《高等微积分 1》第十三周习题课材料

1 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 证明: 如果 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上恒等于 0.

2 设 $f\in C([a,b])$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

3 (简单版本的第一积分中值定理) 设 $f,g\in C([a,b])$ 且 g 在 $[a,b]$ 上处处非负. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

4 (简单版本的第二积分中值定理) 设 $f\in C([a,b])$, g 在 $[a,b]$ 上单调且处处可导. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

5 (简单版本的 Riemann-Lebesgue 引理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可导且导函数连续. 证明:

(1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0.$

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$

6 计算不定积分.

(1) $\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

(2) $\int\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

(3) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

7 设 $f \in R([a,b])$, $F \in C([a,b])$ 且对任何 $x \in (a,b)$ 都有 $F'(x) = f(x)$. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx = F|_a^b$$

8 设 $f \in C^{(n)}(I)$, $a, b \in I$. 请确定

$$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^n dx$$

与

$$\int_a^b f(x)dx$$

的关系.

9 设 f, g 是连续函数. 证明:

$$\int_0^\pi g(x)f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) + g(\pi - x)) \cdot f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

由此计算积分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

10 (1) 计算不定积分

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t - 1) + C.$$

(2) 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x - 1) + C.$$

(3) 计算积分

$$\int_0^{2m\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 2\sqrt{2} m\pi.$$

其中 m 是正整数.

(4) 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy}{2 - \sin^2 y}.$$