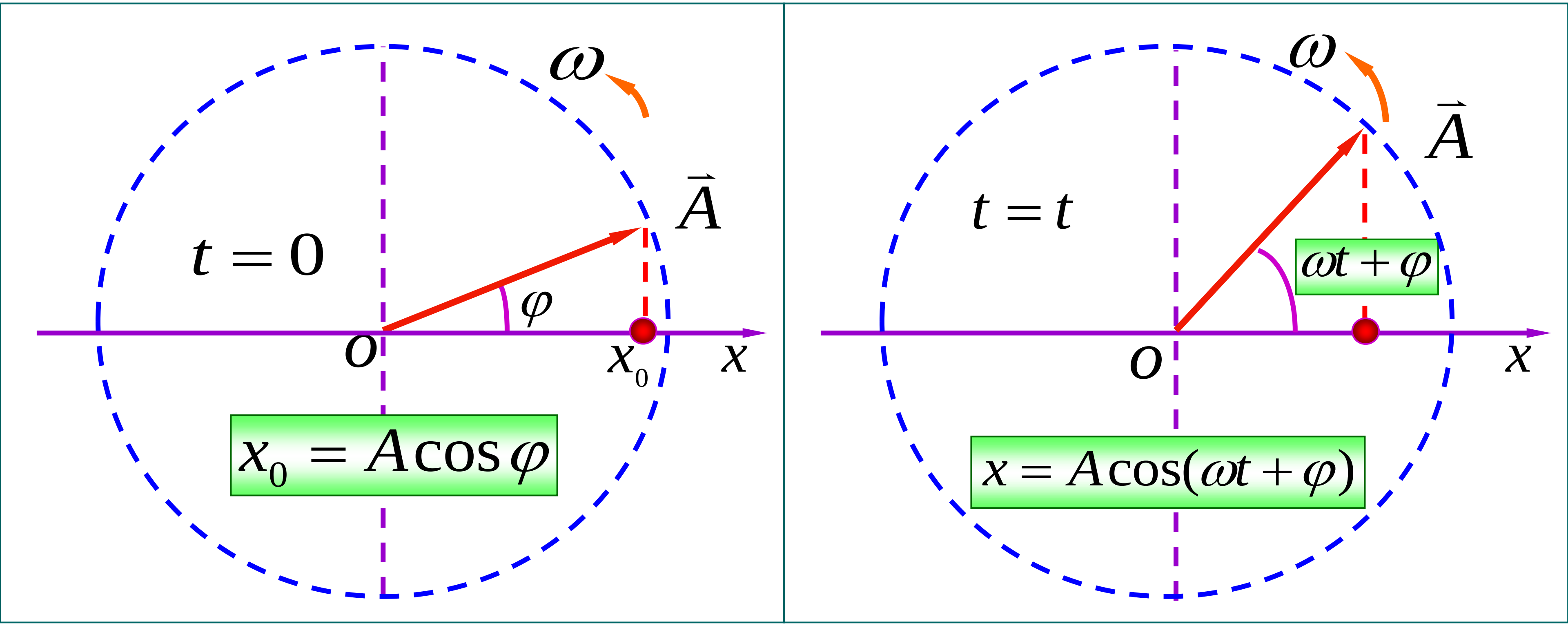
旋转矢量图中的初相位和相位



旋转矢量法 vs 解析法描述

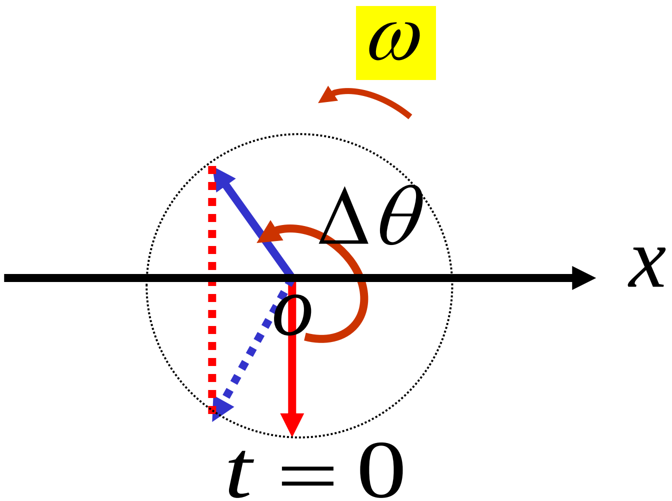
特征量	旋转矢量	运动表达式	
A	矢量的长度	振幅	初始条件决定
φ_0	初角度	初相位	初始条件决定
ω	角速度	角频率	系统特性决定
cos	x轴的投影	方程函数形式	
$\omega t+\varphi_0$	t时刻的角位移	t时刻振动状态	
T(周期)	转一周的时间	完成一次完整振动时间	
ν（频率）	一秒内转的圈数	一秒内振动次数	

例： 质量为m的质点和劲度系数为k 的弹簧组成的弹簧谐振子，

$t = 0$时，质点过平衡位置且向正方向运动。

求： 物体运动到负的二分之一振幅处时所用的**最短时间**

解： 设 t 时刻到达末态



由已知画出$t = 0$ 时刻的旋矢图

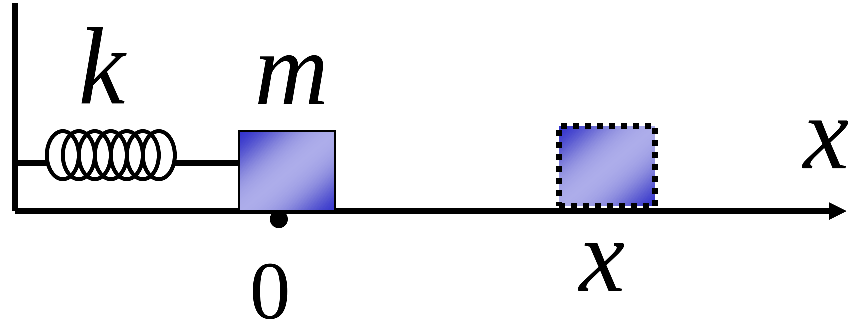
再画出末态的旋矢图

由题意选蓝实线所示的位矢

设始末态位矢夹角为$\Delta\theta$ $\quad \Delta\theta = \omega t$

得 $$t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{7\pi}{6\omega} = \frac{7\pi}{6\sqrt{k/m}}$$

§2 简谐振动的能量



以弹簧谐振子为例：

系统机械能守恒，以弹簧原长为势能零点

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$$

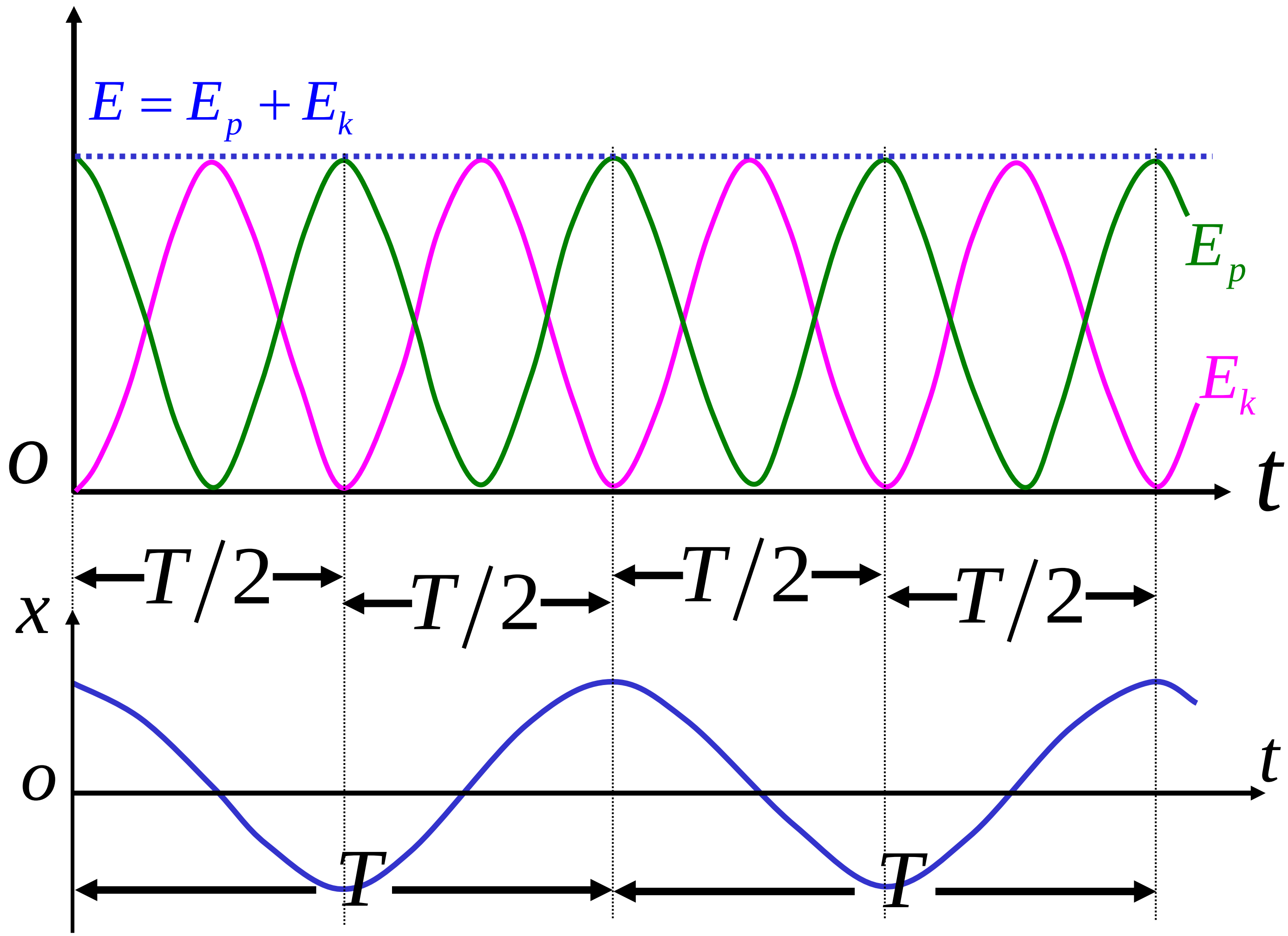
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$m\omega^2 = k$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐振动系统动能、势能及总的机械能曲线



§3 简谐振动的合成

当一个物体同时参与几个简谐振动时就需考虑振动的合成问题。

——两个振动方向相同、频率相同简谐振动的合成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}\ \text{线性叠加} \qquad x = x_1 + x_2$$

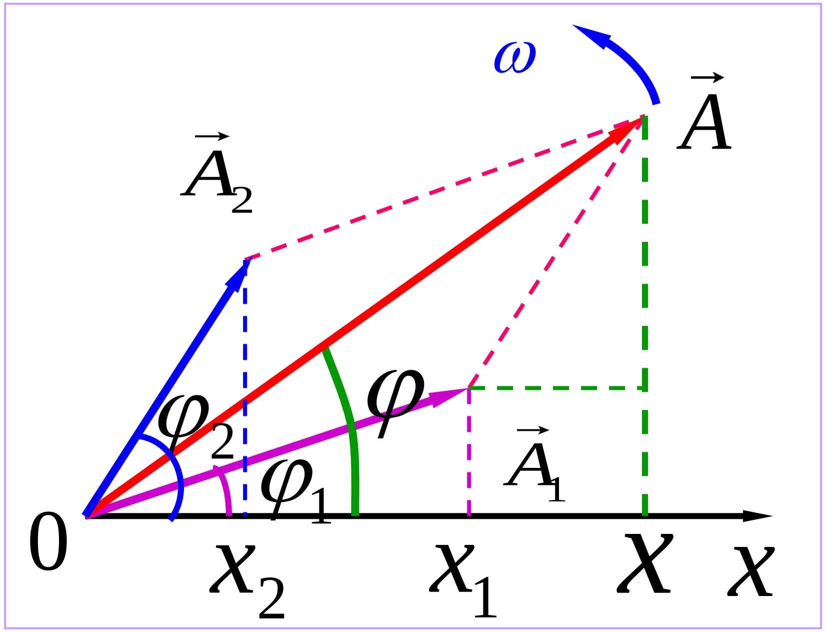
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

- 两个同方向同频率简谐振动合成后仍为同频率的简谐振动
- 合振动的振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ $\quad \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$
- 合振动的初相位 $\mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

同方向同频率简谐振动的合成的旋转矢量法

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$



在 t =0 时刻:

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

在任意t 时刻:

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

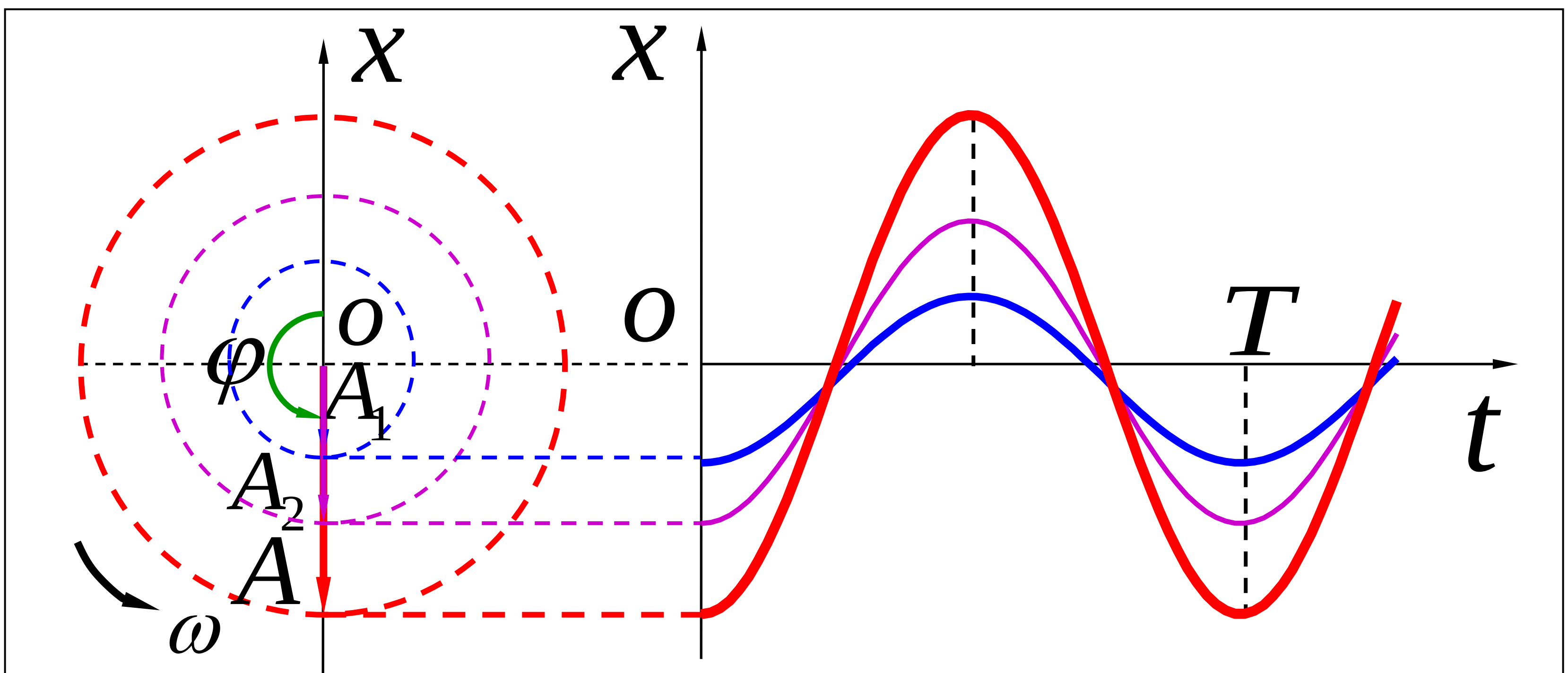
对合成简谐振动的讨论

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

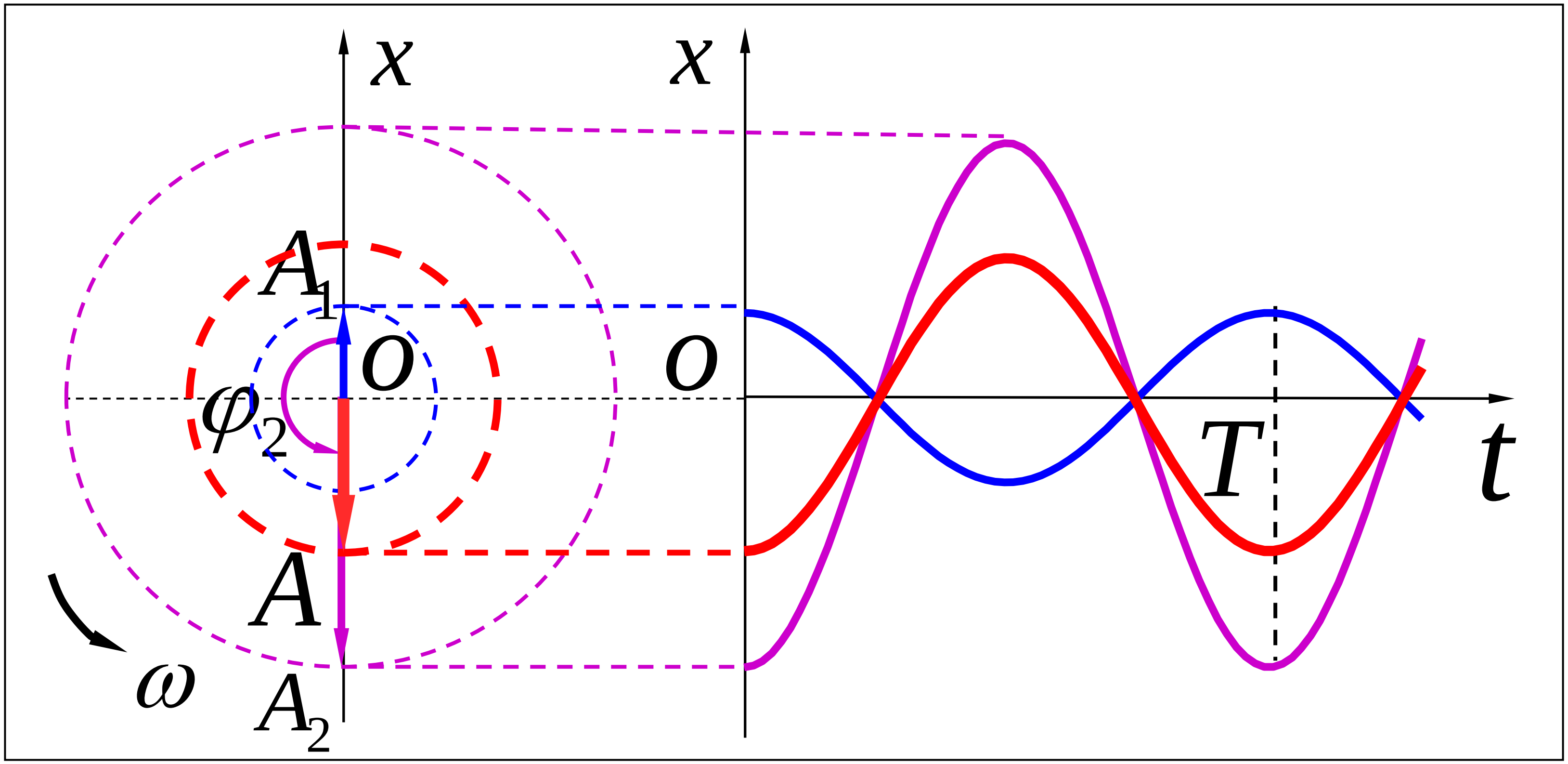
（1）**相位差** $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$ **(同相)** **相互加强**



(2) 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$ **(反相)** **相互削弱**



(3) 一般情况 $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=$ 其它值

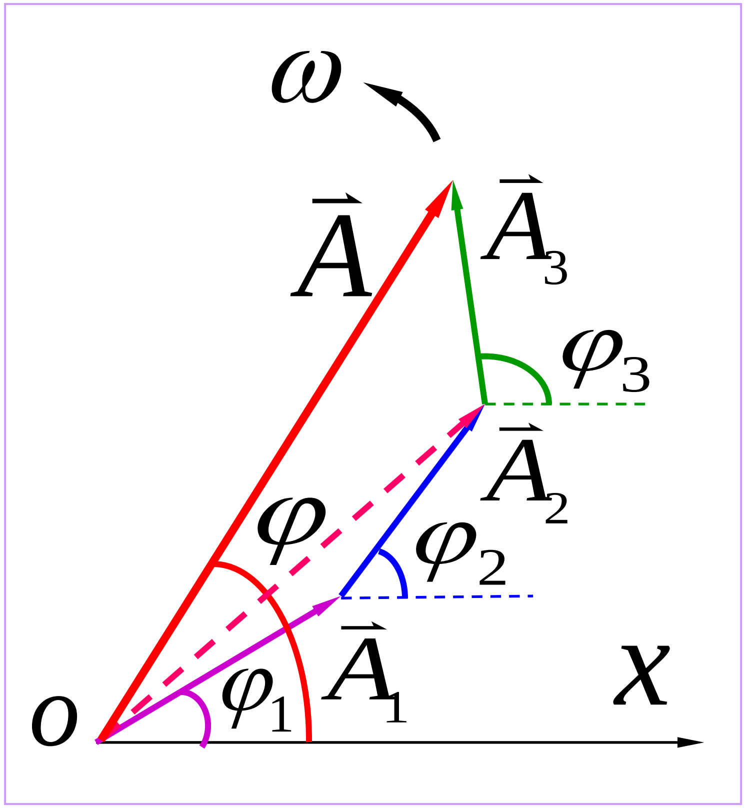
$$\left|A_1-A_2\right|<A<A_1+A_2$$

多个同方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



——多个同方向同频率简谐振动合成仍为简谐振动

例：已知一质点同时参与了三个简谐振动，$x_1=A\cos(\omega t+\pi/3)$, $x_2=A\cos(\omega t+5\pi/3)$, $x_3=A\cos(\omega t+\pi)$。**求**其合振动方程。

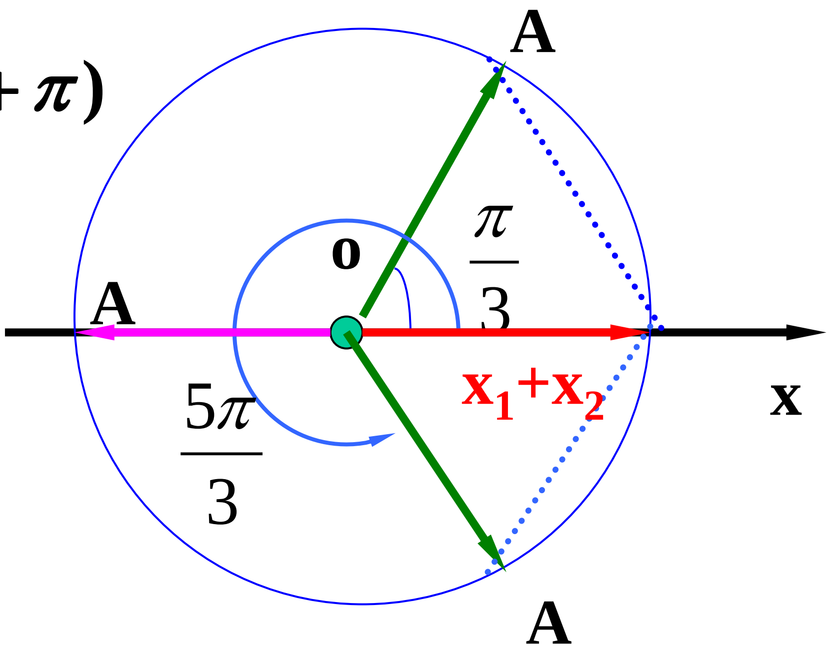
解法一：

$$x' = A\cos(\omega t+\frac{\pi}{3})+A\cos(\omega t+\frac{5\pi}{3})$$
$$= 2A\cos(\omega t+\pi)\cos(\frac{2\pi}{3})$$
$$= -A\cos(\omega t+\pi)$$

$$X = x' + x_3$$
$$= -A\cos(\omega t+\pi)+A\cos(\omega t+\pi)$$
$$= 0$$

解法二：旋转矢量法

$$X = 0$$



无阻尼自由振动

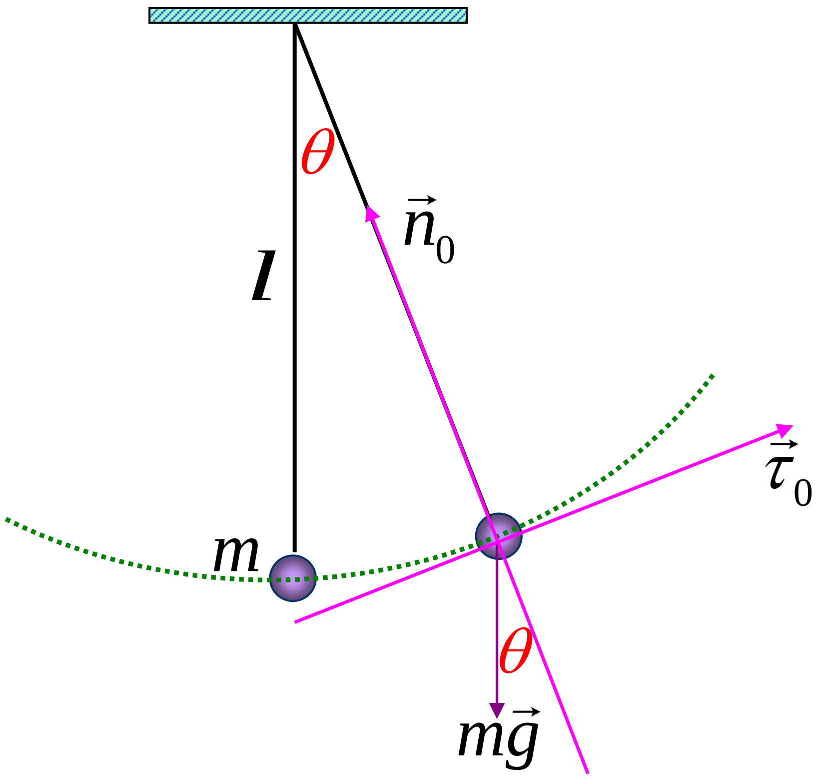
例题：证明单摆小幅度摆动时的运动是简谐振动，并求出简谐振动的频率

证明： $\sum F_\tau = ma_\tau$

$$-mg\sin\theta = ma_\tau$$

$$= ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-g\sin\theta = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+g\sin\theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$$\because \theta<5^\circ, \therefore \sin\theta=\theta$$

设： $\omega^2=\dfrac{g}{l}$

有： $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=2\pi\nu$$

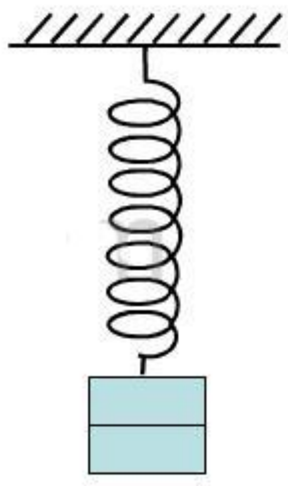
$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

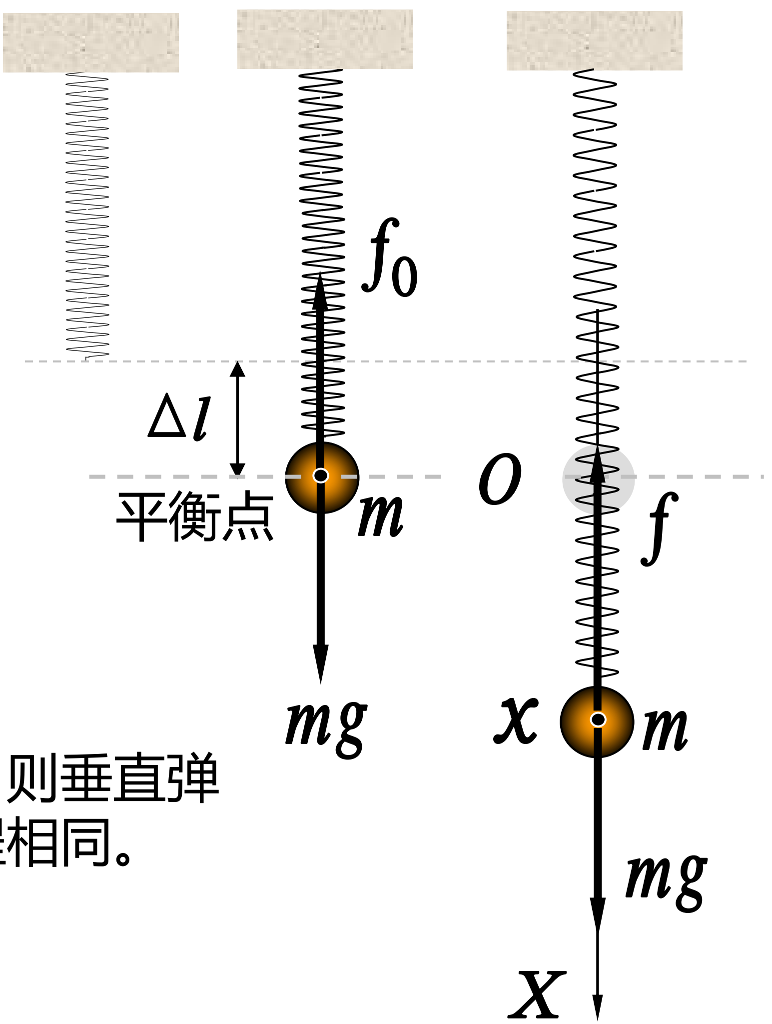
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

无阻尼自由振动

- 固有频率
- 固有圆频率
- 固有周期

讨论: 竖直方向的弹簧振子的运动是否简谐振动?





若选取受力平衡点作为坐标原点，则垂直弹簧振子与水平弹簧振子的运动方程相同。

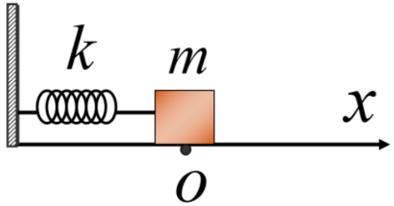
第十章 机械波

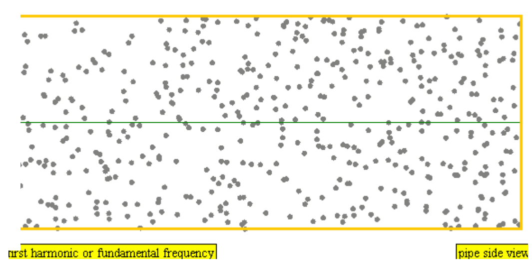
波动：振动的传播

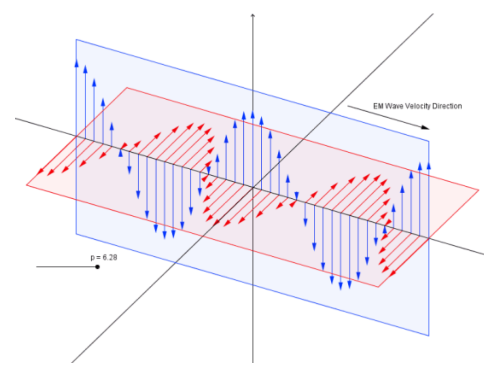
机械波：机械振动在弹性介质中的传播

振动和波动的关系
- 振动——波动的成因
- 波动——振动的传播

波动的种类
- 机械波
- 电磁波
- 物质波







§1 机械波的产生和传播

一、机械波的产生

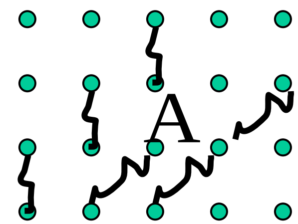
1 **波源** 作机械振动的物体（声带、乐器等）

2 **介质** 能传播机械振动的媒质（空气、水、钢铁等）

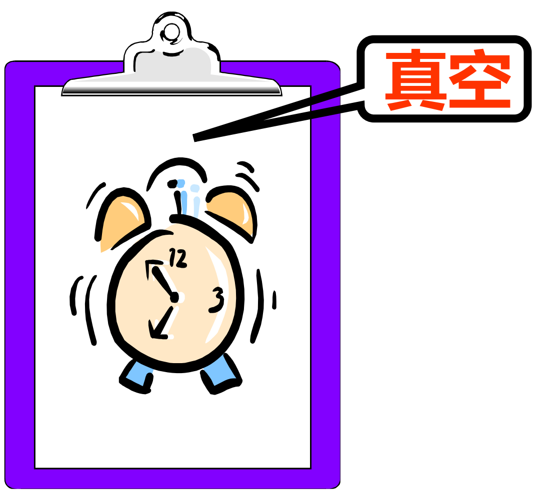
**电磁波

只需波源，可在真空中传播

注意：波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.



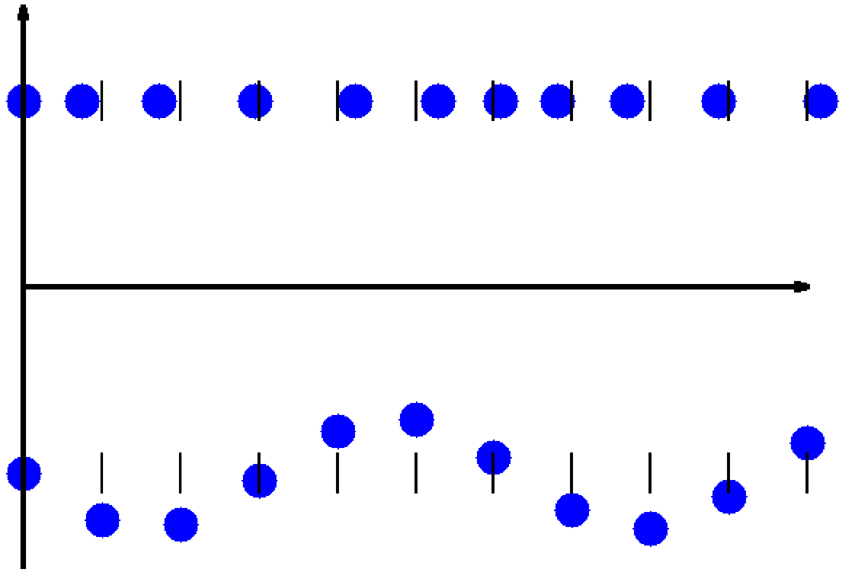
振源A振动通过弹性力传播开去

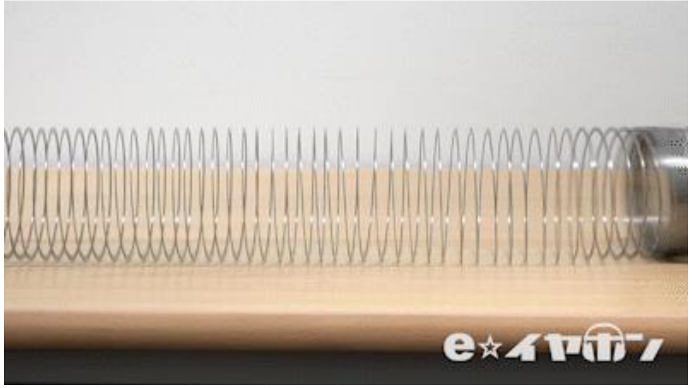


二、波的分类

纵波：各质元振动方向与波传播方向一致

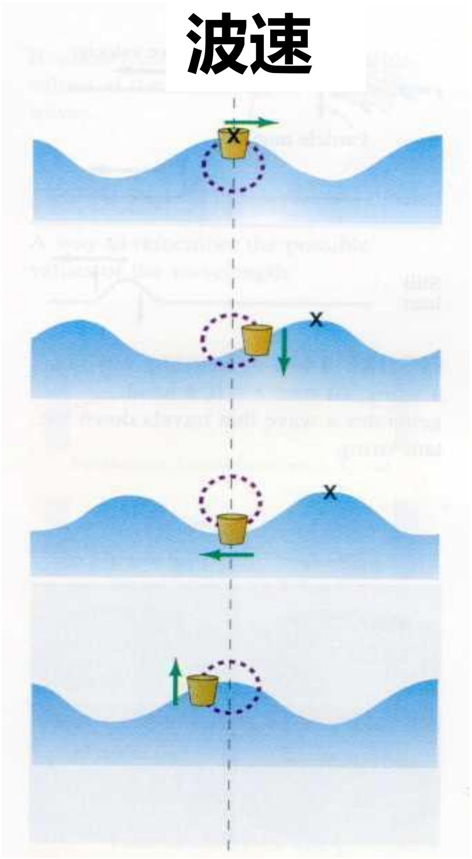
横波：各质元振动方向与波传播方向垂直

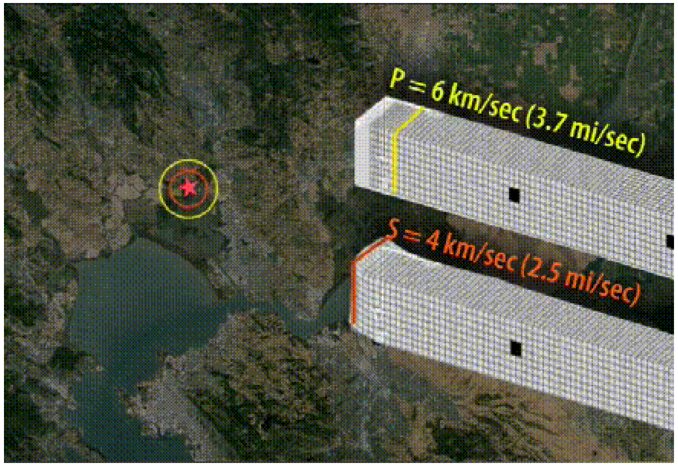


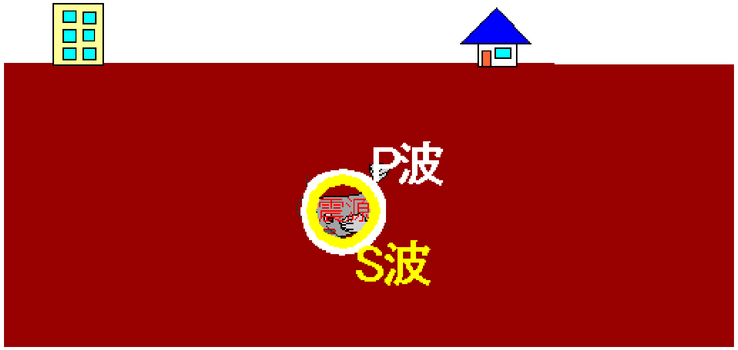


水表面的波既非横波又非纵波——在水的表面张力和重力共同作用下形成的。

地震波为横波与纵波的混合波，破坏力更强的是其中的横波成分。

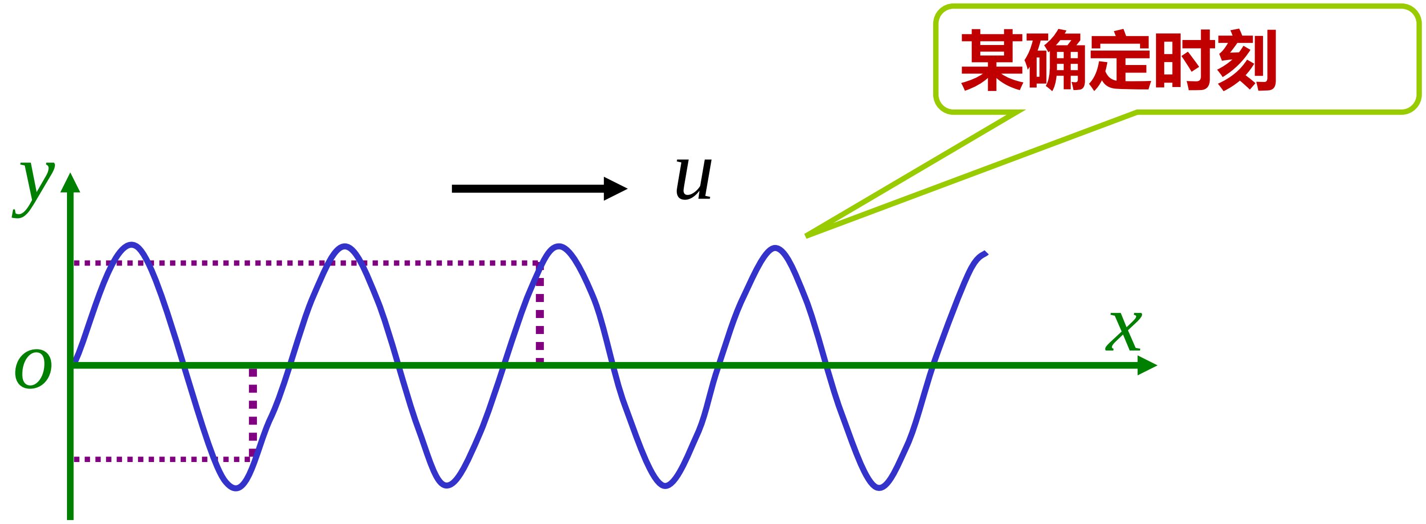






波形图：

某时刻各点振动的位移 y (广义：任一物理量)与相应的平衡位置坐标 x 的关系曲线



——上述波形图既可以表示横波，也可以表示纵波。

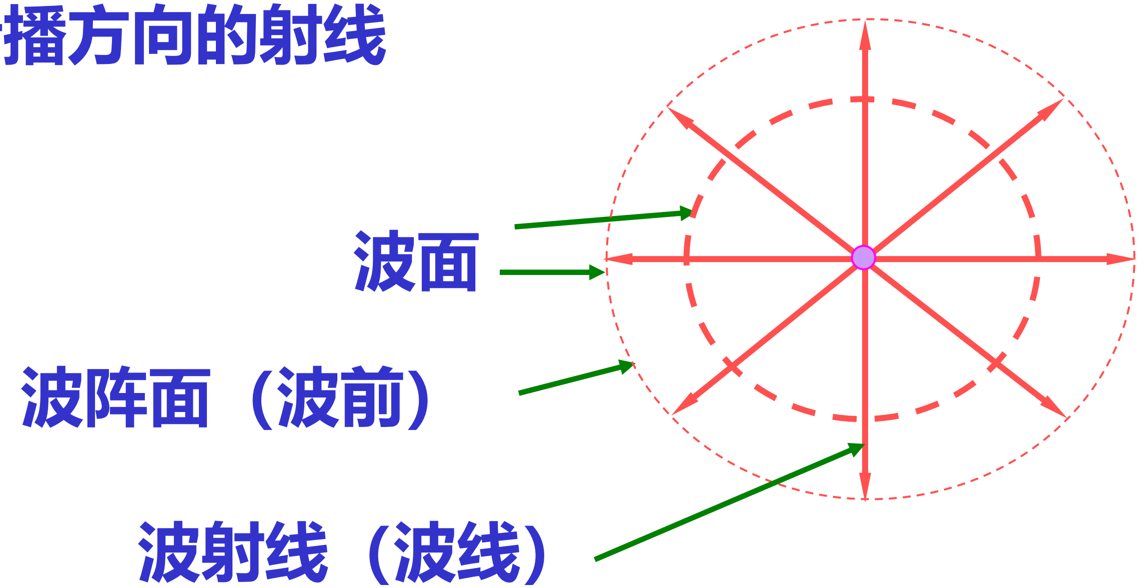
2.波面与波线

波面：某时刻，同一波源向外传播的波到达的空间各点连成的面（同相位面）

波阵面：某时刻，传播在最前面的波面（又称波前）

波射线：描述波传播方向的射线

简称波线



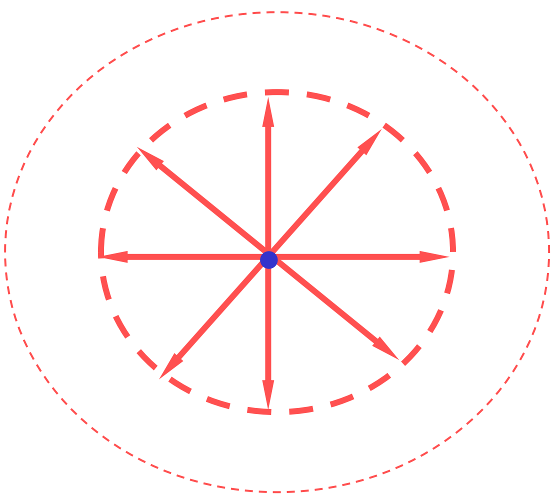
- 波射线垂直于波面
- 波射线是波的能量传播方向

在各向同性介质中——

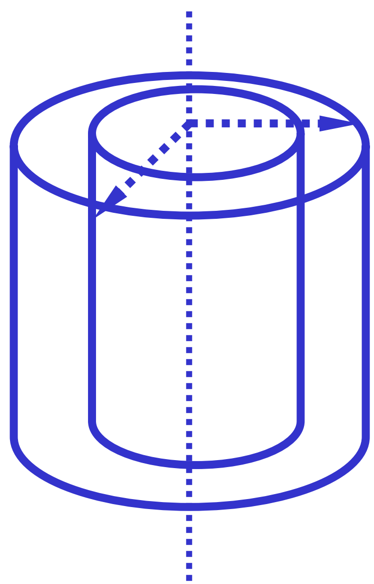
点源：波面是球面 所以称为球面波

线源：波面是柱面 所以称为柱面波

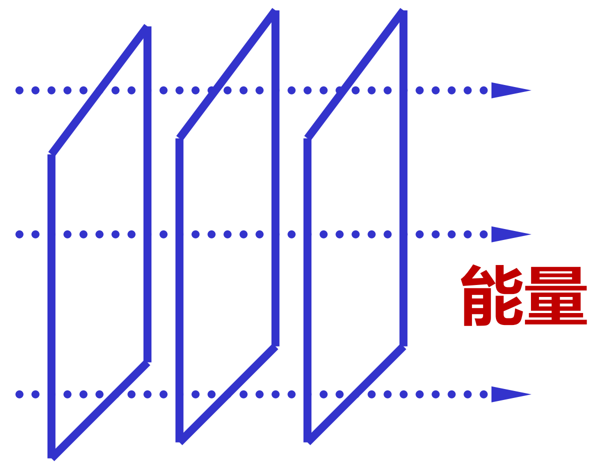
面源：波面是平面 所以称为平面波



球面波

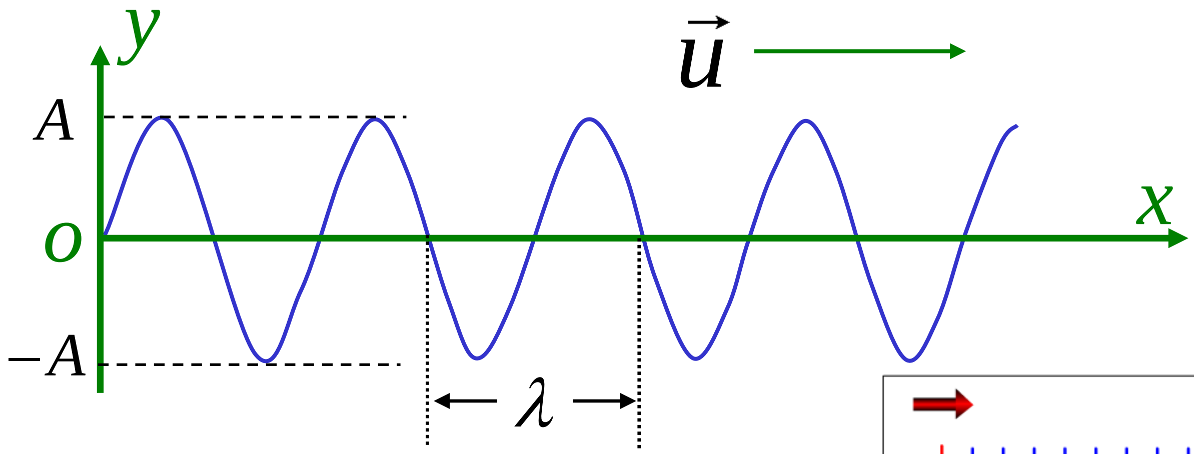


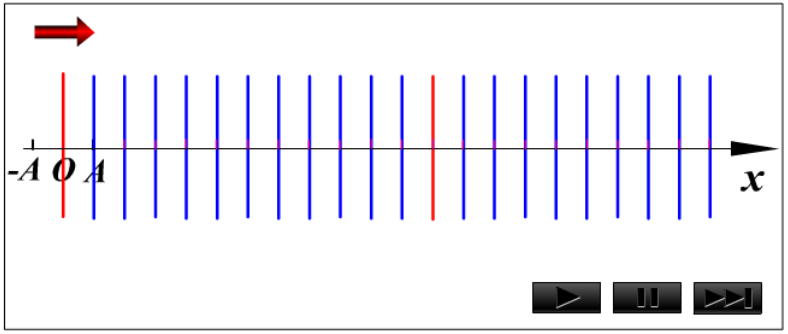
柱面波



平面波

三、描述波的物理量





振幅：	A	**单位：**	m	
周期：	T	**单位：**	s	
频率：	ν	**单位：**	Hz	$\nu = 1/T$ ——决定于波源的振动
波长：	λ	**单位：**	m	
波速：	u	**单位：**	m/s	$u = \lambda/T = \lambda\nu$

——由介质的性质决定，与弹性模量和密度有关

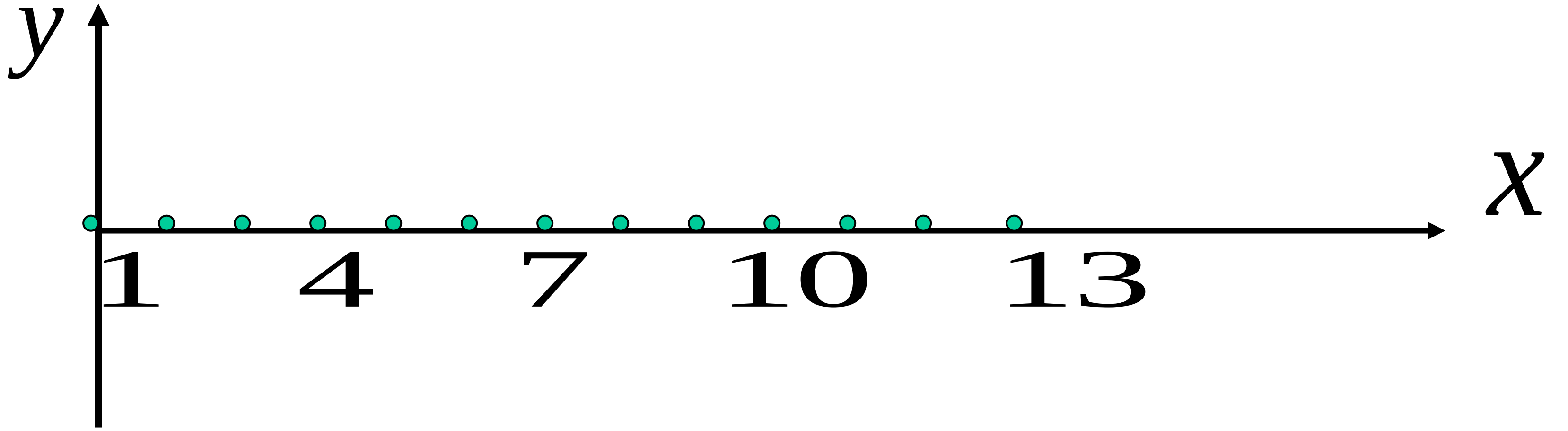
§2 平面简谐波

平面波: 波面是平面的波(一维、能量不损失)

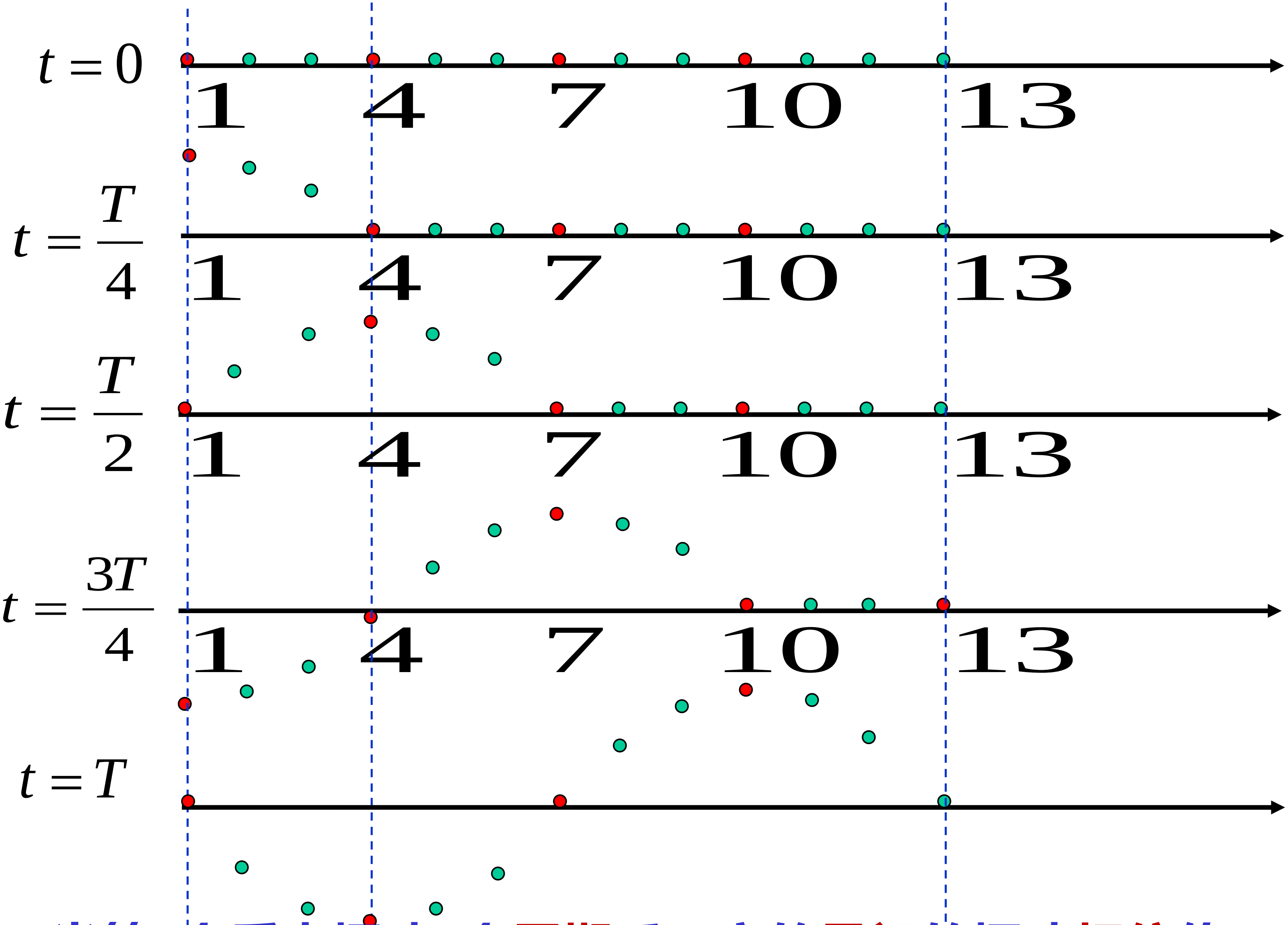
简谐波：波动传播到的各点均作简谐振动的波

一、平面简谐波的传播

以下以绳上横波为例，说明传播特征。



无外界干扰时，各质点均处在自己的平衡位置处。



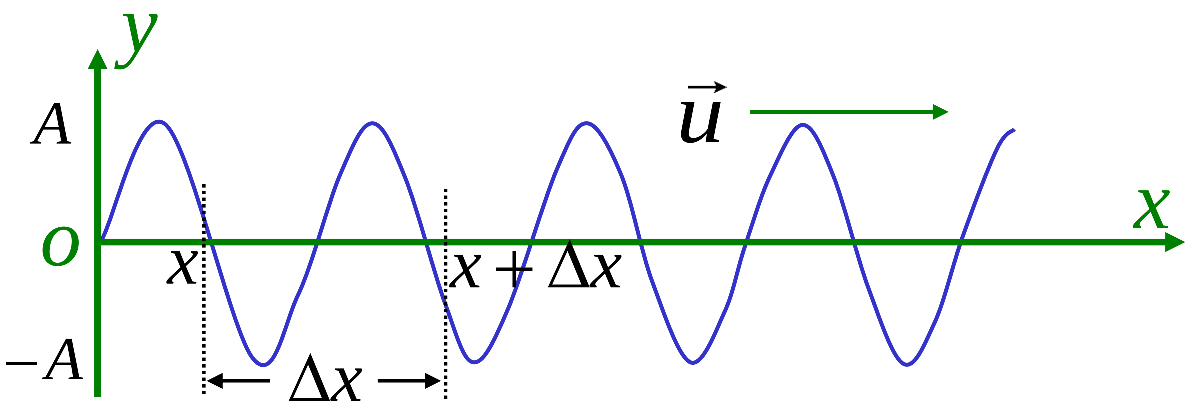
当第1个质点振动1个周期后，它的最初的振动相位传到第13个质点，即：第1个质点领先第13点2π相位。

- 波是**振动状态（能量）**的传播，不是介质中质点的传播，各质点均在自己的平衡位置附近作振动。

- **同时**看波线上各点沿传播方向，各点相位依次落后。

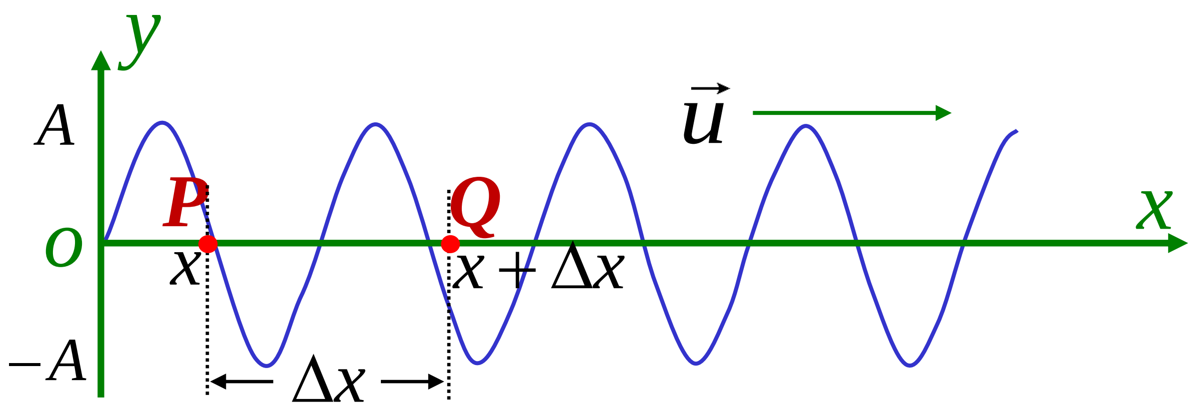
- 相距一个波长两点相位差是**2π**。如第13点和第1点，或说振动时间差1个**周期**，则相位差为**2π**。

$$\boxed{\text{相距 } \Delta x = \lambda \text{ 两点的相位差 } \Delta\varphi = 2\pi}$$



- 相距 Δx 的任意两点的相位差 $\boxed{|\Delta\varphi| = \dfrac{2\pi}{\lambda}|\Delta x|}$

二、平面简谐波波函数（余弦表达式）

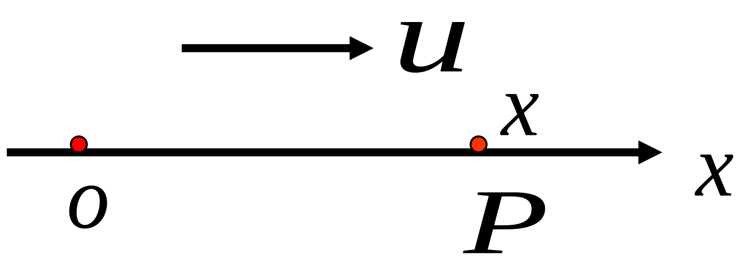


在波线后部 *Q* 点处 t 时刻的振动，是前部 *P* 点在

$$t-\frac{\Delta x}{u}=t-\frac{\Delta x}{\lambda}T$$ 时刻的振动

即 *Q* 点的振动落后于 *P* 点。

当波沿x轴正向传播时， P点的振动落后于O点



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

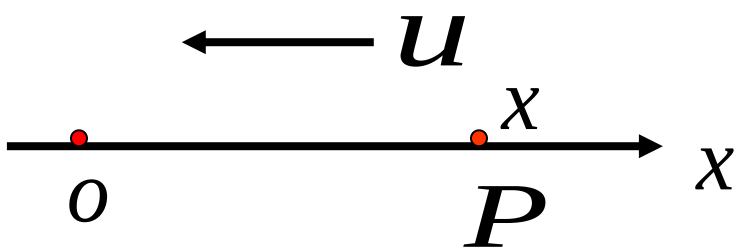
$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right]$$

由于P为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿x轴正方向传播的平面简谐波的表达式，也称**波函数**.

当波的传播方向与x轴反向时，P 点的振动超前于 O点



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

沿x轴负方向传播的平面简谐波的表达式

$$= A\cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right]$$