

作业第七题参考解答

第七题: 1) 前 n 次试验均不成功的概率是 $\prod_{i=1}^n (1 - p_i)$, 而

$$P(N) \leq \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(考虑 $\ln \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = \sum_{i=1}^n \ln(1 - p_i) \leq \sum_{i=1}^n (-p_i) \rightarrow -\infty$.) 所以 $p(N) = 0$.

同理, 事件 A_n : 第 n 次之后无成功的, 它概率是 $\prod_{i=n}^{\infty} (1 - p_i) = 0$, $\bar{I} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, 所以 $P(I) = 1 - P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

2) 令事件 B_n 为第 n 次试验后至少还有一次成功的试验。则 $P(B_n) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i$ 。由收敛性, $P(B_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 而 $I \subset B_n, \forall n$. 所以 $P(I) = 0$.

第九题: 注意到第二名只要要在每一轮里避免第一名就能晋级。第 i 轮有 2^{n-i+1} 支队伍, 第二名的可能对手有 $2^{n-i+1} - 1$ 个, 获胜的概率为 $1 - \frac{1}{2^{n-i+1}-1}$. 所以能到最终决赛的概率为 $\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{2^{n-i+1}-1})$.