综合评价方法

综合评价数据处理

1.定量指标的一致化处理

设指标变量为 $x_j(j=1,2,\dots,m)$，评价对象有 n 个，第 $i(i=1,2,\dots,n)$ 个评价对象关于 x_j 的观测值为 a_{ij}，
1）极小型指标转化为极大型指标

$$x_j' = \frac{1}{x_j},$$

或者

$$x_j' = \max_{1\le i\le n}(a_{ij}) - x_j.$$

2）居中型指标转化为极大型指标
令 $M_j = \max\limits_{1\le i\le n}(a_{ij}),\ m_j = \min\limits_{1\le i\le n}(a_{ij})$，取

$$x_j' = \begin{cases} \dfrac{2(x_j - m_j)}{M_j - m_j},\ m_j \le x_j \le \frac{M_j+m_j}{2}, \\ \dfrac{2(M_j - x_j)}{M_j - m_j},\ \frac{M_j+m_j}{2} \le x_j \le M_j. \end{cases}$$

3）区间型指标化为极大型指标
令 $M_j = \max\limits_{1\le i\le n}(a_{ij}),\ m_j = \min\limits_{1\le i\le n}(a_{ij}),\ c_j = max(b_j^{(1)} - m_j, M_j - b_j^{(2)})$，取

$$x_j' = \begin{cases} 1 - \dfrac{b_j^{(1)} - x_j}{c_j}, & x_j < b_j, \\ 1 & b_j^{(1)} \le x_j \le b_j^{(2)}, \\ 1 - \dfrac{x_j - b_j^{(2)}}{c_j}, & x_j > b_j^{(2)} \end{cases}$$

2.定量指标值的无量纲化处理

对于 n 个评价对象，每个评价对象有 m 个指标，其观测值分别为

$$a_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m.$$

1）标准样本变换法

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij} - \mu_j}{s_j},$$

其中

$$\mu_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} - \mu_j)^2}.$$

2）比例变换法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{\underset{1 \le i \le n}{max}(a_{ij})}, \quad \underset{1 \le i \le n}{max}(a_{ij}) \ne 0,$$

对于极小型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{\underset{1 \le i \le n}{min}(a_{ij})}{a_{ij}}.$$

3）向量归一化法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}},$$

对于极小型指标，令

$$a_{ij}^* = 1 - \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}}.$$

4）极差变换法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij} - \underset{1 \le i \le n}{min}(a_{ij})}{\underset{1 \le i \le n}{max}(a_{ij}) - \underset{1 \le i \le n}{min}(a_{ij})},$$

对于极小型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{\underset{1 \le i \le n}{max}(a_{ij}) - a_{ij}}{\underset{1 \le i \le n}{max}(a_{ij}) - \underset{1 \le i \le n}{min}(a_{ij})}.$$

5）功效系数法
令

$$a_{ij}^{*}=c+\frac{a_{ij}-\underset{1\leq i\leq n}{min}(a_{ij})}{\underset{1\leq i\leq n}{max}(a_{ij})-\underset{1\leq i\leq n}{min}(a_{ij})}\times d,$$

变换后，$a_{ij}^{*}\in[\,c.\ c+d\,]$.

综合评价基本模型

对于 n 个评价对象，每个评价对象有 m 个指标，其观测值分别为

$$a_{ij},\quad i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,m.$$

1.线性加权综合评价法

设经过标准化处理后指标值为 b_{ij} ，权重系数矩阵为 $w=[\,w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m\,]$ ，
则第 i 个对象的加权综合评价值为

$$f_i=\sum_{j=1}^{m}w_jb_{ij},$$

2.TOPSIS法

1）评价指标预处理，进行一致化（全部化为极大型指标）和无量纲化处理，得到 b_{ij} ；
2）确定正理想解 $C^{+}=[c_1^{+},c_2^{+},\ldots,c_m^{+}]$ 和负理想解 $C^{-}=[c_1^{-},c_2^{-},\ldots,c_m^{-}]$ ，即

$$c_j^{+}=\underset{1\leq i\leq n}{max}(b_{ij}),\quad c_j^{-}=\underset{1\leq i\leq n}{min}(b_{ij}),$$

3）计算各评价对象到正理想解和负理想解的距离，即

$$s_j^{+}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(b_{ij}-c_j^{+})^2},\quad s_j^{-}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(b_{ij}-c_j^{-})^2}.$$

4）相对接近度为

$$f_i=\frac{s_i^{-}}{s_i^{-}+s_i^{+}}.$$

值越大越优越。

3.灰色关联度分析

1）评价指标预处理，进行一致化（全部化为极大型指标）和无量纲化处理，得到 b_{ij}；
2）确定比较数列和参考数列，即
比较数列为

$$b_i = \{b_{ij}\,|j = 1, 2, \ldots, m\},$$

参考数列为

$$b_0 = \{\underset{1\le i\le n}{max}(b_{ij})\,|j = 1, 2, \ldots, m\},$$

3）计算灰色关联系数

$$\xi_{ij} = \frac{\underset{1\le s\le n}{min}(\underset{1\le k\le m}{min}|b_{0k} - b_{sk}|) + \rho\cdot\underset{1\le s\le n}{max}(\underset{1\le k\le m}{max}|b_{0k} - b_{sk}|)}{|b_{0j} - b_{ij}| + \rho\cdot\underset{1\le s\le n}{max}(\underset{1\le k\le m}{max}|b_{0k} - b_{sk}|)},$$

ξ_{ij} 为比较数列 b_i 对参考数列 b_0 在第 j 个指标上的关联系数，其中 $\rho \in [\,0,\ 1\,]$ 为分辨系数，一般来讲，分辨系数越大，分辨率越高。
4）计算灰色关联度

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} w_j \xi_{ij},$$

其中 w_j 为第 j 个指标变量对 x_j 的权重。

4.熵值法

1）评价指标预处理，使 $b_{ij} > 0$；
2）计算第 j 项指标下第 i 个评价对象的特征比重，即

$$p_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}},$$

3）计算第 j 项指标的熵值，即

$$e_j = \frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ln p_{ij},$$

4）计算第 j 项指标的差异系数为

$$g_j = 1 - e_j,$$

5）确定第 j 项指标的权重系数为

$$w_j = \frac{g_j}{\sum\limits_{k=1}^{m} g_k},$$

6）计算第 i 个评价对象的综合评价值，即

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} w_j p_{ij},$$

评价值越大越优越。

5.秩和比法

样本秩：
设 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是从一元总体抽取的容量为 n 的样本，其从小到大的顺序统计量为 $c_{(1)}, c_{(2)}, \ldots, c_{(n)}$ 。若 $c_i = c_{(k)}$ ，则称 k 为 c_i 在样本中的秩，记为 R_i ，对每一个 $i = 1, 2, \ldots, n$ ，称 R_i 为第 i 个秩统计量。

1）观测值矩阵为 A ，对其逐列编秩，得到秩矩阵 $R = (R_{ij})_{n \times m}$ ；
2）计算秩和比，

$$RSR_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} w_j R_{ij},$$

其中 w_j 为第 j 个评价指标的权重。
秩和比越大越优越。

模糊数学方法

1.模糊数学基本理论

被讨论对象的全体称为论域，
论域 U 到 $[0,\ 1]$ 闭区间上的任意映射

$$M : U \to [0,1], \quad u \to M(u),$$

都确定了 U 上的一个模糊集合 M ， $M(u)$ 称为 M 的隶属函数，也称为 u 对 M 的隶属度，使得 $M(u) = 0.5$ 的点称为模糊集 M 的过渡点，此点最具有模糊性。

2.模糊贴近度

称模糊集为 F 集，论域 U 上的 F 集记为 $F(U)$ 。
设 $A, B, C \in F(U)$ ，若映射

$$N: F(U) \times F(U) \to [0,1]$$

满足条件:

$$\begin{aligned} &1)\ N(A,B) = N(B,A) \\ &2)\ N(A,A) = 1,\ N(U,\varnothing) = 0 \\ &3)\ 若\ A \subseteq B \subseteq C,\ 则\ N(A,C) \leq N(A,B) \vee N(B,C) \end{aligned}$$

则称 $N(A,B)$ 为 F 集 A 与 B 的贴近度, N 称为 $F(U)$ 上的贴近度函数。

设 $U = [u_1,\ u_2\ \ldots,\ u_n]$,
1)汉明贴近度

$$N(A,B) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid A(u_i) - B(u_i) \mid.$$

2)欧几里得贴近度

$$N(A,B) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^{n}(A(u_i) - B(u_i))^2)^{1/2}$$

3.模糊综合评价

1)确定指标集 $I = [x_1, x_2, \ldots, x_p]$ 和权重向量 $W = [w_1, w_2, \ldots, w_p]$;
2)建立评语集 $V = [v_1, v_2, \ldots, v_s]$;
3)建立单指标评价向量,综合起来获得评价矩阵 $R = (r_{ij})_{p\times s}$;
4)合成模糊综合评价结果向量,利用合适的算子将 W 与 R 进行合成,得到结果向量 A,即

$$A = W \circ R = [\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s\ ].$$

其中 a_i 由 W 与 R 的第 i 列运算得到,它表示被评价事物从整体上看对 v_i 等级模糊子集的隶属程度,对于 W 与 R 的合成算子,可作如下定义
1)$M(\wedge, \vee)$ 算子

$$a_k = \bigvee_{j=1}^{p}(w_j \wedge r_{jk}) = \max_{1\leq j\leq p}(\ min(w_j,\ r_{jk})\ ), \quad k = 1,2,\ldots,s.$$

2)$M(\cdot, \vee)$ 算子

$$a_k = \bigvee_{j=1}^{p}(w_j \cdot r_{jk}) = \max_{1\leq j\leq p}(w_j\ \cdot\ r_{jk}), \quad k = 1,2,\ldots,s.$$

3)$M(\vee, +)$ 算子

$$a_k=\sum_{j=1}^{p}min(w_j,\ r_{jk}),\quad k=1,2,\ldots,s.$$

4）$M(\cdot,+)$ 算子

$$a_k=\sum_{j=1}^{p}w_jr_{jk},\quad k=1,2,\ldots,s.$$

数据包络分析

设有 m 个评价对象，每个评价对象都有 n 种投入和 s 种产出，设 $a_{ij}(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ 表示第 i 个评价对象的第 j 种投入量，$b_{ik}(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,s)$ 表示第 i 个评价对象的第 k 种产出量，$u_j(j=1,2,\ldots,n)$ 表示第 j 种投入的权值，$v_k(k=1,2,\ldots,s)$ 表示第 k 种产出的权值。

向量 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\ldots,m)$ 分别表示评价对象 i 的输入和输出向量，u,v 分别表示输入、输出权值向量，则 $\alpha_i=[\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in}]^T$ ，$\beta_i=[\beta_{i1},\beta_{i2},\ldots,\beta_{is}]^T$ ，$u=[u_1,u_2,\ldots,u_n]^T$ ，$v=[v_1,v_2,\ldots,v_s]^T$ 。

定义评价对象 i 的效率评价指数为

$$h_i=\frac{\beta_i^Tv}{\alpha_iu},\quad i=1,2,\ldots,m.$$

评价对象 i_0 效率的数学模型为

$$max\ \frac{\beta_{i_0}^Tv}{\alpha_{i_0}u},$$
$$s.t.\begin{cases}h_i\le 1,\ i=1,2,\ldots,m,\\ u\ge 0,\ v\ge 0,\ u\ne 0,\ v\ne 0.\end{cases}$$

将上述模型进行 $Charnes-Cooper$ 变换，即 $\omega=tu,\ \mu=tv,\ t=1/\alpha_{i_0}^Tu$ 得到等价的线性规划模型：

$$max\ V_{i_0}=\beta_{i_0}^T\mu,$$
$$s.t.\begin{cases}\alpha_i^T\omega-\beta_i^T\mu\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m,\\ \alpha_{i_0}^T\omega=1,\\ \omega\ge 0,\ \mu\ge 0.\end{cases}$$

若上述线性规划模型存在最优解 $\omega^*>0,\ \mu^*>0$，且最优目标值 $V_{i_0}=1$ ，则称评价对象 i_0 是 DEA 有效的，此时投入产出比达到最大。