

## § 2. 系统微观运动状态的描述

前面已经介绍了粒子运动状态的经典描述和量子描述。下面进一步讨论整个**系统的微观运动状态**，即它的力学运动状态。本讨论将限于由全同和近独立粒子组成的系统。

**全同粒子**组成的系统是指由具有完全相同的属性（相同的质量、电荷、自旋等）的同类粒子组成的系统。例如： $^4\text{He}$ 原子组成的氦气或自由电子组成的自由电子气都是全同粒子组成的系统。

**近独立粒子**组成的系统，是指系统中粒子之间的相互作用很弱，相互作用的能量远远小于单个粒子的平均能量，因而可以忽略相互作用。认为系统的能量等于所有粒子能量的和。例如：理想气体就是近独立粒子组成的系统。

# 1、系统微观运动状态的经典描述

在经典力学中，单个粒子的运动状态可以用 $2r$ 个变量（广义坐标和共轭动量）来描述。利用这 $2r$ 个变量构筑 $2r$ 维的 $\mu$ -空间后，粒子的运动状态可以用 $\mu$ -空间中的一个点表示。其按照Hamilton正则方程运动在 $\mu$ -空间中形成一条连续的相轨道。

对于由 $N$ 个近独立的经典粒子组成的系统，整个系统可以用 $2Nr$ 个变量表示（ $N$ 为系统的粒子数）。借用 $\mu$ -空间的概念，则：一个粒子在某一时刻的力学运动状态对应于 $\mu$ -空间中的一个点， $N$ 个粒子组成的系统的运动状态对应于 $\mu$ -空间中的 $N$ 个点。

## 2、系统微观运动状态的量子描述

近独立粒子系统可以分为两类：（1）**定域系统**：粒子的运动轨道不重叠，可以用它们的位置来区分每一个粒子（如：固体中原子在晶格位置附近的微小振动等），因而全同性可以被忽略；（2）**非定域系统**：粒子与粒子之间的运动轨道可以发生重叠，必须考虑全同性。

自然界中的微观粒子可以分为两大类：**玻色子**和**费米子**。费米子的自旋是半整数，如：电子、质子、中子、 $\mu$ 轻子、中微子、夸克、 $\tau$ 轻子等；玻色子的自旋是整数，如：光子、胶子、 $\pi$ 介子等。其它的微观粒子都是上述粒子的复合粒子。由偶数个费米子组成的复合粒子是玻色子；有奇数个费米子组成的复合粒子还是费密子。

粒子的**全同性**，以及构成系统的粒子的**统计性质**，对近独立粒子系统的统计都有影响。

### 3、全同性、统计特性的影响

考察全同性和粒子的统计性质对系统所能取得微观状态的影响。考虑两个粒子，单粒子具有3个可能占据的个体量子态。

量子态 1	量子态 2	量子态 3
A B		
	A B	
		A B
A	B	
B	A	
	A	B
	B	A
A		B
B		A

**定域系**，粒子可分辨，共有9种微观状态。

量子态 1	量子态 2	量子态 3
A A		
	A A	
		A A
A	A	
A		A
	A	A

**玻色子，非定域系**，每个个体量子态上的粒子数目不受限制，粒子不可分辨。共6种微观状态。

量子态 1	量子态 2	量子态3
A	A	
	A	A
A		A

**费米子，非定域系**，每个个体量子态上的粒子数目受到Pauli不相容原理限制，粒子不可分辨。共3种微观状态。

# 全同性、统计特性的影响

对于可以分辨的全同粒子或者说**定域体系**，由于粒子可以分辨，并且每个量子态上的粒子数目不受限制，所以确定系统的微观运动状态归结为：确定**每一个粒子的个体量子态**。

换句话说，要确定每个量子态上有几个粒子，还要确定是哪几个粒子。

对于不可以分辨的全同粒子或者说**非定域体系**，确定系统的微观运动状态归结为确定**每一个量子态上的粒子（占据）数**。

## 4、等几率原理

在统计物理中，我们研究的是在给定的宏观条件下，由大量微观粒子组成的系统的宏观性质。一个典型的例子就是所谓的孤立系统。这样的系统具有确定的粒子数 $N$ 、体积 $V$ 和总能量 $E$ 。当然，自然界中绝对的孤立系统是没有的。体系的能量只是在某个固定的值 $E$ 附近的一个小范围，即从 $E$ 到 $E+dE$ 内波动。其中， $dE \ll E$ 。当这些条件给定后，系统可以取得微观状态数目是十分巨大的。这些系统的可能的微观状态究竟以什么几率出现，是统计物理学的根本问题。对于这个问题，波尔兹曼1870年给出了回答，这就是著名的等几率原理：对于处于平衡态的孤立系统，系统各个可能的微观态出现的几率相等。

实践证明，由等几率原理推出的一系列平衡态统计物理理论与实际情况符合得很好。

# 5、分布和微观状态

一个系统，由大量的全同近独立粒子组成。粒子数 $N$ ，系统体积 $V$ ，能量为 $E$ 。用 $\varepsilon_l$  ( $l=0, 1, 2, \dots$ )表示粒子的能级， $\omega_l$ 表示能级的简并度， $\alpha_l$ 表示粒子在能级 $\varepsilon_l$ 上的数目。则 $N$ 个粒子在各个能级上的分布如下：

能级	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\dots\dots\varepsilon_l\dots\dots$
简并度	$\omega_1$	$\omega_2$	$\dots\dots\omega_l\dots\dots$
粒子数	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\dots\dots\alpha_l\dots\dots$

很明显，该分布 $\{\alpha_l\}$ 给出的是在每个能级上的粒子数，而且满足右边两个条件：

系统的微观状态，对于定域系统，归结为确定每一个粒子的个体量子态；对于非定域系统，归结为确定每一个量子态上的粒子数。

系统的分布归结为，**确定在每一个能级上的粒子数**。前面已经讲过，粒子的能级一般情况下是简并的。也就是说，每一个能级可能有多个量子态。

$$\begin{cases} \sum_l \alpha_l = N \\ \sum_l \alpha_l \cdot \varepsilon_l = E \end{cases}, (l = 0, 1, 2, \dots)$$

## 6、系统微观状态的计算

与一个特定分布对应的系统的微观状态可能是很多的。

1、对于**非定域**的玻色和费密系统，要确定系统的微观状态数目，在给定分布后，由于粒子不可分辨，所以只要对每一个能级 $\varepsilon_1$ ，确定 $\alpha_1$ 个粒子对 $\omega_1$ 个量子态的占据方式。

2、对于**定域**系统，要求更为严格。由于粒子的可分辨性，给定分布后，对于每一个能级 $\varepsilon_1$ 既要确定哪 $\alpha_1$ 个粒子占据该能级，还要确定这 $\alpha_1$ 个粒子占据 $\varepsilon_1$ 能级的 $\omega_1$ 个量子态的方式。



# 6.1、定域的玻尔兹曼系统

粒子可以分辨，可以将粒子进行编号。 $\alpha_1$ 个粒子占据能级 $\epsilon_1$ 上的 $\omega_1$ 个量子态的方式可以有 $(\omega_1^{\alpha_1})$ 种。所以，对于所有的能级，该方式数目为：

$$\prod_l \omega_l^{\alpha_l}$$

玻尔兹曼系统中的粒子可以分辨，任意交换两个粒子将给出不同的系统状态。将N个粒子加以交换，交换数目为： $N!$ 。其中，应当扣除掉在同一能级上的粒子的交换数目：

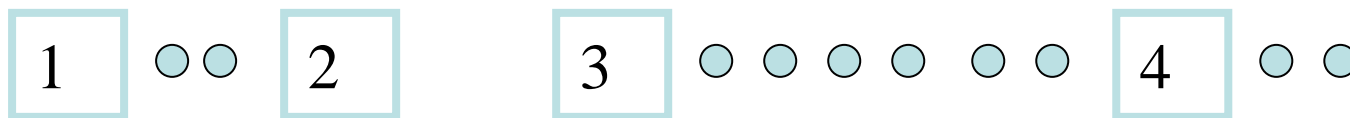
$$\prod_l \alpha_l!$$

这样，玻尔兹曼系统中与一个分布 $\{\alpha_l\}$ 相对应的微观状态数目为：

$$\Omega_{M.B.} = \frac{N!}{\prod_l \alpha_l!} \cdot \prod_l \omega_l^{\alpha_l}$$

## 6.2、非定域的玻色系统

粒子不可分辨，但每一个量子态上容纳的粒子数目不受限制。对于一个给定的分布  $\{\alpha_l\}$ ，在一个固定的能级  $\varepsilon_l$  上，所对应的微观态数目就是在  $\omega_l$  个盒内放置  $\alpha_l$  个球的方式。



我们把粒子和量子态排成一排。标以数字的方块表示量子态，小圆球表示粒子，并约定量子态后面的球的数目表示在该量子态上的粒子数。这样，要求最左方必须是量子态，共有  $\omega_l$  种选择。其余的量子态和粒子还有  $(\omega_l + \alpha_l - 1)!$  种排法。但是，应当扣除量子态的交换数  $(\omega_l - 1)!$  以及粒子数的交换数  $\alpha_l!$ 。这样，玻色系统中与一个分布  $\{\alpha_l\}$  相对应的微观状态数目如下：

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1)!}{\alpha_l! (\omega_l - 1)!}$$

## 6.3、非定域的费米系统

粒子不可分辨，每一个量子态上只能容纳一个粒子。对应于一个给定的分布  $\{\alpha_l\}$ ，在一个固定的能级  $\varepsilon_l$  上， $\alpha_l$  个粒子占据  $\omega_l$  个量子态的可能数目，就等于从  $\omega_l$  个盒子中挑选出  $\alpha_l$  的组合数目。因此，对于费米系统，对应于分布  $\{\alpha_l\}$  的微观状态数为：

$$\Omega_{F.D.} = \prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l! \cdot (\omega_l - \alpha_l)!}$$

## 6.4、经典极限（非简并）条件

在玻色和费米系统中，如果任一能级 $\varepsilon_l$ 上的粒子数 $\alpha_l$ 远远小于能级的简并度 $\omega_l$ ，即： $\alpha_l \ll \omega_l$ （对所有的 $l$ 都成立）。则有：

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1)!}{\alpha_l! (\omega_l - 1)!} \approx \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} = \frac{\Omega_{M.B.}}{N!}$$
$$\Omega_{F.D.} = \prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l! (\omega_l - \alpha_l)!} \approx \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} = \frac{\Omega_{M.B.}}{N!}$$

**注意：**上式中的系数 $1/N!$ 是粒子全同性的影响。

**？在经典极限条件下，全同性、统计特性对微观状态数目的影响如何？**

## 6.4、经典统计中的分布、微观状态

在经典力学中，粒子在某一时刻的运动状态相当于 $\mu$ 空间中的一个点；系统的微观状态则相当于 $\mu$ 空间中的 $N$ 个点。由于粒子的坐标 $q$ 和动量 $p$ 可以连续变化，粒子和系统的微观状态是不可数的。

为了计算微观状态数目，将 $q_i$ 和 $p_i$ 分割成大小相等的小间隔，并且使 $\delta q_i \delta p_i = h_0$ ， $h_0$ 是一个小量。对于具有 $r$ 个自由度的粒子， $\delta q_1 \dots \delta q_r \dots \delta p_1 \dots \delta p_r = h_0^r$ 。假如 $h_0$ 足够小，则可以由粒子运动状态所在的相格确定粒子的运动状态。

将 $\mu$ 空间划分成许多体积元 $\Delta\omega_1$  ( $1=0, 1, 2\dots$ )，用 $\varepsilon_1$ 表示处在 $\Delta\omega_1$ 内的粒子所具有的能量，则 $\Delta\omega_1$ 内粒子的运动状态数目为 $\Delta\omega_1 / h_0^r$ 。这与量子统计中的简并度相类似。

体积元	$\Delta\omega_1$	$\Delta\omega_2$	$\dots \Delta\omega_l$	$\dots$
“简并度”	$\Delta\omega_1 / h_0^r$	$\Delta\omega_2 / h_0^r$	$\dots \Delta\omega_l / h_0^r$	$\dots$
能量	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\dots \varepsilon_l$	$\dots$
粒子数	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\dots \alpha_l$	$\dots$

由于粒子可以分辨，因此类似于玻尔兹曼系统的情况。

## 6.4、经典统计中的分布、微观状态

体积元	$\Delta\omega_1$	$\Delta\omega_2$	$\dots \Delta\omega_l$	$\dots$
“简并度”	$\Delta\omega_1 / h_0^r$	$\Delta\omega_2 / h_0^r$	$\dots \Delta\omega_l / h_0^r$	$\dots$
能量	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\dots \varepsilon_l$	$\dots$
粒子数	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\dots \alpha_l$	$\dots$

$$\Omega_{cl} = \frac{N!}{\prod_l \alpha_l!} \prod_l \left( \frac{\Delta\omega_l}{h_0^r} \right)^{\alpha_l}$$

## 7、量子粒子微观状态数目的计算

一般情况下，我们感兴趣的是满足某些限制条件的微观状态数目。

问题的实质是：在能量准连续时，如何计算在部分 $\mu$ -空间中量子粒子的微观状态数目？

## 7、量子粒子微观状态数目的计算

我们知道，在满足能量准连续条件时，描述 $r$ 维自由粒子的一个运动状态需要 $\mu$ 空间中大小为 $h^r$ 的体积（物理上的一个点）。对于1、2、3维自由粒子，这个点的体积分别为： $h$ ， $h^2$ ， $h^3$ 。所以，只要知道了所感兴趣的 $\mu$ 空间的体积，就可以按照下式计算可能的状态数目。

$$\text{可能状态数目} = \frac{W_{\mu\text{-空间}}}{\text{相格大小 } (h^r)}$$



## 7、量子粒子微观状态数目的计算

因此，问题的关键是：  
如何计算所考虑的 $\mu$ 空间的体积。

## 7、量子粒子微观状态数目的计算

根据 $\mu$ -空间的定义，其体积如下计算（以3维自由粒子为例，不限定坐标空间范围）：

$$\begin{aligned} W_{\mu\text{-空间}} &= V_{\text{坐标空间}} \cdot V_{\text{动量空间}} \\ &= \iiint dx dy dz \cdot \iiint dp_x dp_y dp_z \\ &= V \cdot \iiint dp_x dp_y dp_z \end{aligned}$$

一般对体积空间不作限定。所以，上式中体积空间的积分是粒子运动的空间体积 $V$ 。

## 7、量子粒子微观状态数目的计算

对于3维自由粒子，描述它的一个运动状态所需要的相格大小为 $h^3$ 。这是由测不准原理确定的：

$$(\Delta x \Delta p_x) (\Delta y \Delta p_y) (\Delta z \Delta p_z) \sim h^3。$$

$$\begin{aligned} \text{可能状态数目} &= \frac{W_{\mu-\text{空间}}}{\text{相格大小 } (h^3)} \\ &= \frac{V \cdot \iiint dp_x dp_y dp_z}{h^3} \end{aligned}$$

关键是上式中的积分计算。

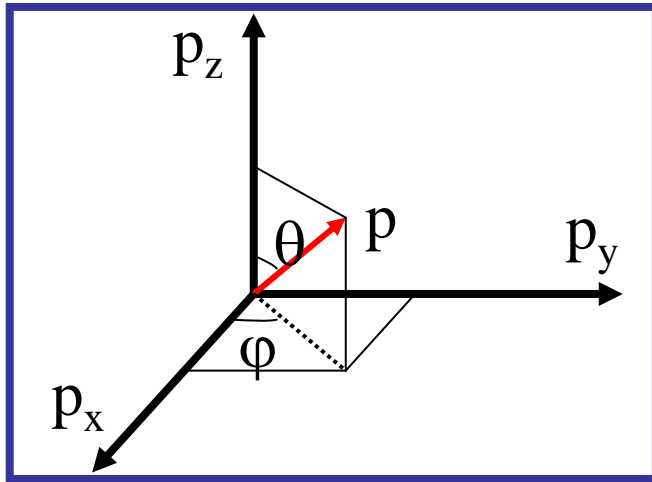
## 举例一、

对于在整个体积 $V$ 内运动的三维自由粒子，考虑动量在 $[p_x, p_x+dp_x]$ ,  $[p_y, p_y+dp_y]$ ,  $[p_z, p_z+dp_z]$ 范围内的微观状态数目。则所考虑的 $\mu$ -空间体积为：

$$\begin{aligned}\Delta W_{\mu\text{-空间}} &= V \cdot \int_{p_x}^{p_x+dp_x} dp_x \cdot \int_{p_y}^{p_y+dp_y} dp_y \cdot \int_{p_z}^{p_z+dp_z} dp_z \\ &= V \cdot dp_x dp_y dp_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{可能状态数目} &= \frac{\Delta W_{\mu\text{-空间}}}{\text{相格大小 } (h^3)} \\ &= \frac{V \cdot dp_x dp_y dp_z}{h^3}\end{aligned}$$

## 举例二、



如果对空间体积不作限定，仅对动量空间作限定： $[p, p+dp]$ ，则如何求 $\mu$ -空间的体积呢？

很明显，所考虑的那部分 $\mu$ -空间的体积应该等于 $p \rightarrow p+dp$ 的球壳的体积乘以空间体积 $V$ 。

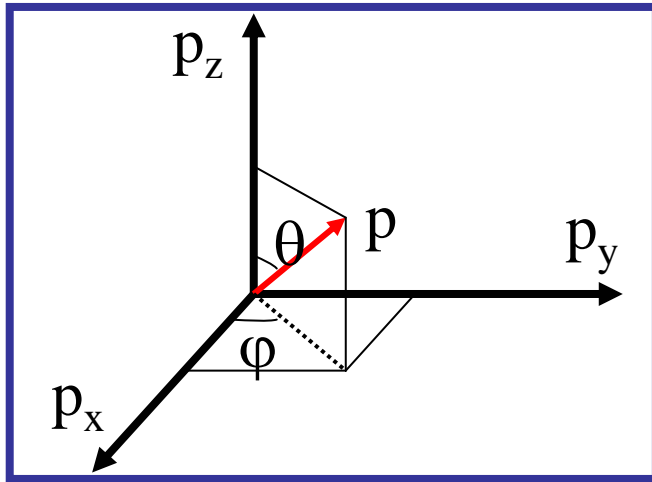
$$\begin{cases} p_x = p \sin \theta \cos \varphi \\ p_y = p \sin \theta \sin \varphi \\ p_z = p \cos \theta \end{cases}$$

$$V_{\text{动量空间}} = \frac{4\pi}{3} p^3$$

$$\Delta V_{\text{动量空间}} = 4\pi p^2 dp$$

$$\text{可能状态数} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

### 举例三、



如果对空间体积不作限定，仅对能量作限定： $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ 。则如何求  $\mu$ -空间的体积呢？

应该记住  $\mu$ -空间的定义：由广义坐标和广义共轭动量构成。因此，在对空间体积不作限制的前提下，应当把对能量的限制范围转换成对动量的限制范围。

$$\begin{cases} p_x = p \sin \theta \cos \varphi \\ p_y = p \sin \theta \sin \varphi \\ p_z = p \cos \theta \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} \cdot p^2$$

$$dp = \frac{m}{p} d\varepsilon$$

### 举例三、

如果对空间体积不作限定，仅对能量作限定： $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ 。则如何求 $\mu$ -空间的体积呢？

计算中如果不考虑粒子的自旋的影响，则有：

应该记住  $\mu$ -空间的定义：由广义坐标和广义共轭动量构成。因此，在对空间体积不作限制的前提下，应当把对能量的限制范围转换成对动量的限制范围。

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} \cdot p^2$$

$$dp = \frac{m}{p} d\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{可能状态数目} &= \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot p^2 \cdot \frac{m}{p} d\varepsilon \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} \cdot (2m) \cdot (2m\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon = \frac{2\pi V}{h^3} \cdot (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \end{aligned}$$

## 回顾：全同性和统计特性的影响

对于由量子粒子组成的近独立系统，对应于一个分布 $\{\alpha_l\}$ ，系统可能具有的微观状态数目受粒子的全同性以及粒子服从的统计特性影响：定域系统；非定域（玻色和费米）系统。在经典极限或者非简并条件（ $\alpha_l \ll \omega_l$ ）下：

$$\begin{aligned}\Omega_{B.E.} &= \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1)!}{\alpha_l! (\omega_l - 1)!} \\ &= \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1) \cdot (\omega_l + \alpha_l - 2) \cdots \omega_l}{\alpha_l!} \\ &\approx \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} = \frac{1}{N!} \cdot \left[ N! \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} \right] = \frac{\Omega_{MB}}{N!}\end{aligned}$$

玻尔兹曼系统的特点：（1）粒子可以分辨；  
（2）每个量子态上占据的粒子数目无限制。  
玻色系统的特点：（1）粒子不可以分辨；  
（2）每个量子态上占据的粒子数目不受限制。



# 回顾：全同性和统计特性的影响

对于由量子粒子组成的近独立系统，对应于一个分布 $\{\alpha_l\}$ ，系统可能具有的微观状态数目受粒子的全同性以及粒子服从的统计特性影响：定域系统；非定域（玻色和费米）系统。在经典极限或者非简并条件（ $\alpha_l \ll \omega_l$ ）下：

$$\begin{aligned}\Omega_{F.D.} &= \prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l! (\omega_l - \alpha_l)!} \\ &= \prod_l \frac{\omega_l \cdot (\omega_l - 1) \cdots (\omega_l - \alpha_l + 1)}{\alpha_l!} \\ &\approx \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} = \frac{1}{N!} \cdot \left[ N! \prod_l \frac{\omega_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!} \right] = \frac{\Omega_{MB}}{N!}\end{aligned}$$

玻尔兹曼系统的特点：（1）粒子可以分辨；  
（2）每个量子态上占据的粒子数目无限制。  
费米系统的特点：（1）粒子不可以分辨；  
（2）每个量子态只能被一个费米子占据。

# 回顾：全同性和统计特性的影响

玻尔兹曼系统： (1)  
粒子可以分辨； (2)  
每个量子态上占据的粒子数目无限制。

玻色系统：  
(1) 粒子不能分辨；  
(2) 每个量子态上占据的粒子数目不受限制。

费米系统：  
(1) 粒子不能分辨；  
(2) 每个量子态只能被一个费米子占据。

$$\Omega_{B.E.} \approx \frac{\Omega_{M.B.}}{N!} \approx \Omega_{F.D.}$$

在经典极限或者非简并条件 ( $\alpha_1 \ll \omega_1$ ) 下：

✓ 统计特性的影响已经不明显；（在玻色和费米分布中， $\alpha_1$ 个粒子占据能级 $\varepsilon_1$ 上 $\omega_1$ 个量子态本来是关联的。在经典极限条件下，由于每个量子态上的平均粒子数远远小于1，粒子之间的关联（粒子遵循的统计特性之间的差异）可以忽略）

✓ 全同性的影响仍然存在。（其表现就在于公式中的系数： $1/N!$ ）。

# 回顾：全同性和统计特性的影响

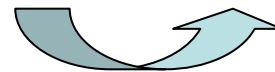
针对玻色和费米系统，粒子的全同性是一致的，区别在于粒子遵守的统计特性。从上面可以看出，在经典极限条件下，统计特性带来的影响小到可以忽略不计了。但是，粒子的全同性仍然存在。否则，三种系统的微观状态数目就应该相等了。

$$\Omega_{B.E.} \approx \frac{\Omega_{M.B.}}{N!} \approx \Omega_{F.D.}$$

在非简并条件 ( $\alpha_1 \ll \omega_1$ ) 下，玻色系统和费米系统的微观状态数目近似相等，且为玻尔兹曼系统微观状态数目的  $1/N!$ 。

0

玻色、费米系统  
中粒子的全同性



8

经典极限条件下  
粒子的全同性

# 回顾：全同性和统计特性的影响

针对玻色和费米系统，粒子的全同性是一致的，区别在于粒子遵守的统计特性。从上面可以看出，在经典极限条件下，统计特性带来的影响小到可以忽略不计了。但是，粒子的全同性仍然存在。否则，三种系统的微观状态数目就应该相等了。

$$\Omega_{B.E.} \approx \frac{\Omega_{M.B.}}{N!} \approx \Omega_{F.D.}$$

在非简并条件 ( $\alpha_1 \ll \omega_1$ ) 下，玻色系统和费米系统的微观状态数目近似相等，且为玻尔兹曼系统微观状态数目的  $1/N!$ 。

经典极限条件

0



8

0斜着眼睛对8说：  
“胖就胖呗，还束什么腰……”

8笑着对0说：  
“瞧，我多苗条……”