经典力学

第一章：质点运动学

第二章：质点动力学

第三章：刚体的定轴转动

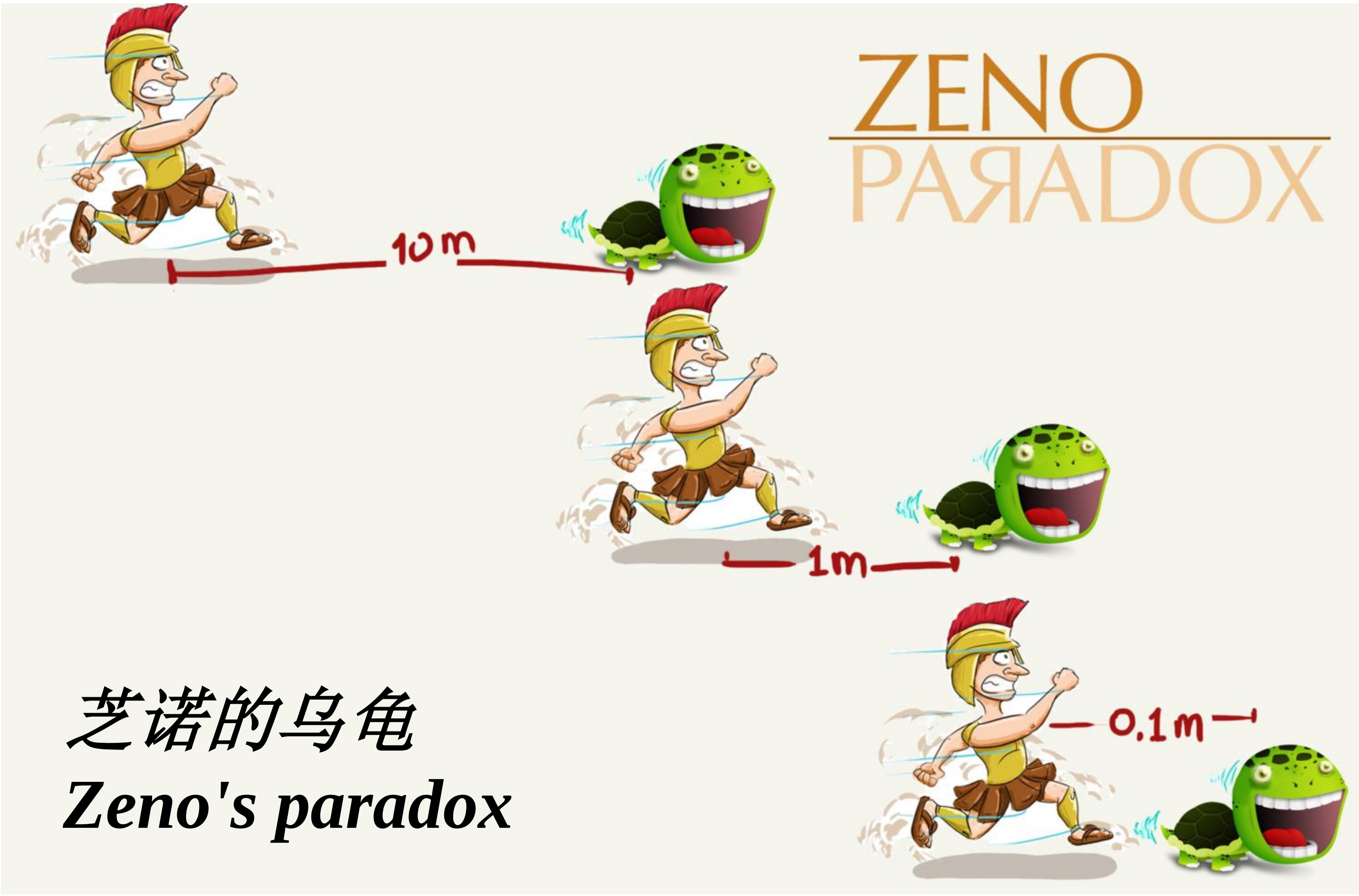
经典力学

- “运动学”
  - 质点运动的描述
  - 圆周运动
  - 相对运动
- “动力学”
  - 牛顿定律
  - 动量/能量守恒定律
  - 刚体的定轴转动

经典力学的建立

- 尼古拉斯·哥白尼 **Nicolaus Copernicus (1473–1543，波兰)**
  - 近代天文学的奠基者之一：地球围绕太阳运转（日心说）
- 第谷·布拉赫 **Tycho Brahe (1546–1601，丹麦)**
  - 近代天文学的奠基者之一： 他用眼睛观测了许多天文现象，观测的行星运动数据为开普勒的研究奠定了基础
- 约翰尼斯·开普勒 **Johannes Kepler (1571–1630，德国)**
  - 开普勒行星运动三大定律
- 伽利略·伽利雷 **Galileo Galilei (1564–1642，意大利)**
  - 改进望远镜，发现木星的行星
  - 自由落体定律
- 艾萨克·牛顿 **Issac Newton (1642–1727，英国)**
  - 牛顿运动定律；万有引力；光学；微积分……
  - 1687年出版《自然哲学的数学原理》

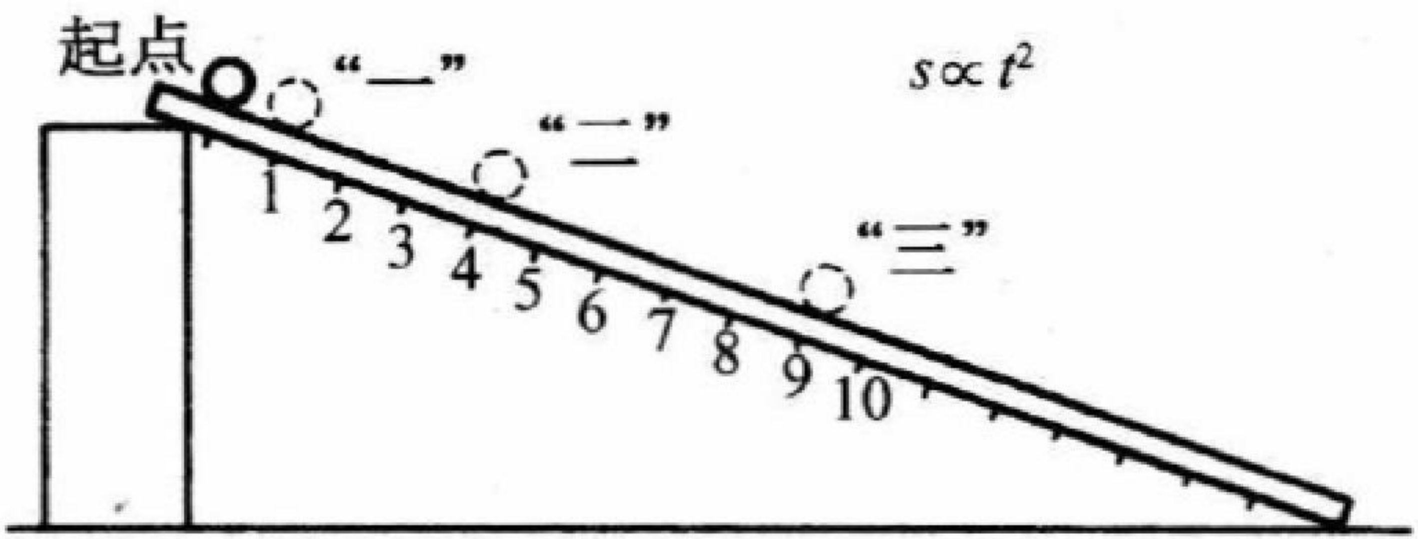
在开普勒和伽利略之前，对运动规律的研究是一种哲学上的事情，大部分的论据是由亚里士多德和其他希腊哲学家提出的，并且被认为是“已经证明”了的。



芝诺的乌龟

Zeno's paradox

伽利略对哲学家们的结论采取一种怀疑的态度，关于运动他做了一个实验，这个实验主要是这样的：他让一个球沿一斜面滚下，并且观察它的运动。这个工作被认为是经典力学（物理学）真正的开端。

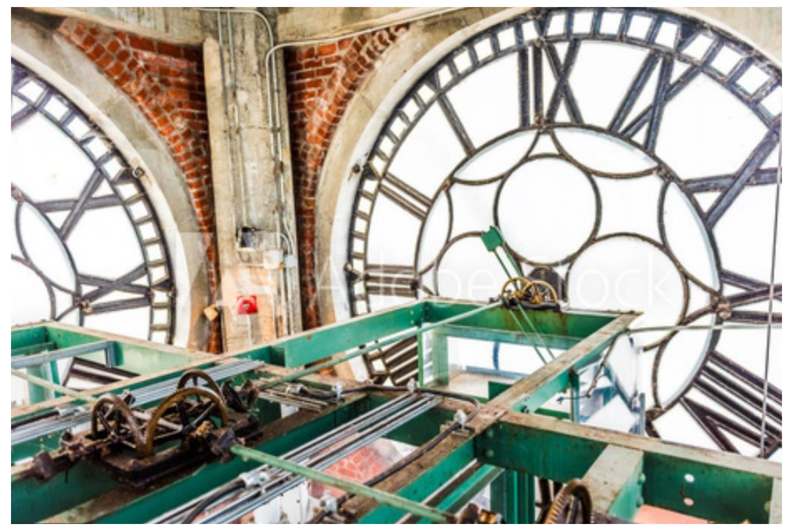


物理上，运动的概念通常指物体的位置发生改变。它所讨论的基本问题为：何时？何处？因此，为了对物体的运动进行物理学上的讨论，我们必须先引入时间和空间的概念。

时间和空间都是非常抽象的概念。幸运的是，对于绝大部分物理学研究，时间和空间的定义并不重要，重要的是如何能够精确地测量时间和空间——从而使我们能够定量地进行物体运动的观察。唯有通过定量的观察，人们才能得到定量的关系，而这些关系是物理学的核心。

时间的测量

时间的测量和定义都建立在某种明显是周期性事件的重复性上。然而，直到伽利略发现单摆的规律之前，对于时间的测量，特别是短时间的测量，还没有精确的方法。



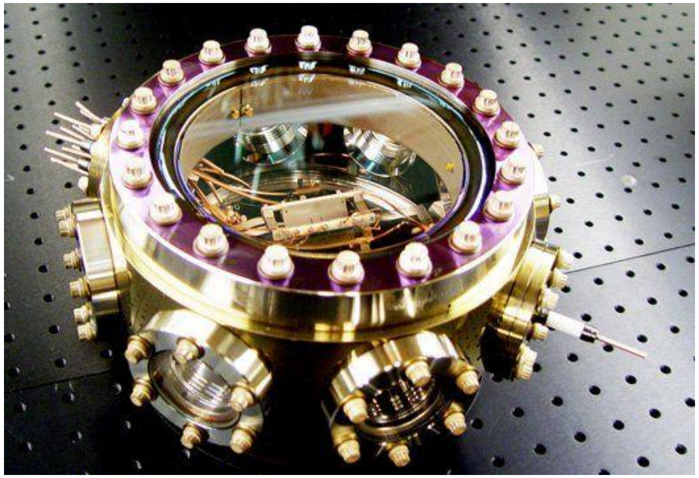
时间的测量

伽利略断定，只要一个摆的摆幅始终很小，那么它将总以相等的时间间隔来回摆动。我们可以通过一个实验，对摆在一个相同的时间段，例如，一个“小时”内的摆动次数进行比较来证明这一点。然后，我们用这个方法可划分出一个“小时”的几分之一。假如我们的摆一个“小时”内振动3600次，那么我们就称每一摆动的时间为1“秒”。然后我们发现，一个昼夜有24个这样的“小时”，这样，就可以把原来的时间单位较为精确地分成大约10^5个部分。

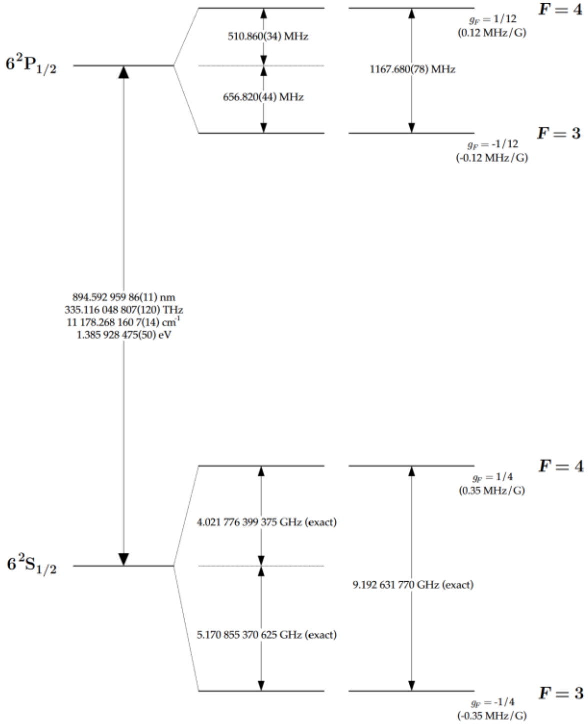
时间和空间的单位

时间单位——秒(s)：铯133原子的基态超精细跃迁频率，以单位Hz表示时，取其固定数值为 9192631770 来定义秒。

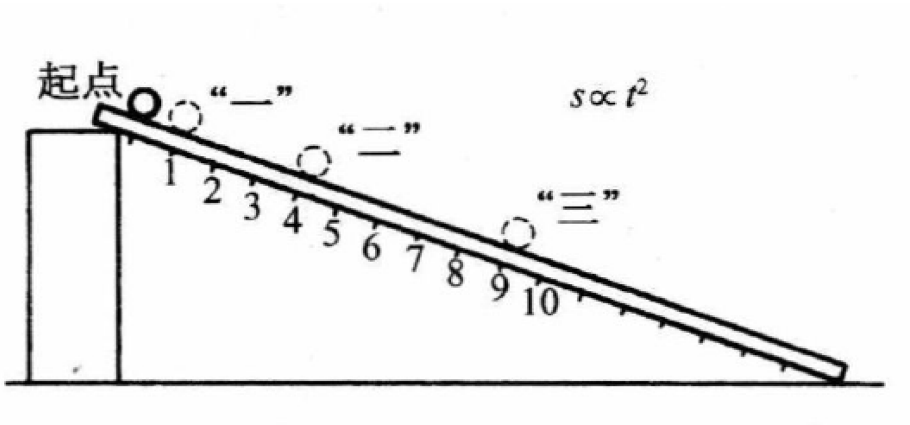
长度单位——米 (*m*)：光在真空中在1/299792458 秒内经过的距离 = 1 *m*



冷原子钟



伽利略的实验



伽利略让一个球沿一斜面滚下，并且观察它的运动，试图得出小球的位置 s 与时间 t 的关系。虽然伽利略后来设计了比较准确的时钟，但他在第一次做运动实验时是用他的脉搏来数出等间隔的时间。

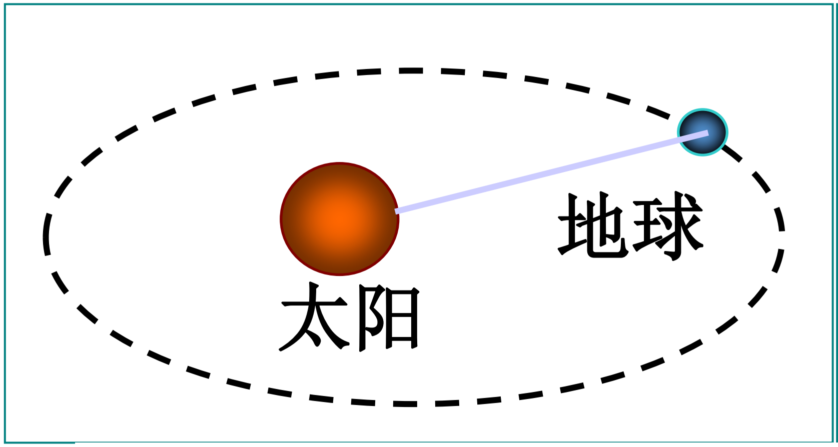
§1 描述质点运动的基本概念和基本物理量

一、质点 参考系 坐标系

如果我们研究某一物体的运动，而可以忽略其大小和形状对物体运动的影响，若不涉及物体的转动和形变，就可以把物体当作是一个具有质量的点（即质点）来处理。

- 质点集中了运动主体的全部质量；
- 质点的运动可以表征整体运动的主要特征；
- 质点是经过科学抽象而形成的理想化物理模型。目的是为了突出研究对象的主要性质，暂不考虑一些次要的因素。
- 质点的选取具有相对性。

物体能否抽象为质点，视具体情况而定。



地—日平均间距：

1.5×10^{8} km

地球半径：

6.37×10^{3} km

注：质点模型适用于除刚体一章外的力学部分。

理想模型：一种科学思维方法。

根据所研究问题的性质，突出主要因素，忽略次要因素，使问题简化但又不失客观真实性的抽象思维方法；

如：质点、刚体、线性弹簧振子、理想气体、点电荷、光滑平面、细绳、无阻尼振动、绝热过程等。

参照系

从不同的地方观察同一个物体的运动，其轨迹可能完全不一样。因此，选取适当的参照系是研究一切运动的前提。

为描述物体的运动而选择的标准物叫做参考系。

选取的参考系不同，对物体运动情况的描述不同，这就是运动描述的相对性。

常用参考系：太阳参考系，地心参考系，地面或实验室参考系，质心参考系

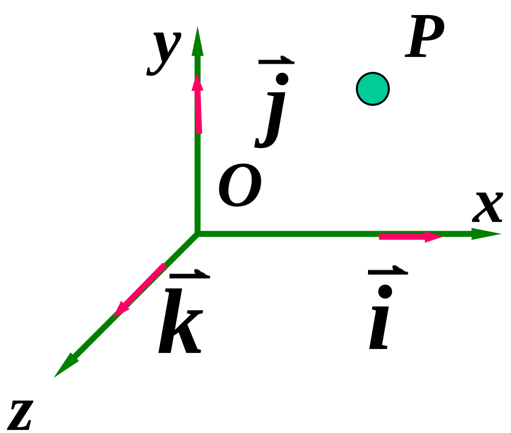
坐标系

固结在参考系上的一组有刻度的射线、曲线或角度。

（1） 坐标系为参考系的数学抽象。

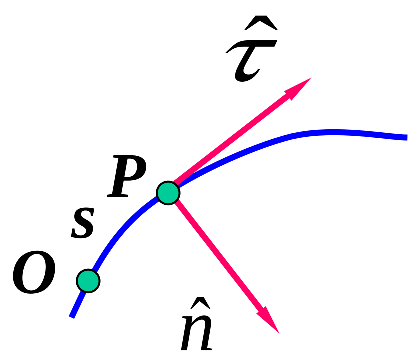
（2） 参考系选定后，坐标系还可任选。在同一参考系中用不同的坐标系描述同一运动，物体的运动形式相同，但其运动形式的数学表述却可以不同。

——常用的坐标系



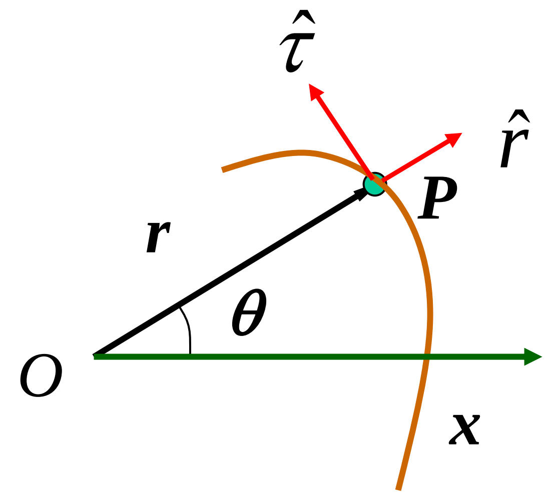
$P(x, y, z)$

直角坐标系



$P(s)$

自然坐标系



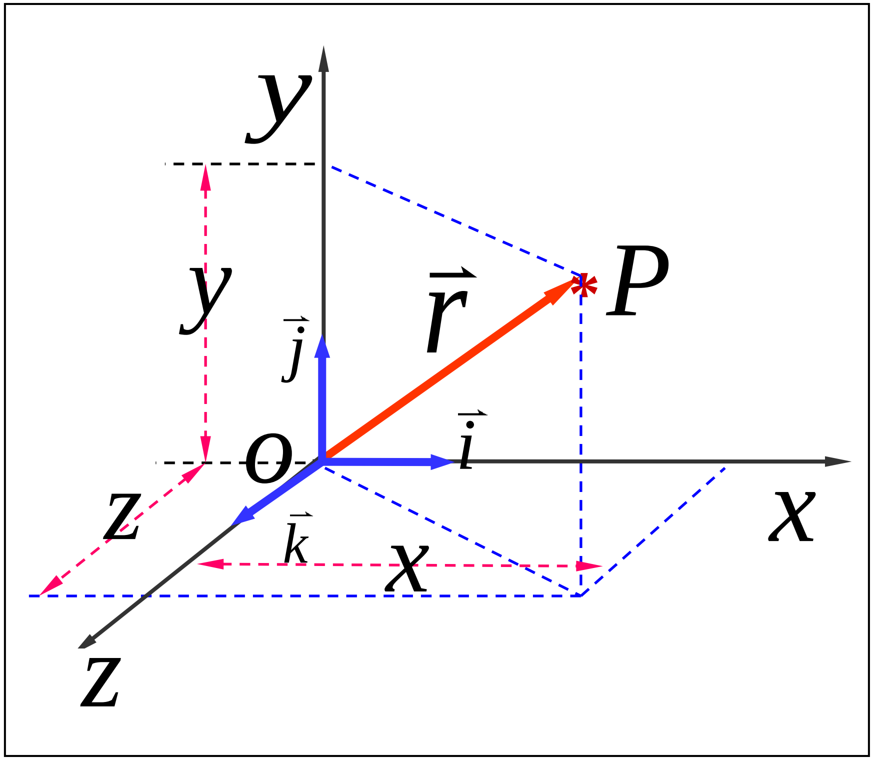
$P(r, \theta)$

极坐标系

二、位置矢量　运动方程　位移

1　位置矢量

确定质点P某一时刻在坐标系里的位置的物理量称**位置矢量**，简称**位矢** $\vec{r}$ 。



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

式中 $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 、$\vec{k}$ 分别为x、y、z 方向的单位矢量。

$\vec{i}$、$\vec{j}$ 、$\vec{k}$ 有时写为 $\hat{i}$ 、$\hat{j}$ 、$\hat{k}$ 。

位矢 $\vec{r}$ 的大小为 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

位矢 $\vec{r}$ 的方向余弦

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

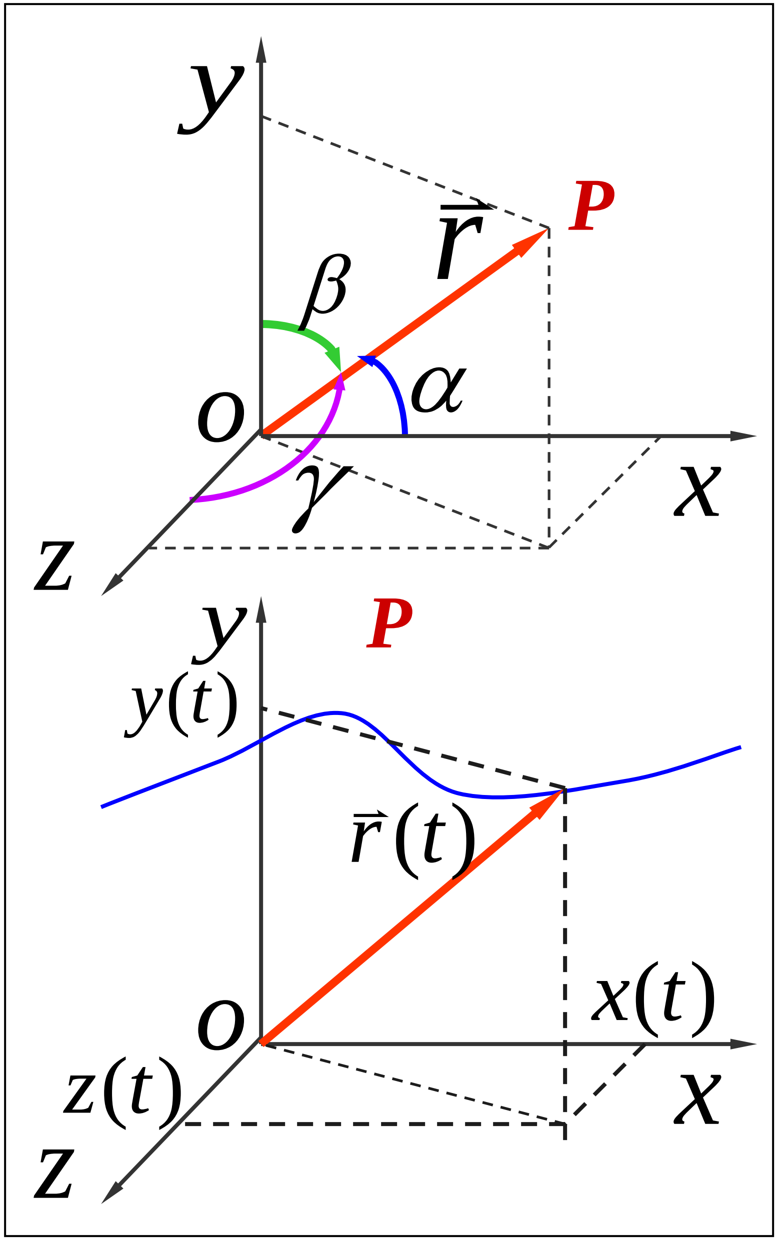
2 运动方程（运动函数）

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

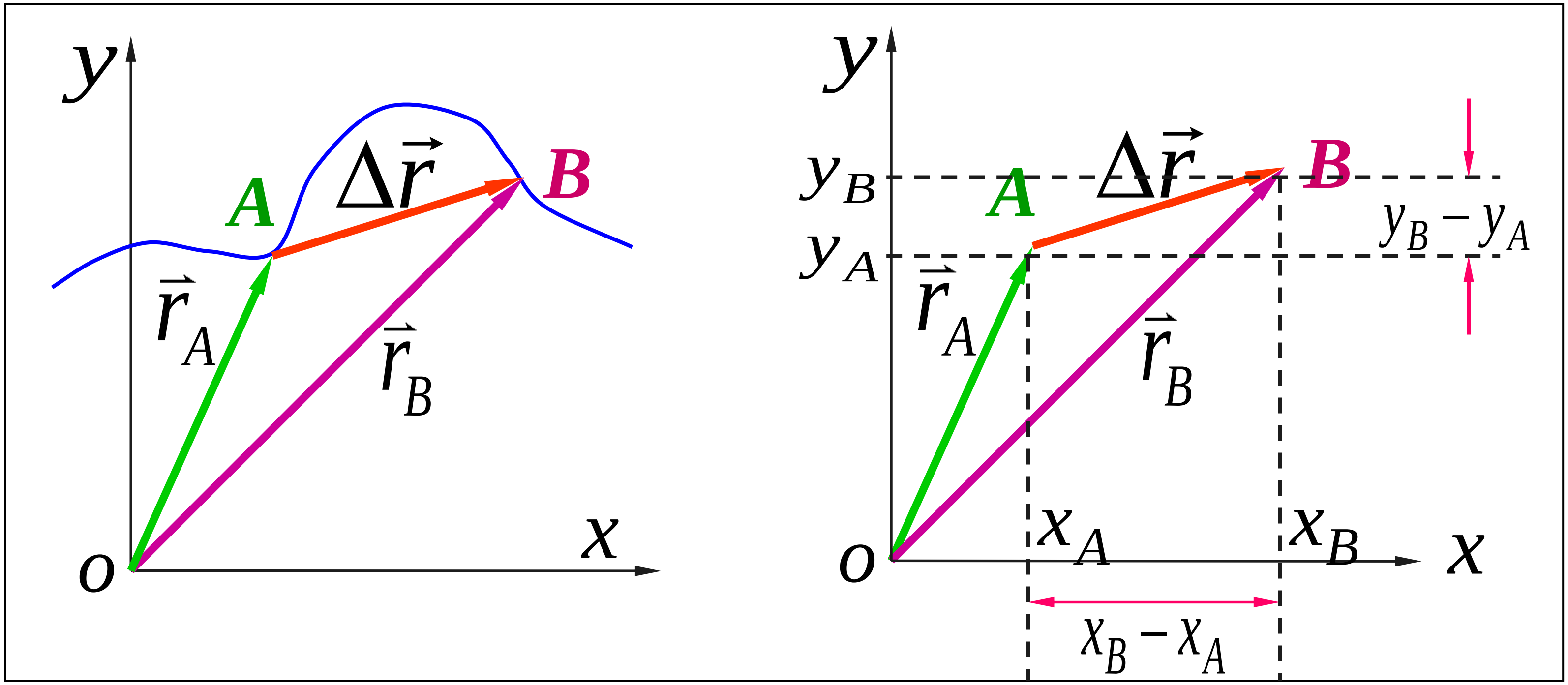
分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$



3 位移



经过时间间隔 Δt 后，质点位置矢量发生变化，由始点 ***A*** 指向终点 ***B*** 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 称为点 ***A*** 到 ***B*** 的位移矢量$\Delta\vec{r}$ 。位移矢量也简称位移。

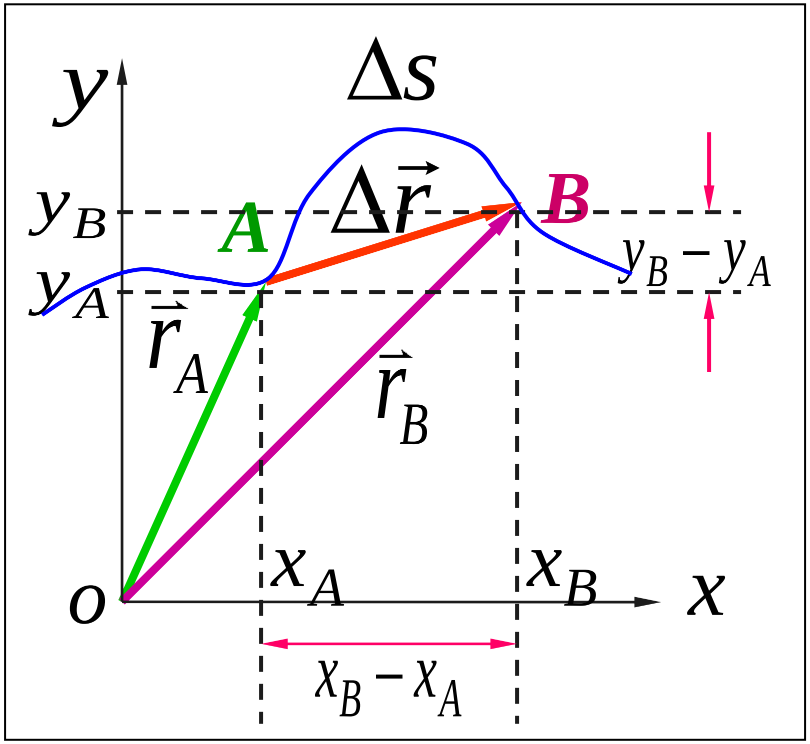
$\because \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r} \qquad \therefore \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

又 $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

所以位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



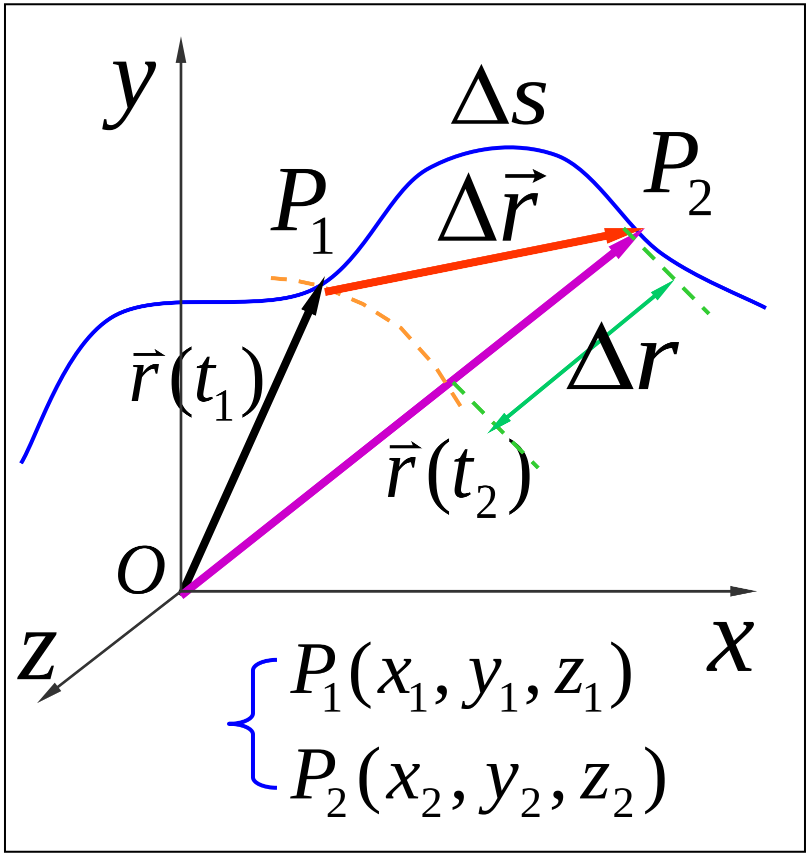
若质点在三维空间中运动，则在直角坐标系 $Oxyz$ 中其位移为

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ 方向为$A \rightarrow B$

4 路程（Δs）：质点实际运动轨迹的长度。 $\Delta s = \overset{\frown}{AB}$

位移的物理意义



（A） 确切反映物体在空间位置的变化，与路径无关，只决定于质点的始末位置。

（B） 反映了运动的矢量性和叠加性。

$$\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$$

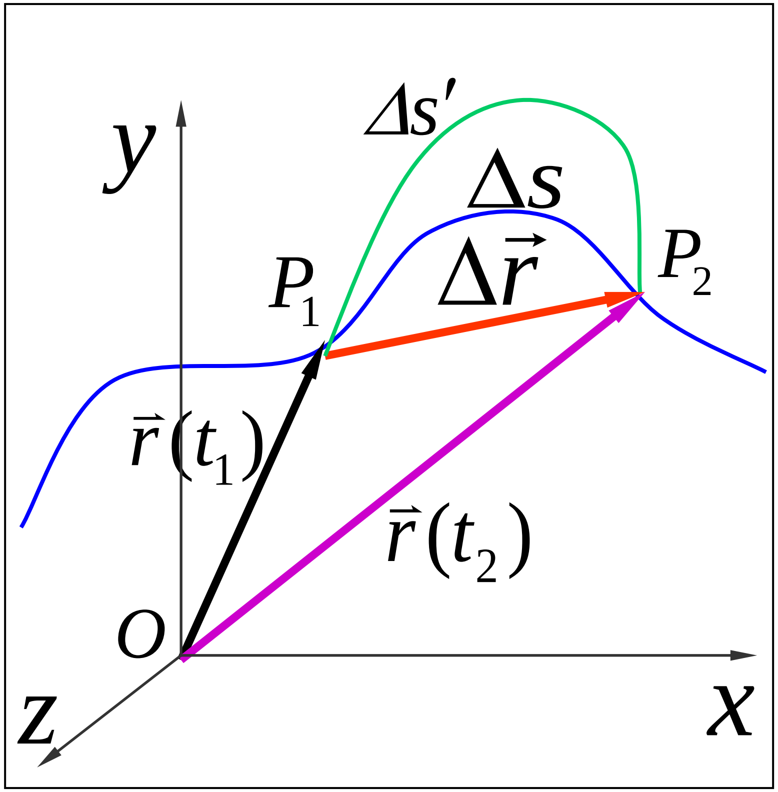
$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

注意: $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta r$ 位矢长度的变化

（位矢大小的增量）

$$\Delta r=\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}}-\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}$$

讨论： 位移与路程



（**A**）P_1P_2 两点间的路程是不唯一的，可以是 Δs 或 $\Delta s'$；而位移 $\Delta\vec{r}$ 是唯一的。

（**B**） 一般情况，位移大小不等于路程。 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$

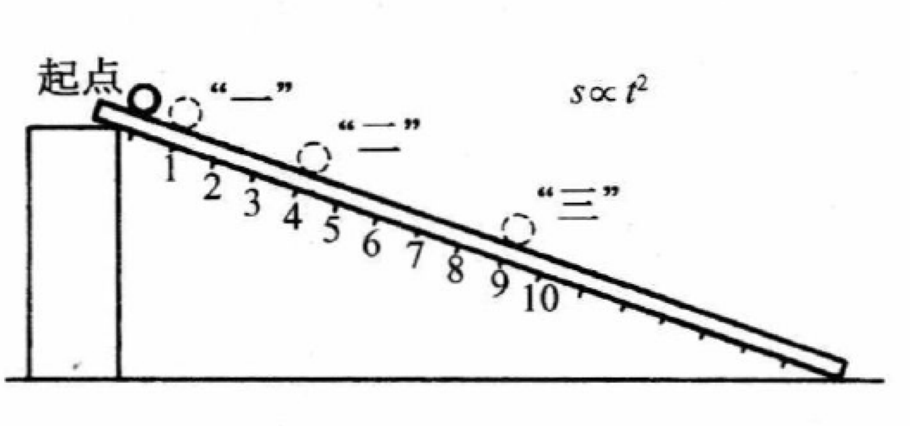
（**C**）什么情况 $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$?

不改变方向的直线运动； $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$

$$\Delta t \to 0, \quad |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$$

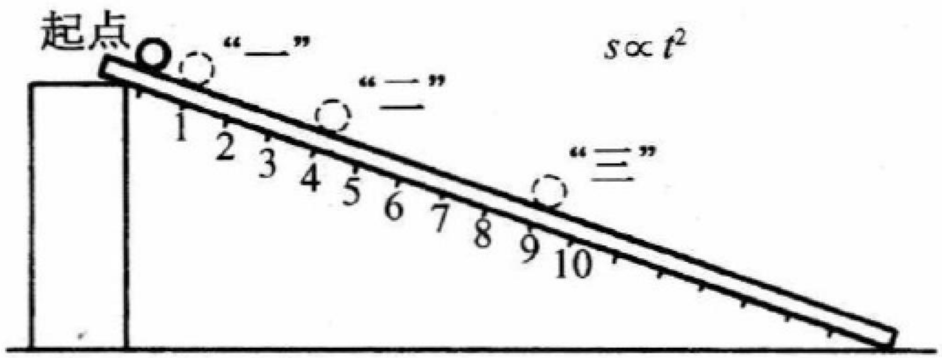
（**D**）位移是矢量，路程是标量。

伽利略的实验



伽利略让一个球沿一斜面滚下，并且观察它的运动，试图得出小球的位置 s 与时间 t 的关系。虽然伽利略后来设计了比较准确的时钟，但他在第一次做运动实验时是用他的脉搏来数出等间隔的时间。

伽利略得出结论：$s \propto t^2$，即小球滚过的距离与时间的平方成正比。

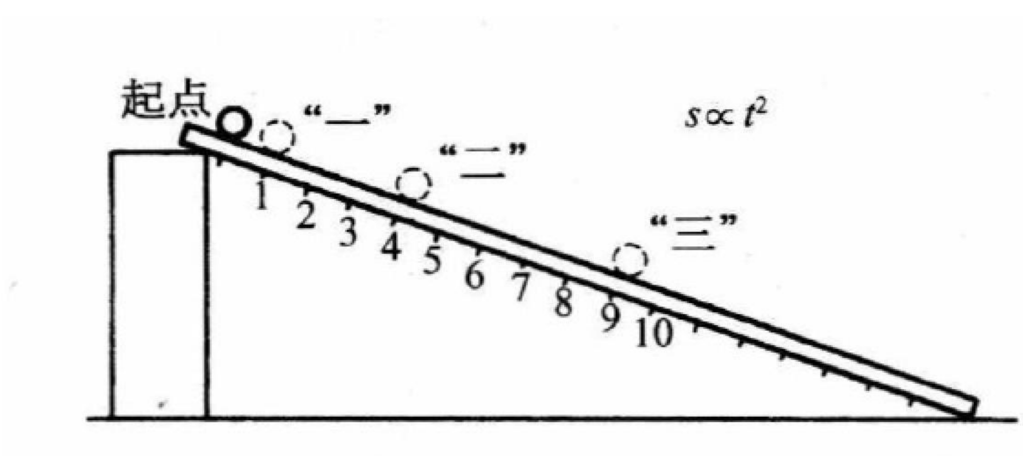


很明显，在小球下落的过程中，小球滚动的快慢并不是均匀的。那么，我们如何才能知道小球在某一时刻的速度（运动的快慢）呢？

首先，可以这样来求出速度：我们问在一个很短的时间段内物体走过多远？把这一段距离除以时间就得到物体运动的平均速度。

为了得到越来越精确的速度，我们应当把时间间隔取得越来越小！

同样，在小球下落的过程中，小球速度也一直在变化，为了表示速度变化的快慢，伽利略提出了加速度的概念。许多人都知道一个传说：伽利略在著名的比萨斜塔上做过自由落体实验。他让不同重量的球，从塔上同时自由下落，发现它们同时落地。于是得到物体下落时的加速度与下落物体的重量（质量）无关的结论。



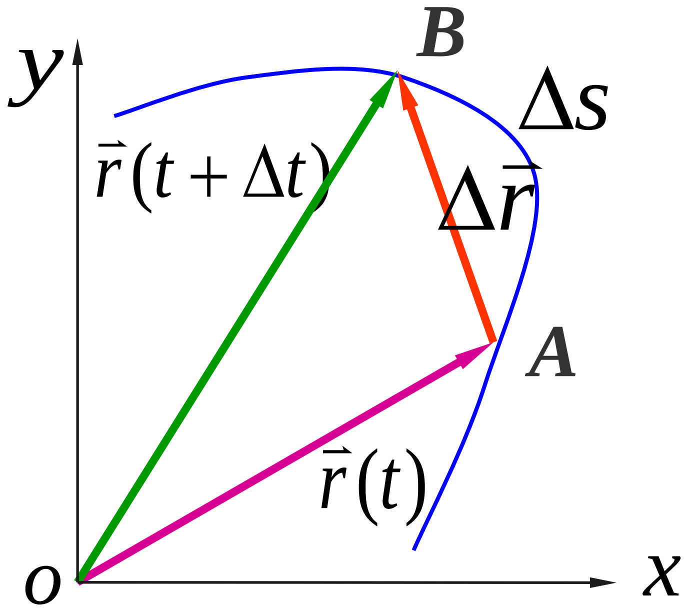
现在我们发现，对速度/加速度的定义使我们产生了一个全新的概念，在牛顿之前，这是一个未曾被人类以普遍形式所采用过的概念。这个概念是取无穷小距离及相应的无穷小时间，求出它们的比值，并观察当我们所取的时间越来越小时，那个比值将发生什么情况。换句话说，当时间越取越小，以至无穷小时，取所通过的距离除以所需的时间的极限。

这个概念分别由牛顿和莱布尼茨发明，它是微积分的开端。微积分的发明是为了描述运动，而它的第一个应用就是给速度这个概念下了定义。

三、速度 ——反映位置变化快慢的物理量

1 平均速度

在 Δt 时间内，质点从点*A* 运动到点 *B*，其位移为



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Δt 时间内，质点的平均速度

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

平均速度 $\overline{\vec{v}}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 同方向。

平均速率

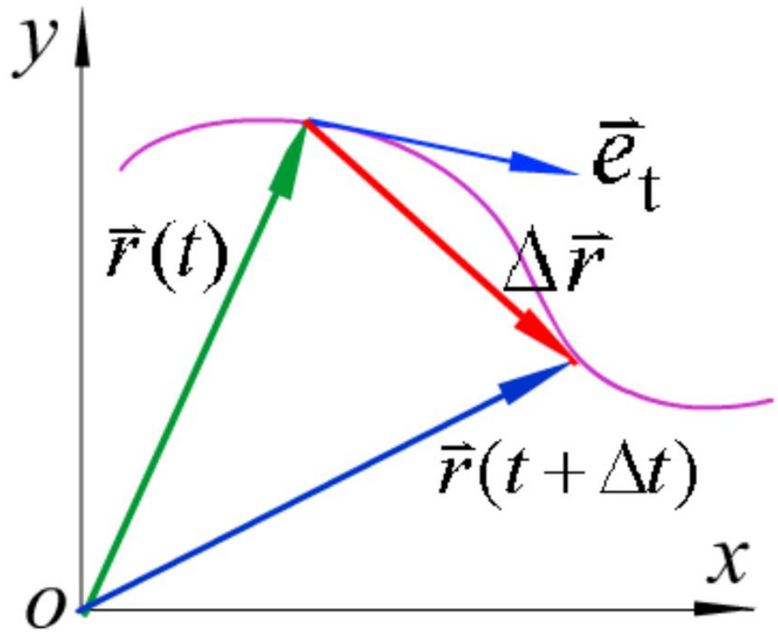
$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\overline{\vec{v}}\right|$$

2 瞬时速度

当 $\Delta t \to 0$时平均速度的极限值叫做瞬时速度，简称速度。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

当质点做曲线运动时， 质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向。



当 $\Delta t \to 0$ 时， $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

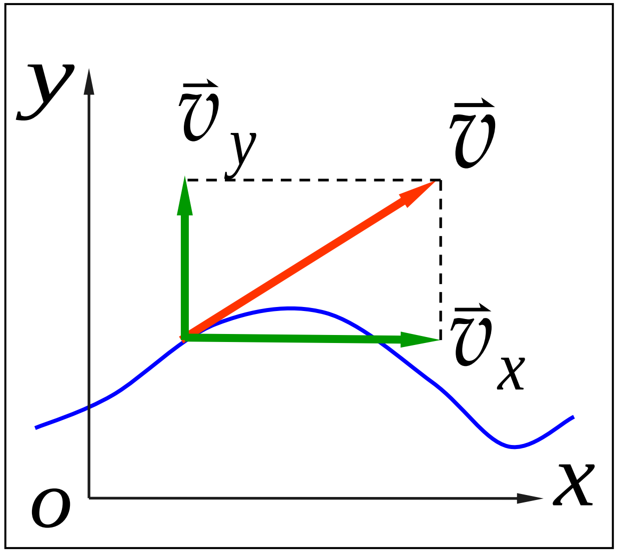
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} \qquad (\hat{\tau} = \vec{e}_t)$$

若质点在三维空间中运动，其速度为

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

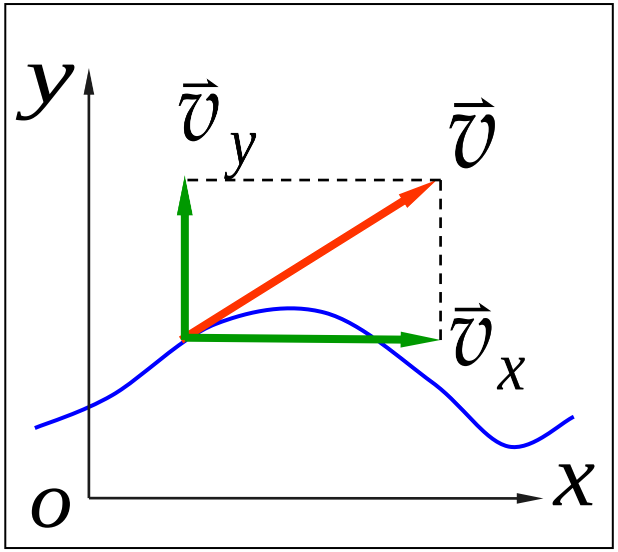


瞬时速率：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

分量 $\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} \end{cases}$



速度 $\vec{v}$ 的大小

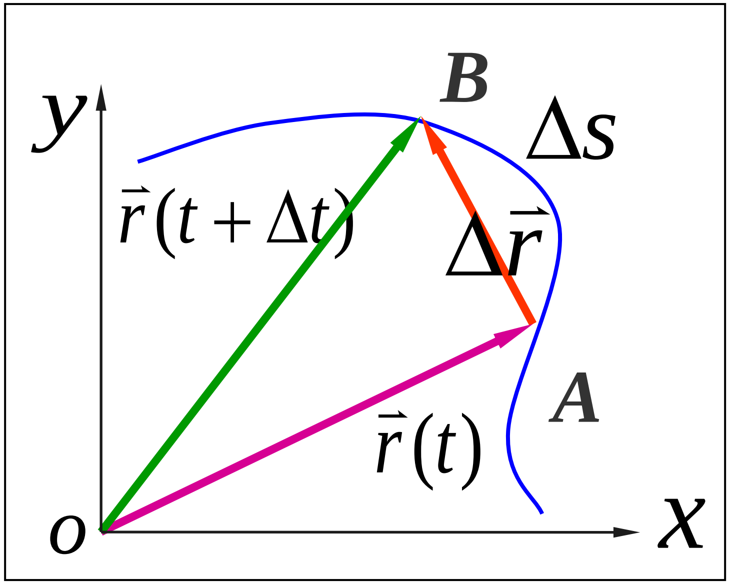
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

速度方向：切线向前

方位角：$\cos\alpha = \dfrac{v_x}{|\vec{v}|}$， $\cos\beta = \dfrac{v_y}{|\vec{v}|}$， $\cos\gamma = \dfrac{v_z}{|\vec{v}|}$

平均速率 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



思考题：

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为 ________ ？

（**A**） $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　（**B**） $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

（**C**） $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$　　（**D**） $\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$

例 1 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$,

其中 $x(t)=t+2\,(\mathrm{SI}),\quad y(t)=0.25t^2+2\,(\mathrm{SI}).$

（**1**）求 $t=3\ \mathrm{s}$ 时的速度.（**2**） 作出质点的运动轨迹图。

解 （**1**）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t$$

$t=3\ \mathrm{s}$ 时速度为 $\vec{v}=1.0\vec{i}+1.5\vec{j}\left(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)$

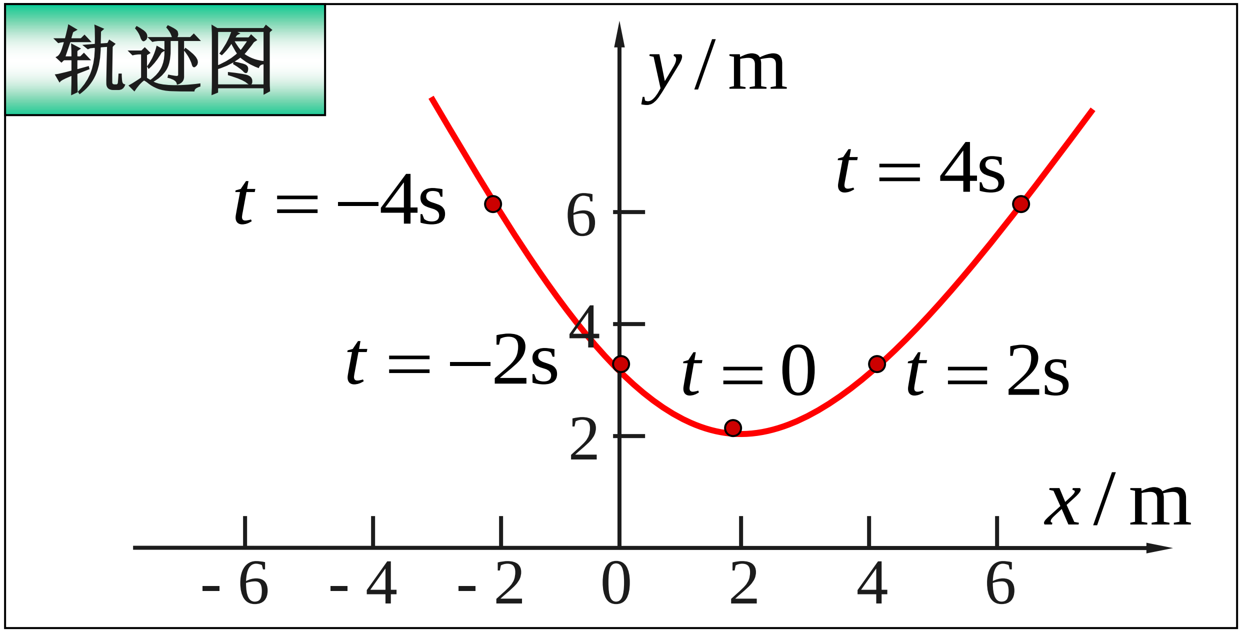
速度 $\vec{v}$ 与 x 轴之间的夹角

$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1}=56.3^{\circ}$$

（2） 运动方程 $\begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = 0.25t^2 + 2 \end{cases}$

由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$



例2 如图所示，*A*、*B* 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，*A*、*B* 两物体可在光滑轨道上滑行。如物体*A*以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，物体*B*的速率为多少？

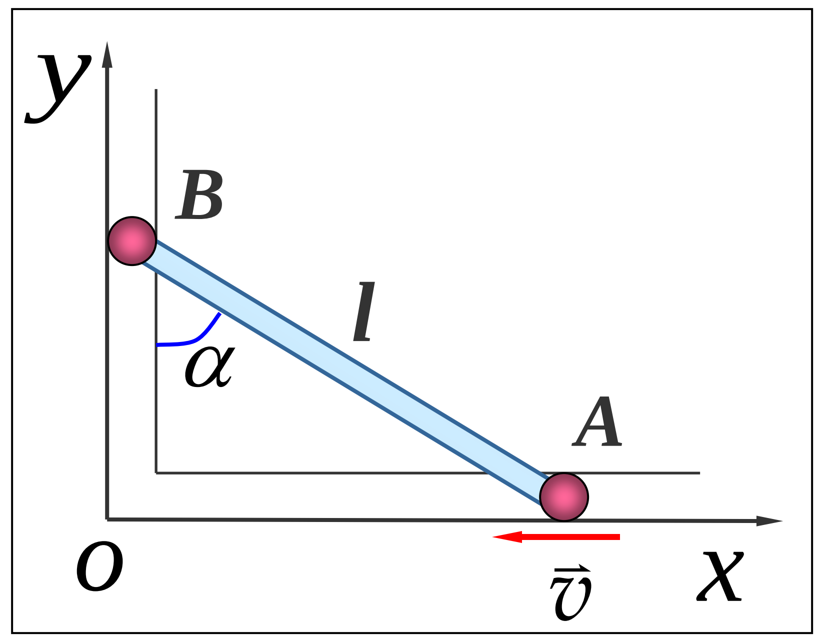
解 建立坐标系如图，

物体*A* 的速度

$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体*B* 的速度

$$\vec{v}_B = v_y \vec{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

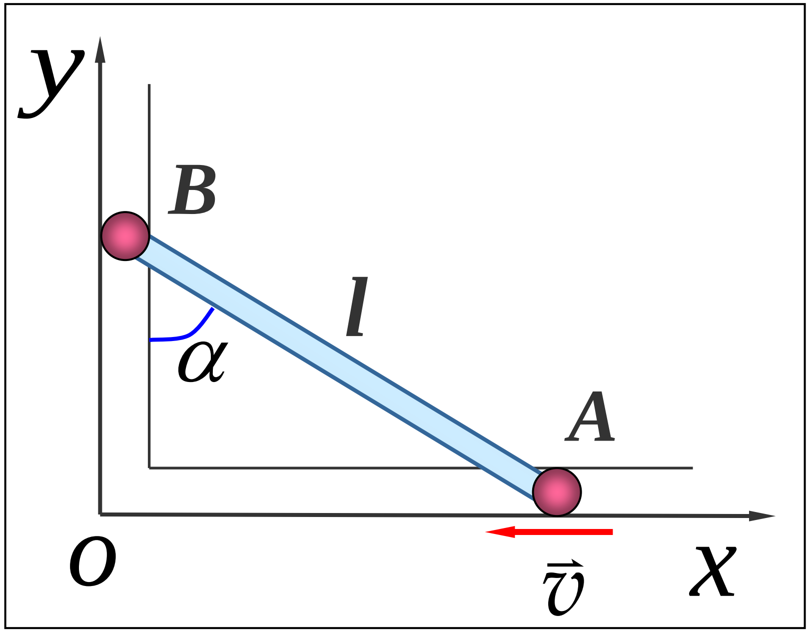


*OAB*为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$

两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$



即：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v,\quad \tan\alpha = \frac{x}{y} \qquad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$时，$v_B = 1.73v$

四、加速度 ——反映速度变化快慢的物理量

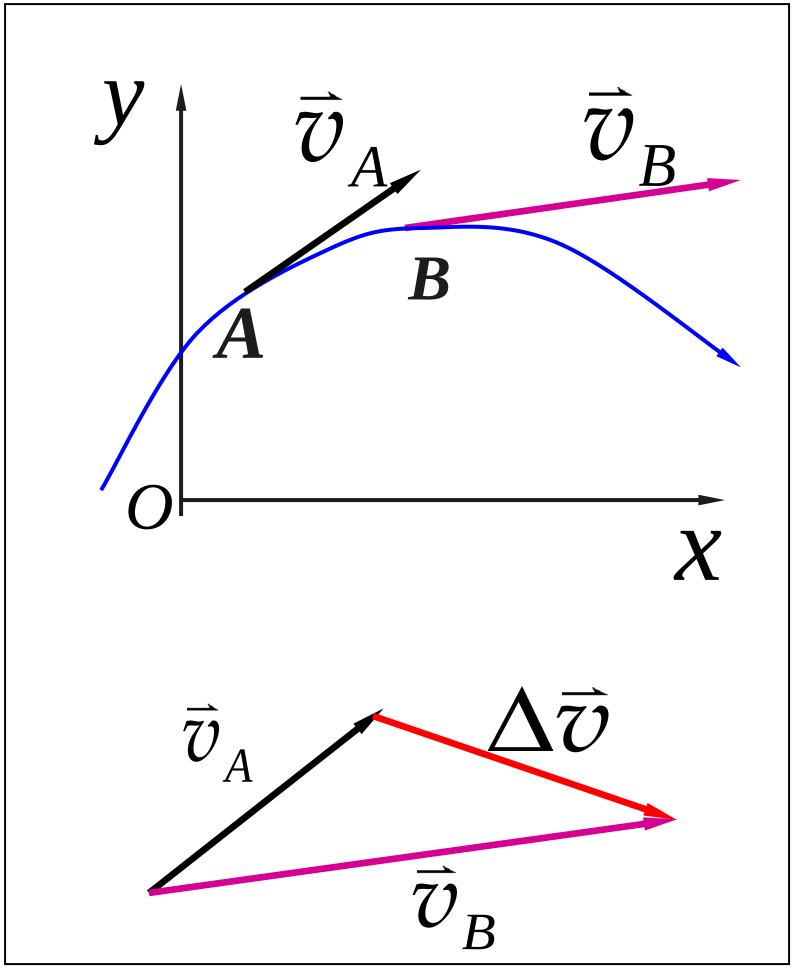
1 平均加速度

单位时间内的速度增量

即平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\bar{\vec{a}}$ 与 $\Delta \vec{v}$ 同方向。



2 瞬时加速度（加速度）

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

质点作三维运动时加速度为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

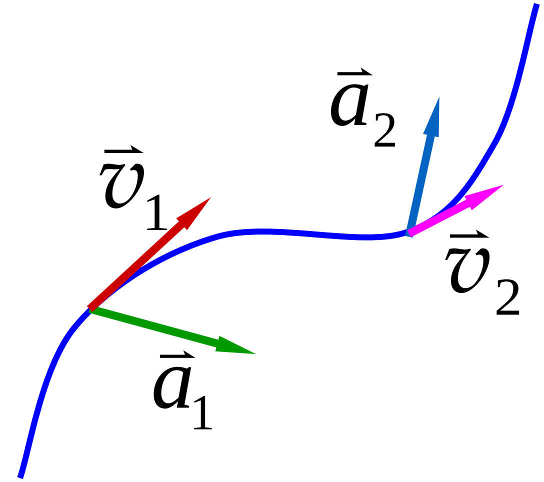
$$\left\{\begin{aligned} a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\ a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right.$$

加速度大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

加速度大小 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



加速度方向：

直线运动： $\vec{a} \,//\, \vec{v}$

曲线运动：指向曲线凹侧

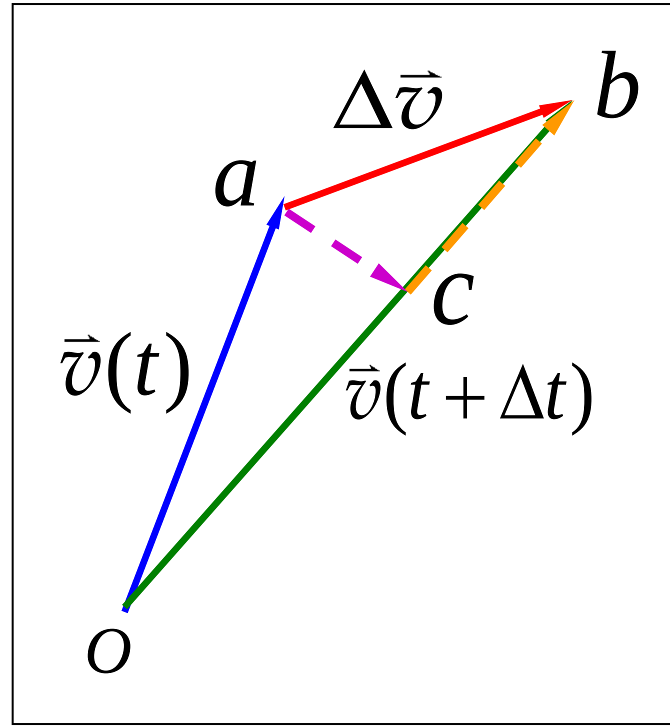
方位角：$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$， $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$， $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$

注意：物理量 $\vec{r}$，$\Delta\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{a}$ 的共同特征是都具有<u>矢量性</u>和<u>相对性</u>。

讨论： $\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗？

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$



在***Ob***上截取 $\overline{Oc} = \overline{Oa}$

有 $\Delta v = \overline{cb}$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{cb} + \overrightarrow{ac} = \Delta\vec{v}_{\tau} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}$$

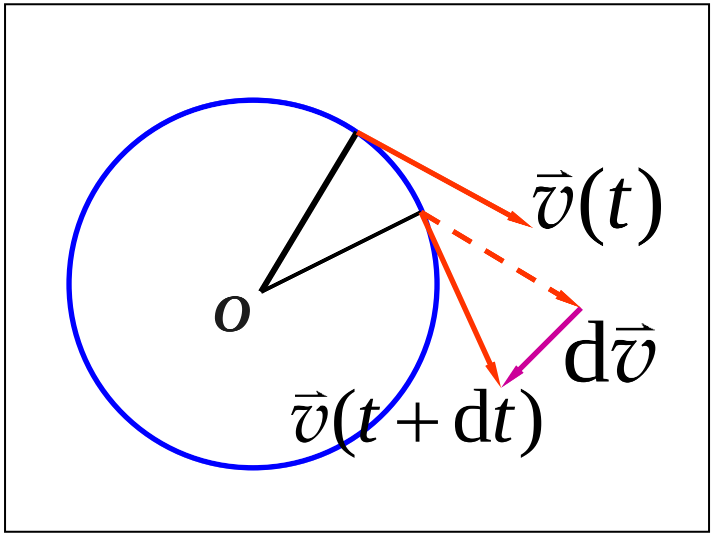
$$\Delta\vec{v}_{\tau} = \overrightarrow{cb}$$

速度大小变化

$$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} = \overrightarrow{ac}$$

速度方向变化

讨论： 问 $\left|\vec{a}\right| = a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗？



例 匀速率圆周运动

因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

而 $\left|\vec{a}\right| = a \neq 0$

所以 $a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

质点运动学两类基本问题

1. 由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2. 已知质点的加速度以及初始条件（即：初始速度和初始位置），可求质点速度及其运动方程。

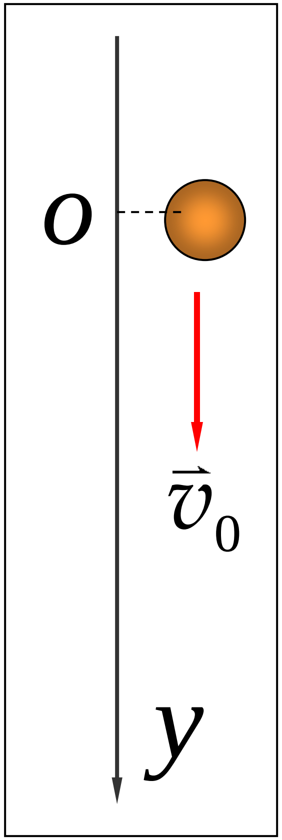
$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt \qquad \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v} \cdot dt$$

$$\vec{r}(t) \ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \ \vec{v}(t) \ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \ \vec{a}(t)$$

例3　有 一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0=(10\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{j}$，它的加速度为 $\vec{a}=(-1.0\mathrm{s^{-1}})v\vec{j}$。问：（1）经过多少时间后可以认为小球已停止运动？

（2）此球体在停止运动前经历的路程有多长？

解：由加速度定义　$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(-1.0\mathrm{s^{-1}})v$

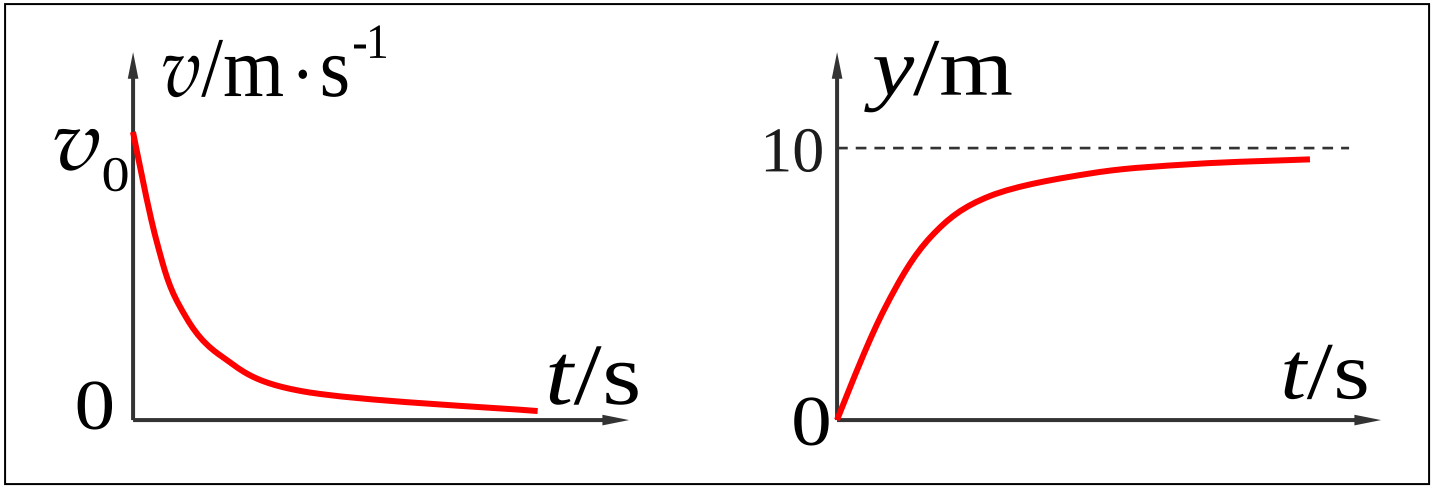


$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=(-1.0\mathrm{s}^{-1})\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{d}t,\quad v=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}\qquad \int_0^y\mathrm{d}y=v_0\int_0^t\mathrm{e}^{(\text{-}1.0\mathrm{s}^{-1})t}\mathrm{d}t$$

$$y=10[1-\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}]\mathrm{m}$$

$$v = v_0 e^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t} \qquad y = 10[1 - e^{(-1.0s^{-1})t}]\mathrm{m}$$



v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
t/s	2.3	4.6	6.9	9.2
y/m	8.9974	9.8995	9.9899	9.9990

$$t = 9.2\mathrm{s}, \quad v \approx 0, \quad y \approx 10\mathrm{m}$$