概率论与数理统计：第六次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立，且服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布。证明 $n \to \infty$, 以下 $Y_n$ 均依概率收敛。
  (a) $Y_n = \frac{X_n}{n}$;
  (b) $Y_n = (X_n)^n$;
  (c) $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(2) 求下列分布函数的对应的随机变量的特征函数并求其数学期望和方差。
  (a) $F_1(x) = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-a|t|}dt \quad (a > 0)$;
  (b) $F_2(x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2+a^2}dt, \quad (a > 0)$. (提示：$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-at}$, $t > 0$.)

(3) 考虑离散随机变量序列 $Y_n$, 其分布列为 $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(Y_n = n^2) = \frac{1}{n}$.
  (a) 求 $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n)$.
  (b) $Y_n$ 是否依概率收敛？若是极限是？说明理由。

(4) 设随机变脸 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 证明：当 $\alpha \to \infty$ 时，随机变量 $\frac{\lambda X - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 依分布收敛到标准正态分布。

(5) 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为：

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中参数 $\lambda > 0$, $-\infty < \mu < \infty$.
  (a) 求 $X$ 的特征函数。
  (b) 当 $\mu = 0$, $\lambda = 1$ 时，令 $Y = X$, 证明 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$. 但显然 $X$ 与 $Y$ 不独立。
  (c) $X_1, \dots, X_N$ 相互独立，且与 $X$ 同分布。求 $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ 的密度函数。

(6) $X$ 服从标准正态分布。令 $Y_n = (-1)^{\Phi(n)}X$, 其中 $\Phi(n)$ 是 $n$ 的不同素因子的个数。请问 $Y_n$ 是否依概率收敛？是否依分布收敛？

(7) $X_n$ 依分布收敛到 $X$, $Y_n$ 依分布收敛到 $Y$, 是否能推出 $X_n + Y_n$ 依分布收敛到 $X + Y$? 若是，请说明理由；若否，给出反例。假如 $X_n$ 与 $Y_n$ 相互独立呢？

(8) 设 $f_X(x)$ 为某个概率密度函数，它满足这样的条件：$a$, $b$, $c$ 为三个非负实数 $(a < b)$, $f_X(x)$ 在区间 $[a,b]$ 外为 0，并且

$xf_X(x) \leqslant c$ 对所有 $x$ 都成立。$(V_i, W_i)$，$i = 1, \ldots, n$, 均服从有四个点 $(a, 0), (b, 0), (a, c), (b, c)$ 组成的矩形上的均匀分布，且相互独立。令

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{若} W_i \leqslant V_i f_X(V_i), \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

令 $Z_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. 当 $n \to \infty$, $Z_n$ 是否依概率收敛？如果是，极限是？说明理由。(提示：用切比雪夫不等式)