

概率论与数理统计：第十二次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

- (1) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自总体  $N(\mu, 1)$  的样本，考虑如下假设检验问题：

$$H_0: \mu = 2.1 \text{ vs } H_1: \mu = 2.9.$$

若拒绝域为  $W = \{\bar{x} \geq 2.5\}$ .

- (a) 当  $n = 19$  时，求该检验犯两类错误的概率。  
(b) 如果要使得检验犯第二类错误的概率  $\beta \leq 0.02$ ,  $n$  至少要多大?  
(c) 请说明，取足够大的样本容量可以使犯两类错误的概率都很小。
- (2) 设总体为均匀分布  $U(0, \theta)$ ,  $x_1, \dots, x_n$  是其样本，考虑以下检验问题

$$H_0: \theta \geq 3 \text{ vs } H_1: \theta < 3.$$

若拒绝域取为  $W = \{x_{(n)} \leq 2.4\}$ ,

- (a) 求该检验的势函数。  
(b) 求检验犯第一类错误的概率的最大值  $\alpha$ .  
(c) 若要使得该最大值  $\alpha$  不超过 0.05,  $n$  需要取多大?
- (3) 总体的密度函数为  $f(x) = (1 + \theta)x^\theta, 0 \leq x \leq 1, \theta > 0$ . 为检验

$$H_0: \theta = 1 \text{ vs } H_1: \theta < 1.$$

现只有一个样本。若取拒绝域  $W = \{x \leq 0.5\}$ , 求该检验的势函数以及犯两类错误的概率。

- (4) 东、西两厂都生产钢铁。现各抽取样本容量分别为 9 和 8 的样本进行检测，得到以下锌含量的数值：

$$\text{东厂: } \bar{x} = 0.25, s_x^2 = 0.14;$$

$$\text{西厂: } \bar{y} = 0.28, s_y^2 = 0.17.$$

假如两个厂家生产的钢铁的锌含量都服从正态分布且方差相等。请问在显著水平 0.025 下能否认为它们的均值也一样？请设计一个假设检验过程进行检验判断并计算该检验的  $p$ -值。

- (5) 为比较正常男女所含某种免疫球蛋白的差异，对某个地区 176 名男性进行检测，其样本均值为 465, 样本方差为 54. 对该地区 109 名女性进行检测，其样本均值为 422, 样本方差为 49. 请设计一个检验过程，检验该地区成年男女中该类免疫球蛋白的含量是否相同。假设免疫球蛋白的含量服从正态分布。

- (6) 使用两种化肥来种红薯，从第一种化肥种植出来的红薯中抽出 22 个，检测到平均重量为 1.3，样本标准差为 0.57；从第二种化肥种植出来的红薯中抽出 24 个，测得平均重量为 1.5，样本标准差为 0.48. 假设重量服从正态分布，能否认为使用第二种化肥更好呢？请在显著水平 0.05 下进行检验并计算检验的  $p$  值。
- (7) 设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . 现分别独立地从总体  $X$  与总体  $Y$  中抽样。得到以下数据：

$X$ ：样本容量 7,  $\bar{x} = 95.7, s_x^2 = 2208$ .

$Y$ ：样本容量 5,  $\bar{y} = 97.4, s_y^2 = 78.8$ .

取定显著水平为 0.05.

- (a) 检验： $H_0 : \sigma_1^2 = 10\sigma_2^2$  vs  $H_1 : \sigma_1^2 \neq 10\sigma_2^2$ .
- (b) 利用上述检验结果，检验  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 10$  vs  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 10$ .
- (8) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自指数分布  $Exp(\lambda)$  的样本,  $y_1, \dots, y_m$  是另一个指数分布  $Exp(\theta)$  的一个样本, 且两个样本相互独立。考虑检验问题

$$H_0 : \frac{\lambda}{\theta} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\lambda}{\theta} \neq 1.$$

请在显著水平  $\alpha$  下给出合适的拒绝域。(提示：考虑指数分布，伽马分布，卡方分布与 F-分布之间的关系。)