第七章　假设检验

习题 7.1

1．设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

H_0：$\mu = 2$　vs　H_1：$\mu = 3$，

若检验由拒绝域为 $W = \{\bar{x} \ge 2.6\}$ 确定．

（1）当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率；

（2）如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \le 0.01$，n 最小应取多少？

（3）证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0$，$\beta \to 0$．

解：（1）犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{\overline{X} \ge 2.6 \mid \mu = 2\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \ge \frac{2.6 - 2}{1/\sqrt{20}} = 2.68\right\} = 1 - \Phi(2.68) = 0.0037,$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\{\overline{X} \notin W \mid H_1\} = P\{\overline{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \frac{2.6 - 3}{1/\sqrt{20}} = -1.79\right\} = \Phi(-1.79) = 0.0367;$$

（2）因 $\beta = P\{\overline{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\dfrac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \dfrac{2.6 - 3}{1/\sqrt{n}} = -0.4\sqrt{n}\right\} = \Phi(-0.4\sqrt{n}) \le 0.01$，

则 $\Phi(0.4\sqrt{n}) \ge 0.99$，$0.4\sqrt{n} \ge 2.33$，$n \ge 33.93$，故 n 至少为 34；

（3）$\alpha = P\{\overline{X} \ge 2.6 \mid \mu = 2\} = P\left\{\dfrac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \ge \dfrac{2.6 - 2}{1/\sqrt{n}} = 0.6\sqrt{n}\right\} = 1 - \Phi(0.6\sqrt{n}) \to 0 \quad (n \to \infty)$，

$$\beta = P\{\overline{X} < 2.6 \mid \mu = 3\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} < \frac{2.6 - 3}{1/\sqrt{n}} = -0.4\sqrt{n}\right\} = \Phi(-0.4\sqrt{n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

2．设 $X_1, \cdots, X_{10}$ 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本，考虑如下检验问题

H_0：$p = 0.2$　vs　H_1：$p = 0.4$，

取拒绝域为 $W = \{\bar{x} \ge 0.5\}$，求该检验犯两类错误的概率．

解：因 $X \sim b(1, p)$，有 $\sum_{i=1}^{10} X_i = 10\overline{X} \sim b(10, p)$，

则 $\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{\overline{X} \ge 0.5 \mid p = 0.2\} = P\{10\overline{X} \ge 5 \mid p = 0.2\} = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^k \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{10-k} = 0.0328$，

$$\beta = P\{\overline{X} \notin W \mid H_1\} = P\{\overline{X} < 0.5 \mid p = 0.4\} = P\{10\overline{X} < 5 \mid p = 0.4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{10}^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{10-k} = 0.6331.$$

3．设 $X_1, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，考虑检验问题

H_0：$\mu = 6$　vs　H_1：$\mu \ne 6$，

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \ge c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率．

解：因 $\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{|\overline{X} - 6| \ge c \mid \mu = 6\} = P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{16}}\right| \ge \dfrac{c}{2/\sqrt{16}} = 2c\right\} = 2[1-\Phi(2c)] = 0.05$，

则 $\Phi(2c) = 0.975$，$2c = 1.96$，故 $c = 0.98$；

故 $\beta = P\{\overline{X} \notin W \mid H_1\} = P\{|\overline{X} - 6| < 0.98 \mid \mu = 6.5\} = P\{-1.48 < \overline{X} - 6.5 < 0.48 \mid \mu = 6.5\}$

$$= P\left\{-2.96 < \frac{\overline{X}-6.5}{2/\sqrt{16}} < 0.96\right\} = \Phi(0.96) - \Phi(-2.96) = 0.83\,.$$

4. 设总体为均匀分布 $U(0,\,\theta)$，$X_1, \cdots, X_n$ 是样本，考虑检验问题

H_0：$\theta \ge 3$ vs H_1：$\theta < 3$，

拒绝域取为 $W = \{\overline{x}_{(n)} \le 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大？

解：因均匀分布最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的密度函数为 $p_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{I}_{0<x<\theta}$，

则 $\alpha = P\{\overline{X} \in W \mid H_0\} = P\{X_{(n)} \le 2.5 \mid \theta = 3\} = \displaystyle\int_0^{2.5}\frac{nx^{n-1}}{3^n}dx = \left.\frac{x^n}{3^n}\right|_0^{2.5} = \frac{2.5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$，

要使得 $\alpha \le 0.05$，即 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \le 0.05$，$n \ge \dfrac{\ln 0.05}{\ln(5/6)} = 16.43$，

故 n 至少为 17.

5. 在假设检验问题中，若检验结果是接受原假设，则检验可能犯哪一类错误？若检验结果是拒绝原假设，则又有可能犯哪一类错误？

答：若检验结果是接受原假设，当原假设为真时，是正确的决策，未犯错误；

当原假设不真时，则犯了第二类错误.

若检验结果是拒绝原假设，当原假设为真时，则犯了第一类错误；

当原假设不真时，是正确的决策，未犯错误.

6. 设 $X_1, \cdots, X_{20}$ 是来自 0-1 总体 $b(1, p)$ 的样本，考虑如下检验问题

H_0：$p = 0.2$ vs H_1：$p \ne 0.2$，

取拒绝域为 $W = \left\{\sum_{i=1}^{20} x_i \ge 7 \text{或} \sum_{i=1}^{20} x_i \le 1\right\}$，

（1）求 $p = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1$ 的势并由此画出势函数的图；

（2）求在 $p = 0.05$ 时犯第二类错误的概率.

解：（1）因 $X \sim b(1, p)$，有 $\sum_{i=1}^{20} X_i \sim b(20, p)$，势函数 $g(p) = P\left\{\sum_{i=1}^{20} X_i \in W \,\middle|\, p\right\} = 1 - \sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}p^k(1-p)^{20-k}$，

故 $g(0) = 1 - \sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k} \times 0^k \times 1^{20-k} = 1$，$g(0.1) = 1 - \sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k} \times 0.1^k \times 0.9^{20-k} = 0.3941$，

$g(0.2) = 1 - \sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k} \times 0.2^k \times 0.8^{20-k} = 0.1559$，$g(0.3) = 1 - \sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k} \times 0.3^k \times 0.7^{20-k} = 0.3996$，

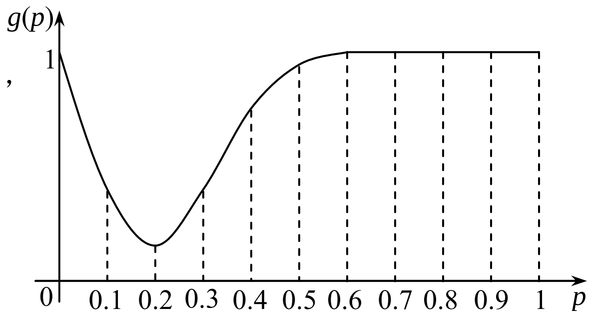
$$g(0.4)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.4^k\times0.6^{20-k}=0.7505,\quad g(0.5)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.5^k\times0.5^{20-k}=0.9424,$$

$$g(0.6)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.6^k\times0.4^{20-k}=0.9935,\quad g(0.7)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.7^k\times0.3^{20-k}=0.9997,$$

$$g(0.8)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.8^k\times0.2^{20-k}=0.999998,$$

$$g(0.9)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.9^k\times0.1^{20-k}\approx1,$$

$$g(1)=1-\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times1^k\times0^{20-k}=1;$$



（2）在 $p=0.05$ 时犯第二类错误的概率

$$\beta=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i\notin W\mid p=0.05\right\}=\sum_{k=2}^{6}\binom{20}{k}\times0.05^k\times0.95^{20-k}=0.2641.$$

7． 设一个单一观测的样本取自密度函数为 $p(x)$的总体，对 $p(x)$考虑统计假设：

$$H_0:\ p_0(x)=I_{0<x<1}\quad \text{vs}\quad H_1:\ p_1(x)=2x\,I_{0<x<1}.$$

若其拒绝域的形式为 $W=\{x: x\ge c\}$，试确定一个 c，使得犯第一类，第二类错误的概率满足$\alpha+2\beta$ 为最小，并求其最小值.

解：当 $0<c<1$ 时，$\alpha=P\{X\in W\mid H_0\}=P\{X\ge c\mid X\sim p_0(x)\}=1-c$，

且 $\beta=P\{X\notin W\mid H_1\}=P\{X<c\mid X\sim p_1(x)\}=\int_0^c 2xdx=c^2$，

则 $\alpha+2\beta=1-c+2c^2=\dfrac{7}{8}+2\left(\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}c+c^2\right)=\dfrac{7}{8}+2\left(\dfrac{1}{4}-c\right)^2$，

故当 $c=\dfrac{1}{4}$ 时，$\alpha+2\beta$ 为最小，其最小值为 $\dfrac{7}{8}$.

8． 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{30}$ 为取自柏松分布 $P(\lambda)$的随机样本.

（1）试给出单侧假设检验问题 H_0：$\lambda\le0.1$ vs H_1：$\lambda>0.1$ 的显著水平$\alpha=0.05$ 的检验；

（2）求此检验的势函数$\beta(\lambda)$在$\lambda=0.05, 0.2, 0.3, \cdots, 0.9$ 时的值，并据此画出$\beta(\lambda)$的图像.

解：（1）因 $n\overline{X}=X_1+X_2+\cdots+X_{30}\sim P(30\lambda)$，

假设 H_0：$\lambda\le0.1$ vs H_1：$\lambda>0.1$，

统计量 $n\overline{X}\sim P(30\lambda)$，

当 H_0 成立时，设 $n\overline{X}\sim P(3)$，其 p 分位数 $P_p(3)$ 满足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{P_p(3)-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}<p\le\sum_{k=0}^{P_p(3)}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$

显著水平$\alpha=0.05$，可得 $P_{1-\alpha}(3)=P_{0.95}(3)=6$，右侧拒绝域$W=\{n\overline{x}\ge7\}$；

（2）因 $\beta(\lambda)=P\{n\overline{X}\in W\mid\lambda\}=P\{n\overline{X}\ge7\mid\lambda\}=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}$，

故 $\beta(0.05)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{1.5^k}{k!}\mathrm{e}^{-1.5}=0.0001$， $\beta(0.2)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{6^k}{k!}\mathrm{e}^{-6}=0.3937$，

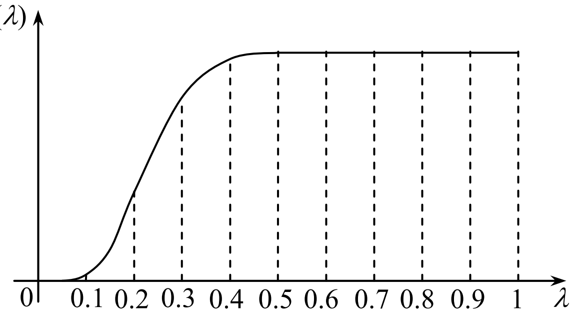
$\beta(0.3)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{9^k}{k!}\mathrm{e}^{-9}=0.7932$， $\beta(0.4)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{12^k}{k!}\mathrm{e}^{-12}=0.9542$，

$\beta(0.5)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{15^k}{k!}\mathrm{e}^{-15}=0.9924$， $\beta(0.6)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{18^k}{k!}\mathrm{e}^{-18}=0.9990$，

$\beta(0.7)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{21^k}{k!}\mathrm{e}^{-21}=0.9999$，

$\beta(0.8)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{24^k}{k!}\mathrm{e}^{-24}\approx 1$，

$\beta(0.9)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{27^k}{k!}\mathrm{e}^{-27}\approx 1$.



习题 7.2

说明：本节习题均采用拒绝域的形式完成，在可以计算检验的 p 值时要求计算出 p 值.

1. 有一批枪弹，出厂时，其初速率 $v\sim N(950,\ 1000)$（单位：m/s）. 经过较长时间储存，取 9 发进行测试，得样本值（单位：m/s）如下：

   914　920　910　934　953　945　912　924　940.

   据经验，枪弹经储存后其初速率仍服从正态分布，且标准差保持不变，问是否可认为这批枪弹的初速率有显著降低（$\alpha = 0.05$）？

解：设枪弹经储存后其初速率 $X\sim N(\mu,\ 1000)$，假设 H_0：$\mu = 950$　vs　H_1：$\mu < 950$，

已知 σ^2，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.645$，左侧拒绝域 $W=\{u\le -1.645\}$，
因 $\bar{x}=928$，$\mu = 950$，$\sigma = 10$，$n = 9$，

则 $u=\dfrac{928-950}{10/\sqrt{9}}=-6.6\in W$，并且检验的 p 值 $p=P\{U\le -6.6\}=2.0558\times 10^{-11}<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为这批枪弹的初速率有显著降低.

2. 已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55,\ 0.108^2)$. 现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.484，如果铁水含碳量的方差没有变化，可否认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55（$\alpha = 0.05$）？

解：设现在生产的铁水含碳量 $X\sim N(\mu,\ 0.108^2)$，假设 H_0：$\mu = 4.55$　vs　H_1：$\mu\ne 4.55$，

已知 σ^2，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，双侧拒绝域 $W=\{|u|\ge 1.96\}$，
因 $\bar{x}=4.484$，$\mu = 4.55$，$\sigma = 0.108$，$n = 9$，

则 $u=\dfrac{4.484-4.55}{0.108/\sqrt{9}}=-1.8333\notin W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{U\le -1.8333\}=0.0668>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55.

3． 由经验知某零件质量 $X \sim N(15, 0.05^2)$ （单位：g），技术革新后，抽出 6 个零件，测得质量为

14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6.

已知方差不变，问平均质量是否仍为 15 g（取 $\alpha = 0.05$）？

解：设技术革新后零件质量 $X \sim N(\mu, 0.05^2)$，假设 H_0：$\mu = 15$ vs H_1：$\mu \neq 15$，

已知 σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \geq 1.96\}$，

因 $\bar{x} = 14.9$，$\mu = 15$，$\sigma = 0.05$，$n = 6$，

则 $u = \dfrac{14.9 - 15}{0.05/\sqrt{6}} = -4.8990 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \leq -4.8990\} = 9.6326 \times 10^{-7} < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为平均质量仍为 15 g .

4． 化肥厂用自动包装机包装化肥，每包的质量服从正态分布，其平均质量为 100 kg，标准差为 1.2 kg．某日开工后，为了确定这天包装机工作是否正常，随机抽取 9 袋化肥，称得质量如下：

99.3 98.7 100.5 101.2 98.3 99.7 99.5 102.1 100.5.

设方差稳定不变，问这一天包装机的工作是否正常（取 $\alpha = 0.05$）？

解：设这天包装机包装的化肥每包的质量 $X \sim N(\mu, 1.2^2)$，假设 H_0：$\mu = 100$ vs H_1：$\mu \neq 100$，

已知 σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \geq 1.96\}$，

因 $\bar{x} = 99.9778$，$\mu = 100$，$\sigma = 1.2$，$n = 9$，

则 $u = \dfrac{99.9778 - 100}{1.2/\sqrt{9}} = -0.0556 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \leq -0.0556\} = 0.9557 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这一天包装机的工作正常.

5． 设需要对某正态总体的均值进行假设检验

H_0：$\mu = 15$， H_1：$\mu < 15$.

已知 $\sigma^2 = 2.5$，取 $\alpha = 0.05$，若要求当 H_1 中的 $\mu \leq 13$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.05，求所需的样本容量.

解：设该总体 $X \sim N(\mu, 2.5)$，假设 H_0：$\mu = 15$ vs H_1：$\mu < 15$，

已知 σ^2，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W = \{u \leq -1.645\}$，

因 $\mu = 15$，$\sigma^2 = 2.5$，有 $u = \dfrac{\bar{x} - 15}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}}$，

当 $\mu \leq 13$ 时犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\left\{\frac{\overline{X} - 15}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 \mid \mu \leq 13\right\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 + \frac{15 - \mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} \mid \mu \leq 13\right\}$$

$$\leq P\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}} > -1.65 + \frac{15 - 13}{\sqrt{2.5}/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \Phi(-1.65 + 1.2649\sqrt{n}) \leq 0.05,$$

则 $\Phi(-1.65+1.2649\sqrt{n})\ge 0.95$，即 $-1.65+1.2649\sqrt{n}\ge 1.65$，$\sqrt{n}\ge 2.6089$，$n\ge 6.8064$，

故样本容量 n 至少为 7.

6. 从一批钢管抽取 10 根，测得其内径（单位：mm）为：

100.36　100.31　99.99　100.11　100.64　100.85　99.42　99.91　99.35　100.10.

设这批钢管内直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试分别在下列条件下检验假设（$\alpha=0.05$）.

H_0：$\mu=100$ vs H_1：$\mu>100$.

（1）已知 $\sigma=0.5$；

（2）σ 未知.

解：设这批钢管内直径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=100$ vs H_1：$\mu>100$，

（1）已知 σ^2，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.645$，右侧拒绝域 $W=\{u\ge 1.645\}$，
因 $\bar{x}=100.104$，$\mu=100$，$\sigma=0.5$，$n=10$，

则 $u=\dfrac{100.104-100}{0.5/\sqrt{10}}=0.6578\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{U\ge 0.6578\}=0.2553>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即不能认为 $\mu>100$.

（2）未知 σ^2，选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(9)=1.8331$，右侧拒绝域 $W=\{t\ge 1.8331\}$，
因 $\bar{x}=100.104$，$\mu=100$，$s=0.4760$，$n=10$，

则 $t=\dfrac{100.104-100}{0.4760/\sqrt{10}}=0.6910\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{T\ge 0.6910\}=0.2535>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即不能认为 $\mu>100$.

7. 假定考生成绩服从正态分布，在某地一次数学统考中，随机抽取了 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？

解：设这次考试考生的成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=70$ vs H_1：$\mu\ne 70$，

未知 σ^2，选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301$，双侧拒绝域 $W=\{|t|\ge 2.0301\}$，
因 $\bar{x}=66.5$，$\mu=70$，$s=15$，$n=36$，

则 $t=\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4\notin W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{T\le -1.4\}=0.1703>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

8. 一个小学校长在报纸上看到这样的报道："这一城市的初中学生平均每周看 8 h 电视."她认为她所在学校的学生看电视的时间明显小于该数字．为此她在该校随机调查了 100 个学生，得知平均每周看电视的时间 $\bar{x}=6.5\,\text{h}$，样本标准差为 $s=2\,\text{h}$．问是否可以认为这位校长的看法是对的（取 $\alpha=0.05$）？

解：设学生看电视的时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=8$ vs H_1：$\mu<8$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$n=100$，大样本，有$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\dot{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(99)\approx u_{0.95}=1.645$，左侧拒绝域$W\approx\{t\le -1.645\}$，

因$\bar{x}=6.5$，$\mu=8$，$s=2$，$n=100$，

则$t=\dfrac{6.5-8}{2/\sqrt{100}}=-7.5\in W$，并且检验的$p$值$p=P\{T\le -7.5\}=3.1909\times 10^{-14}<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为这位校长的看法是对的．

9．设在木材中抽出 100 根，测其小头直径，得到样本平均数$\bar{x}=11.2$ cm，样本标准差为$s=2.6$ cm，问该批木材小头的平均直径能否认为不低于 12 cm（取$\alpha=0.05$）？

解：设该批木材小头的直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=12$ vs H_1：$\mu<12$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$n=100$，大样本，有$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\dot{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(99)\approx u_{0.95}=1.645$，左侧拒绝域$W\approx\{t\le -1.645\}$，

因$\bar{x}=11.2$，$\mu=12$，$s=2.6$，$n=100$，

则$t=\dfrac{11.2-12}{2.6/\sqrt{100}}=-3.0769\in W$，并且检验的$p$值$p=P\{T\le -3.0769\}=0.0010<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为这批木材小头的平均直径不低于 12 cm．

10．考察一鱼塘中鱼的含汞量，随机地取 10 条鱼测得各条鱼的含汞量（单位：mg）为：

0.8　1.6　0.9　0.8　1.2　0.4　0.7　1.0　1.2　1.1．

设鱼的含汞量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，试检验假设 H_0：$\mu=1.2$ vs H_1：$\mu>1.2$（取$\alpha=0.10$）．

解：设鱼的含汞量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=1.2$ vs H_1：$\mu>1.2$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.1$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.9}(9)=1.3830$，右侧拒绝域$W=\{t\ge 1.3830\}$，

因$\bar{x}=0.97$，$\mu=1.2$，$s=0.3302$，$n=10$，

则$t=\dfrac{0.97-1.2}{0.3302/\sqrt{10}}=-2.2030\notin W$，并且检验的$p$值$p=P\{T\ge -2.2030\}=0.9725>\alpha=0.10$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即不能认为$\mu>1.2$．

11．如果一个矩形的宽度w与长度l的比$\dfrac{w}{l}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形．下面列出某工艺品工厂随机取的 20 个矩形宽度与长度的比值．

0.693　0.749　0.654　0.670　0.662　0.672　0.615　0.606　0.690　0.628

0.668　0.611　0.606　0.609　0.553　0.570　0.844　0.576　0.933　0.630．

设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值总体服从正态分布，其均值为μ，试检验假设（取$\alpha=0.05$）

H_0：$\mu=0.618$ vs H_1：$\mu\ne 0.618$．

解：设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设 H_0：$\mu=0.618$ vs H_1：$\mu\ne 0.618$，

未知σ^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(19)=2.0930$，双侧拒绝域$W=\{|t|\ge 2.0930\}$，

因 $\bar{x}=0.6620$，$\mu=0.618$，$s=0.0918$，$n=20$，

则 $t=\dfrac{0.6620-0.618}{0.0918/\sqrt{20}}=2.1422\in W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{T\ge 2.1422\}=0.0453<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即不能认为 $\mu=0.618$．

12．下面给出两种型号的计算器充电以后所能使用的时间（h）的观测值

型号 A　5.5　5.6　6.3　4.6　5.3　5.0　6.2　5.8　5.1　5.2　5.9；

型号 B　3.8　4.3　4.2　4.0　4.9　4.5　5.2　4.8　4.5　3.9　3.7　4.6．

设两样本独立且数据所属的两总体的密度函数至多差一个平移量．试问能否认为型号 A 的计算器平均使用时间明显比型号 B 来得长（取 $\alpha=0.01$）？

解：设两种型号的计算器充电以后所能使用的时间分别为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1>\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平 $\alpha=0.01$，$t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)=t_{0.99}(21)=2.5176$，右侧拒绝域 $W=\{t\ge 2.5176\}$，

因 $\bar{x}=5.5$，$\bar{y}=4.3667$，$s_x=0.5235$，$s_y=0.4677$，$n_1=11$，$n_2=12$，

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{10\times0.5235^2+11\times0.4677^2}{21}}=0.4951,$$

则 $t=\dfrac{5.5-4.3667}{0.4951\times\sqrt{\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}}}=5.4844\in W$，并且检验的 p 值 $p=P\{T\ge 5.4844\}=9.6391\times10^{-6}<\alpha=0.01$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为型号 A 的计算器平均使用时间明显比型号 B 来得长．

13．从某锌矿的东、西两支矿脉中，各抽取样本容量分别为 9 与 8 的样本进行测试，得样本含锌平均数及样本方差如下：

东支：$\bar{x}_1=0.230,\ s_1^2=0.1337$；

西支：$\bar{x}_2=0.269,\ s_2^2=0.1736$．

若东、西两支矿脉的含锌量都服从正态分布且方差相同，问东、西两支矿脉含锌量的平均值是否可以看作一样（取 $\alpha=0.05$）？

解：设东、西两支矿脉的含锌量分别为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1\ne\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(15)=2.1314$，双侧拒绝域 $W=\{|t|\ge 2.1314\}$，

因 $\bar{x}_1=0.230,\ s_1^2=0.1337,\ \bar{x}_2=0.269,\ s_2^2=0.1736$，$n_1=9$，$n_2=8$，

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{8\times0.1337+7\times0.1736}{15}}=0.3903,$$

则$t=\dfrac{0.230-0.269}{0.3903\times\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}}}=-0.2056\notin W$，并且检验的$p$值$p=2P\{T\le -0.2056\}=0.8399>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为东、西两支矿脉含锌量的平均值是一样的.

14．在针织品漂白工艺过程中，要考察温度对针织品断裂强力（主要质量指标）的影响．为了比较 70°C 与 80°C 的影响有无差别，在这两个温度下，分别重复做了 8 次试验，得数据如下（单位：N）：

70°C 时的强力：20.5　18.8　19.8　20.9　21.5　19.5　21.0　21.2，

80°C 时的强力：17.7　20.3　20.0　18.8　19.0　20.1　20.0　19.1．

根据经验，温度对针织品断裂强力的波动没有影响．问在 70°C 时的平均断裂强力与 80°C 时的平均断裂强力间是否有显著差别？（假设断裂强力服从正态分布，$\alpha=0.05$）

解：设在 70°C 和 80°C 时的断裂强力分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1\ne\mu_2$，

未知σ_1^2,σ_2^2，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(14)=2.1448$，双侧拒绝域$W=\{|t|\ge 2.1448\}$，

因$\bar{x}=20.4$，$\bar{y}=19.375$，$s_x=0.9411$，$s_y=0.8876$，$n_1=8$，$n_2=8$，

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{7\times0.9411^2+7\times0.8876^2}{14}}=0.9148,$$

则$t=\dfrac{20.4-19.375}{0.9148\times\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}}}=2.2410\in W$，并且检验的$p$值$p=2P\{T\ge 2.2410\}=0.0418<\alpha=0.05$，

故拒绝H_0，接受H_1，即可以认为 70°C 时的平均断裂强力与 80°C 时的平均断裂强力间有显著差别.

15．一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

H_0：$\mu_1=2\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1>2\mu_2$.

此处μ_1,μ_2分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔的总体的均值．设两总体均为正态分布且方差分别为已知值σ_1^2,σ_2^2，现分别在两总体中取一样本$X_1,\cdots,X_n$和$Y_1,\cdots,Y_m$，设两个样本独立．试给出上述假设检验问题的检验统计量及拒绝域.

解：设服用原有止痛片和新止痛片后至开始起作用的时间间隔分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

因$X_1,\cdots,X_n$和$Y_1,\cdots,Y_m$分别X和Y为来自的样本，且两个样本独立，

则$\overline{X}\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n})$，$\overline{Y}\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{m})$，且$\overline{X}$与$\overline{Y}$独立，有$\overline{X}-2\overline{Y}\sim N(\mu_1-2\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{4\sigma_2^2}{m})$，

标准化，得$\dfrac{(\overline{X}-2\overline{Y})-(\mu_1-2\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{4\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$，

假设H_0：$\mu_1=2\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1>2\mu_2$，

已知σ_1^2,σ_2^2，选取统计量$U=\dfrac{\overline{X}-2\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{4\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$，

显著性水平α，右侧拒绝域$W=\{u\ge u_{1-\alpha}\}$.

16．对冷却到–0.72°C的样品用A、B两种测量方法测量其融化到0°C时的潜热，数据如下：

方法A：79.98　80.04　80.02　80.04　80.03　80.03　80.04　79.97　80.05　80.03　80.02　80.00　80.02，

方法B：80.02　79.94　79.98　79.97　80.03　79.95　79.97　79.97.

假设它们服从正态分布，方差相等，试检验：两种测量方法的平均性能是否相等？（取$\alpha=0.05$）.

解：设用A、B两种测量方法测量的潜热分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，

假设H$_0$：$\mu_1=\mu_2$　vs　H$_1$：$\mu_1\ne\mu_2$，

未知σ_1^2,σ_2^2，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(19)=2.0930$，双侧拒绝域$W=\{|t|\ge 2.0930\}$，

因$\bar{x}=80.0208$，$\bar{y}=79.9787$，$s_x=0.0240$，$s_y=0.0.314$，$n_1=8$，$n_2=8$，

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{12\times 0.0240^2+7\times 0.0314^2}{19}}=0.0269,$$

则$t=\dfrac{80.0208-79.9787}{0.0269\times\sqrt{\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{8}}}=3.4722\in W$，并且检验的$p$值$p=2P\{T\ge 3.4722\}=0.0026<\alpha=0.05$，

故拒绝H$_0$，接受H$_1$，可以认为两种测量方法的平均性能不相等.

17．为了比较测定活水中氯气含量的两种方法，特在各种场合收集到8个污水样本，每个水样均用这两种方法测定氯气含量（单位：mg/1)，具体数据如下：

水样号	方法一（x）	方法二（y）	差（$d=x-y$）
1	0.36	0.39	–0.03
2	1.35	0.84	0.51
3	2.56	1.76	0.80
4	3.92	3.35	0.57
5	5.35	4.69	0.66
6	8.33	7.70	0.63
7	10.70	10.52	0.18
8	10.91	10.92	–0.01

设总体为正态分布，试比较两种测定方法是否有显著差异．请写出检验的p值和结论（取$\alpha=0.05$）.

解：设用这两种测定方法测定的氯气含量之差为$D=X-Y\sim N(\mu_d,\sigma_d^2)$，成对数据检验，

假设H$_0$：$\mu_d=0$　vs　H$_1$：$\mu_d\ne 0$，

未知σ_d^2，选取统计量$T=\dfrac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

显著水平$\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(7)=2.3646$，双侧拒绝域$W=\{|t|\ge 2.3646\}$，

因$\bar{d}=0.4138$，$s_d=0.3210$，$n=8$，

则$t=\dfrac{0.4138}{0.3210/\sqrt{8}}=3.6461\in W$，并且检验的$p$值$p=2P\{T\ge 3.6461\}=0.0082<\alpha=0.05$，

故拒绝H$_0$，接受H$_1$，可以认为两种测定方法有显著差异.

18．一工厂的；两个化验室每天同时从工厂的冷却水取样，测量水中的含气量（10^{-6}）一次，下面是 7 天的记录：

室甲：1.15　1.86　0.75　1.82　1.14　1.65　1.90，

室乙：1.00　1.90　0.90　1.80　1.20　1.70　1.95．

设每对数据的差 $d_i = x_i - y_i$　$(i = 1, 2, \cdots, 7)$来自正态总体，问两化验室测定结果之间有无显著差异？（$\alpha = 0.01$）

解：设两个化验室测定的含气量数据之差为 $D = X - Y \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$，成对数据检验，

假设 H_0：$\mu_d = 0$　vs　H_1：$\mu_d \neq 0$，

未知 σ_d^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{D}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.01$，$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.995}(6) = 3.7074$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \geq 3.7074\}$，

因 $\bar{d} = -0.0257$，$s_d = 0.0922$，$n = 7$，

则 $t = \dfrac{-0.0257}{0.0922/\sqrt{7}} = -0.7375 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{T \leq -0.7375\} = 0.4886 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，可以认为两化验室测定结果之间没有显著差异．

19．为比较正常成年男女所含红血球的差异，对某地区 156 名成年男性进行测量，其红血球的样本均值为 465.13（$10^4/\text{mm}^3$），样本方差为 54.80^2；对该地区 74 名成年女性进行测量，其红血球的样本均值为 422.16，样本方差为 49.20^2．试检验：该地区正常成年男女所含红血球的平均值是否有差异？（取 $\alpha = 0.05$）

解：设该地区正常成年男女所含红血球分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$　vs　H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$，

未知 σ_1^2, σ_2^2，大样本场合，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1} + \dfrac{S_y^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|t| \geq 1.96\}$，

因 $\bar{x} = 465.13,\ s_x^2 = 54.80^2,\ \bar{y} = 422.16,\ s_y^2 = 49.20^2$，$n_1 = 156$，$n_2 = 74$，

则 $u = \dfrac{465.13 - 422.16}{\sqrt{\dfrac{54.80^2}{156} + \dfrac{49.20^2}{74}}} = 5.9611 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \geq 5.9611\} = 2.5055 \times 10^{-9} < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为该地区正常成年男女所含红血球的平均值有差异．

20．为比较不同季节出生的女婴体重的方差，从去年 12 月和 6 月出生的女婴中分别随机地抽取 6 名及 10 名，测其体重如下（单位：g）：

12 月：3520　2960　2560　2960　3260　3960，

6 月：3220　3220　3760　3000　2920　3740　3060　3080　2940　3060．

假定新生女婴体重服从正态分布，问新生女婴体重的方差是否是冬季的比夏季的小（取 $\alpha = 0.05$）？

解：设 12 月和 6 月出生的女婴体重分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　vs　H_1：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$，

选取统计量$F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

显著水平$\alpha=0.05$，$F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(5,9)=\dfrac{1}{F_{0.95}(9,5)}=\dfrac{1}{4.77}=0.21$，左侧拒绝域$W=\{f\le 0.21\}$，

因$s_x^2=491.5960^2$，$s_y^2=306.5217^2$，

则$f=\dfrac{491.5960^2}{306.5217^2}=2.5721\notin W$，并且检验的$p$值$p=P\{F\le 2.5721\}=0.8967>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，新生女婴体重的方差冬季的不比夏季的小.

21．已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布，且标准差为 0.048．从某天产品中抽取 5 根纤维，测得其纤度为

1.32　1.55　1.36　1.40　1.44

问这一天纤度的总体标准差是否正常（取$\alpha=0.05$）？

解：设这一天维尼纶纤度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\sigma^2=0.048^2$　vs　H_1：$\sigma^2\ne 0.048^2$，

选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(4)=0.4844$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(4)=11.1433$，

双侧拒绝域$W=\{\chi^2\le 0.4844$ 或 $\chi^2\ge 11.1433\}$，

因$\sigma^2=0.048^2$，$s^2=0.0882^2$，$n=5$，

则$\chi^2=\dfrac{4\times 0.0882^2}{0.048^2}=13.5069\in W$，并且检验的$p$值$p=2P\{\chi^2\ge 13.5069\}=0.0181<\alpha=0.05$，

故拒绝H_0，接受H_1，即可以认为这一天纤度的总体方差不正常.

22．某电工器材厂生产一种保险丝．测量其熔化时间，依通常情况方差为 400，今从某天产品中抽取容量为 25 的样本，测量其熔化时间并计算得$\bar{x}=62.24$，$s^2=404.77$，问这天保险丝熔化时间分散度与通常有无显著差异（取$\alpha=0.05$，假定熔化时间服从正态分布）？

解：设这天保险丝熔化时间分散度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\sigma^2=400$　vs　H_1：$\sigma^2\ne 400$，

选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(24)=12.4012$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(24)=39.3641$，

双侧拒绝域$W=\{\chi^2\le 12.4012$ 或 $\chi^2\ge 39.3641\}$，

因$\sigma^2=400$，$s^2=404.77$，$n=25$，

则$\chi^2=\dfrac{24\times 404.77}{400}=24.2862\notin W$，并且检验的$p$值$p=2P\{\chi^2\ge 24.2862\}=0.8907>\alpha=0.05$，

故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为这天保险丝熔化时间分散度与通常没有显著差异.

23．某种导线的质量标准要求其电阻的标准差不得超过 0.005（Ω）．今在一批导线中随机抽取样品 9 根，测得样本标准差$s=0.007$（Ω），设总体为正态分布．问在显著水平$\alpha=0.05$下，能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解：设这批导线的电阻$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假设H_0：$\sigma^2=0.005^2$　vs　H_1：$\sigma^2>0.005^2$，

选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

显著性水平$\alpha=0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(8)=15.5073$，右侧拒绝域$W=\{\chi^2\ge 15.5073\}$，

因$\sigma^2 = 0.005^2$，$s^2 = 0.007^2$，$n = 9$，

则$\chi^2 = \dfrac{8\times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 15.68\} = 0.0472 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为这批导线的标准差显著地偏大.

24．两台车床生产同一种滚珠，滚珠直径服从正态分布．从中分别抽取 8 个和 9 个产品，测得其直径为

甲车床：15.0　14.5　15.2　15.5　14.8　15.1　15.2　14.8；

乙车床：15.2　15.0　14.8　15.2　15.0　15.0　14.8　15.1　14.8．

比较两台车床生产的滚珠直径的方差是否有明显差异（取$\alpha = 0.05$）.

解：设两台车床生产的滚珠直径分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　vs　H_1：$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$，

选取统计量 $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(7, 8) = \dfrac{1}{F_{0.975}(8, 7)} = \dfrac{1}{4.9} = 0.2041$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.975}(7, 8) = 4.53$，双侧拒绝域 $W = \{F \le 0.2041$ 或 $F \ge 4.53\}$，

因 $s_x^2 = 0.3091^2$，$s_y^2 = 0.1616^2$，

则 $F = \dfrac{0.3091^2}{0.1616^2} = 3.6591 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{F \ge 3.6591\} = 0.0892 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两台车床生产的滚珠直径的方差没有明显差异.

25．有两台机器生产金属部件，分别在两台机器所生产的部件中各取一容量为 $m = 14$ 和 $n = 12$ 的样本，测得部件质量的样本方差分别为 $s_1^2 = 15.46$，$s_2^2 = 9.66$，设两样本相互独立，试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 下检验假设

H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　vs　H_1：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

解：设两台机器生产金属部件质量分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　vs　H_1：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$，

选取统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m - 1, n - 1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$F_{1-\alpha}(m - 1, n - 1) = F_{0.95}(13, 11) = 2.7614$，右侧拒绝域 $W = \{F \ge 2.7614\}$，

因 $s_1^2 = 15.46$，$s_2^2 = 9.66$，

则 $F = \dfrac{15.46}{9.66} = 1.6004 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{F \ge 1.6004\} = 0.2206 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

26．测得两批电子器件的样品的电阻（单位：Ω）为

A 批（x）　0.140　0.138　0.143　0.142　0.144　0.137；

B 批（y）　0.135　0.140　0.142　0.136　0.138　0.140.

设这两批器材的电阻值分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两样本独立.

（1）试检验两个总体的方差是否相等（取$\alpha = 0.05$）？
（2）试检验两个总体的均值是否相等（取$\alpha = 0.05$）？

解：设两批电子器件样品的电阻分别为 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

（1）假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$　vs　H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，

选取统计量 $F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$， $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(5,5)=\dfrac{1}{F_{0.975}(5,5)}=\dfrac{1}{7.15}=0.1399$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(5,5)=7.15$，双侧拒绝域 $W=\{F\le 0.1399 \text{ 或 } F\ge 7.15\}$，

因 $s_x^2=0.002805^2$， $s_y^2=0.002665^2$，

则 $F=\dfrac{0.002805^2}{0.002665^2}=1.1080\notin W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{F\ge 1.1080\}=0.9131>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两个总体的方差相等；

（2）假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1\neq\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.975}(10)=2.2281$，双侧拒绝域 $W=\{|t|\ge 2.2281\}$，

因 $\bar{x}=0.1407$， $\bar{y}=0.1385$，$s_x=0.002805$，$s_y=0.002665$，$n_1=6$，$n_2=6$，

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{5\times 0.002805^2+5\times 0.002665^2}{10}}=0.002736,$$

则 $t=\dfrac{0.1407-0.1385}{0.002736\times\sqrt{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}}}=1.3718\notin W$，并且检验的 p 值 $p=2P\{T\ge 1.3718\}=0.2001>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两个总体的均值相等.

27. 某厂使用两种不同的原料生产同一类型产品，随机选取使用原料 A 生产的样品 22 件，测得平均质量为 2.36（kg），样本标准差为 0.57（kg）. 取使用原料 B 生产的样品 24 件，测得平均质量为 2.55（kg），样本标准差为 0.48（kg）. 设产品质量服从正态分布，两个样本独立. 问能否认为使用原料 B 生产的产品质量较使用原料 A 显著大（取$\alpha = 0.05$）？

解：设两种原料生产的产品质量分别为 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$　vs　H_1：$\mu_1<\mu_2$，

未知 σ_1^2,σ_2^2，大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}\dot{\sim} N(0,1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W \approx \{u \le -1.645\}$，
因 $\bar{x} = 2.36$，$\bar{y} = 2.55$，$s_x = 0.57$，$s_y = 0.48$，$n_1 = 22$，$n_2 = 24$，

有 $u = \dfrac{2.36 - 2.55}{\sqrt{\dfrac{0.57^2}{22} + \dfrac{0.48^2}{24}}} = -1.2171 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \le -1.2171\} = 0.1118 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为使用原料 B 生产的产品质量较使用原料 A 不是显著大.

习题 7.3

1． 从一批服从指数分布的产品中抽取 10 个进行寿命测试，观测值如下（单位：h）：

1643　1629　426　132　1522　432　1759　1074　528　283

根据这批数据能否认为其平均寿命不低于 1100 h（取$\alpha = 0.05$）？

解：设这批产品的寿命 $X \sim Exp(1/\theta)$，假设 H_0：$\theta = 1100$ vs H_1：$\theta < 1100$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\overline{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_\alpha(2n) = \chi^2_{0.05}(20) = 10.8508$，左侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 10.8508\}$，

因 $\bar{x} = 942.8$，$n = 10$，$\theta = 1100$，

则 $\chi^2 = \dfrac{2 \times 10 \times 942.8}{1100} = 17.1418 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \le 17.1418\} = 0.3563 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为其平均寿命不低于 1100 h.

2． 某厂一种元件平均使用寿命为 1200 h，偏低，现厂里进行技术革新，革新后任选 8 个元件进行寿命试验，测得寿命数据如下：

2686　2001　2082　792　1660　4105　1416　2089

假定元件寿命服从指数分布，取$\alpha = 0.05$，问革新后元件的平均寿命是否有明显提高？

解：设革新后元件的寿命 $X \sim Exp(1/\theta)$，假设 H_0：$\theta = 1200$ vs H_1：$\theta > 1200$，

选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{2n\overline{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}(2n) = \chi^2_{0.95}(16) = 26.2962$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 26.2962\}$，

因 $\bar{x} = 2103.875$，$n = 8$，$\theta = 1200$，

则 $\chi^2 = \dfrac{2 \times 8 \times 2103.875}{1200} = 28.0517 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 28.0517\} = 0.0312 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为革新后元件的平均寿命有明显提高.

3． 有人称某地成年人中大学毕业生比例不低于 30%，为检验之，随机调查该地 15 名成年人，发现有 3 名大学毕业生，取$\alpha = 0.05$，问该人看法是否成立？并给出检验的 p 值.

解：设该地 n 名成年人中大学毕业生人数为 $n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，有 $n\overline{X} \sim b(n, p)$，

假设 H_0：$p = 0.3$ vs H_1：$p < 0.3$，

选取统计量 $n\overline{X} \sim b(n, p)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，$p = 0.3$，

有 $\sum_{k=0}^{1} C_{15}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{15-k} = 0.0353 < 0.05 < \sum_{k=0}^{2} C_{15}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{15-k} = 0.1268$，左侧拒绝域 $W = \{n\bar{x} \le 1\}$，

因 $n\bar{x}=3\notin W$ ，并且检验的 p 值 $p=P\{n\bar{X}\le 3\}=\sum_{k=0}^{3}C_{15}^{k}\cdot 0.3^{k}\cdot 0.7^{15-k}=0.2969$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为该人看法成立.

4. 某大学随机调查 120 名男同学，发现有 50 人非常喜欢看武侠小说，而随机调查的 85 名女同学中有 23 人喜欢，用大样本检验方法在 $\alpha = 0.05$ 下确认：男女同学在喜爱武侠小说方面有无显著差异？并给出检验的 p 值.

解：设 n_1 名男同学中有 $n_1\bar{X}=\sum_{i=1}^{n_1}X_i$ 人喜欢看武侠小说，n_2 名女同学中有 $n_2\bar{Y}=\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$ 人喜欢看武侠小说，

有 $n_1\bar{X}\sim B(n_1,p_1)$，$n_2\bar{Y}\sim B(n_2,p_2)$，大样本，有 $\bar{X}\,\dot{\sim}\, N\left(p_1,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$，$\bar{Y}\,\dot{\sim}\, N\left(p_2,\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

则 $\bar{X}-\bar{Y}\,\dot{\sim}\, N\left(p_1-p_2,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，即 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\,\dot{\sim}\, N(0,1)$，

当 $p_1 = p_2 = p$ 但未知时，此时用总频率 $\hat{p}=\dfrac{n_1\bar{X}+n_2\bar{Y}}{n_1+n_2}$ 作为 p 的点估计替换 p，在大样本场合，有

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\,\dot{\sim}\, N(0,1),$$

假设 H_0：$p_1 = p_2$ vs H_1：$p_1 \ne p_2$，

大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\,\dot{\sim}\, N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$，

因 $n_1 = 120$，$n_2 = 85$，$n_1\bar{x}=50$，$n_2\bar{y}=23$，有 $\hat{p}=\dfrac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2}=\dfrac{50+23}{120+85}=0.3561$，

则 $u=\dfrac{\dfrac{50}{120}-\dfrac{23}{85}}{\sqrt{0.3561\times(1-0.3561)}\sqrt{\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{85}}}=2.1519\in W$，

并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \ge 2.1519\} = 0.0314 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，可以认为男女同学在喜爱武侠小说方面有显著差异.

5. 假定电话总机在单位时间内接到的呼叫次数服从泊松分布，现观测了 40 个单位时间，接到的呼叫次数如下：

0 2 3 2 3 2 1 0 2 2 1 2 2 1 3 1 1 4 1 1

5 1 2 2 3 3 1 3 1 3 4 0 6 1 1 1 4 0 1 3.

在显著性水平 0.05 下能否认为单位时间内平均呼叫次数不低于 2.5 次？并给出检验的 p 值.

解：设电话总机在单位时间内接到的呼叫次数 $X\sim P(\lambda)$，有 $n\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$，

大样本，有 $\dfrac{n\overline{X}-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\dot\sim N(0,1)$，

假设 H_0：$\lambda = 2.5$ vs H_1：$\lambda < 2.5$，

大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\dot\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，左侧拒绝域 $W = \{u \le -1.645\}$，
因 $\bar{x}=1.975$，$n = 40$，$\lambda = 2.5$，

则 $u=\dfrac{1.975-2.5}{\sqrt{2.5/40}}=-2.1\in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \le -2.1\} = 0.0179 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，不能认为单位时间内平均呼叫次数不低于 2.5 次；

6. 通常每平方米某种布上的疵点数服从泊松分布，现观测该种布 100 m^2，发现有 126 个疵点，在显著性水平 0.05 下能否认为该种布每平方米上平均疵点数不超过 1 个？并给出检验的 p 值.

解：设每平方米该种布上的疵点数 $X \sim P(\lambda)$，有 $n\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim P(n\lambda)$，

大样本，有 $\dfrac{n\overline{X}-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\dot\sim N(0,1)$，

假设 H_0：$\lambda = 1$ vs H_1：$\lambda > 1$，

大样本，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\dot\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，
因 $\bar{x}=1.26$，$n = 100$，$\lambda = 1$，

则 $u=\dfrac{1.26-1}{\sqrt{1/100}}=2.6\in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \ge 2.6\} = 0.0047 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，不能认为该种布每平方米上平均疵点数不超过 1 个；

7. 某厂的一批电子产品，其寿命 T 服从指数分布，其密度函数为

$$p(t;\theta)=\theta^{-1}\exp\{-t/\theta\}\,I_{t>0},$$

从以往生产情况知平均寿命 $\theta = 2000$ h．为检验当日生产是否稳定，任取 10 件产品进行寿命试验，到全部失效时停止．试验得失效寿命数据之和为 30200．试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0:\ \theta = 2000 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \theta \ne 2000.$$

解：假设 H_0：$\theta = 2000$ vs H_1：$\theta \ne 2000$，

选取统计量 $\chi^2=\dfrac{2n\overline{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(2n)=\chi^2_{0.025}(20)=9.5908$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)=\chi^2_{0.975}(20)=34.1696$，

双侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \le 9.5908$ 或 $\chi^2 \ge 34.1696\}$，

因 $\bar{x}=\dfrac{30200}{10}=3020$，$n = 10$，$\theta = 2000$，

则 $\chi^2=\dfrac{2\times10\times3020}{2000}=30.20\notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 30.20\} = 0.0667 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为其平均寿命等于 2000 h.

8． 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自两点分布 $b(1, p)$的随机样本.

（1）试求单侧假设检验问题 H_0：$p \le 0.01$ vs H_1：$p > 0.01$ 的显著水平 $\alpha = 0.05$ 的检验；

（2）若要这个检验在 $p = 0.08$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.10，样本容量 n 应为多大？

解：（1）假设 H_0：$p = 0.01$ vs H_1：$p > 0.01$，

若为小样本，选取统计量 $n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, p)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$p = 0.01$，

取 $c_2 = \min\left\{\sum_{k=c}^{n} C_n^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{n-k} \le 0.05\right\} = \min\left\{\sum_{k=0}^{c-1} C_n^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{n-k} \ge 0.95\right\}$，

当 $n \le 5$ 时，$c_2 = 1$；当 $6 \le n \le 35$ 时，$c_2 = 2$；当 $36 \le n \le 82$ 时，$c_2 = 3$；当 $83 \le n \le 137$ 时，$c_2 = 4$；

右侧拒绝域 $W = \{n\bar{x} \ge c_2\}$，

根据 $n\bar{x}$，作出决策；

若为大样本，选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \dot\sim N(0, 1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，

计算 u，作出决策；

（2）在 $p = 0.08$ 时，$n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, 0.08)$，

则犯第二类错误的概率

$$\beta = P\{n\overline{X} \notin W \mid p = 0.08\} = P\{n\overline{X} < c_2 \mid p = 0.08\} = \sum_{k=0}^{c_2-1} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} \le 0.10,$$

当 $n \le 5$ 时，$c_2 = 1$，$\beta = 0.92^n \ge 0.6591$；

当 $6 \le n \le 35$ 时，$c_2 = 2$，$\beta = \sum_{k=0}^{1} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} \ge 0.2184$；

当 $36 \le n \le 82$ 时，$c_2 = 3$，

若 $n = 64$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} = 0.1050$；若 $n = 65$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k} = 0.0991$；

故 $n \ge 65$.

9． 有一批电子产品共 50 台，产销双方协商同意找出一个检验方案，使得当次品率 $p \le p_0 = 0.04$ 时拒绝的概率不超过 0.05，而当 $p > p_1 = 0.30$ 时，接受的概率不超过 0.1，请你帮助找出适当的检验方案.

解：设这批电子产品中的次品数为 $n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，有 $n\overline{X} \sim b(n, p)$，

假设 H_0：$p = 0.04$ vs H_1：$p > 0.04$，

小样本，选取统计量 $n\overline{X} \sim b(n, p)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$p = 0.04$，

取 $c_2 = \min\left\{\sum_{k=c}^{n} C_n^k \cdot 0.04^k \cdot 0.96^{n-k} \le 0.05\right\} = \min\left\{\sum_{k=0}^{c-1} C_n^k \cdot 0.04^k \cdot 0.96^{n-k} \ge 0.95\right\}$，

当 $n = 1$ 时，$c_2 = 1$；当 $2 \le n \le 9$ 时，$c_2 = 2$；当 $10 \le n \le 21$ 时，$c_2 = 3$；当 $22 \le n \le 35$ 时，$c_2 = 4$；

当 $36 \le n \le 50$ 时，$c_2 = 5$；右侧拒绝域 $W = \{n\bar{x} \ge c_2\}$，

根据 $n\bar{x}$，作出决策；

在 $p = p_1 = 0.30$ 时，$n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, 0.30)$，

则犯第二类错误的概率

$$\beta = P\{n\bar{X} \notin W \mid p = 0.30\} = P\{n\bar{X} < c_2 \mid p = 0.30\} = \sum_{k=0}^{c_2-1} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} \le 0.10,$$

当 $n = 1$ 时，$c_2 = 1$，$\beta = 0.70$；

当 $2 \le n \le 9$ 时，$c_2 = 2$，$\beta = \sum_{k=0}^{1} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} \ge 0.1960$；

当 $10 \le n \le 21$ 时，$c_2 = 3$，

若 $n = 15$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} = 0.1268$；若 $n = 16$，$\beta = \sum_{k=0}^{2} C_n^k \cdot 0.30^k \cdot 0.70^{n-k} = 0.0994$；

故随机抽取 $n = 16$ 台该电子产品，当其中次品数小于 $c_2 = 3$ 时接受，次品数不小于 $c_2 = 3$ 时拒绝．

10．若在猜硬币正反面游戏中，某人在 100 次试猜中共猜中 60 次，你认为他是否有诀窍？（取 $\alpha = 0.05$）．

解：设在 $n = 100$ 次试猜中的猜中次数为 $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$p$ 为猜中的概率，有 $n\bar{X} \sim b(n, p)$，

假设 H_0：$p = 0.5$ vs H_1：$p > 0.5$，

大样本，选取统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \dot\sim N(0,1)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，双侧拒绝域 $W = \{u \ge 1.645\}$，

因 $n = 100$，$p = 0.5$，$\bar{x} = \dfrac{60}{100} = 0.6$，

则 $u = \dfrac{0.6 - 0.5}{\sqrt{0.5 \times 0.5/100}} = 2 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{U \ge 2\} = 0.0228 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为他有诀窍．

11．设有两工厂生产的同一种产品，要检验假设 H_0：它们的废品率 p_1, p_2 相同，在第一、二工厂的产品各抽取 $n_1 = 1500$ 个及 $n_2 = 1800$ 个，分别有废品 300 个及 320 个，问在 5%显著性水平上应接受还是拒绝 H_0．

解：设在抽取的第一、二工厂的 $n_1 = 1500$ 及 $n_2 = 1800$ 个产品中废品数分别为 $n_1\bar{X} = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$n_2\bar{Y} = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$，

则 $n_1\bar{X} \sim b(n_1, p_1)$，$n_2\bar{Y} \sim b(n_2, p_1)$，大样本，有 $\bar{X} \dot\sim N\left(p_1, \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$，$\bar{Y} \dot\sim N\left(p_2, \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

设两个总体相互独立，有 $\bar{X}-\bar{Y} \dot{\sim} N\left(p_1-p_2, \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$，

则 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$，

当 $p_1 = p_2 = p$ 但未知时，此时用总频率 $\hat{p}=\dfrac{n_1\bar{X}+n_2\bar{Y}}{n_1+n_2}$ 作为 p 的点估计替换 p，在大样本场合，有

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1),$$

假设 H_0：$p_1 = p_2$ vs H_1：$p_1 \ne p_2$，

选取统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，有 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，双侧拒绝域 $W = \{|u| \ge 1.96\}$，

因 $\bar{x}=\dfrac{300}{1500}=0.2$，$\bar{y}=\dfrac{320}{1800}=0.1778$，$n_1 = 1500$，$n_2 = 1800$，$\hat{p}=\dfrac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2}=\dfrac{300+320}{1500+1800}=0.1879$，

则 $u=\dfrac{0.2-0.1778}{\sqrt{0.1879\times 0.8121}\sqrt{\dfrac{1}{1500}+\dfrac{1}{1800}}}=1.4665 \notin W$，

并且检验的 p 值 $p = 2P\{U \ge 1.4665\} = 0.1425 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为它们的废品率 p_1, p_2 相同.

习题 7.4

1． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自 $b(1, p)$的样本，试求假设 H_0：$p = p_0$ vs H_1：$p \ne p_0$ 的似然比检验.

解：因样本联合密度函数为

$$p(x_1,\cdots,x_n;\,p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(1-\bar{x})},$$

则似然函数 $L(p)=p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(1-\bar{x})}$，有 $\ln L(p)=n\bar{x}\ln p+n(1-\bar{x})\ln(1-p)$，

令 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{n\bar{x}}{p}-\dfrac{n(1-\bar{x})}{1-p}=0$，得，即，

则 $\sup\limits_{p} p(x_1,\cdots,x_n;\,p)=\bar{x}^{n\bar{x}}(1-\bar{x})^{n(1-\bar{x})}$，

当 $p = p_0$ 时，似然函数 $p(x_1,\cdots,x_n;\,p)=p_0^{n\bar{x}}(1-p_0)^{n(1-\bar{x})}$，即 $\sup\limits_{p=p_0} p(x_1,\cdots,x_n;\,p)=p_0^{n\bar{x}}(1-p_0)^{n(1-\bar{x})}$，

故似然比检验统计量为 $\Lambda(X_1,\cdots,X_n)=\dfrac{\sup\limits_{p} p(X_1,\cdots,X_n;\,p)}{\sup\limits_{p=p_0} p(X_1,\cdots,X_n;\,p)}=\left(\dfrac{\bar{X}}{p_0}\right)^{n\bar{X}}\left(\dfrac{1-\bar{X}}{1-p_0}\right)^{n(1-\bar{X})}$.

2． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$的样本，试求假设 H_0：$\sigma^2 = \sigma_0^2$ vs H_1：$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ 的似然比检验.

解：因样本联合密度函数为

$$p(x_1, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

则似然函数 $L(\mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，

有 $\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)\cdot(-1) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0. \end{cases}$

得 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$，$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，

则 $\sup\limits_{\mu,\sigma^2} p(x_1, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{(n-1)s^2}{n}\right]^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$，

当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时，似然函数 $L(\mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_0^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，

有 $\ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma_0^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

令 $\frac{d\ln L}{d\mu} = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)\cdot(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0$，得 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$，

则 $\sup\limits_{\mu} p(x_1, \cdots, x_n; \mu, \sigma_0^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_0^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_0^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma_0^2}}$，

故似然比检验统计量为

$$\Lambda(X_1, \cdots, X_n) = \frac{\sup\limits_{\mu,\sigma^2} p(X_1, \cdots, X_n; \mu, \sigma^2)}{\sup\limits_{\mu} p(X_1, \cdots, X_n; \mu, \sigma_0^2)} = \left[\frac{(n-1)S^2}{n\sigma_0^2}\right]^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}},$$

这与统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 相对应.

3． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自指数分布 $Exp(\lambda_1)$的样本，$Y_1, \cdots, Y_m$ 为来自指数分布 $Exp(\lambda_2)$的样本，且两组样本独立，其中λ_1, λ_2是未知的正参数.

（1）求假设 H_0：$\lambda_1 = \lambda_2$ vs H_1：$\lambda_1 \ne \lambda_2$ 的似然比检验；

（2）证明上述检验法的拒绝域仅依赖于比值$\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} Y_i$；

（3）求统计量$\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} Y_i$在原假设成立下的分布.

解：（1）因样本联合密度函数为

$$p(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m; \lambda_1, \lambda_2) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_i} \prod_{i=1}^{m} \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 y_i} = \lambda_1^n \lambda_2^m \mathrm{e}^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^{m} y_i},$$

则似然函数$L(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^n \lambda_2^m \mathrm{e}^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^{m} y_i}$，$\ln L(\lambda_1, \lambda_2) = n \ln \lambda_1 + m \ln \lambda_2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^{m} y_j$，

令$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda_1} = \dfrac{n}{\lambda_1} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda_2} = \dfrac{n}{\lambda_2} - \sum_{i=1}^{m} y_i = 0. \end{cases}$

得$\lambda_1 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$，$\lambda_2 = \dfrac{m}{\sum_{i=1}^{m} y_i}$，

则$\sup\limits_{\lambda_1, \lambda_2} p(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m; \lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{n^n m^m}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)^m} \mathrm{e}^{-n-m}$，

当$\lambda_1 = \lambda_2$时，似然函数$L(\lambda_1) = \lambda_1^{n+m} \mathrm{e}^{-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i\right)}$，$\ln L(\lambda_1) = (n+m) \ln \lambda_1 - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_j\right)$，

令$\dfrac{d \ln L(\lambda_1)}{d \lambda_1} = \dfrac{n+m}{\lambda_1} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_j\right) = 0$，得$\lambda_1 = \dfrac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i}$，

则$\sup\limits_{\lambda_1 = \lambda_2} p(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m; \lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{(n+m)^{n+m}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i\right)^{n+m}} \mathrm{e}^{-n-m}$，

故似然比检验统计量为

$$\Lambda(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m) = \frac{\sup\limits_{\lambda_1, \lambda_2} p(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m; \lambda_1, \lambda_2)}{\sup\limits_{\lambda_1 = \lambda_2} p(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m; \lambda_1, \lambda_2)} = \frac{n^n m^n \left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i\right)^{n+m}}{(n+m)^{n+m} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^n \left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right)^m}$$

$$= \frac{n^n m^n}{(n+m)^{n+m}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)^n \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i}{\sum_{i=1}^{m} Y_i}\right)^m = \frac{n^n m^n}{(n+m)^{n+m}} \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{m} Y_i}\right)^m;$$

（2）因似然比检验统计量 $\Lambda(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m)=\dfrac{n^n m^n}{(n+m)^{n+m}}\left(1+\sum_{i=1}^m Y_i\Big/\sum_{i=1}^n X_i\right)^n\cdot\left(1+\sum_{i=1}^n X_i\Big/\sum_{i=1}^m Y_i\right)^m$，

故拒绝域仅依赖于比值 $\sum_{i=1}^n X_i\Big/\sum_{i=1}^m Y_i$；

（3）因 $X_i\sim Exp(\lambda_1)$，有 $2\lambda_1 X_i\sim Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)=Ga\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\chi^2(2)$，且 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，

则 $2\lambda_1\sum_{i=1}^n X_i\sim\chi^2(2n)$，同理 $2\lambda_2\sum_{i=1}^m Y_i\sim\chi^2(2m)$，

因两组样本独立，

故 $F=\dfrac{2\lambda_1\sum_{i=1}^n X_i\Big/(2n)}{2\lambda_2\sum_{i=1}^m Y_i\Big/(2m)}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^m Y_i}\sim F(2n,2m)$.

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的 i.i.d.样本，其中μ,σ^2 未知. 证明关于假设 H_0: $\mu\le\mu_0$ vs H_1: $\mu>\mu_0$ 的单侧 t 检验是似然比检验（显著性水平$\alpha<1/2$).

证：因样本联合密度函数为

$$p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2},$$

则似然函数 $L(\mu,\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}$，

有 $\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$，

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n 2(x_i-\mu)\cdot(-1)=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i-n\mu\right)=0;\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2=0.\end{cases}$

得 $\mu=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar{x}$，$\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$，

则 $\sup\limits_{\mu,\sigma^2}p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\right]^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[\dfrac{(n-1)s^2}{n}\right]^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$，

当$\mu\le\mu_0$时，若 $\bar{x}\le\mu_0$，有 $\sup\limits_{\mu\le\mu_0,\sigma^2}p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\sup\limits_{\mu,\sigma^2}p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)$，

则似然比检验统计量 $\Lambda(X_1,\cdots,X_n)=\dfrac{\sup\limits_{\mu,\sigma^2}p(X_1,\cdots,X_n;\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\le\mu_0,\sigma^2}p(X_1,\cdots,X_n;\mu,\sigma^2)}=1$，

若 $\bar{x}>\mu_0$，似然函数上确界应在$\mu=\mu_0$时取得，

即似然函数 $L(\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$，有 $\ln L(\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}\ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$，

令 $\dfrac{d\ln L}{d(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$，

得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=\dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2\right]=\dfrac{(n-1)s^2}{n}+(\bar{x}-\mu_0)^2$，

则 $\sup\limits_{\mu\le\mu_0,\,\sigma^2}p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[\dfrac{(n-1)s^2}{n}+(\bar{x}-\mu_0)^2\right]^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$，

故似然比检验统计量为

$$\Lambda(X_1,\cdots,X_n)=\frac{\sup\limits_{\mu,\sigma^2}p(X_1,\cdots,X_n;\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\le\mu_0,\,\sigma^2}p(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)}=\left[\frac{(n-1)S^2}{n}\right]^{-\frac{n}{2}}\left[\frac{(n-1)S^2}{n}+(\bar{X}-\mu_0)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}},$$

这与关于假设 H_0：$\mu\le\mu_0$ vs H_1：$\mu>\mu_0$ 的单侧 t 检验的统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 相对应.

5． 按孟德尔遗传规律，让开淡红花的豌豆随机交配，子代可区分为红花、淡红花和白花三类，且其比例是 1:2:1，为了验证这个理论，观察一次实验，得到红花、淡红花和白花的豌豆株数分别为 26, 66, 28，这些数据与孟德尔定律是否一致（$\alpha=0.05$）？

解：假设 H_0：$p_1=\dfrac{1}{4},\ p_2=\dfrac{1}{2},\ p_3=\dfrac{1}{4}$，

选取统计量 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\dot{\sim}\chi^2(r-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$r=3$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-1)=\chi^2_{0.95}(2)=5.9915$，右侧拒绝域 $W=\{\chi^2\ge 5.9915\}$，

因 $n=120$，p_i, n_i 及计算结果如下表：

花色	红花	淡红花	白花	合计
n_i	26	66	28	120
p_i	1/4	1/2	1/4	1
n_i-np_i	–4	6	–2	0
$(n_i-np_i)^2/(np_i)$	0.5333	0.6	0.1333	1.2666

有 $\chi^2=1.2666\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{\chi^2\ge 1.2666\}=0.5308>\alpha=0.05$，故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这些数据与孟德尔定律一致.

6． 掷一颗骰子 60 次，结果如下：

点数	1	2	3	4	5	6
次数	7	8	12	11	9	13

试在显著性水平为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀.

解：假设 H_0：$p_1=p_2=\cdots=p_6=\dfrac{1}{6}$，

选取统计量 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\,\dot\sim\,\chi^2(r-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$r=6$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-1)=\chi^2_{0.95}(5)=11.0705$，右侧拒绝域 $W=\{\chi^2\ge 11.0705\}$，

因 $n=60$，p_i, n_i 及计算结果如下表：

点数	1	2	3	4	5	6	合计
n_i	7	8	12	11	9	13	60
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
n_i-np_i	−3	−2	2	1	−1	3	0
$(n_i-np_i)^2/(np_i)$	0.9	0.4	0.4	0.1	0.1	0.9	2.8

有 $\chi^2=2.8\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{\chi^2\ge 2.8\}=0.7308>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这颗骰子是均匀的.

7． 检查了一本书的 100 页，记录各页中的印刷错误的个数，其结果如下：

错误个数	0	1	2	3	4	5	≥6
页数	35	40	19	3	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误个数服从泊松分布（取 $\alpha=0.05$）？

解：假设 H_0：$p_i=\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$，$i=0,1,\cdots,5$ 且 $p_6=\sum\limits_{i=6}^{+\infty}\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$，

需估计一个参数 λ，$k=1$，选取统计量 $\chi^2=\sum\limits_{i=0}^{r-1}\dfrac{(n_i-n\hat p_i)^2}{n\hat p_i}\,\dot\sim\,\chi^2(r-k-1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$，$r=7$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-k-1)=\chi^2_{0.95}(5)=11.0705$，右侧拒绝域 $W=\{\chi^2\ge 11.0705\}$，

因 $n=100$，$\hat\lambda=\bar x=\dfrac{100}{100}=1$，$\hat p_i, n_i$ 及计算结果如下表：

错误个数	0	1	2	3	4	5	≥6	合计
n_i	35	40	19	3	2	1	0	100
$\hat p_i$	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0006	1
$n_i-n\hat p_i$	−1.7879	3.2120	0.6060	−3.1313	0.4672	0.6934	−0.0594	0
$(n_i-n\hat p_i)^2/(n\hat p_i)$	0.0869	0.2804	0.0200	1.5992	0.1424	1.5685	0.0594	3.7568

有 $\chi^2=3.7568\notin W$，并且检验的 p 值 $p=P\{\chi^2\ge 3.7568\}=0.5849>\alpha=0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为一页的印刷错误个数服从泊松分布.

8． 某建筑工地每天发生事故数现场记录如下：

一天发生的事故数	0	1	2	3	4	5	≥6	合计
天数	102	59	30	8	0	1	0	200

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验这批数据是否服从泊松分布.

解：假设 H_0：$p_i=\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$，$i=0,1,\cdots,5$ 且 $p_6=\sum\limits_{i=6}^{+\infty}\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$，

需估计一个参数 λ，$k=1$，选取统计量 $\chi^2=\sum\limits_{i=0}^{r-1}\dfrac{(n_i-n\hat p_i)^2}{n\hat p_i}\,\dot\sim\,\chi^2(r-k-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$r = 7$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-k-1) = \chi^2_{0.95}(5) = 11.0705$，右侧拒绝域$W = \{\chi^2 \ge 11.0705\}$，

因$n = 200$，$\hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{148}{200} = 0.74$，$\hat{p}_i, n_i$及计算结果如下表：

一天发生的事故数	0	1	2	3	4	5	≥6	合计
n_i	102	59	30	8	0	1	0	200
$\hat{p}_i$	0.4771	0.3531	0.1306	0.0322	0.0060	0.0009	0.0001	1
$n_i - n\hat{p}_i$	6.5772	−11.6129	3.8732	1.5554	−1.1922	0.8236	−0.0243	0
$(n_i - n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	0.4533	1.9098	0.5742	0.3754	1.1923	3.8437	0.0243	8.3730

有$\chi^2 = 8.3730 \notin W$，并且检验的p值$p = P\{\chi^2 \ge 8.3730\} = 0.1368 > \alpha = 0.05$，
故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为这批数据服从泊松分布．

9．在一批灯泡中抽取300只作寿命试验，其结果如下：

寿命（h）	< 100	[100, 200)	[200, 300)	≥ 300
灯泡数	121	78	43	58

在显著性水平为0.05下能否认为灯泡寿命服从指数分布$Exp(0.005)$？

解：假设H_0：$p_i = e^{-100(i-1)\lambda} - e^{-100i\lambda}$，$i = 1, 2, 3$且$p_4 = e^{-300\lambda}$，

选取统计量$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \dot\sim \chi^2(r-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$r = 4$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-1) = \chi^2_{0.95}(3) = 7.8147$，右侧拒绝域$W = \{\chi^2 \ge 7.8147\}$，

因$n = 300$，$\lambda = 0.005$，p_i, n_i及计算结果如下表：

寿命（h）	< 100	[100, 200)	[200, 300)	≥ 300	合计
n_i	121	78	43	58	300
p_i	0.3935	0.2387	0.1447	0.2231	1
$n_i - np_i$	2.9592	6.4046	−0.4248	−8.9390	0
$(n_i - np_i)^2/(np_i)$	0.0742	0.5729	0.0042	1.1937	1.8450

有$\chi^2 = 1.8450 \notin W$，并且检验的p值$p = P\{\chi^2 \ge 1.8450\} = 0.6052 > \alpha = 0.05$，
故接受H_0，拒绝H_1，即可以认为灯泡寿命服从指数分布$Exp(0.005)$．

10．下表是上海1875年到1955年的81年间，根据其中63年观察到的一年中（5月到9月）下暴雨次数的整理资料

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9
n_i	4	8	14	19	10	4	2	1	1	0

试检验一年中暴雨次数是否服从泊松分布（$\alpha = 0.05$）？

解：假设H_0：$p_i = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$，$i = 0, 1, \cdots, 8$且$p_9 = \sum\limits_{i=9}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$，

需估计一个参数λ，$k = 1$，选取统计量$\chi^2 = \sum\limits_{i=0}^{r-1} \dfrac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \dot\sim \chi^2(r-k-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$r = 10$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-k-1) = \chi^2_{0.95}(8) = 15.5073$，右侧拒绝域$W = \{\chi^2 \ge 15.5073\}$，

因$n = 100$，$\hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{180}{63} = 2.8571$，$\hat{p}_i, n_i$及计算结果如下表：

暴雨次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9	合计
n_i	4	8	14	19	10	4	2	1	1	0	63
$\hat{p}_i$	0.0574	0.1641	0.2344	0.2233	0.1595	0.0911	0.0434	0.0177	0.0063	0.0028	1
$n_i - n\hat{p}_i$	0.3817	−2.3379	−0.7684	4.9349	−0.0465	−1.7409	−0.7337	−0.1158	0.6015	−0.1749	0
$(n_i - n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	0.0403	0.5287	0.0400	1.7314	0.0002	0.5279	0.1969	0.0120	0.9079	0.1749	4.1603

有$\chi^2 = 4.1603 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 4.1603\} = 0.1576 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为上海一年中暴雨次数服从泊松分布．

11．某种配偶的后代按体格的属性分为三类，各类的数目分别是 10, 53, 46．按照某种遗传模型其频率之比应为 $p^2 : 2p(1-p) : (1-p)^2$，问数据与模型是否相符（$\alpha = 0.05$）？

解：假设 H_0：$p_1 = p^2$，$p_2 = 2p(1-p)$，$p_3 = (1-p)^2$，

需估计一个参数 p，$k = 1$，选取统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \,\dot{\sim}\, \chi^2(r-k-1)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$r = 3$，$\chi^2_{1-\alpha}(r-k-1) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.8415$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 3.8415\}$，

设后代的各类数目分别为 n_1, n_2, n_3 次，有 $n_1 + n_2 + n_3 = n$，

则似然函数 $L(p) = (p^2)^{n_1}[2p(1-p)]^{n_2}[(1-p)^2]^{n_3} = 2^{n_2} p^{2n_1+n_2}(1-p)^{n_2+2n_3}$，

有 $\ln L(p) = n_2 \ln 2 + (2n_1 + n_2)\ln p + (n_2 + 2n_3)\ln(1-p)$，

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp} = (2n_1 + n_2)\cdot\frac{1}{p} + (n_2 + 2n_3)\cdot\frac{-1}{1-p} = 0$，得 p 的 MLE $\hat{p} = \frac{2n_1 + n_2}{2(n_1 + n_2 + n_3)} = \frac{2n_1 + n_2}{2n}$，

因 $n = 109$，$\hat{p} = \frac{2n_1 + n_2}{2n} = \frac{73}{218} = 0.3349$，$\hat{p}_i, n_i$ 及计算结果如下表：

后代类别	1	2	3	合计
n_i	10	53	46	109
$\hat{p}_i$	0.1121	0.4455	0.4424	1
$n_i - n\hat{p}_i$	−2.2225	4.4450	−2.2225	0
$(n_i - n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	0.4041	0.4069	0.1024	0.9135

有$\chi^2 = 0.9135 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 0.9135\} = 0.6608 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为数据与模型相符．

12．按有无特性 A 与 B 将 n 个样品分成四类，组成 2×2 列联表：

	B	$\overline{B}$	合计
A	a	b	$a+b$
$\overline{A}$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	n

其中 $n = a + b + c + d$，试证明此时列联表独立性检验的χ^2统计量可以表示成

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

证：假设 H_0：$p_{ij} = p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，$i = 1, 2$；$j = 1, 2$，

选取统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \,\dot{\sim}\, \chi^2(1)$，

因 $\hat{p}_{1\cdot} = \frac{a+b}{n}$，$\hat{p}_{2\cdot} = \frac{c+d}{n}$，$\hat{p}_{\cdot 1} = \frac{a+c}{n}$，$\hat{p}_{\cdot 2} = \frac{b+d}{n}$，且 $n = a + b + c + d$，

则 $\hat{p}_{11}=\hat{p}_{1\cdot}\cdot\hat{p}_{\cdot 1}=\dfrac{(a+b)(a+c)}{n^2}$， $\hat{p}_{12}=\dfrac{(a+b)(b+d)}{n^2}$， $\hat{p}_{21}=\dfrac{(c+d)(a+c)}{n^2}$， $\hat{p}_{22}=\dfrac{(c+d)(b+d)}{n^2}$，

故 $$\chi^2=\frac{\left[a-\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}\right]^2}{\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}}+\frac{\left[b-\dfrac{(a+b)(b+d)}{n}\right]^2}{\dfrac{(a+b)(b+d)}{n}}+\frac{\left[c-\dfrac{(c+d)(a+c)}{n}\right]^2}{\dfrac{(c+d)(a+c)}{n}}+\frac{\left[d-\dfrac{(c+d)(b+d)}{n}\right]^2}{\dfrac{(c+d)(b+d)}{n}}$$

$$=\frac{[na-(a+b)(a+c)]^2}{n(a+b)(a+c)}+\frac{[nb-(a+b)(b+d)]^2}{n(a+b)(b+d)}+\frac{[nc-(c+d)(a+c)]^2}{n(c+d)(a+c)}+\frac{[nd-(c+d)(b+d)]^2}{n(c+d)(b+d)}$$

$$=\frac{(ad-bc)^2}{n(a+b)(a+c)}+\frac{(bc-ad)^2}{n(a+b)(b+d)}+\frac{(bc-ad)^2}{n(c+d)(a+c)}+\frac{(ad-bc)^2}{n(c+d)(b+d)}$$

$$=\frac{(ad-bc)^2[(c+d)(b+d)+(c+d)(a+c)+(a+b)(b+d)+(a+b)(a+c)]}{n(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{[(a+b)+(c+d)][(b+d)+(a+c)](ad-bc)^2}{n(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{n^2(ad-bc)^2}{n(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

13．在研究某种新措施对猪白痢的防治效果问题时，获得了如下数据：

	存活数	死亡数	合计	死亡率
对照	114	36	150	24%
新措施	132	18	150	12%
合计	246	54	300	36%

试问新措施对防治该种疾病是否有显著疗效（$\alpha=0.05$）？

解：假设 H_0：$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，$i=1, 2$；$j=1, 2$，

选取统计量 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{(n_{ij}-n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}}\dot{\sim}\chi^2(1)$，

显著性水平 $\alpha=0.05$， $\chi^2_{1-\alpha}(1)=\chi^2_{0.95}(1)=3.8415$，右侧拒绝域 $W=\{\chi^2\ge 3.8415\}$，

因 $n=300$， $\hat{p}_{1\cdot}=\dfrac{150}{300}=0.5$， $\hat{p}_{2\cdot}=\dfrac{150}{300}=0.5$， $\hat{p}_{\cdot 1}=\dfrac{246}{300}=0.82$， $\hat{p}_{\cdot 2}=\dfrac{54}{300}=0.18$，

且 $\hat{p}_{ij}=\hat{p}_{i\cdot}\cdot\hat{p}_{\cdot j}$， $i, j=1, 2$，n_{ij} 及计算结果如下表：

措施	对照		新措施		合计
效果	存活	死亡	存活	死亡	
n_{ij}	114	36	132	18	300
$\hat{p}_{ij}$	0.41	0.09	0.41	0.09	1
$n_{ij}-n\hat{p}_{ij}$	–9	9	9	–9	0
$(n_i-n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	0.6585	3	0.6585	3	7.3170

有 $\chi^2=7.3170\in W$，并且检验的 p 值 $p=P\{\chi^2\ge 7.3170\}=0.0068<\alpha=0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为新措施对防治该种疾病有显著疗效．

14．某单位调查了 520 名中年以上的脑力劳动者，其中 136 人有高血压史，另外 384 人则无．在有高血压

史的 136 人中，经诊断为冠心病及可疑者的有 48 人，在无高血压史的 384 人中，经诊断为冠心病及可疑者的有 36 人．从这个资料，对高血压与冠心病有无关系作检验，取$\alpha = 0.01$．

解：假设 H_0：$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$，$i = 1, 2$；$j = 1, 2$，

选取统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \dot{\sim} \chi^2(1)$，

显著性水平$\alpha = 0.01$，$\chi^2_{1-\alpha}(1) = \chi^2_{0.99}(1) = 6.6349$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 6.6349\}$，

因 $n = 520$，$\hat{p}_{1\cdot} = \frac{136}{520} = 0.2615$，$\hat{p}_{2\cdot} = \frac{384}{520} = 0.7385$，$\hat{p}_{\cdot 1} = \frac{48+36}{520} = 0.1615$，$\hat{p}_{\cdot 2} = \frac{88+348}{300} = 0.8385$，

且 $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{i\cdot} \cdot \hat{p}_{\cdot j}$，$i, j = 1, 2$，$n_{ij}$ 及计算结果如下表：

血压	高		低		合计
冠心病	有	无	有	无	
n_{ij}	48	88	36	348	520
$\hat{p}_{ij}$	0.0422	0.2193	0.1193	0.6192	1
$n_{ij} - n\hat{p}_{ij}$	26.0308	−26.0308	−26.0308	26.0308	
$(n_i - n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	30.8432	5.9423	10.9236	2.1046	49.8136

有$\chi^2 = 49.8136 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 49.8136\} = 1.6906 \times 10^{-12} < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为高血压与冠心病有关系．

15．在一项是否应提高小学生的计算机课程的比例的调查结果如下：

年龄	同意	不同意	不知道
55 岁以上	32	28	14
36 ~ 55 岁	44	21	17
15 ~ 35 岁	47	12	13

问年龄因素是否影响了对问题的回答（$\alpha = 0.05$）？

解：假设 H_0：$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$，$i = 1, 2, 3$；$j = 1, 2, 3$，

选取统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \dot{\sim} \chi^2(4)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}(4) = \chi^2_{0.95}(4) = 9.4877$，右侧拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge 9.4877\}$，

因 $n = 228$，$\hat{p}_{1\cdot} = \frac{32+28+14}{228} = 0.3246$，$\hat{p}_{2\cdot} = \frac{44+21+17}{228} = 0.3596$，$\hat{p}_{3\cdot} = \frac{47+12+13}{228} = 0.3158$，

$$\hat{p}_{\cdot 1} = \frac{32+44+47}{228} = 0.5395，\ \hat{p}_{\cdot 2} = \frac{28+21+12}{228} = 0.2675，\ \hat{p}_{\cdot 3} = \frac{14+17+13}{228} = 0.1930，$$

且 $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{i\cdot} \cdot \hat{p}_{\cdot j}$，$i, j = 1, 2$，$n_{ij}$ 及计算结果如下表：

年龄	55 岁以上			36 ~ 55 岁			15 ~ 35 岁			合计
回答	同意	不同意	不知道	同意	不同意	不知道	同意	不同意	不知道	
n_{ij}	32	28	14	44	21	17	47	12	13	228
$\hat{p}_{ij}$	0.1751	0.0868	0.0626	0.1940	0.0962	0.0694	0.1704	0.0845	0.0609	1
$n_{ij} - n\hat{p}_{ij}$	−7.9211	8.2018	−0.2807	−0.2368	−0.9386	1.1754	8.1579	−7.2632	−0.8947	0
$(n_i - n\hat{p}_i)^2/(n\hat{p}_i)$	1.5717	3.3977	0.0055	0.0013	0.0402	0.0873	1.7134	2.7386	0.0576	9.6132

有$\chi^2 = 9.6132 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{\chi^2 \ge 9.6132\} = 0.0475 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为年龄因素影响了对问题的回答．

习题 7.5

1． 在检验了一个车间生产的 20 个轴承外座圈的内径后得到下面数据（单位：mm）

15.04 15.36 14.57 14.53 15.57 14.69 15.37 14.66 14.52 15.41

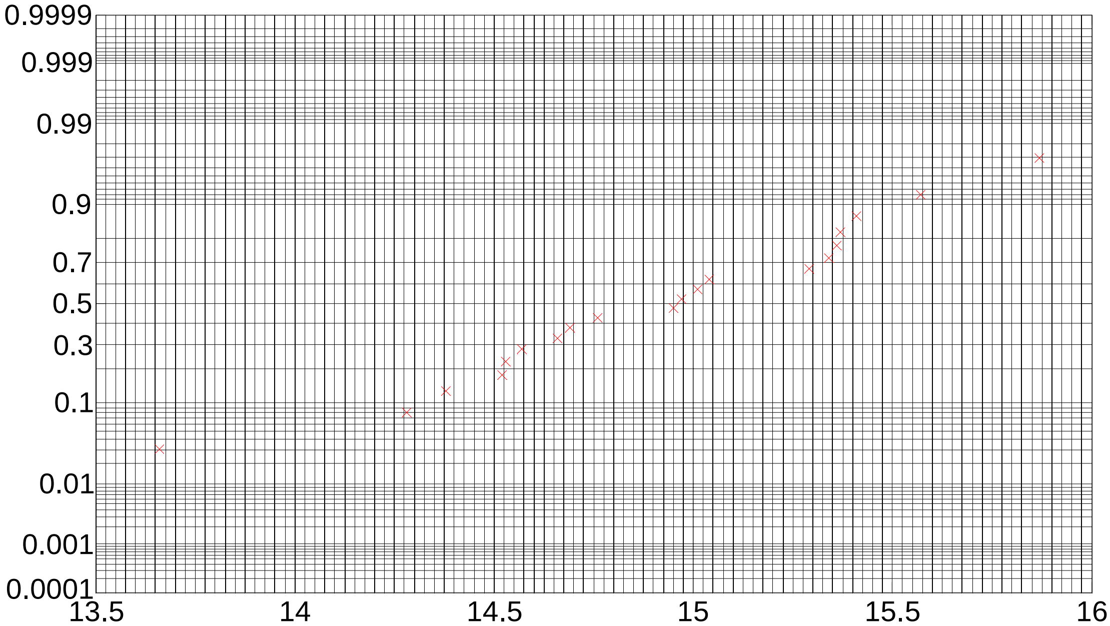
15.34 14.28 15.01 14.76 14.38 15.87 13.66 14.97 15.29 14.95

（1）作正态概率图，并作初步判断；

（2）请用 W 检验方法检验这组数据是否来自正态分布（$\alpha = 0.05$）？

解：（1）将数据按从小到大的顺序排列，并计算修正频率 $\dfrac{i-3/8}{n+1/4}$， $i = 1, 2, \cdots, n$ ，且 $n = 20$，

数据	13.66	14.28	14.38	14.52	14.53	14.57	14.66	14.69	14.76	14.95
修正频率	0.0309	0.0802	0.1296	0.1790	0.2284	0.2778	0.3272	0.3765	0.4259	0.4753
数据	14.97	15.01	15.04	15.29	15.34	15.36	15.37	15.41	15.57	15.87
修正频率	0.5247	0.5741	0.6235	0.6728	0.7222	0.7716	0.8210	0.8704	0.9198	0.9691



所描点近似在一条直线上，初步判断这组数据来自正态分布总体；

（2）假设 H_0：数据来自正态分布总体，

选取统计量 $W = \dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})(X_{(i)}-\bar{X})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\bar{X})^2} = \dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{[n/2]}a_i(X_{(n+1-i)}-X_{(i)})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\bar{X})^2}$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$W_\alpha(n) = W_{0.05}(20) = 0.905$，左侧拒绝域 $W = \{w \le 0.905\}$，

将数据按从小到大的顺序排列，并列出 W 检验的系数 $a_i(20)$，

数据	13.66	14.28	14.38	14.52	14.53	14.57	14.66	14.69	14.76	14.95
$a_i(20)$	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.0140
数据	14.97	15.01	15.04	15.29	15.34	15.36	15.37	15.41	15.57	15.87
$a_i(20)$	−0.0140	−0.0422	−0.0711	−0.1013	−0.1334	−0.1686	−0.2085	−0.2565	−0.3211	−0.4734

有 $\bar{x} = 14.9115$ ，计算可得 $w = 0.9743 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这组数据来自正态分布总体．

2. 抽查克矽平治疗矽肺患者 10 名，得到他们治疗前后的血红蛋白量之差如下：

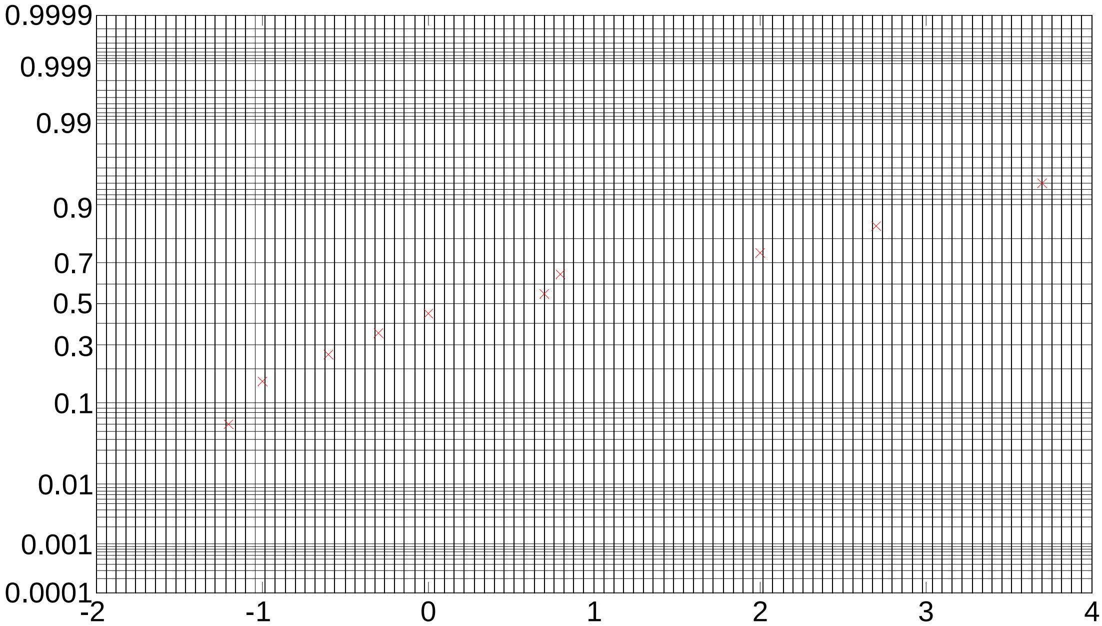
2.7　−1.2　−1.0　0　0.7　2.0　3.7　−0.6　0.8　−0.3

（1）作正态概率图，并作初步判断；

（2）请用 W 检验方法检验治疗前后的血红蛋白量之差是否来自正态分布（$\alpha = 0.05$）？

解：（1）将数据按从小到大的顺序排列，并计算修正频率 $\dfrac{i-3/8}{n+1/4}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且 $n = 10$，

数据	−1.2	−1.0	−0.6	−0.3	0	0.7	0.8	2.0	2.7	3.7
修正频率	0.0610	0.1585	0.2561	0.3537	0.4512	0.5488	0.6463	0.7439	0.8415	0.9390



所描点近似在一条直线上，初步判断这组数据来自正态分布总体；

（2）假设 H_0：数据来自正态分布总体，

$$\text{选取统计量} W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})(X_{(i)}-\overline{X})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\overline{X})^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{[n/2]}a_i(X_{(n+1-i)}-X_{(i)})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\overline{X})^2},$$

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$W_\alpha(n) = W_{0.05}(10) = 0.842$，左侧拒绝域 $W = \{w \le 0.842\}$，

将数据按从小到大的顺序排列，并列出 W 检验的系数 $a_i(10)$，

数据	−1.2	−1.0	−0.6	−0.3	0	0.7	0.8	2.0	2.7	3.7
$a_i(10)$	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399	−0.0399	−0.1224	−0.2141	−0.3291	−0.5739

有 $\overline{x} = 0.68$，计算可得 $w = 0.9252 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这组数据来自正态分布总体．

3. 某种岩石中的一种元素的含量在 25 个样本中为

0.32　0.25　0.29　0.25　0.28　0.30　0.23　0.23　0.40　0.32　0.35　0.19　0.34

0.33　0.33　0.28　0.28　0.22　0.30　0.24　0.35　0.24　0.30　0.23　0.22

有人认为该样本来自对数正态分布总体，请用 W 检验方法作检验（$\alpha = 0.05$）．

解：设总体 X 服从对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$，

则 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

假设 H_0：数据来自正态分布总体，

选取统计量$W=\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})(Y_{(i)}-\overline{Y})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{(i)}-\overline{Y})^2}=\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{[n/2]}a_i(Y_{(n+1-i)}-Y_{(i)})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{(i)}-\overline{Y})^2}$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$W_\alpha(n) = W_{0.05}(25) = 0.918$，左侧拒绝域 $W = \{w \le 0.918\}$，

将数据按从小到大的顺序排列，并列出 W 检验的系数 $a_i(25)$，

数据 Y_i	−1.6607	−1.5141	−1.5141	−1.4697	−1.4697	−1.4697	−1.4271	−1.4271	−1.3863	−1.3863
$a_i(25)$	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610
数据 Y_i	−1.2730	−1.2730	−1.2730	−1.2379	−1.2040	−1.2040	−1.2040	−1.1394	−1.1394	−1.1087
$a_i(25)$	0.0403	0.0200	0	−0.0200	−0.0403	−0.0610	−0.0823	−0.1046	−0.1283	−0.1539
数据 Y_i	−1.1087	−1.0788	−1.0498	−1.0498	−0.9163					
$a_i(25)$	−0.1822	−0.2148	−0.2543	−0.3069	−0.4450					

有$\overline{y}=-1.2794$，计算可得 $w = 0.9687 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为数据 Y_i 来自正态分布总体，即原数据来自对数正态分布总体.

4． 对第 3 题的数据，试用 EP 检验方法检验这些数据是否来自正态总体（取$\alpha = 0.05$）.

解：假设 H_0：数据来自正态分布总体，

选取统计量$T_{\text{EP}}=1+\dfrac{n}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i-1}\exp\left\{-\dfrac{(x_j-x_i)^2}{2s_*^2}\right\}-\sqrt{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\exp\left\{-\dfrac{(x_i-\overline{x})^2}{4s_*^2}\right\}$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$T_{1-\alpha,\,\text{EP}}(n) = T_{0.95,\,\text{EP}}(25) = 0.370$，右侧拒绝域 $W = \{w \ge 0.370\}$，

计算可得 $T_{\text{EP}} = 0.0831 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这些数据来自正态分布总体.

习题 7.6

说明：除非特别指出，以下检验的显著性水平均取为$\alpha = 0.05$.

1． 在某保险种类中，一次关于 2008 年的索赔数额（单位：元）的随机抽样为（按升序排列）：

4.632　4.728　5.052　5.064　5.484　6.972　7.596　9.480

14.760　15.012　18.720　21.240　22.836　52.788　67.200

已知 2007 年的索赔数额的中位数为 5063 元．是否 2008 年索赔的中位数比前一年有所变化？请用双侧符号检验方法检验，求检验的 p 值，并写出结论.

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 5063$　vs　H_1：$x_{0.5} \ne 5063$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，

有$\sum\limits_{k=0}^{3}C_{15}^k\cdot 0.5^k\cdot 0.5^{15-k}=0.0176<0.025<\sum\limits_{k=0}^{4}C_{15}^k\cdot 0.5^k\cdot 0.5^{15-k}=0.0592$，

$\sum\limits_{k=12}^{15}C_{15}^k\cdot 0.5^k\cdot 0.5^{15-k}=0.0176<0.025<\sum\limits_{k=11}^{15}C_{15}^k\cdot 0.5^k\cdot 0.5^{15-k}=0.0592$，

双侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 3$ 或 $S^+ \ge 12\}$，

因 $S^+ = 12 \in W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{S^+ \ge 12\} = 0.0352 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为 2008 年索赔的中位数比前一年有所变化.

2． 1984 年一些国家每平方公里可开发水资源数据如下表所示（单位：万度/年）：

国家	苏联	巴西	美国	加拿大	扎伊尔	印度	哥伦比亚	日本	阿根廷	印度尼西亚	墨西哥
水资源	4.9	4.1	7.5	5.4	28.1	8.5	26.3	34.9	6.9	7.9	4.9

国家	瑞典	意大利	奥地利	南斯拉夫	挪威	瑞士	罗马尼亚	西德	英国	法国	西班牙
水资源	22.3	16.8	58.6	24.8	37.4	78.0	10.1	8.8	1.7	11.5	13.4

而当年中国的该项指标为 20 万度/年，请用符号检验方法检验：这 22 个国家每平方公里可开发的水资源的中位数不高于中国．求检验的 p 值，并写出结论．

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 20$ vs H_1：$x_{0.5} > 20$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 22$，

有 $\sum_{k=16}^{22} C_{22}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{22-k} = 0.0262 < 0.05 < \sum_{k=15}^{22} C_{22}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{22-k} = 0.0669$，

右侧拒绝域 $W = \{S^+ \ge 16\}$，

因 $S^+ = 8 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \ge 8\} = 0.9331 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这 22 个国家每平方公里可开发的水资源的中位数不高于中国．

3．下面是亚洲十个国家 1996 年的每 1000 个新生儿中的死亡数（按从小到大的次序排列）：

国家	日本	以色列	韩国	斯里兰卡	中国	叙利亚	伊朗	印度	孟加拉国	巴基斯坦
新生儿死亡数	4	6	9	15	23	31	36	65	77	88

以 M 表示 1996 年 1000 个新生儿中的死亡数的中位数，试检验：H_0：$M \ge 34$ vs H_1：$M < 34$．求检验的 p 值，并写出结论．

解：假设 H_0：$M \ge 34$ vs H_1：$M < 34$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 10$，

有 $\sum_{k=0}^{2} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.05 < \sum_{k=0}^{3} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547$，

左侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 2\}$，

因 $S^+ = 4 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \le 4\} = 0.3770 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为 1996 年 1000 个新生儿中的死亡数的中位数不低于 34．

4．某烟厂称其生产的每支香烟的尼古丁含量在 12 mg 以下．实验室测定的该烟厂的 12 支香烟的尼古丁含量（单位：mg）分别为

16.7　17.7　14.1　11.4　13.4　10.5　13.6　11.6　12.0　12.6　11.7　13.7

是否该烟厂所说的尼古丁含量比实际的要少？求检验的 p 值，并写出结论．

注：对于非正态总体，小样本场合不能用样本均值进行检验，下面用中位数进行检验．

解：假设 H_0：$x_{0.5} = 12$ vs H_1：$x_{0.5} > 12$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 12$，

有 $\sum_{k=10}^{12} C_{12}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.0193 < 0.05 < \sum_{k=9}^{12} C_{12}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.0730$，

右侧拒绝域 $W = \{S^+ \ge 10\}$，

因 $S^+ = 8 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \ge 8\} = 0.1938 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为该烟厂所说的尼古丁含量不比实际的要少．

5．9 名学生到英语培训班学习，培训前后各进行了一次水平测验，成绩为

学生编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
入学前成绩 x_i	76	71	70	57	49	69	65	26	59
入学后成绩 y_i	81	85	70	52	52	63	83	33	62
$z_i = x_i - y_i$	−5	−14	0	5	−3	6	−18	−7	−3

（1）假设测验成绩服从正态分布，问学生的培训效果是否显著？

（2）不假定总体分布，采用符号检验方法检验学生的培训效果是否显著？

（3）采用符号秩和检验方法检验学生的培训效果是否显著．三种检验方法结论相同吗？

解：（1）如果测验成绩服从正态分布，采用配对 T 检验，

假设 H_0：$\mu_z = 0$ vs H_1：$\mu_z < 0$，

未知 σ_z^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{Z}}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(8) = 1.8595$，左侧拒绝域 $W = \{t \le -1.8595\}$，

因 $\bar{z} = -4.3333$，$s_z = 7.9373$，

则 $t = \dfrac{-4.3333}{7.9373/\sqrt{9}} = -1.6378 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{T \le -1.6378\} = 0.07 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；

（2）假设 H_0：$z_{0.5} = 0$ vs H_1：$z_{0.5} < 0$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，

有 $\sum_{k=0}^{1} C_9^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{9-k} = 0.0195 < 0.05 < \sum_{k=0}^{2} C_9^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{9-k} = 0.0898$，

左侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 1\}$，

因 $S^+ = 2 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = P\{S^+ \le 2\} = 0.0898 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；

（3）假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta < 0$，

选取统计量 $W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{z_i > 0}$，

显著性水平 $\alpha = 0.05$，$n = 9$，$W_\alpha^+(n) = W_{0.05}^+(9) = 8$，左侧拒绝域 $W = \{W^+ \le 8\}$，

因 $W^+ = \sum_{i=1}^{9} R_i \cdot \mathrm{I}_{z_i > 0} = R_4 + R_6 = 4.5 + 6 = 10.5 \notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为培训效果不显著；即三种检验方法结论相同．

6． 为了比较用来做鞋子后跟的两种材料的质量，选取了 15 个男子（他们的生活条件各不相同），每人穿着一双新鞋，其中一只是以材料 A 做后跟，另一只以材料 B 做后跟，其厚度均为 10 mm，过了一个月再测量厚度，得到数据如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
材料 A	6.6	7.0	8.3	8.2	5.2	9.3	7.9	8.5	7.8	7.5	6.1	8.9	6.1	9.4	9.1
材料 B	7.4	5.4	8.8	8.0	6.8	9.1	6.3	7.5	7.0	6.5	4.4	7.7	4.2	9.4	9.1

问是否可以认定以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿？

（1）设 $d_i = x_i - y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, 15)$来自正态总体，结论是什么？

（2）采用符号秩和检验方法检验，结论是什么？

解：（1）如果测验成绩服从正态分布，采用配对 T 检验，

假设 H_0：$\mu_d = 0$ vs H_1：$\mu_d > 0$，

未知 σ_d^2，选取统计量 $T = \dfrac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

显著水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(14) = 1.7613$，左侧拒绝域 $W = \{t \ge 1.7613\}$，

因$\bar{d} = 0.5533$，$s_d = 1.0225$，

则$t = \dfrac{0.5533}{1.0225/\sqrt{15}} = 2.0959 \in W$，并且检验的 p 值 $p = P\{T \ge 2.0959\} = 0.0274 < \alpha = 0.05$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿；

（2）假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta > 0$，

选取统计量$W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i>0}$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 15$，$W_{1-\alpha}^+(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - W_\alpha^+(n) = 120 - W_{0.05}^+(15) = 120 - 30 = 90$，

右侧拒绝域 $W = \{W^+ \ge 90\}$，

因$W^+ = \sum_{i=1}^{15} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i>0} = R_2 + R_4 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9 + R_{10} + R_{11} + R_{12} + R_{13}$

$= 12 + 3.5 + 3.5 + 12 + 8.5 + 6.5 + 8.5 + 14 + 10 + 15 = 93.5 \in W$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿.

7. 某饮料商用两种不同的配方推出了两种新的饮料，现抽取了 10 位消费者，让他们分别品尝两种饮料并加以评分，从不喜欢到喜欢，评分由 1 ~ 10，评分结果如下：

品尝者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 饮料	10	8	6	8	7	5	1	3	9	7
B 饮料	6	5	2	2	4	6	4	5	9	8

问两种饮料评分是否有显著差异？

（1）采用符号检验方法作检验；

（2）采用符号秩和检验方法作检验.

解：（1）假设 H_0：$d_{0.5} = 0$ vs H_1：$d_{0.5} \ne 0$，

选取统计量 $S^+ \sim b(n, 0.5)$，

显著性水平$\alpha = 0.05$，$n = 10$，

有$\sum_{k=0}^{1} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.025 < \sum_{k=0}^{2} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547$，

$\sum_{k=9}^{10} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0107 < 0.025 < \sum_{k=8}^{10} C_{10}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k} = 0.0547$，

双侧拒绝域 $W = \{S^+ \le 1$ 或 $S^+ \ge 9\}$，

因 $S^+ = 6 \notin W$，并且检验的 p 值 $p = 2P\{S^+ \ge 6\} = 0.7539 > \alpha = 0.05$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两种饮料评分没有显著差异；

（2）假设 H_0：$\theta = 0$ vs H_1：$\theta \ne 0$，

选取统计量$W^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{I}_{d_i>0}$，

显著水平$\alpha = 0.05$，$n = 10$，$W_{\alpha/2}^+(n) = W_{0.025}^+(10) = 8$，$W_{1-\alpha/2}^+(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - W_{\alpha/2}^+(n) = 55 - 8 = 47$，

双侧拒绝域 $W = \{W^+ \le 8$ 或 $W^+ \ge 47\}$，

因$W^{+}=\sum_{i=1}^{10}R_i\cdot \mathrm{I}_{d_i>0}=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5=8.5+6+8.5+10+6=39\notin W$，

故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两种饮料评分没有显著差异．

8． 测试在有精神压力和没有精神压力时血压的差别，10 个志愿者进行了相应的试验．结果为（单位：毫米汞柱收缩压）：

无精神压力时	107	108	122	119	116	118	121	111	114	108
有精神压力时	127	119	123	113	125	132	121	131	116	124

该数据是否表明有精神压力下的血压有所增加？

解：采用符号秩和检验方法作检验，

假设 H_0：$\theta=0$　vs　H_1：$\theta<0$，

选取统计量$W^{+}=\sum_{i=1}^{n}R_i\cdot \mathrm{I}_{d_i>0}$，

显著水平$\alpha=0.05$，$n=10$，$W_{\alpha}^{+}(n)=W_{0.05}^{+}(10)=10$，

左侧拒绝域 $W=\{W^{+}\le 10\}$，

因$W^{+}=\sum_{i=1}^{10}R_i\cdot \mathrm{I}_{d_i>0}=R_4=4\in W$，

故拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为有精神压力下的血压有所增加．