第二章　随机变量及其分布

习题 2.1

1．　口袋中有 5 个球，编号为 1, 2, 3, 4, 5．从中任取 3 只，以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码．

（1）试求 X 的分布列；

（2）写出 X 的分布函数，并作图．

解：（1）X 的全部可能取值为 3, 4, 5，

$$且\ P\{X=3\}=\frac{1}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}=0.1，\quad P\{X=4\}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{3}{10}=0.3，\quad P\{X=5\}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{6}{10}=0.6，$$

故 X 的分布列为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

；

（2）因分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=3, 4, 5$，

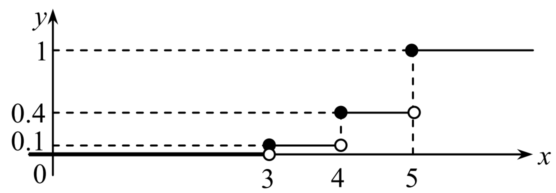
当 $x<3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $3\le x<4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}=0.1$，

当 $4\le x<5$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=0.1+0.3=0.4$，

当 $x\ge 5$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}=0.1+0.3+0.6=1$，

$$故\ X\ 的分布函数\ F(x)=\begin{cases}0, & x<3;\\ 0.1, & 3\le x<4;\\ 0.4, & 4\le x<5;\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$



2．　一颗骰子抛两次，求以下随机变量的分布列：

（1）X 表示两次所得的最小点数；

（2）Y 表示两次所得的点数之差的绝对值．

解：（1）X 的全部可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6，

$$且\ P\{X=1\}=\frac{6^2-5^2}{6^2}=\frac{11}{36}，\quad P\{X=2\}=\frac{5^2-4^2}{6^2}=\frac{9}{36}，$$

$$P\{X=3\}=\frac{4^2-3^2}{6^2}=\frac{7}{36}，\quad P\{X=4\}=\frac{3^2-2^2}{6^2}=\frac{5}{36}，$$

$$P\{X=5\}=\frac{2^2-1}{6^2}=\frac{3}{36}，\quad P\{X=6\}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}，$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

；

（2）Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

$$且\ P\{Y=0\}=\frac{6}{6^2}=\frac{6}{36}，\quad P\{Y=1\}=\frac{5\times 2}{6^2}=\frac{10}{36}，$$

$$P\{Y=2\}=\frac{4\times 2}{6^2}=\frac{8}{36}，\quad P\{Y=3\}=\frac{3\times 2}{6^2}=\frac{6}{36}，$$

$P\{Y=4\}=\dfrac{2\times 2}{6^2}=\dfrac{4}{36}$，$P\{Y=5\}=\dfrac{1\times 2}{6^2}=\dfrac{2}{36}$，

故 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{6}{36}$	$\dfrac{10}{36}$	$\dfrac{8}{36}$	$\dfrac{6}{36}$	$\dfrac{4}{36}$	$\dfrac{2}{36}$

.

3． 口袋中有 7 个白球、3 个黑球．

（1）每次从中任取一个不放回，求首次取出白球的取球次数 X 的概率分布列；

（2）如果取出的是黑球则不放回，而另外放入一个白球，此时 X 的概率分布列如何．

解：（1）X 的全部可能取值为 $1, 2, 3, 4$，

且 $P\{X=1\}=\dfrac{7}{10}$，$P\{X=2\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$，

$P\{X=3\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{120}$，$P\{X=4\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{7}{7}=\dfrac{1}{120}$，

故 X 的概率分布列为

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{7}{120}$	$\dfrac{1}{120}$

；

（2）X 的全部可能取值仍为 $1, 2, 3, 4$，

且 $P\{X=1\}=\dfrac{7}{10}=0.7$，$P\{X=2\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{8}{10}=0.24$，

$P\{X=3\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{10}\times\dfrac{9}{10}=0.054$，$P\{X=4\}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{10}{10}=0.006$，

故 X 的概率分布列为

X	1	2	3	4
P	0.7	0.24	0.054	0.006

.

4． 有 3 个盒子，第一个盒子装有 1 个白球、4 个黑球；第二个盒子装有 2 个白球、3 个黑球；第三个盒子装有 3 个白球、2 个黑球．现任取一个盒子，从中任取 3 个球．以 X 表示所取到的白球数．

（1）试求 X 的概率分布列；

（2）取到的白球数不少于 2 个的概率是多少？

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示“取到第一个、第二个、第三个盒子”，

（1）X 的全部可能取值为 $0, 1, 2, 3$，

且 $P\{X=0\}=P(A_1)P\{X=0\,|\,A_1\}+P(A_2)P\{X=0\,|\,A_2\}+P(A_3)P\{X=0\,|\,A_3\}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{4}{30}+\frac{1}{30}+0=\frac{1}{6},$$

$P\{X=1\}=P(A_1)P\{X=1\,|\,A_1\}+P(A_2)P\{X=1\,|\,A_2\}+P(A_3)P\{X=1\,|\,A_3\}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1\times\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{6}{30}+\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{1}{2},$$

$P\{X=2\}=P(A_1)P\{X=2\,|\,A_1\}+P(A_2)P\{X=2\,|\,A_2\}+P(A_3)P\{X=2\,|\,A_3\}$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}=0+\frac{3}{30}+\frac{6}{30}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=3\}=P(A_1)P\{X=3\,|\,A_1\}+P(A_2)P\{X=3\,|\,A_2\}+P(A_3)P\{X=3\,|\,A_3\}$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}=0+0+\frac{1}{30}=\frac{1}{30},$$

故 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

；

（2）所求概率为 $P\{X\ge 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

5． 掷一颗骰子 4 次，求点数 6 出现的次数的概率分布.

解：设 X 表示点数 6 出现的次数，有 X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，

且试验次数 $n=4$，每次掷骰子点数 6 出现的概率 $p=\frac{1}{6}$，

则 $P\{X=0\}=\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}$， $P\{X=1\}=\binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{500}{1296}$，

$P\{X=2\}=\binom{4}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{1296}$， $P\{X=3\}=\binom{4}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{20}{1296}$，

$P\{X=4\}=\binom{4}{4}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296}$，

故 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

.

6． 从一副 52 张的扑克牌中任取 5 张，求其中黑桃张数的概率分布.

解：设 X 表示黑桃张数，有 X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

则 $P\{X=0\}=\frac{\binom{13}{0}\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}=\frac{575757}{2598960}=0.2215$， $P\{X=1\}=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{4}}{\binom{52}{5}}=\frac{1069263}{2598960}=0.4114$，

$P\{X=2\}=\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}}=\frac{712842}{2598960}=0.2743$， $P\{X=3\}=\frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}=\frac{211926}{2598960}=0.0815$，

$$P\{X=4\}=\frac{\binom{13}{4}\binom{39}{1}}{\binom{52}{5}}=\frac{27885}{2598960}=0.0107,\quad P\{X=5\}=\frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}}=\frac{1287}{2598960}=0.0005,$$

故 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.2215	0.4114	0.2743	0.0815	0.0107	0.0005

.

7. 一批产品共有 100 件，其中 10 件是不合格品．根据验收规则，从中任取 5 件产品进行质量检验，假如 5 件中无不合格品，则这批产品被接受，否则就要重新对这批产品逐个检验．

（1）试求 5 件产品中不合格品数 X 的分布列；

（2）需要对这批产品进行逐个检验的概率是多少？

解：（1）这 5 件产品中不合格品数 X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

则 $$P\{X=0\}=\frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}=\frac{43949268}{75287520}=0.583752,\quad P\{X=1\}=\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{4}}{\binom{100}{5}}=\frac{25551900}{75287520}=0.339391,$$

$$P\{X=2\}=\frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}=\frac{5286600}{75287520}=0.070219,\quad P\{X=3\}=\frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}=\frac{480600}{75287520}=0.006384,$$

$$P\{X=4\}=\frac{\binom{10}{4}\binom{90}{1}}{\binom{100}{5}}=\frac{18900}{75287520}=0.000251,\quad P\{X=5\}=\frac{\binom{10}{5}\binom{90}{0}}{\binom{100}{5}}=\frac{252}{75287520}=0.000003,$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.583752	0.339391	0.070219	0.006384	0.000251	0.000003

;

（2）所求概率为 $P\{X>0\}=1-P\{X=0\}=1-0.583752=0.416248$.

8. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1;\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<3;\\ \dfrac{1}{2}, & 3\le x<6;\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

试求 X 的概率分布列及 $P\{X<3\}$，$P\{X\le 3\}$，$P\{X>1\}$，$P\{X\ge 1\}$.

解：X 的全部可能取值为其分布函数 $F(x)$ 的分段点 0, 1, 3, 6，

且 $P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=\dfrac{1}{4}-0=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$， $P\{X=6\}=F(6)-F(6-0)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

故 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

；

且 $P\{X<3\}=F(3-0)=\dfrac{1}{3}$； $P\{X\le 3\}=F(3)=\dfrac{1}{2}$； $P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-F(1)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$；

$P\{X\ge 1\}=1-P\{X<1\}=1-F(1-0)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

9. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \ln x, & 1\le x<\mathrm{e};\\ 1, & x\ge \mathrm{e}.\end{cases}$$

试求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\le 3\}$，$P\{2<X<2.5\}$.

解：$P\{X<2\}=F(2-0)=\ln 2$；$P\{0<X\le 3\}=F(3)-F(0)=1-0=1$；

$P\{2<X<2.5\}=F(2.5-0)-F(2)=\ln 2.5-\ln 2=\ln 1.25$.

10. 若 $P\{X\ge x_1\}=1-\alpha$，$P\{X\le x_2\}=1-\beta$，其中 $x_1<x_2$，试求 $P\{x_1<X<x_2\}$.

注：此题有误，应改为“试求 $P\{x_1\le X\le x_2\}$”

解：$P\{x_1\le X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X<x_1\}=P\{X\le x_2\}+P\{X\ge x_1\}-1=1-\beta+1-\alpha-1=1-\alpha-\beta$.

11. 从 1, 2, 3, 4, 5 五个数字中任取三个，按大小排列记为 $x_1<x_2<x_3$，令 $X=x_2$，试求

（1）X 的分布函数；

（2）$P\{X<2\}$ 及 $P\{X>4\}$.

解：（1）X 的全部可能取值为 2, 3, 4，

且 $P\{X=2\}=\dfrac{1\times 3}{\binom{5}{3}}=\dfrac{3}{10}=0.3$， $P\{X=3\}=\dfrac{2\times 2}{\binom{5}{3}}=\dfrac{4}{10}=0.4$， $P\{X=4\}=\dfrac{3\times 1}{\binom{5}{3}}=\dfrac{3}{10}=0.3$，

因分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=2, 3, 4$，

当 $x<2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=2\}=0.3$，

当 $3\le x<4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=0.3+0.4=0.7$，

当 $x\ge 4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，

故 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ 0.3, & 2\le x<3;\\ 0.7, & 3\le x<4;\\ 1, & x\ge 4;\end{cases}$

（2）$P\{X<2\}=P(\varnothing)=0$，$P\{X>4\}=P(\varnothing)=0$.

12. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 X 的分布函数.

解：分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=-1, 0, 1$，

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-1}^{x}[1-(-u)]du=\left(u+\frac{u^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^{x}=x+\frac{x^2}{2}-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-1}^{0}[1-(-u)]du+\int_{0}^{x}(1-u)du=\left(u+\frac{u^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^{0}+\left(u-\frac{u^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{x}$

$$=0-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-0=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2},$$

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，

故 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & -1\le x<0;\\ -\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

13．如果 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $P\{X\le 1.5\}$．

解：$P\{X\le 1.5\}=\int_{-\infty}^{1.5}p(x)dx=\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{1.5}(2-x)dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{1}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{1}^{1.5}=\frac{1}{2}-0+\left(3-\frac{1.5^2}{2}\right)-\frac{3}{2}=\frac{7}{8}$．

14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

试求

（1）系数 A；

（2）X 落在区间 $(0,\pi/4)$ 内的概率．

解：（1）由密度函数正则性知 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos xdx=A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=A\sin\frac{\pi}{2}-A\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2A=1$，

故 $A=\frac{1}{2}$；

（2）所求概率为 $P\{0<X<\frac{\pi}{4}\}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{1}{2}\sin x\bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}-0=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

15．设连续随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求

（1）系数 A；

（2）X 落在区间 $(0.3, 0.7)$ 内的概率；

（3）X 的密度函数.

解：（1）由连续随机变量分布函数的连续性知 $1=F(1)=F(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=A\cdot 1^2=A$，故 $A=1$；

（2）所求概率为 $P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$；

（3）密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=x^2$，有 $p(x)=F'(x)=2x$，

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

故 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

16．学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时．它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}cx^2+x, & 0\le x\le 0.5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）确定常数 c；

（2）写出 X 的分布函数；

（3）试求在 20min 内完成一道作业的概率；

（4）试求 10min 以上完成一道作业的概率.

解：（1）由密度函数正则性知 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{0.5}(cx^2+x)dx=\left(c\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.5}=\dfrac{c}{24}+\dfrac{1}{8}=1$，故 $c=21$；

（2）分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$，分段点为 $x=0, 0.5$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0\le x<0.5$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_0^x(21u^2+u)du=\left(7u^3+\dfrac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=7x^3+\dfrac{x^2}{2}$，

当 $x\ge 0.5$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，

故 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 7x^3+\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<0.5;\\ 1, & x\ge 0.5;\end{cases}$

（3）所求概率为 $P\{X\le\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}\}=F\left(\dfrac{1}{3}\right)=7\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{27}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{17}{54}$；

（4）所求概率为 $P\{X\ge\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}\}=1-F\left(\dfrac{1}{6}\right)=1-7\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=1-\dfrac{7}{216}-\dfrac{1}{72}=\dfrac{103}{108}$.

17．某加油站每周补给一次油．如果这个加油站每周的销售量（单位：千升）为一随机变量，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}0.05\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4, & 0<x<100;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试问该油站的储油罐需要多大，才能把一周内断油的概率控制在 5%以下？

解：设这个加油站每周的销售量为 X 千升，储油罐的储油量为 a 千升，有 $P\{X > a\} \le 0.05$，

则 $P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}p(x)dx=\int_a^{100}0.05\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4dx=-\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^5\Bigg|_a^{100}=\left(1-\dfrac{a}{100}\right)^5\le 0.05$，

故 $a\ge 100(1-\sqrt[5]{0.05})=45.0720$．

18．设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

已知事件 $A=\{X>a\}$和 $B=\{Y>a\}$独立，且 $P(A\cup B)=3/4$，求常数 a．

解：由于事件 A 和 B 独立，且显然有 $P(A)=P(B)$，

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2P(A)-[P(A)]^2=\dfrac{3}{4}$，

可得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$ 或 $P(A)=\dfrac{3}{2}$（舍去），

显然 $0<a<2$，有 $P(A)=P\{X>a\}=\int_a^2\dfrac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}x^3\Big|_a^2=1-\dfrac{a^3}{8}=\dfrac{1}{2}$，

故 $a=\sqrt[3]{4}$．

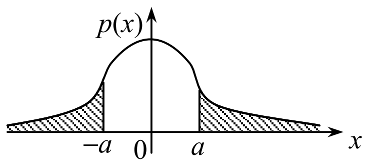
19．设连续随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，求证对任意实数 $a>0$，有

（1）$F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)dx$；

（2）$P\{|X|<a\}=2F(a)-1$；

（3）$P\{|X|>a\}=2[1-F(a)]$.

证：（1）因 $p(x)$ 为偶函数，有 $\int_{-\infty}^{-a}p(x)dx=\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 且 $\int_{-\infty}^0 p(x)dx=0.5$，



则 $F(a)=\int_{-\infty}^a p(x)dx=\int_{-\infty}^0 p(x)dx+\int_0^a p(x)dx=0.5+\int_0^a p(x)dx$，

故 $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}p(x)dx=\int_a^{+\infty}p(x)dx=1-\int_{-\infty}^a p(x)dx=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)dx$；

（2）$P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=F(a)-F(-a)=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$；

（3）$P\{|X|>a\}=1-P\{|X|\le a\}=1-P\{|X|<a\}=1-[2F(a)-1]=2-2F(a)$.

习题 2.2

1． 设离散型随机变量 X 的分布列为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

试求 $E(X)$ 和 $E(3X+5)$．

解：$E(X)=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$；$E(3X+5)=(-1)\times 0.4+5\times 0.3+11\times 0.3=4.4$．

2． 某服装店根据历年销售资料得知：一位顾客在商店中购买服装的件数 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.10	0.33	0.31	0.13	0.09	0.04

试求顾客在商店平均购买服装件数．

解：平均购买服装件数为 $E(X)=0\times 0.10+1\times 0.33+2\times 0.31+3\times 0.13+4\times 0.09+5\times 0.04=1.9$．

3． 某地区一个月内发生重大交通事故数 X 服从如下分布

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0.301	0.362	0.216	0.087	0.026	0.006	0.002

试求该地区发生重大交通事故的月平均数．

解：月平均数 $E(X)=0\times 0.301+1\times 0.362+2\times 0.216+3\times 0.087+4\times 0.026+5\times 0.006+6\times 0.002=1.201$．

4． 一海运货船的甲板上放着 20 个装有化学原料的圆桶，现已知其中有 5 桶被海水污染了．若从中随机抽取 8 桶，记 X 为 8 桶中被污染的桶数，试求 X 的分布列，并求 $E(X)$．

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

且 $P\{X=0\}=\dfrac{\binom{15}{8}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{6435}{125970}=0.0511$，$P\{X=1\}=\dfrac{\binom{5}{1}\binom{15}{7}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{32175}{125970}=0.2554$，

$P\{X=2\}=\dfrac{\binom{5}{2}\binom{15}{6}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{50050}{125970}=0.3973$，$P\{X=3\}=\dfrac{\binom{5}{3}\binom{15}{5}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{30030}{125970}=0.2384$，

$P\{X=4\}=\dfrac{\binom{5}{4}\binom{15}{4}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{6825}{125970}=0.0542$，$P\{X=5\}=\dfrac{\binom{5}{5}\binom{15}{3}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{455}{125970}=0.0036$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0511	0.2554	0.3973	0.2384	0.0542	0.0036

且 $E(X)=0\times 0.0511+1\times 0.2554+2\times 0.3973+3\times 0.2384+4\times 0.0542+5\times 0.0036=2$．

5． 用天平称某种物品的质量（砝码仅允许放在一个盘中），现有三组砝码：（甲）1, 2, 2, 5, 10（g）；（乙）1, 2, 3, 4, 10（g）；（丙）1, 1, 2, 5, 10（g），称重时只能使用一组砝码．问：当物品的质量为 1g、2g、…、10g 的概率是相同的，用哪一组砝码称重所用的平均砝码数最少？

解：设 X_1, X_2, X_3 分别表示使用甲、乙、丙组砝码称重时需要的砝码个数，

当物品的质量为 1g、2g、…、10g 时，

有 $X_1 = 1$、1、2、2、1、2、2、3、3、1，即 $P\{X_1 = 1\} = 0.4$，$P\{X_1 = 2\} = 0.4$，$P\{X_1 = 3\} = 0.2$，

$X_2 = 1$、1、1、1、2、2、2、3、3、1，即 $P\{X_2 = 1\} = 0.5$，$P\{X_2 = 2\} = 0.3$，$P\{X_2 = 3\} = 0.2$，

$X_3 = 1$、1、2、3、1、2、2、3、4、1，

即 $P\{X_3 = 1\} = 0.4$，$P\{X_3 = 2\} = 0.3$，$P\{X_3 = 3\} = 0.2$，$P\{X_3 = 4\} = 0.1$，

则平均砝码数 $E(X_1) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 = 1.8$，$E(X_2) = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 = 1.7$，

$E(X_3) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2$，

故用乙组砝码称重所用的平均砝码数最少.

6. 假设有十只同种电器元件，其中有两只不合格品．装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是不合格品，则扔掉重新任取一只；如仍是不合格品，则扔掉再取一只，试求在取到合格品之前，已取出的不合格品只数的数学期望.

解：设 X 表示在取到合格品之前已取出的不合格品只数，X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

则 $P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$，$P\{X=2\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{8}=\dfrac{1}{45}$，

故 $E(X)=0\times\dfrac{4}{5}+1\times\dfrac{8}{45}+2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{2}{9}$.

7. 对一批产品进行检查，如查到第 a 件全为合格品，就认为这批产品合格；若在前 a 件中发现不合格品即停止检查，且认为这批产品不合格．设产品的数量很大，可以认为每次查到不合格品的概率都是 p．问每批产品平均要查多少件？

解：设 X 表示检查一批产品要查的件数，X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, a-1, a$，

则 $P\{X = 1\} = p$，$P\{X = 2\} = (1-p)p$，…，$P\{X = a-1\} = (1-p)^{a-2}p$，$P\{X = a\} = (1-p)^{a-1}$，

即 $E(X) = 1 \cdot p + 2(1-p)p + \cdots + (a-1)(1-p)^{a-2}p + a(1-p)^{a-1}$，

有$(1-p)E(X) = 1 \cdot (1-p)p + 2(1-p)^2p + \cdots + (a-2)(1-p)^{a-2}p + (a-1)(1-p)^{a-1}p + a(1-p)^a$，

得 $E(X) - (1-p)E(X) = p + (1-p)p + \cdots + (1-p)^{a-2}p + a(1-p)^{a-1} - (a-1)(1-p)^{a-1}p - a(1-p)^a$，

即 $pE(X)=\dfrac{p[1-(1-p)^{a-1}]}{1-(1-p)}+(1-p)^{a-1}[a-(a-1)p-a(1-p)]$

$$= 1-(1-p)^{a-1}+(1-p)^{a-1}\cdot p = 1-(1-p)^{a-1}\cdot(1-p) = 1-(1-p)^a,$$

故 $E(X)=\dfrac{1-(1-p)^a}{p}$.

8. 某人参加"答题秀"，一共有问题 1 和问题 2 两个问题，他可以自行决定回答这两个问题的顺序．如果他先回答问题 i，那么只有回答正确，他才被允许回答另一题．如果他有 60%的把握答对问题 1，而答对问题 1 将获得 200 元奖励；有 80%的把握答对问题 2，而答对问题 2 将获得 100 元奖励．问他应该先回答哪个问题，才能使获得奖励的期望值最大化？

解：设答对问题 i 记为事件 A_i，记为他先回答问题 i 获得的奖励金额为 X_i 元，$i = 1, 2$，

有 X_1 的全部可能取值为 0, 200, 300，X_2 的全部可能取值为 0, 100, 300，

且 $P\{X_1=0\}=P(\overline{A}_1)=0.4$，$P\{X_1=200\}=P(A_1\overline{A}_2)=0.12$，$P\{X_1=300\}=P(A_1A_2)=0.48$，

$P\{X_2=0\}=P(\overline{A}_2)=0.2$，$P\{X_2=100\}=P(A_2\overline{A}_1)=0.32$，$P\{X_2=300\}=P(A_2A_1)=0.48$，

则 $E(X_1) = 0.4 \times 0 + 0.12 \times 200 + 0.48 \times 300 = 168$，$E(X_2) = 0.2 \times 0 + 0.32 \times 100 + 0.48 \times 300 = 176$，

故 $E(X_1) < E(X_2)$，他应该先回答问题 2.

9. 某人想用 10000 元投资于某股票，该股票当前价格是 2 元/股，假设一年后该股票等可能的为 1 元/股和 4 元/股．而理财顾问给他的建议是：若期望一年后所拥有的股票市值达到最大，则现在就购买；

若期望一年后所拥有股票数量达到最大，则一年以后购买．试问理财顾问的建议是否正确？为什么？

解：设 X 表示一年后该股票的价格，X 的全部可能取值为 1, 4，

若现在就购买股票所拥有的股票数量为 5000 股，一年后的股票市值为 $5000X$ 元，

若一年以后购买股票所拥有的股票数量为 $\dfrac{10000}{X}$ 股，股票市值为 10000 元，

因 $E(5000X) = 0.5 \times 5000 \times 1 + 0.5 \times 5000 \times 4 = 12500 > 10000$，

故现在就购买股票，则一年后所拥有的股票市值的数学期望达到最大；

因 $E\left(\dfrac{10000}{X}\right) = 0.5 \times \dfrac{10000}{1} + 0.5 \times \dfrac{10000}{4} = 6250 > 5000$，

故一年以后购买股票，则所拥有的股票数量的数学期望达到最大．

10．保险公司的某险种规定：如果某个事件 A 在一年内发生了，则保险公司应付给投保户金额 a 元，而事件 A 在一年内发生的概率为 p．如果保险公司向投保户收取的保费为 ka 元，则问 k 为多少，才能使保险公司期望收益达到 a 的 10%？

解：设 X 表示保险公司的收益，X 的全部可能取值为 $ka, ka - a$，

则 $E(X) = (1 - p) \times ka + p \times (ka - a) = (k - p)\,a = 0.1a$，

故 $k = p + 0.1$．

11．某厂推土机发生故障后的维修时间 T 是一个随机变量（单位：h），其密度函数为

$$p(t) = \begin{cases} 0.02\,\mathrm{e}^{-0.02t}, & t > 0; \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

试求平均维修时间．

解：平均维修时间 $E(T) = \int_0^{+\infty} t \cdot 0.02\,\mathrm{e}^{-0.02t}\,dt = \int_0^{+\infty} t(-d\,\mathrm{e}^{-0.02t}) = -t\,\mathrm{e}^{-0.02t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-0.02t}\,dt = \dfrac{\mathrm{e}^{-0.02t}}{-0.02}\Bigg|_0^{+\infty} = 50$．

12．某新产品在未来市场上的占有率 X 是仅在区间 (0, 1) 上取值的随机变量，它的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 4(1 - x)^3, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求平均市场占有率．

解：$E(X) = \int_0^1 x \cdot 4(1 - x)^3\,dx = \int_0^1 (4x - 12x^2 + 12x^3 - 4x^4)dx = \left(2x^2 - 4x^3 + 3x^4 - \dfrac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{5}$．

13．设随机变量 X 的密度函数如下，试求 $E(2X + 5)$．

$$p(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

解：$E(2X + 5) = \int_0^{+\infty} (2x + 5)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} (2x + 5)(-d\,\mathrm{e}^{-x}) = -(2x + 5)\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = 5 - 2\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 7$．

14．设随机变量 X 的分布函数如下，试求 $E(X)$．

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}, & x < 0; \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1; \\ 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{e^x}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，$=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{1}{2}d(e^x)+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]$

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{e^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^x\,dx+\dfrac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$，

因 $\int_{-\infty}^{0}xe^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(e^x)=x\cdot e^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx=0-e^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1$，

$\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x\cdot d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2-4e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}=6$，

故 $E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times6=1$.

15．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

如果 $E(X)=\dfrac{2}{3}$，求 a 和 b.

解：由正则性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{0}^{1}(a+bx^2)dx=\left(ax+b\cdot\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=a+\dfrac{b}{3}=1$，

又 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{0}^{1}x(a+bx^2)dx=\left(a\cdot\dfrac{x^2}{2}+b\cdot\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}=\dfrac{2}{3}$，

故 $a=\dfrac{1}{3},\ b=2$.

16．某工程队完成某项工程的时间 X（单位：月）是一个随机变量，它的分布列为

X	10	11	12	13
P	0.4	0.3	0.2	0.1

（1）试求该工程队完成此项工程的平均月数；

（2）设该工程队所获利润为 $Y=50(13-X)$，单位为万元．试求该工程队的平均利润；

（3）若该工程队调整安排，完成该项工程的时间 X（单位：月）的分布为

X	10	11	12
P	0.5	0.4	0.1

则其平均利润可增加多少？

解：（1）平均月数 $E(X)=10\times0.4+11\times0.3+12\times0.2+13\times0.1=11$.

（2）平均利润为 $E(Y)=E[50(13-X)]=150\times0.4+100\times0.3+50\times0.2+0\times0.1=100$（万元）；

（3）因 $E(Y_1)=E[50(13-X_1)]=150\times0.5+100\times0.4+50\times0.1=120$，有 $E(Y_1)-E(Y)=20$，
故平均利润增加 20 万元.

17．设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 独立重复观察 4 次，Y 表示观察值大于$\pi/3$ 的次数，求 Y^2 的数学期望．

解：Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，因 $p=P\{X>\dfrac{\pi}{3}\}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

则 $P\{Y=0\}=(1-p)^4=\dfrac{1}{16}$， $P\{Y=1\}=\dbinom{4}{1}\cdot p(1-p)^3=\dfrac{4}{16}$， $P\{Y=2\}=\dbinom{4}{2}\cdot p^2(1-p)^2=\dfrac{6}{16}$，

$P\{Y=1\}=\dbinom{4}{3}\cdot p^3(1-p)=\dfrac{4}{16}$， $P\{Y=4\}=p^4=\dfrac{1}{16}$，

故 $E(Y^2)=0^2\times\dfrac{1}{16}+1^2\times\dfrac{4}{16}+2^2\times\dfrac{6}{16}+3^2\times\dfrac{4}{16}+4^2\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{80}{16}=5$．

18．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $\dfrac{1}{X^2}$ 的数学期望．

解：$E\left(\dfrac{1}{X^2}\right)=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\int_0^2\frac{3}{8}dx=\frac{3}{4}$．

19．设 X 为仅取非负整数的离散随机变量，若其数学期望存在，证明

（1） $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X\ge k\}$；

（2） $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X>k\}=\frac{1}{2}[E(X^2)-E(X)]$．

证：（1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X\ge k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{X=n\}=E(X)$；

（2） $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X>k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}k\sum_{n=k+1}^{+\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}kP\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)P\{X=n\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}n^2P\{X=n\}-\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{X=n\}\right]=\frac{1}{2}[E(X^2)-E(X)].$$

20．设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且数学期望存在，证明：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx.$$

证：设 X 的密度函数为 $p(x)$，有 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}xp(x)dx+\int_{-\infty}^{0}xp(x)dx$，

因$\int_0^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^x dy\right)p(x)dx = \int_0^{+\infty} dx\int_0^x p(x)dy = \int_0^{+\infty} dy\int_y^{+\infty} p(x)dx = \int_0^{+\infty} dy\cdot F(x)\Big|_y^{+\infty}$

$= \int_0^{+\infty}[1-F(y)]dy = \int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx$，

且$\int_{-\infty}^0 xp(x)dx = \int_{-\infty}^0\left(-\int_x^0 dy\right)p(x)dx = -\int_{-\infty}^0 dx\int_x^0 p(x)dy = -\int_{-\infty}^0 dy\int_{-\infty}^y p(x)dx = -\int_{-\infty}^0 dy\cdot F(x)\Big|_{-\infty}^y$

$= -\int_{-\infty}^0 F(y)dy = -\int_{-\infty}^0 F(x)dx$，

故$E(X) = \int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx$.

21．设 X 为非负连续随机变量，若 $E(X^n)$存在，试证明：

（1）$E(X) = \int_0^{+\infty} P\{X > x\}dx$；

（2）$E(X^n) = \int_0^{+\infty} nx^{n-1}P\{X > x\}dx$.

证：设 X 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，当 $x < 0$ 时，$p(x) = 0$，

（1）$E(X) = \int_0^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^x dy\right)p(x)dx = \int_0^{+\infty} dx\int_0^x p(x)dy = \int_0^{+\infty} dy\int_y^{+\infty} p(x)dx = \int_0^{+\infty} dy\cdot F(x)\Big|_y^{+\infty}$

$= \int_0^{+\infty}[1-F(y)]dy = \int_0^{+\infty} P\{X > x\}dx$；

（2）$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n p(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^x ny^{n-1}dy\right)p(x)dx = \int_0^{+\infty} dx\int_0^x ny^{n-1}p(x)dy = \int_0^{+\infty} dy\int_y^{+\infty} ny^{n-1}p(x)dx$

$= \int_0^{+\infty} dy\cdot ny^{n-1}F(x)\Big|_y^{+\infty} = \int_0^{+\infty} ny^{n-1}[1-F(y)]dy = \int_0^{+\infty} nx^{n-1}P\{X > x\}dx$.

习题 2.3

1．设随机变量 X 满足 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$，已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，试求 λ．

解：因 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$，有 $E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$，

则 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-2\lambda+2=1$，

故 $(\lambda-1)^2=0$，即 $\lambda=1$．

2．假设有 10 只同种电器元件，其中有两只不合格品．装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是不合格品，则扔掉重新任取一只；如仍是不合格品，则扔掉再取一只，试求在取到合格品之前，已取出的不合格品数的方差．

解：设 X 表示在取到合格品之前已取出的不合格品只数，X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

则 $P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$，$P\{X=2\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{8}=\dfrac{1}{45}$，

得 $E(X)=0\times\dfrac{4}{5}+1\times\dfrac{8}{45}+2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{2}{9}$，且 $E(X^2)=0^2\times\dfrac{4}{5}+1^2\times\dfrac{8}{45}+2^2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{12}{45}=\dfrac{4}{15}$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{4}{15}-\left(\dfrac{2}{9}\right)^2=\dfrac{88}{405}$．

3．已知 $E(X)=-2$，$E(X^2)=5$，求 $\mathrm{Var}(1-3X)$．

解：因 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=5-(-2)^2=1$，故 $\mathrm{Var}(1-3X)=(-3)^2\,\mathrm{Var}(X)=9\times1=9$．

4．设 $P\{X=0\}=1-P\{X=1\}$，如果 $E(X)=3\mathrm{Var}(X)$，求 $P\{X=0\}$．

解：因 $P\{X=0\}+P\{X=1\}=1$，有 X 的全部可能取值为 0, 1，设 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$，

则 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$，$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$，即 $\mathrm{Var}(X)=p-p^2$，

因 $E(X)=3\mathrm{Var}(X)$，有 $p=3(p-p^2)$，可得 $2p-3p^2=0$，即 $p=\dfrac{2}{3}$ 或 $p=0$，

故 $P\{X=0\}=1-p=\dfrac{1}{3}$ 或 1．

5．设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2}, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge1.\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(X)$．

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{e^x}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{e^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^x\,dx+\dfrac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$，

因 $\int_{-\infty}^{0}xe^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(e^x)=x\cdot e^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx=0-e^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1$，

$$\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx = -2\int_1^{+\infty} x\cdot d[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}] = -2x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx = 2 - 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_1^{+\infty} = 6\text{，}$$

可得 $E(X) = \frac{1}{2}\times(-1) + \frac{1}{4}\times 6 = 1$，

且 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}dx + \int_1^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2\,\mathrm{e}^x\,dx + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx$

因 $\int_{-\infty}^{0} x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot d(\mathrm{e}^x) = x^2\cdot\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\cdot 2xdx = 0 - 2\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,dx = 2$，

$$\int_1^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx = -2\int_1^{+\infty} x^2\cdot d[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}] = -2x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\cdot 2xdx$$

$$= 2 + 4\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}\,dx = 2 + 4\times 6 = 26\text{，}$$

可得 $E(X^2) = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{4}\times 26 = \frac{15}{2}$，

故 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{15}{2} - 1^2 = \frac{13}{2}$.

6． 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \le 0; \\ 1-x, & 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(3X+2)$.

解：因 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$，

且 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$，

则 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6}$，

故 $\mathrm{Var}(3X+2) = 9\,\mathrm{Var}(X) = 9\times\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$.

7． 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

如果已知 $E(X) = 0.5$，试计算 $\mathrm{Var}(X)$.

解：由正则性得 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^1 (ax + bx^2)dx = \left(a\cdot\frac{x^2}{2} + b\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$，

又 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^1 x(ax + bx^2)dx = \left(a\cdot\frac{x^3}{3} + b\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 0.5$，

则 $a=6$，$b=-6$，

因 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx=\left(6\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{4}-\frac{6}{5}=0.3$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.3-0.5^2=0.05$.

8．设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-x^2},\quad x>0,$$

试求 $E(X)$和 $\mathrm{Var}(X)$.

解：因密度函数 $p(x)=F'(x)=2x\,\mathrm{e}^{-x^2},\quad x>0$，

故 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}xd(-\mathrm{e}^{-x^2})=-x\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；

因 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}x^2d(-\mathrm{e}^{-x^2})=-x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot 2xdx$

$=0-\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=1$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{4}$.

9．试证：对任意的常数 $c\ne E(X)$，有 $\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2<E(X-c)^2$.

证：因 $E(X-c)^2=E(X^2-2cX+c^2)=E(X^2)-2c\,E(X)+c^2=E(X^2)-[E(X)]^2+[E(X)]^2-2c\,E(X)+c^2$
$=E(X-E(X))^2+[E(X)-c]^2>E(X-E(X))^2=\mathrm{Var}(X)$.

10．设随机变量 X 仅在区间 $[a,b]$ 上取值，试证 $a\le E(X)\le b$，$\mathrm{Var}(X)\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

证：因 $X\ge a$，有 $X-a\ge 0$，得 $E(X-a)=E(X)-a\ge 0$，即 $E(X)\ge a$，又因 $X\le b$，同理可得 $E(X)\le b$，故 $a\le E(X)\le b$；

因 $a\le X\le b$，有 $-\frac{b-a}{2}\le X-\frac{a+b}{2}\le\frac{b-a}{2}$，得 $\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$，

则 $E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]=E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\le 0$，即 $E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2\le E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

11．设随机变量 X 取值 $x_1\le\cdots\le x_n$ 的概率分别是 $p_1,\cdots,p_n$，$\sum_{k=1}^{n}p_k=1$．证明 $\mathrm{Var}(X)\le\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2$.

证：因 $x_1\le X\le x_n$，有 $-\frac{x_n-x_1}{2}\le X-\frac{x_1+x_n}{2}\le\frac{x_n-x_1}{2}$，得 $\left(X-\frac{x_1+x_n}{2}\right)^2\le\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2\le E\left(X-\frac{x_1+x_n}{2}\right)^2\le E\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)^2$.

12．设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数，且 $E(g(X))$ 存在，证明：对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{X>\varepsilon\}\le\frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}.$$

注：此题应要求 $g(\varepsilon)\neq 0$.

证：以连续型随机变量为例加以证明，设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$，

因 $g(x)$ 为非负不减函数，当 $x>\varepsilon$ 时，有 $g(x)\ge g(\varepsilon)>0$，即 $\dfrac{g(x)}{g(\varepsilon)}\ge 1$，

故 $P\{X>\varepsilon\}=\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty}p(x)dx\le\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{g(x)}{g(\varepsilon)}p(x)dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{g(\varepsilon)}p(x)dx=E\left(\frac{g(X)}{g(\varepsilon)}\right)=\frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$.

13．设 X 为非负随机变量，$a>0$．若 $E(\mathrm{e}^{aX})$存在，证明：对任意的 $x>0$，有 $P\{X\ge x\}\le\dfrac{E(\mathrm{e}^{aX})}{\mathrm{e}^{ax}}$.

证：以连续型随机变量为例加以证明，设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$，

故 $P\{X\ge x\}=\displaystyle\int_{x}^{+\infty}p(u)du\le\int_{x}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{au}}{\mathrm{e}^{ax}}p(u)du\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{au}}{\mathrm{e}^{ax}}p(u)du=E\left(\frac{\mathrm{e}^{aX}}{\mathrm{e}^{ax}}\right)=\frac{E(\mathrm{e}^{aX})}{\mathrm{e}^{ax}}$.

14．已知正常成人男性每升血液中的白细胞数平均是 7.3×10^9，标准差是 0.7×10^9．试利用切比雪夫不等式估计每升血液中的白细胞数在 5.2×10^9 至 9.4×10^9 之间的概率的下界.

解：设 X 表示每升血液中的白细胞数，有 $E(X)=7.3\times10^9$，$\mathrm{Var}(X)=(0.7\times10^9)^2=0.49\times10^{18}$，

则 $P\{5.2\times10^9\le X\le 9.4\times10^9\}=P\{-2.1\times10^9\le X-7.3\times10^9\le 2.1\times10^9\}=P\{|X-E(X)|\le 2.1\times10^9\}$

$$\ge 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{(2.1\times10^9)^2}=1-\frac{0.49\times10^{18}}{4.41\times10^{18}}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

故所求概率的下界为 $\dfrac{8}{9}$.

习题 2.4

1． 一批产品中有 10%的不合格品，现从中任取 3 件，求其中至多有一件不合格品的概率．

解：设 X 表示取到的不合格品个数，有 X 服从二项分布 $b(3, 0.1)$，

故所求概率为 $P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0.9^3 + \binom{3}{1} \times 0.1 \times 0.9^2 = 0.972$.

2． 一条自动化生产线上产品的一级品率为 0.8，现检查 5 件，求至少有 2 件一级品的概率．

解：设 X 表示检查到的一级品个数，有 X 服从二项分布 $b(5, 0.8)$，

故所求概率为 $P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.2^5 - \binom{5}{1} \times 0.8 \times 0.2^4 = 0.99328$.

3． 某优秀射手命中 10 环的概率为 0.7，命中 9 环的概率为 0.3．试求该射手三次射击所得的环数不少于 29 环的概率．

解：设 X 表示三次射击所中的 10 环次数，有 X 服从二项分布 $b(3, 0.7)$，

故所求概率为 $P\{X \ge 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \binom{3}{2} \times 0.7^2 \times 0.3 + 0.7^3 = 0.784$.

4． 经验表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 20%．如今餐厅有 50 个座位，但预定给了 52 位 顾客，问到时顾客来到餐厅而没有座位的概率是多少？

解：设 X 表示到时来到餐厅的顾客人数，有 X 服从二项分布 $b(52, 0.8)$，

故所求概率为 $P\{X \ge 51\} = P\{X = 51\} + P\{X = 52\} = \binom{52}{51} \times 0.8^{51} \times 0.2 + 0.8^{52} = 0.0001279$.

5． 设随机变量 $X \sim b(n, p)$，已知 $E(X) = 2.4$，$\mathrm{Var}(X) = 1.44$，求两个参数 n 与 p 各为多少？

解：因 $X \sim b(n, p)$，有 $E(X) = np = 2.4$，$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 1.44$，有 $1 - p = \dfrac{1.44}{2.4} = 0.6$，

故 $p = 0.4$，$n = \dfrac{2.4}{0.4} = 6$.

6． 设随机变量 X 服从二项分布 $b(2, p)$，随机变量 Y 服从二项分布 $b(4, p)$．若 $P\{X \ge 1\} = 8/9$，试求 $P\{Y \ge 1\}$．

解：因 X 服从二项分布 $b(2, p)$，有 $P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1 - p)^2 = \dfrac{8}{9}$，即 $p = \dfrac{2}{3}$，

故 $P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - p)^4 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{80}{81}$.

7． 一批产品的不合格率为 0.02，现从中任取 40 件进行检查，若发现两件或两件以上不合格品就拒收这批产品．分别用以下方法求拒收的概率：

（1）用二项分布作精确计算；

（2）用泊松分布作近似计算．

解：设 X 表示发现的不合格品个数，有 X 服从二项分布 $b(40, 0.02)$，

（1）所求概率为 $P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 0.98^{40} - \binom{40}{1} \times 0.02 \times 0.98^{39} = 0.1905$；

（2）因 $n = 40$ 较大，$p = 0.02$ 很小，取 $\lambda = np = 0.8$，有 $X \dot\sim P(0.8)$，

故查表可得所求概率为 $P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X \le 1\} = 1 - 0.809 = 0.191$.

8．设 X 服从泊松分布，且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求 $P\{X=4\}$.

解：设 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，有 $\lambda>0$，

则 $P\{X=1\}=\dfrac{\lambda^1}{1}\mathrm{e}^{-\lambda}=P\{\lambda=2\}=\dfrac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$，得 $\lambda=\dfrac{\lambda^2}{2}$，即 $\lambda=2$，

故查表可得 $P\{X=4\}=P\{X\le 4\}-P\{X\le 3\}=0.947-0.857=0.090$.

9．已知某商场一天来的顾客数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个来到商场的顾客购物的概率为 p，证明：此商场一天内购物的顾客数服从参数为 λp 的泊松分布.

证：设 Y 表示该商场一天内购买商品的顾客人数，Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, ⋯，

有 $P\{Y=r\}=\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty}P\{X=k\}P\{Y=r\mid X=k\}=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\cdot\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}$

$$=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\cdot\frac{k!}{r!\cdot(k-r)!}p^r(1-p)^{k-r}=\frac{p^r\mathrm{e}^{-\lambda}}{r!}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k(1-p)^{k-r}}{(k-r)!}=\frac{p^r\mathrm{e}^{-\lambda}}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+r}(1-p)^n}{n!}$$

$$=\frac{\lambda^r p^r\mathrm{e}^{-\lambda}}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}=\frac{(\lambda p)^r\mathrm{e}^{-\lambda}}{r!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda p},\quad r=0,1,2,\cdots,$$

故 Y 服从参数为 λp 的泊松分布.

10．设一个人一年内患感冒的次数服从参数 $\lambda=5$ 的泊松分布．现有某种预防感冒的药物对 75%的人有效（能将泊松分布的参数减少为 $\lambda=3$），对另外的 25%的人不起作用．如果某人服用了此药，一年内患了两次感冒，那么该药对他（她）有效的可能性是多少？

解：设 X 表示他（她）一年内患感冒的次数，事件 A 表示该药对他（她）有效，

若 A 发生，X 服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布；若 $\overline{A}$ 发生，X 服从参数 $\lambda=5$ 的泊松分布，

故 $P(A\mid X=2)=\dfrac{P(A\bigcap "X=2")}{P\{X=2\}}=\dfrac{P(A)P\{X=2\mid A\}}{P(A)P\{X=2\mid A\}+P(\overline{A})P\{X=2\mid \overline{A}\}}$

$$=\frac{0.75\times(0.423-0.199)}{0.75\times(0.423-0.199)+0.25\times(0.125-0.040)}=\frac{0.168}{0.168+0.02125}=0.8877.$$

11．有三个朋友去喝咖啡，他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账．求以下事件的概率：

（1）进行到了第 2 轮确定了由谁来付账；

（2）进行了 3 轮还没有确定付账人.

解：设 X 表示三个人投掷的轮数，p 表示每一轮三个人掷出的结果不一样的概率，有 $p=1-\dfrac{2}{2^3}=\dfrac{3}{4}$，

（1）$P\{X=2\}=(1-p)p=\dfrac{3}{16}$；

（2）$P\{X>3\}=(1-p)^3=\dfrac{1}{64}$.

12．从一个装有 m 个白球、n 个黑球的袋子中返回地摸球，直到摸到白球时停止．试求取到黑球数的期望.

解：设 X 表示取到的黑球数，有 $X+1$ 服从参数为 $p=\dfrac{m}{m+n}$ 的几何分布，有 $E(X+1)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{m+n}{m}$，

故 $E(X)=\dfrac{m+n}{m}-1=\dfrac{n}{m}$.

13．某种产品上的缺陷数 X 服从下列分布列：$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}$，$k=0,1,\cdots$，求此种产品上的平均缺陷数.

解：因 $X+1$ 服从参数为 $p=\dfrac{1}{2}$ 的几何分布 $\mathrm{Ge}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，有 $E(X+1)=\dfrac{1}{p}=2$，故 $E(X)=2-1=1$.

14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le 1/2\}$ 出现的次数，试求 $P\{Y=2\}$.

解：因 $P\{X\le\dfrac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$，有 Y 服从二项分布 $b\left(3,\dfrac{1}{4}\right)$，

故 $P\{Y=2\}=\dbinom{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$.

15．某产品的不合格品率为 0.1，每次随机抽取 10 件进行检查，若发现其中不合格品数多于 1，就去调整设备．若检验员每天检查 4 次，试问每天平均要调整几次设备．

解：设 X 表示所取 10 件中的不合格品数，有 X 服从二项分布 $b(10, 0.1)$，

则需要调整设备的概率为 $P\{X\ge 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-0.9^{10}-\dbinom{10}{1}\times 0.1\times 0.9^9=0.2639$，

设 Y 表示每天调整设备的次数，有 X 服从二项分布 $b(4, 0.2639)$，

故 $E(X)=4\times 0.2639=1.0556$，即每天平均要调整 1.0556 次设备．

16．一个系统由多个元件组成，各个元件是否正常工作是相互独立的，且各个元件正常工作的概率为 p．若在系统中至少有一半的元件正常工作，那么整个系统就有效．问 p 取何值时，5 个元件的系统比 3 个元件的系统更有可能有效？

解：设 X 表示 3 个元件的系统中正常工作的元件数，Y 表示 5 个元件的系统中正常工作的元件数，

则 3 个元件的系统有效的概率为 $P\{X\ge 2\}=\dbinom{3}{2}p^2(1-p)+\dbinom{3}{3}p^3=3p^2(1-p)+p^3=3p^2-2p^3$，

且 5 个元件的系统有效的概率为

$$P\{Y\ge 3\}=\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+\binom{5}{5}p^5=10p^3(1-p)^2+5p^4(1-p)+p^5=10p^3-15p^4+6p^5,$$

要使得 $10p^3-15p^4+6p^5>3p^2-2p^3$，即 $3p^2-12p^3+15p^4-6p^5<0$，有 $3p^2(1-p)^2(1-2p)<0$，

故 $p>0.5$．

17．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，试证明

$$E(X^n)=\lambda E[(X+1)^{n-1}],$$

利用此结果计算 $E(X^3)$.

证：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$，

$$故\ E(X^n)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^n\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-1}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)^{n-1}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)^{n-1}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda E[(X+1)^{n-1}];$$

$$且\ E(X^3)=\lambda E[(X+1)^2]=\lambda E(X^2)+2\lambda E(X)+\lambda=\lambda^2E(X+1)+2\lambda E(X)+\lambda$$

$$=\lambda^2(\lambda+1)+2\lambda^2+\lambda=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda.$$

18．令 $X(n, p)$表示服从二项分布 $b(n, p)$的随机变量，试证明：

$$P\{X(n, p) \le i\} = 1 - P\{X(n, 1-p) \le n-i-1\}.$$

证：$P\{X(n,p)\le i\}=1-P\{X(n,p)\ge i+1\}=1-\sum\limits_{k=i+1}^{n}P\{X(n,p)=k\}=1-\sum\limits_{k=i+1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$=1-\sum_{m=0}^{n-i-1}\binom{n}{n-m}p^{n-m}(1-p)^m=1-\sum_{m=0}^{n-i-1}\binom{n}{m}(1-p)^m p^{n-m}=1-P\{X(n,1-p)\le n-i-1\}.$$

19．设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，试证明：

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{-p\ln p}{1-p}.$$

证：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k=1, 2, \cdots$，

则 $E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-p}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k}$，

设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$，有 $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$，可得 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-u}du=-\ln(1-u)\big|_0^x=-\ln(1-x)$，

故 $E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{p}{1-p}f(1-p)=\frac{-p\ln p}{1-p}$.

20．设随机变量 $X\sim b(n, p)$，试证明：

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

证：因 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，　$k=0,1,2,\cdots,n$，

故 $E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$

$$=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k}=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{m}p^m(1-p)^{n+1-m}$$

$$=\frac{1}{(n+1)p}\left[\sum_{m=0}^{n}\binom{n+1}{m}p^m(1-p)^{n+1-m}-\binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}\right]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

习题 2.5

1. 设随机变量 X 服从区间 (2, 5)上的均匀分布，求对 X 进行 3 次独立观察中，至少有 2 次的观察值大于 3 的概率.

解：设 Y 表示“X 大于 3 的次数”，有 Y 服从二项分布 $b(3, p)$，且 $p = P\{X > 3\} = \dfrac{5-3}{5-2} = \dfrac{2}{3}$，

故所求概率为 $P\{Y \ge 2\} = \dbinom{3}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{20}{27}$.

2. 在 (0, 1)上任取一点记为 X，试求 $P\left\{X^2 - \dfrac{3}{4}X + \dfrac{1}{8} \ge 0\right\}$.

解：因 X 服从区间 (0, 1)上的均匀分布，且 $X^2 - \dfrac{3}{4}X + \dfrac{1}{8} = \left(X - \dfrac{1}{4}\right)\left(X - \dfrac{1}{2}\right) \ge 0$，即 $X \le \dfrac{1}{4}$ 或 $X \ge \dfrac{1}{2}$，

故 $P\left\{X^2 - \dfrac{3}{4}X + \dfrac{1}{8} \ge 0\right\} = P\left\{X \le \dfrac{1}{4}\text{或}X \ge \dfrac{1}{2}\right\} = \left(\dfrac{1}{4} - 0\right) + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

3. 设 K 服从 (1, 6)上的均匀分布，求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率.

解：因方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根，有判别式 $\Delta = K^2 - 4 \ge 0$，即 $K \le -2$ 或 $K \ge 2$，

故所求概率为 $P\{K \le -2\text{或}K \ge 2\} = 0 + \dfrac{6-2}{6-1} = \dfrac{4}{5}$.

4. 若随机变量 $K \sim N(\mu, \sigma^2)$，而方程 $x^2 + 4x + K = 0$ 无实根的概率为 0.5，试求μ.

解：因方程 $x^2 + 4x + K = 0$ 无实根，有判别式 $\Delta = 16 - 4K < 0$，即 $K > 4$，

则 $P\{K > 4\} = 0.5$，且 $P\{K > \mu\} = 0.5$，

故$\mu = 4$.

5. 设流经一个 2 Ω 电阻上的电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9A 至 11A 之间．试求此电阻上消耗的平均功率，其中功率 $W = 2I^2$.

解：因电流 I 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 9 < x < 11, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

故平均功率 $E(W) = E(2I^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 p(x)dx = \int_9^{11} 2x^2 \cdot \dfrac{1}{2}dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_9^{11} = \dfrac{602}{3}$.

6. 某种圆盘的直径在区间 (a, b)上服从均匀分布，试求此种圆盘的平均面积.

解：设 d 表示“圆盘的直径”，S 表示“圆盘的面积”，有 $S = \dfrac{1}{4}\pi d^2$，

因直径 d 密度函数为 $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

故平均面积 $E(S) = E\left(\dfrac{1}{4}\pi d^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{4}\pi x^2 p(x)dx = \int_a^b \dfrac{1}{4}\pi x^2 \cdot \dfrac{1}{b-a}dx = \left.\dfrac{\pi x^3}{12(b-a)}\right|_a^b = \dfrac{\pi}{12}(a^2 + ab + b^2)$.

7. 设某种商品每周的需求量 X 服从区间 (10, 30)上的均匀分布，而商店进货数为区间 (10, 30)中的某一整数，商店每销售 1 单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元．为使商店所获利润期望值不少

于 9280 元，试确定最少进货量.

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10\le x\le 30,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 并设每周进货量为 a 单位商品，商店所获利润为 Y 元，

当 $X\le a$ 时，$Y=500X-100(a-X)=600X-100a$；当 $X>a$ 时，$Y=500a+300(X-a)=300X+200a$，

即 $Y=g(X)=\begin{cases}600X-100a, & X\le a,\\ 300X+200a, & X>a,\end{cases}$

则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)dx=\int_{10}^{a}(600x-100a)\dfrac{1}{20}dx+\int_{a}^{30}(300x+200a)\dfrac{1}{20}dx$

$=(15x^2-5ax)\Big|_{10}^{a}+(\dfrac{15}{2}x^2+10ax)\Big|_{a}^{30}=-\dfrac{15}{2}a^2+350a+5250$，

要使得 $E(Y)=-\dfrac{15}{2}a^2+350a+5250\ge 9280$，有 $\dfrac{15}{2}a^2-350a+4030\le 0$，可得 $\dfrac{62}{3}\le a\le 26$，

故 a 可取 21, 22, 23, 24, 25, 26，即最少进货量为 21 单位商品.

8． 统计调查表明，英格兰在 1875 年至 1951 年期间，在矿山发生 10 人或 10 人以上死亡的两次事故之间的时间 T（以日计）服从均值为 241 的指数分布．试求 $P\{50\le T\le 100\}$.

解：因 T 服从指数分布，且 $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=241$，有 T 的密度函数为 $p(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$

故 $P\{50\le T\le 100\}=\int_{50}^{100}\dfrac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}dt=(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{241}})\Big|_{50}^{100}=\mathrm{e}^{-\frac{50}{241}}-\mathrm{e}^{-\frac{100}{241}}=0.1523$.

9． 若一次电话通话时间 X（单位：min）服从参数为 0.25 的指数分布，试求一次通话的平均时间.

解：因 X 服从参数为 $\lambda=0.25$ 的指数分布，故一次通话的平均时间 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=4$.

10．某种设备的使用寿命 X（以年计）服从指数分布，其平均寿命为 4 年．制造此种设备的厂家规定，若设备在使用一年之内损坏，则可以予以调换．如果设备制造厂每售出一台设备可盈利 100 元，而调换一台设备需花费 300 元．试求每台设备的平均利润.

解：因 X 服从指数分布，且 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=4$，有 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$

设 Y 表示“每台设备的利润”，当 $X\le 1$ 时，$Y=100-300=-200$；当 $X>1$ 时，$Y=100$.

故平均利润 $E(Y)=-200P\{X\le 1\}+100P\{X>1\}=-200\int_0^1\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}dx+100\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}dx$

$$=-200(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})\Big|_0^1+100(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}})\Big|_1^{+\infty}=-200(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})+100\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}=300\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-200=33.6402.$$

11．设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以 min 计）服从指数分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10min，他就离开．他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求 $P\{Y\ge 1\}$.

解：因 Y 服从二项分布 $b(5, p)$，且 $p = P\{X > 10\} = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5} \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} dx = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} \Big|_{10}^{+\infty} = \mathrm{e}^{-2}$，

故 $P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-2})^5 = 0.5167$.

12．某仪器装了 3 个独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：h）都服从同一指数分布，密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{600} \mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：此仪器在最初使用的 200h 内，至少有一个此种电子元件损坏的概率.

解：设 Y 表示“电子元件损坏的个数”，有 Y 服从二项分布 $b(3, p)$，

且 $p = P\{X \le 200\} = \int_0^{200} \frac{1}{600} \mathrm{e}^{-\frac{x}{600}} dx = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}} \Big|_0^{200} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，

故所求概率为 $P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})^3 = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 0.6321$.

13．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

试求 k，使得 $P\{X > k\} = 0.5$.

解：因 $P\{X > k\} = \int_k^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = (-\mathrm{e}^{-\lambda x}) \Big|_k^{+\infty} = \mathrm{e}^{-\lambda k} = 0.5$，故 $k = -\dfrac{\ln 0.5}{\lambda} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

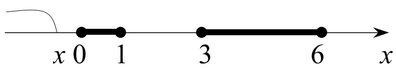
14．设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \le x \le 1, \\ 2/9, & 3 \le x \le 6, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

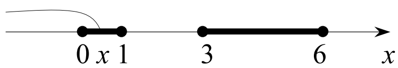
若 $P\{X \ge k\} = 2/3$，试求 k 的取值范围.

解：首先求出 X 的分布函数 $F(x)$，分段点 0, 1, 3, 6，

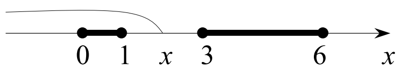
当 $x < 0$ 时，$F(x) = 0$，



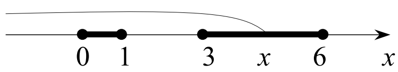
当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3} \mathrm{d}t = \frac{t}{3} \Big|_0^x = \frac{x}{3}$，



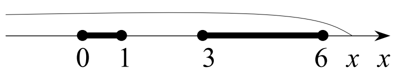
当 $1 \le x < 3$ 时，$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} \mathrm{d}t = \frac{t}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$，



当 $3 \le x < 6$ 时，$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} \mathrm{d}t + \int_3^x \frac{2}{9} \mathrm{d}t = \frac{t}{3} \Big|_0^1 + \frac{2t}{9} \Big|_3^x = \frac{2x}{9} - \frac{1}{3}$，



当 $x \ge 6$ 时，$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} \mathrm{d}t + \int_3^6 \frac{2}{9} \mathrm{d}t = \frac{t}{3} \Big|_0^1 + \frac{2t}{9} \Big|_3^6 = 1$.



因 X 为连续型随机变量，有 $P\{X \ge k\} = 1 - F(k) = \dfrac{2}{3}$，即 $F(k) = \dfrac{1}{3}$，

故 k 的取值范围是 $[1, 3]$.

15．写出一下正态分布的均值和标准差.

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x+4)},\quad p_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-2x^2},\quad p_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

解：正态分布的密度函数 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，其中均值为 μ，标准差为 σ，

因 $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x+4)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+2)^2}{2\times\frac{1}{2}}}$，故均值 $\mu=-2$，标准差 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

因 $p_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{4}}}$，故均值 $\mu=0$，标准差 $\sigma=\frac{1}{2}$；

因 $p_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{2}}}$，故均值 $\mu=0$，标准差 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

16．某地区 18 岁女青年的血压 X（收缩压，以 mm-Hg 计）服从 $N(110,\ 12^2)$．试求该地区 18 岁女青年的血压在 100 至 120 的可能性有多大？

解：因 $X\sim N(110, 12^2)$，有 $\mu=110$，$\sigma=12$，

故 $P\{100\le X\le 120\}=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)=\Phi(0.8333)-\Phi(-0.8333)=2\Phi(0.8333)-1$

$=2\times 0.7977-1=0.5954$.

（或查表可得 $P\{100\le X\le 120\}=\Phi(0.83)-\Phi(-0.83)=2\Phi(0.83)-1=2\times 0.7967-1=0.5934$）

17．某地区成年男子的体重 X（kg）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．若已知 $P\{X\le 70\}=0.5$，$P\{X\le 60\}=0.25$.

（1）求 μ 与 σ 各为多少？

（2）若在这个地区随机地选出 5 名成年男子，问其中至少两人体重超过 65kg 的概率是多少？

解：（1）因 $P\{X\le 70\}=\Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right)=0.5$，$P\{X\le 60\}=\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.25$，

则 $\frac{70-\mu}{\sigma}=0$，$\frac{60-\mu}{\sigma}=-0.6745$，

故 $\mu=70$，$\sigma=\frac{60-70}{-0.6745}=14.8258$；

（或查表可得 $\frac{70-\mu}{\sigma}=0$，$\frac{60-\mu}{\sigma}=-0.67$，故 $\mu=70$，$\sigma=\frac{60-70}{-0.67}=14.9254$）

（2）设 Y 表示"体重 X 超过 65kg 的人数"，有 Y 服从二项分布 $b(5,p)$，

且 $p=P\{X>65\}=1-\Phi\left(\frac{65-70}{14.8258}\right)=1-\Phi(-0.3372)=0.6320$，

故所求概率为 $P\{Y\ge 2\}=1-p(0)-p(1)=1-0.3680^5-\binom{5}{1}\times 0.6320\times 0.3680^4=0.9353$.

（或查表可得 $p = P\{X > 65\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{65-70}{14.9254}\right) = 1 - \Phi(-0.34) = 0.6331$，故 $P\{Y \ge 2\} = 0.9360$）

18．由某机器生产的螺栓的长度（cm）服从正态分布 $N(10.05,\ 0.06^2)$，若规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求螺栓不合格的概率．

解：设 X 表示“螺栓的长度”，有 $X \sim N(10.05, 0.06^2)$，即 $\mu = 10.05$，$\sigma = 0.06$，

故所求概率为 $P\{|X - 10.05| > 0.12\} = 2\left[1 - \Phi\left(\dfrac{0.12}{0.06}\right)\right] = 2[1 - \Phi(2)] = 2 \times (1 - 0.9772) = 0.0456$.

19．某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似地服从 $\mu = 72$ 的正态分布，已知 96 分以上的人数占总数的 2.3%，试求考生的成绩在 60 到 84 之间的概率．

解：设 X 表示“考生的外语成绩”，有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu = 72$，

因 $P\{X > 96\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{96-72}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{24}{\sigma}\right) = 0.023$，即 $\Phi\left(\dfrac{24}{\sigma}\right) = 0.977$，$\dfrac{24}{\sigma} = 2$，可得 $\sigma = 12$，

故所求概率为 $P\{60 \le X \le 84\} = \Phi\left(\dfrac{84-72}{12}\right) - \Phi\left(\dfrac{60-72}{12}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$.

20．设 $X \sim N(3, 2^2)$，（1）求 $P\{2 < X \le 5\}$；（2）求 $P\{|X| > 2\}$；（3）确定 c 使得 $P\{X > c\} = P\{X < c\}$．

解：（1）$P\{2 < X \le 5\} = \Phi\left(\dfrac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{2-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328$；

（2）$P\{|X| > 2\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{2-3}{2}\right) + \Phi\left(\dfrac{-2-3}{2}\right) = 1 - \Phi(-0.5) + \Phi(-2.5) = 0.6915 + 1 - 0.9938 = 0.6977$；

（3）因 $P\{X > c\} = P\{X < c\}$，且 $P\{X > c\} + P\{X < c\} = 1$，有 $P\{X > c\} = P\{X < c\} = 0.5$，故 $c = \mu = 3$．

21．若 $X \sim N(4, 3^2)$，（1）求 $P\{-2 < X \le 10\}$；（2）求 $P\{X > 3\}$；（3）设 d 满足 $P\{X > d\} \ge 0.9$，问 d 至多为多少？

解：（1）$P\{-2 < X \le 10\} = \Phi\left(\dfrac{10-4}{3}\right) - \Phi\left(\dfrac{-2-4}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$；

（2）$P\{X > 3\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{3-4}{3}\right) = 1 - \Phi(-0.3333) = 0.6306$；

（或查表可得 $P\{X > 3\} = 1 - \Phi(-0.33) = 0.6293$）

（3）因 $P\{X > d\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{d-4}{3}\right) = \Phi\left(\dfrac{4-d}{3}\right) \ge 0.9$，有 $\dfrac{4-d}{3} \ge 1.2816$，故 $d \le 0.1552$．

（或查表可得 $\dfrac{4-d}{3} \ge 1.28$，故 $d \le 0.16$）

22．测量到某一目标的距离时，发生的随机误差 X（m）具有密度函数

$$p(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{3200}},\quad -\infty < x < +\infty,$$

求在三次测量中，至少有一次误差的绝对值不超过 30 m 的概率．

解：设 Y 表示“误差 X 的绝对值不超过 30 m 的次数”，有 Y 服从二项分布 $b(3, p)$，

因 X 的密度函数 $p(x)=\dfrac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{2\times 40^2}}$，有 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu = 20$，$\sigma = 40$，

则 $p = P\{|X| \le 30\} = \Phi\left(\dfrac{30-20}{40}\right) - \Phi\left(\dfrac{-30-20}{40}\right) = \Phi(0.25) - \Phi(-1.25)$

$= 0.5987 - (1 - 0.8944) = 0.4931$，

故所求概率为 $P\{Y \ge 1\} = 1 - p(0) = 1 - (1-p)^3 = 1 - 0.5069^3 = 0.8698$.

23．从甲地飞往乙地的航班，每天上午 10:10 起飞，飞行时间 X 服从均值是 4 h，标准差是 20 min 的正态分布.

（1）该机在下午 2:30 以后到达乙地的概率是多少？

（2）该机在下午 2:20 以前到达乙地的概率是多少？

（3）该机在下午 1:50 至 2:30 之间到达乙地的概率是多少？

解：因 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu = 4 \times 60 = 240$，$\sigma = 20$，

（1）所求概率为 $P\{X > 260\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{260-240}{20}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$；

（2）所求概率为 $P\{X < 250\} = \Phi\left(\dfrac{250-240}{20}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915$；

（3）所求概率为 $P\{220 \le X \le 260\} = \Phi\left(\dfrac{260-240}{20}\right) - \Phi\left(\dfrac{220-240}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$.

24．某单位招聘员工，共有 10000 人报考．假设考试成绩服从正态分布，且已知 90 分以上有 359 人，60 分以下有 1151 人．现按考试成绩从高分到低分依次录用 2500 人，试问被录用者中最低分为多少？

解：设 X 表示“考试成绩”，有 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

因 $P\{X > 90\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0.0359$，即 $\Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0.9641$，得 $\dfrac{90-\mu}{\sigma} = 1.8$，

且 $P\{X < 60\} = \Phi\left(\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0.1151$，即 $\Phi\left(-\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0.8849$，得 $-\dfrac{60-\mu}{\sigma} = 1.2$，

可得 $\mu = 72$，$\sigma = 10$，又设录用者中最低分为 a，

则 $P\{X > a\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{a-72}{10}\right) = 0.25$，即 $\Phi\left(\dfrac{a-72}{10}\right) = 0.75$，得 $\dfrac{a-72}{10} = 0.6745$，

故 $a = 78.745$.

（或查表可得 $\dfrac{a-72}{10} = 0.67$，故 $a = 78.7$）

25．设随机变量 X 服从正态分布 $X \sim N(60, 3^2)$，试求实数 a, b, c, d，使得 X 落在如下五个区间中的概率之比为 7 : 24 : 38 : 24 : 7.

$(-\infty, a]$，　$(a, b]$，　$(b, c]$，　$(c, d\,]$，　$(d, +\infty)$.

解：因 $P\{X \le a\} = \Phi\left(\dfrac{a-60}{3}\right) = 0.07$，即 $\Phi\left(-\dfrac{a-60}{3}\right) = 0.93$，得 $-\dfrac{a-60}{3} = 1.4758$，故 $a = 55.5726$；

因 $P\{X\le b\}=\Phi\left(\frac{b-60}{3}\right)=0.31$，即 $\Phi\left(-\frac{b-60}{3}\right)=0.69$，得 $-\frac{b-60}{3}=0.4959$，故 $b=58.5123$；

因 $P\{X\le c\}=\Phi\left(\frac{c-60}{3}\right)=0.69$，得 $\frac{c-60}{3}=0.4959$，故 $c=61.4877$；

因 $P\{X\le d\}=\Phi\left(\frac{d-60}{3}\right)=0.93$，得 $\frac{d-60}{3}=1.4758$，故 $d=64.4274$.

（或查表可得 $-\frac{a-60}{3}=1.48$，$-\frac{b-60}{3}=0.50$，$\frac{c-60}{3}=0.50$，$\frac{d-60}{3}=1.48$，

故 $a=55.56$，$b=58.50$，$c=61.50$，$d=64.44$）

26．设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(\mu, 4^2)$，Y 服从 $N(\mu, 5^2)$，试比较以下 p_1 和 p_2 的大小．

$p_1=P\{X\le\mu-4\}$， $p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$．

解：因 $p_1=P\{X\le\mu-4\}=\Phi\left(\frac{\mu-4-\mu}{4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$，

且 $p_2=P\{X\ge\mu+5\}=1-\Phi\left(\frac{\mu+5-\mu}{5}\right)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$，

故 $p_1=p_2$．

27．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$，若 $P\{|X|>k\}=0.1$，试求 $P\{X<k\}$．

解：因 $P\{|X|>k\}=1-\Phi\left(\frac{k-0}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-k-0}{\sigma}\right)=2-2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.1$，得 $\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.95$，

故 $P\{X<k\}=\Phi\left(\frac{k-0}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=0.95$．

28．设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试问：随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 是如何变化的？

解：因 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\times0.8413-1=0.6826$，

故随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 不变．

29．设随机变量 X 服从参数为 $\mu=160$ 和 σ 的正态分布，若要求 $P\{120<X\le200\}\ge0.90$，允许 σ 最大为多少？

解：因 $P\{120<X\le200\}=\Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\ge0.90$，

故 $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\ge0.95$，即 $\frac{40}{\sigma}\ge1.6449$，可得 $\sigma\le24.3183$．

（或查表可得 $\frac{40}{\sigma}\ge1.64$，故 $\sigma\le24.3902$）

30．设随机变量 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E|X-\mu|$．

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，

$$故 E|X-\mu|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=2\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{y^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sigma^2=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

31．设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，证明：$E|X|=\sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$．

证：因 X 的密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，

$$故 E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

32．设随机变量 X 服从伽玛分布 $Ga(2, 0.5)$，试求 $P\{X<4\}$．

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}0.5^2x\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}=\begin{cases}0.25x\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$

$$故 P\{X<4\}=\int_0^4 0.25x\mathrm{e}^{-0.5x}dx=\int_0^4(-0.5x)d(\mathrm{e}^{-0.5x})=-0.5x\mathrm{e}^{-0.5x}\Big|_0^4+\int_0^4\mathrm{e}^{-0.5x}\cdot 0.5dx=-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-0.5x}\Big|_0^4$$

$$=-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}+1=1-3\mathrm{e}^{-2}=0.5940.$$

33．某地区漏缴税款的比例 X 服从参数 $a=2, b=9$ 的贝塔分布，试求此比例小于 10%的概率及平均漏缴税款的比例．

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(11)}{\Gamma(2)\Gamma(9)}x(1-x)^8, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}90x(1-x)^8, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$$故 P\{X<0.1\}=\int_0^{0.1}90x(1-x)^8dx=\int_0^{0.1}(-10x)d[(1-x)^9]=-10x(1-x)^9\Big|_0^{0.1}+\int_0^4(1-x)^9\cdot 10dx$$

$$=-0.9^9-(1-x)^{10}\Big|_0^{0.1}=-0.9^9-0.9^{10}+1=0.2639;$$

且平均漏缴税款的比例为 $E(X)=\dfrac{2}{2+9}=\dfrac{2}{11}=0.1818$．

34．某班级学生中数学成绩不及格的比例 X 服从 $a=1, b=4$ 的贝塔分布，试求 $P\{X>E(X)\}$．

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(4)}(1-x)^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且 $E(X)=\dfrac{1}{1+4}=0.2$，

$$故 P\{X>E(X)\}=\int_{0.2}^1 4(1-x)^3dx=-(1-x)^4\Big|_{0.2}^1=0.8^4=0.4096.$$

习题 2.6

1． 已知离散随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

试求 $Y=X^2$ 与 $Z=|X|$ 的分布列．

解：因 X 的全部可能取值为 $-2, -1, 0, 1, 3$，

则 $Y=X^2$ 的全部可能取值为 $4, 1, 0, 1, 9$，$Z=|X|$ 的全部可能取值为 $2, 1, 0, 1, 3$，

故 $Y=X^2$ 的分布列为

Y	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

；

且 $Z=|X|$ 的分布列为

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

．

2． 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},\quad -\infty<x<+\infty .$$

试求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率分布，其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0,\\ 1, & \text{当 } x\ge 0.\end{cases}$$

解：因 $Y=g(X)$ 的全部可能取值为 $-1, 1$，

有 $P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}d(\mathrm{e}^x)=\frac{2}{\pi}\arctan(\mathrm{e}^x)\Big|_{-\infty}^{0}$

$=\frac{2}{\pi}(\arctan 1-\arctan 0)=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$，且 $P(Y=1\}=1-P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，

故 $Y=g(X)$ 的概率分布列为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

．

3． 设随机变量 X 服从 $(-1, 2)$ 上的均匀分布，记

$$Y=\begin{cases}1, & X\ge 0,\\ -1, & X<0.\end{cases}$$

试求 Y 的分布列．

解：因 Y 的全部可能取值为 $-1, 1$，有 $P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\frac{0-(-1)}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$，$P(Y=1\}=1-P\{Y=-1\}=\frac{2}{3}$，

故 Y 的分布列为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

．

4． 设 $X\sim U(0, 1)$，试求 $1-X$ 的分布．

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $Y=g(X)=1-X$，有 $y=g(x)=1-x$ 严格单调下降，其反函数为 $x=h(y)=1-y$，且 $h'(y)=-1$，且 $0<x<1$ 时，有 $0<y<1$，可得 $p_Y(y)=1\cdot|-1|=1$，$0<y<1$，

故 $Y=1-X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

5． 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布，求随机变量 $Y=\cos X$ 的密度函数 $p_Y(y)$.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $0<y=\cos x\le 1$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=\cos X\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=\cos X\le y\}=P\{-\dfrac{\pi}{2}<X\le -\arccos y\}+P\{\arccos y\le X<\dfrac{\pi}{2}\}$

$$=\frac{2(\frac{\pi}{2}-\arccos y)}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}\arccos y\,;$$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=\cos X\le y\}=P(\Omega)=1$；

因 $F_Y(y)$ 连续且仅有两个不可导的点，当 $0<y<1$ 时，$F_Y'(y)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$，

故 $Y=\cos X$ 为连续随机变量，密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6． 设圆的直径服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，求圆的面积的密度函数.

解：设 X 表示“圆的直径”，Y 表示“圆的面积”，有 $Y=\dfrac{1}{4}\pi X^2$，因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $0<x<1$ 时，有 $y=g(x)=\dfrac{1}{4}\pi x^2$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=2\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}$，

当 $0<x<1$ 时，有 $0<y<\dfrac{\pi}{4}$，可得 $p_Y(y)=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}$，$0<y<\dfrac{\pi}{4}$，

故圆的面积 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

7．设随机变量 X 服从区间 $(1, 2)$ 上的均匀分布，试求 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的密度函数.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

且 $y=g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\dfrac{1}{2}\ln y$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{2y}$，

当 $1<x<2$ 时，有 $\mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4$，可得 $p_Y(y)=1\cdot\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2y}$，$\mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4$，

故 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

8．设随机变量 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布，（1）求 $Y=X^2$ 的密度函数；（2）$P\{Y<2\}$.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）因 $0<x<2$ 时，有 $y=g(x)=x^2$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\sqrt{y}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，

当 $0<x<2$ 时，有 $0<y<4$，可得 $p_Y(y)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$，$0<y<4$，

故 $Y=X^2$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）$P\{Y<2\}=P\{X<\sqrt{2}\}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9．设随机变量 X 服从区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布，求：

（1）$P\left\{|X|>\dfrac{1}{2}\right\}$；

（2）$Y=|X|$ 的密度函数.

解：（1）$P\left\{|X|>\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-1)\right]+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$；

（2）因 X 的密度函数为 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=|X|\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\dfrac{y-(-y)}{1-(-1)}=y$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=\cos X\le y\}=P(\Omega)=1$；

因 $F_Y(y)$ 连续且仅有两个不可导的点，

故 $Y=|X|$ 为连续随机变量，密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

10．设随机变量 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，试求以下 Y 的密度函数

（1）$Y=-2\ln X$；　　　（2）$Y=3X+1$；

（3）$Y=\mathrm{e}^X$；　　　（4）$Y=|\ln X|$.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）因 $x>0$ 时，有 $y=g(x)=-2\ln x$ 严格单调减少，其反函数为 $x=h(y)=\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，且 $h'(y)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，

当 $0<x<1$ 时，有 $0<y<+\infty$，可得 $p_Y(y)=1\cdot\left|-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\right|=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，$y>0$，

故 $Y=-2\ln X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（2）因 $y=g(x)=3x+1$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y-1}{3}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{3}$，

当 $0<x<1$ 时，有 $1<y<4$，可得 $p_Y(y)=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，$1<y<4$，

故 $Y=3X+1$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 1<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（3）因 $y=g(x)=\mathrm{e}^x$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\ln y$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{y}$，

当 $0<x<1$ 时，有 $1<y<\mathrm{e}$，可得 $p_Y(y)=1\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y}$，$1<y<\mathrm{e}$，

故 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（4）因 $x>0$ 时，有 $y=g(x)=|\ln x|=-\ln x$ 严格单调减少，其反函数为 $x=h(y)=\mathrm{e}^{-y}$，且 $h'(y)=-\mathrm{e}^{-y}$，
当 $0<x<1$ 时，有 $0<y<+\infty$，可得 $p_Y(y)=1\cdot|-\mathrm{e}^{-y}|=\mathrm{e}^{-y}$，$y>0$，
故 $Y=|\ln X|$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

11．设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求下列随机变量的分布：（1）$Y_1=3X$；（2）$Y_2=3-X$；（3）$Y_3=X^2$.

解：（1）因 $y=g(x)=3x$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y}{3}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{3}$，

当 $-1<x<1$ 时，有 $-3<y<3$，可得 $p_1(y)=\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{y}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{y^2}{18}$，$-3<y<3$，

故 $Y_1=3X$ 的密度函数为

$$p_1(y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{18}, & -3<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）因 $y=g(x)=3-x$ 严格单调下降，其反函数为 $x=h(y)=3-y$，且 $h'(y)=-1$，

当 $-1<x<1$ 时，有 $2<y<4$，可得 $p_2(y)=\dfrac{3}{2}(3-y)^2\cdot|-1|=\dfrac{3}{2}(3-y)^2$，$2<y<4$，

故 $Y_2=3-X$ 的密度函数为

$$p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(3-y)^2, & 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）因 $-1<x<1$ 时，有 $0<y=x^2<1$，
当 $y<0$ 时，$F_3(y)=P\{Y_3=X^2\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_3(y)=P\{Y_3=X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{3}{2}x^2dx=\dfrac{1}{2}x^3\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=y^{\frac{3}{2}}$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_3(y)=P\{Y_3=X^2\le y\}=P(\Omega)=1$；

因 $F_Y(y)$ 连续且仅有一个不可导的点，当 $0<y<1$ 时，$F_Y'(y)=\dfrac{3}{2}\sqrt{y}$，

故 $Y_3=X^2$ 的密度函数为

$$p_3(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

12．设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $Y=X^2$ 的分布．
解：因 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

且 $0<y=x^2<+\infty$，

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=X^2\le y\}=P(\varnothing)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y=X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$，

因 $F_Y(y)$ 连续且仅有一个不可导的点，当 $y>0$ 时，

$$F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}},$$

故 $Y=X^2$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

13．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的数学期望与方差.

解：因 X 的密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$，

则 $E(\mathrm{e}^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2x}{2\sigma^2}}dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2(\mu+\sigma^2)x+(\mu+\sigma^2)^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}}dx=\mathrm{e}^{\frac{2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dx,$$

因正态分布 $N(\mu+\sigma^2,\sigma^2)$ 密度函数为 $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dx=1$，

故 $E(Y)=E(\mathrm{e}^X)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$；

又因 $E(\mathrm{e}^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-4\sigma^2x}{2\sigma^2}}dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2(\mu+2\sigma^2)x+(\mu+2\sigma^2)^2-4\mu\sigma^2-4\sigma^4}{2\sigma^2}}dx=\mathrm{e}^{\frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dx,$$

且正态分布 $N(\mu+2\sigma^2,\sigma^2)$ 密度函数为 $p_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}dx=1$，

则 $E(Y^2)=E(\mathrm{e}^{2X})=\mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$，

故 $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}-\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$.

14．设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，试求以下 Y 的密度函数

（1）$Y = |X|$；　（2）$Y = 2X^2 + 1$.

解：因 X 的密度函数为 $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，　$-\infty < x < +\infty$，

（1）当 $y \le 0$ 时，$F_1(y) = P\{Y = |X| \le y\} = P(\varnothing) = 0$；
当 $y > 0$ 时，$F_1(y) = P\{Y = |X| \le y\} = \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1$，
因 $F_Y(y)$ 连续且仅有一个不可导的点，当 $y > 0$ 时，

$$F_1'(y) = 2\Phi'(y) = 2\varphi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},$$

故 $Y = |X|$ 的密度函数为

$$p_1(y) = F_1'(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

（2）当 $y \le 1$ 时，$F_2(y) = P\{Y = 2X^2 + 1 \le y\} = P(\varnothing) = 0$；

当 $y > 1$ 时，$F_2(y) = P\{Y = 2X^2 + 1 \le y\} = P\left\{-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right\} = 2\Phi\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right) - 1$，

因 $F_Y(y)$ 连续且仅有一个不可导的点，当 $y > 1$ 时，

$$F_2'(y) = 2\Phi'\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2(y-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(y-1)}} \varphi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}},$$

故 $Y = 2X^2 + 1$ 的密度函数为

$$p_2(y) = F_2'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1; \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$$

15．设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & 若 x > 0, \\ 0, & 若 x \le 0. \end{cases}$$

试求以下 Y 的密度函数
（1）$Y = 2X + 1$；　（2）$Y = \mathrm{e}^X$；　（3）$Y = X^2$.

解：（1）因 $y = g(x) = 2x + 1$ 严格单调增加，其反函数为 $x = h(y) = \dfrac{y-1}{2}$，且 $h'(y) = \dfrac{1}{2}$，

当 $x > 0$ 时，有 $y > 1$，可得 $p_1(y) = \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}$，$y > 1$，

故 $Y = 2X + 1$ 的密度函数为

$$p_1(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}, & y > 1, \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$$

（2）因 $y = g(x) = \mathrm{e}^x$ 严格单调增加，其反函数为 $x = h(y) = \ln y$，且 $h'(y) = \dfrac{1}{y}$，

当 $x>0$ 时，有 $y>1$，可得 $p_2(y)=\mathrm{e}^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y^2}$，$y>1$，

故 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数为

$$p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$

（3）因 $x>0$ 时，有 $y=g(x)=x^2$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\sqrt{y}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，

当 $x>0$ 时，有 $y>0$，可得 $p_3(y)=\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}$，$y>0$，

故 $Y=X^2$ 的密度函数为

$$p_3(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

16．设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布. 试证 $Y_1=\mathrm{e}^{-2X}$ 和 $Y_2=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 都服从区间(0, 1)上的均匀分布.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\le 0.\end{cases}$$

且 $y=g(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ 严格单调减少，其反函数为 $x=h(y)=-\dfrac{1}{2}\ln y$，且 $h'(y)=-\dfrac{1}{2y}$，

当 $x>0$ 时，有 $0<y<1$，可得 $p_1(y)=2\mathrm{e}^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln y\right)}\cdot\left|-\dfrac{1}{2y}\right|=2y\cdot\dfrac{1}{2y}=1$，$0<y<1$，

故 $Y_1=\mathrm{e}^{-2X}$ 的密度函数为 $p_1(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 即 Y_1 服从区间 (0, 1) 上的均匀分布；

又 $y=g(x)=1-\mathrm{e}^{-2x}$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=-\dfrac{1}{2}\ln(1-y)$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{2(1-y)}$，

当 $x>0$ 时，有 $0<y<1$，可得 $p_2(y)=2\mathrm{e}^{-2\cdot\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}\cdot\left|\dfrac{1}{2(1-y)}\right|=2(1-y)\cdot\dfrac{1}{2(1-y)}=1$，$0<y<1$，

故 $Y_2=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 的密度函数为

$$p_2(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

即 Y_2 服从区间 (0, 1) 上的均匀分布.

17．设 $X\sim LN(\mu,\sigma^2)$，试证 $Y=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

证：因 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

且 $y=g(x)=\ln x$ 严格单调增加，其反函数为 $x=h(y)=\mathrm{e}^y$，且 $h'(y)=\mathrm{e}^y$，

当 $x>0$ 时，有 $-\infty<y<+\infty$，可得 $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^y\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln \mathrm{e}^y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<y<+\infty$，

故 $Y=\ln X$ 的密度函数为 $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<y<+\infty$，即 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$.

18．设 $Y\sim LN(5,0.12^2)$，试求 $P\{Y<188.7\}$.

解：因 $Y\sim LN(5,0.12^2)$，有 $X=\ln Y\sim N(5,0.12^2)$，

故 $P\{Y<188.7\}=P\{X=\ln Y<\ln 188.7=5.24\}=\Phi\left(\dfrac{5.24-5}{0.12}\right)=\Phi(2)=0.9772$.

习题 2.7

1． 设 $X \sim U(a, b)$，对 $k = 1, 2, 3, 4$，求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\nu_k = E[X - E(X)]^k$，进一步求此分布的偏度系数和峰度系数.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $\mu_1 = E(X) = \int_a^b x \cdot \dfrac{1}{b-a} dx = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{x^2}{2}\Big|_a^b = \dfrac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$；

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \int_a^b x^3 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4(b-a)} = \frac{a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3}{4};$$

$$\mu_4 = E(X^4) = \int_a^b x^4 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_a^b = \frac{b^5 - a^5}{5(b-a)} = \frac{a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4}{5};$$

$$\nu_1 = E[X - E(X)] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\Big|_a^b = 0;$$

$$\nu_2 = E[X - E(X)]^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b = \frac{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\nu_3 = E[X - E(X)]^3 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{4}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4\Big|_a^b = 0;$$

$$\nu_4 = E[X - E(X)]^4 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{5}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^5\Big|_a^b = \frac{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{5(b-a)} = \frac{(b-a)^4}{80};$$

偏度系数 $\beta_1 = \dfrac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}} = 0$；

峰度系数 $\beta_2 = \dfrac{\nu_4}{(\nu_2)^2} - 3 = \dfrac{12^2}{80} - 3 = -\dfrac{6}{5}$.

2． 设 $X \sim U(0, a)$，求此分布的变异系数.

解：因 $X \sim U(0, a)$，有 $E(X) = \dfrac{a}{2}$， $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$，故变异系数 $C_v(X) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)} = \dfrac{b-a}{\sqrt{3}a}$.

3． 求以下分布的中位数：

（1）区间 (a, b)上的均匀分布；

（2）正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$；

（3）对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$.

解：（1）因 X 服从区间 (a, b)上的均匀分布，

则 $0.5 = P\{X \le x_{0.5}\} = P\{a < X \le x_{0.5}\} = \dfrac{x_{0.5} - a}{b - a}$，

故中位数 $x_{0.5} = a + 0.5(b - a) = \dfrac{a + b}{2}$；

（2）因 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

则 $0.5 = P\{X \le x_{0.5}\} = F(x_{0.5}) = \Phi\left(\dfrac{x_{0.5} - \mu}{\sigma}\right)$，即 $\dfrac{x_{0.5} - \mu}{\sigma} = 0$，

故中位数 $x_{0.5} = \mu$;

（3）因 X 服从对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$，有 $\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

则 $0.5 = P\{X \le x_{0.5}\} = P\{\ln X \le \ln x_{0.5}\} = F(\ln x_{0.5}) = \Phi\left(\dfrac{\ln x_{0.5} - \mu}{\sigma}\right)$，即 $\dfrac{\ln x_{0.5} - \mu}{\sigma} = 0$，

故中位数 $x_{0.5} = \mathrm{e}^{\mu}$.

4． 设 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，对 $k = 1, 2, 3$，求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\nu_k = E[X - E(X)]^k$.

解：因 $Ga(\alpha, \lambda)$的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

由正则性知 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = 1$，可得 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$，

故 $\mu_1 = \int_0^{+\infty} x \cdot \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$；

$$\mu_2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2};$$

$$\mu_3 = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3};$$

$\nu_1 = E[X - E(X)] = 0$；

$\nu_2 = E[X - E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \dfrac{\alpha^2}{\lambda^2} = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$；

$\nu_3 = E[X - E(X)]^3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \cdot \dfrac{\alpha}{\lambda} + 2\dfrac{\alpha^3}{\lambda^3} = \dfrac{2\alpha}{\lambda^3}$.

5． 设 $X \sim Exp(\lambda)$，对 $k = 1, 2, 3, 4$，求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\nu_k = E[X - E(X)]^k$，进一步求此分布的变异系数、偏度系数和峰度系数.

解：因 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

且 k 为正整数时，$\int_0^{+\infty} x^{k-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{\Gamma(k)}{\lambda^k} = \dfrac{(k-1)!}{\lambda^k}$，

故 $\mu_1 = \int_0^{+\infty} x\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\cdot\dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$；

$\mu_2 = \int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\cdot\dfrac{2!}{\lambda^3} = \dfrac{2}{\lambda^2}$；

$\mu_3 = \int_0^{+\infty} x^3\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\cdot\dfrac{3!}{\lambda^4} = \dfrac{6}{\lambda^3}$；

$\mu_4 = \int_0^{+\infty} x^4\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda\cdot\dfrac{4!}{\lambda^5} = \dfrac{24}{\lambda^4}$；

$\nu_1 = E[X-E(X)] = 0$；

$\nu_2 = E[X-E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$；

$\nu_3 = E[X-E(X)]^3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \dfrac{6}{\lambda^3} - 3\dfrac{2}{\lambda^2}\cdot\dfrac{1}{\lambda} + 2\dfrac{1}{\lambda^3} = \dfrac{2}{\lambda^3}$；

$\nu_4 = E[X-E(X)]^4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4 = \dfrac{24}{\lambda^4} - 4\dfrac{6}{\lambda^3}\cdot\dfrac{1}{\lambda} + 6\dfrac{2}{\lambda^2}\cdot\dfrac{1}{\lambda^2} - 3\dfrac{1}{\lambda^4} = \dfrac{9}{\lambda^3}$；

变异系数 $C_v(X) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)} = \dfrac{\sqrt{\nu_2}}{\mu_1} = 1$；

偏度系数 $\beta_1 = \dfrac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}} = 2$；

峰度系数 $\beta_2 = \dfrac{\nu_4}{(\nu_2)^2} - 3 = 9 - 3 = 6$.

6．设随机变量 X 服从正态分布 $N(10, 9)$，试求 $x_{0.1}$ 和 $x_{0.9}$.

解：因 $F(x_{0.1}) = \Phi\left(\dfrac{x_{0.1}-10}{3}\right) = 0.1$，得 $-\dfrac{x_{0.1}-10}{3} = 1.2816$，故 $x_{0.1} = 6.1552$；

又因 $F(x_{0.9}) = \Phi\left(\dfrac{x_{0.9}-10}{3}\right) = 0.9$，得 $\dfrac{x_{0.9}-10}{3} = 1.2816$，故 $x_{0.9} = 13.8448$.

（或查表可得 $-\dfrac{x_{0.1}-10}{3} = 1.28$，故 $x_{0.1} = 6.16$；$\dfrac{x_{0.9}-10}{3} = 1.28$，故 $x_{0.9} = 13.84$）

7．设随机变量 X 服从双参数韦布尔分布，其分布函数为

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\},\quad x > 0,$$

其中 $\eta > 0, m > 0$．试写出该分布的 p 分位数 x_p 的表达式，且求出当 $m = 1.5, \eta = 1000$ 时的 $x_{0.1}, x_{0.5}, x_{0.8}$ 的值.

解：因 $F(x_p) = 1 - \exp\left\{-\left(\dfrac{x_p}{\eta}\right)^m\right\} = p$，

故 $x_p = \eta[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{m}}$；

当 $m = 1.5,\ \eta = 1000$ 时，$x_{0.1} = 1000(-\ln 0.9)^{\frac{1}{1.5}} = 223.0755$；$x_{0.5} = 1000(-\ln 0.5)^{\frac{1}{1.5}} = 783.2198$；

$$x_{0.8} = 1000(-\ln 0.2)^{\frac{1}{1.5}} = 1373.3550 .$$

8．自由度为 2 的χ^2分布的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},\quad x > 0,$$

试求出其分布函数及分位数 $x_{0.1}, x_{0.5}, x_{0.8}$．

解：设 X 服从自由度为 2 的χ^2分布，

当 $x < 0$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0$，

当 $x \ge 0$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}du = \left.(-\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}})\right|_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$；

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

因 $F(x_p) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_p}{2}} = p$，有 $x_p = -2\ln(1-p)$，

故 $x_{0.1} = -2\ln 0.9 = 0.2107$；$x_{0.5} = -2\ln 0.5 = 1.3863$；$x_{0.8} = -2\ln 0.2 = 3.2189$．

9．设随机变量 X 的分布密度函数 $p(x)$ 关于 c 点是对称的，且 $E(X)$ 存在，试证

（1）这个对称点 c 既是均值又是中位数，即 $E(X) = x_{0..5} = c$；

（2）如果 $c = 0$，则 $x_p = -x_{1-p}$．

证：设 $f(x) = p(x + c)$，因 $p(x)$ 关于 c 点对称，有 $f(x)$ 为偶函数，

（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-c)p(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} cp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} up(u+c)du + c = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du + c$

$= 0 + c = c$；

因 $f(x)$ 为偶函数，有 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.5$，

则 $F(c) = \int_{-\infty}^{c} p(x)dx = \int_{-\infty}^{0} p(u+c)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du = 0.5$，可得 $x_{0..5} = c$；

故 $E(X) = x_{0..5} = c$；

（2）如果 $c = 0$，有 $p(x)$ 为偶函数，

则 $F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} p(x)dx = \int_{+\infty}^{-x_p} p(-u)\cdot(-du) = \int_{-x_p}^{+\infty} p(u)du = 1 - \int_{-\infty}^{-x_p} p(u)du = 1 - F(-x_p) = p$，

可得 $F(-x_p) = 1 - p$，

故 $-x_p = x_{1-p}$，即 $x_p = -x_{1-p}$．

10．试证随机变量 X 的偏度系数与峰度系数对位移和改变比例尺是不变的，即对任意的实数 $a, b\ \ (b \ne 0)$，$Y = a + bX$ 与 X 有相同的偏度系数与峰度系数．

证：因 $Y = a + bX$，有 $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$，可得 $Y - E(Y) = a + bX - a - bE(X) = b[X - E(X)]$，

则 $\nu_2(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = E\{b^2[X - E(X)]^2\} = b^2 E[X - E(X)]^2 = b^2\nu_2(X)$，

$\nu_3(Y) = E[Y - E(Y)]^3 = E\{b^3[X - E(X)]^3\} = b^3 E[X - E(X)]^3 = b^3\nu_3(X)$，

$\nu_4(Y) = E[Y - E(Y)]^4 = E\{b^4[X - E(X)]^4\} = b^4 E[X - E(X)]^4 = b^4\nu_4(X)$，

故偏度系数 $\beta_1(Y) = \frac{\nu_3(Y)}{[\nu_2(Y)]^{3/2}} = \frac{b^3\nu_3(X)}{[b^2\nu_2(X)]^{3/2}} = \frac{b^3\nu_3(X)}{b^3[\nu_2(X)]^{3/2}} = \frac{\nu_3(X)}{[\nu_2(X)]^{3/2}} = \beta_1(X)$；

峰度系数 $\beta_2(Y)=\dfrac{\nu_4(Y)}{[\nu_2(Y)]^2}-3=\dfrac{b^4\nu_4(X)}{[b^2\nu_2(X)]^2}-3=\dfrac{b^4\nu_4(X)}{b^4[\nu_2(X)]^2}-3=\dfrac{\nu_4(X)}{[\nu_2(X)]^2}-3=\beta_2(X)$.

11．设某项维修时间 T（单位：分）服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$.

（1）求 p 分位数 t_p；

（2）若 $\mu=4.127$，求该分布的中位数；

（3）若 $\mu=4.127$，$\sigma=1.0364$，求完成 95%维修任务的时间.

解：（1）因 T 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，有 $\ln T$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

则 $p=P\{T\le t_p\}=P\{\ln T\le \ln t_p\}=\Phi\left(\dfrac{\ln t_p-\mu}{\sigma}\right)$，即 $\dfrac{\ln t_p-\mu}{\sigma}=u_p$，$\ln t_p=\mu+\sigma\cdot u_p$，

故 $t_p=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_p}$；

（2）中位数 $t_{0.5}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.5}}=\mathrm{e}^{4.1271+0}=61.9979$；

（3）$t_{0.95}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.95}}=\mathrm{e}^{4.1271+1.0364\times1.6449}=340.9972$.

12．某种绝缘材料的使用寿命 T（单位：小时）服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$．若已知分位数 $t_{0.2}=5000$ 小时，$t_{0.8}=65000$ 小时，求 μ 和 σ.

解：因 T 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，有 $\ln T$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

由第 11 题可知 $t_p=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_p}$，

则 $t_{0.2}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.2}}=\mathrm{e}^{\mu-0.8416\sigma}=5000$，$t_{0.8}=\mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot u_{0.8}}=\mathrm{e}^{\mu+0.8416\sigma}=65000$，

可得 $\mu-0.8416\sigma=\ln 5000=8.5172$，$\mu+0.8416\sigma=\ln 65000=11.0821$，

故 $\mu=9.7997$，$\sigma=1.5239$.

13．某厂决定按过去生产状况对月生产额最高的 5%的工人发放高产奖．已知过去每人每月生产额 X（单位：千克）服从正态分布 $N(4000,60^2)$，试问高产奖发放标准应把生产额定为多少？

解：因 X 服从正态分布 $N(4000,60^2)$，

则 $0.95=P\{X\le x_{0.95}\}=F(x_{0.95})=\Phi\left(\dfrac{x_{0.95}-4000}{60}\right)$，即 $\dfrac{x_{0.95}-4000}{60}=u_{0.95}=1.6449$，

故高产奖发放标准应把生产额定为 $x_{0.95}=4000+60\times1.6449=498.6940$ 千克.