

系别: _____ 学号: _____ 年级: _____ 姓名: _____
注意: 请把答案写在答题纸上, 请勿在此页上写答案。严禁将此页带走, 考试后收回。

1. 请选择连接词的完备集 【4 分】

A. $\{\rightarrow, \neg\}$ B. $\{\vee, \neg\}$ C. $\{\uparrow\}$ D. $\{\nabla\}$ E. $\{\leftrightarrow\}$

答案: ABC

2. 判断推理式是否正确, 并给出推导过程或反例。【6 分】

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R \Rightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (R \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow P)$

答案: 1. 错误 2. 错误

3. 若公式 A 包含 3 个独立命题变项 P、Q、R, 且仅在 $P=T, Q=F, R=T$ 和 $P=F, Q=T, R=T$ 时取值为 F, 求 A 的主合取、主析取范式 (采用极大项、极小项标记法)。【6 分】

答案: 合取范式 2, 4; 析取 0, 1, 2, 4, 6, 7

4. 求存在前束范式和任意前束范式。【10 分】

$(\forall x P(x)) \rightarrow (\forall x \exists y Q(x, y) \vee (\exists z R(z) \wedge \exists z S(z)))$

答案: 有多种形式, 但是 $Q(x, y)$ 必须挨在一起出现; 任意前束方式, 必须有对应个数的变元。

5. 请用符号系统形式化下面的问题: 【10 分】

1) 给定一个数据集合, 每个元素由一个 n 维实数向量 x 和对应标记 y 构成。程序 P 运行后, 会对数据集合中的元素的标记进行修改。请表示“标记被修改过的数据比例”。

2) 请用谓词语言表示数列 $f(n)$ 的极限是实数 a (极限定义: 当 n 足够大时, $f(n)$ 取值可以无限逼近 a)。

3) 请用谓词语言表示函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, 1)$ 的 x_0 处连续 ($a < x_0 < b$)。

6. 求下列集合 (Φ 表示空集) 【8 分】

(1) 求序偶 $\langle \phi, \{\phi, \{\phi\}\} \rangle$ 的集合表示方法: $\{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}\}$

(2) $PP(\phi) \times P(\{\phi\})$: 四个有序对

(3) 按照无穷公理表示自然数集合, 求 $\bigcup_{1000} =$, $\bigcap_{99, 100} =$

或者: $999 = \{0, 1, 2, \dots, 998\}$; $99 = \{0, 1, 2, \dots, 98\}$

7. 对一下关系的描述, 判断正误: 【10 分】

(1) 具有反对称性两个关系的合成具有反对称性 X

(2) 具有传递性的两个关系的并集具有传递性 X

(3) 具有传递性的两个关系的交集具有传递性

(4) 存在同时满足自反性、非自反性的关系 X

(5) 存在同时满足对称性、反对称性的关系

(6) 一个关系要么是传递的, 要么是非传递

(7) 存在关系, 同时满足等价、偏序性质

(8) 存在关系, 同时满足非自反、反对称、对称、传递性质

(9) 等势是一种等价关系 X (在约定集合的情况 X 下正确, 对任意集合不成立)

(10) 对称关系的传递闭包也具有对称性

8. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle\}$, 求包含 R 且同时满足传递、对称、自反性质的最小闭包。【10 分】

$Tsr(R) = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} + \{\langle 5, 5 \rangle\}$, 是一种等价关系

9. 证明: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ 。【8 分】

可以用异或来证明, 用集合关系来证明, 用谓词表达式证明

10. 给定 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 划分 $A/R = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$ 。定义函数 $f: A \rightarrow A$, 且函数 f 和等

系别: _____ 学号: _____ 年级: _____ 姓名: _____

注意: 请把答案写在答题纸上, 请勿在此页上写答案。严禁将此页带走, 考试后收回。

价关系 R 是相容的, 即满足: 任意 $\langle a, b \rangle$, 有 $aRb \rightarrow f(a)Rf(b)$ 。同时对每一个可能的 f , 定义 $F: A/R \rightarrow A/R$, 且 $F([x]_R) = [f(x)]_R$ 。请问有多少个这样的 F 函数, 并写出来这样的函数。【8 分】

答案: 27 种。 f 函数有 3024 种, 但多个 f 函数对应到一个 F , 这两者之间不是一一对应的。但是给定 f , 则 F 唯一确定。 $3024 = (33+23+13) \cdot (32+22+12) \cdot (3+2+1)$

11. 证明:

- a) 若关系 R 是对称的, 则 R^n 是对称的 ($n > 1$)。【5 分】
- b) 若关系 R 是传递的, 则自反闭包 $r(R)$ 是传递的。【5 分】

12. 证明: 若非空集合 A 是传递集合, 则 A 的广义交集是传递集合。【5 分】

13. 证明: $N_2 \approx [a, b]$, 其中 $(a < b)$ 。【5 分】