7.4 关系的性质

本节总假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假定不失一般性。因为任一A到B的关系R，即$R \subseteq A \times B$, $A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$，所以关系$R$总可看成是$A \cup B$上的关系，它与原关系$R$具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对$R$的讨论不改变于问题的本质。

一. 五种性质的定义

- **自反性与反自反性**

定义7.11 设R为A上的关系,

（1）若$\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的. （$I_A\subseteq R$？）

（2）若$\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的. （$R\cap I_A=\varnothing$？）

实例：

自反关系：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A.

反自反关系：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$ 自反

$R_2=\{<1,3>\}$ 反自反

$R_3=\{<1,1>,<2,2>\}$ 既不是自反也不是反自反

一. 五种性质的定义

- **对称性与反对称性**

定义7.12 设R为A上的关系,

（1）若$\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$, 则称$R$为$A$上对称的关系. （$R=R^{-1}$？）

（2）若$\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$, 则称$R$为$A$上的反对称关系.

（$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$？）

实例：

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$.

反对称关系：恒等关系I_A和空关系$\varnothing$也是A上的反对称关系.

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$ 反对称但不对称 $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 对称但不是反对称

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$ 既对称也反对称 $R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$ 既不对称也不是反对称

一. 五种性质的定义

- **传递性**

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land \langle x,y \rangle \in R \land \langle y,z \rangle \in R \rightarrow \langle x,z \rangle \in R),\quad (R \circ R \subseteq R\ ?)$$

则称R是A上的传递关系.

实例:

A上的全域关系E_A,恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3, R_4是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ 传递关系

$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 不是传递关系

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$ 传递关系

$R_4=\{\langle 1,3\rangle\}$ 传递关系

传递性定义条件不成立, 蕴含前件为假

【例】 设$A=\{a, b, c\}$，以下各关系

R_i（$i=1, 2, \ldots, 8$）均为A上二元关系，请判断下列关系是否为自反或者反自反关系。

（1）$R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$ 自反关系

$R_2=\{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$ 反自反关系

$R_3=\{\langle a,a\rangle\}$ 既不自反也不反自反关系

A上的Φ关系 反自反关系

当 $A=\Phi$时（这时A上只有一个关系Φ），A上空关系既是自反的，又是反自反的，

因为$A=\Phi$使自反和反自反定义的前提总为假，所以蕴涵表达式的结果总为真。

自反：$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$

反自反：$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R$

请判断下列关系是否为对称或者反对称关系

（2）$R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ 对称关系

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$ 反对称关系

$R_5=\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle\}$ 既不对称，也不是反对称

A上的恒等关系I_A 既对称，也反对称

请判断下列关系是否为传递关系

（3）$R_7=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$ 传递关系

$R_7-\{\langle a,c\rangle\}$ 非传递关系

A上的空关系Φ，$R_8=\{\langle a,b\rangle\}$ 传递关系

因为传递性定义的前提对它们而言均为假：

$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$

（4）任何非空集合上的空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；其上的恒等关系是自反、对称、反对称、传递的；其上的全域关系是自反、对称、传递的。

（5）三角形的相似关系、全等关系是自反、对称、传递的。

（6）正整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；但整数集合上的整除关系只有传递性 $(\langle 0,0\rangle,\langle 1,-1\rangle)$。

判断一个关系是否具有上述某种的性质，除直接用定义，还有下面的充要条件。

二. 关系性质的等价描述

下面给出这五种性质成立的充分必要条件.

定理7.9 设R为A上的关系, 则

（1） R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

（2） R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

（3） R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

（4） R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5） R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R)$，
则称R在A上是自反的.

R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

证明

（1）必要性.

任取$\langle x,y\rangle \in I_A$, 由于 R 在 A 上自反必有

$x,y \in A \wedge x=y \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x, 有

$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

因此 R 在 A 上是自反的.

R在A上反自反当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$

若$\forall x(x \in A\rightarrow<x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

（2） 必要性： 用反证法。

假设$R\cap I_A\neq\Phi$，必存在〈x, y〉$\in R\cap I_A \Rightarrow$〈$x$, y〉$\in I_A$，由于I_A是A上的恒等关系，从而有$x=y$，所以〈x, x〉$\in R$，这与R 在A上是反自反的相矛盾。

充分性：任取$x\in A$，则有$x\in A \Rightarrow$〈x, x〉$\in I_A$ $\Rightarrow$〈x, x〉$\notin R$(由于$I_A\cap R=\Phi$)，从而证明了R在A上是反自反的。

R在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

若$\forall x \forall y(x,y \in A \land \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$,
则称R为A上对称的关系

(3) 必要性.

任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1}$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$\langle x,y\rangle$，由 $R = R^{-1}$ 得

$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

所以 R 在 A 上是对称的.

R在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R\rightarrow x=y)$，则称R为A上的反对称关系.

(4) 必要性.

任取$<x,y>$，有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$$

$$\Rightarrow x=y\wedge x,y\in A$$ (因为 R 在 A 上是反对称的)

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$ $(R\cap R^{-1}\subseteq I_A)$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

R在A上传递当且仅当 $R\circ R\subseteq R$

设R为A上的关系, 若 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\rightarrow<x,z>\in R)$, 则称$R$是$A$上的传递关系.

(5) **必要性.**

任取$<x,y>$**有**

$<x,y>\in R\circ R$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge<t,y>\in R)$

$\Rightarrow <x,y>\in R$ **(因为 R 在 A 上是传递的)**

所以 $R\circ R\subseteq R$.

充分性.

任取$<x,y>,<y,z>\in R$, **则**

$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$

$\Rightarrow <x,z>\in R\circ R$

$\Rightarrow <x,z>\in R$

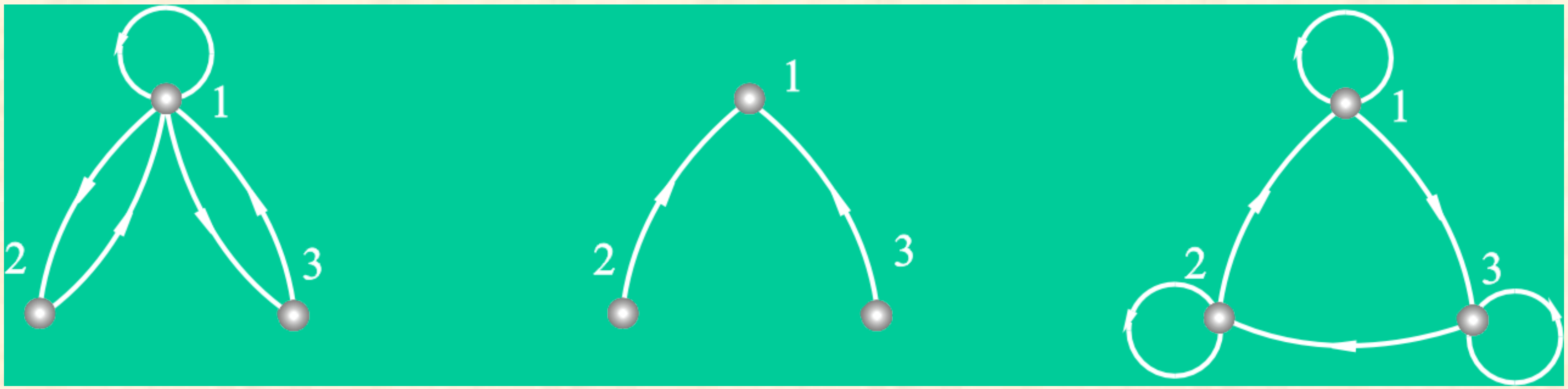
所以 R **在** A **上是传递的.**

三、关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在位置，M 中相应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

向量三角形

例 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(1)　　　　　　(2)　　　　　　(3)

图 4

(1) 不是自反也不是反自反的；对称的，不是反对称的；不是传递的.

(2) 是反自反但不是自反的；是反对称的但不是对称的；是传递的.

(3) 是自反但不是反自反的；是反对称的但不是对称的；不是传递的.

【例】 设R_i是$A=\{1, 2, 3\}$上的二元关系（如图7.4.1所示），判断它们各具有什么性质？并说明理由。

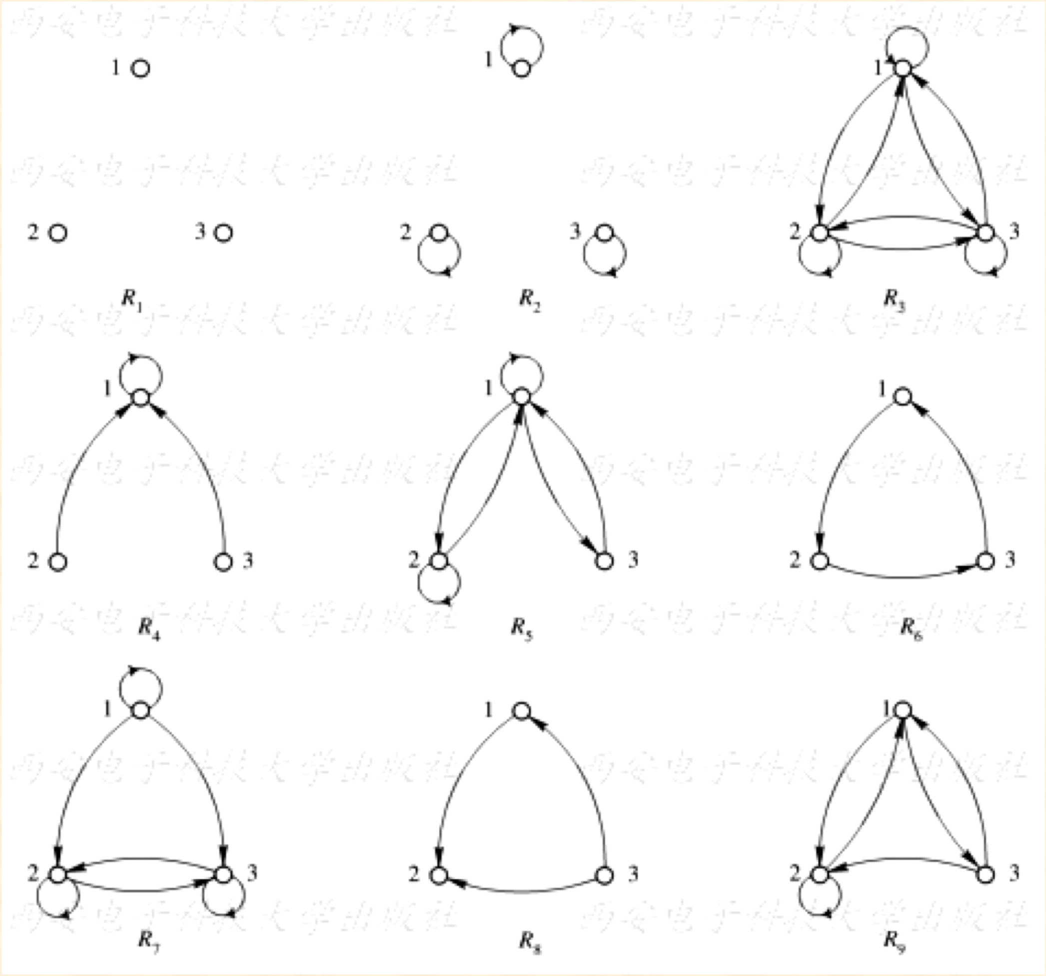
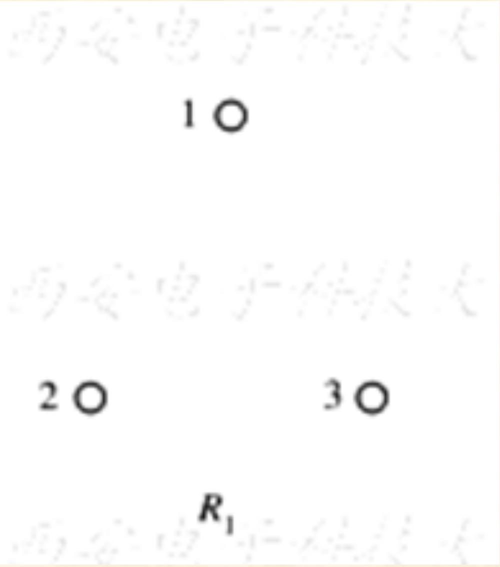
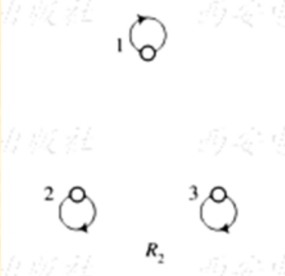


图7.4.1

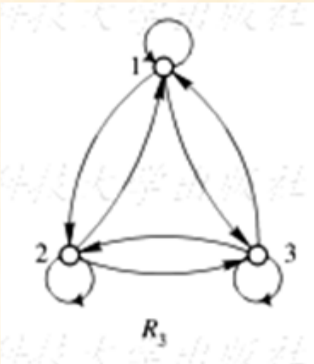
解 根据关系图的特征，我们可判断下列各关系具有的性质。

R_1具有反自反性、对称性、 反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，既无双边又无单边，也无三角形。

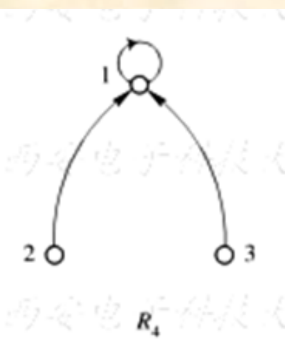




R_2具有自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处有一环，既无双边又无单边。

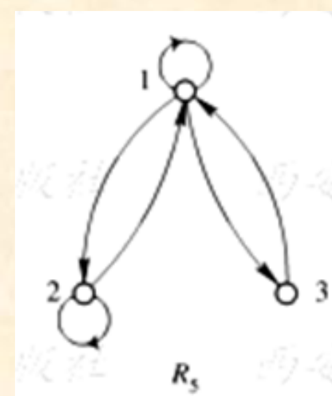


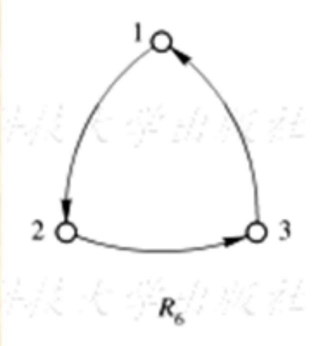
R_3具有自反性、对称性、传递性。因为每一结点处有一环，有边就有双边，有三角形就是向量三角形。



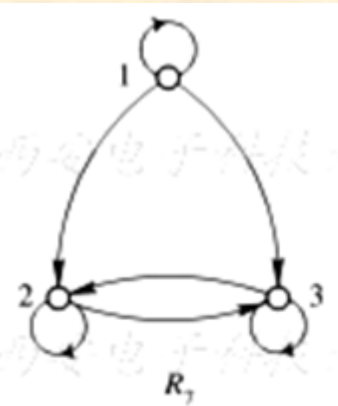
R_4具有反对称性、传递性。因为无双边，无三角形。

R_5具有对称性。因为无单边。

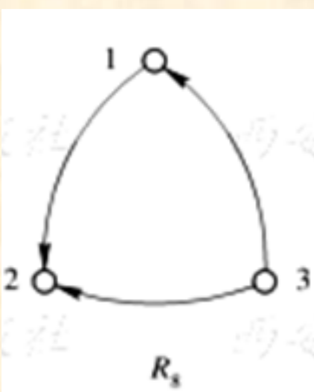




R_6具有反自反性、反对称性。因为每一结点处均无环。

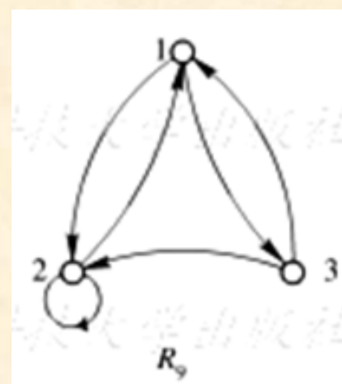


R_7具有自反性、传递性。因为每一结点处有一环，有三角形，且是向量三角形。



R_8具有反自反性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，有三角形，且是向量三角形。

R_9均不具备。



四. 五种性质对基本运算的封闭性

关系是序偶的集合，可作交、并、差、逆、 复合运算。

如果已知某些关系具有某一性质， 经过关系运算后的结果仍具有这一性质，我们称该性质对这一运算封闭。

定理7.4.2 设R_1、R_2是A上的自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 \circ R_2$也是A上的自反关系。证明留给读者。

定理7.4.3 设R_1、R_2是A上的对称关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$也是A上的对称关系。

证明 仅证对称性对并运算封闭。

设R_1，R_2对称要证$R_1 \cup R_2$对称。任取$\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2$，那么$\langle x, y\rangle \in R_1$或$\langle x, y\rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$对称知$\langle y, x\rangle \in R_1$或$\langle y, x\rangle \in R_2$，因而$\langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$。$R_1 \cup R_2$对称性得证。

按照定义来证明

若$\forall x \forall y(x,y \in A \land \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$，则称$R$为$A$上对称的关系

定理7.4.4 设R_1、R_2是A上的传递关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$是A上的传递关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是传递的。 ($R_1 = \{<1,3>\}, R_2 = \{<3,4>\}$)

证明 (1) 证传递性对求逆运算封闭。

设R_1传递，要证R_1^{-1}传递，设有$\langle x, y\rangle \in R_1^{-1}$，$\langle y, z\rangle \in R_1^{-1}$，那么$\langle y, x\rangle \in R_1$，$\langle z, y\rangle \in R_1$。由$R_1$具有传递性可得$\langle z, x\rangle \in R_1$，即$\langle x, z\rangle \in R_1^{-1}$。

R_1^{-1}在A上是传递的，得证。

设R为A上的关系, 若
$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R)$, 则称$R$是$A$上的传递关系.

(2) 证传递性对交运算封闭。

设R_1，R_2传递，要证$R_1 \cap R_2$传递。设有$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2$，那么$\langle x, y\rangle \in R_1$，$\langle x, y\rangle \in R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1$，$\langle y, z\rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$具有传递性，可得$\langle x, z\rangle \in R_1$，$\langle x, z\rangle \in R_2$，从而$\langle x, z\rangle \in R_1 \cap R_2$。故$R_1 \cap R_2$在$A$上是传递的，得证。

定理7.4.5 设R_1、R_2是A上的反对称关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 - R_2$是A上的反对称关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是反对称的 。$R_1 = \{<1,3>\}, R_2 = \{<3,1>\}$

证明 仅证反对称性对差运算封闭。

设 R_1，R_2反对称，要证$R_1 - R_2$反对称。

设〈x，y〉$\in (R_1 - R_2)$且〈y，x〉$\in (R_1 - R_2)$，因而〈x，y〉$\in R_1$，〈y，x〉$\in R_1$，从而由R_1的反对称性得$x=y$。这就完成了$R_1 - R_2$反对称的证明。

若$\forall x \forall y (x,y \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \rightarrow x=y)$，则称R为A上的反对称关系.

定理7.4.6 设R_1、R_2是A上的反自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$是A上的反自反关系。

证明留给读者。

我们举例说明反自反性、对称性、反对称性、传递性对复合运算均不封闭。

【例7.4.3】 $A=\{a, b, c\}$，讨论在下列各种情况下$R \circ S$是否具有原有的性质。

$R \circ S = \{<a, a>\}$

(1) $R=\{\langle a, b\rangle\}$, $S=\{\langle b, a\rangle\}$， R、S是反自反的。不是反自反

(2) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$， $R \circ S = \{<a, c>\}$， 不是对称

$S=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$， R、S是对称的。

(3) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$， $R \circ S = \{<a, b>, <b, a>\}$， 对称

$S=\{\langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$， R、S是反对称的。

(4) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$，

$S=\{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$，$R$、$S$是传递的。

$R \circ S = \{<a, a>, <b, a>, <a, c>\}$， 不是传递的

补充练习（课后完成）。

(1)设A={1,2,3,4,6,12}，A中“整除”关系记为R，问：R是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？

(2)设A={2,3,4,6,12,24,36}，A中“整除”关系记为R，求R^{-1}及R的关系矩阵，说明R^{-1}的属性。

(3)设A={a,b,c,d}，判定下列关系的性质

R1={<a,a>,<b,a>}

R2={<a,a>,<b,c>,<d,a>}

R3={<c,d>}

R4={<a,a>,<b,b>,<c,c>}

R5={<a,c>,<b,d>}

五、关系的性质和运算之间的联系.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关 系 的 闭 包

闭包运算是关系运算中一种比较重要的特殊运算，是对原关系的一种扩充。在实际应用中，有时会遇到这样的问题，给定了的某一关系并不具有某种性质，要使其具有这一性质，就需要对原关系进行扩充，而所进行的扩充又是“最小”的。这种关系的扩充就是对原关系的这一性质的闭包运算。

一、闭包定义

定义 7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包是 A 上的关系 R', 使得 R'满足以下条件:

(1) R'是自反的 (对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。它们分别是具有自反性或对称性或传递性的R的“最小”超集合。称r、s、t为闭包运算，它们作用于关系R后，分别产生包含R的、最小的具有自反性、对称性、传递性的二元关系。这三个闭包运算也可由下述定理来构造。

二、闭包的构造方法

1．集合表示

定理 设 R 为 A 上的关系，则有

（1）$r(R)=R\cup R^0$

（2）$s(R)=R\cup R^{-1}$

（3）$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

（1）R'是自反的（对称的或传递的）
（2）$R\subseteq R'$
（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系R'' 有$R'\subseteq R''$.

证明思路：

(1) 和 (2) ：证明右边的集合满足闭包定义的三个条件.

(3) 采用集合相等的证明方法.

证明左边包含右边，即 $t(R)$包含每个 R^n.

证明右边包含左边，即 $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$具有传递的性质.

证

(1) 由 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 可知 $R\cup R^0$ 是自反的，且满足 $R\subseteq R\cup R^0$

设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R\subseteq R''$ 和 $I_A\subseteq R''$

从而 $R\cup R^0\subseteq R''$

综上所述 $R\cup R^0$ 满足闭包定义的三个条件，所以

$r(R)=R\cup R^0$.

（3）先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

方法：用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n\subseteq t(R)$

$n=1$ 时有 $R^1=R\subseteq t(R)$.

假设 $R^n\subseteq t(R)$成立，那么对任意的$\langle x,y\rangle$有

$$\langle x,y\rangle\in R^{n+1}=R^n\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in R^n\wedge\langle t,y\rangle\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in t(R)\wedge\langle t,y\rangle\in t(R))$$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in t(R)$ （因为 $t(R)$是传递的）

这就证明了 $R^{n+1}\subseteq t(R)$．由归纳法命题得证.

也可以从三个条件入手，t(R)可以看做A上任何包含R的传递关系R''：
（1）$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的
（2）$R\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$
（3）对A上任何包含R的传递关系R''有$R\cup R^2\cup\ldots\subseteq R''$.

再证 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$**成立，为此只须证明** $R\cup R^2\cup\ldots$**是传递的.**

任取$<x,y>,<y,z>$，**则**

$$<x,y>\in R\cup R^2\cup\ldots\wedge<y,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\exists s(<x,z>\in R^t\circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\exists s(<x,z>\in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

从而证明了 $R\cup R^2\cup\ldots$**是传递的.**

依据定义，t(R)为包含R且具有传递性的最小集合。

【例7.5.1】 设$A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，$R_3=\{\langle 1, 2\rangle\}$，求它们的闭包。

解 $r(R_1)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

$s(R_1)=R \cup R^{-1}$

$=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$t(R_1)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle,$
$\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$r(R_2)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$s(R_2)=R \cup R^{-1}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}=R_2$

$t(R_2)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$r(R_3)=I_A \cup R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$s(R_3)=R \cup R^{-1}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$t(R_3)=\{\langle 1, 2\rangle\}=R_3$

2. 矩阵表示和图表示

矩阵表示:

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$$M_r=M+E \qquad M_s=M+M' \qquad M_t=M+M^2+M^3+\dots$$

其中 E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

图表示方法:

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t, 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新的边.

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环. 最终得到的是 G_r. $\boxed{r(R)}$

考察 G 的每一条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到 G_s. $\boxed{s(R)}$

考察 G 的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的所有 2 步, 3 步, …, n 步长的路径（n 为 G 中的顶点数）.设路径的终点为 $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}$, 如果没有从 x_i 到 x_{jl} (l=1,2,…,k)的边, 就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t. $\boxed{t(R)}$

因为在R的关系图中，任意两个顶点之间不含回路的路径最多n步长，而含有回路的路径不会产生新的路径。

【例7.5.2】 设R是集合$A=\{a,b,c,d\}$上的二元关系

$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$。求$R$的闭包：

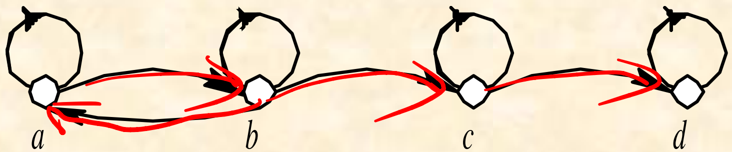
r（R）、s（R）、t（R），并画出对应的关系图。

解 $r(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

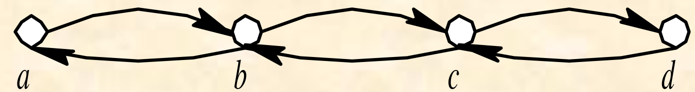
$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle\}$

$t(R)=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$

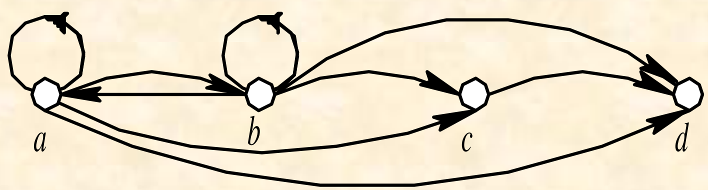
其对应的关系图分别如图7.5.1(a)、(b)、(c)所示。



(a)



(b)

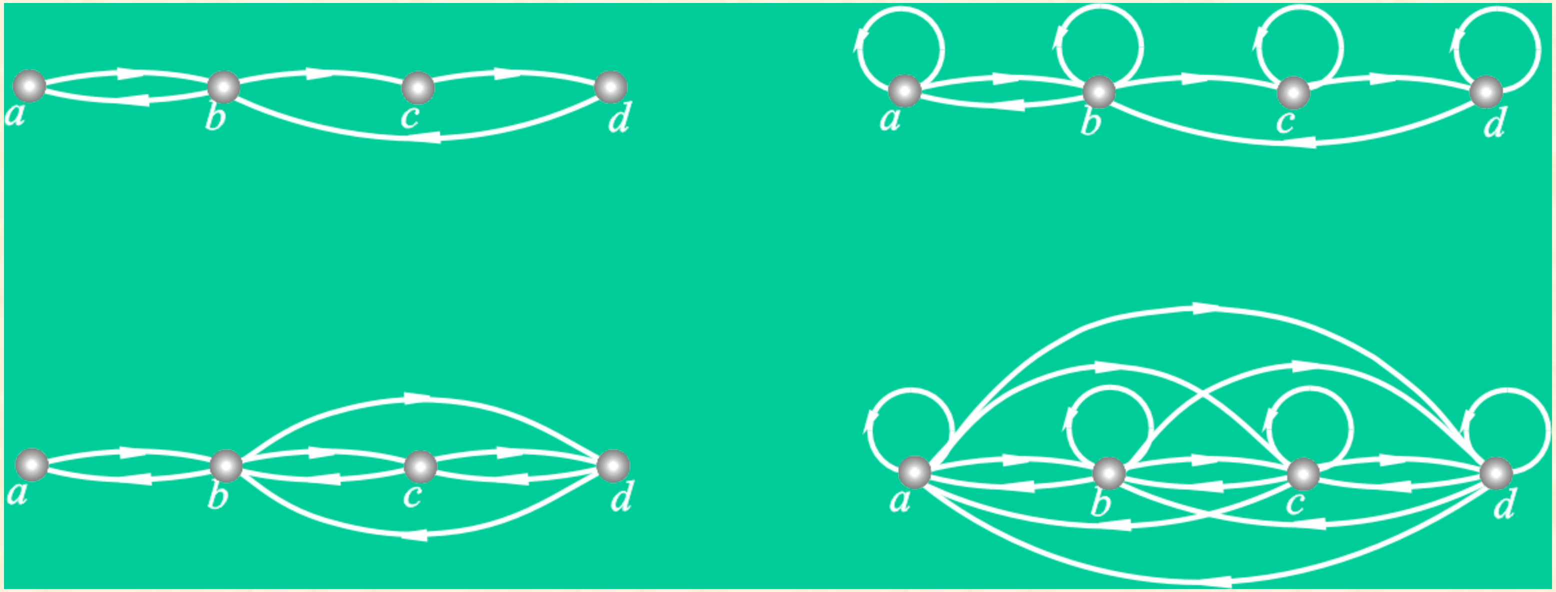


(c)

图 7.5.1

练习 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$,

R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



$s(R)$ $t(R)$

图 5

从以上讨论可以看出，传递闭包的求取是很复杂的。但是，当集合A为有限集时，A上二元关系的传递闭包的求取便可大大简化。

推论 A为非空有限集合，$|A|=n$。R是A上的关系，则存在正整数$k\leq n$，使得

$$t(R)=R^{+}=R\cup R^{2}\cup\ldots\cup R^{k}$$

$$M_t = M+M^2+\ldots+M^k$$

因为在R的关系图中，任意两个顶点之间不含回路的路径最多n步长

补充：设A={1,2,3,4,5}， A中关系R={<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>}， 求t(R)

解：R^2={<1, 3>, <4, 2> ,<5, 3>}

R^3={<4, 3>}

$R^4=\Phi$ $\boxed{R^k=\Phi,\ k>4}$

t(R)= $R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

={<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2> ,<1, 3>,

<4,2> ,<5, 3>,<4, 3>}

下列算法是求取R^+的有效算法。

$Warshall$(沃夏尔) 算法：设R为有限集A上的二元关系，$|A|=n$，M为R的关系矩阵，可如下求取R^+的关系矩阵 W。

（1） 置 W为M。

（2） 置$i=1$。

（3） 对所有j， $1\le j\le n$， 做

① 如果$W[j, i]=1$，则对每一$k=1, 2, \ldots, n$，置$W[j, k]$为$W[j, k] \vee W[i, k]$，即当第j行、第i列为1时，对第j行每个分量重新置值，取其当前值与第i行的同列分量之析取。

把i看成纽带元素，
当W[j,i]·W[i,k]=1时，那么从j到k的路径可以经过i，W[j,k]=1，即复合结果会包含序偶<j,k>。

② 否则对下一j值进行①。

（4） 置i为$i+1$（遍历所有“纽带”元素）。

（5） 若$i \le n$，回到步骤（3），否则停止。

即：

```
for i ← 1 to n do
   for j ← 1 to n do
       for k ← 1 to n do
              if W[j,i] ==1 then
                  W[j,k] = W[j,k] ∨ W[i,k]
```

最后两行代码也等价于

W[j,k] = W[j,k] ∨ (W[j,i]·W[i,k])

- 原理
  - 第i个循环中，将第i个结点看成纽带结点，对于任意两个结点(遍历j, k)之间，统计关系图中只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_i\}$中结点的路径。这些路径分为两类：
    - （1） 只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}\}$的路径，即$W[j, k]=1$（已经为1）
    - （2）经过纽带结点i，即$W[j, i]\cdot W[i, k]$

    两类路径取并集： $W[j, k]=W[j, k]\vee(W[j, i]\cdot W[i, k])$
  - 通过遍历i，从而统计关系图中经过越来越大结点集合的路径（因此i是最外面的循环），当遍历$i=n$后，即得到所有可能的路径。

【例4.5.3】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$, 则

$R^2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$

$R^3=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

因此$R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle,$
$\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,$
$\langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle,$
$\langle 4,4\rangle\}$

现用*Warshall*算法求取R^+。

显然，

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即：

```
for i ← 1 to n do
   for j← 1 to n do
       for k ← 1 to n do
               if W[j,i] ==1 then
                  W[j,k] = W[j,k] ∨ W[i,k]
```

最后两行代码也等于

```
 W[j,k] = W[j,k] ∨ (W[j,i]·W[i,k])
```

以下使用*Warshall*算法求

（1） W以M为初值。

（2） 当$i=1$时，由于 W中只有$W[1,1]=1$，故需将第一行各元素与其本身作逻辑和，并把结果送第一行。即重新置值为 $W[1,k] \vee W[1,k] = W[1,k]$，但 W 事实上无改变。

（3） 当i=2时，由于 $W[1,2] = W[4,2] = 1$，故需将第一行和第四行各分量重新置值为 $W[1,k] \vee W[2,k]$ 和 $W[4,k] \vee W[2,k]$。于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（4） 当i=3时，由于 W［1，3］＝W［2，3］＝W［4，3］=1，故需将第一、二、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［3, k］＝W［1，k］， W［2，k］∨ W［3，k］=W［2，k］，W［4，k］∨ W［3，k］= W［3， k］。

于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（5） 当i＝4时，由于 W［1，4］＝ W［2, 4］＝ W［3, 4］＝ W［4， 4］=1，故需将第一、二、三、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［4, k］＝ W［1，k］，W［2，k］∨ W［4，k］= W［2，k］，W［3，k］∨ W［4， k］＝ W ［3，k］， W［4，k］∨ W［4，k］＝ W［4，k］。最终 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故$R^{+}=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle,$

$\langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,$

$\langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle,$

$\langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$。

下面几个定理给出了闭包的主要性质。

定理 7.11 设R是集合A上任一关系，那么

（1） R自反当且仅当$R=r(R)$。

（2） R对称当且仅当$R=s(R)$。

（3） R传递当且仅当$R=t(R)$。

证明 （1）、（3）的证明留给读者，现证（2）。

（2）的充分性由$s(R)$定义立得。

为证必要性，设R对称, 那么$R=R^{-1}$。另一方面，$s(R)=R\cup R^{-1}=R\cup R=R$，故$s(R)=R$。

定理7.12 对非空集合A上的关系R_1、R_2，若$R_1 \subseteq R_2$，则

（1） $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2） $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3） $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 （1）和（2）的证明留作练习，下面仅证明（3）。

因为$t(R_2)$传递，且$R_2 \subseteq t(R_2)$，但$R_1 \subseteq R_2$，故$R_1 \subseteq t(R_2)$

因$t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系，所以$t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

定理 对非空集合A上的关系R_1、R_2，则

（1） $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2） $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3） $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证明 (1）和（2）的证明留作练习， 下面仅证明（3）。

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, 由定理7.12知

$$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

同理 $$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

所以 $$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

定理7.13 设R是集合A上任意二元关系，则

（1） 如果R是自反的，那么$s(R)$和$t(R)$都是自反的。

（2） 如果R是对称的，那么$r(R)$和$t(R)$都是对称的。

（3） 如果R是传递的，那么$r(R)$是传递的。

证明

（1）是显然的。

（2） 由于

$r(R)^{-1}=(I_A\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$, 故$r(R)$是对称的。

另外， 由于对任意自然数n，

$(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$，又由于R对称， 故 $(R^n)^{-1}=R^n$。 因此，对任意〈x, y〉$\in t(R)$, 总有i使〈x, y〉$\in R^i$， 从而〈y, x〉$\in(R^i)^{-1}=R^i$， 即〈y, x〉$\in t(R)$。 故$t(R)$对称。

$\boxed{t(R)=R\cup R^2\cup\ldots}$

（3） 本式证明留给读者。 请注意， R传递并不保证$s(R)$传递。 例如， $R=\{\langle a, b\rangle\}$是传递的， 但是$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$却不是传递的。

定理 7.14 设R为集合A上的任一二元关系，

那么

（1） $rs(R)=sr(R)$

（2） $rt(R)=tr(R)$

（3） $st(R)\subseteq ts(R)$

证明

（1） $sr(R)=s(I_A\cup R)=I_A\cup R\cup(I_A\cup R)^{-1}$

$$=I_A\cup R\cup R^{-1}=I_A\cup s(R)=rs(R)$$

(2) 易证$(I_A \cup R)^n = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

可以采用数学归纳法证明

对一切正整数n均成立，于是

$$tr(R) = t(I_A \cup R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup R)^i$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup \bigcup_{j=1}^{i} R^j)$$

$$= I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$= I_A \bigcup t(R) = rt(R)$$

（3） 由定理7.12可知， 任一闭包运算Δ和任意二元关系R_1、 R_2， 如果$R_1 \subseteq R_2$，那么$\Delta(R_1) \subseteq \Delta(R_2)$； 又据闭包定义， 对任意二元关系$R$有$R \subseteq s(R)$，故$t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R) = ts(R)$ (由定理7.13，$ts(R)$是对称的，所以$sts(R) = ts(R)$（定理7.11））。 于是可得到

$$st(R) \subseteq ts(R)$$

【例7.5.4】 设R是集合X上的二元关系，X=$\{a, b, \mathrm{c}\}$，$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle\}$。求$st(R)$和$ts(R)$，并画出关系图。

解 $t(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle\}$

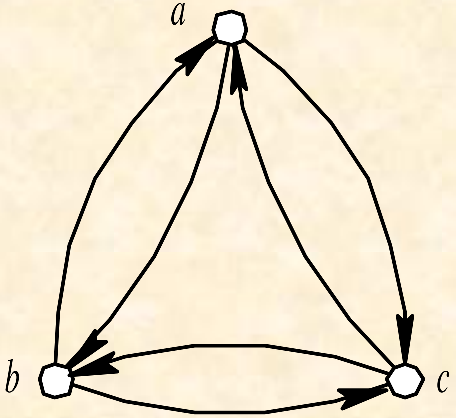
$st(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle, \langle \mathrm{c}, a\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle\}$

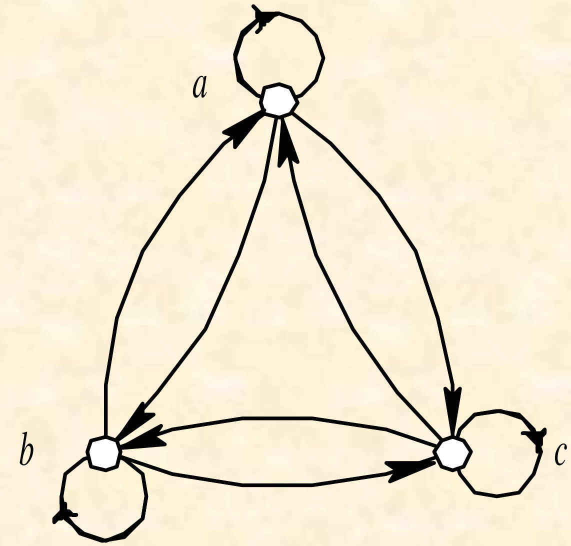
$ts(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle \mathrm{c}, a\rangle, \langle \mathrm{c}, \mathrm{c}\rangle\}$

$st(R)$和$ts(R)$的关系图分别如图7.5.2(a)、(b)所示。

$$st(R) \subseteq ts(R)$$



(a)



(b)

图 7.5.2

课后作业

- 21
- 22
- 24 R_1-R_2 对自反性的封闭性、 $R_1 \cup R_2$ 对反对称性和传递性的封闭性分别给出反例。
- 25
- 29
- 30