博弈论

基本概念

一个博弈中有权决定自己行动方案的博弈参加者称为局中人，记为 I 。

博弈中，可供局中人选择的一个实际可行的完整行动方案称为一个策略。参加博弈的每一个局中人 $i, i \in I$ ，都有自己的策略集 S_i 。

一个博弈中，每一个局中人所出的策略形成的策略组称为一个局势，即若 s_i 是第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略组 $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ 就是一个局势。若记 S 为全部局势的集合，则当一个局势 s 出现后，应该为每个局中人 i 规定一个赢得值 $H_i(s)$ ，称为局中人 i 的赢得函数。

零和博弈

零和博弈中只有两个局中人，每个局中人都只有有限个策略可以选择。在任何一个纯局势下，两个局中人的赢得之和总是等于零，即双方的利益是激烈对抗的。

设局中人 I, II 的策略集分别为

$$S_1=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, S_2=\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

当局中人 I 选定策略 α_i ，局中人 II 选定策略 β_j 后，就形成了一个局势 (α_i, β_j) ，对任意一个局势，记局中人 I 的赢得值为 a_{ij} ，并称 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为局中人 I 的赢得矩阵，则局中人 II 的赢得矩阵为 $-A$ 。
零和博弈又称为矩阵博弈，记为 $G=\{S_1,\ S_2\,;A\}$ 。

设 $f(x,y)$ 为定义在 $x\in\Omega_1$ 和 $y\in\Omega_2$ 上的实值函数，若存在 $x^*\in\Omega_1, y^*\in\Omega_2$ ，使得对 $\forall\ x\in\Omega_1, y\in\Omega_2$ ，有

$$f(x,y^*)\le f(x^*,y^*)\le f(x^*,y),$$

则称 (x^*,y^*) 为函数 f 的一个鞍点。

设 $G=\{S_1,\ S_2\,;A\}$ 为矩阵博弈，其中
$S_1=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, S_2=\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}, A=(a_{ij})_{m\times n}$ 。若等式

$$\underset{i}{max}(\underset{j}{min}\ a_{ij})=\underset{j}{min}(\underset{i}{max}\ a_{ij})=a_{i^*j^*}$$

成立，记 $V_G = a_{i^*j^*}$ ，则称 V_G 为博弈 G 的值，称使上述等式成立的纯局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为博弈 G 的鞍点或稳定解，α_{i^*} 与 β_{j^*} 分别称为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

设 $G = \{S_1,\ S_2\ ; A\}$ ，记 $\mu = \underset{i}{max}(\underset{j}{min}\ a_{ij})$ ，$v = \underset{j}{min}(\underset{i}{max}\ a_{ij})$ ，则必有 $\mu + v \leq 0$ 。
零和博弈 G 具有稳定解的充要条件为 $\mu + v = 0$ 。

若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是博弈 G 的两个解，则必有 $a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$ 且 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是解。

零和博弈的混合策略及解法

1.零和博弈的混合策略

当 $\mu + v \neq 0$ 时，只使用纯策略的范围内，零和博弈无解，于是引进零和博弈的混合解。
设局中人 I 用概率 x_i 选用策略 α_1 ，局中人 II 用概率 y_j 选用策略 β_j ，$\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$
，
记 $x = [x_1, \ldots, x_m]^T,\ y = [y_1, \ldots, y_n]^T$ ，则局中人 I 的期望赢得为 $E(x, y) = x^T Ay$ 。
记

$$S_1^* = \{[x_1, \ldots, x_m]^T\ |x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m;\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$
$$S_2^* = \{[y_1, \ldots, y_n]^T\ |y_j \geq 0, j = 1, \ldots, n;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\},$$

称 S_1^*, S_2* 为局中人 I 和 II 的混合策略。

若存在 m 维概率向量 $\overline{x}$ 和 n 维概率向量 $\overline{y}$ 使得对一切 m 维概率向量 x 和 n 维概率向量 y 有

$$\overline{x}^T A\overline{y} = \underset{x}{max}\ x^T A\overline{y} = \underset{y}{min}\ \overline{x}^T Ay,$$

则称 $(\overline{x}, \overline{y})$ 为混合策略博弈问题的鞍点。

设 $\overline{x} \in S_1^*,\ \overline{y} \in S_2^*$ ，则 $(\overline{x}, \overline{y})$ 为 $G = \{S_1, S_2\ ; A\}$ 的解的充要条件为

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\ a_{ij}\ \overline{y}_j \leq \overline{x}^T A\overline{y}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\ a_{ij}\ \overline{x}_i \geq \overline{x}^T A\overline{y}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

任意混合策略博弈问题必存在鞍点。

2.零和博弈的解法

线性方程组法

设最优解中的 x_i^*, y_j* 均不为零，则零和博弈等价于

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = u, j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = v, i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{cases}$$

若最优策略的某些分量为零，则上述方程组无解，此方法不适用。
对于 $A_{2\times 2}$ ，当其不存在鞍点时，x_i^*, y_j* 均大于零，可以使用方程组法进行求解。

线性规划解法

当 $m > 2, n > 2$ 时，通常采用线性规划方法求解。

$\overline{x}$ 为线性规划

$$\begin{aligned} & max\ u, \\ & s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le u, j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \le 0, i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

的解；
$\overline{y}$ 为线性规划

$$\begin{aligned} & min\ v, \\ & s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge v, i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \\ y_i \le 0, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

的解。

上述两式互为对偶线性规划，具有相同的最优目标函数值。

双矩阵博弈模型

记为 $G=\{S_1,S_2\,;A,B\}$ ，其中S_1,S_2 为局中人 I,II 的策略集，
$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，分别称为局中人 I,II 的赢得矩阵。

1.非合作的双矩阵博弈的纯策略解

设 $G=\{S_1,S_2\,;A,B\}$ 为一双矩阵博弈，若等式

$$a_{i^*j^*}=\underset{i}{max}(\underset{j}{min}\;a_{ij}),b_{i^*j^*}=\underset{j}{max}(\underset{i}{min}\;b_{ij})$$

成立，则记 $v_1=a_{i^*j^*}$ ，并称 v_1 为局中人 I 的赢得值，记 $v_2=b_{i^*j^*}$ ，并称 v_2 为局中人 II 的赢得值，称 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 为 G 在纯策略下的解（或纳什平衡点），称 α_{i^*},β_{j^*} 分别为局中人 I,II 的最优纯策略。

2.非合作的双矩阵博弈的混合策略解

在双矩阵博弈 $G=\{S_1,S_2\,;A,B\}$ 中，对任意
$x=[x_1,\ldots,x_m]^T\in S_1^*,\ y=[y_1,\ldots,,y_n]^T\in S_2^*$ ，定义

$$E_1(x,y)=x^TAy,\quad E_2(x,y)=x^TBy,$$

分别表示局中人 I,II 的赢得函数。

在双矩阵博弈 $G=\{S_1,S_2\,;A,B\}$ 中，若存在策略对 $\overline{x}\in S_1^*$,$\overline{y}\in S_2^*$ ，使得

$$\begin{cases}E_1(\ x,\ \overline{y}\ )\le E_1(\ \overline{x},\ \overline{y}\ ),\quad \forall\, x\in S_1^*,\\ E_2(\ \overline{x},\ y\ )\le E_2(\ \overline{x},\ \overline{y}\ ),\quad \forall\, y\in S_2^*,\end{cases}$$

则称策略对 $(\overline{x},\ \overline{y})$ 为 G 的一个纳什平衡点。
任何具有有限个纯策略的二人对策至少存在一个平衡点。

混合策略 $(\overline{x},\ \overline{y})$ 为博弈 $G=\{S_1,S_2\,;A,B\}$ 的纳什平衡点的充要条件为

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{y}_j\le\overline{x}^TA\overline{y},\ i=1,2,\ldots,m,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\overline{x}_i\le\overline{x}^TB\overline{y},\ j=1,2,\ldots,n.\end{cases}$$