

图的顶点着色

(一)、相关概念

(二)、图的点色数的几个结论

(三)、四色与五色定理

(四)、顶点着色的应用

一、关于顶点着色的基本概念

一般针对无环的无向图而言

定义 18.8

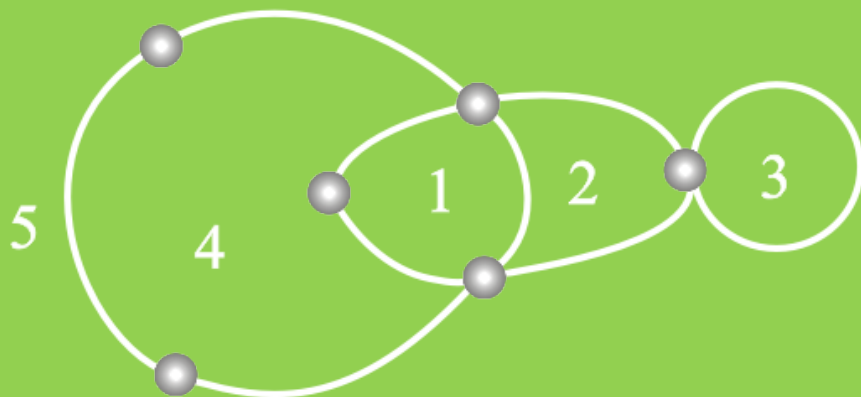
- (1) 图 G 的一种着色——给图 G 的每个顶点涂上一种颜色，使相邻顶点具有不同颜色
- (2) 对 G 进行 k 着色 (G 是 k -可着色的) ——能用 k 种颜色给 G 的顶点着色
- (3) G 的色数 $\chi(G)=k$ —— G 是 k -可着色的，但不是 $(k-1)$ -可着色的.

一、地图与面着色

1. 地图与国家

- 定义
- (1) 地图——连通无桥平面图（嵌入）与所有的面
 - (2) 国家——地图的面
 - (3) 两个国家相邻——它们的边界至少有一条公共边

在图 13 所示地图中，有 5 个国家，其中 1 与 2 相邻，1 与 4 相邻，2,3,4 均与 5 相邻.



2. 地图的面着色

定义 18.9

- (1) 地图 G 的面着色——对 G 的每个国家涂上一种颜色，相邻国家涂不同颜色
- (2) G 是 k -面可着色的——能用 k 种颜色给 G 的面着色
- (3) G 的面色数 $\chi^*(G)=k$ ——最少用 k 种颜色给 G 的面着色.

二、地图的面着色转化成对偶图的点着色

定理 18.9 地图 G 是 k -面可着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k -点可着色的.

证明简单

地图上的国家与它的对偶图的顶点一一对应，且两个国家相邻当且仅当对应的顶点相邻。另外，地图无桥，所以对偶图无环。满足点着色条件。
因此，地图着色可归结于平面图的点着色。

图着色的应用

图着色的应用：

当试图在有冲突的情况下分配资源时，就会产生这个问题。

例如：有 n 项工作，每项工作需要一天的时间完成，有些工作需要相同的人员或者设备不能同时进行，问至少需要几天才能完成所有的工作？

用图描述：

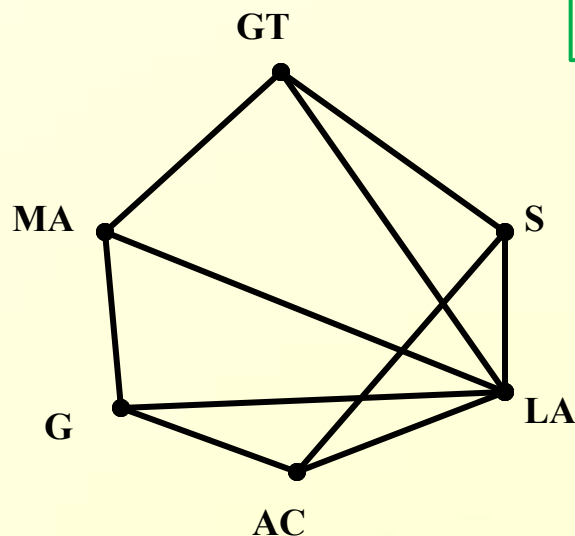
用顶点表示工作，如果两项工作需要相同的人员或者设备，就用一条边连接对应的顶点。那么工作的时间安排对应于这个图的点着色：着同一种颜色的顶点对应的工作可以安排在同一天，所需要的最少天数正好是这个图的色数。

课程安排问题：某大学数学系要为此个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT), 统计学(S), 线性代数(LA), 高等微积分(AC), 几何学(G), 和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息, 确定开设这些课程所需要的最少时间段数, 使得学生选课不会发生冲突。(学生用 A_i 表示)

A_1 : LA, S ; A_2 : MA, LA, G ; A_3 : MA, G, LA;
 A_4 : G, LA, AC ; A_5 : AC, LA, S ; A_6 : G, AC;
 A_7 : GT, MA, LA ; A_8 : LA, GT, S ; A_9 : AC, S, LA;
 A_{10} : GT, S。

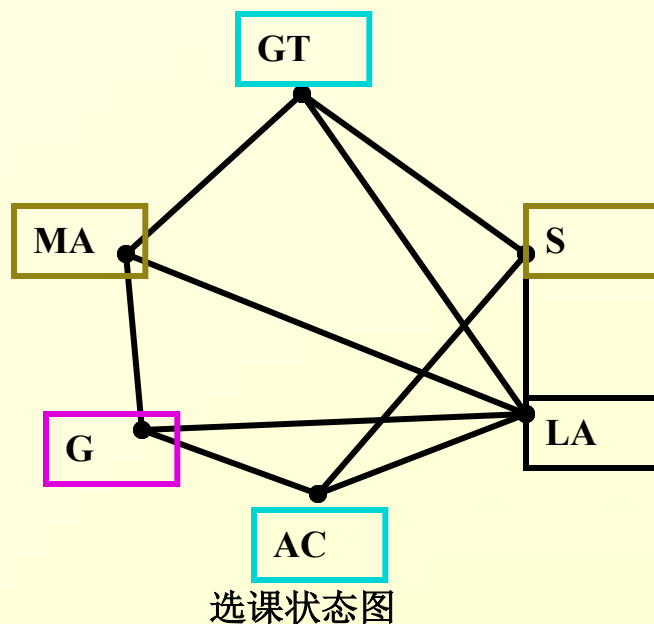
把课程模型为图 G 的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。

同一个学生选的不同课程不能在同时段上课

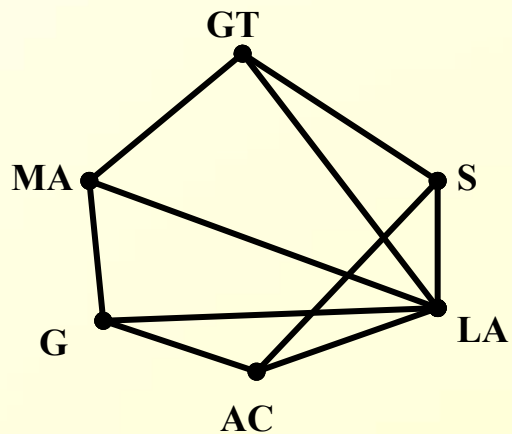


选课状态图

如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求所谓的点色数问题。



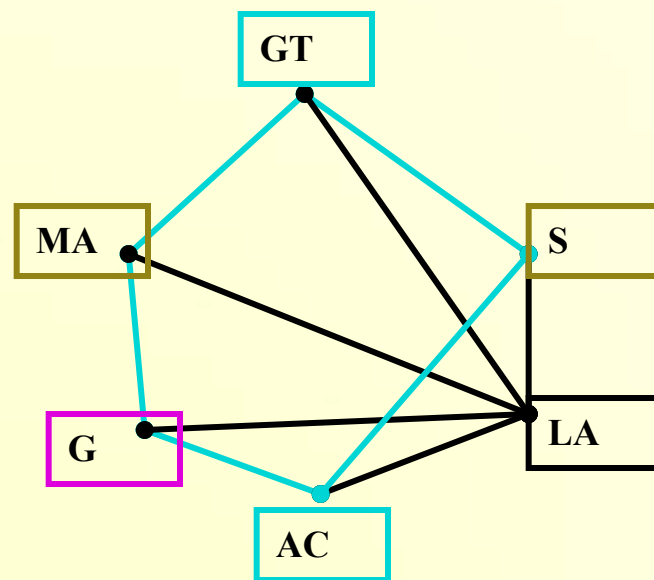
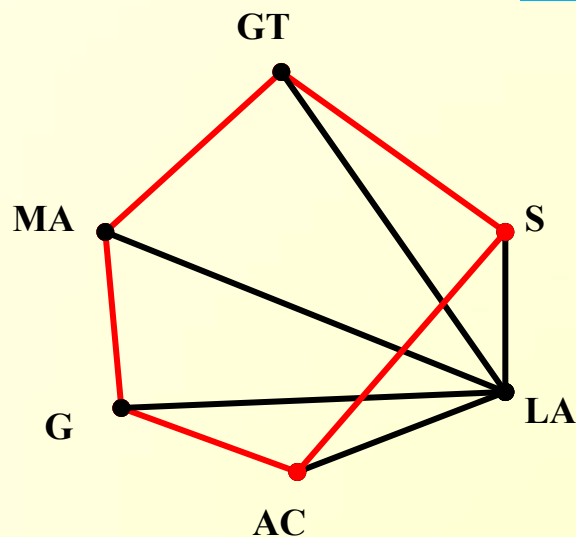
例1 说明下图的点色数是4。



解:

一方面, 因图中含有奇圈(红色边), 所以, 点色数至少为3。又因为点LA与该圈上每一个点均邻接, 所以, 点色数至少为4: $\chi(G) \geq 4$

另一方面, 通过具体着色, 用4种颜色可以得到该图的一种正常点着色, 则: $\chi(G) \leq 4$



所以, $\chi(G) = 4$

注：对图的正常顶点着色，带来的是图的顶点集合的一种划分方式。所以，对应的实际问题也是分类问题。属于同一种颜色的顶点集合称为一个色组，它们彼此不相邻接，所以又称为点独立集。用点色数种颜色对图 G 正常着色，称为对图 G 的最优点着色。

定义2 色数为 k 的图称为 k 色图。

定理14.10 一个无向图 $G=<V,E>$ 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路。

二、关于顶点着色的几个简单结果

1) $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 为零图

2) $\chi(K_n)=n$

偶圈+中心点

奇圈+中心点

3) 偶圈的色数为 2，奇圈色数为 3，奇阶轮图 $\chi(G)=3$ ，偶阶轮图 $\chi(G)=4$ 。

4) 若 G 的边集非空，则 $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二部图。

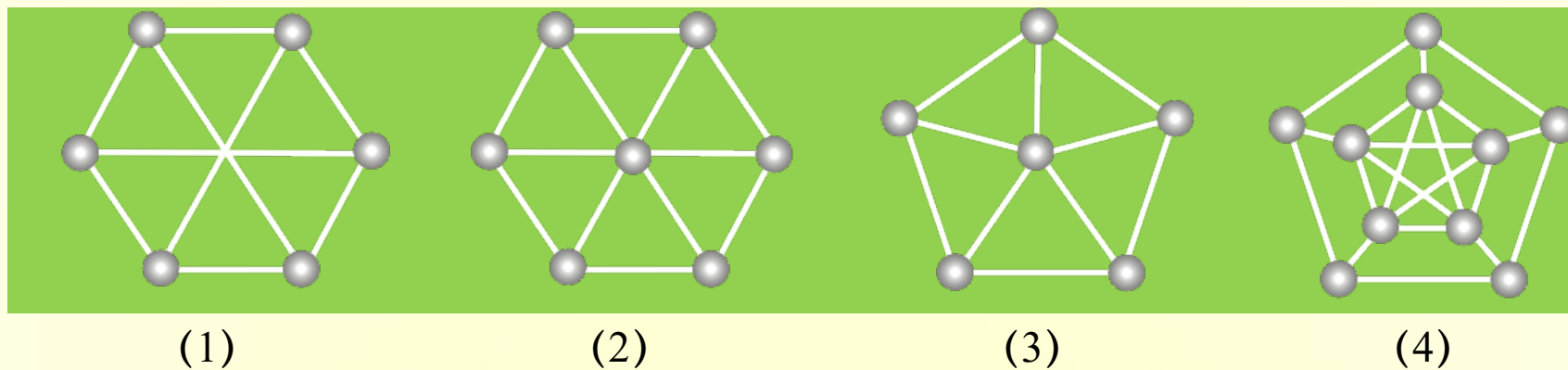


图 12

图 12 所示各图中，色数分别为 2，3，4，5，为什么？

三、色数的上界

定理 18.7 对于任意无环图 G ，均有

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

分析：事实上，定理结论容易想到，因为任意一个顶点度数至多为 Δ ，因此，正常着色过程中，其邻点最多用去 Δ 种颜色，所以，至少还有一种色可供该点正常着色使用。

证明：我们对顶点数作数学归纳证明。

当 $n=1$ 时，结论显然成立。

设对顶点数少于 n 的图来说，定理结论成立。考虑一般的 n 阶图 G 。

任取 $v \in V(G)$ ，令 $G_1 = G - v$ ，由归纳假设：

$$\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

v 最多含有 $\Delta(G)$ 个邻点

设 π 是 G_1 的一种 $\Delta(G) + 1$ 正常点着色方案，因为 v 的邻点在 π 下至多用去 $\Delta(G)$ 种色，所以给 v 染上其邻点没有用过的色，就把 π 扩充成了 G 的 $\Delta(G) + 1$ 着色方案。

如果是奇圈或者完全图 ($n \geq 3$)， $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

对于 G 来说，可以给出其 $\Delta(G) + 1$ 正常点着色算法。

G 的 $\Delta(G)+1$ 正常点着色算法（贪心算法）

设 $G=(V, E)$, $V= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 色集合 $C= \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, 着色方案为 π 。

(1) 令 $\pi(v_1)=1$, $i=1$;

(2) 若 $i=n$, 则停止; 否则令:

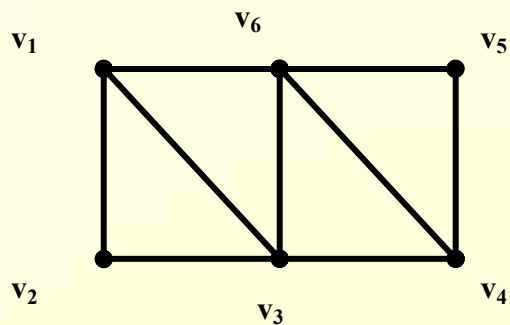
$$C(v_{i+1}) = \{ \pi(v_j) \mid j \leq i, \text{ 并且 } v_j \text{ 与 } v_{i+1} \text{ 相邻} \}$$

选择与 v_{i+1} 中的已着色的邻点的颜色不同的, 且标号最小的颜色, 作为 v_{i+1} 的颜色。

设 k 为 $C - C(v_{i+1})$ 中的最小整数, 令 $\pi(v_{i+1})=k$

(3) 令 $i=i+1$, 转(2)。

例2 给出下图的 $\Delta + 1$ 正常点着色。



解：色集 $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$(1), \pi(v_1) = 1$$

$$(2), C(v_2) = \{1\}, C - C(v_2) = \{2, 3, 4, 5\}, k = 2$$

$$(1), \pi(v_2) = 2$$

$$(2), C(v_3) = \{1, 2\}, C - C(v_3) = \{3, 4, 5\}, k = 3$$

$$(1), \pi(v_3)=3$$

$$(2), C(v_4)=\{3\}, C - C(v_4) = \{1, 2, 4, 5\}, k = 1$$

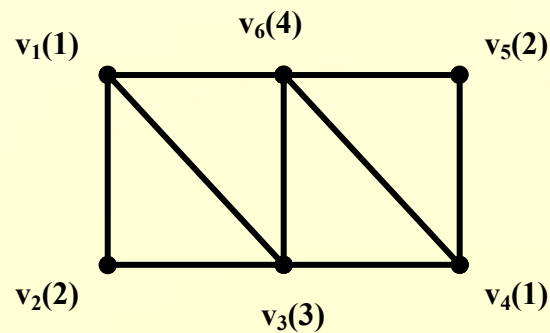
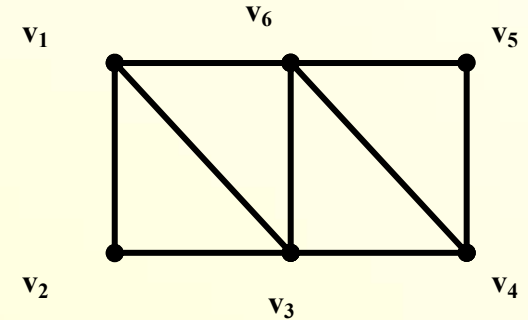
$$(1), \pi(v_4)=1$$

$$(2), C(v_5)=\{1\}, C - C(v_5) = \{2, 3, 4, 5\}, k = 2$$

$$(1), \pi(v_5)=2$$

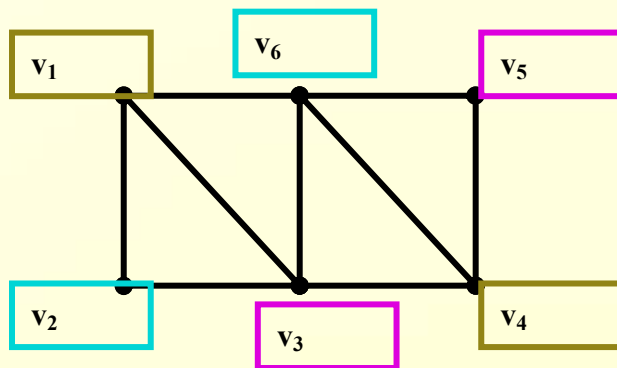
$$(2), C(v_6)=\{1, 2, 3\}, C - C(v_5) = \{4, 5\}, k = 4$$

$$(1), \pi(v_6)=4$$



注意:

(1) 不能通过上面算法求出色数, 例如, 根据上面算法, 我们求出了一个4色方案, 但 G 是3色图:



(2) Welsh—Powell稍微对上面算法做了一个修改, 着色时按所谓最大度优先策略, 即用上面算法时, 按**顶点度数由大到小的次序着色**。这样的着色方案起到了对上面算法的一个改进作用。

对于简单图G来说，数学家布鲁克斯(Brooks)给出了一个对定理18.7的色数改进界。这就是下面著名的布鲁克斯定理。

如果是奇圈或者完全图 ($n \geq 3$) , $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

定理18.8 (Brooks 定理, 1941) 若G是连通的简单图, 并且它既不是奇圈, 又不是完全图, $\chi(G) \leq \Delta(G)$

数学家罗瓦斯在1973年给出了如下证明。证明不要求掌握

证明：不失一般性，我们可以假设G是正则的，2连通的，最大度 $\Delta \geq 3$ 的简单图。原因如下：

(1) 容易证明：若G是非正则连通简单图，最大度是 Δ ，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

事实上，我们可以对G的顶点数作数学归纳证明：

当 $n=1$ 时，结论显然成立；

设对于阶数小于 n 的简单非正则连通简单图来说，结论成立。下设 G 是阶数为 n 的非正则连通单图。

设 u 是 G 中顶点，且 $d(u) = \delta < \Delta$ ，考虑 $G_1 = G - u$

若 G_1 是正则简单图，则 $\Delta(G_1) = \Delta(G) - 1$ 。于是 G_1 是可 $\Delta(G)$ 顶点正常着色的（定理18.7），从而， G 是可 $\Delta(G)$ 正常顶点着色的；

减去顶点 u ，和 u 相连的点的度数必然减少1，如果 G_1 是正则图，说明最大度顶点的度数必然减少了1，否则其他顶点减少度数后，必然小于最大度的顶点度数。注意：此时不能用数学归纳法，因为 G_1 是正则简单图，而假设是非正则简单图。

若 G_1 是非正则简单图，则由数学归纳， G_1 是可 $\Delta(G_1)$ 顶点正常着色的，从而， G 是可 $\Delta(G)$ 正常顶点着色的。

因为 $d(u) = \delta < \Delta(G)$ ，因此 u 的邻点个数一定小于 $\Delta(G)$ ，因此可先对 G_1 着色，最后可用不同于 u 邻点的颜色对 u 进行着色。

(2) 容易证明：若 G 是1连通 k 正则简单图，最大度是 Δ ，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

设 v 是 G 的一个割点，设 C 为 $G - v$ 的一个连通分量，则 v 在 C 中的度小于等于 $k-1$ ，我们可使用之前的 $\Delta(G)+1$ 贪心着色算法对 $C \cup \{v\}$ 着色，并使得 v 是最后一个被着色的点，可以得到 $C \cup \{v\}$ 的 k -着色（对于 C 中所有点，通过后面讲的深度优先遍历的逆序排序，都只有小于等于 $k-1$ 个邻点排在它前面，而 v 的度小于等于 $k-1$ ）。使用这种方法对 $G - v$ 的每一个连通分量和 v 的并集进行着色，使得 v 在这些着色中使用同一种颜色，我们得到 G 的一个 k -着色。

(3) $\Delta(G) < 3$, 且为正则简单图

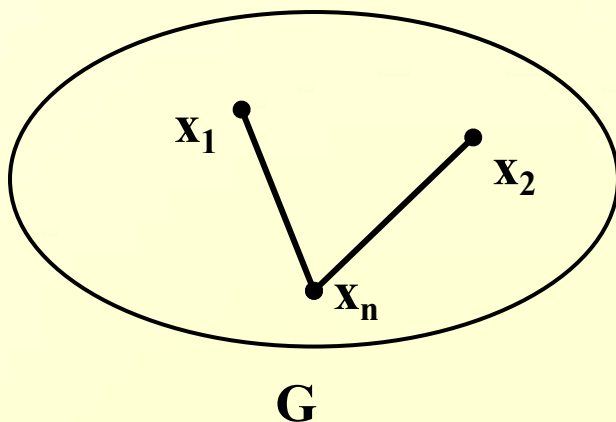
G 只可能为 K_2 和圈。因 G 不是奇圈, 且不能为完全图, 所以定理结论显然成立。

所以, 下面只需证明: 假设 G 是正则的, 2连通的, 最大度 $\Delta \geq 3$ 的简单图, 且不是完全图或奇圈, 有:

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

分两步完成证明。

1) 在上面条件下, 我们证明: G 中存在三点 x_1, x_2, x_n , 使得 $G - \{x_1, x_2\}$ 连通, x_1 与 x_2 不邻接, 但 x_1, x_2 与 x_n 均邻接;



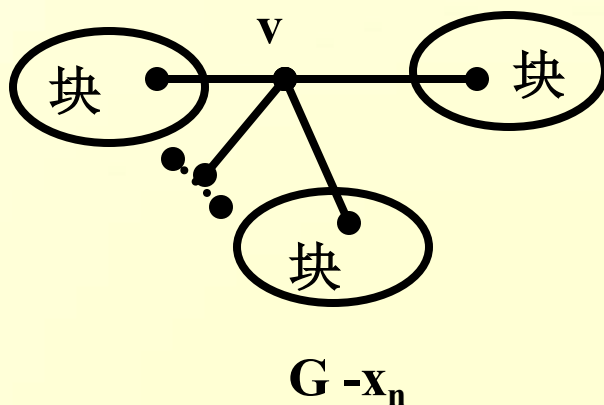
情形1 设 G 是3连通的正则非完全图。

对于 G 中点 x_n ，显然在其邻点中存在两个不邻接顶点 x_1 与 x_2 ，使得 $G - \{x_1, x_2\}$ 连通。

因为 G 是非完全图，所以一定存在距离为2的 x_1 和 x_2 点，经过 x_n 点。且因为 G 是3连通，所以 $G - \{x_1, x_2\}$ 连通。

情形2 设 G 是连通度为2的正则非完全图。

此时，存在点 x_n ，使得 $G - x_n$ 连通且有割点 v ，于是 $G - x_n$ 至少含有两个块。



即 $\{x_n, v\}$ 是一个点割集

$\{x_n, v\}$ 是一个点割集

由于 G 本身2连通, 所以 $G-x_n$ 的每个仅含有一个割点的块中均有点与 x_n 邻接。设分属于 H_1 与 H_2 中的点 x_1 与 x_2 , 它们与 x_n 邻接。由于 x_1 与 x_2 分属于不同块, 所以 x_1 与 x_2 不邻接。又显然 $G-\{x_1, x_2\}$ 连通。

定理B2 点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块。

至此, 我们已经证明: G 中存在三点 x_1, x_2, x_n , 使得 $G-\{x_1, x_2\}$ 连通, x_1 与 x_2 不邻接, 但 x_1, x_2 与 x_n 均邻接;

2) 对 G 中顶点进行如下排序 (深度优先遍历的逆序):

令 $x_{n-1} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n\}$ 且与 x_n 邻接;

每个顶点度数 ≥ 3

$x_{n-2} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}\}$ 且与 x_n 或 x_{n-1} 邻接;

$x_{n-3} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$ 且与 x_n 或 x_{n-1} 或 x_{n-2} 邻接;

不断这样作下去, 可得到 G 的顶点排序: x_1, x_2, \dots, x_n

其实就是按照从 x_n 出发深度优先遍历算法的逆序排列, 且 x_1, x_2 在最前面。这样排序的效果: 除 x_n 之外的其他所有点只有小于等于 $\Delta(G)-1$ 个邻点排在它前面, 因为至少有一个点排在它后面。

注意： x_1, x_2 着色相同

把 $\Delta(G)+1$ （贪心）着色算法用于 G ，按照上面顶点排序着色，容易知道，用 $\Delta(G)$ 种颜色可以完成 G 的正常点着色。

除 x_n 之外的点只有小于等于 $\Delta(G)-1$ 个邻点排在它前面，而 x_n 的邻点 x_1, x_2 着色相同，因此所有顶点都只需要 $\Delta(G)$ 中颜色。

对于简单图的点色数，还可以在定理18.8的基础上获得改进。

定义3 设 G 是至少有一条边的简单图，令

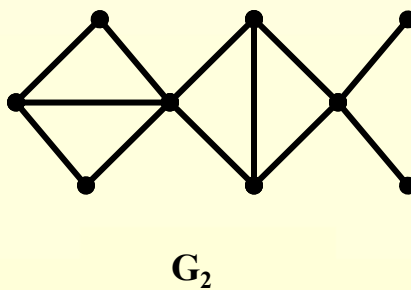
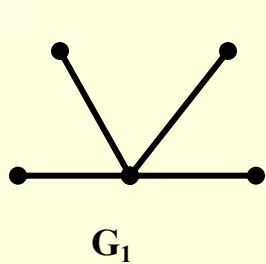
$$V_2(G) = \{v \mid v \in V(G), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\}$$

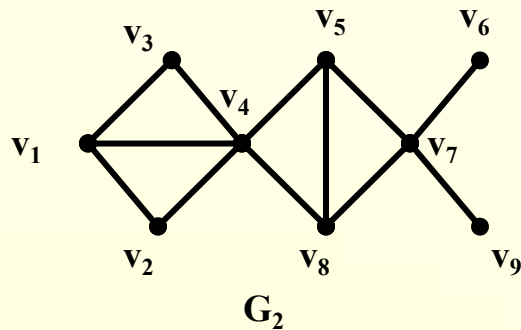
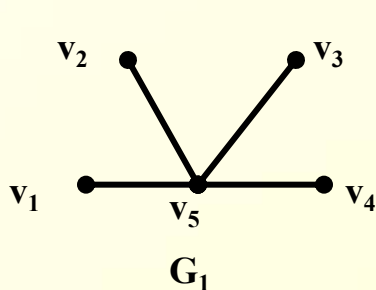
其中 $N(v)$ 为 G 中点 v 的邻域。

$$\Delta_2(G) = \max \{d(v) \mid v \in V_2(G)\}$$

称 $\Delta_2(G)$ 为 G 的次大度。

例如：求下面图的次大度 $\Delta_2(G)$





解: (1)

$$V_2(G_1) = \{v \mid v \in V(G_1), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\}$$

$$= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

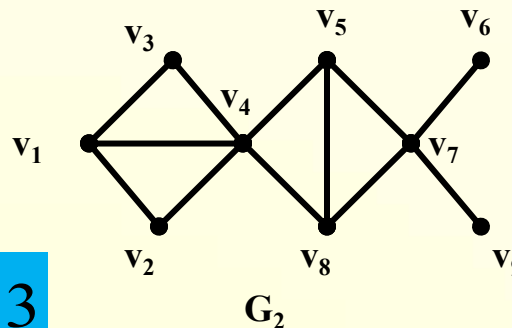
$$\Delta_2(G) = \max \{d(v) \mid v \in V_2(G)\} = 1$$

(2)

$$V_2(G_2) = \{v \mid v \in V(G_2), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\}$$

$$= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_6, v_9\}$$

$$\Delta_2(G) = \max \{d(v) \mid v \in V_2(G)\} = 3$$



次大度未必是第二大的度数

注：由次大度的定义知： $\Delta_2(G) \leq \Delta(G)$

定理3 设G是非空简单图，则：

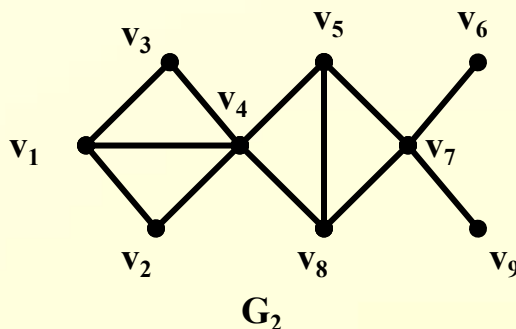
$$\chi(G) \leq \Delta_2(G) + 1$$

奇圈和完全图也满足

注：定理3是对定理18.8的一个改进！

例如：对下面简单图来说，由定理18.8得： $\chi(G_2) \leq \Delta(G_2) = 5$

而由定理3得： $\chi(G_2) \leq \Delta_2(G) + 1 = 4$



推论：设G是非空简单图，若G中最大度点互不邻接，则有：

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

如果(两个或以上)最大度点邻接，那么次大度等于最大度，否则

$$\Delta_2(G) + 1 \leq \Delta(G)$$

注意：完全图最大度邻接

(三)、四色与五色定理

1、四色定理

1852年，刚毕业于伦敦大学的格斯里(1831—1899)发现：给一张平面地图正常着色，至少需要4种颜色。这就是著名的4色定理。

四色定理：任何平面图都是4-可着色的。

格斯里把他的证明通过他弟弟转交给著名数学家摩尔根，引起摩尔根极大兴趣并于当天给数学家哈密尔顿写了封相关信件。但没有引起哈密尔顿的注意。

直到1878年，在英国数学家会议上，数学家凯莱才再一次提到4色问题。

1879年7月，业余数学家肯普(1849---1922)在英国自然杂志上宣称证明了4色定理。肯普是凯莱在剑桥大学的学生。

1890年，英国数学家希伍德发表文章地图染色定理，通过构造反例，指出了肯普证明中的缺陷。后来，希伍德一直研究4色问题60年。

泰特在此期间也研究4色问题，但其证明被托特否定。

希伍德文章之后，4色问题研究进程开始走向停滞。

到了20世纪，美国数学家比尔荷夫提出可约性概念，在此基础上，德国数学家海斯(1906—1995)认为，可以通过寻找所谓的不可约构形来证明4色定理。

Heesch估计不可约构形集合可能包含**10000**个元素，手工验证是不太可能。于是他给出了一种可用计算机来验证的方法。

20世纪70年代，黑肯和他的学生阿佩尔着力用计算机方法证明4色定理，借助于**Appel**在编程方面的深厚功底。他们于1976年6月终于成功解决了寻找不可约构形集合中的元素，宣告4色定理的成功证明。数学家托特在图论顶级刊物《图论杂志》上写了一首诗：

Wolfgang Haken

重重打击着巨妖

一次！两次！三次！四次！

他说：“妖怪已经不存在了。”

如果四色定理不成立，则应该存在一个反例，这个反例大约有2000种可能，然后他们用计算机分析了所有这些可能，都没有导致反例，从而证明四色猜想成立。但是寻求相对短的、能被人阅读和检查的证明仍是数学家追求的目标。

2、五色定理

定理4 (希伍德) 每个平面图是5可着色的。

根据平面图和其对偶图的关系，上面定理等价于每个平面图是5可顶点正常着色的。

证明：我们对图的顶点作数学归纳证明。

当 $n=1$ 时，结论显然。

设 $n=k$ 时，结论成立。考虑 $n=k+1$ 的平面图 G 。

因 G 是平面图，所以 $\delta(G) \leq 5$ （否则 $2m > 6n$, G 为非平面图）

设 $d(u) = \delta(u) \leq 5$ 。

定理17.10 设 G 是具有 n 个点 m 条边 ϕ 个面的简单平面图，则：

$$m \leq 3n - 6$$

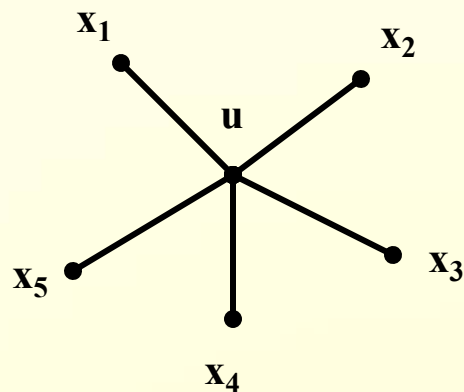
令 $G_1 = G - u$ 。由归纳假设, G_1 是 5 可顶点正常着色的。
设 π 是 G_1 的 5 着色方案。

(1) 如果 $d(u) = \delta(G) < 5$, 显然 π 可以扩充为 G 的 5 正常顶点着色;

(2) 如果 $d(u) = \delta(G) = 5$, 分两种情况讨论。

情形1 在 π 下, 如果 u 的邻接点中, 至少有两个顶点着相同颜色, 则容易知道, π 可以扩充为 G 的 5 正常顶点着色;

情形2 在 π 下, 设 u 的邻接点中, 5 个顶点着了 5 种不同颜色。



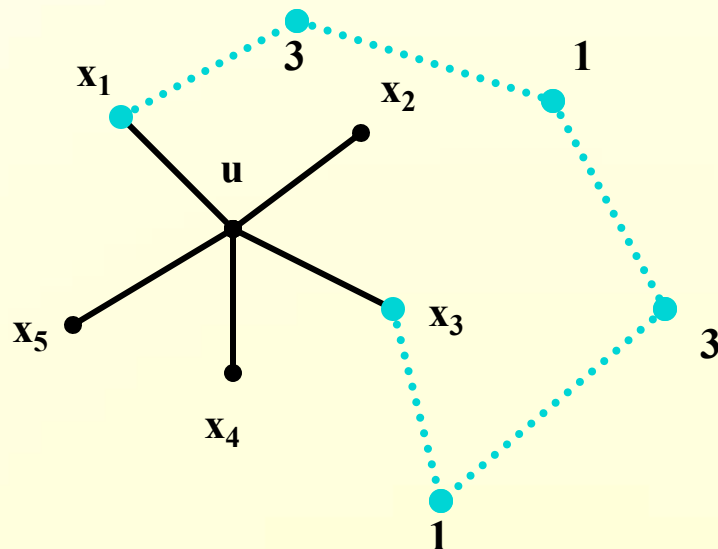
不失一般性，设 $\pi(x_i)=i$ ($1 \leq i \leq 5$)。

设 $H(i, j)$ 表示着 i 和 j 色的点在 G_1 中的点导出子图。

如果 x_1 与 x_3 属于 $H(1, 3)$ 的不同分支。则通过交换含 x_1 的分支中的着色顺序，可得到 G_1 的新正常点着色方案，使 x_1 与 x_3 着同色，于是由情形1，可以得到 G 的5正常顶点着色方案；

如果 x_1 和 x_3 是一个连通分支，那么调整 x_1 必然会影响到 x_3 ，所以依然不能调整成相同的颜色。

设 x_1 与 x_3 属于 $H(1, 3)$ 的相同分支。



在上面假设下， x_2 与 x_4 必属于 $H(2, 4)$ 的不同分支。否则，原图 G 中将会得到 $H(1, 3)$ 与 $H(2, 4)$ 的交叉点。因此， π 可以扩充为 G 的5正常顶点着色。

同样通过调整，将 x_2 和 x_4 着相同的颜色。

(四)、顶点着色的应用

图的正常顶点着色对应的实际问题是“划分”问题。

例1 课程安排问题：某大学数学系要为此个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT), 统计学(S), 线性代数(LA), 高等微积分(AC), 几何学(G), 和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。(学生用 A_i 表示)

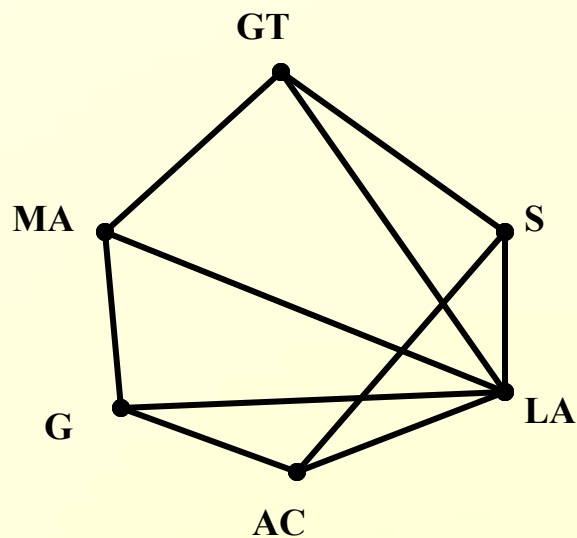
A_1 : LA, S ; A_2 : MA, LA, G ; A_3 : MA, G, LA;

A_4 : G, LA, AC ; A_5 : AC, LA, S ; A_6 : G, AC;

A_7 : GT, MA, LA ; A_8 : LA, GT, S ; A_9 : AC, S, LA;

A_{10} : GT, S。

解：把课程模型为图 G 的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。

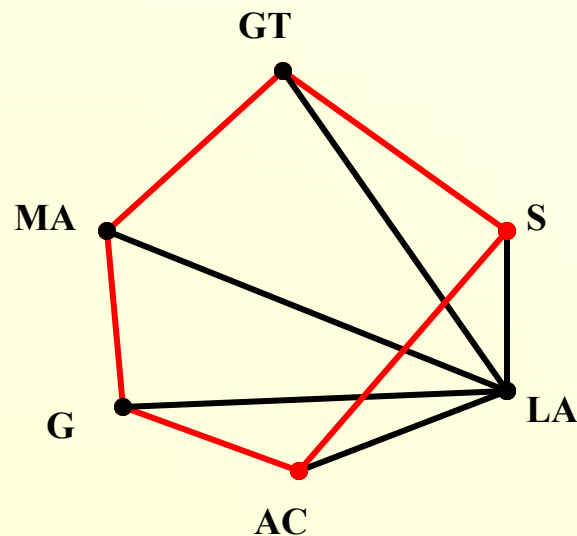


选课状态图

如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求对应于点色数的着色。

(1) 求点色数

一方面，因图中含有奇圈(红色边)，所以，点色数至少为3。
又因为点LA与该圈上每一个点均邻接，所以，点色数至少为4。

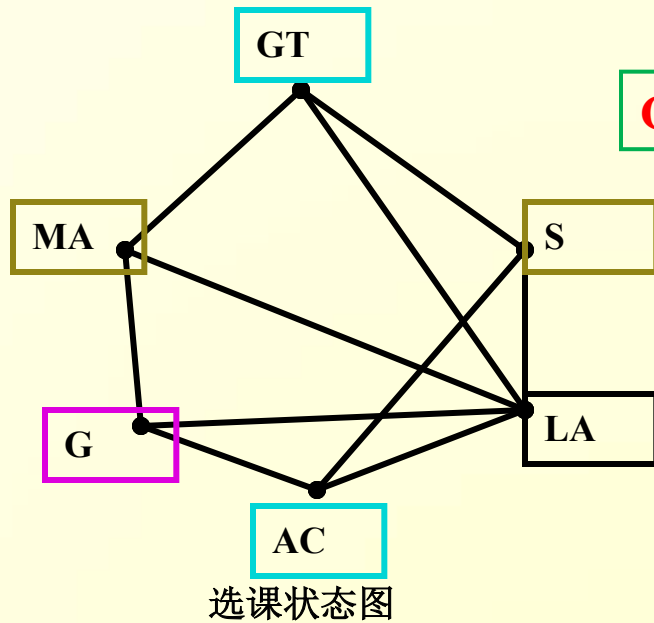


选课状态图

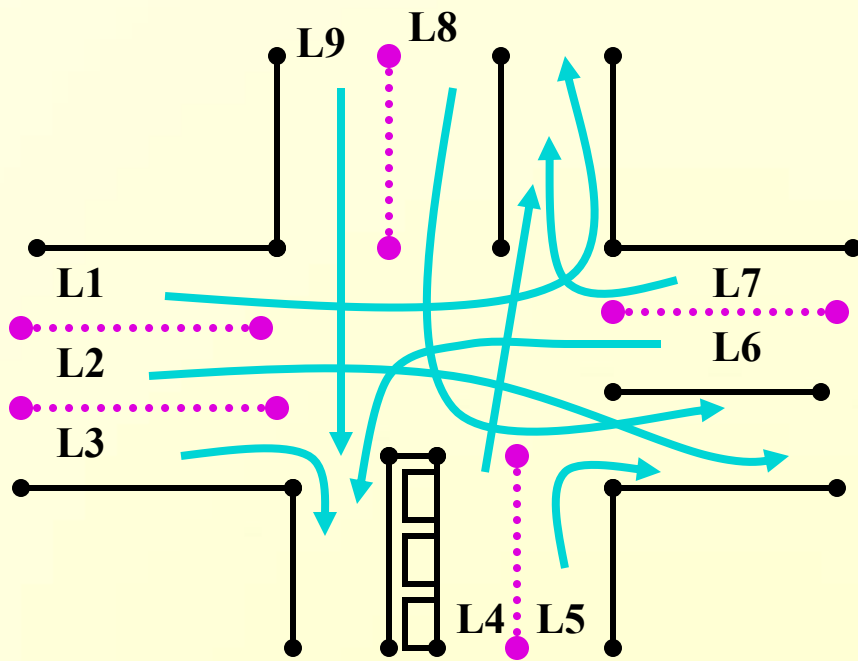
另一方面，我们用4种色实现了G的正常点着色，所以，图的点色数为4。

采用Brooks定理，色数小于等于5；
采用基于次大度的定理，色数小于等于4；

(2) 求安排----具体着色

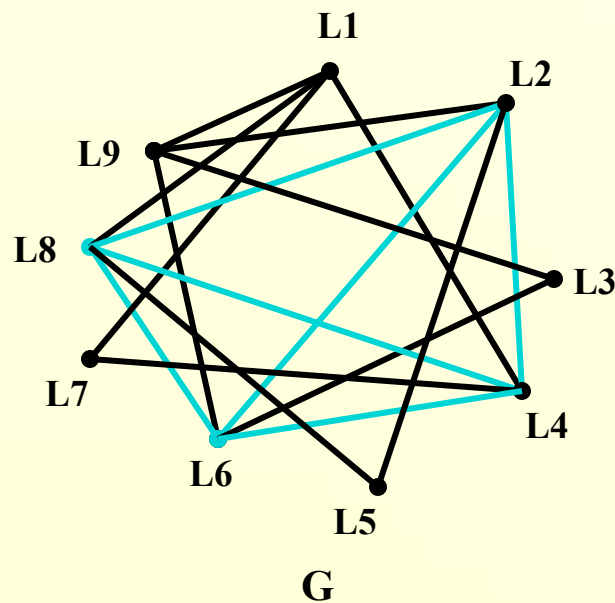
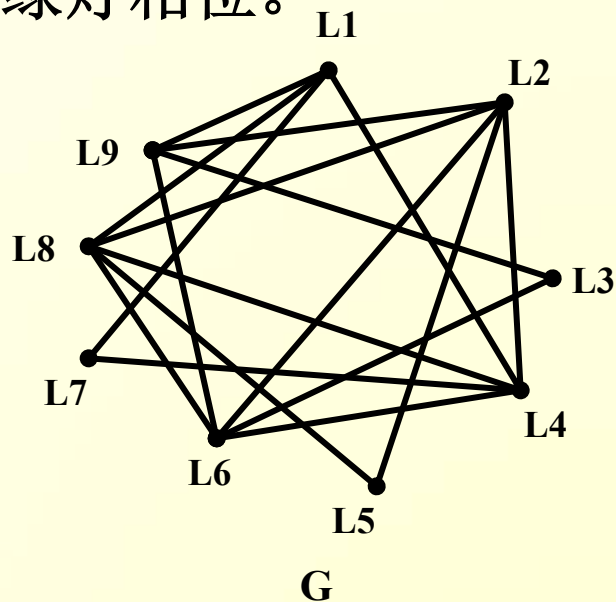


例2 交通灯的相位设置问题：如图所示，列出了繁华街道路口处的交通车道L1,L2,...,L9。在此路口处安置了交通灯。当交通灯处于某个相位时，亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口。为了(最终)让所有的车辆都能够安全通过路口，对于交通灯来说，所需要的相位的最小数是多少？



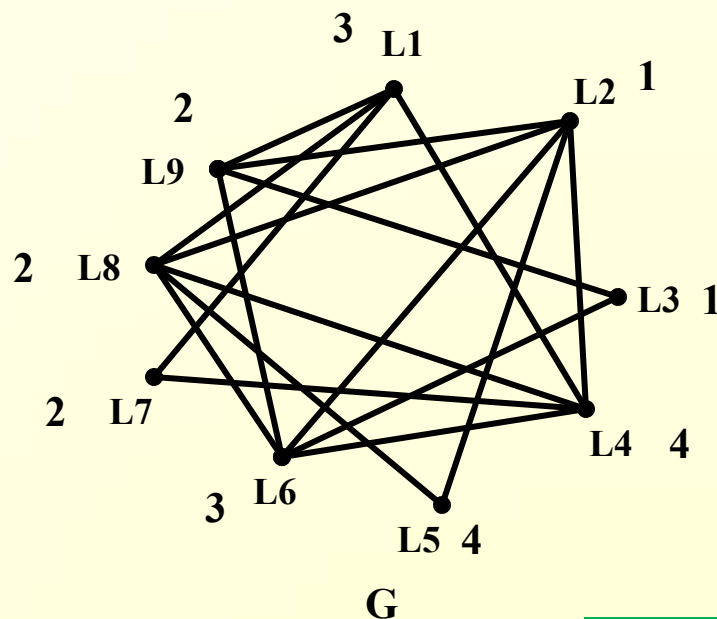
两个车道的车不能同时进入同一个车道；
两个车道的路线不能有交叉

解：车道模型为顶点，两点连线当且仅当两个车道上的车不能同时安全地进入路口，而连线的两个车道不能使用同一红绿灯相位。



问题转化为求 G 的点色数。一方面， G 中含有 K_4 ，所以，点色数至少为4；

另一方面，通过尝试，用4种色实现了正常点着色。



可用前述的贪心着色算法（或者改进版的贪心着色算法：着色时按所谓最大度优先策略，即用贪心算法时，按顶点度数由大到小的次序着色）。

注意：如果采用定理18.7或者18.8，并不能得到4，而是5.

所以，最小相位为4。

作业

21, 22, 25