

数理逻辑

郑为杰

e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年12月



语言部分

字母表: $\Sigma = L_v \cup L_a \cup L_f \cup L_p \cup L_l$

- 个体变元 L_v : v_1, v_2, v_3, \dots
- 个体常元 L_a : a_1, a_2, a_3, \dots
- 函词 L_f :
 - 一元函词: $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \dots$
 - 二元函词: $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \dots$
 - n 元函词: $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}, \dots$
- 谓词 L_p :
 - 一元谓词: $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \dots$
 - 二元谓词: $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, \dots$
 - n 元谓词: $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, \dots$
- 助记符以及联结词 L_l :
 - 联结词: \rightarrow, \neg
 - 量词: \forall
 - 助记符: $(,)$

FC中的项和公式

$\mathcal{L}(FC)$ 的项:

- (1) 变元和常元是项。
- (2) 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 为项, $f^{(n)}$ 为 n 元函词, 那么 $f^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$ 也为项。
- (3) 除了有限次数使用 (1) 和 (2) 得到的表达式以外, 其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$ 的谓词公式:

- (1) t_1, t_2, \dots, t_n 为项, $P^{(n)}$ 为 n 元谓词符号, 那么 $P^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$ 为原子公式。
- (2) 若 A, B 为公式, v 为任意的变元符号, 那么 $(\neg A), (A \rightarrow B), (\forall v A)$ 都是公式。
- (3) 只有有限次数的使用 (1) 和 (2) 的表达式才是谓词公式。



FC中的项和公式

关于 $\mathcal{L}(FC)$ 的说明：

- (1) 这里的符号是抽象的，并无特别的意义。
- (2) 其它的联结词可以用 \rightarrow, \neg 来表示，存在量词 \exists 可以用 \neg, \forall 来表示。

$$\exists(x)P(x) \Leftrightarrow \neg\forall(x)\neg P(x)$$

- (3) $\mathcal{L}(FC)$ 中没有等词 $=$ ，带有等词的以后展开。
- (4) 不含任何函词的系统称为纯谓词演算系统 ($L_f = \phi$)。
- (5) 在 $\mathcal{L}(FC)$ 中引入命题符号，或者0元谓词符号作为命题符号，这样命题演算系统PC就成了FC的一个子系统。

约定：

- (1) 用 $f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 代替 $f^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$ ，用 $P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 代替 $P^{(n)}t_1t_2 \cdots t_n$ 。
- (2) 最外层的括号可以省略。并且 $\forall v(\exists v)$ 的优先级高于所有的二元联结词和 \neg 同级。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

量词的辖域：公式 A 称为量词 $\forall v(\exists v)$ 的辖域，如果 $\forall v(\exists v)$ 与 A 毗连并且 A 的任何真截断（如果 $A = ww'$, $w' \neq \epsilon$ ，那么我们称 w 为 A 的真截断）都不是公式。

例：

$$(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow R(x, y)$$

约束变元和自由变元：公式 A 中，变元 v 的某个出现叫做约束的出现，如果该变元为 $\forall v(\exists v)$ 的指导变元，并且出现在 $\forall v(\exists v)$ 的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。

A 中约束出现的变元称为约束变元，自由出现的变元称为自由变元。



与FC的项和公式相关的一些基本概念

可代入：设 v 为谓词公式 A 中的自由变元，且项 t 中不含 A 中的约束变元符（若有可易名），则称 t 对 v 是可代入的。

例：

$$(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow R(x, y)$$

将 y 用 $f(z)$ 代入

$$(\forall x)(P(x, f(z)) \rightarrow Q(x, f(z))) \rightarrow R(x, f(z))$$

与FC的项和公式相关的一些基本概念

代入：对公式 A 中的变元 v 的所有自由出现都代换为项 t （ t 对 A 中的 v 是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式 A 的代入实例记为 A_t^v 。如果 A 中没有 v 的自由出现则 A_t^v 就是 A 。用记号 $A_{t_1, t_2, \dots, t_n}^{v_1, v_2, \dots, v_n}$ 表示对 A 中的变元 v_1, v_2, \dots, v_n 同时做代入， v_i 代入为 t_i ，它与顺次代入 $(\dots ((A_{t_1}^{v_1})_{t_2}^{v_2})_{t_3}^{v_3} \dots)_{t_n}^{v_n}$ 是不同的。

$$\begin{array}{c} A = (\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow R(x, y) \\ \downarrow y \text{ 用 } f(z) \text{ 代入} \\ A_{f(z)}^y = (\forall x)(P(x, f(z)) \rightarrow Q(x, f(z))) \rightarrow R(x, f(z)) \end{array}$$

子公式：公式 B 称为公式 A 的子公式，如果 A 形如 wBw' 的符号串，其中 w, w' 是符号串， B 是公式。当 w 和 w' 中有一个不是空串，我们就把 B 称为 A 的真子公式。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

全称化：设 v_1, v_2, \dots, v_n 为公式 A 的所有的自由变元，那么公式

$\forall v_{i_1}, \forall v_{i_2}, \dots, \forall v_{i_r} A$ 称为 A 的全称化。其中 $1 \leq r \leq n, 1 \leq$

$i_1, i_2, i_r \leq n$ ，公式 $\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$ 称为公式 A 的全称封闭式。

当 A 无自由变元时， A 的全程封闭式就是它本身。不含自由变元的公式称为命题，FC中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。



一阶谓词演算系统FC的推理部分

FC的理论部分称为一阶逻辑，用 $J(FC)$ 表示。

公理集合，由下列公式及其所有的全称化组成：

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A_4: \forall v A \rightarrow A_t^v \quad (t \text{ 对 } A \text{ 中的变元 } v \text{ 可代入})$$

$$A_5: \forall v (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$$

$$A_6: A \rightarrow \forall v A \quad (v \text{ 在 } A \text{ 中无自由出现})$$

推理规则

$$r_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

FC中的定理，证明以及演绎，演绎结果的定义与PC中是一样的！

FC的基本定理

定理1 (定理5.2.1) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow A$$

定理2 (定理5.2.2) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\vdash_{FC} A \rightarrow \neg \forall v \neg A \quad (\text{也即 } \vdash_{FC} A \rightarrow \exists v A)$$

定理3 (定理5.2.3) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow \exists v A$$

定理4 (定理5.2.4) : (全称推广定理) 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\text{如果 } \vdash A, \text{ 那么 } \vdash \forall v A$$

定理5 (定理5.2.5) : (全称推广定理) 对于FC中的任何公式集合 Γ , 公式 A , 以及不在 Γ 的任意公式里自由出现的变元 v :

$$\text{如果 } \Gamma \vdash A, \text{ 那么 } \Gamma \vdash \forall v A$$



定理1

定理5.2.1：对于FC中的任何公式 A ，变元 v ： $\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow A$

证明： $\forall v A \rightarrow A_t^v$ （公理4）

$\forall v A \rightarrow A$ （是公理4的一种特例，即令 $t = v$ ，则 $A_t^v = A_v^v = A$ ）



定理2

定理5.2.2: 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\vdash_{FC} A \rightarrow \neg \forall v \neg A \quad (\text{也即 } \vdash_{FC} A \rightarrow \exists v A)$$

证明:

- (1) $\forall v \neg A \rightarrow \neg A$ FC中定理1
- (2) $(\forall v \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg \forall v \neg A)$ PC中定理15
- (3) $A \rightarrow \neg \forall v \neg A$ (1)(2)用rmp分离规则
- (4) $A \rightarrow \exists v A$



定理3

定理5.2.3: 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow \exists v A$$

证明:

- (1) $\forall v A \rightarrow A$ FC中定理1
- (2) $A \rightarrow \exists v A$ FC中定理2
- (3) $\forall v A \rightarrow \exists v A$ (1)(2)用PC中三段论定理8



定理4

定理5.2.4: (全称推广定理) 对于FC中的任何公式 A , 变元 v :

如果 $\vdash A$, 那么 $\vdash \forall v A$

证明: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A)$ 是FC中公式 A 的证明序列, 对该证明序列的长度 n 用归纳法。

(1) 当 $n = 1$ 时, A 只能是公理。

- 若 v 在 A 中有自由出现, 那么 $\forall v A$ 是 A 的全称化, $\forall v A$ 也是公理;
- 若 v 在 A 中无自由出现, 则 $A \rightarrow \forall v A$ 为公理6, 那么由 A 和 $A \rightarrow \forall v A$ 通过rmp分离规则, 知 $\forall v A$ 为定理。

(2) 假设 A 的证明序列长度小于 n 时, 结论成立

(3) 则当 A 的证明序列长度为 n 时:

- 若 A 是公理, 则仿照(1)的证明知 $\forall v A$ 为定理。
- 若 $A_n (= A)$ 为 $A_j (j < n)$, 则由归纳假设知 $\forall v A_j = \forall v A$ 为定理。
- 若 A_n 为 $A_i, A_j (i, j < n)$ 分离而得, 不妨设 $A_j = A_i \rightarrow A$, 则由归纳假设 $\forall v A_i, \forall v (A_i \rightarrow A)$ 都是定理。再由公理5: $\forall v (A_i \rightarrow A) \rightarrow (\forall v A_i \rightarrow \forall v A)$, 知 $\forall v A_i \rightarrow \forall v A$ 为定理。再由 $\forall v A_i$ 和 $\forall v A_i \rightarrow \forall v A$ 使用分离规则, 知 $\forall v A$ 为定理。

定理5

定理5.2.5: (全称推广定理) 对于FC中的任何公式集合 Γ , 公式 A , 以及不在 Γ 的任意公式里自由出现的变元 v :

如果 $\Gamma \vdash A$, 那么 $\Gamma \vdash \forall v A$

证明: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A)$ 是FC中公式 A 的演绎序列, 对该演绎序列的长度 n 用归纳法。

(1) 当 $n = 1$ 时

- 若 A 是公理, 则参照前面的定理证明知 $\forall v A$ 是定理, 从而 $\Gamma \vdash \forall v A$;
- 若 $A \in \Gamma$, 则 v 不在 A 中自由出现, $A \rightarrow \forall v A$ 为公理6, 由rmp分离规则知 $\Gamma \vdash \forall v A$ 。

(2) 假设 A 的演绎序列长度小于 n 时, 结论成立

(3) 当 A 的演绎序列长度为 n 时

- 若 A 是公理或 $A \in \Gamma$, 则仿照(1)的证明知 $\Gamma \vdash \forall v A$ 。
- 若 A_n 为 $A_j (j < n)$, 则由归纳假设知 $\Gamma \vdash \forall v A_j = \forall v A$ 。
- 若 A_n 为 $A_i, A_j (i, j < n)$ 推得, 不妨设 $A_j = A_i \rightarrow A$, 则由归纳假设 $\Gamma \vdash \forall v A, \Gamma \vdash \forall v (A_i \rightarrow A)$ 。再由公理5: $\forall v (A_i \rightarrow A) \rightarrow (\forall v A_i \rightarrow \forall v A)$ 知 $\Gamma \vdash \forall v A_i \rightarrow \forall v A$ 。由分离规则知 $\Gamma \vdash \forall v A$ 。

FC的基本定理

定理1 (定理5.2.1) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v : ✓

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow A$$

定理2 (定理5.2.2) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v : ✓

$$\vdash_{FC} A \rightarrow \neg \forall v \neg A \quad (\text{也即 } \vdash_{FC} A \rightarrow \exists v A)$$

定理3 (定理5.2.3) : 对于FC中的任何公式 A , 变元 v : ✓

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow \exists v A$$

定理4 (定理5.2.4) : (全称推广定理) 对于FC中的任何公式 A , 变元 v : ✓

如果 $\vdash A$, 那么 $\vdash \forall v A$

定理5 (定理5.2.5) : (全称推广定理) 对于FC中的任何公式集合 Γ , 公式 A , 以及不在 Γ 的任意公式里自由出现的变元 v : ✓

如果 $\Gamma \vdash A$, 那么 $\Gamma \vdash \forall v A$

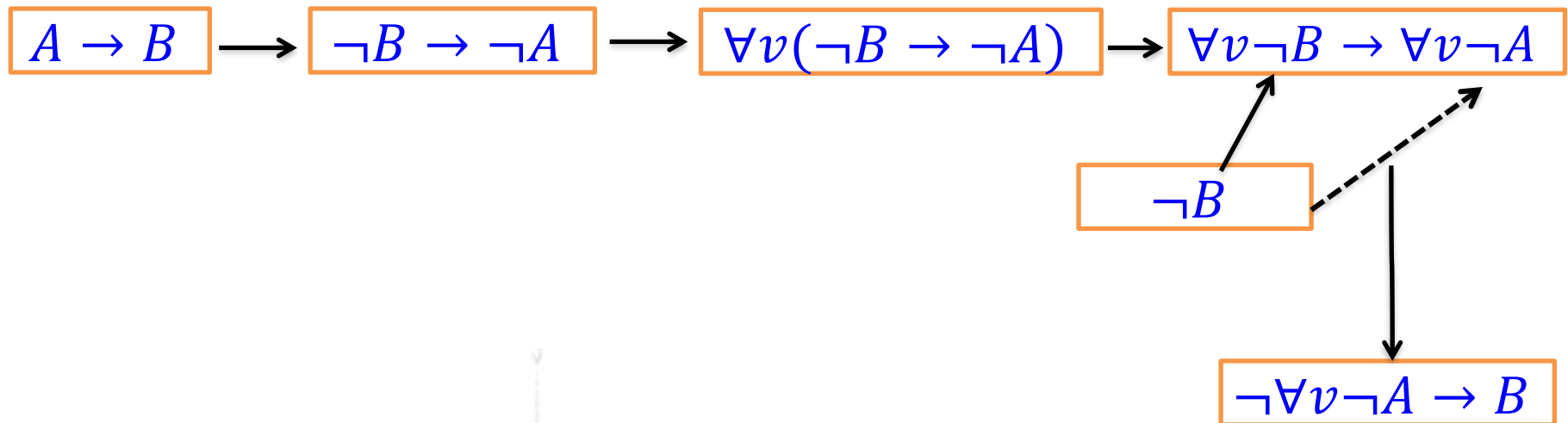


例1

例5.2.1：若 $\vdash A \rightarrow B$ ，且 v 在 B 中无自由出现，则：

$$\vdash \exists v A \rightarrow B$$

证明思路：



例1

例5.2.1：若 $\vdash A \rightarrow B$ ，且 v 在 B 中无自由出现，则 $\vdash \exists v A \rightarrow B$ 。

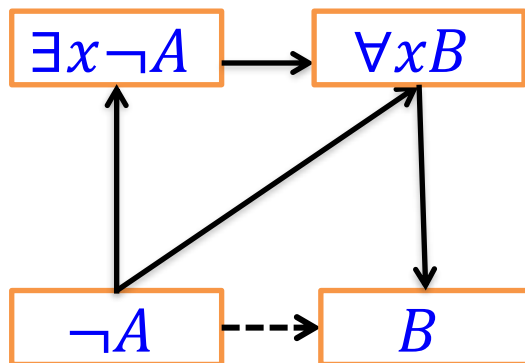
证明：

- (1) $A \rightarrow B$ 已知定理
- (2) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ PC中定理13
- (3) $\neg B \rightarrow \neg A$ (1) 和 (2) 用rmf分离规则
- (4) $\forall v(\neg B \rightarrow \neg A)$ 对 (3) 用FC中的（全称推广）定理4
- (5) $\forall v(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\forall v \neg B \rightarrow \forall v \neg A)$ 公理5
- (6) $\forall v \neg B \rightarrow \forall v \neg A$ (4) 和 (5) 用rmf分离规则
- (7) $\neg B \rightarrow \forall v \neg B$ 公理6
- (8) $\neg B \rightarrow \forall v \neg A$ (7) 和 (6) 用PC中的三段论定理8
- (9) $(\neg B \rightarrow \forall v \neg A) \rightarrow (\neg \forall v \neg A \rightarrow B)$ PC中定理14
- (10) $\neg \forall v \neg A \rightarrow B$ (8) 和 (9) 用rmf分离规则
- (11) $\exists v A \rightarrow B$ 定义式

例2

例5.2.2: $\exists x \neg A \rightarrow \forall x B \vdash \forall x (\neg A \rightarrow B)$

证明思路:



例2

例5.2.2: $\exists x \neg A \rightarrow \forall x B \vdash \forall x (\neg A \rightarrow B)$

证明:

(1) $\neg A \rightarrow \exists x \neg A$ 定理2

(2) $\forall x B \rightarrow B$ 定理1

(3) $(\neg A \rightarrow \exists x \neg A) \rightarrow ((\exists x \neg A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \forall x B))$ PC中加后件定理5

(4) $(\exists x \neg A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \forall x B)$ (1) 和 (3) 用分离规则

(5) $(\forall x B \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ PC中加前件定理4

(6) $(\neg A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (2) 和 (4) 用分离规则

(7) $(\exists x \neg A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (4) 和 (6) 用PC中的三段论定理8

(8) $\exists x \neg A \rightarrow \forall x B \vdash \neg A \rightarrow B$ PC中演绎推理

(9) $\exists x \neg A \rightarrow \forall x B \vdash \forall x (\neg A \rightarrow B)$ FC中全称推广定理5