数理逻辑

郑为杰
e-mail: zhengweijie@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2023年12月

FC形式系统的语义

- 个体常元、个体变元、函词、谓词、项等属于语法范畴的概念，只是一些字符串，没有实际意义。
- 要讨论谓词演算公式的真值，就需要对函词和谓词进行指称，对个体常元和变元取值进行指派，即对这些语法符号赋予一定的意义（一阶谓词的语义）。
- 一阶谓词逻辑中引入了量词、谓词、函词等概念，比命题公式的解释更加复杂。
- 一阶语言的语义解释是一个数学结构，包含论域U及对常元、函词、谓词进行指称的解释 I。

FC形式系统的语义

例1：设$\forall xQ(f(x,a),x)$为FC的公式，

- 假定论域U为实数集R
- 二元谓词$Q(x,y)$：$x=y$
- 常元a指派为“0”
- 二元函词$f(x,y)=x+y$

分析：

- 则此时$\forall xQ(f(x,a),x)$，即为$\forall x(x+0=x)$，为一个真命题。
- 但若将二元函词$f(x,y)=xy$，则此时$\forall xQ(f(x,a),x)$，即为$\forall x(x*0=x)$，为一个假命题。

FC形式系统的语义

FC的一阶语言$\mathcal{L}(FC)$的一个语义$\mathcal{U}$是一个结构$\langle U, I\rangle$，该结构为：$\mathcal{U} = \langle U, I\rangle$

- 非空集合U，称为论域或者个体域。
- 一个称为解释的映射I，$I: L_a \cup L_f \cup L_p \rightarrow U \cup U_f \cup U_p$
- U_f是U上的所有函数符号（一元，二元等等）构成的集合
- U_p是U上的所有关系（一元，二元等等）构成的集合
- 对于任意常元a，映射I将常元a解释为论域上的一个元素，$I(a) \in U$，记为$\bar{a}$。也可以写作：$a \in L_a$，$I(a) = \bar{a} \in U$
- 对于每一个n元函词$f^{(n)}$，$I(f^{(n)})$为U上的一个n元函数，记为$\bar{f}^{(n)}$，即$\bar{f}^{(n)}: U^n \rightarrow U$。也可以写作：$f^{(n)} \in L_f$，$I(f^{(n)}) = \bar{f}^{(n)}: U^n \rightarrow U$
- 对于每一个n元谓词$P^{(n)}$，$I(P^{(n)})$为U上的一个n元关系，记为$\bar{P}^{(n)}$，即$\bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$。也可以写作：$P^{(n)} \in L_p$，$I(P^{(n)}) = \bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$
- 当$n = 1$时$\bar{P}^{(1)}$为U的一个子集，当$n = 0$时$\bar{P}^{(0)}$为0或者1。

FC形式系统的语义

例2： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

- 令论域$U = \{0,1\}$，
- P, Q是一元谓词为论域U的一个子集，令$\bar{P} = \{0\}$，$\bar{Q} = \{1\}$
- 则：$\overline{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))} = \overline{P(0) \rightarrow Q(0)} \wedge \overline{P(1) \rightarrow Q(1)} = 0$

例3： $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ FC公式由于含有自由变元，在上述解释中无法判断真假。

指派及其扩展

- 一阶谓词演算中，一个指派（在确定了系统的语义的前提下）是指一个映射$s: L_v \to U$（对自由变元的解释）。
- 这个映射可以扩展到项的集合L_t到U的映射。对于任意的项t

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当}t\text{为变元}v\text{时} \\ \bar{a} & \text{当}t\text{为常元}a\text{时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{s}(t_1),\ldots,\bar{s}(t_n)) & \text{当}t\text{为}f^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)\text{时} \end{cases}$$

$\mathcal{L}(\mathrm{FC})$的项（L_t）：

1. 变元和常元是项。
2. 对任意正整数n，如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$f^{(n)}$为n元函词，那么$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$也为项。
3. 除了有限次数使用 1 和 2 得到的表达式以外，其余的都不是项。

FC形式系统的语义

公式A在语义$\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$和指派$s$下取值为真，记为$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$。反之$\nvDash_{\mathcal{U}} A[s]$。

- $\vDash_{\mathcal{U}} A$：在语义$\mathcal{U}$中，对一切指派s，A均为T，即$\vDash_{\mathcal{U}} A[s] \forall s$。
- $\vDash_{T} A$或$\vDash A$：公式A在任意语义$\mathcal{U}$中，均为T，这时称A永真。

复合公式的语义

公式A在语义$\mathcal{U}$和指派s下取真值为T，也即$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$的严格定义如下：

- A为原子公式$P^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)$ 时，

  $\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$当且仅当$< \bar{s}(t_1),\bar{s}(t_2),\cdots,\bar{s}(t_n) >\in \bar{P}^{(n)}$

- A为公式$\neg B$时，

  $\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$当且仅当$\nvDash_{\mathcal{U}} B[s]$，即$\bar{A}=1$当且仅当$\bar{B}=0$

- A为公式$B\rightarrow C$时，

  $\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$当且仅当$\nvDash_{\mathcal{U}} B[s]$或者$\vDash_{\mathcal{U}} C[s]$

  $\nvDash_{\mathcal{U}} A[s]$当且仅当$\vDash_{\mathcal{U}} B[s]$且$\nvDash_{\mathcal{U}} C[s]$

- A为公式$\forall vB$时，

  $\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$当且仅当对每一个$d\in U$都有$\vDash_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$，其中指派$s(v|d)$表示除对变元$v$指定元素$d$外，对其他变元的指派与$s$相同。

$s(v|d)$与s的差别

其中$s(v|d)$也是一个指派，它的定义如下：对于L_v中的任意一个元素u:

$$s(v|d)(u) = \begin{cases} s(u) & 当 u \neq v \\ d & 当 u = v \end{cases}$$

指派$s(v|d)$表示除对变元v用指定元素d赋值外，对其他变元的指派与s相同。

例4：谓词公式$A = \forall x P(x) \to Q(f(x))$其语义$\mathcal{U} =< U, I >$定义如下：

- $U = \{1,2\}$
- $\bar{f} : \{1,2\} \to \{1,2\}$，$\bar{f}(1) = 2, \bar{f}(2) = 1$
- $\bar{P} = \{1\}$，$\bar{Q} = \{1\}$
- 自由变元x的指派为：$\bar{x} = s(x) = 2$

求$\overline{\forall x P(x) \to Q(f(x))}$的真值

解：首先需要求出$\overline{\forall x P(x)}$和$\overline{Q(f(x))}$：

- $\overline{\forall x P(x)} = \overline{P(1)} \land \overline{P(2)} = T \land F = F$
- $\overline{f(x)} = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(2) = 1 \in \bar{Q}$，$\overline{Q(f(x))} = T$
- 故$\bar{A} = \forall x P(x) \to Q(f(x)) = 1$

附加的联结词和量词

如果使用联接词$\vee$，$\wedge$和量词$\exists$的时候，可以进一步定义：

- $\vDash_{\mathcal{U}} B \vee C[s]$ 当且仅当 $\vDash_{\mathcal{U}} B[s]$ 或者 $\vDash_{\mathcal{U}} C[s]$
- $\vDash_{\mathcal{U}} B \wedge C[s]$ 当且仅当 $\vDash_{\mathcal{U}} B[s]$ 并且 $\vDash_{\mathcal{U}} C[s]$
- $\vDash_{\mathcal{U}} \exists B[s]$当且仅当存在$d \in U$使得$\vDash_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$

例5：证明$\vDash_{\mathcal{U}} \neg\forall v\neg B[s]$当且仅当$\vDash_{\mathcal{U}} \exists vB[s]$。

证明：$\vDash_{\mathcal{U}} \neg\forall v\neg B[s]$当且仅当$\nvDash_{\mathcal{U}} \forall v\neg B[s]$

当且仅当并非对$\forall d \in U$，均有$\vDash_{\mathcal{U}} \neg B[s(v|d)]$

当且仅当存在$d' \in U$，使得$\nvDash_{\mathcal{U}} \neg B[s(v|d')]$

当且仅当存在$d' \in U$，使得$\vDash_{\mathcal{U}} B[s(v|d')]$，即

当且仅当$\vDash_{\mathcal{U}} \exists vB[s]$

语义举例

例5：考虑以下的结构，它赋予只含有一个函词、一个谓词和一个常元的一阶谓词系统以下语义：

- $U = \{0,1,2,3,4,\cdots\}$，即自然数集合
- $\bar{P}^{(2)}$为N上的$\leq$关系
- $\bar{f}_1^{(1)}$为N上的后继函数$\bar{f}_1^{(1)}(x) = x + 1$
- $\bar{a}_1 = 0$

则有以下结论成立：

- $\vDash P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))$
- $\vDash P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$对任何指派$s$都不成立
- $\vDash \forall v_1 P_1^{(2)}(a_1, v_1)$

语义举例

证明：

$\vDash P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))[s]$当且仅当 $(\overline{a_1}, \overline{f_1^{(1)}(v_1)}) \in \overline{P_1^{(2)}}$ （根据$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$的定义）

当且仅当 $\overline{a_1} \leq \overline{f_1^{(1)} v_1}$

当且仅当 $0 \leq \overline{f_1^{(1)}}(\overline{v_1}) = \overline{v_1} + 1$,故$\vDash P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))$成立。

$\vDash P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$当且仅当$(\overline{f_1^{(1)}(v_1)}, \overline{a_1}) \in \overline{P_1^{(2)}}$

当且仅当$\overline{f_1^{(1)} v_1} \leq \overline{a_1}$

当且仅当$\overline{f_1^{(1)}}(\overline{v_1}) = \overline{v_1} + 1 \leq 0$,故$\vDash P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$对任何指派$s$都不成立。

$\vDash \forall v_1 P_1^{(2)}(a_1, v_1)[s]$当且仅当$\vDash P_1^{(2)}(a_1, v_1)[s(v_1|d)]$对任一$d \in U$都成立

当且仅当$(\overline{a_1}, \overline{v_1}) \in \overline{P_1^{(2)}}$ （根据$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$的定义）

当且仅当$0 \leq \overline{s(v_1|d)}(v_1) = d$

FC中公理的永真性

公理A_1: $A \to (B \to A)$

公理A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

公理A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

公理1（计算法）：

$$\overline{A \to (A \to B)} = 1 - \bar{A} + \bar{A}(\overline{B \to A})$$
$$= 1 - \bar{A} + \bar{A}(1 - \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A})$$
$$= 1 - \bar{A} + \bar{A} - \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A}$$
$$= 1$$

公理1（反证法）：假设存在$\mathcal{U}$和s，使得$\nvDash_{\mathcal{U}} A \to (B \to A)[s]$

当且仅当$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$且$\nvDash_{\mathcal{U}} (B \to A)[s]$

当且仅当$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$且$\vDash_{\mathcal{U}} B[s], \nvDash_{\mathcal{U}} A[s]$ 产生矛盾，

故$\vDash_{\mathcal{U}} A \to (B \to A)$。

FC中公理的永真性

公理A_4: $\forall vA \to A_t^v$　（t对A中的变元v可代入）

证明：即证对于任何语义结构$\mathcal{U}$和指派s，有$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，其中$t$对于$v$是可代入的。

因为$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$意味着对于任意的$d \in U$，有$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，令$d = \bar{s}(t)$，于是$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$，而$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$就是$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，如果$t$对于$v$是可代入的话。于是$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，所以$\models_{\mathcal{U}} (\forall vA \to A_t^v)[s]$。

FC中公理的永真性

公理A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$

证明：为了证明$\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$，只需证明由$\models_{\mathcal{U}} \forall v(A \to B)[s]$和$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$可以推出$\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$成立即可。设$d \in U$，那么$\models_{\mathcal{U}}$（$A \to B$）$[s(v|d)]$，所以$\not\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$或者$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$。因为$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$，所以$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，从而对$\forall d \in U$有$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$，故$\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$。

FC中公理的永真性

公理A_6: $A \to \forall vA$ （v在A中无自由出现）

证明：为了证明$A \to \forall vA$永真，只需证明对于任意的$\mathcal{U}$和s，只要$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$就有$\vDash_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。设$\vDash_{\mathcal{U}} A[s]$，$d$为$U$中的任意一个元素，由于$A$中没有自由出现的$v$，指派$v$是$U$中的什么元素对公式$A$没有影响，所以$\vDash_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，从而$\vDash_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。

逻辑蕴涵与逻辑等价

设Γ为FC的任意公式集， B为FC的公式，若对任意使得Γ中每个公式均为真的结构$\mathcal{U}$及指派s，也使得B为真，即有$\vDash_{\mathcal{U}} B[s]$，则称$\Gamma$逻辑蕴涵$B$，记为$\Gamma \vDash B$。若$\Gamma = \{A\}$，则有$A \vDash B$，称做$A$逻辑蕴涵$B$。若同时有$B \vDash A$，则称$A,B$逻辑等价。

总结

命题逻辑
- ① 命题与联结词
- ② 形式语言与命题公式
- ③ 范式
- ④ 联结词的扩充与归约
- ⑤ 命题演算形式系统PC
- ⑥ 命题演算形式系统PC的定理
- ⑦ 自然演绎推理系统

谓词逻辑
- ① 一阶谓词演算的基本概念
- ② 一阶谓词演算形式系统的定理