第九周习题课

1 (1) 叙述函数 f 在 x_0 处可微的定义.

(2) 证明: 一元函数 f 在 x_0 处可微的充分必要条件是 f 在 x_0 处可导.

(3) 设 $g(0) = h(0) = 0$, 且对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $|g(x)| \le |h(x)|$. 证明: 如果 g 与 h 在 $x = 0$ 处都可导, 则 $|g'(0)| \le |h'(0)|$.

2 (1) 设 k, n 是正整数且 $k \le n$, 计算函数极限

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})...(1-x^{n-k+1})}{(1-x^k)(1-x^{k-1})...(1-x^1)}.$$

(2) 设 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}$.

(3) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 每项非零且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q < 1$. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(4) 给定无理数 α 与实数 $x \in (-1, 1)$. 计算数列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

(5) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = K$. 计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0} (1 + f(x))^{g(x)}$.

3 设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是处处可导的双射, 其反函数为 $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(1) f^{-1} 是否一定处处可导? 请说明理由.

(2) 设 f 的导函数处处非零. 设函数 f 与 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 都处处有二阶导数. 定义函数 $h(x) = g(f^{-1}(x)), \quad \forall x \in \mathbf{R}$. 计算 h 的一阶导函数 $h'(x)$ 与二阶导函数 $h''(x)$, 要求用 f 与 g 的高阶导函数表示.

4 设 $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 是实数系数的多项式. 证明: $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 即存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $P(x) \geq P(x_0)$.

5 定义函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{如果} x > 0 \\ 0, & \text{如果} x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 证明: 对每个正整数 n, 存在多项式 $P_n(t)$, 使得对每个 $x > 0$, f 在点 x 处的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}.$$

(2) 对每个正整数 n, 计算 f 在 0 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

6 设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 严格单调递增, 且满足:

(1) 对任何实数 $b\geq 1$, 有 $f(\frac{1}{b})<\frac{1}{b+1}$;

(2) 对任何 $t>1$, 存在 $M\geq 1$, 使得当 $b\geq M$ 时, 总有 $f(\frac{1}{b})>\frac{1}{b+t}$.

定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$0<a_1<1,\quad a_{n+1}=f(a_n),\quad \forall n\geq 1.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=1$.

7 设 $f:(a,b)\in\mathbf{R}$ 满足对任何 $x,y\in(a,b)$ 以及任何 $\lambda\in[0,1]$, 总有

$$f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

(1) 证明: 对 (a,b) 上任何三点 $x_1<x_2<x_3$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(2) 证明: f 是 (a,b) 上的连续函数.