概率论与数理统计（11）

清华大学

2020 年春季学期

Fisher 信息量

- 总体密度函数为

$$p(x;\theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\theta/x^2},\ x > 0,\ \theta > a > 0.$$

其中 a 已知。求 θ 的费希尔信息量。

Fisher 信息量

- 总体密度函数为

$$p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\theta/x^2},\ x>0,\ \theta>a>0.$$

其中 a 已知。求 θ 的费希尔信息量。

- $I(\theta)=E\left[(\partial_\theta \ln p(x;\theta))^2\right]=-E(\partial_\theta^2 \ln p(x;\theta)).$
- $\ln p(x;\theta)=\ln 2+\ln\theta-3\ln x-\frac{\theta}{x^2}.$

Fisher 信息量

- 总体密度函数为

$$p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\theta/x^2},\ x>0,\ \theta>a>0.$$

  其中 a 已知。求 θ 的费希尔信息量。
- $I(\theta)=E\Big[(\partial_\theta \ln p(x;\theta))^2\Big]=-E(\partial_\theta^2 \ln p(x;\theta))$.
- $\ln p(x;\theta)=\ln 2+\ln\theta-3\ln x-\frac{\theta}{x^2}$.
- $\partial_\theta \ln p(x;\theta)=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{x^2}, \quad \partial_\theta^2 \ln p(x;\theta)=-\frac{1}{\theta^2}$.
- $I(\theta)=-E(\partial_\theta^2 \ln p(x:\theta))=\frac{1}{\theta^2}$.

- 定义：设 θ 是总体的一个参数，其参数空间为 $\theta \in \Theta$, $x_1, \ldots, x_n$ 是该总体的样本，对于给定的一个 $\alpha \in (0,1)$, 假设有两个统计量 $\hat{\theta}_L(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U(x_1, \ldots, x_n)$，对于任意的 $\theta \in \Theta$, 都有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) \geqslant 1 - \alpha,$$

 则称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别为 θ 的置信下限和置信上限。

区间估计

- 定义：设 θ 是总体的一个参数，其参数空间为 $\theta \in \Theta$, $x_1, \dots, x_n$ 是该总体的样本，对于给定的一个 $\alpha \in (0,1)$, 假设有两个统计量 $\hat{\theta}_L(x_1, \dots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U(x_1, \dots, x_n)$，对于任意的 $\theta \in \Theta$, 都有
$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) \geqslant 1 - \alpha,$$
则称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别为 θ 的置信下限和置信上限。
- 因为是随机区间，所以 θ 有可能在 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 里面，也有可能不在它里面。但是我们至少能 $1-\alpha$ 的肯定地认为它在这个区间里面。

置信区间

- 如果对于某个给定的 $\alpha \in (0,1)$, 对于任意的 $\theta \in \Theta$, 都有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha,$$

则称 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

置信区间

- 如果对于某个给定的 $\alpha \in (0,1)$, 对于任意的 $\theta \in \Theta$, 都有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1-\alpha,$$

则称 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

- 若 $P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$，则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（单侧）置信下限。假如等号对于 $\forall \theta \in \Theta$ 成立，则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信下限。

置信区间

- 如果对于某个给定的 $\alpha \in (0,1)$, 对于任意的 $\theta \in \Theta$, 都有
$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1-\alpha,$$
则称 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。
- 若 $P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$，则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（单侧）置信下限。假如等号对于 $\forall \theta \in \Theta$ 成立，则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信下限。
- 若 $P_\theta(\hat{\theta}_U \geqslant \theta) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$，则称 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（单侧）置信上限。假如等号对于 $\forall \theta \in \Theta$ 成立，则称 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信上限。

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \dots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c, d 使得对于给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1 - \alpha$.

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c,d 使得对于给定的 $\alpha \in (0,1)$, 有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1 - \alpha$.
- 假如能将 $c \leqslant G \leqslant d$ 进行不等式等价变形为 $\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U$, 则

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha.$$

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c, d 使得对于给定的 $\alpha \in (0,1)$, 有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1 - \alpha$.
- 假如能将 $c \leqslant G \leqslant d$ 进行不等式等价变形为 $\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U$, 则

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha.$$

- $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \dots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c,d 使得对于给定的 $\alpha \in (0,1)$, 有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1 - \alpha$.
- 假如能将 $c \leqslant G \leqslant d$ 进行不等式等价变形为 $\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U$, 则

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha.$$

- $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。
- 这个方法关键在于 G 的寻找，同时如果能找到 c 和 d 使得 $d - c$ 最小，那就更好了。

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c,d 使得对于给定的 $\alpha \in (0,1)$, 有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1-\alpha$.
- 假如能将 $c \leqslant G \leqslant d$ 进行不等式等价变形为 $\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U$, 则

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1-\alpha.$$

- $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。
- 这个方法关键在于 G 的寻找，同时如果能找到 c 和 d 使得 $d-c$ 最小，那就更好了。但这个比较困难。

枢轴量法

- 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G = G(x_1, \ldots, x_n, \theta)$，使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的函数 G 为枢轴量。
- 寻找适当的常数 c, d 使得对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，有 $P(c \leqslant G \leqslant d) = 1 - \alpha$.
- 假如能将 $c \leqslant G \leqslant d$ 进行不等式等价变形为 $\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U$，则

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha.$$

- $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。
- 这个方法关键在于 G 的寻找，同时如果能找到 c 和 d 使得 $d-c$ 最小，那就更好了。但这个比较困难。一般而言，c 和 d 选为

$$P_\theta(G < c) = P_\theta(G > d) = \frac{\alpha}{2}.$$

枢轴法

- 设总体是 $U(0,\theta)$, 则 $x_{(n)}$ 是 θ 的最大似然估计，而 $x_{(n)}/\theta$ 的分布函数为

$$P(x_{(n)}/\theta \leqslant y) = P(x_{(n)} \leqslant y\theta) = (\int_0^{y\theta} \frac{1}{\theta} ds)^n = y^n.$$

枢轴法

- 设总体是 $U(0,\theta)$, 则 $x_{(n)}$ 是 θ 的最大似然估计，而 $x_{(n)}/\theta$ 的分布函数为

$$P(x_{(n)}/\theta \leqslant y) = P(x_{(n)} \leqslant y\theta) = (\int_0^{y\theta} \frac{1}{\theta} ds)^n = y^n.$$

- $P(c \leqslant x_{(n)}/\theta \leqslant d) = d^n - c^n.$, 给定 $\alpha \in (0,1)$, 于是寻找 c 和 d 使得

$$d^n - c^n = 1 - \alpha.$$

枢轴法

- 设总体是 $U(0,\theta)$, 则 $x_{(n)}$ 是 θ 的最大似然估计，而 $x_{(n)}/\theta$ 的分布函数为

$$P(x_{(n)}/\theta \leqslant y) = P(x_{(n)} \leqslant y\theta) = (\int_0^{y\theta} \frac{1}{\theta} ds)^n = y^n.$$

- $P(c \leqslant x_{(n)}/\theta \leqslant d) = d^n - c^n.$, 给定 $\alpha \in (0,1)$, 于是寻找 c 和 d 使得

$$d^n - c^n = 1 - \alpha.$$

- θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为 $[x_{(n)}/d, x_{(n)}/c]$.

枢轴法

- 设总体是 $U(0,\theta)$，则 $x_{(n)}$ 是 θ 的最大似然估计，而 $x_{(n)}/\theta$ 的分布函数为

$$P(x_{(n)}/\theta \leqslant y) = P(x_{(n)} \leqslant y\theta) = (\int_0^{y\theta} \frac{1}{\theta} ds)^n = y^n.$$

- $P(c \leqslant x_{(n)}/\theta \leqslant d) = d^n - c^n$.，给定 $\alpha \in (0,1)$，于是寻找 c 和 d 使得

$$d^n - c^n = 1 - \alpha.$$

- θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为 $[x_{(n)}/d, x_{(n)}/c]$.可以取 $d=1$，$c=\alpha^{1/n}$. 也即 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的同等置信区间为

$$[x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\alpha^{1/n}}].$$

枢轴法

- 总体 X 为 $U(\theta, a)$, $x_1, \ldots, x_n$ 是其样本，寻找 θ 的置信区间。

枢轴法

- 总体 X 为 $U(\theta, a)$, $x_1, \ldots, x_n$ 是其样本，寻找 θ 的置信区间。
- $-X \sim U(-a, -\theta)$, 则 $Y = \frac{-x_{(1)}+a}{a-\theta}$ 的概率密度为

$$P(Y \leqslant y) = y^n.$$

枢轴法

- 总体 X 为 $U(\theta, a)$, $x_1, \ldots, x_n$ 是其样本，寻找 θ 的置信区间。
- $-X \sim U(-a, -\theta)$, 则 $Y = \frac{-x_{(1)}+a}{a-\theta}$ 的概率密度为

$$P(Y \leqslant y) = y^n.$$

$$P(\alpha^{1/n} \leqslant \frac{-x_{(1)} + a}{a - \theta} \leqslant 1) = 1 - \alpha$$

枢轴法

- 总体 X 为 $U(\theta, a)$, $x_1, \ldots, x_n$ 是其样本，寻找 θ 的置信区间。
- $-X \sim U(-a, -\theta)$, 则 $Y = \frac{-x_{(1)}+a}{a-\theta}$ 的概率密度为

$$P(Y \leqslant y) = y^n.$$

$$P(\alpha^{1/n} \leqslant \frac{-x_{(1)} + a}{a - \theta} \leqslant 1) = 1 - \alpha$$

所以 θ 的 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$[\frac{x_{(1)} - a}{\alpha^{1/n}} + a, x_{(1)}].$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, 有两个参数，μ, σ.

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, 有两个参数，μ, σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, 有两个参数，μ, σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,所以

$$G = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, 有两个参数，μ, σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,所以

$$G = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

分布于未知参数无关，G 可以作为枢轴量。

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, 有两个参数，μ, σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,所以

$$G = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

分布于未知参数无关，G 可以作为枢轴量。给定 α, 寻找 c 和 d 使得

$P(c \leqslant G \leqslant d) = 1-\alpha,$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，有两个参数，μ，σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，所以

$$G=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

分布于未知参数无关，G 可以作为枢轴量。给定 α，寻找 c 和 d 使得

$$P(c\leqslant G\leqslant d)=1-\alpha,\ \Rightarrow P(\bar{x}-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\leqslant\mu\leqslant\bar{x}-c\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha.$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，有两个参数，μ，σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，所以

$$G=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

分布于未知参数无关，G 可以作为枢轴量。给定 α，寻找 c 和 d 使得

$$P(c\leqslant G\leqslant d)=1-\alpha,\ \Rightarrow P(\bar{x}-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\leqslant\mu\leqslant\bar{x}-c\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha.$$

- 取 $-c=d=u_{1-\alpha/2}$，$\Phi(u_{1-\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}$，

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，有两个参数，μ, σ.
- 当 σ 为已知，寻找 μ 的置信区间：$\bar{x}$ 是 μ 的无偏统计估计量，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，所以

$$G = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

分布于未知参数无关，G 可以作为枢轴量。给定 α，寻找 c 和 d 使得

$$P(c \leqslant G \leqslant d) = 1-\alpha, \Rightarrow P(\bar{x}-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant \mu \leqslant \bar{x}-c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha.$$

- 取 $-c = d = u_{1-\alpha/2}$, $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2}$，由此给出 μ 的 $1-\alpha$ 的同等置信区间为

$$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}].$$

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。
- 某总体为 $N(\mu, 0.1^2)$, 9 个样品的样本均值为 $\bar{x} = 15.4$, μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为:

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。
- 某总体为 $N(\mu, 0.1^2)$, 9 个样品的样本均值为 $\bar{x} = 15.4$, μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为：

$$[15.4 - u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}, 15.4 + u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}] = [15.3347, 15.4653], u_{0.975} = 1.96$$

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。
- 某总体为 $N(\mu, 0.1^2)$, 9 个样品的样本均值为 $\bar{x} = 15.4$, μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为:

$$[15.4 - u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}, 15.4 + u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}] = [15.3347, 15.4653], u_{0.975} = 1.96$$

- 总体为 $N(\mu, 1)$，要求置信水平为 0.95, 置信区间长度不超过 1.2，样本容量应为多大:

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。
- 某总体为 $N(\mu, 0.1^2)$, 9 个样品的样本均值为 $\bar{x} = 15.4$, μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为:

$$[15.4 - u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}, 15.4 + u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}] = [15.3347, 15.4653], u_{0.975} = 1.96$$

- 总体为 $N(\mu, 1)$，要求置信水平为 0.95, 置信区间长度不超过 1.2，样本容量应为多大:

$$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

单个正态总体参数的置信区间

- 两类问题：由样本数据得到置信区间；给定对置信区间的要求：置信水平，区间长度，要确定样本容量。
- 某总体为 $N(\mu, 0.1^2)$, 9 个样品的样本均值为 $\bar{x} = 15.4$, μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为:

$$[15.4 - u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}, 15.4 + u_{0.975}\frac{0.1}{\sqrt{9}}] = [15.3347, 15.4653], u_{0.975} = 1.96$$

- 总体为 $N(\mu, 1)$，要求置信水平为 0.95, 置信区间长度不超过 1.2，样本容量应为多大:

$$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

置信区间长度为 $2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$, 即要求

$$2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n} \leqslant 1.2, \Rightarrow n \geqslant (2/1.2)^2 u_{1-\alpha/2}^2 \approx (5/3)^2 \times 1.96^2 \approx 11.$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}=\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}}\sim t(n-1).$$

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}} \sim t(n-1).?$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}} \sim t(n-1).?$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$, $\frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{(n-1)\sigma^2} \sim \frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)$.

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}=\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}}\sim t(n-1).?$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, $\frac{s^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)s^2}{(n-1)\sigma^2}\sim\frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)$.

T 的分布跟 μ 和 σ 都无关，可作为枢轴量。

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}} \sim t(n-1).?$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$, $\frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{(n-1)\sigma^2} \sim \frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)$.

T 的分布跟 μ 和 σ 都无关，可作为枢轴量。μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}].$$

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, σ 为未知时的 μ 的置信区间。

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}=\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}}\sim t(n-1).?$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, $\frac{s^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)s^2}{(n-1)\sigma^2}\sim\frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)$.

T 的分布跟 μ 和 σ 都无关，可作为枢轴量。μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{x}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}].$$

- 置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限：

$$P(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-mu)}{s}<t_{1-\alpha}(n-1))=1-\alpha,\Rightarrow\mu\geqslant\bar{x}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 的置信区间。

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 的置信区间。
- μ 未知时，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 给定 $\alpha > 0$, 有

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha.$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，σ 的置信区间。
- μ 未知时，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，给定 $\alpha>0$，有

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\leqslant\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))=1-\alpha.$$

- σ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}].$$

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 的置信区间。
- μ 未知时，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 给定 $\alpha > 0$, 有

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha.$$

- σ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}].$$

- μ 已知，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.,

单个正态总体参数的置信区间

- 总体为 $N(\mu,\sigma^2)$, σ 的置信区间。
- μ 未知时， $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 给定 $\alpha>0$, 有

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\leqslant\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))=1-\alpha.$$

- σ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}].$$

- μ 已知， $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$.,

$$[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}}].$$

大样本置信区间

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：

大样本置信区间

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：我们有中心极限定理。

大样本置信区间

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：我们有中心极限定理。
- 总体为二点分布 $b(1,p)$. 当样本容量比较大时，由中心极限定理，$\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$,

大样本置信区间

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：我们有中心极限定理。
- 总体为二点分布 $b(1,p)$. 当样本容量比较大时，由中心极限定理，$\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$,

$$u = \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1).$$

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：我们有中心极限定理。
- 总体为二点分布 $b(1,p)$. 当样本容量比较大时，由中心极限定理，$\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$,

$$u = \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1).$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leqslant u_{1-\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

大样本置信区间

- 对于一般的分布，寻找枢轴量及其分布是比较困难的。当样本容量比较大时，可以用近似分布来寻找近似置信区间：我们有中心极限定理。
- 总体为二点分布 $b(1,p)$. 当样本容量比较大时，由中心极限定理，$\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$，

$$u = \frac{\bar{x}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1).$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leqslant u_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha.$$

- 考虑

$$(\bar{x}-p)^2 = u_{1-\alpha/2}^2 p(1-p)/n.$$

- 解方程可得:

$$\frac{1}{1+u_{1-\alpha}^2 n}\left(\bar{x}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\pm\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\frac{u_{1-\alpha/2}^4}{4n^2}}\right).$$

大样本置信区间

- 解方程可得:

$$\frac{1}{1+u_{1-\alpha}^2 n}\left(\bar{x}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\pm\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\frac{u_{1-\alpha/2}^4}{4n^2}}\right).$$

则近似地，有 p 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}].$$

- 解方程可得:

$$\frac{1}{1+u_{1-\alpha}^2 n}\Big(\bar{x}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\pm\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}u_{1-\alpha/2}^2+\frac{u_{1-\alpha/2}^4}{4n^2}}\Big).$$

则近似地，有 p 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}].$$

形式上还是 $\bar{x}\pm u\sqrt{Var(\bar{x})}$.

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n = 120$, $\bar{x} = 36/120 = 0.3$, $u_{0.975} = 1.96$,

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n = 120$, $\bar{x} = 36/120 = 0.3$, $u_{0.975} = 1.96$,则置信区间为

$$[0.3 - 1.96 \times \sqrt{0.3 \times 0.7/120}, 0.3 + 1.96 \times \sqrt{0.3 \times 0.7/120}] \approx [0.21, 0$$

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n = 120$, $\bar{x} = 36/120 = 0.3$, $u_{0.975} = 1.96$,则置信区间为

$$[0.3 - 1.96 \times \sqrt{0.3 \times 0.7/120}, 0.3 + 1.96 \times \sqrt{0.3 \times 0.7/120}] \approx [0.21, 0$$

- 某传媒公司想调查电视台某综艺节目的收视率 p，想得到 p 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间，且区间长度不超过 2d，那么要调查多少位用户？

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n=120$, $\bar{x}=36/120=0.3$, $u_{0.975}=1.96$,则置信区间为

$$[0.3-1.96\times\sqrt{0.3\times0.7/120}, 0.3+1.96\times\sqrt{0.3\times0.7/120}]\approx[0.21, 0$$

- 某传媒公司想调查电视台某综艺节目的收视率 p，想得到 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，且区间长度不超过 2d，那么要调查多少位用户？

$$2u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n}\leqslant 2d.$$

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n = 120$, $\bar{x} = 36/120 = 0.3$, $u_{0.975} = 1.96$,则置信区间为

$$[0.3-1.96\times\sqrt{0.3 \times 0.7/120}, 0.3+1.96\times\sqrt{0.3 \times 0.7/120}] \approx [0.21, 0$$

- 某传媒公司想调查电视台某综艺节目的收视率 p，想得到 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，且区间长度不超过 2d，那么要调查多少位用户？

$$2u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} \leqslant 2d.$$

$\bar{x}$ 是随机变量，

大样本置信区间

- 对某事件 A 进行过 120 次观察，A 发生 36 次，时间 A 发生概率的 0.95 置信区间为：$n=120$, $\bar{x}=36/120=0.3$, $u_{0.975}=1.96$,则置信区间为

  $$[0.3-1.96\times\sqrt{0.3\times 0.7/120}, 0.3+1.96\times\sqrt{0.3\times 0.7/120}]\approx[0.21, 0$$

- 某传媒公司想调查电视台某综艺节目的收视率 p，想得到 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，且区间长度不超过 2d，那么要调查多少位用户？

  $$2u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n}\leqslant 2d.$$

  $\bar{x}$ 是随机变量，$\bar{x}(1-\bar{x})\leqslant 0.5^2=0.25$, 所以只要

  $$\frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\leqslant d, \Rightarrow n\geqslant(\frac{u_{1-\alpha/2}}{2d})^2.$$

大样本置信区间

- 总体为泊松分布 $P(\lambda)$, 数学期望与方差均为 λ,

大样本置信区间

- 总体为泊松分布 $P(\lambda)$, 数学期望与方差均为 λ,

$$u = \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim N(0,1),$$

大样本置信区间

- 总体为泊松分布 $P(\lambda)$, 数学期望与方差均为 λ,

$$u = \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim N(0,1),$$

u 可以作为枢轴量，也就是

$$P(\left|\frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\right| \leqslant u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

等价于 $(\bar{x} - \lambda)^2 \leqslant u_{1-\alpha/2}^2 \lambda/n$,

大样本置信区间

- 总体为泊松分布 $P(\lambda)$, 数学期望与方差均为 λ,

$$u = \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}} \sim N(0, 1),$$

u 可以作为枢轴量，也就是

$$P(\left|\frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}}\right| \leqslant u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

等价于 $(\bar{x} - \lambda)^2 \leqslant u_{1-\alpha/2}^2 \lambda / n$,

$$\frac{2\bar{x} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n} \pm \sqrt{(2\bar{x} + \frac{1}{n} u_{1-\alpha/2}^2)^2 - 4\bar{x}^2}}{2}.$$

大样本置信区间

- 总体为泊松分布 $P(\lambda)$, 数学期望与方差均为 λ,

$$u = \frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}} \sim N(0, 1),$$

u 可以作为枢轴量，也就是

$$P(\left|\frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}}\right| \leqslant u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

等价于 $(\bar{x} - \lambda)^2 \leqslant u_{1-\alpha/2}^2 \lambda / n$,

$$\frac{2\bar{x} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n} \pm \sqrt{(2\bar{x} + \frac{1}{n} u_{1-\alpha/2}^2)^2 - 4\bar{x}^2}}{2}.$$

$$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}/n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}/n}].$$

两个正态总体下的置信区间

- $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为它们的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别为它们的无偏样本方差。

两个正态总体下的置信区间

- $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为它们的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别为它们的无偏样本方差。
- 在 σ_1 和 σ_2 均已知的情况下，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

两个正态总体下的置信区间

- $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为它们的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别为它们的无偏样本方差。
- 在 σ_1 和 σ_2 均已知的情况下，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}).$$

两个正态总体下的置信区间

- $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为它们的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别为它们的无偏样本方差。
- 在 σ_1 和 σ_2 均已知的情况下，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}).$$

枢轴量为

$$u\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1),$$

- $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为它们的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别为它们的无偏样本方差。
- 在 σ_1 和 σ_2 均已知的情况下，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间:

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}).$$

枢轴量为

$$u\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1),$$

置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{x} - \bar{y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \bar{x} - \bar{y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}]$$

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 但 σ 为未知，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\sigma^2),$$

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 但 σ 为未知，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\sigma^2),$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 但 σ 为未知，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\sigma^2),$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

$$t = \frac{\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{1/m+1/n}}}{\sqrt{[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2]/(n+m-2)}} \sim t(n+m-2).$$

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 但 σ 为未知，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\sigma^2),$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

$$t = \frac{\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{1/m+1/n}}}{\sqrt{[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2]/(n+m-2)}} \sim t(n+m-2).$$

$$\bar{x}-\bar{y} \pm \sqrt{\frac{m+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2), \ s_w^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{m+n-2}.$$

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$ 已知时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$ 已知时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}) = N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2(\frac{1}{n} + \frac{c}{m})).$$

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$ 已知时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}) = N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2(\frac{1}{n} + \frac{c}{m})).$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2/c}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n+m-2),$$

- $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$ 已知时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}) = N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2(\frac{1}{n} + \frac{c}{m})).$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2/c}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n+m-2),$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2/c}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{mc+n}} \sim t(n+m-2),$$

两个正态总体下的置信区间

- $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$ 已知时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}) = N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2(\frac{1}{n} + \frac{c}{m})).$$

$$\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2/c}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n+m-2),$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2/c}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{mc+n}} \sim t(n+m-2),$$

$$\bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{mc+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2), \qquad s_w^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + \frac{(m-1)s_y^2}{c}}{m+n-2}.$$

两个正态总体下的置信区间

- 当没有 σ_1 和 σ_2 的额外信息时，当 m 和 n 均比较大时，

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n}+\frac{s_y^2}{m}}} \sim N(0,1),$$

  则 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$\bar{x}-\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}.$$

两个正态总体下的置信区间

- 当 σ_1 和 σ_2 均不知，且 m, n 也不是很大时，

- 当 σ_1 和 σ_2 均不知，且 m, n 也不是很大时，令 $s_0^2 = \frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}$，考虑

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_0} \tilde{\ } t(l)$$

$$l = \frac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)} + \frac{s_y^4}{n^2(n-1)}},$$

当 l 不是整数时，取与之最近的整数。

两个正态总体下的置信区间

- 当 σ_1 和 σ_2 均不知，且 m, n 也不是很大时，令 $s_0^2 = \frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}$，考虑

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_0} \tilde{\sim} t(l)$$

$$l = \frac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)} + \frac{s_y^4}{n^2(n-1)}},$$

当 l 不是整数时，取与之最近的整数。$\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 近似置信区间为

$$[\bar{x} - \bar{y} - s_0 t_{1-\alpha/2}(l), \bar{x} - \bar{y} + s_0 t_{1-\alpha/2}(l)].$$

两个正态总体下的置信区间

- 方差比值的置信区间。
- $(n-1)s_x^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n-1)$，$(m-1)s_y^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2(m-1)$

两个正态总体下的置信区间

- 方差比值的置信区间。
- $(n-1)s_x^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n-1)$，$(m-1)s_y^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2(m-1)$

$$F = \frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1),$$

两个正态总体下的置信区间

- 方差比值的置信区间。
- $(n-1)s_x^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n-1)$，$(m-1)s_y^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2(m-1)$

$$F = \frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1),$$

$$P(F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \leqslant \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leqslant F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)) = 1-\alpha.$$

- 方差比值的置信区间。
- $(n-1)s_x^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n-1)$，$(m-1)s_y^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2(m-1)$

$$F = \frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1),$$

$$P(F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \leqslant \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leqslant F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)) = 1-\alpha.$$

σ_1^2/σ_2^2 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)}].$$

均匀分布总体的置信区间

- 总体为 $U(\theta_1, \theta_2)$，$x_{(1)}$，$x_{(n)}$ 为最小和最大次序统计量。$\frac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \sim U(0,1)$ 令

$$R = \frac{x_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{x_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_2} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

均匀分布总体的置信区间

- 总体为 $U(\theta_1, \theta_2)$, $x_{(1)}$, $x_{(n)}$ 为最小和最大次序统计量。 $\frac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \sim U(0,1)$ 令

$$R = \frac{x_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{x_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_2} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

R 为极差，$R \sim Be(n-1, 2)$, 密度函数为 $p(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r)$, $0 < r < 1$.

均匀分布总体的置信区间

- 总体为 $U(\theta_1, \theta_2)$, $x_{(1)}$, $x_{(n)}$ 为最小和最大次序统计量。$\frac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \sim U(0,1)$ 令

$$R = \frac{x_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{x_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_2} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

R 为极差，$R \sim Be(n-1, 2)$, 密度函数为 $p(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r)$, $0 < r < 1$.

$$P(Be_{\alpha/2}(n-1,2) \leqslant R \leqslant Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)) = 1 - \alpha.$$

均匀分布总体的置信区间

- 总体为 $U(\theta_1, \theta_2)$, $x_{(1)}$, $x_{(n)}$ 为最小和最大次序统计量。 $\frac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \sim U(0,1)$ 令

$$R = \frac{x_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{x_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_2} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

R 为极差， $R \sim Be(n-1, 2)$, 密度函数为
$p(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r)$, $0 < r < 1$.

$$P(Be_{\alpha/2}(n-1,2) \leqslant R \leqslant Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)) = 1-\alpha.$$

$\theta_2 - \theta_1$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{Be_{1-\alpha/2}(n-1,2)}, \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{Be_{\alpha/2}(n-1,2)}].$$

两个均匀分布的置信区间

- $x_1, \ldots, x_m$ 为 $U(0, \theta_1)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_n$ 为 $U(0, \theta_2)$ 的样本，想知道 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信区间。

两个均匀分布的置信区间

- $x_1, \ldots, x_m$ 为 $U(0, \theta_1)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_n$ 为 $U(0, \theta_2)$ 的样本，想知道 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信区间。
- $\tilde{X} = \frac{x_{(m)}}{\theta_1}$, $p_X(x) = mx^{m-1}$, $\tilde{Y} = \frac{y_{(n)}}{\theta_2}$,$p_Y(y) = ny^{n-1}$,

两个均匀分布的置信区间

- $x_1, \dots, x_m$ 为 $U(0, \theta_1)$ 的样本，$y_1, \dots, y_n$ 为 $U(0, \theta_2)$ 的样本，想知道 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信区间。
- $\tilde{X} = \frac{x_{(m)}}{\theta_1}$，$p_X(x) = mx^{m-1}$，$\tilde{Y} = \frac{y_{(n)}}{\theta_2}$,$p_Y(y) = ny^{n-1}$,考虑

$$T = \frac{X}{Y} = \frac{x_{(m)}}{y_{(n)}} \times \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

用之前学过的商公式：$p_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(ty) p_Y(y) dy.$

两个均匀分布的置信区间

- $x_1, \ldots, x_m$ 为 $U(0, \theta_1)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_n$ 为 $U(0, \theta_2)$ 的样本，想知道 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信区间。
- $\tilde{X} = \frac{x_{(m)}}{\theta_1}$, $p_X(x) = mx^{m-1}$, $\tilde{Y} = \frac{y_{(n)}}{\theta_2}$,$p_Y(y) = ny^{n-1}$,考虑

$$T = \frac{X}{Y} = \frac{x_{(m)}}{y_{(n)}} \times \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

用之前学过的商公式：$p_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(ty) p_Y(y) dy.$

$$p_T(t) = \begin{cases} \frac{mn}{m+n} t^{m-1}, & t \in (0,1) \\ \frac{mn}{m+n} t^{-n-1}, & t > 1 \end{cases}$$

两个均匀分布的置信区间

- $x_1, \ldots, x_m$ 为 $U(0, \theta_1)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_n$ 为 $U(0, \theta_2)$ 的样本，想知道 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的置信区间。
- $\tilde{X} = \frac{x_{(m)}}{\theta_1}$, $p_X(x) = mx^{m-1}$, $\tilde{Y} = \frac{y_{(n)}}{\theta_2}$,$p_Y(y) = ny^{n-1}$,考虑

$$T = \frac{X}{Y} = \frac{x_{(m)}}{y_{(n)}} \times \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

用之前学过的商公式：$p_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(ty)p_Y(y)dy.$

$$p_T(t) = \begin{cases} \frac{mn}{m+n} t^{m-1}, & t \in (0,1) \\ \frac{mn}{m+n} t^{-n-1}, & t > 1 \end{cases}$$

则对于比较小的 α, θ_1/θ_2 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$[\frac{x_{(m)}}{y_{(n)}}(\frac{(m+n)\alpha}{2m})^{1/n}, \frac{x_{(m)}}{y_{(n)}}(\frac{(m+n)\alpha}{2n})^{-1/m}].$$

分位数与置信区间

如果 $p(x;\theta)$ 关于 $x=\theta$ 对称，求 θ 的近似置信区间?

如果 $p(x;\theta)$ 关于 $x=\theta$ 对称，求 θ 的近似置信区间？

$$m_p \sim N(x_p, \frac{p(1-p)}{n \cdot p^2(x_p)}).$$

- 总体为 $p(x;\theta)$, $\hat{\theta}$ 的一个估计量，想寻找 θ 的置信区间。

大样本一般参数的置信区间

- 总体为 $p(x;\theta)$, $\hat{\theta}$ 的一个估计量，想寻找 θ 的置信区间。
- 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计时，
  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \sim AN(\theta, \frac{1}{nI(\theta)})$, 其中 $I(\theta)$ 时关于 θ 的费希尔信息量。

大样本一般参数的置信区间

- 总体为 $p(x;\theta)$, $\hat{\theta}$ 的一个估计量，想寻找 θ 的置信区间。
- 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计时，$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \sim AN(\theta, \frac{1}{nI(\theta)})$，其中 $I(\theta)$ 时关于 θ 的费希尔信息量。
- 在样本容量比较大时，可以参考的 θ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$[\hat{\theta}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta}_n)}}].$$

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子：$p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}}$，$x>0;\theta>a>0.$

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子: $p(x;\theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x^2}}, \; x > 0; \theta > a > 0.$
- 对数似然函数:
  $\sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{2\theta}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x2}}) = n \ln 2\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{-\theta}{x_i^2}.$

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子：$p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}}$，$x>0;\theta>a>0$.
- 对数似然函数：
  $\sum_{i=1}^n \ln(\frac{2\theta}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_2}})=n\ln 2\theta-\sum_{i=1}^n \ln x_i^3+\sum_{i=1}^n \frac{-\theta}{x_i^2}$.
- 最大似然估计：$\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}$;

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子：$p(x;\theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x^2}}$，$x > 0; \theta > a > 0$.
- 对数似然函数：
  $\sum_{i=1}^n \ln(\frac{2\theta}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_2}}) = n \ln 2\theta - \sum_{i=1}^n \ln x_i^3 + \sum_{i=1}^n \frac{-\theta}{x_i^2}$.
- 最大似然估计：$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}$;
- 二阶导数为 $-\frac{n}{\theta^2}$，所以 $-\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$.

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子：$p(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}}$，$x>0;\theta>a>0.$
- 对数似然函数：
  $\sum_{i=1}^n \ln(\frac{2\theta}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_2}})=n\ln 2\theta-\sum_{i=1}^n \ln x_i^3+\sum_{i=1}^n \frac{-\theta}{x_i^2}.$
- 最大似然估计：$\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}$;
- 二阶导数为 $-\frac{n}{\theta^2}$，所以 $-\frac{n}{\hat{\theta}^2}<0.$
- Fisher 信息量：$I(\theta)=\frac{1}{\theta^2}.$

大样本一般参数的置信区间

- 回到一开始的例子：$p(x;\theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x^2}}$，$x > 0; \theta > a > 0$.
- 对数似然函数：
  $\sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{2\theta}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_2}}) = n \ln 2\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{-\theta}{x_i^2}$.
- 最大似然估计：$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}$;
- 二阶导数为 $-\frac{n}{\theta^2}$，所以 $-\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$.
- Fisher 信息量：$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$.
- 在样本容量比较大时，可以参考的 θ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$[\hat{\theta}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta}_n)}}].$$

区间估计：分布函数法

- 某统计量 T 的（连续）分布函数为 $F_T(t;\theta)$. 给定 $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 假设
  - 如果 $F_T(t;\theta)$ 关于 θ 单调递减，定义
  $$F_T(t;\theta_U(t)) = \alpha_1,\ F_T(t;\theta_L(t)) = 1-\alpha_2.$$
  - 如果 $F_T(t|\theta)$ 关于 θ 单调递增，定义
  $$F_T(t:\theta_U(t)) = 1-\alpha_2,\ F_T(t|\theta_L(t)) = \alpha_1.$$
- $[\theta_L(T), \theta_U(T)]$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

例子

- $X \sim f(x;\mu) = e^{-(x-\mu)},\ x \geqslant \mu$. 考虑 $Y = x_{(1)}$. 则 Y 的密度函数为
$$f_Y(y;\mu) = ne^{-n(y-\mu)},\ y \geqslant \mu.$$
- 寻找 $\mu_L(y)$ 和 $\mu_U(y)$ 使得
$$\int_{\mu_U(y)}^{y} ne^{-n(u-\mu_U(y))}du = \frac{\alpha}{2},\ \int_{y}^{\infty} ne^{-n(u-\mu_L(y))}du = \frac{\alpha}{2}.$$

例子

- $X \sim f(x;\mu) = e^{-(x-\mu)}$, $x \geqslant \mu$. 考虑 $Y = x_{(1)}$. 则 Y 的密度函数为
$$f_Y(y;\mu) = ne^{-n(y-\mu)},\ y \geqslant \mu.$$
- 寻找 $\mu_L(y)$ 和 $\mu_U(y)$ 使得
$$\int_{\mu_U(y)}^{y} ne^{-n(u-\mu_U(y))}\,du = \frac{\alpha}{2},\ \int_{y}^{\infty} ne^{-n(u-\mu_L(y))}\,du = \frac{\alpha}{2}.$$
$$1 - e^{-n(y-\mu_U(y))} = \frac{\alpha}{2},\ e^{-n(y-\mu_L(y))} = \frac{\alpha}{2}.$$

例子

- $X \sim f(x;\mu) = e^{-(x-\mu)}$, $x \geqslant \mu$. 考虑 $Y = x_{(1)}$. 则 Y 的密度函数为
$$f_Y(y;\mu) = ne^{-n(y-\mu)}, \ y \geqslant \mu.$$
- 寻找 $\mu_L(y)$ 和 $\mu_U(y)$ 使得
$$\int_{\mu_U(y)}^{y} ne^{-n(u-\mu_U(y))}\,du = \frac{\alpha}{2}, \ \int_{y}^{\infty} ne^{-n(u-\mu_L(y))}\,du = \frac{\alpha}{2}.$$
$$1 - e^{-n(y-\mu_U(y))} = \frac{\alpha}{2}, \ e^{-n(y-\mu_L(y))} = \frac{\alpha}{2}.$$
$$\mu_U(y) = y + \frac{1}{n}\log(1-\frac{\alpha}{2}), \ \mu_L(y) = y + \frac{1}{n}\log(\frac{\alpha}{2}).$$
- 置信区间为 $[Y + \frac{1}{n}\log(\frac{\alpha}{2}), Y + \frac{1}{n}\log(1-\frac{\alpha}{2})]$.