《高等微积分 1》第十五周作业

本次作业不再上交批改.

1 判断收敛发散性.

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n^2}$, 其中 θ 是给定的实数.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$, 其中 $a>0$ 是给定的实数.

(4) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{1+n^2}$, 其中 p 是给定的正数.

(6) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}$, 其中 p,q 是给定的正数.

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)$, 其中 α 是给定的正数.

(8) 级数

$$\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^{2p}}+...+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^{2p}}+...$$

其中 p 是给定的正数.

(9) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^\alpha}$ 的敛散性, 其中 $\alpha>0$.

2 (1) 设 q 是给定的正实数, 求函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^q}$ 的收敛域.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 的收敛半径.

3 考虑幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

(1) 确定上述幂级数的收敛域.

(2) 证明: 对任何 $|x|<1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).$$

(3) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

4 (1) 将函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数.

(2) 确定上述级数的收敛半径.

(3) 证明:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$

5 考虑函数项级数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

(1) 求上述函数项级数的收敛域 X.

(2) $\zeta(x)$ 在 X 上是否连续? 请详细说明理由.

(3) $\zeta(x)$ 在 X 上是否可导, 求出其导函数 $\zeta'(x)$.

6 (1) 确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ 的收敛半径, 其中 $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$.

(2) 将函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数, 只需叙述结果.

(3) 将函数 $g(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数, 需要说明理由.

7 对每个正整数 n, 设 M_n 是非负实数, 函数 f_n 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上处处可导, 满足如下条件:

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛.

(ii) 对任何正整数 n, 对任何 $x \in (a,b)$, 有 $|f_n'(x)| \le M_n$.

(iii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛.

(1) 证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上点点收敛到某个和函数 $S(x)$.

(2) 假设对每个正整数 n, f_n' 在 (a,b) 上连续. 证明: $S(x)$ 在区间 (a,b) 上处处可导.