预测方法

灰色预测模型

1.GM(1, 1)预测模型

适用于具有较强指数规律的序列。
已知参考数列 $x^{(0)} = (\ x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(1),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ )$，
一次累加生成序列（1-AGO）为

$$x^{(1)} = (\ x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(1),\ \ldots,\ x^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i),\ k = 1, 2, \ldots, n$，
$x^{(1)}$ 的均值生成数列为

$$z^{(1)} = (\ z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(1),\ \ldots,\ z^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1),\ k = 2, 3, \ldots, n$，
建立灰微分方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b,$$

记

$$u = [\ a,\ b\ ]^T, \quad Y = [\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ ], \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

由最小二乘法，得

$$u = (B^T B)^{-1} B^T Y,$$

从而求解上述方程，得到

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}})e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\quad k=0,1,\cdots,n-1,\cdots.$$

还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k).$$

在建立模型之前，需要对数据进行检验处理，
计算参考数列的级比

$$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

若所有的 $\lambda(k)$ 都落在可容覆盖 $\Theta=(e^{-\frac{2}{n+1}},\ e^{\frac{2}{n+1}})$ 内，则序列 $x^{(0)}$ 可以作为 $GM(1,\ 1)$ 的数据进行预测，否则要对参考序列进行变换使其落入可容覆盖内；

预测数据之后，要对所得数据进行检验，
1）相对误差检验

$$\delta(k)=\frac{\mid x^{(0)}(1)-\hat{x}^{(0)}(k)\mid}{x^{(0)}(k)},$$

其中 $\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)$ ，若 $\delta(k)<0.2$ ，则可认为达到一般要求。
2）级比偏差值检验

$$\rho(k)=\mid 1-\frac{1-0.5\hat{a}}{1+0.5\hat{a}}\lambda(k)\mid,$$

若 $\rho(k)<0.2$ ，则可认为达到一般需求。

2.GM(2, 1)预测模型

已知参考数列 $x^{(0)}=(\ x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(1),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ )$ ，
一次累加生成序列（1-AGO）为

$$x^{(1)}=(\ x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(1),\ \ldots,\ x^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\ldots,n$ ，
一次累减生成序列（1-IAGO）为

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}=(\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \ldots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\ ),$$

其中 $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\ k=2,3,\ldots,n$ ，
$x^{(1)}$ 的均值生成数列为

$$z^{(1)}=(\ z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(1),\ \ldots,\ z^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),\ k=2,3,\ldots,n$ ，
建立灰微分方程

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+a_1x^0(k)+a_2z^{(1)}(k)=b,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{d^2x^{(1)}(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+a_2x^{(1)}(t)=b,$$

记

$$u=[\ a_1,\ a_2,\ b\ ]^T,$$

$$Y=[\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3),\ \ldots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\ ]^T,$$

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},$$

得到 u 的最小二乘估计为

$$\hat{u}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k).$$

3.DGM(2, 1)预测模型

已知参考数列 $x^{(0)}=(\ x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(1),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ )$ ，
一次累加生成序列（1-AGO）为

$$x^{(1)}=(\ x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(1),\ \ldots,\ x^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\ldots,n$ ，
一次累减生成序列（1-IAGO）为

$$\alpha^{(1)}x^{(0)} = (\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \ldots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\ ),$$

其中 $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1),\ k = 2,3,\ldots,n$ ，
$x^{(1)}$ 的均值生成数列为

$$z^{(1)} = (\ z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(1),\ \ldots,\ z^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1),\ k = 2,3,\ldots,n$ ，
建立灰微分方程

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) + ax^{(0)}(k) = b, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{d^2x^{(1)}(t)}{dt} + a\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = b,$$

记

$$u = [\ a,\ b\ ]^T,$$

$$Y = [\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3),\ \ldots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\ ]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

得到 u 的最小二乘估计为

$$\hat{u} = (B^TB)^{-1}B^TY.$$

取初值条件

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1),\ \frac{dx^{(1)}(1)}{dt} = x^{(0)}(1),$$

白化方程的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (\frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{\hat{a}})e^{-\hat{a}t} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}t + \frac{1+\hat{a}}{\hat{a}}x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2},$$

灰微分方程的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(\frac{\hat{b}}{\hat{a}^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{\hat{a}})e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}k+\frac{1+\hat{a}}{\hat{a}}x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}^2},$$

还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k).$$

4.Verhulst预测模型

常用于 S 型过程。
已知参考数列 $x^{(0)}=(\ x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(1),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ )$，
一次累加生成序列（1-AGO）为

$$x^{(1)}=(\ x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(1),\ \ldots,\ x^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\ldots,n$ ，
$x^{(1)}$ 的均值生成数列为

$$z^{(1)}=(\ z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(1),\ \ldots,\ z^{(1)}(n)\ ),$$

其中 $z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),\ k=2,3,\ldots,n$ ，
建立灰微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b[\ z^{(1)}(k)\ ]^2,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}t=b[\ x^{(1)}(t)\ ]^2,$$

记

$$u=[\ a,\ b\ ]^T,$$

$$Y=[\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ \ldots,\ x^{(0)}(n)\ ]^T,$$

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2 & 1\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2 & 1\end{bmatrix},$$

得到 u 的最小二乘估计为

$$\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

白化方程的时间响应序列为

$$x^{(1)}(t) = \frac{\hat{a} x^{(0)}(1)}{\hat{b} x^{(0)}(1) + (\hat{a} - \hat{b} x^{(0)}(1)) e^{\hat{a} t}},$$

灰微分方程的时间响应序列为

$$x^{(1)}(k+1) = \frac{\hat{a} x^{(0)}(1)}{\hat{b} x^{(0)}(1) + (\hat{a} - \hat{b} x^{(0)}(1)) e^{\hat{a} k}},$$

还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k).$$

马尔可夫预测

1.定义

设 $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ 是一个随机序列，状态空间 E 为有限集，对于任意正整数 m, n ，若 $i, j, i_k \in E (k = 1, \ldots, n-1)$ ，有

$$P\{\xi_{m+n} = j \mid \xi_n = i,\ \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1\} = P\{\xi_{m+n} = j \mid \xi_n = i\},$$

则称 $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ 为一个马尔可夫链，上述等式称为马氏性。
对于上述等式，若 $m = 1$ 时成立，则其对于任意正整数 m 也成立。

设 $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ 为一个马氏链，若上述等式右边的条件概率与 n 无关，即

$$P\{\xi_{m+n} = j \mid \xi_n = i\} = p_{ij}(m),$$

则称 $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ 为时齐的马尔可夫链，称 $p_{ij}(m)$ 为系统由状态 i 经过 m 个时间间隔转移到状态 j 的转移概率。

2.转移概率矩阵及柯尔莫哥洛夫定理

对于一个马尔可夫链 $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ ，称以 m 步转移概率 $p_{ij}(m)$ 为元素的矩阵 $P(m) = (p_{ij}(m))$ 为马尔可夫链的 m 步转移矩阵。当 $m = 1$ 时，记 $P(1) = P$ 称为马尔可夫链的一步转移矩阵。

马尔可夫转移矩阵的性质:
1）对 $\forall\, i, j \in E$ ，$0 \le p_{ij}(m) \le 1$ ；

2）对 $\forall i \in E$ ，$\sum\limits_{j \in E} p_{ij}(m) = 1$ ；

3）对 $\forall i,j \in E$ ，

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

柯尔莫哥洛夫-开普曼定理：

设 $\{\xi_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ 为一个马尔可夫链，其状态空间 $E = \{1,2,\ldots\}$ ，则对任意正整数 m,n ，有

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in E} p_{ik}(n) p_{kj}(m), \quad i,j \in E$$

设 P 为一步马尔可夫链转移矩阵（ P 的行向量是概率向量）， $P^{(0)}$ 是初始分布行向量，则第 n 步的概率分布为

$$P^{(n)} = P^{(0)} P^n.$$

3.极限概率分布

一个马尔可夫链的转移矩阵 P 是正则的，当且仅当存在正整数 k ，使 P^k 的每一个元素都是正数。

若 P 是一个马尔可夫链的正则矩阵，则

1）P 有唯一的不动点向量 W ，W 的每个分量为正。

2）P 的 n 次幂 P^n （n 为正整数）随 n 的增加趋于矩阵 $\overline{W}$ ， $\overline{W}$ 的每一行向量均等于不动点向量 W；

设时齐的马尔可夫链的状态空间为 E ，若对于所有的 $i,j \in E$ ，转移概率 $p_{ij}(n)$ 存在极限

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j,$$

则称此马尔可夫链具有遍历性。又若 $\sum\limits_j \pi_j = 1$ ，则同时称 $\pi = [\ \pi_1,\ \pi_2\ \ldots\ ]$ 为此马尔可夫链的极限分布。

设时齐的马尔可夫链 $\{\xi_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ 的状态空间 $E = \{a_1,\ldots,a_N\}$ ， $P = (p_{ij})$ 是它的一步转移概率矩阵，若存在正整数 m ，使得对 $\forall\, a_i, a_j \in E$ ，有

$$p_{ij}(m) > 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,N,$$

则称此马尔可夫链具有遍历性；且有极限分布 $\pi = [\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N\ ]$ ，它是方程组

$$\pi = \pi P \text{ 或 } \pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

的满足条件

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

的唯一解。