《高等微积分 1》第七周作业

本次作业在第八周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 给定多项式 $f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_1x+a_0$. 证明: 如果 $a_0<0$, 则 $f(x)=0$ 至少有两个实数根.

2 设 $f\in C(\mathbf{R})$ 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. 证明: f 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 即存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x_0)\le f(x)$.

3 给定实数 α, 设 $f(x)=x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $[1,+\infty)$ 上是否一致连续.

4 当 $x\to+\infty$ 时, 如下五个函数都是无穷大. 请将它们按照阶的高低排序, 并说明理由.

$$x^\alpha(\alpha>0),\quad a^x(a>1),\quad \ln x,\quad [x]!,\quad x^x,$$

其中 $[x]!$ 表示 x 的整数部分的阶乘.

5 (1) 设 f 在 x_0 处可导. 证明: $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$.

(2) 设 f 在 x_0 附近有定义, 且极限 $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 存在. 请问 f 在 x_0 处是否一定可导?

6 计算导数的方法.

(i) 导数的四则运算:

$$(f+g)'=f'+g',\quad (fg)'=f'g+fg',\quad (\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

(ii) 链式法则: $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

(iii) 反函数的导函数: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

请利用上述结果计算下列函数的导函数.

(1) 设 f 处处可导. 求 $\ln|f(x)|$ 的导函数.

(2) 设 f 处处可导. 求 $\arcsin(f(x))$ 的导函数.

(3) 设 u, v 处处可导. 求 $u(x)^{v(x)}$ 的导函数.