经典力学

第一章：质点运动学

第二章：质点动力学

第三章：刚体的定轴转动

- 经典力学
  - “运动学”
    - 质点运动的描述
    - 圆周运动
    - 相对运动
  - “动力学”
    - 牛顿定律
    - 动量/能量守恒定律
    - 刚体的定轴转动

当牛顿在研究微积分和牛顿定律的时候，另外一位出色的德国数学物理学家莱布尼茨，也在研究物体的运动规律。与牛顿提出用“动量”来衡量物体运动的改变不同的是，莱布尼茨提出了另一种概念：假设两个速度为$\boldsymbol{v}_1$和$\boldsymbol{v}_2$的物体发生碰撞，那么碰撞后，即便它们的速度发生改变，它们的质量与速度的平方的乘积之和保持不变，这个乘积，莱布尼茨称为“活力”。

$$m_1 v_1{}^2 + m_2 v_2{}^2 = m_1 v_1{}'^2 + m_2 v_2{}'^2$$

能量（Energy）

有一个事实，如果你愿意的话，也可以说一条定律，支配着至今我们所知道的一切自然现象。没有发现这条定律有什么例外——就我们所知，它是完全正确的。这条定律称为能量守恒定律。它指出，在自然界所经历的种种变化之中，有一个称为能量的物理量是不变的。那是一个最抽象的概念，因为它是一种数学原理，说的是在某种情况发生时，有一个数量是不变的。它并不是一种对机制或者具体事物的描写，而只是一件奇怪的事实。由于这是一种抽象的概念，我们将用一个比喻来说明它的含义。

——《费曼物理学讲义第四章》能量守恒

能量（Energy）

……重要的是要认识到：在今天的物理学中，我们不知道能量究竟是什么。我们并不把能量想象成为以一定数量的颗粒物形式出现。它不是那样的。可是有一些公式可以用来计算某种数量，当我们把这些数量全部加在一起时，结果就“28”——总是同一个数目。这是一个抽象的对象，它一点也没有告诉我们各个公式的机制或者理由是什么。

——《费曼物理学讲义第四章》能量守恒

能量（Energy）

抽象地说，必须从这个图像中除去的最显著的一点就是，根本没有积木。上述比较的相似之处在于以下几点。第一，当我们计算能量时，有时其中的一部分离开系统跑掉了，有时又有另一些能量进入这个系统。为了验证能量的守恒，必须注意我们没有把能量引入系统中或从系统中取走。第二，能量有许多不同的形式，对每一种形式都有一个公式。这些不同形式的能量是：引力能、动能、热能、弹性能、电能、化学能、辐射能、核能、质能。假如我们把表示这些能量的公式全都加在一起，那么，除非有能量逸出或有其他能量加入，否则其总和是不会改变的。

——《费曼物理学讲义第四章》能量守恒

§3 功与动能定理

力的空间累积效应: $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$积累 ⟶ A

一、功

力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量）

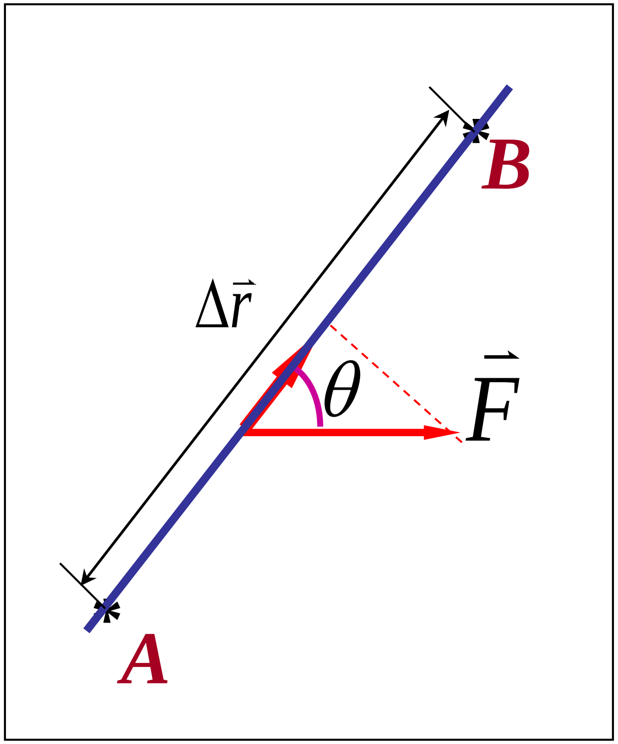
1. 恒力所做的功

$$A = F\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ,\quad A > 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ,\quad A < 0$$

$$\theta = 90^\circ\quad \vec{F}\perp\Delta\vec{r}\quad A = 0$$



2. 变力所做的功

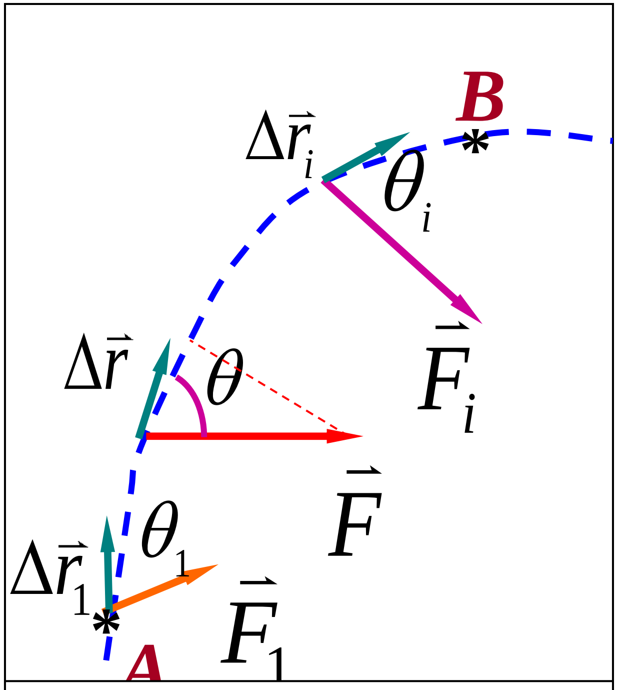
$$A \approx \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1} F_i \left|\Delta\vec{r}_i\right| \cos\theta_i$$

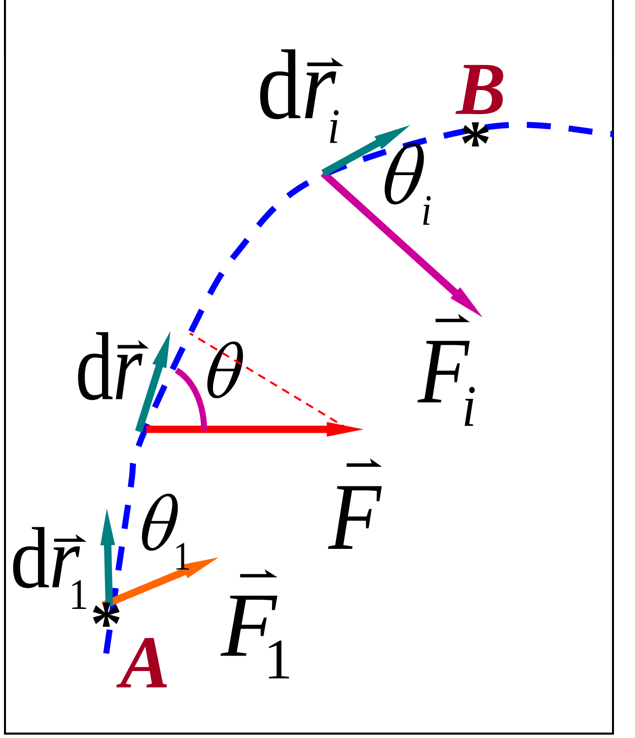
$$A = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \mathrm{d}s}$$

$$\mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

➢元功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cos\theta \mathrm{d}s$

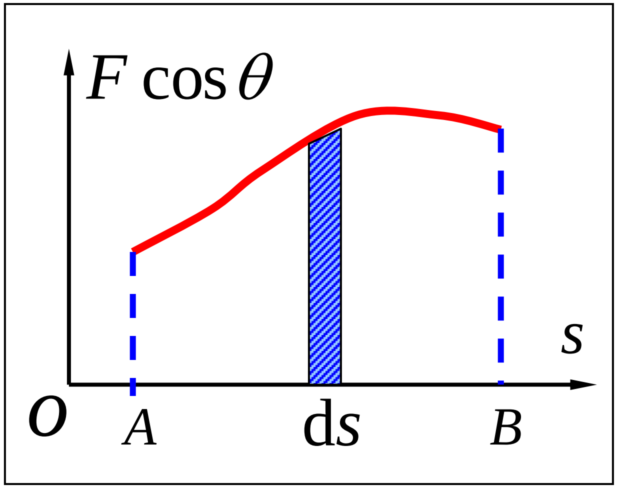




- 变力功的图示法

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}s\cos\theta$$

$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\mathrm{d}s}$$



- 合力的功 = 分力的功的代数和

$$A = \int\sum\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i A_i$$

$$\begin{cases}\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\end{cases}$$

$$A = \int F_x\mathrm{d}x + \int F_y\mathrm{d}y + \int F_z\mathrm{d}z$$

$$A = A_x + A_y + A_z$$

- 功的大小与参考系有关
- 功的单位 $1\mathrm{J}=1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$
- 做功的三个要素：力、物体、过程

3. 功率

平均功率 $$\bar{P}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

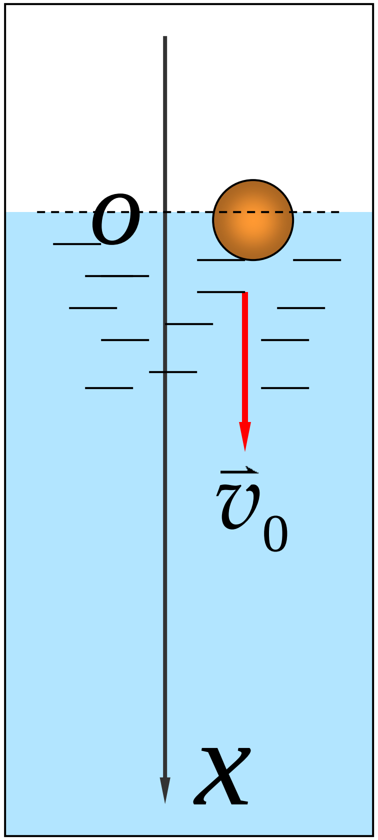
瞬时功率 $$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$P=Fv\cos\theta$$

功率的单位：瓦特（**W**） $1\mathrm{W}=1\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $1\mathrm{kW}=10^{3}\mathrm{W}$

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0 。设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r = -bv$ ，b 为一常量。求阻力对球做的功与时间的函数关系 。

解 如图建立坐标轴



$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -bv\, dx = -\int bv \frac{dx}{dt} dt$$

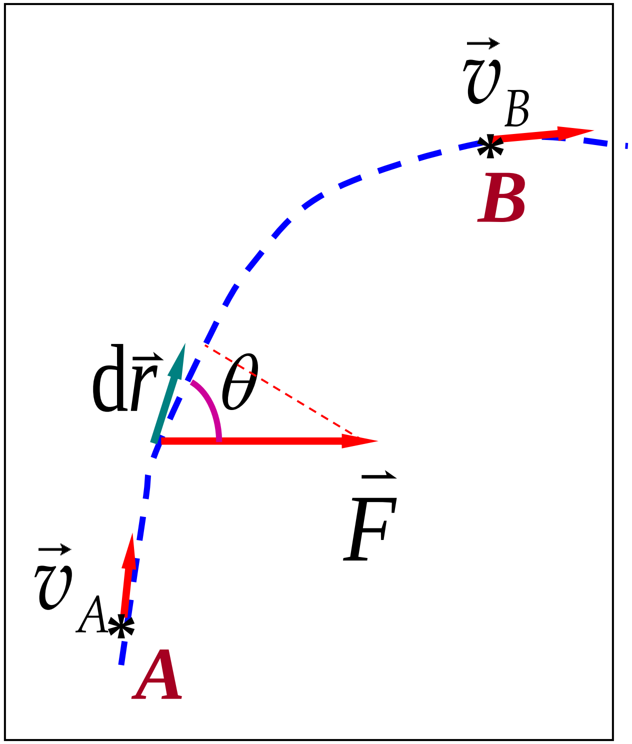
即 $$A = -b\int v^2\, dt$$

又由 前面的例题知 $$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore A = -bv_0^2 \int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t} dt$$

$$A = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

二、质点的动能定理



$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int F_t\left|d\vec{r}\right|=\int F_t ds$$

而 $F_t = m\dfrac{dv}{dt}$

$$A=\int_{v_A}^{v_B} m\frac{dv}{dt}ds=\int_{v_A}^{v_B} m\frac{ds}{dt}dv$$

$$=\int_{v_A}^{v_B} mv dv=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

定义：动能（状态函数）—— $\boxed{E_k=\frac{1}{2}mv^2}$

物体的速度发生改变时 = 物体的动能发生了变化?

动能定理

——合外力对质点所做的功数值上等于该质点动能的增量。

$$\boxed{A=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{2}-\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2}=E_{\mathrm{kB}}-E_{\mathrm{kA}}}$$

注意：

- 功是过程量，动能是状态量。
- 功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系。对不同惯性系动能定理形式相同。

例 2 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上。起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落。试求绳与竖直线成 10°角时小球的速率。

解：

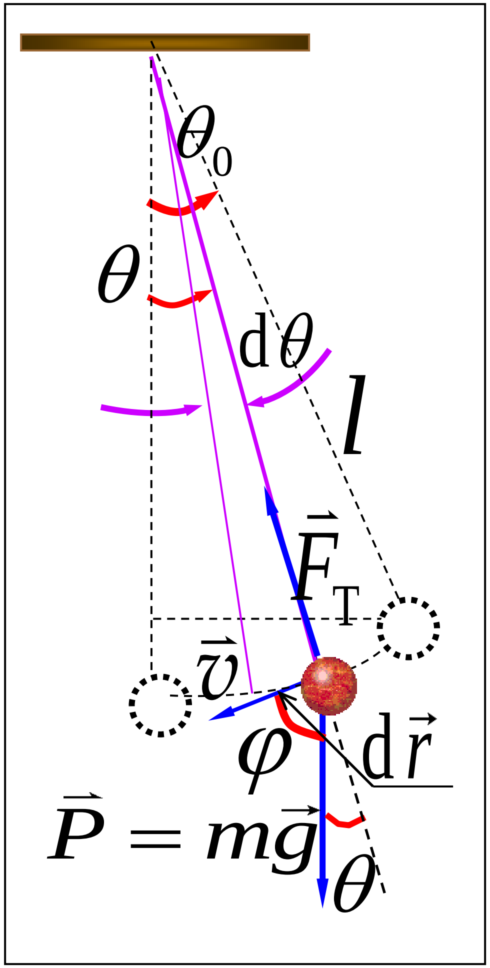
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$



回顾圆周运动

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{\theta}\times\vec{r}}$$

$$m = 1.0\text{kg} \qquad l = 1.0\text{m}$$

$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

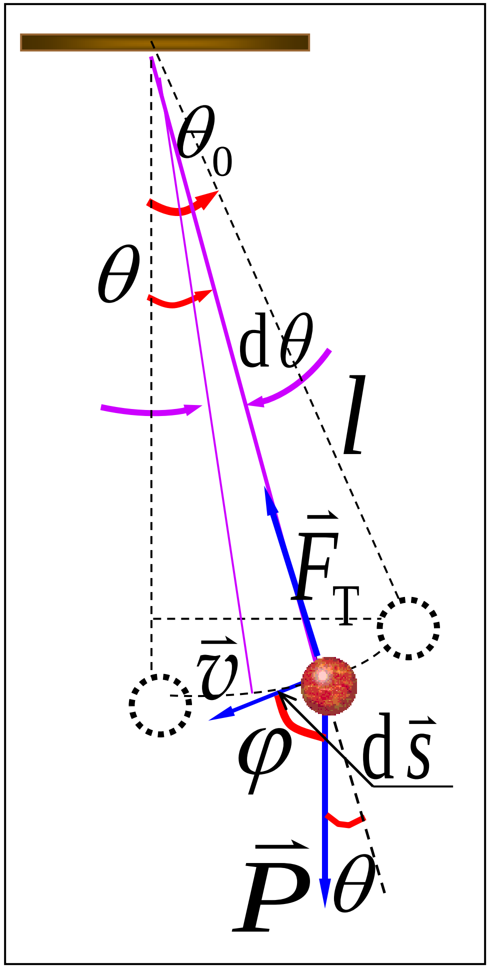
$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得 $$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= 1.53\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$



参考教材32页例2-5

§4 势能

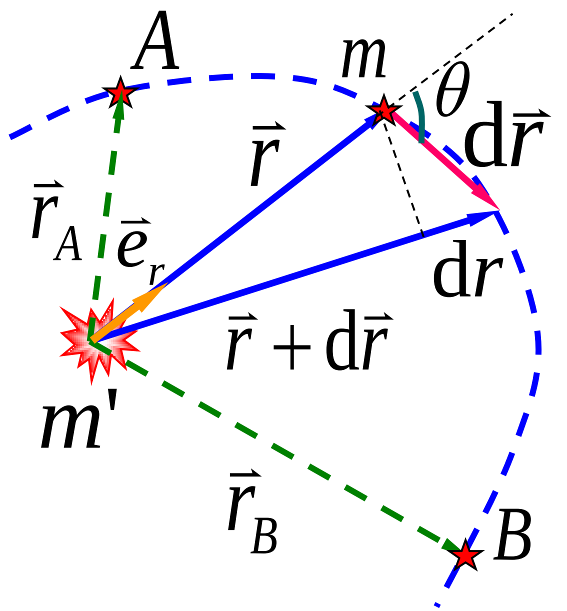
一、万有引力、重力、弹性力做功的特点

1. 万有引力做功

以 m'为参考系，m 的位置矢量为 $\vec{r}$ 。

m' 对 m 的万有引力为

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r}$$



m移动$\mathrm{d}\vec{r}$时，$\vec{F}$做元功为

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

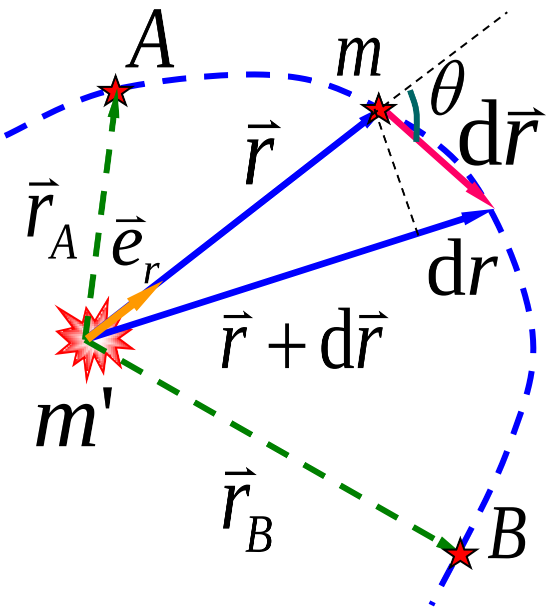
m从A到B的过程中 $\vec{F}$ 做功：

$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\left|\vec{e}_r\right|\cdot\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\mathrm{d}r$$

$$A=\int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{A=Gm'm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)}$$



只与始末位置有关！

2 . 重力做功

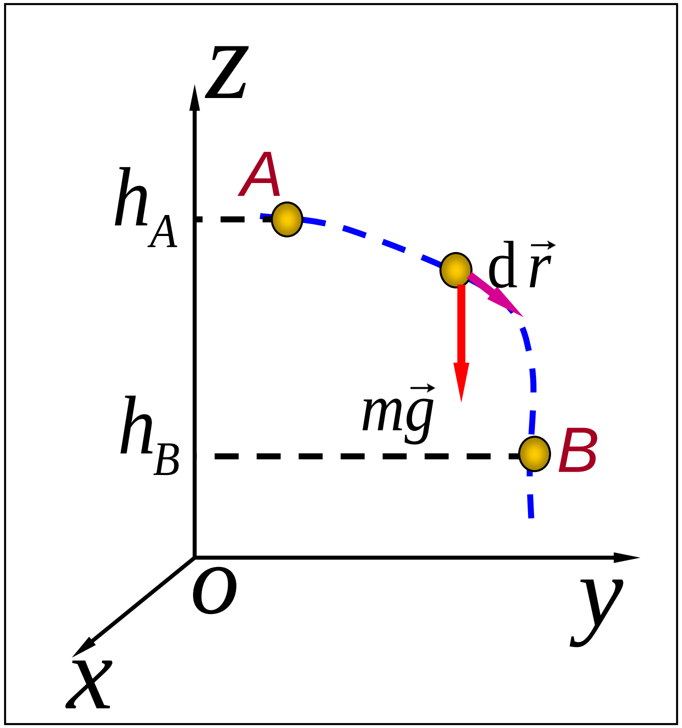
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

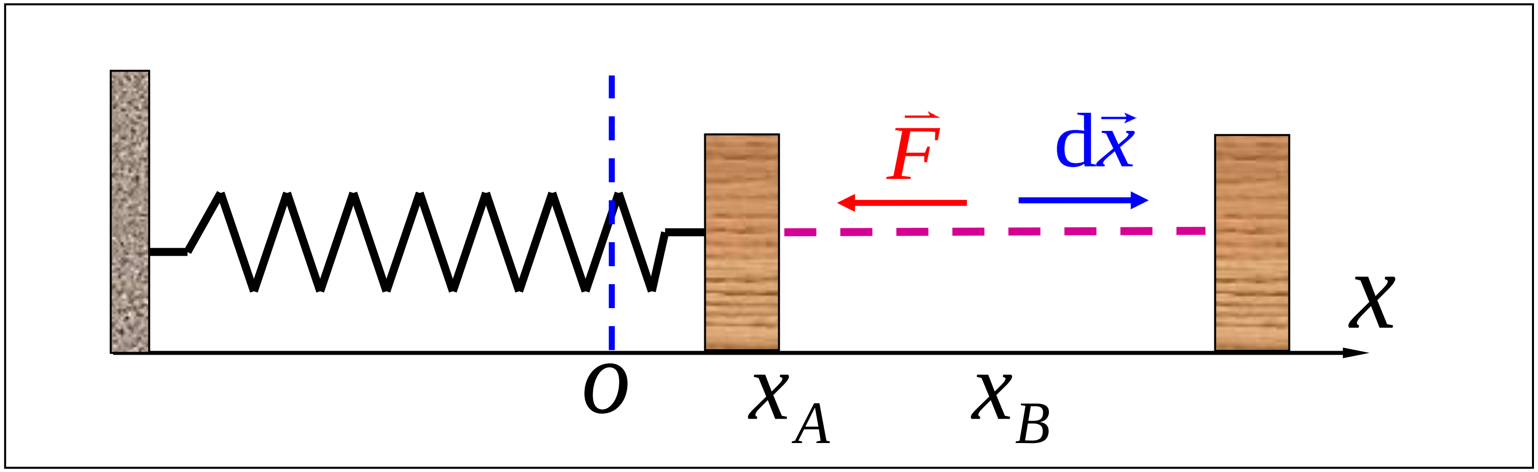
$$A = \int_A^B \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{h_A}^{h_B} -mg\mathrm{d}z$$

$$= -(mgh_B - mgh_A)$$

$$A = \oint -mg\mathrm{d}z = 0$$



3. 弹性力做功



$$\boxed{\vec{F} = -kx\vec{i}} \qquad \mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x\vec{i}$$

$$A = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} -kx\mathrm{d}x$$

$$A = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2) \qquad A = \oint -kx\mathrm{d}x = 0$$

二、保守力和非保守力

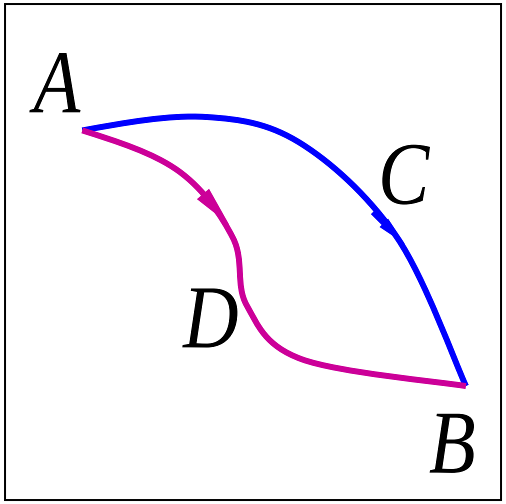
保守力: 力所做的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的始末相对位置。

引力功 $$A=-\left[\left(-G\frac{m'm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{m'm}{r_A}\right)\right]$$

重力功 $$A=-(mgh_B-mgh_A)$$

弹力功 $$A=-\left(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

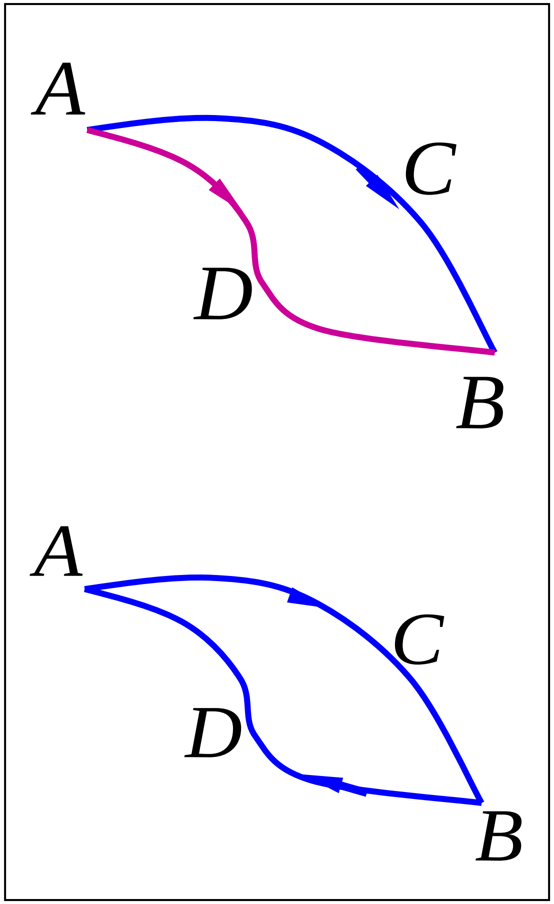


$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{ADB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\because \oint_{L} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\therefore \oint_{L} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



物体沿闭合路径运动 一周时，

保守力对它所做的功等于零。

非保守力：力所做的功与路径有关 。（例：摩擦力）

常见的保守力:

- ♦ 万有引力 $F = F(r)\vec{e}_r$ (或有心力）
- ♦ 弹力 $\vec{f} = -k\vec{x}$（或位置的单值函数）
- ♦ 重力 $\vec{f} = m\vec{g}$（或恒力）

常见的非保守力（耗散力）：

- ♦ 摩擦力
- ♦ 爆炸力

三、势能

势能，与物体间相互作用及相对位置有关的能量。

重力功

$$A=-(mgh_B-mgh_A)$$

引力功

$$A=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

弹力功

$$A=-(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2)$$

重力势能

$$E_\mathrm{p}=mgh$$

引力势能

$$E_p=-G\frac{m'm}{r}$$

弹性势能

$$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2$$

保守力的功

$$\boxed{A=\int_1^2\vec{F}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-(E_{\mathrm{p}2}-E_{\mathrm{p}1})=-\Delta E_\mathrm{P}}$$

讨论：

➢势能是位置的函数。 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$

➢势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关 。

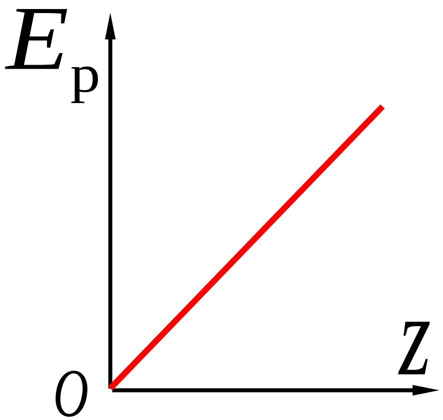
➢势能是属于系统的。

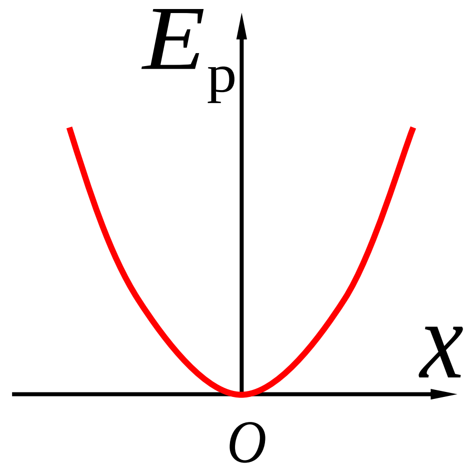
➢势能计算 $\boxed{E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}} = -A = -\int_{初}^{末} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$

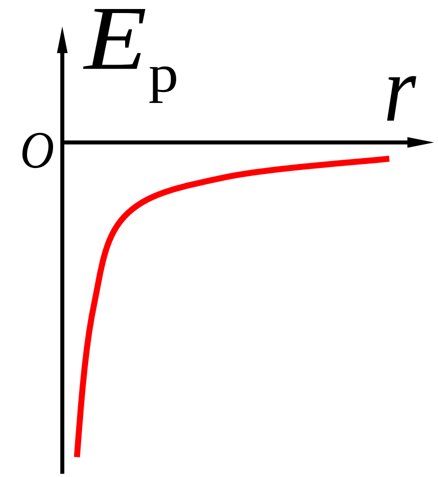
令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$ $\boxed{E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$

**四、势能曲线

$$E_p = mgz \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_p = -G\frac{m'm}{r}$$







重力势能曲线 弹性势能曲线 引力势能曲线

$z = 0, \quad E_p = 0 \qquad x = 0, \quad E_p = 0 \qquad r \to \infty, \quad E_p = 0$

<u>例3：</u>　一人从10m深的井中提水，起始时桶和水共重10kg，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水。求将水桶匀速地从井中提到井口，人所做的功。

$$W=\int_0^A \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_0^{10}(10-0.2z)g\cdot \mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{10}(98-1.96z)\mathrm{d}z=882(J)$$

例 4： 一质量为2kg的物体，在变力 $\vec{F}=6t\vec{i}$ 的作用下作直线运动，如果物体从静止开始运动，求前两秒此力所作的功。

$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int 6t\vec{i}\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}\right)$$

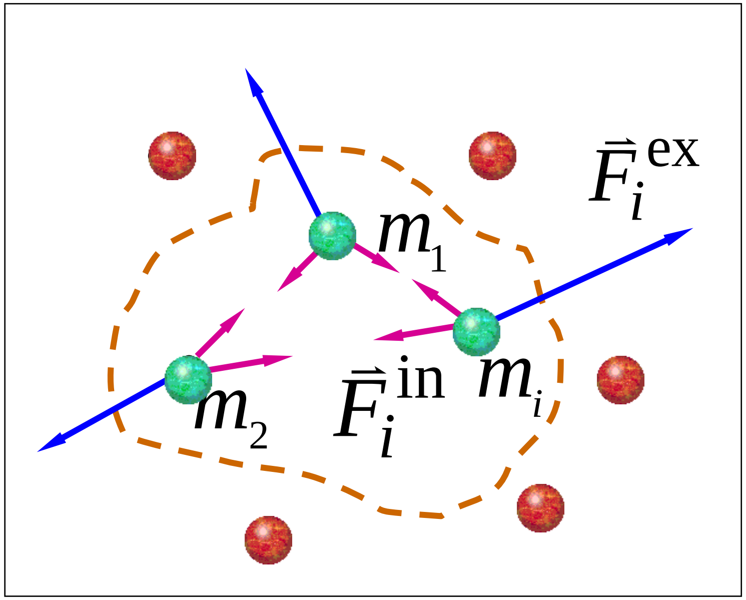
$$=\int 6t\mathrm{d}x=\int 6tv\,dt$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=3t\vec{i}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow v-0=\int 3t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^{2}$$

$$W=\int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^{2}\mathrm{d}t=\int_0^2 9t^{3}\mathrm{d}t=36(J)$$

§5 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理



质点系：由两个或两个以上的质点构成的系统。

质点系内质点受力：内力+外力

对于 N 个质点构成的质点系，其中第 i 个质点所受内力与外力所做的总功为：

$$A_i = A_{i内力} + A_{i外力}$$

内力功　外力功

根据质点的动能定理有：

$$A_{i内力} + A_{i外力} = E_{ki} - E_{ki0} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, \mathrm{N}$$

对质点系，有

$$\sum_i A_{i外力} + \sum_i A_{i内力} = \sum_i E_{\mathrm{k}i} - \sum_i E_{\mathrm{k}i0} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

质点系动能定理：作用于质点系的内力与外力功的代数和数值上等于质点系动能的增量。即

$$A_{内力} + A_{外力} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

- 内力可以改变质点系的动能。

二、质点系的功能原理

质点系动能定理 $$A_{外力}+A_{内力}=E_k-E_{k0}$$

$$A_{内}=\sum_i A_{i内}=A_{保守内}+A_{非保守内}$$

$$A_{保守内}=-(\sum_i E_{pi}-\sum_i E_{pi0})=-\left(E_p-E_{p0}\right)$$

$$A_{外力}+A_{非保守内}-\left(E_p-E_{p0}\right)=E_k-E_{k0}$$

$$A_{外力}+A_{非保守内}=(E_k+E_p)-(E_{k0}+E_{p0})$$

机械能 $E=E_k+E_p$

$$\boxed{A_{外力}+A_{非保守内}=E-E_0}$$

质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力做功之和。