运筹学第九次作业

李青锴 2017012304

1. 令$f(x_1,x_2)=-4x_1-6x_2+2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$，则原问题等价于求

$$-\min f(x_1,x_2)$$

首先求得

$$\nabla f=\begin{bmatrix}-4+4x_1+2x_2\\-6+2x_1+4x_2\end{bmatrix},\qquad \nabla^2 f=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix},\ (\nabla^2 f)^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

由$\nabla f(x^0)=[2\ \ 0]^T$，则第一轮迭代$x^1=x^0-\lambda_0\ \ (\nabla^2 f)^{-1}\nabla f(x^0)=\begin{bmatrix}1-\frac{2}{3}\lambda_0\\1+\frac{1}{3}\lambda_0\end{bmatrix}$,代入$f(x_1,x_2)$

得到$f(\lambda_0)=\frac{2}{3}\lambda_0^2-\frac{4}{3}\lambda_0-4$，显然当$\lambda_0=1$时，上式取最小值，则$x^1=\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]^T$。

再由$\nabla f(x^1)=[0\ \ 0]^T$，则第二轮迭代$x^2=x^1-\lambda_1\ \ (\nabla^2 f)^{-1}\nabla f(x^1)=x^1$，

因此牛顿法在第二轮迭代时已经达到最优值点，迭代已经结束。

原问题的最优值点为$\boldsymbol{x}=\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]^T$，最优值为$-f(\boldsymbol{x})=\frac{14}{3}$。

2. 首先求得

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}10x_1+8x_2+6x_1x_2+3x_2^2+x_1x_2^2\\8x_1+10x_2+6x_1x_2+3x_1^2+x_1^2x_2\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}10+6x_2+x_2^2 & 8+6x_1+6x_2+2x_1x_2\\8+6x_2+6x_1+2x_1x_2 & 10+6x_1+x_1^2\end{bmatrix}$$

则对$\hat{x}=[-4\ \ 6]^T$,得到

$$\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})=[-172\ \ 28]^T$$

$$\nabla^2 f(\hat{\boldsymbol{x}})=\begin{bmatrix}82 & -28\\-28 & 2\end{bmatrix}$$

则$[\nabla^2 f(\hat{\boldsymbol{x}})]^{-1}=-\frac{1}{310}\begin{bmatrix}1 & 14\\14 & 41\end{bmatrix}$，由此得到其在点$\hat{x}=[-4\ \ 6]^T$的牛顿方向为

$$D=-[\nabla^2 f(\hat{\boldsymbol{x}})]^{-1}\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})=\begin{bmatrix}\frac{22}{31}\\-\frac{126}{31}\end{bmatrix}$$

另外，由

$$\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})=[-172\ \ 28]^T$$

可知在该点的L_1范数最速下降方向为

$$D=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$