概率论与数理统计：第八次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 某工厂生产的电容器的使用寿命服从指数分布，为了解其平均寿命，从中抽出 n 件产品测其实际的使用寿命。请说明在这里，什么是总体，什么是样本，并指出样本的分布。

(2) 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, n 个样本的经验分布函数为 $F_n(x)$，请说明：

$$E(F_n(x)) = F(x), \quad Var(F_n(x)) = \frac{1}{n}F(x)[1-F(x)].$$

(3) 设 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 是从同一个正态分布总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中独立抽取的容量相同的两个样本的样本均值。试确定样本容量 n 使得两个样本均值的差超过 σ 的概率不超过 0.01.

(4) 设总体密度函数为 $p(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$, $x_1, \ldots, x_n$ 是来自该总体的简单样本。当 $n = 9$ 时，求样本中位数的密度函数。当 $n = 100$（较大）时，求样本中位数的渐进密度函数。

(5) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(5)}$ 为来自该总体的容量为 5 的样本的次序统计量。

(a) 求二维随机向量 $(x_{(2)}, x_{(4)})$ 的联合分布.

(b) 求随机变量 $Y = \frac{x_{(2)}}{x_{(4)}}$ 的密度函数。

(c) 请说明 Y 与 $x_{(4)}$ 相互独立。

(6) 设 x_1, x_2 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本。

(a) 求二维随机向量 (Y, Z) 的联合密度函数, 其中 $Y = x_1 + x_2$, $Z = x_1 - x_2$。

(b) Z 与 Y 是否相互独立?

(c) 求 $(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2})^2$ 的分布类型。

(7) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本,$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，两个样本相互独立，请说明

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_1) + (\bar{y} - \mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2),$$

其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 为各自的样本均值，$s_w^2 = \frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{m+n-2}$, 而 s_x^2 和 s_y^2 为各自的样本方差。

(8) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自总体 X 的样本。X 的分布函数为连续单调递增函数 $F(x)$.
  (a) 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数。
  (b) 求 $Z = -\ln Y$ 的分布类型。
  (c) 求统计量 $T = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i)$ 的分布类型。

概率论与数理统计：第九次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自总体 X 的样本，X 的密度函数为

$$p(x;\theta,\mu) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0.$$

请说明 $(\bar{x}, x_{(1)})$ 是 (θ, μ) 的充分统计量。

(2) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$，$\alpha > 0, \lambda > 0$ 的样本，试寻找 (α, λ) 的充分统计量。

(3) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自指数分布 $Exp(\lambda)$ 的样本。

(a) $\bar{x}$ 是否 $\frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计?

(b) $\frac{1}{\bar{x}}$ 是否 λ 的无偏估计?

(c) 请构造一个 λ 的无偏估计。

(4) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自总体 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ 的样本。

(a) 请说明 $\bar{x}$ 与 $\frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(n)})$ 都是参数 θ 的无偏估计。

(b) 请比较这两个无偏估计的有效性。

(5) 设分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的容量为 n_1 与 n_2 的两个相互独立的样本，其 (无偏) 样本方差分别为 s_1^2, s_2^2。

(a) 请说明 $Z = as_1^2 + bs_2^2$ 对于任意满足 $a + b = 1$ 的常数 a, b 都是 σ^2 的无偏估计。

(b) 寻找 a, b 使得 Z 的方差最小。

(6) 设总体 X 服从二项分布 $B(m, p)$，其中 m, p 均为未知参数，$x_1, \ldots, x_n$ 是 X 的一个样本，请寻找 m 与 p 的矩估计。

(7) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自以下总体的样本:

(a) $p(;.\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)$, $0 < x < \theta, \theta > 0$;

(b) $p(x;\theta,\mu) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$, $x > \mu$, $\theta > 0$.

分别求未知参数的矩估计。

(8) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自总体 X 的样本，$E(X) = \mu$, $Var(X) < +\infty$, 请问统计量 $\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} jx_j$ 是否参数 μ 的相合统计量?

概率论与数理统计：第十次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $x_1,\dots,x_n$ 是以下总体的样本，求未知参数的最大似然估计：
 (a) $p(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, $\theta>0$;
 (b) $p(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}$, $\theta_1<x<\theta_2$.
 (c) $P(X=x;p)=\frac{\binom{2}{x}p^x(1-p)^{2-x}}{1-(1-p)^2}$, $x=1,2$.

(2) 设 $X\sim Exp(\frac{1}{\lambda})$, $x_1,\dots,x_n$ 是其样本。
 (a) 请说明 $\bar{x}$ 是 λ 的矩估计也是最大似然估计，并且是具有相合性的无偏估计。
 (b) 寻找形如 $a\bar{x}$ 的统计估计量，它在均方差准则下优于 $\bar{x}$.

(3) 设 $x_1,\dots,x_m$ 和 $y_1,\dots,y_n$ 分别为来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的两个相互独立的样本。求 (μ_1,μ_2,σ^2) 的最大似然估计。

(4) 设总体的密度函数为 $p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$, $\theta>0$, $x_1,\dots,x_n$ 是其样本。
 (a) $g(\theta)=\frac{1}{\theta}$ 的最大似然估计。并说明其是无偏估计。
 (b) 求 θ 的费希尔信息量。
 (c) 说明 $g(\theta)$ 的最大似然估计是有效估计。

(5) 设 $x_1,\dots,x_n$ 是来自伽马分布 $Ga(\alpha,\lambda)$ 的样本，$\alpha>0$ 已知。
 (a) 求 λ 的费希尔信息量。
 (b) 说明 $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。
 (c) 说明 $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)$ 的一致最小方差无偏估计（UMVUE)。

(6) 设 $x_1,\dots,x_n$ 以下总体的样本：

$$P(X=-1)=\frac{1-\theta}{2},\ P(X=0)=\frac{1}{2},\ P(X=1)=\frac{\theta}{2}.$$

 (a) 求 θ 的最大似然估计和矩估计。
 (b) 计算 θ 的无偏估计的 $C-R$ 下界。
 (c) 当 n 很大时，给出 θ 的最大似然估计的近似分布。

(7) 设 $x_1,\dots,x_n$ 是来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的样本。假设 θ 的先验分布为 Pareto 分布，密度函数为

$$\pi(\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^\beta},\ \theta>\theta_0,$$

其中 β 和 θ_0 均是已知常数。求 θ 的贝叶斯估计。

(8) 设 $x_1,\dots,x_n$ 是以下总体的样本：

$$p(x|\theta)=\theta x^{\theta-1}, 0<x<1.$$

假如 θ 的先验分布为指数分布 $Exp(\lambda)$，λ 已知。求 θ 的贝叶斯分布。

概率论与数理统计：第十一次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 在一批货物中随机抽取 80 件，发现有 11 件不合格，试求这批货物的不合格率的置信水平为 0.90 的置信区间。

(2) 随机选取 9 发炮弹，测得炮弹的炮口速度的样本标准差为 $s = 11m/s$, 若炮弹的炮口速度服从正态分布，求其标准差的置信水平为 0.95 的置信区间。

(3) 设从总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1 = 7$, $n_2 = 12$ 的独立样本，可计算得 $\bar{x} = 72$, $s_x^2 = 58$, $\bar{y} = 70$, $s_y^2 = 49$.

(a) 若已知 $\sigma_1^2 = 64$, $\sigma_2^2 = 49$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信水平；

(b) 若已知 $\sigma_1 = \sigma_2$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间。

(c) 若对 σ_1 与 σ_2 一无所知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间。

(d) 求 σ_1/σ_2 的置信水平为 95% 的置信区间。

(4) 有一位市场调查员想了解某一地区的成年人购买某种产品的比率 θ(即该产品的市场占有率)。他希望能 95% 肯定真实的 θ 落到某个长度为 0.01 的区间内。

(a) 请问，他需要访问多少个顾客?

(b) 如果他事先知道 $\theta < 0.2$，那他能减少采访的人数吗? 可以减到多少?

(5) 设总体 X 的密度函数为:

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x-\theta)^2]}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

$x_1, \dots, x_n$ 是该总体的样本，当 n 比较大时，寻找参数 θ 的近似置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。(提示：可考虑样本中位数。)

(6) 设总体 X 的密度函数为:

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{\{x>\theta\}}, -\infty < \theta < \infty.$$

$x_1, \dots, x_n$ 是该总体的样本。

(a) 求随机变量 $x_{(1)} - \theta$ 的密度函数。

(b) 构造 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

(7) 设 $x_1, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的样本。X 的密度函数为

$$p(x;\theta) = \theta x^{-2},\ x > \theta > 0.$$

求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

(8) 假设 $X_1, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本。

(a) 如果 σ^2 已知，确定样本容量 n 让 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 $\frac{\sigma}{4}$.

(b) 如果 σ^2 未知，确定样本容量 n，保证有 90% 的把握让 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 $\frac{\sigma}{4}$.