

基于聚类与时间序列分析的原材料订购和转运方案的决策研究

摘要

本文研究某生产企业的原材料订购方案和转运方案决策，通过聚类分析描述供应商的供货特征，通过时间序列分析预测供应商未来供应量，建立规划模型求解最优订购方案和转运方案。

为解决问题一，本文针对供应商数量众多、特征各异的特点，通过 ***k-means*** 聚类算法对供应商进行分类，实现基于历史数据的供应商特征分类和信息挖掘，发现供应商具有大量稳定供应、大量周期供应、少量稳定供应、少量不规则供应四种类型，依此确定最重要供应商的候选集合。接着，本文以供应商的供应量、供应稳定性、交货率、交货稳定性、供应时长等数据为核心指标，基于 **VIKOR** 评价方法进行量化分析，建立多准则优化与妥协评价模型，计算每家供应商的综合得分，确定 50 家最重要的供应商。

为解决问题二，本文考虑供应商的供应能力在时间维度和周期尺度上的变化，首先通过 **SARIMA** 模型预测每家供应商在未来 24 周内的供应量，将历史供应量数据整合分析为未来预期供应量。其次，本文进一步将选择最少供应商问题建模为 0-1 规划问题，基于题目信息和现实依据分析优化目标和约束条件，建立规划模型，应用 **SEGA**（增强精英保留策略的遗传算法）进行求解，得到最优的供应商选择方案，并依此确定转运方案。最后，本文分析订购方案和转运方案的实施效果，发现订购方案具有规律的周期性，与历史订购数据相吻合，且不发生库存积压的情况，订购方案和转运方案的实施效果良好。

为解决问题三，本文综合考虑三类原材料的订购成本和转运、仓储费用，引入新的优化目标即最小化转运和仓储费用，建立多目标规划模型，应用多目标非支配排序遗传算法 **NSGA** 的第三代算法 **NSGA-III** 进行求解，得到一组 Pareto 最优解，从中选取最优订购方案，并进一步用规划方法确定转运方案。最后，本文分析新订购方案和转运方案的实施效果，发现新方案相比原方案，A 类原材料占比提高 0.6%，C 类原材料占比下降 1.1%，仓储与转运总成本下降 1.1%，实施效果良好。

为解决问题四，本文根据新的产能提升潜力，重新设计优化目标和约束条件，建立新的规划模型。为了充分发挥产能，本文扩大供应商选择范围，利用 **SARIMA** 模型和白噪声模拟预测未来供应量，应用 **SEGA** 算法求解规划模型，得到最优的订购方案和转运方案。最后，本文分析新订购方案和转运方案的实施效果，发现新方案相比原方案，产能提高 20.26%，产能提高效果显著。

关键字： ***k-means*** 聚类算法 **VIKOR** 评价模型 **SEGA** 算法 **NSGA-III** 算法

一、问题重述

1.1 问题背景

某经营生产建筑和装饰板材的企业关于原材料的管理分为订购、供应、转运、存储四个环节。在订购环节，A、B、C三种原材料的采购单价不同，为生产单位产品的原材料消耗量也不同。在供应环节，原材料供应商的实际供应量可能多于或少于订购量，且该企业总是全部收购实际供应量。在转运环节，每家转运商的转运能力有限，每家供应商每周供应的原材料应尽量由一家转运商运输且运输过程有一定损耗。在存储环节，原材料的存储费用仅与存储量有关，且该企业应尽量存有满足不少于两周生产的原材料。

本题要求根据该企业近5年402家原材料供应商的订购量和供应量数据及8家转运商的运输损耗率数据，分析供货特征，建立反映保障企业生产重要性的数学模型，在不同要求下制定未来的原材料订购方案，进而分析其实施效果。

1.2 问题要求

本题要求解决如下四个问题：

- (1) 根据该企业近5年402家原材料供应商的订购量和供应量数据，
 - (a) 对402家供应商的供货特征进行量化分析；
 - (b) 建立反映保障企业生产重要性的数学模型，在此基础上确定50家最重要的供应商。
- (2) 参考问题(1)的分析，
 - (a) 分析该企业应至少选择多少家供应商供应原材料才可能满足生产的需求；
 - (b) 针对这些供应商，为该企业制定未来24周每周最经济的原材料订购方案，并据此制定损耗最少的转运方案；
 - (c) 分析订购方案和转运方案的实施效果。
- (3) 现计划尽量多地采购A类和尽量少地采购C类原材料，以减少转运及仓储的成本，同时希望转运商的转运损耗率尽量少。为此，
 - (a) 制定新的未来24周订购方案及转运方案；
 - (b) 分析新订购方案及转运方案的实施效果。
- (4) 该企业已具备提高产能的潜力。根据现有原材料的供应商和转运商的实际情况，
 - (a) 确定该企业每周的产能可以提高多少；
 - (b) 给出未来24周的订购和转运方案。

1.3 问题信息

- 该企业每年按 48 周安排生产；
- 该企业每周的产能为 2.82 万立方米/周；
- A、B、C 三种原材料的采购单价相对值及生产单位产品的原材料消耗量；
- 供应商的实际供应量可能多于或少于订购量，且该企业总是全部收购实际供应量；
- 每家转运商的运输能力为 6000 立方米/周；
- 三类原材料运输和储存的单位费用相同。
- 该企业应尽可能保持不少于满足两周生产需求的原材料库存量；
- 一家供应商每周供应的原材料应尽量由一家转运商运输。
- 该企业近 5 年对 402 家供应商的订购量和供应量数据；
- 8 家转运商的运输损耗率数据。

二、模型假设

- 供应商之间和转运商之间不存在竞争关系，即供应商和转运商之间的合作是独立的；
- 企业总是按照供应商的供货量进行收购；
- 假设从一家供货商订购的货物只能由一家转运商转运，即题目要求的严格处理；
- 假设在制定未来 24 周订购计划前，企业已经有满足两产能的库存。

三、符号说明

符号	含义	单位
w_{ij}	供应商 i 第 j 周的订购量	立方米
v_{ij}	供应商 i 第 j 周的供应量	立方米
q_{ij}	供应商 i 第 j 周的交货率	无量纲
W_i	供应商 i 的总订购量	立方米
V_i	供应商 i 的总供应量	立方米
Q_i	供应商 i 的平均交货率	无量纲
C_i	v_{ij} 对 j 的变异系数	无量纲
S_i	q_{ij} 对 j 的变异系数	无量纲
T_i	供应商 i 的供应时长	周

表 1 符号说明

四、问题分析

本题主要由两类问题组成：一是统计问题，基于每家供应商的历史订购量和历史供应量数据，建立数学模型分析供应商的供货特征；二是优化问题，针对不同的要求，制定未来 24 周的订购方案。为解决供货特征问题，需要根据历史数据设计合适的指标对供应商进行评估，从而确定最重要的供应商；为解决订购方案问题，除了供应特征之外，还需要考虑损耗率、转运商的运输能力、存储费用等因素，以确定最经济的订购方案。

4.1 数据预处理

题目共提供 402 家供应商的历史订购量和供应量数据，供应商数量多，供应特征差异大，没有明显的异常数据和无效数据，因此应尽量保留原始数据。在原始数据的基础上，由于不同原材料为生产单位产品的原材料消耗量不同，因此需要将不同原材料的订购量和供应量转化为可比较的单位，即用生产产品量表示原材料的数量。其次，由于部分供应商只在个别几周供应少量原材料，这些供应商对企业生产不重要，与后续问题无关，因此可以作为无用数据予以剔除。

4.2 问题一

问题一要求根据历史订购量和历史供应量分析 402 家供应商的供货特征，并建立反映保障企业生产重要性的数学模型，确定 50 家最重要的供应商。对于供货特征，可以从供应商的供应量、供应稳定性、交货率、交货稳定性、供应时长等方面作量化分析。首先，我们通过 k -means 聚类算法对供应商进行分类，观察不同类别的供应商的供货特征，确定重要供应商最可能所在的类别。接着，根据前述分类结果，我们基于 VIKOR（多准则优化与妥协解决方案）方法，先通过 CRITIC 方法总结出一系列评价指标，进而通过计算多个评价准则的距离，根据接近“理想解”的程度进行妥协性评估，从而确定 50 家最重要的供应商。

4.3 问题二

问题二要求根据问题一的分析结果，分析该企业应至少选择多少家供应商供应原材料才可能满足生产的需求，并制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案和转运方案，分析其实施效果。对于供应商的选择，可以先对历史供应量作分析，应用季节性 ARIMA 模型（SARIMA）预测每家供应商的未来供应量。接着，可以将该问题形式化为 0-1 规划问题，应用基于多种群的强者进化遗传算法（SEGA）进行求解，得到最优的供应商选择方案。对于订购方案和转运方案，应当以最小化成本为目标，从而建立规划模型并求解。

4.4 问题三

问题三要求尽量增加原材料 A 的订购，减少原材料 C 的订购，以减少转运及仓储的成本。首先，应当考虑三类原材料对应的转运、仓储成本，建立成本模型。接着，可以将问题三形式化为多目标规划问题，再应用多目标遗传算法 NSGA-III 进行求解，得到最优的订购方案和转运方案。最后，对新订购方案和转运方案的实施效果进行分析。

4.5 问题四

问题四假定企业具备提高产能的潜力，要求根据现有原材料的供应商和转运商的实际情况，确定该企业能提高的产能。首先，根据新条件重新设计优化目标和约束条件，建立新的规划模型，并扩大供应商选择范围。接着，根据不同供应商的历史供应量特征，分别利用 SARIMA 方法和白噪声模拟来预测未来供应量。最后，应用 SEGA 算法求解该规划模型，得到最优的订购方案和转运方案。

五、 数据侧写

5.1 供应商的供货特征

将各个供应商的历史供应量进行统计，对时间绘制折线图，发现三类具有代表性供应特征的供应商，如图 1 所示。供应商 S334 为典型的周期型供应商，在大部分时间供应量为零或极少，但每隔 24 个周就出现一个供应量尖峰，即每半年供应一次，具有极强的周期规律性。供应商 S131 为稳定型供应商，在过去五年中，每周供应量围绕 400 ~ 700 立方米波动，虽然有不小的浮动，但长期来看保持稳定。供应商 S308 为突发型供应商，在绝大部分时间保持少量稳定供应，但在个别周突发大量供应，具有较强的不确定性。

5.2 数据预处理

通过观察供应商历史供应量数据，我们发现有少数供应商在过去五年间有供应量的周数极少，供应量不大，这些供应商对企业生产的重要性很低，可以予以剔除。对于剩余的供应商，我们将其历史订购量和供应量数据转化为生产单位产品的原材料消耗量，以便后续分析。经过剔除，我们从 402 家供应商中剔除了 12 家供应周数在 5 周以下的供应商，剩余的 390 家供应商用于后续分析。

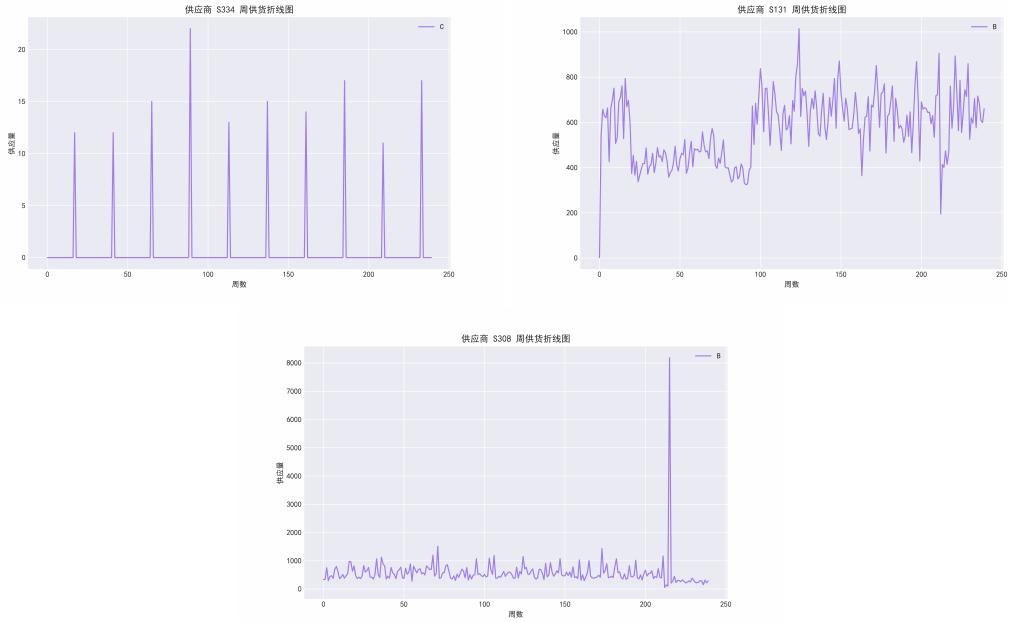


图 1 三家不同类型供应商的供应量

六、问题一的建模与求解

6.1 问题聚焦

问题一要求对 402 家供应商的供货特征进行量化分析，并建立反映保障企业生产重要性的数学模型，确定 50 家最重要的供应商。为了通过统计方法建立描述供货特征的数学模型，我们将问题一的解决分解为三个步骤：

- (1) **量化指标** 为供应商的历史订购量和供应量确定量化指标，用于后续的聚类分析和评价模型；
- (2) **聚类分析** 通过 k -means 聚类算法对供应商进行分类，观察不同类别的供应商的供货特征，筛选出最重要供应商可能所在类别；
- (3) **评价模型** 基于 VIKOR 方法，根据上面确定的量化指标，计算每家供应商的综合得分，确定 50 家最重要的供应商。

该过程可以用图 2 所示。

6.2 量化指标

根据在数据侧写阶段对历史订购量和供应量的大致描绘，考虑供应量对生产企业成本的影响，确定如下五个量化指标：

- (1) **供应总量** 供应商的历史供应量所对应产品生产量的总和，描述总的供应量。供应

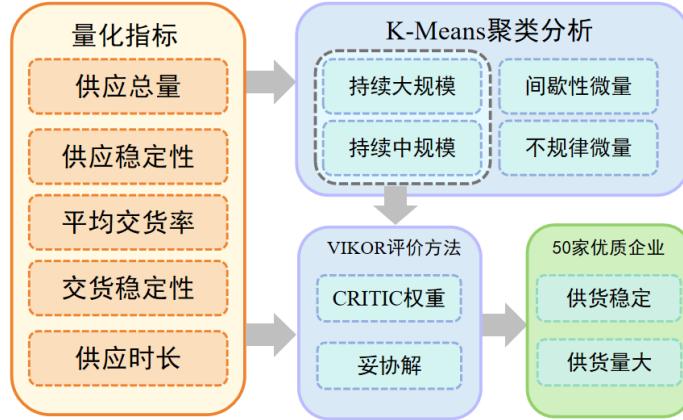


图 2 问题一的解决过程

总量越大，表明供应商对企业供应量的贡献越大。供应总量形式化表示为

$$V_i = \sum_j v_{ij}.$$

(2) 供应稳定性 供应量的变异系数，描述供应商的供应量在时间上的稳定性。供应稳定性越高（变异系数的值越小），表明供应商的供应量波动越小，对企业生产的风
险越小。供应稳定性用变异系数表示为

$$C_i = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_i} \sum_j (v_{ij} - \bar{v}_i)^2}}{\bar{v}_i}.$$

(3) 平均交货率 供应量与订购量的比值的平均值，描述供应商完成订购单的能力。平
均交货率越高，表明供应商的交货能力越强，对企业按照订购计划生产的保障越好。
平均交货率形式化表示为

$$Q_i = \frac{1}{N} \sum_j q_{ij} = \frac{1}{T_i} \sum_j \frac{v_{ij}}{w_{ij}}.$$

(4) 交货稳定性 交货率的变异系数，描述供应商的交货率在时间上的稳定性。交货稳
定性越高（变异系数的值越小），表明供应商的交货率波动越小，对企业生产的风
险越小。交货稳定性用变异系数表示为

$$S_i = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_i} \sum_j (q_{ij} - \bar{q}_i)^2}}{\bar{q}_i}.$$

(5) 供应时长 供应商的供应周数，即供应量大于零的周数。供应时长越长，表明供应

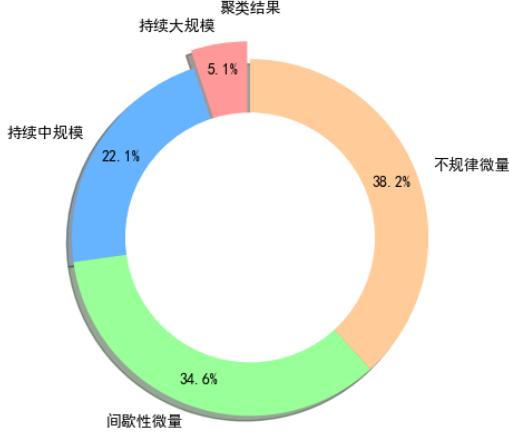


图 3 k -means 聚类结果占比

商对保障企业生产的持续性越好。设 $\mathbb{I}(\cdot)$ 表示只是函数，供应时长形式化表示为

$$T_i = \sum_j \mathbb{I}(v_{ij} > 0), \mathbb{I} = \begin{cases} 1, & \text{if } v_{ij} > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

6.3 聚类分析

在数据侧写中，我们观察到不同供应商的供应特征差异明显，但又存在几个主要的供应特征，因此可以通过聚类分析的方法将供应商分为若干类别，以便后续的评价模型。我们选择 k -means 聚类方法，根据上述五个量化指标，将供应商分为若干类别，观察不同类别供应商的供货特征，以确定重要供应商最可能所在的类别。

k -means 聚类方法是基于样本之间的相似性进行聚类的一种方法，其基本思想是：首先随机选择 k 个样本作为初始聚类中心，然后计算每个样本到各个聚类中心的距离，将样本划分到距离最近的聚类中心所在的类别中；接着，重新计算每个类别的中心，重复上述过程，直到聚类中心不再发生变化，即达到收敛状态。 k -means 聚类方法的优点是简单易行，计算速度快，但需要事先确定聚类数目 k 。

6.3.1 聚类过程

通过对每家供应商计算供应总量、供应稳定性、平均交货率、交货稳定性、供应时长，我们得到了 402 家供应商的五个量化指标，将这些指标作为 k -means 聚类的输入数据，通过 k -means 聚类方法，将 402 家供应商分为 4 个聚类，占比如图 3 所示，其中轮廓系数为 0.408，Calinski-Harabasz 系数为 94.995。

轮廓系数是基于数据点之间的距离评估聚类后簇与簇之间离散程度的指标，其取值范围为 $[-1, 1]$ ，轮廓系数越接近 1，表示聚类效果越好。Calinski-Harabasz 系数是基于类间距离和类内距离衡量聚类结果的紧凑度、分离度的指标，其取值范围为 $[0, +\infty]$ ，

Calinski-Harabasz 系数越大，表示聚类效果越好。

6.3.2 聚类解释

我们将 4 个聚类标示为聚类 0~3，通过对每个聚类的供应商进行观察，我们发现不同聚类的供应商具有不同的供货特征：

- (1) **聚类 0** 如图 4a 所示，该类供应商的供应量小，供应不规律，供应重要性低。
- (2) **聚类 1** 如图 4b 所示，该类供应商的供应量小，且供应具有周期性规律，供应重要性比聚类 0 高，但仍较低。
- (3) **聚类 2** 如图 4c 所示，该类供应商的供应量较大，且供应持续，供应重要性较高。
- (4) **聚类 3** 如图 4d 和图 4e 所示，该类供应商的供应量大，且供应持续，内部又存在图 4d 所示强周期性类型和图 4e 所示不规律类型，供应重要性高。

根据上述分析，基于选出 50 家最重要供应商的目的，我们认为聚类 0、聚类 1 中的供应商供应重要性较低，聚类 2、聚类 3 中的供应商供应重要性较高，因此我们将聚类 2、聚类 3 作为最重要供应商的候选集合。

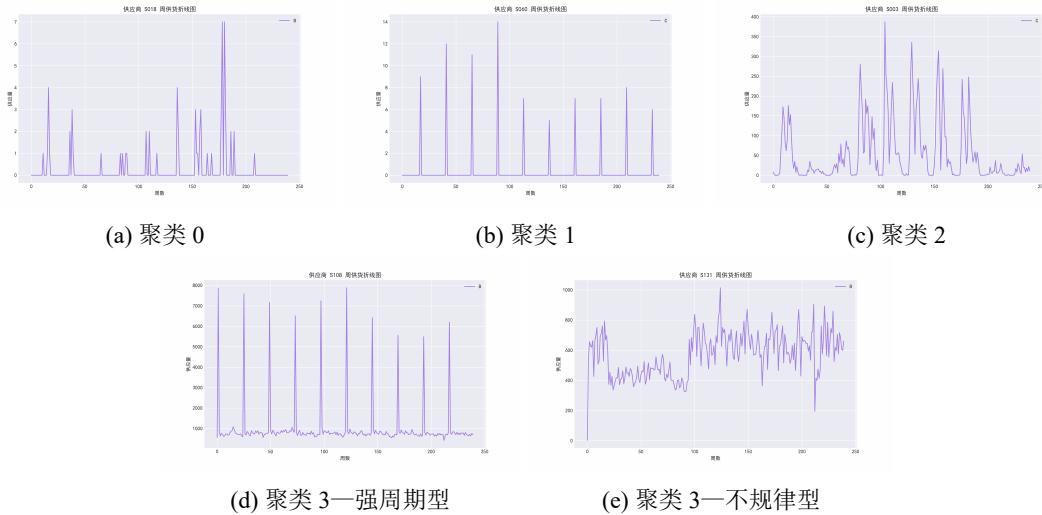


图 4 k -means 聚类结果

6.4 评价模型

在确定最重要供应商候选集合的基础上，我们采用 VIKOR 方法建立评价模型，通过计算每家供应商的综合得分，进一步确定 50 家最重要的供应商。

6.4.1 VIKOR 方法

VIKOR 方法属于多准则决策分析方法中，旨在通过计算多个评价准则的距离，找到最接近“理想解”的方案，从而为复杂决策问题提供妥协解决方案。VIKOR 方法强

调妥协解的寻找，适合用于需要平衡多个冲突准则，在多个评价标准之间做出权衡和妥协的决策问题。在确定 50 个最重要供应商的任务中，我们需要综合考虑供应商的供应总量、供应稳定性、平均交货率、交货稳定性、供应时长等多个评价准则，因此选择 VIKOR 方法进行评价。

VIKOR 方法的基本思想是基于对正理想解和负理想解的距离来评价各个方案，其核心概念如下：

设有 m 个评价样本和 n 个准则，构建 $m \times n$ 的决策矩阵 X ，其中 x_{ij} 表示第 i 个备选方案在第 j 个准则下的值。对于每个准则 j ，确定正负理想解 A_j^+ 和 A_j^- ：

若准则是极大化的，则

$$A_j^+ = \max(x_{ij}) \forall j, A_j^- = \min(x_{ij}) \forall j,$$

若准则是极小化的，则

$$A_j^+ = \min(x_{ij}) \forall j, A_j^- = \max(x_{ij}) \forall j$$

对每个样本 i ，计算其到正负理想解的距离：

$$S_i = \sum_{j=0}^n w_j \frac{|x_{ij} - A_j^-|}{|A_j^+ - A_j^-|}, R_i = \max_j (w_j \frac{|x_{ij} - A_j^-|}{|A_j^+ - A_j^-|}),$$

其中， w_j 是准则 j 的权重。

计算 VIKOR 评价指标 V_i ：

$$V_i = Q \frac{S_i - \min(S_i)}{\max(S_i) - \min(S_i)} + (1 - Q) \frac{R_i - \min(R_i)}{\max(R_i) - \min(R_i)}$$

其中 $Q \in [0, 1]$ 为冲突平衡参数。最后，根据 VIKOR 指标 V_i 对备选方案进行排序，选择最优方案，数值越小的方案越优。

在本问题中，评价指标包括供应总量、供应稳定性、平均交货率、交货稳定性、供应时长，我们将这些指标作为 VIKOR 方法的输入数据，计算每家供应商的 VIKOR 指标，从而确定 50 家最重要的供应商。

6.4.2 CRITIC 方法

为确定 VIKOR 方法中各评价指标的权重 w_i ，我们采用 CRITIC (CRiteria Importance Through Intercriteria Correlation) 方法，通过计算各评价指标之间的相关性，确定各指标的权重。CRITIC 方法属于客观权重法，它兼顾指标变异性和平指标冲突性，利用数据自身的客观属性对权重作科学评价。CRITIC 方法的基本思想是：指标变异性大，说明各

方案之间的取值差距大，权重就升高；指标之间的冲突性小，说明相关性强，权重就降低。

根据 CRITIC 方法进行计算，我们得到供应总量、供应稳定性、平均交付率、供货特征、供应总时间的权重向量为 $[0.2123519, 0.15677611, 0.18306588, 0.19579589, 0.25201021]$ 。

6.4.3 评价结果

根据上面计算的权重向量，我们完成 VIKOR 方法的计算，并根据评分结果对供应商进行排序，最终确定 50 家最重要的供应商。我们将这 50 家供应商作为后续问题的重点研究对象。表 2 列出了前 10 家最重要供应商及其评分；前 50 家最重要供应商列表见附录；全部 402 家供应商的重要性评分完整列表见附件 rank_result.xlsx。

排名	供应商编号	评价得分	排名	供应商编号	评价得分
1	S140	0.1181	6	S329	0.2238
2	S229	0.1477	7	S340	0.2320
3	S361	0.1905	8	S108	0.2518
4	S275	0.2198	9	S131	0.2687
5	S282	0.2200	10	S139	0.2799

表 2 前 10 家最重要供应商

前 50 家最重要供应商总供应量及其占比分布如图 5 所示，可见各供应商的总供应量呈显著的长尾分布，符合经济学的二八法则，即少数供应商占据了绝大多数的供应量，与现实情况相一致。

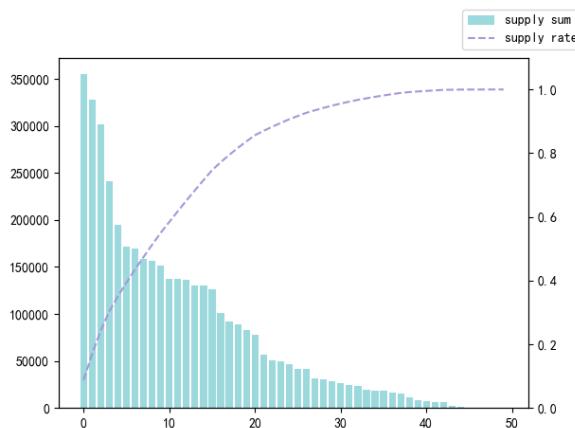


图 5 前 50 家最重要供应商总供应量占比分布

七、问题二的建模与求解

7.1 问题聚焦

问题二要求参考问题一，确定该企业至少选择多少家供应商供应原材料才可能满足生产需求，并针对这些供应商，为该企业制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，再据此制定损耗最少的转运方案。

首先，我们对问题一中确定的 50 家最重要供应商在未来 24 周的供货情况进行预测，然后根据预测结果，按照求解 0-1 规划问题的方法，确定最少需要多少供应商才能满足生产需求，并保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存。接着，我们对第一步确定的供应商作时间序列分析，建立季节性 ARIMA 模型，预测未来 24 周的供应量。为制定转运方案，我们首先对 8 家转运商的运输损耗率数据进行分析，然后根据未来 24 周的原材料订购方案，建立转运成本模型，以最小化成本为目标，求解最经济的转运方案。

问题二的解决过程如图 6 所示。



图 6 问题二的解决过程

7.2 预测供应量

由于满足生产需求的最少供应商数量取决于未来 24 周内供应商的供应情况，因此要解决该问题，需要对 50 家最重要供应商在未来 24 周的供应情况进行预测。我们对问题一中确定的 50 家最重要供应商的历史供应量数据进行时间序列分析，建立季节性 ARIMA 模型，预测未来 24 周的供应量。

7.2.1 ARIMA 模型

ARIMA 模型是常用的时间序列分析模型，适用于平稳时间序列数据的预测。ARIMA 模型是差分、自回归模型（AR）、移动平均模型（MA）三种方法的结合，其基本思想是：首先对时间序列数据进行差分，使其平稳，然后通过自回归模型和移动平均模型对

差分后的数据进行拟合，最终得到预测结果。ARIMA 模型的表示如下：

$$y_t^{(d)} = c + \phi_1 y_{t-1}^{(d)} + \cdots + \phi_p y_{t-p}^{(d)} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t,$$

其中 $y_t^{(d)}$ 是 d 阶差分序列， ε_t 是白噪声序列， c 是常数项， ϕ_1, \dots, ϕ_p 和 $\theta_1, \dots, \theta_q$ 是模型参数。引入延迟算子 B （满足 $B y_t = y_{t-1}$ ）和差分算子 $\nabla := 1 - B$ ，上式可进一步表示为

$$\Phi_p(B) \nabla^d y_t = c + \Theta_q(B) \varepsilon_t,$$

其中 Φ_p 和 Θ_q 是多项式函数。该模型称为 ARIMA (p, d, q) 模型，参数含义如下：

- p 是自回归模型阶数，表示当前时刻的值与前 p 个时刻的值相关；
- d 是差分阶数，表示时间序列的平稳性；
- q 是移动平均模型阶数，表示当前时刻的值与前 q 个时刻的噪声相关。

在数据侧写和问题一的供应商聚类中，我们注意到，许多供应商的供应量具有周期性规律，不具有平稳性特征。因此，我们选用季节性 ARIMA 模型（SARIMA）进行预测，以在模型中反映其周期性规律。季节性 ARIMA 模型记为 SARIMA $(p, d, q) * (P, D, Q)_s$ ，其中 (p, d, q) 是非季节性部分的阶数， (P, D, Q) 是季节性部分的阶数， s 是季节性周期。该模型表示如下：

$$\Phi_p(B) U_P(B^s) (\nabla^d \nabla_s^D y_t) = \Theta_q(B) V_Q(B^s) \varepsilon_t,$$

其中 U_P 和 V_Q 是季节性部分的多项式函数， $\nabla_s := 1 - B^s$ 是季节性差分算子， D 是季节性差分阶数， P 是季节性回归阶数， Q 是季节性移动平均阶数。

7.2.2 供应量预测示例

下面以供应商 S244 为例，示范建立 SARIMA 模型预测供应量的过程。

首先，我们将时间序列分解成趋势数据、季节性数据、随机数据，以初步判断数据的季节性效应，如图 7 所示。在季节性序列图（图 7b）中，发现在过去 240 周中，供应量出现 10 个峰和 10 个谷，且峰与峰、谷与谷之间均间隔 24 周，峰、谷之差接近 100（立方米）；在趋势序列图（图 7c）中，趋势确实的极差大约为 25（立方米），约为前者的四分之一，说明季节性变化充分强，原始序列具有以 24 周为周期的明显季节性规律。

接着，我们尝试对供应量时间序列作差分和季节性差分，季节性差分的周期为 24 周，以试图消除序列的非平稳性。各种差分组合的单位根检验如表 3 所示。根据单位根检验结果，各种差分均显示 1% 的显著性水平，平稳性良好；1 阶差分—1 阶季节差分的 AIC 指标最小，说明该差分序列的效果可能最好。1 阶差分—1 阶季节差分时间序列图如图 8a 所示，序列的自相关图和偏自相关图如图 8b 和图 8c 所示。其中，自相关图显示出良好的截尾性和正弦衰减，在延迟为 25、26、36、37 时有两个明显突起；偏自相关图

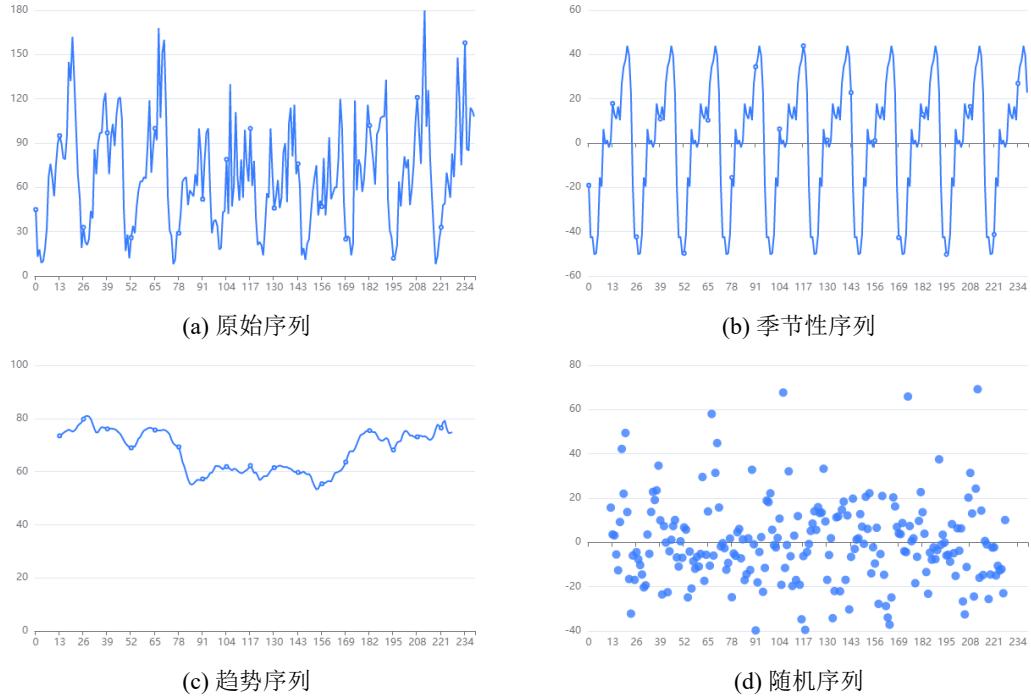


图 7 供应商 S244 的供应量时间序列分解

显示出良好的拖尾性和正弦衰减，在延迟为 23 时有一个明显突起。我们参考拖尾、截尾情况，为 SARIMA 模型确定参数 p, q, P, Q ，确定模型为 SARIMA $(2, 0, 2) * (1, 0, 1, 24)$ 。

序列	t	P	AIC	临界值		
				1%	5%	10%
原序列	-6.229	0.000***	2094.676	-3.458	-2.874	-2.573
1 阶差分	-8.014	0.000***	2112.868	3.459	-2.874	-2.573
1 阶差分—1 阶季节差分	-7.805	0.000***	1931.054	-3.462	-2.87	-2.574
2 阶差分	-7.493	0.000***	2142.96	-3.46	-2.875	-2.574
2 阶差分—1 阶季节差分	-7.159	0.000***	1950.852	-3.464	-2.876	-2.575

† ***、**、* 分别代表 1%、5%、10% 的显著性水平。

表 3 供应商 S244 的供应量时间序列差分单位根检验

我们对该模型进行检验，检验结果如表 4 所示。所有残差 Q 的 P 值均大于 0.1，表明残差为白噪声，模型满足要求；拟合优度 R^2 为 0.595，拟合效果符合问题要求。

最后，我们使用确定的 SARIMA $(2, 0, 2) * (1, 0, 1, 24)$ 模型对供应商 S244 未来 24 周的供应量进行预测，其中前 5 周的预测结果如图 9 所示。观察历史数据和历史预测值，可以认为模型良好地拟合了供应量时间序列的周期性，预测结果可信。

我们对前 50 家最重要的供应商，按照上述方法建立 SARIMA 模型，预测未来 24 周的供应量。最终，我们得到了 50 家供应商未来 24 周的供应量预测结果，预测结果详

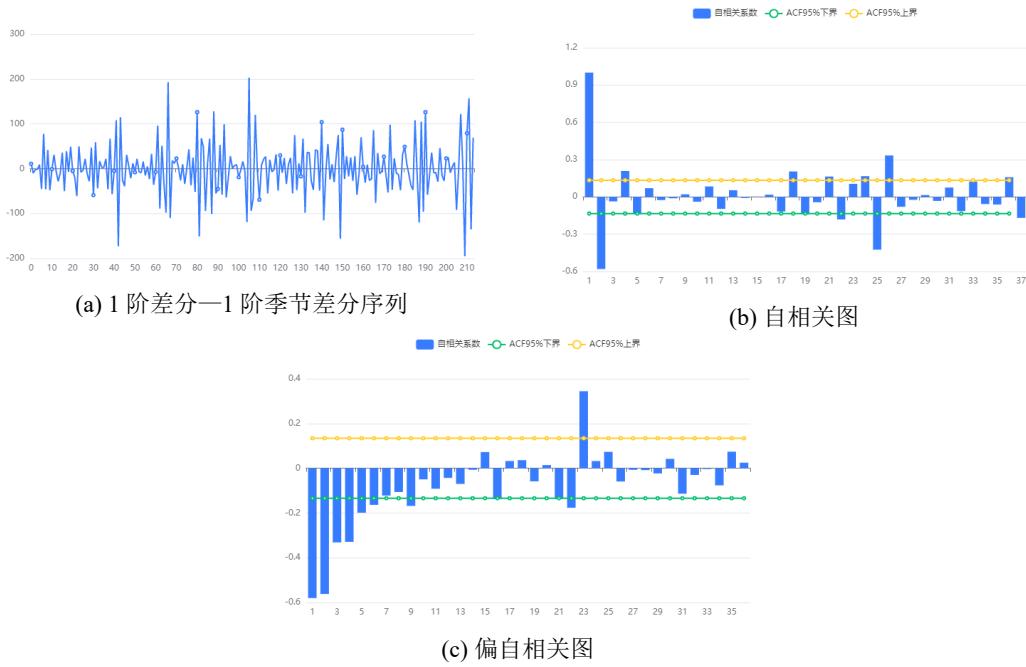


图 8 供应商 S244 的差分序列及其自相关图、偏自相关图

项	符号	值
样本数量	N	240
Q6 (P 值)		0.63
Q12 (P 值)		0.818
Q 统计量	Q18 (P 值)	0.829
	Q24 (P 值)	0.821
	Q30 (P 值)	0.79
信息准则	AIC	2199.049
	BIC	2226.894
拟合优度	R^2	0.595

表 4 供应商 S244 的 SARIMA 模型检验

见附件 top50_predict.xlsx。

7.3 确定供应商组合

在对 50 家最重要供应商的未来 24 周供应量进行预测后，我们需要确定至少需要多少家供应商才能满足生产需求，并制定最经济的原材料订购方案。我们将该问题建模为 0-1 规划问题，并通过遗传算法解决，以确定最少需要多少供应商才能满足生产需求，并保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存。

在建立 0-1 规划模型之前，我们首先考察在上一节中完成的供应量预测，并剔除拟

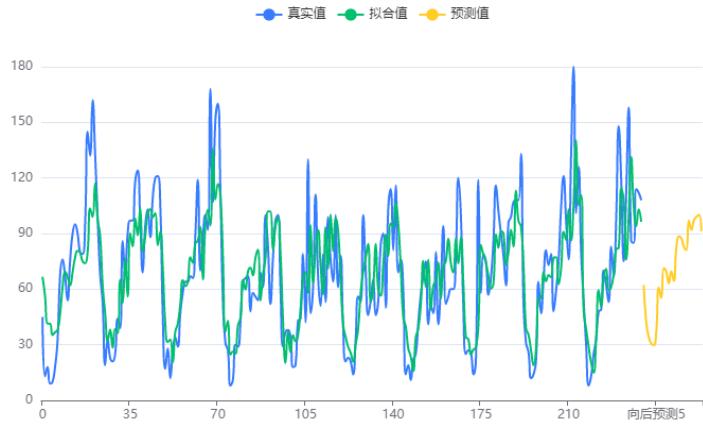


图 9 供应商 S244 未来供应量预测

合效果不符合要求的供应商，代之以白噪声模拟的随机序列。我们将模拟序列和供应量预测序列作为 0-1 规划模型的输入数据。

7.3.1 增强精英保留的遗传算法（SEGA）

遗传算法是基于自然选择和遗传学原理的优化算法，模拟自然界中物种进化的过程。增强精英保留是改进的遗传算法策略，用于在选择下一代个体时保留最优个体，其核心思想是通过保留一部分最优个体（即精英个体），以这些个体为基础进行变异和交叉，从而确保优秀基因不被遗传操作随机丢弃。

在标准精英保留策略中，精英个体直接保留到下一代，保证最优个体的基因不会丢失。增强精英保留进一步改进了这一点，通常包含以下几个方面：

- **多重保留** 不仅保留适应度最高的个体，还可以保留多个具有较高适应度的个体，从而保留更多的优秀基因，防止过早收敛到局部最优解。
- **精英个体变异** 在保留精英个体的同时，增强精英保留策略还可以对精英个体进行微小的变异。
- **动态保留比例** 根据进化代数的不同或种群多样性的变化，动态调整精英保留的比例。

相较于传统的遗传算法，采用增强精英保留策略的遗传算法拥有更快的收敛速度、更高的灵活性、更低的局部最优解收敛概率，优化性能较好，通常用于优化复杂度较高或解空间较大的问题，能够更好地平衡探索和开发。

7.3.2 建立 0-1 规划模型

我们将问题建模为 0-1 规划问题，目标是确定最少需要多少供应商才能满足生产需求，并保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存。下面构建该问题的数学模型：

- (1) **决策变量** 设供应商集合为 S 。向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{50})$ 表示供应商的选择情况，

满足：

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{选择供应商 } i, \\ 0, & \text{不选择供应商 } i. \end{cases}$$

(2) 目标函数 最小化选择的供应商数量，即

$$\min \sum_{i \in S} x_i.$$

(3) 约束条件

(a) 供应—库存约束 保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存，即

$$S_j + r_j \geq 28200.$$

其中， S_j 是第 j 周供应的原材料所对应的产品生产量， r_j 是第 j 周开始前的库存。 S_j 由供应量和损耗率决定，满足

$$S_j = \sum_{i \in S} x_i W_{ij} (1 - \bar{l}).$$

其中， W_{ij} 是供应商 i 在第 j 周的供应量所对应的产品生产量。 \bar{l} 是转运商历史平均损耗率，即八家转运商的历史损耗率的平均值。 W_{ij} 由原材料供应量和原材料种类决定，将供应商 i 在第 j 周的供应量预测值记为 V_{ij} ，则 W_{ij} 满足

$$W_{ij} = \begin{cases} V_{ij} \div 0.6, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 A,} \\ V_{ij} \div 0.66, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 B,} \\ V_{ij} \div 0.72, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 C.} \end{cases}$$

(b) 库存数列自约束 库存 $\{r_j\}$ 的项之间的约束，每周的库存由上一周的库存和当周原材料供应量和每周固定生产量决定。若假定在历史第 240 周结束后，库存中恰好有满足两周生产的原材料库存，则 r_{ij} 满足

$$r_1 = 28200,$$

$$r_{j+1} = S_j + r_j - 28200,$$

$$r \geq 0.$$

综合上述优化目标和约束条件，我们得到如下所示 0-1 规划模型：

$$\min \sum_{i \in S} x_i, \quad (1)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} S_j + r_j \geq 28200, \\ S_j = \sum_{i \in S} x_i W_{ij} (1 - \bar{l}), \\ W_{ij} = \begin{cases} V_{ij} \div 0.6, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 A}, \\ V_{ij} \div 0.66, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 B}, \\ V_{ij} \div 0.72, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 C}, \end{cases} \\ r_1 = 28200, \\ r_{j+1} = S_j + r_j - 28200, \\ r \geq 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

7.3.3 模型求解

我们使用 SEGA 算法对上述 0-1 规划模型进行求解，确定最少需要多少供应商才能满足生产需求，并保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存。我们将 50 家供应商的供应量预测数据和模拟数据作为输入数据，得到最少需要的供应商数量为 42。42 家供应商的选择情况如表 5 所示。算法轨迹如图 10 所示。

S007	S126	S151	S247	S308	S352
S031	S108	S210	S268	S395	S356
S037	S114	S194	S275	S329	S361
S040	S131	S218	S282	S330	S364
S055	S139	S229	S284	S338	S365
S080	S140	S273	S306	S340	S367
S086	S143	S244	S307	S346	S374

表 5 最少需要的供应商选择

7.4 制定原材料订购方案

在确定 42 家供应商后，我们需要为该企业制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案。我们将该问题建模为规划问题，目标是最小化原材料采购成本，采用 SEGA 算法解决。

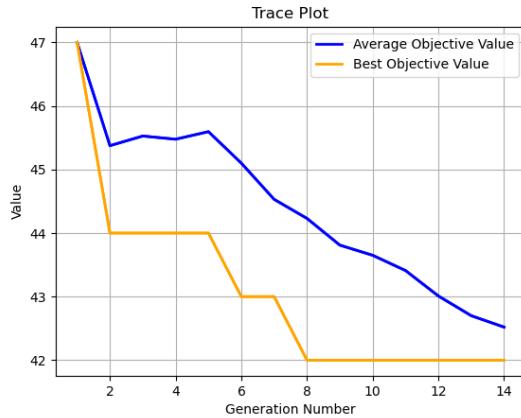


图 10 供应商最小组合问题的 SEGA 算法轨迹

7.4.1 建立规划模型

下面构建该问题的数学模型：

- (1) **决策变量** 设周次集合为 T 。设 q_{ij} 表示供应商 i 在第 j 周的订购量，集合 $\{q_{ij}\}$ 即为原材料订购方案的决策变量。
- (2) **目标函数** 最小化原材料采购成本，采购成本由原材料单价和供应商订购量决定，即

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} m_i q_{ij},$$

其中 m_i 是供应商 i 的原材料单价，满足

$$m_i = \begin{cases} 1.2, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 A,} \\ 1.1, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 B,} \\ 1, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 C.} \end{cases} \quad (3)$$

(3) 约束条件

- (a) **供应商供应量约束** 保证供应商在第 j 周的供应量不超过预测值，即

$$0 \leq q_{ij} \leq V_{ij}.$$

- (b) **生产需求约束** 保证生产需求得到满足，即式 2。

综合上述优化目标和约束条件，我们得到如下所示规划模型：

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} m_i q_{ij} \quad (4)$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \leq q_{ij} \leq V_{ij}, \\ S_j + r_j \geq 28200, \\ S_j = \sum_{i \in S} x_i W_{ij} (1 - \bar{l}), \\ W_{ij} = \begin{cases} V_{ij} \div 0.6, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 A,} \\ V_{ij} \div 0.66, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 B,} \\ V_{ij} \div 0.72, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 C,} \end{cases} \\ r_1 = 28200, \\ r_{j+1} = S_j + r_j - 28200, \\ r \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

7.4.2 模型求解

我们使用 SEGA 算法对上述规划模型进行求解，得到最经济的原材料订购方案。最终，我们得到了未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，包括 42 家供应商在未来 24 周内每周的订购量；方案详见附件 `q2_purchase_plan.xlsx`。算法轨迹如图 11 所示。

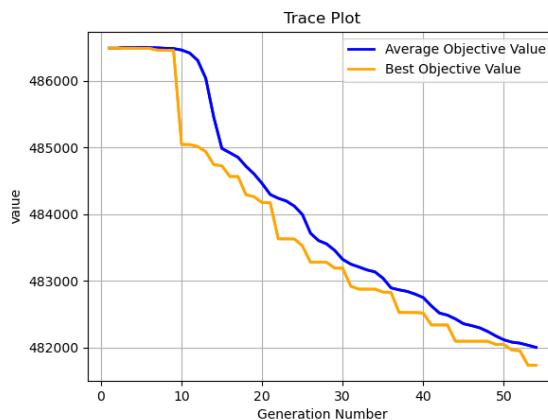


图 11 原材料订购方案问题的 SEGA 算法轨迹

7.5 制定转运方案

在确定了最少需要的供应商和最经济的原材料订购方案后，我们需要为该企业制定未来 24 周每周最经济的转运方案。我们将该问题建模为规划问题，目标是最小化转运成本。我们采用 SEGA 算法解决该规划问题。

7.5.1 建立规划模型

下面构建该问题的数学模型：

- (1) **决策变量** 设 y_{ijk} 表示供应商 i 在第 j 周选择转运商 k 与否，当 $y_{ijk} = 1$ 时表示选择，当 $y_{ijk} = 0$ 时表示不选择。集合 $\{y_{ijk}\}$ 即为转运方案的决策变量。
- (2) **目标函数** 优化目标是最小化转运成本。由于转运费用未知，这里只考虑转运损耗所带来的成本。目标函数为

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{k \in R} q_{ij} y_{ijk} l_k,$$

其中 R 表示转运商集合， l_k 表示转运商 k 的损耗率，用历史平均损耗率代替。

(3) 约束条件

- (a) **转运商数量约束** 保证供应商在每一周只由一家转运商转运原材料，即

$$\sum_{k \in R} y_{ijk} = 1.$$

- (b) **转运商转运能力约束** 保证转运商在每一周的转运量不超过其转运能力，即

$$\sum_{i \in S} q_{ij} y_{ijk} \leq 6000.$$

综合上述优化目标和约束条件，我们得到如下所示规划模型：

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{k \in R} q_{ij} y_{ijk} l_k \quad (6)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{k \in R} y_{ijk} = 1, \\ \sum_{i \in S} q_{ij} y_{ijk} \leq 6000, \end{cases} \quad (7)$$

7.5.2 模型求解

我们使用 SEGA 算法对上述规划模型进行求解，得到最经济的转运方案。最终，我们得到 42 家供应商在未来 24 周内每周的转运商选择情况。表 6 列出了其中 8 家供应商在第 9 周的转运商选择情况；方案详见附件 `q2_transport_plan.xlsx`。

7.6 模型效果评估

根据以上求解结果，我们对模型效果通过作图和计算方式进行评估。

首先，我们将订购方案所确定的未来 24 周订购量画成折线图，如图 12 所示。观察图中的订购量变化，发现在大多数时间，订购量保持稳定，反映了产能不变的题目要求。

供应商	转运商编号							
	1	2	3	4	5	6	7	8
S007	0	0	0	0	1	0	0	0
S031	0	0	0	0	1	0	0	0
S037	0	0	1	0	0	0	0	0
S040	0	0	0	0	0	0	0	1
S055	0	0	0	0	0	0	1	0
S080	0	0	0	1	0	0	0	0
S086	0	1	0	0	0	0	0	0
S126	0	0	0	0	1	0	0	0

† 表中“1”表示相应供应商在第 9 周选中相应转运商，“0”表示未选中。

表 6 前 9 周 8 家供应商的转运商选择

此外，注意到图中有三处订购量高峰，分别在第 0 周、第 5 周、第 20 周（周次范围为 0~23），反映了部分供应商供应量的周期性规律，与先前在数据侧写中观察到的规律相符。由于在订购量高峰时，该企业购入大量原材料，多余当周需求，因此在非高峰的稳定订购时间段，订购量约为 22000 立方米，稳定地小于生产 28200 立方米产品的需求量，以免库存积压，符合降低成本的要求。

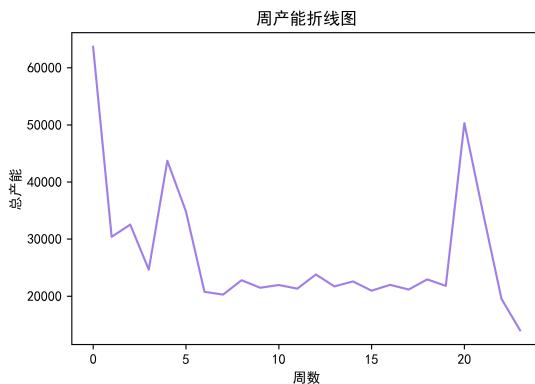
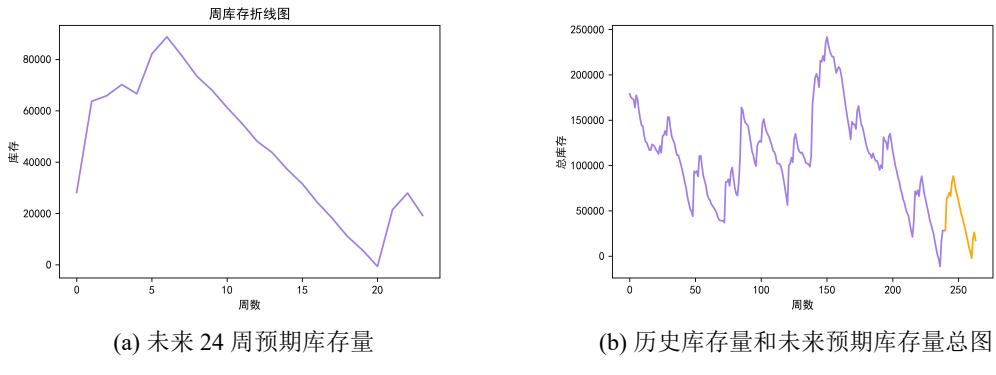


图 12 未来 24 周订购计划

其次，我们为该生产企业的库存量作图，分别画出了未来 24 周预期库存量折线图、历史库存量和未来预期库存量总折线图，如图 13 所示。未来预期库存量是指按照订购计划购买原材料，并按固定产量生产产品时，预期的未来 24 周内的库存量。如图 13a，在未来 24 周即未来的一个供应量变化周期内，库存量呈现出先快速增加、再稳定减少、后快速增加的趋势，其中库存量快速增加的时间段与上文所述订购高峰时间段相符，库存量稳定减少的时间段与订购量稳定的时间段相符。我们假设在未来第 0 周（总第 240

周)开始前企业有 28200 立方米库存,且在预期库存量中未出现负值,说明实施该订购计划能够满足保证时刻拥有满足未来两周生产需求的原材料库存的要求。

在历史库存量和未来预测库存量总折线图(图 13b)中,我们发现历史库存量和未来预测库存量呈现出极为相似的周期性变化规律,以 24 周为一个周期相继出现库存峰值和谷值,说明模型给出的订购方案的预期库存量与历史库存量变化规律相符,效果优良。



†图 13b 中,紫色折线表示历史库存量,黄色折线表示未来预期库存量。

图 13 库存量折线图

八、问题三的建模与求解

8.1 问题聚焦

问题三要求尽量增加原材料 A 的订购,减少原材料 C 的订购,以减少转运及仓储的成本。在本问题中,我们考虑转运和仓储所带来的成本,调整优化目标,重新建立模型,求解最优的原材料订购方案。

首先,我们对 A、B、C 三种原材料的转运和仓储成本作简要的计算和分析,将问题转化为如何尽量减小订购原材料的总体积。接着,我们将问题建模为规划问题,并对加入新的优化目标。由于优化目标增加,我们重新选择求解算法,应用多目标遗传算法 NSGA-III 对问题进行求解,得到新的原材料订购方案。转运方案问题仍然为单目标优化问题,仿照问题二的方法解决。最后,我们对模型的效果进行评估。

8.2 成本分析

根据问题描述,为生产单位产品,A、B、C 三种原材料的体积消耗量不同,A 类原材料的体积消耗量最少,C 类原材料的体积消耗量最多。由于转运和仓储成本仅与原材料体积有关,因此使转运和仓储成本最少的问题,就是使订购原材料的总体积最小的问题,即尽量增加 A 类原材料的订购,减少 C 类原材料的订购。

除了转运和仓储成本，我们还需要考虑原材料的订购成本。问题描述中给出了三类原材料的单价比例，可以分别设为 1.2、1.1、1，再结合生产单位产品所需原材料的体积 0.6、0.66、0.72，可以计算出三类原材料的订购成本比例，即

$$cost_A : cost_B : cost_C = 1.2 \times 0.6 : 1.1 \times 0.66 : 1 \times 0.72 = 0.72 : 0.726 : 0.72.$$

可见，A、C 类原材料的订购成本相同，而 B 类原材料的订购成本仅略高于 A、C 类原材料，高出的比例为 $\frac{0.726}{0.72} - 1 \approx 8.3\%$ 。考虑到在现实情境中，运送货物的成本一般不可能小于货物价值的 1%，因此，我们将降低转运和仓储成本的重要性置于减小订购成本之上，将尽量减小订购原材料的总体积设定为新的优化目标。

8.3 制定原材料订购方案

本题选择的供应商与在问题二中选出的 42 家供应商保持一致。在本节中，我们将问题建模为规划问题，目标包括最小化订购成本和最小化原材料订购总体积，采用多目标遗传算法 NSGA-III 算法对问题进行求解。

8.3.1 建立多目标规划模型

下面构建该问题的数学模型：

- (1) **决策变量** 设周次集合为 T 。设 q_{ij} 表示供应商 i 在第 j 周的订购量，集合 $\{q_{ij}\}$ 即为原材料订购方案的决策变量。
- (2) **目标函数**
 - (a) 最小化原材料采购成本，即式 4。
 - (b) 最小化原材料订购体积，订购体积由每个供应商的订购量决定。设供应商集合为 S ，周次集合为 T ，供应商 i 第 j 周的订购量为 q_{ij} ，则订购体积目标为

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} q_{ij}. \quad (8)$$

- (3) **约束条件** 满足生产需求和供应商供应量约束，即式 5。

综合上述优化目标和约束条件，我们得到如下所示多目标规划模型：

- **优化目标**

$$\begin{cases} \min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} m_i q_{ij}, \\ \min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} q_{ij}. \end{cases} \quad (9)$$

- 约束条件

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq q_{ij} \leq V_{ij}, \\ S_j + r_j \geq 28200, \\ S_j = \sum_{i \in S} x_i W_{ij} (1 - \bar{l}), \\ W_{ij} = \begin{cases} V_{ij} \div 0.6, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 A,} \\ V_{ij} \div 0.66, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 B,} \\ V_{ij} \div 0.72, & \text{供应商 } i \text{ 供应产品 C,} \end{cases} \\ r_1 = 28200, \\ r_{j+1} = S_j + r_j - 28200, \\ r \geq 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

8.3.2 NSGA-III 算法

NSGA-III 算法属于多目标遗传算法，是非支配排序遗传算法的第三个版本。NSGA-III 算法在 NSGA-II 算法的基础上通过引入参考点，基于与固定的参考点之间的距离而非相邻点之间的距离进行环境选择，使得算法能够更好地处理多目标优化问题。NSGA-III 算法的关键概念如下所示：

- **快速非支配排序** 将种群分解为不同水平的 Pareto 前沿的过程。相比 NSGA 中的非支配排序，快速非支配排序的时间复杂度从 $O(MN^3)$ 降低到 $O(MN^2)$ 。
- **Pareto 前沿** 一组解中，没有一个解能同时优于其他解的解集。
- **环境选择** 通过参考点和 Pareto 前沿之间的距离来选择个体，筛选出最优的个体。
- **种群更新** 通过交叉、变异等操作更新种群，产生新的种群。
- **参考点** 用于环境选择的参考点，可以是均匀分布的点，也可以是根据 Pareto 前沿生成的点。

由于我们的问题是多目标优化问题，我们选择 NSGA-III 算法对问题进行求解。

8.3.3 模型求解

我们使用 NSGA-III 算法对上述多目标规划模型进行求解，得到如图 14 所示 Pareto 前沿图。从图中可以看出，Pareto 前沿图中的解是一组非支配解，即在订购成本和订购体积两个目标之间无法找到更好的解，我们要从 Pareto 前沿图中选择一个解作为最终的原材料订购方案。为了尽量减小原材料的转运和仓储成本，同时兼顾订购成本，我们选择令体积目标式 8 最小的解。方案详见附件 `q3_purchase_plan.xlsx`。

我们对该 Pareto 解作如下评估：

- **解的数量** 得到 18 个非支配解。18 个非支配解表明优化过程找到了一些高质量的解。这些解在所有目标上都没有被其他解支配，说明它们在目标空间中比较优越。

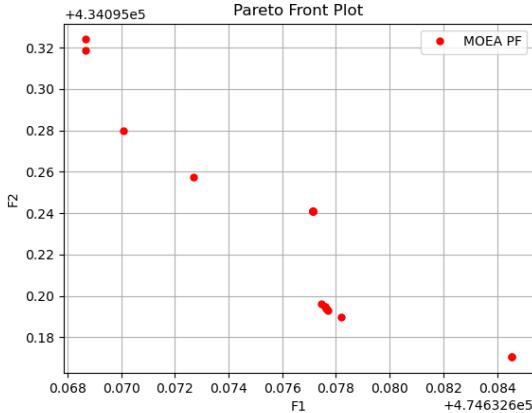


图 14 多目标优化问题的 Pareto 前沿图

- **超体积指标** 超体积指标为 0.00826。超体积指标反映了解集在目标空间中覆盖的范围。值越高，解集在目标空间的覆盖越广泛。0.00826 表明目标空间比较集中。
- **间距** 间距为 0.00733。间距用于衡量解集的均匀度。0.00733 说明解集在不同目标上表现得比较平衡，解之间的分布比较均匀。

8.4 制定转运方案

在制定转运方案时，我们仍然采用问题二中的方法，将问题建模为规划问题，目标是最小化转运成本。由于优化目标和约束条件不变，我们仍然采用式 6 和式 7 进行求解。最终，我们得到了未来 24 周每周最经济的转运方案，包括 42 家供应商在未来 24 周内每周的转运商选择情况。方案详见附件 q3_transport_plan.xlsx。

8.5 模型效果评估

图 15 显示了在加入新优化目标前后，未来 24 周 A、B、C 三种材料订购总量的分布变化。相比于未加入新的优化目标，根据本题模型所得结果，A 材料订购量占比提高 0.6%，C 材料订购量降低 1.1%，总仓储与转运成本降低 1.12%。说明本题所建立的多目标优化模型能有效改变订购时对 A 与 C 的偏好，成功降低了仓储和转运的成本。

九、问题四的建模与求解

9.1 问题聚焦

问题四假定企业具备提高产能的潜力，要求根据现有原材料的供应商和转运商的实际情况，确定该企业能提高的产能。因此，企业的 28200 立方米的固定产能不再是限制因素，为了尽可能提高扩大产能带来的效益，本文选择将可订购供应商的目标范围扩大到所有 402 家供应商。并据此给出新的订购和转运方案。

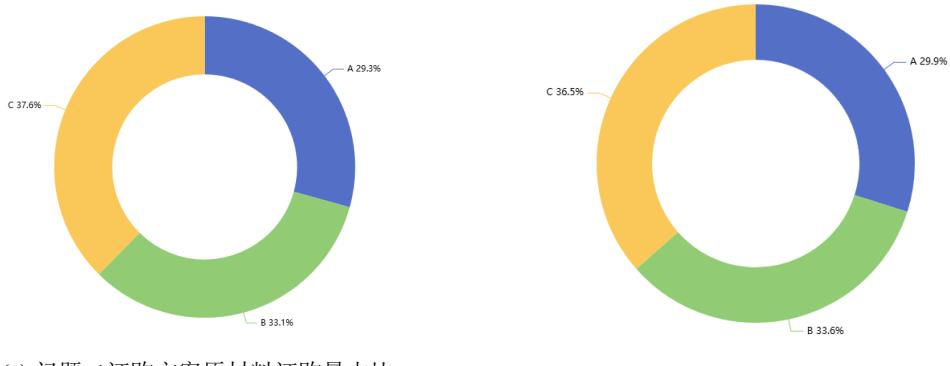


图 15 未来 24 周 A、B、C 三种材料订购总量对比

9.2 数据更新

由于本问将订购目标扩大到 402 家供应商，因此需要对新加入的供应商未来 24 周供货数据进行预测。由于后加入的商家评分较低，供货的规模较小，且规律性较差，因此本文使用这些供应商过去 240 周供货数据的平均值加入白噪声来模拟未来 24 周的预测值。

9.3 制定原材料订购方案

在制定原材料订购方案时，我们将问题建模为规划问题，目标是最小化订购成本。我们选择 SEGA 算法对问题进行求解。

9.3.1 建立规划模型

下面构建该问题的数学模型：

- (1) **优化目标** 本问要求探索企业在提高产能方面的潜力，因此不再需要考虑满足产能要求前提下最小化订购成本，而应该将目标设定为 24 周订购的材料所提产能的最大化。设 402 家供应商集合为 S ，周次集合为 T ，供应商 i 第 j 周的订购量为 q_{ij} ，则目标为

$$\max \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} q_{ij} W_{ij},$$

其中 W_{ij} 为供应商 i 在第 j 周的供货量。

- (2) **约束条件** 根据上文的假设，企业每周的总产能不再具有限制，因此可以认为，对于每周订购的材料，企业总是可以再当周内消耗掉而不形成库存。因此在约束条件下不需要考虑库存对后续生产的影响，也不需要考虑仓储成本。所以本问的约束条件主要是企业的每周订购量不大于对商家供货量的预测值，同时总订购量不能大于 8 家转运商总的转运能力。约束条件如下：

(a) 转运总量约束 保证订购总量不超过转运商的总转运能力。设 m_i 为生产单位产品时供应商 i 供应的原材料消耗量, 即式 3, \bar{l} 为历史平均损耗率, 则该约束条件为

$$\sum_{i \in S} m_i q_{ij} (1 - \bar{l}) \leq 6000 \times 8.$$

(b) 转运量约束 保证每周对每家供应商的订购量不超过一家转运商的供货量, 即

$$0 \leq q_{ij} \leq 6000.$$

(c) 供应量约束 保证订购量不超过供应商的供货量。设 V_{ij} 为供应商 i 在第 j 周的供货量, 该约束条件为

$$0 \leq q_{ij} \leq V_{ij}.$$

综合上述优化目标和约束条件, 我们得到如下所示规划模型:

- 优化目标

$$\max \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} q_{ij} W_{ij} \quad (11)$$

- 约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} m_i q_{ij} (1 - \bar{l}) \leq 6000 \times 8, \\ 0 \leq q_{ij} \leq 6000, \\ 0 \leq q_{ij} \leq V_{ij}. \end{cases} \quad (12)$$

9.3.2 模型求解

我们使用 SEGA 算法对上述规划模型进行求解, 得到最大化产能的订购方案。最终, 我们得到 402 家供应商在未来 24 周内每周的订购量。算法轨迹如图 16 所示。方案详见附件 `q4_purchase_plan.xlsx`。

根据新的订购方案, 我们得到企业未来 24 周的产能提升情况。图 17 显示未来 24 周的订购量, 预期总产能相比问题二的订购方案提高了 20.26%, 提升效果显著。

9.4 制定转运方案

在制定转运方案时, 我们的目标和约束条件均与问题二、问题三中的方法保持一致, 仍然采用式 6 和式 7 进行求解。最终, 我们得到了未来 24 周每周最经济的转运方案, 包括 402 家供应商在未来 24 周内每周的转运商选择情况。方案详见附件 `q4_transport_plan.xlsx`。

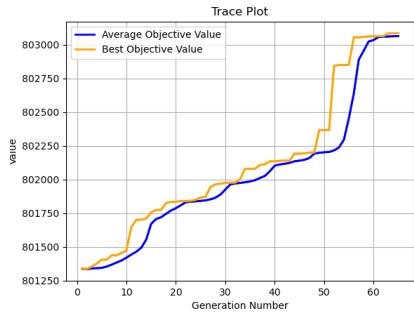


图 16 问题四的 SEGA 算法轨迹

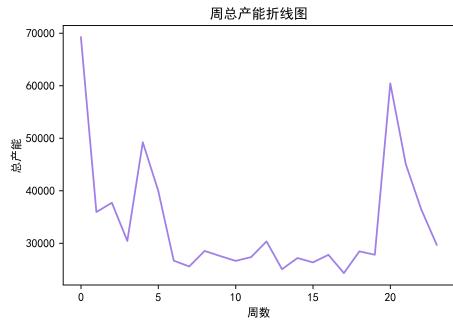


图 17 问题四的未来 24 周订购计划

十、模型的评价和改进方向

10.1 模型的优点

- 对供应商聚类后分类讨论，并使用两种策略对不同种类供应商的供货数据进行预测，使得模型的分析更加细致，为后面优化模型的求解提供良好的数据前提；
- 挖掘供货商供货和企业订货的季节性规律，并据此辅助模型的确定，增强了模型解释本问题的能力；
- 使用 CRITIC 算法对量化指标的权重进行确定，并使用 VIKOR 算法计算评分，避免了主观的人为确定评分标准，提高了模型的科学性和准确性；
- 使用 NSGA-III 遗传算法对多目标规划问题进行求解，权衡了两个目标之间取舍，为模型提供了更为科学的解决方案。

10.2 模型的缺点

- 在进行 k -means 聚类时人为选定了聚类的个数，在严谨性上缺乏考虑；
- 未能有效处理表格中可能存在的异常数据，影响后续的预测和订购方案的求解；
- 模型将订购方案和转运模型分开考虑，可能无法求得全局的利益最大化。

10.3 改进方向

- 根据轮廓系数选择较好的聚类个数，而非人为选定；
- 使用 3σ 法则等方法处理表格中存在的异常数据。

参考文献

- [1] Kalyanmoy Deb, Himanshu Jain. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Prob-

- lems With Box Constraints [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 18, no. 4, pp. 577-601.
- [2] Hojung Shin, W.C, Benton, Minjoon Jun. Quantifying suppliers' product quality and delivery performance: A sourcing policy decision model [J]. Computers & Operations Research, vol. 36, Issue 8, pp. 2462-2471.
- [3] Serafim Opricovic, Gwo-Hshiung Tzeng. Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS[J]. European Journal of Operational Research, Volume 156, Issue 2, 2004, Pages 445-455.
- [4] Kenneth Alan De Jong. An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems. Ph.D. Dissertation[J]. University of Michigan, USA, 1975.

附录 A 前 50 家最重要供应商及其评分

排名	供应商编号	评价得分	排名	供应商编号	评价得分
1	S140	0.1181	26	S294	0.4973
2	S229	0.1477	27	S266	0.4994
3	S361	0.1905	28	S367	0.5028
4	S275	0.2198	29	S346	0.5028
5	S282	0.2200	30	S307	0.5029
6	S329	0.2238	31	S218	0.5108
7	S340	0.2320	32	S348	0.5110
8	S108	0.2518	33	S080	0.5178
9	S131	0.2687	34	S007	0.5218
10	S139	0.2799	35	S244	0.5278
11	S268	0.2863	36	S123	0.5331
12	S306	0.2944	37	S055	0.5351
13	S330	0.2972	38	S374	0.5426
14	S151	0.2978	39	S338	0.5464
15	S356	0.3050	40	S076	0.5605
16	S308	0.3126	41	S098	0.5608
17	S352	0.3437	42	S314	0.5638
18	S194	0.3445	43	S114	0.5793
19	S143	0.3910	44	S037	0.6019
20	S247	0.4221	45	S086	0.6065
21	S284	0.4486	46	S291	0.6106
22	S031	0.4492	47	S150	0.6150
23	S365	0.4552	48	S239	0.6176
24	S040	0.4854	49	S175	0.6192
25	S364	0.4883	50	S067	0.6211

表 7 前 50 家最重要供应商及其评分