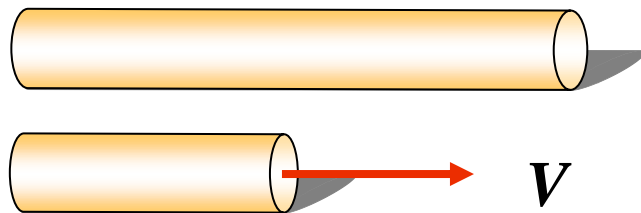


设 在S系中某时刻 t 同时测得棒两端坐标为 x_1 、 x_2 ，
则S系中测得棒长 $l = x_2 - x_1$ ， l 与 l_0 的关系为：

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - vt) - (x_1 - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



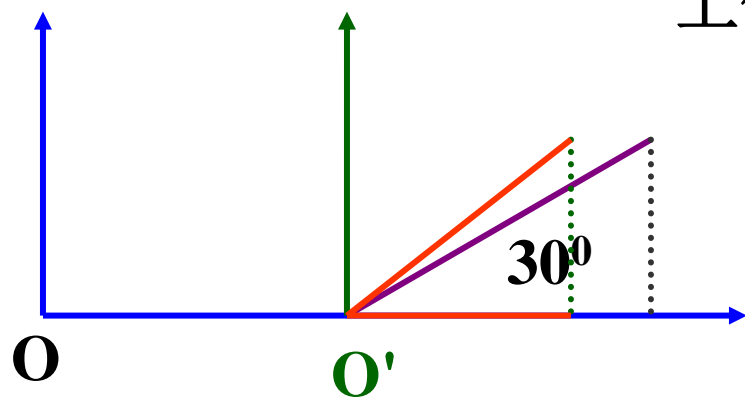
1 长度收缩 $l < l_0$

2 如将物体固定于S系，由S'系测量，同样出现长度收缩现象。

结论：长度具有相对意义

例：一根米尺静止放在S'系中，与O'x'轴成 30° 角，如果在S系中测的米尺与Ox轴成 45° 角，那么，S'系相对与S系的速度 v 为多大？S系中测得的米尺的长度是多少？

解：x方向上米尺长度收缩，y方向上保持不变。



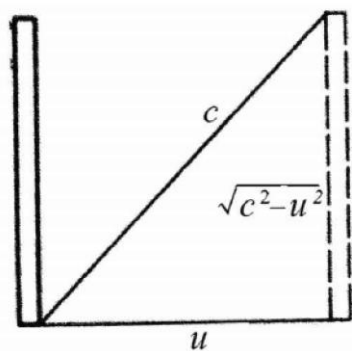
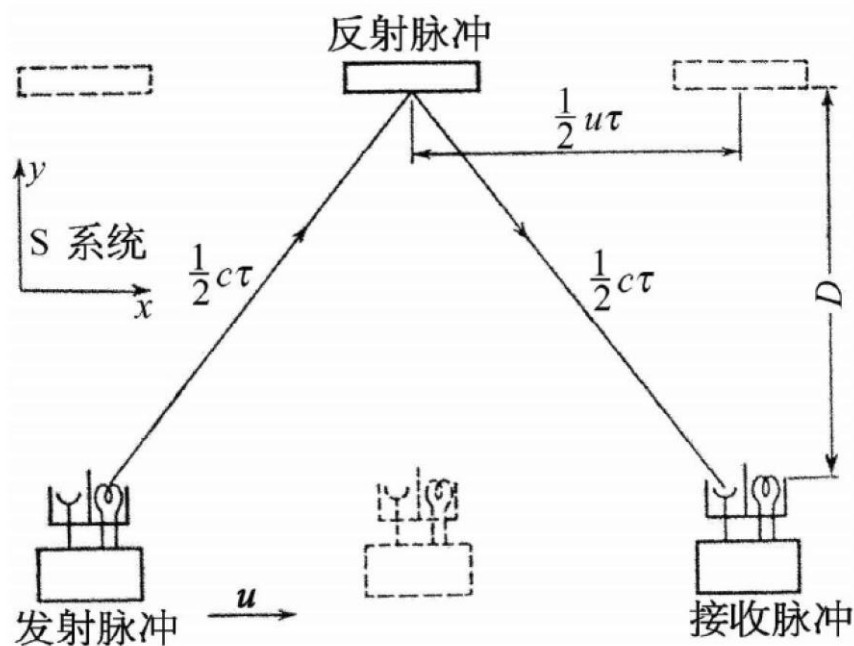
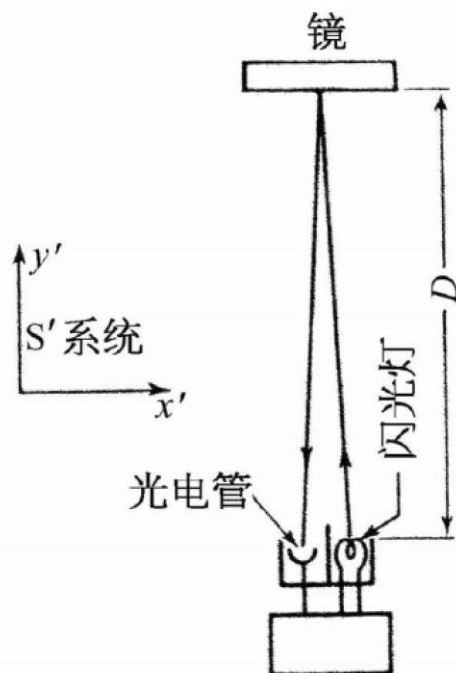
$$x = x_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$y = x \tan 45^\circ = x_0 \tan 30^\circ = y_0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0} = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad v^2 = \frac{2}{3}c^2 \Rightarrow v = 0.816c$$

$$l = \sqrt{2}y = \sqrt{2}l_0 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}l_0 = 0.707l_0$$

三、时间的相对性 (运动的时钟变慢)



运动钟内光来回跑动的时间要长于静止钟内的时间。

因此，对于运动钟来说，滴答声之间的表观时间以与图中所示的直角三角形的斜边同样的比例增长。

S'系 $A'(x'_1, t'_1)$ $B'(x'_2, t'_2)$

$x'_1 = x'_2 = x'_0$ 同一地点两事件时间间隔 $\tau_0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1$

原时：同一地点发生事件的时间间隔

$$\text{S系} \quad t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tau = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \tau_0 .$$

在所有参考系中，**原时最短**。运动的**时钟变慢**。

例： 问飞船上讲一节课用 1 小时，地球上用几小时？

	飞 船	地 球
$\frac{v}{c}$	$\tau_0 = t_2' - t_1'$	$\tau = t_2 - t_1$
0.1	1 (小时)	1.005 小时
0.9998	1 (小时)	50 小时

例 在惯性系S中的同一地点发生两个事件，事件B比事件A晚4 s发生。在另一个惯性系S'中观察，事件B比事件A晚5s发生，问这两个参考系的相对速度多大？在S'系中这两个事件发生的地点相距多远？（设S'系以恒定速率 u 相对S系沿x轴运动。）

分析：这是相对论中同地不同时的两个事件的时空转换问题。根据时间延缓效应的关系式可以求出两个参考系的相对运动速度，从而可以求得在S'系中两个事件发生地点的间距。

解：两个参考系的相对速度为 u ，则根据题意

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4s;$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 5s$$

由时间延缓效应的关系式

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

可以得到：

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{16}{25}$$

即：

$$u = \frac{3}{5}c$$

设这两个事件在S'系中的时空坐标为 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2')

则由洛伦兹变换得到：

$$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

由于这两个事件在S系发生在同一地点，即 $x_1 = x_2$ ，于是有：

$$|x_2' - x_1'| = u |t_1' - t_2'| = 9 \times 10^8 m$$

即在S'系中观察这两个事件发生在不同地点，他们在相对速度方向上相距 $9 \times 10^8 m$ 。

§ 4 狭义相对论动力学基础

动力学基础包括两个方面的内容：

- 1) 物理量的定义（一个参考系中的问题）
- 2) 物理规律的变换（两个参考系的问题）

如何定义物理量？

必须满足两个基本原则：

- 1) 基本规律在洛伦兹变换下形式不变

动量定理（守恒定律）动能定理（能量守恒）等

- 2) 低速时回到牛顿力学

一、相对论质量与动量

假如相对论成立，那么首先需要变化的就是牛顿定律，使它们在洛伦兹变换下保持不变。为了使牛顿定律能够符合洛伦兹变换，爱因斯坦发现，当一个物体相对于一个参照系以速度 v 匀速运动时，他必须对物体的质量也同时做出如下变换：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

从变换中可以直观地得出，相对于对参照系静止的物体（质量为 m_0 ），速度为 v 的物体具有的质量 m 比较大。

1) 合理性 (速度愈高质量值愈大)

$$v = 0.98c$$

$$m = 5m_0$$

$$v = 0.99c$$

$$m = 7.09m_0$$

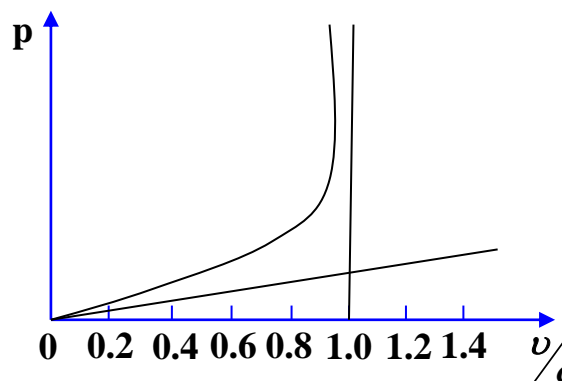
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2) 特殊情况下可理论证明, 归根结底是实验证明

3) 由于空间的各向同性质量与速度方向无关

4) 相对论动量

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



二、相对论动力学的基本方程

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

相对论中仍然保持了牛顿定律的原来框架。

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

注意： 1)

$$v \ll c, \quad m = m_0 = \text{const} \quad \vec{F} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

2) 方程虽保持了原牛顿定律的框架，但内容却有别

	经典力学	相对论力学
力的作用	产生 \vec{a} ,改变速度	改变速度、质量
F 长时间作用	$v \rightarrow \infty$	$v \uparrow m \uparrow, v < c, m \rightarrow \infty$
力的方向	决定于 $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$	决定于 $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$ 合矢量方向

三、相对论的能量

推导一：基本出发是动能定理，令质点从静止开始，力所做的功就是动能表达式（见教材）

推导二：能量形式的定义：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

当速度较小时，这个算式中的平方根一项可以做级数展开近似：

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

$$m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

现在在这个式子的两边同时乘以 c^2 ：

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

在这个公式中，右边的最后一项是经典力学中，当一个质量为 m_0 的物体以速度 v 运动时物体的动能。那么很显然，公式中的其他两项应当也是某种能量的形式——爱因斯坦将公式左边的 mc^2 定义为一个物体具有的总能量，即：

$$E = mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

质能方程

现在，我们定义了一种新的能量形式：质能。爱因斯坦在狭义相对论中提出了物体的质量与能量的关系，即著名的质能方程：

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k$$

在这个方程中，他定义 mc^2 为物体具有的总能量， m_0c^2 为物体具有的静止能量（静能）， E_k 为物体所具有的动能。

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$



四、相对论质能关系

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} E_k \text{ 运动时的动能} \\ m_0c^2 \text{ 静止时的能量} \end{array} \right.$$

$$E = E_k + m_0c^2 = mc^2$$

$$E = mc^2 \quad \text{质能关系式}$$



为粒子以速率 v 运动时的总能量

质能关系预言：物质的质量就是能量的一种储藏。

$$\text{核裂变能} \quad \Delta E = \Delta m_0 c^2 \longrightarrow \text{原子能公式}$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$E = mc^2$$

讨论:

1. $E_{\text{静}} = m_0c^2$ 任何宏观静止的物体都具有能量

2. 在相对论中, **能量守恒**和**质量守恒**统一起来。

$$\sum_i E_i = \sum_i m_i c^2 = \text{常量} \quad \text{—— 能量守恒}$$

$$\sum_i m_i = \text{常量} \quad \text{—— 质量守恒}$$

3. 粒子相互作用中相对论质量 $\sum_i m_i(v)$ 守恒,
但其静止质量 $\sum_i m_{0i}$ 并不守恒。

4. $E = mc^2$ 可认为**质量和能量是一个事物的两个方面**
高能物理中, 把质量按能量称呼

电子质量是 0.511MeV

$$m_0c^2 = 0.511\text{MeV}$$

例 两个静止质量为 m_0 全同粒子以相同的速率 v 相向运动，碰后复合**求**：复合粒子的速度和质量。

解：设复合粒子质量为 M 速度为 \vec{V} ，碰撞过程，动量守恒

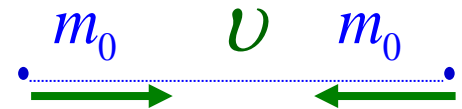
$$m\vec{v} - m\vec{v} = M\vec{V}$$

→ $V = 0$ （碰后静止）

由能量守恒

$$2mc^2 = M_0c^2$$

→ $M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 2m_0$ 质量过剩



例：一个质子与一个中子结合成一个氘核时，质量亏损为：

$$\Delta m = \sum_i m_{0i} - M_0 = [(1.673 + 1.675) - 3.344] \times 10^{-27} = 4.0 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

相应的氘核的结合能：

$$E_B = \Delta m c^2 = 3.564 \times 10^{-13} \text{ J}$$

聚合成1kg氘核所能释放出来的能量为：

$$\frac{E_B}{m_{0d}} = \frac{3.56 \times 10^{-13}}{3.34 \times 10^{-27}} = 1.07 \times 10^{14} \text{ J / kg}$$

相当于1kg汽油燃烧时所放出热量 $4.6 \times 10^7 \text{ J / kg}$ 的230万倍。

五、相对论动量与能量的关系

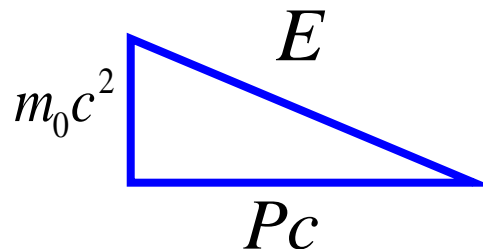
由

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

两边平方得

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4$$



$$\because E = E_k + m_0 c^2 \quad \therefore E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

$$v \ll c, \quad E_k \ll m_0 c^2$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

讨论:

可能存在“无质量”粒子 ($m_0 = 0$)

只具有动量、能量, 没有静止质量, 所以也没有静能

光子能量 $E = Pc$

光子动量 $P = \frac{E}{c}$

光子质量 $m = \frac{E}{c^2} = \frac{P}{c}$

**六、广义相对论简介

孪生子佯谬

假定彼得（Peter）和保罗（Paul）是同时出生的一对孪生子，当他们成长到能操纵宇宙飞船时，保罗以很快的速度飞了出去，彼得则仍留在地面。由于彼得看到保罗运动得这么快，所以从彼得的观点看来，保罗的钟似乎走慢了。当然，保罗自己并没有感到出现任何异常情况，但是如果他在外面漫游了一段时间之后再回到地面，他将比在地面上的彼得年轻！这是相对论的结论之一，而相对论是被清楚地证实了的。

然而，运动是相对的——从保罗的观点看来，难道我们不是也可以说彼得正在运动，因而他应当衰老得慢一点吗？

这个“佯谬”的突破点在于：要比较保罗和彼得的年龄，他们必须处于同一时空之中——换句话说，他们所处的时空，时间的流逝和空间的度量必须保持一致，即他们必须重新进行一次“相遇”。

而要重新进行“相遇”，只存在两种可能：1. 保罗的飞船掉头返回地球；2. 保罗的飞船“停”下来，相对地球静止。无论哪种可能，保罗的飞船的速度将发生改变，速度的改变意味着加速度的产生，这个加速度，对于保罗和彼得是不一样的——飞船上的保罗可以很明确地感受到加速度的变化，地球上的彼得则什么都感觉不到。这是保罗和彼得在“绝对”意义上的一个差别，感觉到加速度的那个人，才是比较年轻的一个。而这个加速度的产生，则意味着一个更重要的事情：相对于地球，飞船从惯性系变为非惯性系了。

广义相对论

1915年，爱因斯坦在狭义相对论的基础上，针对非惯性系的运动提出了广义相对论。广义相对论的核心内容可以简单地概括为：

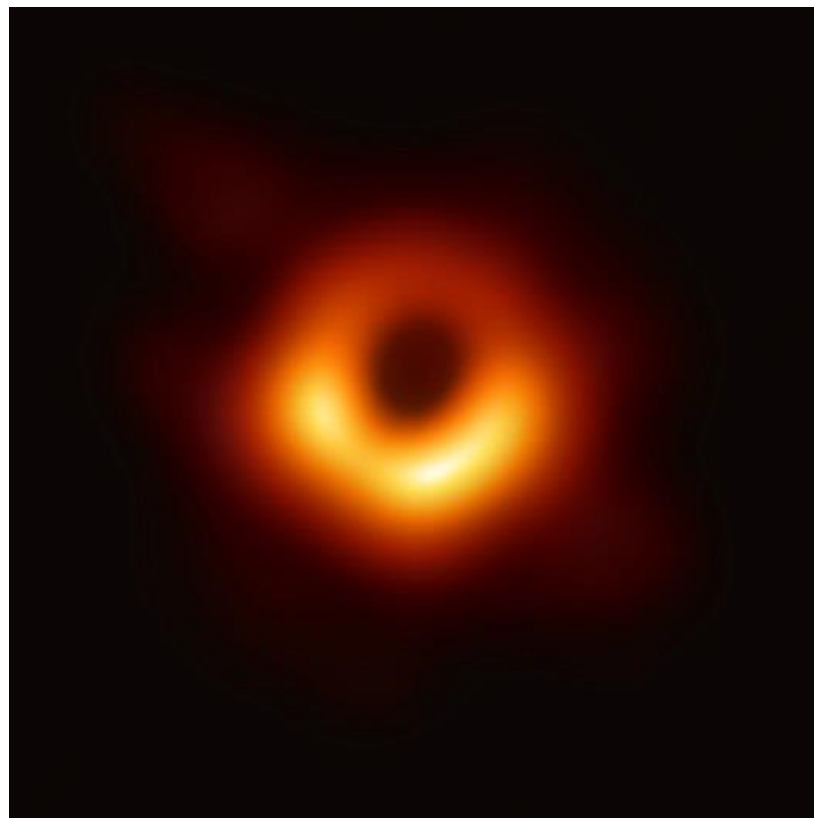
1. 所有的物理定律在**任何参考系**（惯性系或非惯性系）中都具有相同的形式。
2. 物体的惯性质量与物体的引力质量具有等效性，即惯性力与引力等效。

在黎曼几何的基础上，爱因斯坦提出了广义相对论中关于时空和引力重要定理：物体的质量和能量的分布能够使物体周围的时空发生了弯曲。这种弯曲等效于引力的效应，爱因斯坦称之为**引力场**。

具有巨大质量物体的引力场——黑洞

根据广义相对论，具有足够大质量的物体可以扭曲时空，当时空扭曲到一定程度，时空展现出引力场的加速度将会极端强大，以至于形成光都无法逃逸的区域，即我们所说的黑洞区域。不可能从该区域逃离的边界称为事件视界。

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{引力半径}$$



在巨大椭圆星系M87核心的超大质量黑洞，质量大约是太阳70亿倍，图为事件视界望远镜发布的第一张黑洞图片
(2019年4月10日)

具有巨大质量物体的引力场——黑洞

Astronomers reveal first image of the black hole at the heart of our galaxy

May 12, 2022: Astronomers have unveiled the first image of the supermassive black hole at the centre of the Milky Way galaxy.

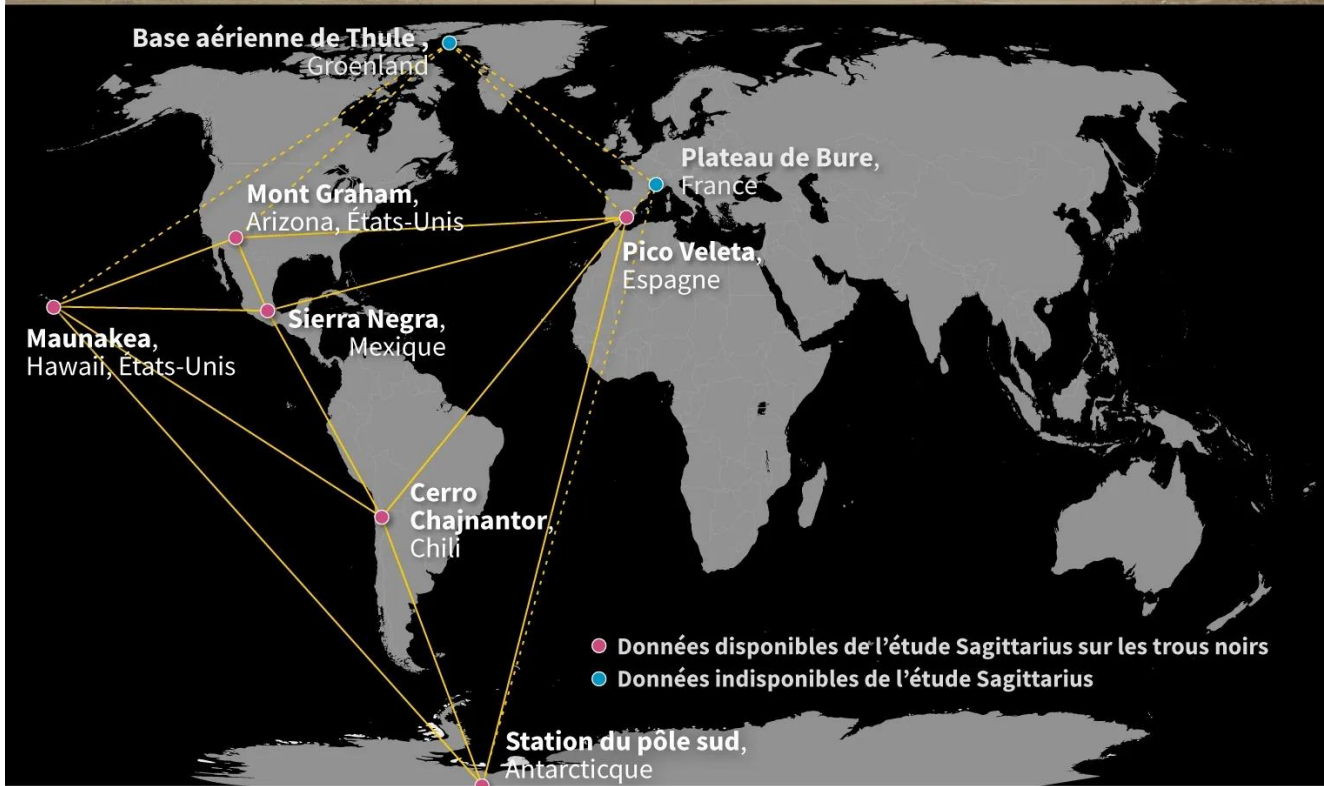
北京时间2022年5月12日晚9时许，包括中国在内的全球多地天文学家同步公布了这个超大质量黑洞——人马座 A*

(Sgr A*) 的照片。这是人类“看见”的第二个黑洞，也是银河系中心超大质量黑洞真实存在的首个直接视觉证据。这个超大质量黑洞距离太阳系约2.7万光年，质量超过太阳质量的400万倍。



Le réseau Event Horizon Telescope

Le télescope virtuel de la taille de la Terre, a saisi la 1^{ère} image d'un trou noir au centre de la Voie lactée

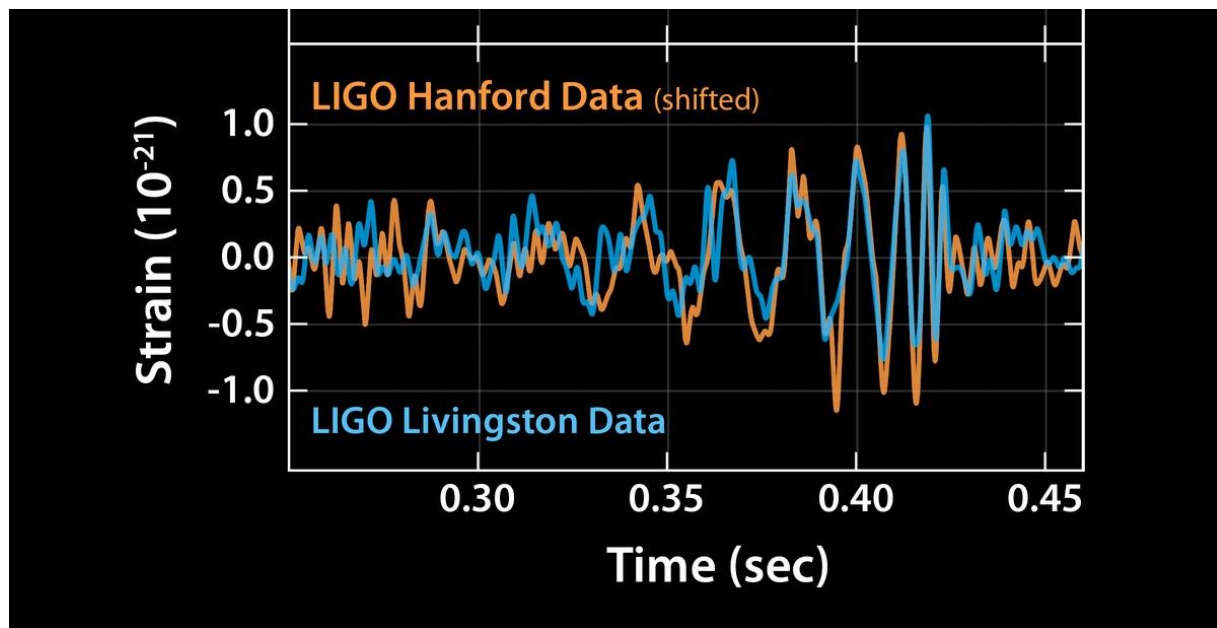


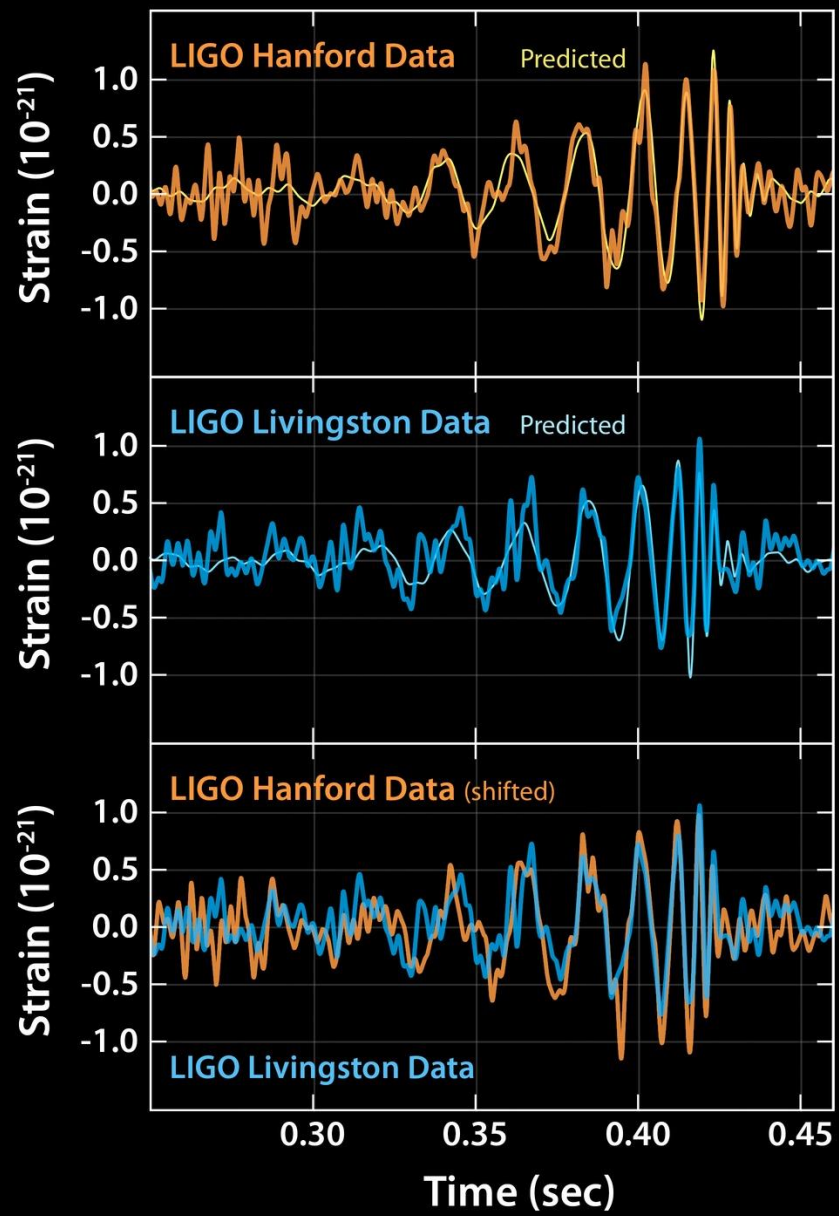
Sources : eventhorizontelescope.org, eso.org



引力波

与电场一样，爱因斯坦预测，引力场的变化将产生引力波，而**引力波的传播速度应当与光速相同**。他于**1916年**预测了引力波的存在，此后许多物理学家致力于用实验证实这一点。然而，由于引力波本质上是时空的变化，即不与任何物质进行相互作用，且其变化通常非常微弱，因此，在爱因斯坦预测引力波之后的百年时间中，人类都没有证实引力波的存在，直到百年之后的**2016年**。





引力波探测器：LIGO（美国）

激光干涉引力波天文台（**Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO**）是探测引力波的一个大规模物理实验和天文观测台，它包括两个分部建于美国华盛顿州汉福德与路易斯安那州利文斯顿的激光干涉仪，每个干涉臂臂长4千米。

LIGO Livingston



LIGO Hanford



引力波探测器：VIRGO（欧洲）

VIRGO interferometer是位于意大利比萨附近的一个激光干涉引力波探测仪，由五个国家实验室的科学合作组织所组成：法国、意大利、荷兰、波兰与匈牙利。在地球上，通过**VIRGO**和**LIGO**系统中总计三个引力波干涉仪，科学家便可以精准地确定太空中引力波事件的发生位置。



2017年10月16日：引力波事件GW170817

GW170817是LIGO和VIRGO在2017年8月17日观测到的引力波事件，其出自于两个中子星并合在一起。在此之前观测到的几次引力波事件都是出自于两个黑洞合并，而科学家预测黑洞并合将不会产生任何相关的电磁波信号。这次的中子星并合事件产生的后续电磁现象被地球上很多种不同波段的望远镜观测到。通过各个天文台对GW170817事件的观察结果，科学家可以证明，引力波与电磁波的传播速度相等，爱因斯坦的广义相对论得到了充分地证实。

This app is available only on the App Store for iPhone.



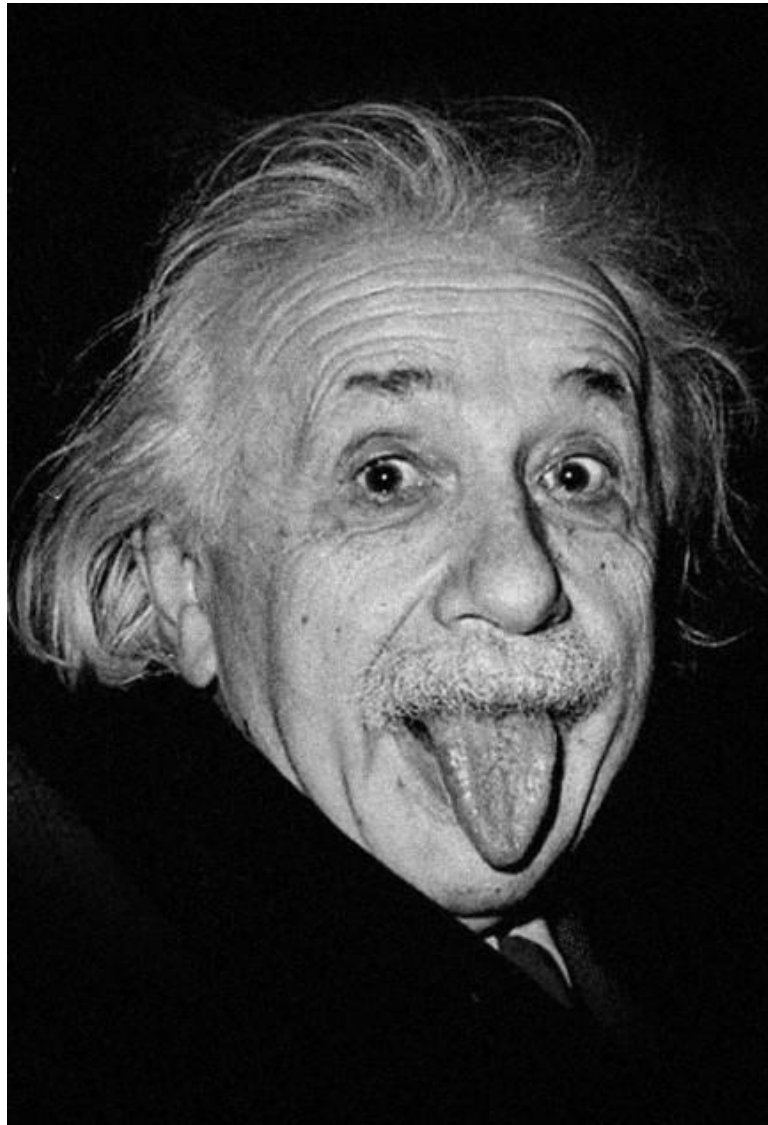
Gravitational Wave Events 4+

LIGO/Virgo alerts from GCN

[Peter Kramer](#)

★★★★★ 4.7, 18 Ratings

Free



Gravitation is not responsible
for people falling in love.

- *Albert Einstein*

