

概率论与数理统计：第九次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的答案必须个人书写完成。

- (1) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自总体  $X$  的样本， $X$  的密度函数为

$$p(x; \theta, \mu) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0.$$

请说明  $(\bar{x}, x_{(1)})$  是  $(\theta, \mu)$  的充分统计量。

- (2) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自伽玛分布  $Ga(\alpha, \lambda)$ ,  $\alpha > 0, \lambda > 0$  的样本，试寻找  $(\alpha, \lambda)$  的充分统计量。
- (3) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自指数分布  $Exp(\lambda)$  的样本。
- $\bar{x}$  是否  $\frac{1}{\lambda}$  的无偏估计？
  - $\frac{1}{\bar{x}}$  是否  $\lambda$  的无偏估计？
  - 请构造一个  $\lambda$  的无偏估计。
- (4) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自总体  $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$  的样本。
- 请说明  $\bar{x}$  与  $\frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(n)})$  都是参数  $\theta$  的无偏估计。
  - 请比较这两个无偏估计的有效性。
- (5) 设分别来自总体  $N(\mu_1, \sigma^2)$  与  $N(\mu_2, \sigma^2)$  的容量为  $n_1$  与  $n_2$  的两个相互独立的样本，其（无偏）样本方差分别为  $s_1^2, s_2^2$ 。
- 请说明  $Z = as_1^2 + bs_2^2$  对于任意满足  $a + b = 1$  的常数  $a, b$  都是  $\sigma^2$  的无偏估计。
  - 寻找  $a, b$  使得  $Z$  的方差最小。
- (6) 设总体  $X$  服从二项分布  $B(m, p)$ ，其中  $m, p$  均为未知参数， $x_1, \dots, x_n$  是  $X$  的一个样本，请寻找  $m$  与  $p$  的矩估计。
- (7) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自以下总体的样本：
- $p(\cdot; \theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), 0 < x < \theta, \theta > 0$ ;
  - $p(x; \theta, \mu) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0$ .
- 分别求未知参数的矩估计。
- (8) 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自总体  $X$  的样本， $E(X) = \mu, Var(X) < +\infty$ ，请问统计量  $\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n jx_j$  是否参数  $\mu$  的相合统计量？