概率论与数理统计（7）

清华大学

2020 年春季学期

几点回顾

- 切比雪夫不等式：对于任意 $c>0$, $P(|X-E(X)|\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c^2}Var(X)$.
- $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$.
- 特征函数的在 $t=0$ 处的泰勒展开：
  $\varphi(t)=1+iE(X)+\frac{1}{2}i^2E(X^2)+\dots$.
- 依概率收敛与依分布收敛，当极限是常数时，二者等价。
- 如果 X_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 收敛到 X 的特征函数时，X_n 依分布收敛到 X.
- 若 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y$ 的特征函数为
  $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
- $Y=aX+b$, 则 Y 的特征函数为 $\varphi_Y(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)$.

- 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 考虑 n 个独立随机变量 $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$,

$$P(X_{nk} = 1) = p_{nk}, \quad P(X_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}.$$

若当 $n \to \infty$ 时，$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{nk} \to 0$, 且 $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} \to \lambda$，则若令 $S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$, 有对于任意 $m = 0, 1, \ldots,$

$$P(S_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

泊松定理（重制版）

- 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 考虑 n 个独立随机变量 $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$,

$$P(X_{nk} = 1) = p_{nk}, \quad P(X_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}.$$

若当 $n \to \infty$ 时，$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{nk} \to 0$, 且 $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} \to \lambda$，则若令 $S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$, 有对于任意 $m = 0, 1, \ldots,$

$$P(S_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

- $\varphi_{S_n}(t) = E(e^{itS_n}) = \prod_{k=1}^{n}(p_{nk}e^{it} + 1 - p_{nk}) = \prod_{k=1}^{n}(1 + p_{nk}(e^{it} - 1)),$

泊松定理（重制版）

- 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 考虑 n 个独立随机变量 $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$,

$$P(X_{nk} = 1) = p_{nk}, \quad P(X_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}.$$

若当 $n \to \infty$ 时，$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{nk} \to 0$, 且 $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} \to \lambda$，则若令 $S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$, 有对于任意 $m = 0, 1, \ldots,$

$$P(S_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

- $\varphi_{S_n}(t) = E(e^{itS_n}) = \prod_{k=1}^{n} (p_{nk} e^{it} + 1 - p_{nk}) = \prod_{k=1}^{n} (1 + p_{nk}(e^{it} - 1))$, 而由条件假设 $Y(n, t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + p_{nk}(e^{it} - 1)) \to e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.

泊松定理（重制版）

- 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 考虑 n 个独立随机变量 $X_{n1}, \dots, X_{nn}$,

$$P(X_{nk} = 1) = p_{nk}, \quad P(X_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}.$$

若当 $n \to \infty$ 时，$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_{nk} \to 0$, 且 $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} \to \lambda$，则若令 $S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$, 有对于任意 $m = 0, 1, \dots,$

$$P(S_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

- $\varphi_{S_n}(t) = E(e^{itS_n}) = \prod_{k=1}^{n} (p_{nk} e^{it} + 1 - p_{nk}) = \prod_{k=1}^{n} (1 + p_{nk}(e^{it} - 1))$,
而由条件假设 $Y(n, t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + p_{nk}(e^{it} - 1)) \to e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.

$$\ln Y(n, t) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + p_{nk}(e^{it} - 1)) = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(e^{it} - 1) + O(\sum_{k=1}^{n} p_{nk}^2).$$

- (伯努利大数定律) 设 S_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中 A 发生的概率，则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) = 1.$$

- (伯努利大数定律) 设 S_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中 A 发生的概率，则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) = 1.$$

也就是说 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

大数定律

- (伯努利大数定律) 设 S_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中 A 发生的概率，则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) = 1.$$

  也就是说 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

- $S_n \sim b(n,p)$, $E(\frac{S_n}{n}) = p$, $Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

大数定律

- (伯努利大数定律) 设 S_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中 A 发生的概率，则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) = 1.$$

也就是说 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

- $S_n \sim b(n,p)$, $E(\frac{S_n}{n}) = p$, $Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{p(1-p)}{n}$.由切比雪夫不等式有

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

也就是 $1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leqslant P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) \leqslant 1$.

大数定律

- (伯努利大数定律) 设 S_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, p 为每次试验中 A 发生的概率, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) = 1.$$

也就是说 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

- $S_n \sim b(n,p)$, $E(\frac{S_n}{n}) = p$, $Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{p(1-p)}{n}$.由切比雪夫不等式有

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

也就是 $1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leqslant P(|\frac{S_n}{n} - p| < \epsilon) \leqslant 1$.

- 可以通过大量重复试验得到真实概率的近似值。

蒙特卡罗方法求积分一

- 设二维随机变量服从正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立，且均服从 [0,1] 上的均匀分布，

蒙特卡罗方法求积分一

- 设二维随机变量服从正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立，且均服从 [0,1] 上的均匀分布，考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，令 $A = \{Y \leqslant f(X)\}$，

蒙特卡罗方法求积分一

- 设二维随机变量服从正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立，且均服从 [0,1] 上的均匀分布，考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$, 且 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 令 $A = \{Y \leqslant f(X)\}$, 则

$$P(A) = \int_0^1 \int_0^{f(x)} dydx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

- 设计伯努利试验：每次任取 $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$, 记录 A 发生的次数。频率近似积分 $\int_0^1 f(x)\,dx$.

蒙特卡罗方法求积分一

- 设二维随机变量服从正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立，且均服从 [0,1] 上的均匀分布，考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，令 $A = \{Y \leqslant f(X)\}$，则

$$P(A) = \int_0^1 \int_0^{f(x)} dy dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

- 设计伯努利试验：每次任取 $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$，记录 A 发生的次数。频率近似积分 $\int_0^1 f(x)\, dx$.
- 对于一般区间 $[a, b]$ 上的函数 $g(x)$，若 $c \leqslant g(x) \leqslant d$，则令

$$f(y) = \frac{1}{d-c}[g(a+(b-a)y) - c]$$

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_0^1 g(a+(b-a)y)(b-a)\, dy = \frac{d-c}{b-a}\int_0^1 f(y)\, dy + (b-a)c.$$

大数定律的一般形式

- 一随机变量序列 $\{X_n\}$ 若满足性质：对于任意的 $\epsilon > 0$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)| < \epsilon) = 1,$$

则称该随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

大数定律的一般形式

- 一随机变量序列 $\{X_n\}$ 若满足性质：对于任意的 $\epsilon > 0$，均有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)| < \epsilon) = 1,$$

  则称该随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

- （切比雪夫大数定律）若 $\{X_n\}$ 为两两互不相关的随机变量序列，若每个 X_n 的方差存在，且有共同上界，即

$$Var(X_n) \leqslant c < \infty, n = 1, 2, \ldots$$

  则该序列服从大数定律。

大数定律的一般形式

- 一随机变量序列 $\{X_n\}$ 若满足性质：对于任意的 $\epsilon > 0$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)| < \epsilon) = 1,$$

  则称该随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律。
- （切比雪夫大数定律）若 $\{X_n\}$ 为两两互不相关的随机变量序列，若每个 X_n 的方差存在，且有共同上界，即

$$Var(X_n) \leqslant c < \infty, n = 1, 2, \ldots$$

  则该序列服从大数定律。
- 伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例。

切比雪夫大数定律的证明

- $$Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) \leqslant \frac{c}{n}.$$
- 对于任意的 $\epsilon > 0$, 有切比雪夫不等式有,

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)| < \epsilon) \geqslant 1 - \frac{c}{n\epsilon^2}.$$

例子

- $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量，$E(X_n^4) < \infty$, 则对于任意的 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)| < \epsilon) = 1.$$

例子

- $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量，$E(X_n^4) < \infty$, 则对于任意的 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)| < \epsilon) = 1.$$

- 令 $Y_n = (X_n - E(X_n))^2$,

例子

- $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量，$E(X_n^4) < \infty$，则对于任意的 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)| < \epsilon) = 1.$$

- 令 $Y_n = (X_n - E(X_n))^2$，则
$Var(Y_n) = E\Big(X_n - E(X_n)\Big)^4 - (Var(X_n))^2 < \infty.$

例子

- $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量，$E(X_n^4) < \infty$，则对于任意的 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)| < \epsilon) = 1.$$

- 令 $Y_n = (X_n - E(X_n))^2$，则
$Var(Y_n) = E\Big(X_n - E(X_n)\Big)^4 - (Var(X_n))^2 < \infty$.满足切比雪夫大数定律的条件。

例子

- $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量，$E(X_n^4)<\infty$，则对于任意的 $\epsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)|<\epsilon)=1.$$

- 令 $Y_n=(X_n-E(X_n))^2$，则 $Var(Y_n)=E\Big(X_n-E(X_n)\Big)^4-(Var(X_n))^2<\infty$.满足切比雪夫大数定律的条件。
- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)=Var(X)$，方差统计量的理论基础。

马尔可夫大数定律

- 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0, \quad n \to \infty,$$

则该随机变量序列满足大数定律。

马尔可夫大数定律

- 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0, \quad n \to \infty,$$

则该随机变量序列满足大数定律。

- 设 $\{X_n\}$ 为一同分布，方差存在的随机变量序列，且 X_n 仅与相邻的 X_{n-1} 和 X_{n+1} 相关，而与其他的不相关，则该序列服从大数定律。

- 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}X_k)\to 0,\quad n\to\infty,$$

则该随机变量序列满足大数定律。

- 设 $\{X_n\}$ 为一同分布，方差存在的随机变量序列，且 X_n 仅与相邻的 X_{n-1} 和 X_{n+1} 相关，而与其他的不相关，则该序列服从大数定律。

-

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}[\sum_{k=1}^{n}Var(X_k)+2\sum_{i=1}^{n-1}Cov(X_i,X_{i+1})]\to 0,\quad n\to\infty$$

马尔可夫大数定律

- 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}X_k)\to 0,\quad n\to\infty,$$

则该随机变量序列满足大数定律。

- 设 $\{X_n\}$ 为一同分布，方差存在的随机变量序列，且 X_n 仅与相邻的 X_{n-1} 和 X_{n+1} 相关，而与其他的不相关，则该序列服从大数定律。

-

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}[\sum_{k=1}^{n}Var(X_k)+2\sum_{i=1}^{n-1}Cov(X_i,X_{i+1})]\to 0,\quad n\to\infty$$

- 跟相邻的任意有限 m 个相关，也成立。

马尔可夫大数定律

- 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0, \quad n \to \infty,$$

则该随机变量序列满足大数定律。

- 设 $\{X_n\}$ 为一同分布，方差存在的随机变量序列，且 X_n 仅与相邻的 X_{n-1} 和 X_{n+1} 相关，而与其他的不相关，则该序列服从大数定律。
-

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}[\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)+2\sum_{i=1}^{n-1} Cov(X_i, X_{i+1})] \to 0, \quad n \to \infty$$

- 跟相邻的任意有限 m 个相关，也成立。可以更一般（作业）。

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。
- $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a = E(X_1), \quad n \to \infty.$$

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。
- $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a = E(X_1), \quad n \to \infty.$$
- X_n 的特征函数为 $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + iat + o(t)$.

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。
- $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a = E(X_1), \quad n \to \infty.$$
- X_n 的特征函数为 $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + iat + o(t)$.
- $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k$ 的特征函数为

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。
- $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a = E(X_1), \quad n \to \infty.$$
- X_n 的特征函数为 $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + iat + o(t)$.
- $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k$ 的特征函数为
$$\varphi_{Y_n}(t) = [\varphi(\frac{t}{n})]^n = (1 + ia\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n}))^n \to e^{iat}.$$
- e^{iat} 为常值（随机变量）$X = a$ 的特征函数，所以
$$Y_n \xrightarrow{L} a \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} a.$$

辛钦大数定律

- 若 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_n 的数学期望存在，则该序列服从大数定律。
-
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a = E(X_1), \quad n \to \infty.$$
- X_n 的特征函数为 $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + iat + o(t)$.
- $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k$ 的特征函数为
$$\varphi_{Y_n}(t) = [\varphi(\frac{t}{n})]^n = (1 + ia\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n}))^n \to e^{iat}.$$
- e^{iat} 为常值（随机变量）$X = a$ 的特征函数，所以
$$Y_n \xrightarrow{L} a \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} a.$$
- 注意：这里并不要求方差存在！

一个例子：数学期望必须存在！

- 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且服从同一柯西分布，其密度函数均为

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

考虑

$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

的密度函数。

一个例子：数学期望必须存在！

- 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且服从同一柯西分布，其密度函数均为
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$
考虑
$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
的密度函数。
- X_i 的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$,

一个例子：数学期望必须存在！

- 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且服从同一柯西分布，其密度函数均为
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$
考虑
$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
的密度函数。
- X_i 的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$,
- $X = X_1 + \cdots + X_n$ 的特征函数为 $\varphi_X(t) = (e^{-|t|})^n = e^{-n|t|}$,

一个例子：数学期望必须存在！

- 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且服从同一柯西分布，其密度函数均为
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$
考虑
$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
的密度函数。
- X_i 的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$,
- $X = X_1 + \cdots + X_n$ 的特征函数为 $\varphi_X(t) = (e^{-|t|})^n = e^{-n|t|}$,
- Y 的特征函数为 $\varphi_Y(t) = \varphi_X(\frac{t}{n}) = e^{-|t|}$,

一个例子：数学期望必须存在！

- 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且服从同一柯西分布，其密度函数均为
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$
考虑
$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
的密度函数。
- X_i 的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$,
- $X = X_1 + \cdots + X_n$ 的特征函数为 $\varphi_X(t) = (e^{-|t|})^n = e^{-n|t|}$,
- Y 的特征函数为 $\varphi_Y(t) = \varphi_X(\frac{t}{n}) = e^{-|t|}$,
- 所以 Y 的密度函数为 $p(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $-\infty < y < \infty$.

蒙特卡罗方法求积分二

- 设 X 为 $[a, b]$ 上的均匀分布，则 $Y = f(X)$ 的数学期望是

$$E(Y) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

蒙特卡罗方法求积分二

- 设 X 为 $[a,b]$ 上的均匀分布，则 $Y=f(X)$ 的数学期望是

$$E(Y)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

- $X_i \sim U(a,b)$ 相互独立，则 $f(X_i)$ 相互独立。

蒙特卡罗方法求积分二

- 设 X 为 $[a, b]$ 上的均匀分布，则 $Y = f(X)$ 的数学期望是
$$E(Y) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
- $X_i \sim U(a, b)$ 相互独立，则 $f(X_i)$ 相互独立。
-
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

蒙特卡罗方法求积分二

- 设 X 为 $[a,b]$ 上的均匀分布，则 $Y=f(X)$ 的数学期望是

$$E(Y)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

- $X_i \sim U(a,b)$ 相互独立，则 $f(X_i)$ 相互独立。
-

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

- 可以推广到多重积分。这种计算方法在二重以上的积分才比较有意义。

样本矩：抢先版

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n^k \to ?, \quad k \geqslant 1$

样本矩：抢先版

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n^k \to ?, \quad k \geqslant 1$
- 只要 $E(X_n^k)$ 存在，有辛欣大数定律，它收敛到 $E(X^k)$.

样本矩：抢先版

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n^k \to ?, \quad k \geqslant 1$
- 只要 $E(X_n^k)$ 存在，有辛欣大数定律，它收敛到 $E(X^k)$.
- $E(X^3)$ 存在，$f(x_1, x_2, x_3)$ 是连续函数，则

$$f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3) \to f(E(X), E(X^2), E(X^3)).$$

样本矩：抢先版

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n^k \to ?, \quad k \geqslant 1$
- 只要 $E(X_n^k)$ 存在，有辛欣大数定律，它收敛到 $E(X^k)$.
- $E(X^3)$ 存在，$f(x_1, x_2, x_3)$ 是连续函数，则

$$f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3) \to f(E(X), E(X^2), E(X^3)).$$

- 这是后面学习的矩法构造统计估计量的基础。

强大数定律

- (博雷尔强大数定律) 设 X_n 为独立同分布随机变量序列，且

$$P(X_n = 1) = p, \quad P(X_n = 0) = 1 - p,$$

则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to p,\ a.s.$$

- (柯尔莫哥洛夫强大数定律) 设 X_n 为独立同分布随机变量序列，且 $E(|X_n|) < \infty$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to E(X_1),\ a.s.$$

强大数定律

- (博雷尔强大数定律) 设 X_n 为独立同分布随机变量序列，且

$$P(X_n = 1) = p, \quad P(X_n = 0) = 1 - p,$$

则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to p, \ a.s.$$

- (柯尔莫哥洛夫强大数定律) 设 X_n 为独立同分布随机变量序列，且 $E(|X_n|) < \infty$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to E(X_1), \ a.s.$$

本页内容不做考试要求.

中心极限定理

- 中心极限定理考察随机变量和 $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ 的分布。

中心极限定理

- 中心极限定理考察随机变量和 $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ 的分布。
- 标准化： $Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}}$.

- 中心极限定理考察随机变量和 $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ 的分布。
- 标准化：$Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}}$.
- 林德伯格-莱维（Lindeberg-Levy）中心极限定理：设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n) = \mu$, $Var(X_n) = \sigma^2$ 均存在，若记

$$Y_n^* = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

则对任意实数 y, 有，

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n^* \leqslant y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Lindeberg-Levy 中心极限定理的证明

- 因为 $E(X_n-\mu)=0$, $Var(X_n-\mu)=\sigma^2$, 所以随机变量 $X_n-\mu$ 的特征函数可表示为

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+o(t^2)=1-\frac{\sigma^2t^2}{2}+o(t^2).$$

- 因为 $E(X_n-\mu)=0$, $Var(X_n-\mu)=\sigma^2$, 所以随机变量 $X_n-\mu$ 的特征函数可表示为

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+o(t^2)=1-\frac{\sigma^2t^2}{2}+o(t^2).$$

- Y_n^* 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n^*}(t)=(\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n=[1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n})]^n\to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 为标准正态分布的特征函数，所以 Y_n^* 按分布收敛到一个标准正态分布随机变量。

例子

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$a = E(X_n^2)$，$b = E(X_n^4)$，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n^2}{\sqrt{n}} \sim ?, \quad , n >> 1,$$

例子

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$a = E(X_n^2)$，$b = E(X_n^4)$，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n^2}{\sqrt{n}} \sim ?, \quad , n >> 1,$$

- $Var(X_n^2) = b - a^2$,

例子

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$a = E(X_n^2)$, $b = E(X_n^4)$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n^2}{\sqrt{n}} \sim ?, \quad , n >> 1,$$

- $Var(X_n^2) = b - a^2$, 所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_n^2 - a)}{\sqrt{b - a^2}\sqrt{n}} \to N(0, 1).$$

例子

- X_n 是独立同分布的随机变量序列，$a = E(X_n^2)$, $b = E(X_n^4)$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n^2}{\sqrt{n}} \sim ?, \quad , n >> 1,$$

- $Var(X_n^2) = b - a^2$, 所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_n^2 - a)}{\sqrt{b-a^2}\sqrt{n}} \to N(0,1).$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n^2}{\sqrt{n}} \sim N(a\sqrt{n}, (b-a^2)).$$

- 林德伯格中心极限定理：设 $\{X_n\}$ 为一个相互独立的随机变量序列，且它们具有有限的数学期望和方差：

$$E(X_n) = \mu_n, \quad Var(X_n) = \sigma_n^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

令 $B_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$, 若对于任意的 $\tau > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^2 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_i|>\tau B_n} (x-\mu_i)^2 p_i(x)\, dx = 0,$$

则对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \leqslant x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

例子：林德伯格条件的验证

- 设 X_n 为独立同分布的随机变量序列，且数学期望和方差均存在，则

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\mu_i|>\tau B_n}(x-\mu_k)^2 p_k(x)\,dx=\frac{n}{n\sigma^2}\int_{|x-\mu|>\tau\sqrt{n}\sigma}(x-\mu)^2 p(x)\,dx.$$

例子：林德伯格条件的验证

- 设 X_n 为独立同分布的随机变量序列，且数学期望和方差均存在，则

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\mu_i|>\tau B_n}(x-\mu_k)^2 p_k(x)\,dx=\frac{n}{n\sigma^2}\int_{|x-\mu|>\tau\sqrt{n}\sigma}(x-\mu)^2 p(x)\,dx.$$

- 因为方差有限，即

$$Var(X_k)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 p(x)\,dx<\infty,$$

- 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-\mu|>\tau\sigma\sqrt{n}}|x-\mu|^2 p(x)\,dx=0.$$

独立不同分布下的中心极限定理

- (李雅普诺夫中心极限定理) 设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，若存在 $\delta > 0$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = 0,$$

则对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

- (李雅普诺夫中心极限定理)设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，若存在 $\delta > 0$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = 0,$$

则对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

  - 满足 Lindeberg 条件：

$$E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_k|^{2+\delta} p_k(x)\, dx$$

$$\geqslant \int_{\{x:|x-\mu_k|\geqslant \tau B_n} |x - \mu_k|^{2+\delta} p_k(x)\, dx$$

$$\geqslant \tau^{\delta} B_n^{\delta} \int_{\{x:|x-\mu_k|\geqslant \tau B_n\}} |x - \mu_k|^{2} p_k(x)\, dx.$$

中心极限定理的应用

- 误差分析：在计算机中，所有实数 x 都是用由一定位数的小数 x' 来近似表示。这个近似过程产生误差 $\epsilon = x - x'$.

中心极限定理的应用

- 误差分析：在计算机中，所有实数 x 都是用由一定位数的小数 x' 来近似表示。这个近似过程产生误差 $\epsilon = x - x'$.一般假设

$$\epsilon \sim U(-0.5 \times 10^{-k}, 0.5 \times 10^{-k}).$$

中心极限定理的应用

- 误差分析：在计算机中，所有实数 x 都是用由一定位数的小数 x' 来近似表示。这个近似过程产生误差 $\epsilon = x - x'$.一般假设

$$\epsilon \sim U(-0.5 \times 10^{-k}, 0.5 \times 10^{-k}).$$

- n 个实数 x_i 的和 S, 及其近似 S'，则

$$S - S' = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_i' = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i.$$

中心极限定理的应用

- 误差分析：在计算机中，所有实数 x 都是用由一定位数的小数 x' 来近似表示。这个近似过程产生误差 $\epsilon = x - x'$.一般假设

$$\epsilon \sim U(-0.5 \times 10^{-k}, 0.5 \times 10^{-k}).$$

- n 个实数 x_i 的和 S, 及其近似 S'，则

$$S - S' = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_i' = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i.$$

- 当 n 足够大时，近似地有 $\frac{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i}{\sqrt{n\frac{10^{-2k}}{12}}} \sim N(0,1)$. 则

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i| \leqslant z) \approx 2\Phi(\frac{z\sqrt{12}}{\sqrt{n10^{-2k}}}) - 1.$$

- 二项分布的正态近似——棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p $(0 < p < 1)$，记 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) = \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt.$$

中心极限定理的应用

- 二项分布的正态近似——棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p $(0 < p < 1)$，记 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) = \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}dt.$$

- p 比较小时，用泊松分布近似比较合理。

中心极限定理的应用

- 二项分布的正态近似——棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p $(0 < p < 1)$，记 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) = \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}dt.$$

- p 比较小时，用泊松分布近似比较合理。$np > 5$ 且 $n(1-p) > 5$ 时用正态分布近似比较合理。

- 二项分布的正态近似——棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p （$0 < p < 1$），记 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y\right) = \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt.$$

- p 比较小时，用泊松分布近似比较合理。$np > 5$ 且 $n(1-p) > 5$ 时用正态分布近似比较合理。
- 修正近似：若 $a < b$ 均为正整数，则

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) = P(a - 0.5 \leqslant S_n \leqslant b + 0.5).$$

中心极限定理的应用

- 二项分布的正态近似——棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p $(0 < p < 1)$, 记 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) = \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}dt.$$

- p 比较小时，用泊松分布近似比较合理。$np > 5$ 且 $n(1-p) > 5$ 时用正态分布近似比较合理。
- 修正近似：若 $a < b$ 均为正整数，则

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) = P(a - 0.5 \leqslant S_n \leqslant b + 0.5).$$

当 n 相对比较小时，一般更好的近似为

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) \approx \Phi(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}).$$

二项分布的正态近似

- $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$

- $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

- $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

$$P(Y_n \geqslant 85) \approx 1 - \Phi(\frac{85 - 0.5 - 90}{3}) = \Phi(5.5/3) \approx = 0.9664.$$

二项分布的正态近似

- $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

$$P(Y_n \geqslant 85) \approx 1 - \Phi(\frac{85 - 0.5 - 90}{3}) = \Phi(5.5/3) \approx= 0.9664.$$

- 给定 n,β, 求 y: 某工厂有 200 台机器，在一个小时内，每台机器有 70% 的时间在工作，工作时消耗 15KW 电能，问要多少电能才能以 95% 的可能性保证工厂正常工作呢?

二项分布的正态近似

- $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

$$P(Y_n \geqslant 85) \approx 1 - \Phi(\frac{85 - 0.5 - 90}{3}) = \Phi(5.5/3) \approx= 0.9664.$$

- 给定 n,β, 求 y: 某工厂有 200 台机器，在一个小时内，每台机器有 70% 的时间在工作，工作时消耗 15KW 电能，问要多少电能才能以 95% 的可能性保证工厂正常工作呢? Y 为工作的机器数，$Y \sim b(200, 0.7)$, $E(Y) = 140$, $Var(Y) = 42$.

- $P(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

$$P(Y_n \geqslant 85) \approx 1-\Phi(\frac{85-0.5-90}{3}) = \Phi(5.5/3) \approx= 0.9664.$$

- 给定 n,β, 求 y: 某工厂有 200 台机器，在一个小时内，每台机器有 70% 的时间在工作，工作时消耗 15KW 电能，问要多少电能才能以 95% 的可能性保证工厂正常工作呢? Y 为工作的机器数，$Y \sim b(200, 0.7)$, $E(Y) = 140$, $Var(Y) = 42$.则要求

$$P(15Y_n \leqslant y) \approx \Phi(\frac{y/15+0.5-140}{\sqrt{42}}) \geqslant 0.95.$$

二项分布的正态近似

- $P(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y) \approx \Phi(y) = \beta.$
- 给定 n, y, 求 β: 一个复杂系统由 100 个相互独立的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9. 系统要正常工作，至少需要 85 个部件正常工作，那系统正常工作的概率大约是?

$$P(Y_n \geqslant 85) \approx 1 - \Phi(\frac{85 - 0.5 - 90}{3}) = \Phi(5.5/3) \approx= 0.9664.$$

- 给定 n,β, 求 y: 某工厂有 200 台机器，在一个小时内，每台机器有 70% 的时间在工作，工作时消耗 15KW 电能，问要多少电能才能以 95% 的可能性保证工厂正常工作呢? Y 为工作的机器数，$Y \sim b(200, 0.7)$, $E(Y) = 140$, $Var(Y) = 42$.则要求

$$P(15Y_n \leqslant y) \approx \Phi(\frac{y/15 + 0.5 - 140}{\sqrt{42}}) \geqslant 0.95.$$

$$\frac{y/15 + 0.5 - 140}{\sqrt{42}} \geqslant 1.645, \quad \Rightarrow y \geqslant 2252.$$

二项分布的正态近似

- 给定 y, β, 求 n:先要调查中央电视台新闻联播在清华大学的收视率 p, 调查人员准备将所有受访对象中观看该节目的人员频率 $\hat{p}$ 来估计 p, 现在要以 90% 的把握认为 $\hat{p}$ 和真实的 p 的差异不超过 5%。需要访问多少人?

- 给定 y, β, 求 n:先要调查中央电视台新闻联播在清华大学的收视率 p, 调查人员准备将所有受访对象中观看该节目的人员频率 $\hat{p}$ 来估计 p, 现在要以 90% 的把握认为 $\hat{p}$ 和真实的 p 的差异不超过 5%。需要访问多少人?
- Y 为访问对象中收看新闻联播的人数, 则 $Y \sim b(n, p)$.

- 给定 y, β, 求 n:先要调查中央电视台新闻联播在清华大学的收视率 p, 调查人员准备将所有受访对象中观看该节目的人员频率 $\hat{p}$ 来估计 p, 现在要以 90% 的把握认为 $\hat{p}$ 和真实的 p 的差异不超过 5%。需要访问多少人?
- Y 为访问对象中收看新闻联播的人数, 则 $Y \sim b(n, p)$.则要求为

$$P(|\frac{Y}{n} - p| \leqslant 0.05) \geqslant 0.9,$$

- 给定 γ, β, 求 n:先要调查中央电视台新闻联播在清华大学的收视率 p, 调查人员准备将所有受访对象中观看该节目的人员频率 $\hat{p}$ 来估计 p, 现在要以 90% 的把握认为 $\hat{p}$ 和真实的 p 的差异不超过 5%。需要访问多少人?
- Y 为访问对象中收看新闻联播的人数, 则 $Y \sim b(n,p)$.则要求为

$$P(|\frac{Y}{n} - p| \leqslant 0.05) \geqslant 0.9,$$

$$P(|\frac{Y}{n} - p| \leqslant 0.05) = P(|\frac{(Y - np)}{\sqrt{np(1-p)}}| \leqslant \frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}})$$
$$\approx 2\Phi(0.05\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}) - 1 \geqslant 0.95 \Rightarrow 0.05\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \geqslant 1.645.$$

- 给定 y, β, 求 n:先要调查中央电视台新闻联播在清华大学的收视率 p, 调查人员准备将所有受访对象中观看该节目的人员频率 $\hat{p}$ 来估计 p, 现在要以 90% 的把握认为 $\hat{p}$ 和真实的 p 的差异不超过 5%。需要访问多少人?
- Y 为访问对象中收看新闻联播的人数, 则 $Y \sim b(n, p)$.则要求为

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \leqslant 0.05\right) \geqslant 0.9,$$

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \leqslant 0.05\right) = P\left(\left|\frac{(Y - np)}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leqslant \frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\approx 2\Phi\left(0.05\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \geqslant 0.95 \Rightarrow 0.05\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \geqslant 1.645.$$

$$n \geqslant p(1-p)\frac{1.645^2}{0.05^2}, \Rightarrow n \geqslant 0.25 \times 1082.41 \approx 271.$$

中心极限定理的逼近速度

- (Berry-Esseen 定理) 考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$, 假设 $E(X_n)=0$, $Var(X_n)=\sigma^2<\infty$, 且 $E(|X_1|^3)<\infty$. 令

$$S_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

其分布函数为 $F_n(x)$, 则有

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C\frac{E|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

而 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\leqslant C\leqslant 0.8.$

- Berry-Esseen 定理的结论一般情况下不能被加强：考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$,

$$P(X_n = 1) = 0.5, \quad P(X_n = -1) = 0.5.$$

中心极限定的逼近速度

- Berry-Esseen 定理的结论一般情况下不能被加强：考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$,

$$P(X_n = 1) = 0.5, \quad P(X_n = -1) = 0.5.$$

则对于任意 n,

$$2P(\sum_{k=1}^{2n} X_k < 0) + P(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = 1.$$

中心极限定的逼近速度

- Berry-Esseen 定理的结论一般情况下不能被加强：考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$，

$$P(X_n = 1) = 0.5, \quad P(X_n = -1) = 0.5.$$

则对于任意 n，

$$2P(\sum_{k=1}^{2n} X_k < 0) + P(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = 1.$$

所以

$$|P(\sum_{k=1}^{2n} X_k < 0) - 0.5| = \frac{1}{2}P(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = \frac{1}{2}C_{2n}^{n}2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi 2n}}.$$

- Berry-Esseen 定理的结论一般情况下不能被加强：考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$，

$$P(X_n = 1) = 0.5, \quad P(X_n = -1) = 0.5.$$

则对于任意 n，

$$2P(\sum_{k=1}^{2n} X_k < 0) + P(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = 1.$$

所以

$$|P(\sum_{k=1}^{2n} X_k < 0) - 0.5| = \frac{1}{2}P(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = \frac{1}{2}C_{2n}^{n}2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi 2n}}.$$

Stirling 公式：$n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$.

中心极限定的逼近速度

- Berry-Esseen 定理的结论一般情况下不能被加强：考虑独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$,

$$P(X_n=1)=0.5,\quad P(X_n=-1)=0.5.$$

则对于任意 n,

$$2P(\sum_{k=1}^{2n}X_k<0)+P(\sum_{k=1}^{2n}X_k=0)=1.$$

所以

$$|P(\sum_{k=1}^{2n}X_k<0)-0.5|=\frac{1}{2}P(\sum_{k=1}^{2n}X_k=0)=\frac{1}{2}C_{2n}^{n}2^{-2n}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi 2n}}.$$

Stirling 公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$. $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim 2^{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.