第二课内容回顾

- 经典粒子运动状态的描述方法。经典粒子的运动状态可以用坐标和共轭动量精确描述，是轨道运动，可以用μ-空间空间中的一条相轨道表示。
- 量子粒子运动状态的描述方法。量子粒子不是轨道运动，不能用坐标和共轭动量精确描述，而用一组量子数描述。
- 系统微观状态的经典和量子描述。经典系统的微观状态可以用μ-空间中的N个点表示；量子系统的微观状态由全同性和粒子服从的统计特性决定。对于定域系统，确定系统的微观运动状态归结为确定每一个粒子的个体量子态；对于非定域系统，确定系统的微观运动状态归结为确定每一个量子态上的粒子数。
- 等几率原理。
- 玻尔兹曼、玻色、费米系统的微观状态数目的计算。

第二课课内容回顾

➢**量子粒子微观状态数目的计算**：在满足能量准连续条件时，描述r维自由粒子的一个运动状态需要μ空间中大小为h^r的体积（物理上的一个点）。对于3维自由粒子，描述它的一个运动状态所需要的相格大小为h^3。这是由测不准原理确定的：$(\Delta x\Delta p_x)(\Delta y\Delta p_y)(\Delta z\Delta p_z)\sim h^3$。

$$\text{可能状态数目} = \frac{W_{\mu-\text{空间}}}{\text{相格大小}\ (h^3)}$$

$$= \frac{V\cdot\iiint dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

小测验

根据量子力学，处于长度为L的容器中的一维自由粒子的动量和能量都是分立的，可以用一个量子数n描述（见右式）。请问:

1、粒子的能级是否是简并的?如果是，能级的简并度是多少?

2、在粒子的运动空间L很大的时候，它的动量和能量可以看成是准连续的；这时可以利用半经典近似。如果不考虑粒子的自旋的影响，如何求得粒子在能量为ε到ε + dε范围内的可能量子态数目?

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} \cdot n, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

$$\varepsilon_n = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2} \cdot n^2, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

§3.1、玻尔兹曼分布的导出

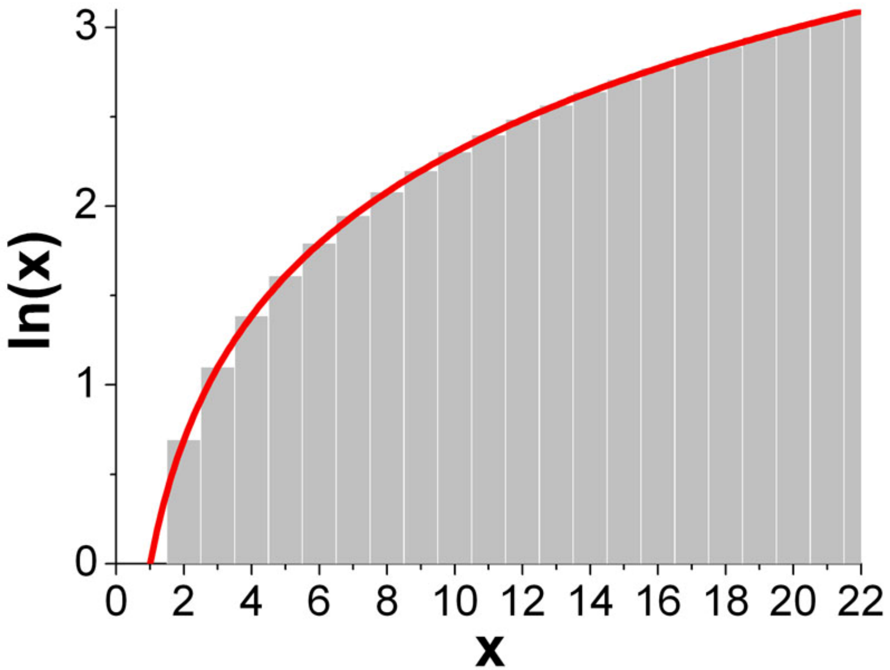
上一节讲述了对于一个已知的分布$\{\alpha_l\}$，如何求得系统的微观状态数目。根据等几率原理，对于处于平衡态的孤立系统，每一个可能的微观态出现的几率相等。因此，微观状态数目最多的分布出现的概率最大。这种分布称为最概然分布。下面以玻尔兹曼分布为例，介绍最概然分布的导出。

首先，介绍一个近似等式(Stirling公式)：$\ln(m!)\cong m[\ln(m)-1]$。

当m很大时，$\ln m!=\ln 1+\ln 2+\ldots\ldots+\ln(m)$可以看成是$\ln x$在$[1,m]$内的积分。

$$\ln m! \approx \int_1^m \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^m \approx m(\ln m - 1)$$

§3.1、玻尔兹曼分布的导出



$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln m$

当m远大于1时，矩形面积之和近似等于曲线lnx下的面积。所以，有：

$$\ln m! \approx \int_1^m \ln x dx = (x \ln x - x)\Big|_1^m \approx m(\ln m - 1)$$

§3.1、玻尔兹曼分布的导出

更为精确的Stirling公式:

$$m! = m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m} \rightarrow$$

$$\ln m! = m(\ln m - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi m)$$

当m足够大时，上式中第二项同第一项相比较，可以忽略。Stirling公式就可以用一级近似。即:

$$\ln m! = m(\ln m - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi m)$$

$$\overset{m>>1}{\approx} m(\ln m - 1)$$

§3.1、玻尔兹曼分布的导出

玻尔兹曼系统的微观状态数目为：

$$\Omega_{M.B.}=\frac{N!}{\prod_l \alpha_l!}\bullet\prod_l \omega_l^{\alpha_l}$$

玻尔兹曼系统中粒子的最概然分布是使系统对应于该分布所具有的微观状态数目最大。即：Ω取极大值。

由于lnΩ随着Ω的变化使单调的，因此可以等价地讨论lnΩ为极大地分布。两边取对数，有：

$$\ln\Omega_{M.B.}=\ln N!-\sum_l \ln\alpha_l!+\sum_l \alpha_l\ln\omega_l$$

假设所有α_l都很大，可以利用Stirling公式，有：

$$\ln\Omega_{M.B.}=N(\ln N-1)-\sum_l \alpha_l(\ln\alpha_l-1)+\sum_l \alpha_l\ln\omega_l$$

$$=N\ln N-\sum_l \alpha_l\ln\alpha_l+\sum_l \alpha_l\ln\omega_l=N\ln N-\sum_l \alpha_l\ln(\alpha_l/\omega_l)$$

§ 3.1 、玻尔兹曼分布的导出

$$\ln \Omega_{M.B.} = N \ln N - \sum_l \alpha_l \ln(\alpha_l / \omega_l)$$

为求得使lnΩ为极大地分布，令每个α_l有$\delta\alpha_l$的变化，lnΩ将有δlnΩ的变化。使lnΩ为极大的分布$\{\alpha_l\}$必然使δlnΩ＝0。

$$\delta \ln \Omega = -\sum_l \ln\left(\frac{\alpha_l}{\omega_l}\right) \cdot \delta\alpha_l = 0$$

但这些$\delta\alpha_l$不完全是独立的，它们因该满足下列条件：

$$\delta N = \sum_l \delta\alpha_l = 0$$

$$\delta E = \sum_l \varepsilon_l \delta\alpha_l = 0$$

因此，变成了一个求条件极值的问题。

§3.1、玻尔兹曼分布的导出

利用Lagrange乘子法，引入两个乘子： α，β，将它们分别乘上两个限制条件，代入第一式中，则有：

$$\delta \ln \Omega - \alpha \delta N - \beta \delta E = -\sum_l \left(\ln \frac{\alpha_l}{\omega_l} + \alpha + \beta \varepsilon_l\right) \delta \alpha_l = 0$$

根据Lagrange乘子法，上式中求和系数应该为零。即：

$$\ln\left(\frac{\alpha_l}{\omega_l}\right) + \alpha + \beta \varepsilon_l = 0$$

据此我们得到玻尔兹曼系统中粒子的最概然分布：

$$\alpha_l = \omega_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l}$$

α，β是两个待定乘子。

§3.1、玻尔兹曼分布的导出

这样，我们可以如下求出两个Lagrange待定乘子：

$$\delta \ln \Omega - \alpha \delta N - \beta \delta E = -\sum_l \left(\ln \frac{\alpha_l}{\omega_l} + \alpha + \beta \varepsilon_l\right) \delta \alpha_l = 0$$

根据Lagrange乘子法，上式中求和系数应该为零。即：

$$\ln\left(\frac{\alpha_l}{\omega_l}\right) + \alpha + \beta \varepsilon_l = 0$$

α，β是两个待定乘子。

据此我们得到玻尔兹曼系统中粒子的最概然分布：

$$\alpha_l = \omega_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l}$$

§3.1 、玻尔兹曼分布的导出

我们可以利用两个限制方程求出Lagrange乘子： α和β。

$$N=\sum_l \alpha_l=\sum_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$E=\sum_l \alpha_l\varepsilon_l=\sum_l \varepsilon_l\omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

l表示能级数目

$$N=\sum_s f_s=\sum_s e^{-\alpha-\beta\varepsilon_s}$$

$$E=\sum_s f_s\varepsilon_s=\sum_s \varepsilon_s e^{-\alpha-\beta\varepsilon_s}$$

s表示量子态数目

玻尔兹曼分布的几点说明

1. 上面导出了玻尔兹曼分布（定域系统的最可几分布），只是利用了系统的微观状态对数的一阶微分等于零（适当引入Lagrange乘子后）的条件。但是该条件是否是极大值的条件呢？

为证明是微观状态数目的极大值，还必须验证其二阶微分小于零。为此，我们对$\delta \ln\Omega$再次微分：

$$\delta \ln \Omega = -\sum_l \ln\left(\frac{\alpha_l}{\omega_l}\right)\cdot\delta\alpha_l = 0$$

$$\delta^2 \ln \Omega = -\delta\sum_l \ln\left(\frac{\alpha_l}{\omega_l}\right)\cdot\delta\alpha_l = -\sum_l \frac{(\delta\alpha_l)^2}{\alpha_l}$$

由于α_l大于零，所以上式永远是负的，这样就证明了玻尔兹曼分布是使$\ln\Omega$为极大的分布。

玻尔兹曼分布的几点说明

2. 从原则上讲，在给定N、E、V的条件下，凡是满足两个限制条件的分布都有可能实现。但是，对于宏观系统，与最概然分布（玻尔兹曼分布）相对应的Ω值非常陡，使其他分布的微观状态数目与之相比，几乎等于零。因此，可以认为在平衡态下粒子实质上处于玻尔兹曼分布，由此引起的误差是可以忽略的。

1、平衡态下的分布不等同于玻尔兹曼分布。

2、利用玻尔兹曼分布近似平衡态下的分布时，带来的误差很小。

根据等几率原理，Ω值是一种分布出现的可能性的度量。即： Ω越大，出现可能性越大。

玻尔兹曼分布的几点说明

在平衡态下粒子实质上处于玻尔兹曼分布，由此引起的误差是可以忽略的。为证明这一点，我们考虑一个稍微偏离玻尔兹曼分布的分布的微观状态数目：

$$\ln(\Omega+\Delta\Omega)=\ln\Omega+\delta\ln\Omega+\frac{1}{2}\delta^2\ln\Omega+\cdots$$

$$\approx\ln\Omega-\frac{1}{2}\sum_l\frac{(\Delta\alpha_l)^2}{\alpha_l}$$

如果假设对玻尔兹曼分布的偏离约为$\Delta\alpha_1/\alpha_1\approx10^{-5}$，则两者的$\ln\Omega$相差为：

$$\ln\frac{\Omega+\Delta\Omega}{\Omega}=-\frac{1}{2}\sum_l\left(\frac{\Delta\alpha_l}{\alpha_l}\right)^2\cdot\alpha_l$$

$$\approx-\frac{1}{2}\times10^{-10}\cdot N$$

假设 $N\approx10^{23}$，则

$$\frac{\Omega+\Delta\Omega}{\Omega}\approx e^{-10^{13}}$$

玻尔兹曼分布的几点说明

上述结果说明，在平衡态下，如果一种分布偏离了玻尔兹曼分布，则该分布出现的几率，同玻尔兹曼分布出现的几率相比较，近似为零。

假设 $N \approx 10^{23}$，则

$$\frac{\Omega + \Delta\Omega}{\Omega} \approx e^{-10^{13}}$$

换句话说，在平衡态下，可以利用玻尔兹曼分布代替系统的真实分布。这种处理方法带来的误差是微不足道的。

玻尔兹曼分布的几点说明

3. 在推导玻耳兹曼分布过程中，对于α_l应用了**ln(m!)≅m[ln(m)-1]** 的近似。这要求所有α_l都远大于1。这个条件实际上并不满足，这是推导过程的一个严重缺点。但是分布在能级ε_l上的平均粒子数可由下式计算：

$$\overline{\alpha_l} = \frac{\sum_{\{\alpha_l\}} \alpha_l \Omega(\{\alpha_l\})}{\sum_{\{\alpha_l\}} \Omega(\{\alpha_l\})}$$

$\{\alpha_l\}$满足 $N = \sum_l \alpha_l,\ E = \sum_l \varepsilon_l \alpha_l$

可以证明，上面的平均分布等于最概然分布。两者相等的实质就是前面所说，**Ω**的极大值非常陡，使最概然分布的状态数非常接近于全部可能的微观状态数。后面我们还将证明，用巨正则系综求得的平均分布等于最概然分布。

经典统计中的玻尔兹曼分布

在经典统计中，玻尔兹曼分布的表达式如下：

$$a_l = \frac{\Delta\omega_l}{h_o^r} e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

其中，两个拉氏乘子α，β满足两个限制条件：

$$N = \sum_l a_l = \sum_l \frac{\Delta\omega_l}{h_o^r} e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$E = \sum_l a_l \varepsilon_l = \sum_l \frac{\Delta\omega_l}{h_o^r} \varepsilon_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

α，β的物理意义是什么？

玻尔兹曼分布公式：

$$\alpha_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

知道了两个拉氏乘子α和β，所有问题都迎刃而解。

$$N = \sum_l \alpha_l = \sum_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$E = \sum_l \alpha_l \varepsilon_l = \sum_l \omega_l \varepsilon_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

在玻尔兹曼分布公式中的系数α，β的物理意义是什么？

α，β的物理意义是什么？

玻尔兹曼分布公式：

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$N = \sum_l a_l = \sum_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$E = \sum_l a_l \varepsilon_l = \sum_l \omega_l \varepsilon_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

从这些式子中很难看出它们的物理意义，但可以推断出α是一个无量纲的物理量，β的量纲应该是【J^{-1}】。

拉氏乘子β的物理意义

假设两个近独立粒子系统1和2，粒子总数分别为N′和N″，能量为E′和E″。当两个系统处于各自的平衡态时，其最可几分布分别为：

$$a_l' = \omega_l' e^{-\alpha' - \beta' \varepsilon_l'}$$

$$a_l'' = \omega_l'' e^{-\alpha'' - \beta'' \varepsilon_l''}$$

两个系统均服从玻尔兹曼分布。

式中，α′、β′和 α″、β ″分别是系统1和2的拉氏乘子。其它的则分别对应着系统的能级、简并度等。

拉氏乘子β的物理意义

在不改变两个系统外参量的前提下，让这两个系统通过热壁进行热交换，组成一个复合孤立系统。通常情况下，两个系统的状态要发生变化，直到复合系统达到新的热平衡为止。此时，两个系统具有相同的温度（T）。两个系统组成的复合系统满足如下三个条件：

$$E = \sum_l \tilde{\alpha}_l' \varepsilon_l' + \sum_l \tilde{\alpha}_l'' \varepsilon_l''$$

$$N_1 = \sum_l \tilde{\alpha}_l'$$

$$N_2 = \sum_l \tilde{\alpha}_l''$$

需要注意的是：由于两个孤立系统之间只有能量交换，其外参量没有发生变化。因此，各自的能级并不改变。

拉氏乘子β的物理意义

复合系统的微观状态数目可以描述为：

$$\Omega_{复合} = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

$$= \left(N_1! \prod_l \frac{\omega_l^{'\tilde{\alpha}_l^{'}}}{\tilde{\alpha}_l^{'}!} \right) \cdot \left(N_2! \prod_l \frac{\omega_l^{''\tilde{\alpha}_l^{''}}}{\tilde{\alpha}_l^{''}!} \right)$$

由于系统1和2的能级、简并度以及个能级上的粒子数目是独立的，所以应该分别对两个子系统的<u>各个能级上的粒子数目</u>求微分。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \Omega_{复合}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{'}} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln \Omega_{复合}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{''}} = 0 \end{cases}$$

拉氏乘子β的物理意义

为求出该复合系统的分布公式，需要根据前面的三个限制条件引入三个拉氏乘子，α′、α ″和 β。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \Omega_{\text{复合}}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{'}} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln \Omega_{\text{复合}}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{''}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \Omega_{\text{复合}}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{'}} + \alpha^{'} \dfrac{\partial \left(N_1 - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{'} \right)}{\partial \tilde{\alpha}_l^{'}} + \beta \dfrac{\partial \left(E - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{'} \varepsilon_l^{'} - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{''} \varepsilon_l^{''} \right)}{\partial \tilde{\alpha}_l^{'}} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln \Omega_{\text{复合}}}{\partial \tilde{\alpha}_l^{''}} + \alpha^{''} \dfrac{\partial \left(N_2 - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{''} \right)}{\partial \tilde{\alpha}_l^{''}} + \beta \dfrac{\partial \left(E - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{'} \varepsilon_l^{'} - \sum_l \tilde{\alpha}_l^{''} \varepsilon_l^{''} \right)}{\partial \tilde{\alpha}_l^{''}} = 0 \end{cases}$$

我们得到发生热交换后两个系统的分布公式：

$$\tilde{\alpha}_l^{'} = \omega_l^{'} e^{-\alpha^{'} - \beta \varepsilon_l^{'}}$$

$$\tilde{\alpha}_l^{''} = \omega_l^{''} e^{-\alpha^{''} - \beta \varepsilon_l^{''}}$$

拉氏乘子β的物理意义

发生热交换后两个系统的分布公式：

$$\tilde{\alpha}_l' = \omega_l' e^{-\alpha' - \beta\varepsilon_l'}$$

$$\tilde{\alpha}_l'' = \omega_l'' e^{-\alpha'' - \beta\varepsilon_l''}$$

热平衡后两个系统的α′和α″不同，但具有相同的β。我们知道，经过热交换后达到热平衡的两个孤立系统具有相同的温度。因此，β 应该是温度的函数。即：β＝ β(T)。

拉氏乘子α的物理意义

【假设1和2是同种粒子的不同相】。
如果使系统1和2即可以交换能量，又可以交换粒子数。则达到平衡时子系统1和2各自的能量和粒子数均不守恒，而新形成的复合系统的能量和粒子数守恒。但是两个子系统具有相同的化学势。此时，只能引入两个拉氏乘子α和β。得到分布如下：

$$\tilde{\alpha}_l' = \omega_l' e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l'}$$

$$\tilde{\alpha}_l'' = \omega_l'' e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l''}$$

两个子系统经过热交换和粒子数交换后，形成的复合系统达到热平衡，此时两个子系统具有相同的α和β。至此，我们知道，α应当与温度和化学势有关：$\alpha=\alpha(\mu, T)$。

§ 3.1 、玻尔兹曼分布

玻尔兹曼分布公式：

$$\alpha_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$\alpha = \alpha(\mu, T)$$

$$\beta = \beta(T)$$

§ 3.2、玻色和费米分布的导出

对于处在平衡态的孤立系统，具有确定的粒子数N、体积V和能量E。如果我们利用ε_l、ω_l、α_l分别表示粒子的能级、能级的简并度以及在处于能级上的粒子数，则下面两个限制条件对于任何一个分布$\{\alpha_l\}$都是成立的。

$$\begin{cases} \sum_l \alpha_l = N \\ \sum_l \alpha_l \varepsilon_l = E \end{cases}$$

3.2、玻色分布的导出

对于任意分布{α_l}，玻色系统对应的微观状态数目可以利用下式计算：

$$\Omega_{BE} = \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1)!}{\omega_l!(\omega_l - 1)!}$$

玻色分布就是使得上式取极大值的分布，即最概然分布。由于Ω的单调性与**ln Ω**一致，所以也就是使得**ln Ω**取极大值的分布。

3.2、玻色分布的导出

首先，我们对Ω 取对数，有：

$$\Omega_{BE} = \prod_l \frac{(\omega_l + \alpha_l - 1)!}{\omega_l!(\omega_l - 1)!}$$

$$\ln\Omega = \sum_l [\ln(\omega_l + \alpha_l - 1)! - \ln(\alpha_l)! - \ln(\omega_l - 1)!]$$

假设$\omega_1 >> 1, \alpha_1 >> 1$，利用Stirling公式：

$$\ln\Omega = \sum_l [(\omega_l + \alpha_l)\ln(\omega_l + \alpha_l) - \alpha_l \ln\alpha_l - \omega_l \ln\omega_l]$$

δlnΩ的变化等于零时，lnΩ有极值，即：

$$\delta\ln\Omega = \sum_l [\ln(\omega_l + \alpha_l) - \ln\alpha_l] \cdot \delta\alpha_l = 0$$

3.2、玻色分布的导出

求极值时需要将下面两个限制条件考虑去：

$$\delta N - \sum_l \delta a_l = 0$$

$$\delta E - \sum_l \varepsilon_l \delta a_l = 0$$

$$\delta \ln \Omega = \sum_l [\ln(\omega_l + a_l) - \ln a_l] \cdot \delta a_l = 0$$

利用拉氏乘子α，β乘以左式，并从δlnΩ中减去，则有：

$$\sum_l [\ln(\omega_l + a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta\varepsilon_l] \cdot \delta a_l = 0$$

$$\Rightarrow \ln(\omega_l + a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta\varepsilon_l = 0$$

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1}$$

$$\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1} = N$$

$$\sum_l \varepsilon_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} - 1} = E$$

这样，就获得了玻色分布公式。其中的拉氏乘子α，β也可以求出。

3.2、费米分布的导出

对于任意分布{α_l}，费米系统对应的微观状态数目可以利用下式计算：

$$\Omega_{FD} = \prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l!(\omega_l - \alpha_l)!}$$

费米分布就是使得上式取极大值的分布，即最概然分布。由于Ω的单调性与ln Ω一致，所以也就是使得ln Ω取极大值的分布。

3.2、费米分布的导出

$$\Omega_{FD}=\prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l!(\omega_l-\alpha_l)!}$$

对Ω取对数，并利用Sirling公式，有：

$$\ln\Omega=\sum_l[\ln\omega_l!-\ln\alpha_l!-\ln(\omega_l-\alpha_l)!]$$

$$\approx\sum_l[\omega_l\ln\omega_l-\alpha_l\ln\alpha_l-(\omega_l-\alpha_l)\ln(\omega_l-\alpha_l)]$$

δlnΩ的变化等于零时，lnΩ有极值，即：

$$\delta\ln\Omega=\sum_l[\ln(\omega_l-\alpha_l)-\ln\alpha_l]\cdot\delta\alpha_l=0$$

3.2、费米分布的导出

考虑两个限制条件，利用拉氏乘子法，我们会得到：

$$\delta N = \sum_l \delta a_l = 0; \quad \delta E = \sum_l \varepsilon_l \delta a_l = 0$$

$$\delta \ln \Omega = \sum_l [\ln(\omega_l - a_l) - \ln a_l] \cdot \delta a_l = 0$$

$$\sum_l [\ln(\omega_l - a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta \varepsilon_l] \cdot \delta a_l = 0$$

$$\Rightarrow \ln(\omega_l - a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta \varepsilon_l = 0$$

得到费米分布公式为：

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1}$$

$$\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1} = N$$

$$\sum_l \varepsilon_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1} = E$$

3.2、玻色和费米分布公式

费米分布和玻色分布统一如下。其中“＋”表示费米分布；“－”表示玻色分布：

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}$$

$$f_s = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_s} \pm 1}$$

在推导中，我们利用了一些假设：$\omega_l \gg 1$，$\alpha_l \gg 1$等条件，这些条件并不一定满足，这是一个重要缺陷。

后面我们利用系综原理给出上述分布的严格推导。

$$\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1} = N$$

$$\sum_l \varepsilon_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1} = E$$

3.2、玻色和费米分布

玻色分布和费米分布分别是该类系统的热平衡态分布。

$$\delta \ln \Omega = \sum_l [\ln(\omega_l \pm \alpha_l) - \ln \alpha_l] \cdot \delta \alpha_l = 0$$

$$\delta^2 \ln \Omega = -\sum_l \left(\frac{\mp 1}{\omega_l \pm \alpha_l} + \frac{1}{\alpha_l} \right) \cdot (\delta \alpha_l)^2$$

$$\ln \frac{\Omega + \Delta\Omega}{\Omega} \approx \frac{1}{2} \delta^2 \ln \Omega$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\mp 1}{\omega_l \pm \alpha_l} + \frac{1}{\alpha_l} \right) \cdot (\delta \alpha_l)^2$$

$$\overset{\omega_l \gg \alpha_l}{\approx} -\frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\delta \alpha_l}{\alpha_l} \right)^2 \cdot \alpha_l$$

假设对玻色或者费米分布的偏离为 $(\Delta\alpha_1/\alpha_1) \approx 10^{-5}$，则两者的$1\mathrm{n}\Omega$相差为：

假设 $N \approx 10^{23}$，则

$$\frac{\Omega + \Delta\Omega}{\Omega} \approx e^{-10^{13}}$$

这说明即使对最概然分布有很微小的偏离，其状态数与最概然分布相比，近似为零。

玻尔兹曼、玻色、费米分布的关系

玻色分布

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}$$

非兼并条件下

$e^{\alpha} \gg 1$

$a_l \ll \omega_l$

费密分布

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}+1}$$

注意：全同性带来的微观状态数目的差异

$$\Omega_{BE} = \frac{\Omega_{MB}}{N!}$$

玻尔兹曼分布

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l} = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}}$$

注意：全同性带来的微观状态数目的差异

$$\Omega_{FD} = \frac{\Omega_{MB}}{N!}$$

三种分布均是最概然分布，可以看作是系统达到热平衡时所处的分布。任何偏离该类分布出现的可能性均小到可以忽略不计。

第三课小结

系统的分布$\{\alpha_l\}$：每一个能级上的粒子数

系统分布对应的微观状态数：由全同性以及统计特性决定

非定域系统：不可分辨粒子：玻色系统

$$\prod_l \frac{(\omega_l+\alpha_l-1)!}{\alpha_l!\cdot(\omega_l-1)!}$$

$$\alpha_l=\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}$$

定域系统，可分辨粒子：玻尔兹曼系统：

$$\frac{N!}{\prod_l \alpha_l!}\cdot\prod_l \omega_l^{\alpha_l}$$

$$\alpha_l=\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}}$$

非定域系统，不可分辨粒子：费米系统

$$\prod_l \frac{\omega_l!}{\alpha_l!\cdot(\omega_l-\alpha_l)!}$$

$$\alpha_l=\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}+1}$$

经典粒子，可分辨，玻尔兹曼分布； $\Rightarrow \quad \omega_l=\Delta\omega_l / h_o^r$