《高等微积分 1》第五周作业

本次作业在第六周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 计算函数极限.

(1) 给定正整数 m, n. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

(2) 给定正整数 n 与正数 p. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x^n+p^n}-p}{x^n}$.

(3) 给定正整数 n 与正数 p, q. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x^n+p^n}-p}{\sqrt[n]{x^n+q^n}-q}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

2 (1) 给定正数 A. 证明: $\lim\limits_{x\to A}\ln x=\ln A$.

(2) 给定实数 c. 证明: $\lim\limits_{x\to c}e^x=e^c$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$.

3 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 设 r 是正数, 且对任何 $x\in N^*(x_0,r)$, 总有 $f(x)\neq 0$.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(f(x))}{g(x)}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{1/g(x)}$.

(3) 给定实数 $a, b\neq 0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(5) 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

(6) 给定实数 k. 求极限 $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{1/x}$.

(7) 给定实数 a. 求极限 $\lim_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}$.

(8) 给定实数 a,b. 求极限 $\lim_{x\to\infty}(1-\dfrac{a}{x})^{bx}$.

(9) 求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

(10) 求极限 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$.

4 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=K$.

(1) 定义函数 $h:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为

$$h(y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+y)}{y}, & \text{如果} y\neq 0\\ 1, & \text{如果} y=0.\end{cases}$$

证明: $\lim_{x\to x_0}(h\circ f)(x)=1$.

(2) 利用 (1) 的结论, 证明:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln\left(1+f(x)\right)=K.$$

注意: 这个结论不是显然的. 因为, 不一定能找到 x_0 的去心邻域 $N^*(x_0,r)=B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$, 使得在其中 $f(x)$ 处处非零, 这样, 利用简单的换元法计算上述极限是不严谨的.