第三次作业第八第九题的参考答案

(8) 烟鬼问题：设 X 为发现一个火柴盒为空时，另一个火柴盒中火柴的根数。对于 $k = 0, 1, ...n$，记

$$L_k = \{发现的空盒在左边, 右边一个火柴盒有k根火柴\}$$

$$R_k = \{发现的空盒在右边, 左边一个火柴盒有k根火柴\}$$

则 X 的分布列为 $p_X(k) = P(L_k) + \ P(R_k), k = 0, 1, \ldots, n.$

若 L_k 发生，则一共掏了 2n-k+1 次口袋，其中前 $2n-k$ 次掏了 n 左边，$n-k$ 次右边，而且第 $2n-k+1$ 次是掏了左边，所以

$$P(L_k) = \binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^{2n-k} \times \frac{1}{2}.$$

由对称性，$P(L_k) = P(R_k)$, 所以

$$p_X(k) = \binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

(9) 信号问题：设 Z 为在该段时间发送信号的个数，则

$$P(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, \ldots.$$

令 A_j 表示：事件在该段时间发送出 1 的个数为 j, B_k 为该段时间发出信号总数为 k, 则

$$P(A_jB_k) = \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \geqslant j \geqslant 0.$$

则

$$\begin{aligned}
P(A_j) = \sum_{k \geqslant j} P(A_jB_k) &= \sum_{k \geqslant 0} \binom{j+k}{j}p^j(1-p)^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j+k}}{(k+j)!} \\
&= \sum_{k \geqslant 0} e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!} \times \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{k \geqslant 0}\frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^k}{k!} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

其为参数为 λp 的柏松分布。