，吸引了很多优秀学生转向图论研究。特别是，他把一起获得匈牙利国家高中数学竞赛一等奖的3个学生都吸引来研究图论，这3个学生是：ErdÖs ,Gallai, Turan.都是伟大的数学家。

哥尼的著作名称是《有限图与无限图理论》。这本书对青年学者产生了很大影响，推动了图论的进一步发展。在20多年时间里，它都是世界上唯一一本图论著作。直到1958年，法国数学家贝尔热(Berge)才出版专著《无限图理论及其应用》。

哥尼1944年为免遭纳碎迫害，只有自杀。

作业

- 8
- 10
- 11
- 17
- 18