《高等微积分 1》第十三周作业

本次作业在第十五周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 (1) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ 的收敛发散性.

(2) 判断瑕积分 $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ 的收敛发散性.

(3) 证明: 当 $a < 1$ 时, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx.$$

2 设 a 是正实数, b, c 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx$$

收敛.

(2) 设无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的值等于 I. 请把无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx$$

的值用 a, b, c 与 I 表示.

3 设 $f(x)$ 是多项式, 即 $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, 其中 n 是正整数, $a_0, ..., a_n$ 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$$

收敛.

(2) 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-x^2}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-x^2}dx.$$

(3) 假设已证明了 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, 对正整数 m, 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx$ 的值.

4 计算广义积分

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

5 证明: 当 $\alpha > 0$ 时, 无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

都收敛.

6 (1) 证明: 当 $0 \le k < 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ 时, 积分

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

收敛.

(2) 证明:

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$