

## 《高等微积分 1》第十三周作业

本次作业在第十四周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 计算不定积分.

$$(1) \int \arcsin x dx.$$

$$(2) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

$$(3) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x}} dx.$$

$$(4) \int \frac{1}{x^3 + 1} dx.$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

2 计算定积分.

$$(1) \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx.$$

$$(3) \text{ 设 } |a| < 1, \text{ 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a \cos x}.$$

3 给定正数  $a \neq 1$ , 计算定积分

$$\int_0^\pi \frac{(\cos x - a) \sin x}{(1 + a^2 - 2a \cos x)^{3/2}} dx.$$

4 给定实数  $a > 1$ .

(1) 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{a + \sin x}.$$

(2) 计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}.$$

5 (1) 计算不定积分

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

(2) 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

的值.

6 (1) 设  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  是连续映射, 且极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  存在. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx.$$

(2) 设  $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  都是连续映射, 且  $h$  是周期为  $T > 0$  的周期函数, 即对任何  $x \in \mathbf{R}$  都有  $h(x + T) = h(x)$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T g(x) h(nx) dx = \frac{1}{T} \left( \int_0^T g(x) dx \right) \cdot \left( \int_0^T h(x) dx \right).$$