第二章
命题逻辑的等值和推理演算

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

第二章 第7、8节

- 介绍推理形式的结构以及重言蕴涵的概念

- 给出基本推理公式以及证明推理公式的几种不同方法和途径

2.7.1 推理形式

- 将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来便得到推理形式，推理形式由前提和结论部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。

2.7.1 重言蕴含

- 给定两个公式 A, B，如果当A取值为真时， B 就必取值为真，便称 A重言（永真）蕴涵B。或称B 是A的逻辑推论。

用符号 $A \Rightarrow B$ 表示

2.7.1 重言蕴含

- A⇒B

  需注意：**重言蕴含⇒** 与 **普通蕴含→** 的区别

- 注意：“⇒”不是逻辑联接词

  A⇒B当然也不同于A→B

2.7.2 重言蕴含举例

例1. 如果今天是周一，那么我来上课。

今天是周一，所以我来上课。

- 设 P：今天是周一, Q：今天我来上课

$$(P \rightarrow Q) \land P \Rightarrow Q$$

前提真,结论也为真,是正确的推理。

2.7.2 重言蕴含举例

例2. 如果今天是周一，那么我来上课。

今天不是周一，所以我不上课。

$(P \to Q) \wedge \neg P \Rightarrow \neg Q$ 错！！

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！

不是正确的推理！

2.7.3 重言蕴含的几个结果

(1) 如果A⇒B成立，若A为重言式，则B 也是重言式。

(2) 若 A⇒B且 B⇒A同时成立，必有A=B。反之亦然。

(3) 若A⇒B且B⇒C同时成立，则有A⇒C。

(4) 若 A⇒B且 A⇒C同时成立，则A⇒B∧C。

(5) 若A⇒C且B⇒C同时成立，则A∨B⇒C。

2.7.3 重言蕴含的充要条件

- 定理2.8.1

  $A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是

  $A \rightarrow B$为重言式

- 定理2.8.2

  $A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是

  $A \wedge \neg B$为矛盾式。

2.8 基本的推理公式

◉ 简单证明定理2.8.2:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$，因此，

"$A \rightarrow B$是重言式"即等价于"$A \wedge \neg B$是矛盾式"

** 注意：$A \Rightarrow B$ 中 A自身不能必假!

若A永假，则$A \rightarrow B$ 肯定永真，虽然$A \Rightarrow B$ 也成立,

但已失去意义！

2.8 基本的推理公式

- 证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:
    1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
    2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
    3. 真值表法
    4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
    5. 解释法
    6. ………

2.8 基本的推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$ 但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$
3. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4. $P \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$ 2式的逆否，4式的推论。
6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ 3式的逆否，4式的推论。
7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 非P，而PVQ又成立，只有Q成立
8. $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 假言推理，分离规则，7式的变形
9. $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ 7式的变形

2.8 基本的推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论
11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式
12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 8式的推论
13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 8式的推论
14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$ 9式的推论
15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T
16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

第二章 第9、10节

- 介绍基本的推理规则，给出推理演算的过程和方法，该部分内容是谓词逻辑推理演算的基础；

- 介绍用归结推理规则进行归结证明的过程与方法。

2.9 推理演算

- 出发点

欲直观看出由前提A到结论B的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

（1）引入几条推理规则

（2）利用基本推理公式

从前提A_1，A_2，…，A_n出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

2.9 推理演算

- 主要的推理规则

（1）前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则：仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则：由A及A→B成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则。$A_1 \land A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

2.9 推理演算

例1：　证明$P \rightarrow R$是$P \rightarrow Q$，$Q \rightarrow R$的逻辑推论。

证明：

（1）	$P \rightarrow Q$	前提引入
（2）	P	附加前提引入（条件证明规则）
（3）	Q	（1）（2）分离
（4）	$Q \rightarrow R$	前提引入
（5）	R	（3）（4）分离

注：此题可直接使用推理公式10（三段论），以简化证明步骤。

2.9 推理演算

P34 例3：证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S) \Rightarrow S\vee R$

证明：

（1）	$P\vee Q$	前提引入
（2）	$\neg P\to Q$	(1)置换
（3）	$Q\to S$	前提引入
（4）	$\neg P\to S$	（2）（3）三段论
（5）	$\neg S\to P$	(4)置换
（6）	$P\to R$	前提引入
（7）	$\neg S\to R$	（5）（6）三段论
（8）	$S\vee R$	(7)置换

由该例可见，将$P\vee Q$置换成$\neg P\to Q$更便于推理

2.9 推理演算举例

教材 P54　例5：证明

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \;\Rightarrow\; (P\leftrightarrow Q)$$

教材中的证明用了15个步骤，这里用一种简洁方法。

2.9 推理演算举例

(1)	$(Q\to P)\vee\neg R$	前提引入
(2)	$R\to(Q\to P)$	(1) 置换
(3)	R	前提引入
(4)	$Q\to P$	(2)　(3) 分离
(5)	$\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$	前提引入
(6)	$(R\vee S)\to(P\to Q)$	(5) 逆否置换
(7)	$R\vee S$	(3) + 基本公式4
(8)	$P\to Q$	(6)　(7) 分离
(9)	$P\leftrightarrow Q$	(4)　(8)

2.10 归结法(Resolution)

- 出发点

  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。

  能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据

  定理 2.8.2

  $A \Rightarrow B$ 成立当且仅当 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

2.10 归结法(Resolution)

归结法步骤

1. 从A∧¬B 出发（欲证A⇒B，等价于证A∧¬B 是矛盾式）
2. 建立子句集S，将A∧¬B 化成合取范式：

   $$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $$S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。
4. 直至归结出矛盾式（□）。

2.10 归结法(Resolution)

◉归结推理规则

设　子句1　$C_1 = L \vee C_1'$

　　子句2　$C_2 = \neg L \vee C_2'$

　　（其中L和¬L为互补对）

　　新子句　$R(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$

证明　$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1, C_2)$

2.10 归结法(Resolution)

- 归结推理规则（续）

证明： $C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_1' \vee C_2'$为永真式

设在任一解释下，C_1和C_2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，

从而必有$C_2' = T$（$\because C_2$为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，

从而必有$C_1' = T$（$\because C_1$为真）

综合上述均有$C_1' \vee C_2'$为真

$\therefore\ C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1, C_2)$

2.10 归结法证明举例

例1： 证明 $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

证明：1. 先将$(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$$

2. 建立子句集

$$S = \{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$$

2.10 归结法证明举例

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) P

(3) $\neg Q$

(4) Q (1) (2)归结

(5) □ (3) (4)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

2.10 归结法证明举例

例2：用归结法证明 $((P\to Q)\wedge(Q\to R))$

$$\Rightarrow (P\to R)$$

证明：

先将 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge \neg(P\to R)$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge P\wedge \neg R$$

建立子句集

$$S = \{\neg P\vee Q, \neg Q\vee R, P, \neg R\}$$

2.10 归结法证明举例

归结过程:

(1) ¬ P∨Q

(2) ¬ Q∨R

(3) P

(4) ¬ R

(5) ¬ P∨R　　(1) (2)归结

(6) R　　(3) (5)归结

(7) □　　(4) (6)归结

归结出空子句□(矛盾式)　证明结束。

2.10 归结法证明举例

例3：构造下面推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

2.10 归结法证明举例

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

2.10 归结法证明举例

需证 $(P\wedge Q)\rightarrow R \wedge (\neg R\vee S) \wedge \neg S \wedge P \Rightarrow \neg Q$

先将 $(P\wedge Q)\rightarrow R \wedge (\neg R\vee S) \wedge \neg S \wedge P \wedge Q$化成合取范式

$$(\neg P\vee\neg Q \vee R)\wedge(\neg R\vee S)\wedge\neg S \wedge P \wedge Q$$

建立子句集

$$S = \{\neg P\vee\neg Q \vee R, \neg R\vee S, \neg S, P,Q \}$$

2.10 归结法证明举例

证明：

(1) $\neg P \vee \neg Q \vee R$	
(2) $\neg R \vee S$	
(3) $\neg S$	
(4) P	
(5) Q	
(6) $\neg R$	(2) (3)归结
(7) $\neg P \vee \neg Q$	(1) (6)归结
(8) $\neg Q$	(4) (7)归结
(9) $\square$	(5) (8)归结

教学要求

- 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法；
- 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
- 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；

教学要求

- 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
- 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式和主合取范式；
- 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；

教学要求

- 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
- 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
- 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。