第五章
谓词逻辑的等值和推理演算

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

谓词逻辑的等值和推理演算

- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算应用广泛。
- 本章从语义的观点进行非形式的描述。

普遍有效

- **4-6-1 普遍有效公式**

  设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

  例

$$(\forall x)\,(P(x)\vee\neg P(x))$$
$$(\forall x)P(x)\rightarrow P(y)$$
$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$

$(\forall x)\,P(x)\ \vee\ (\forall x)\neg P(x)$在$D_1$上普遍有效，但在$D_2$上则不一定。

5.1 否定型等值式

5.1 否定型等值式

- 5-1-1 等值

  设A, B是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若 $A \leftrightarrow B$是普遍有效的公式，则称 A 与 B 等值，记作

$$A = B \quad \text{或} \quad A \Leftrightarrow B$$

从命题公式移植来的等值式

5.1 否定型等值式

- 5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \dots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \dots \vee P(k)$$

$$x \in D_k = \{1,2,\dots,k\}$$

分析以下两式是否相等?

$$\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

- {1，2}域分析
- 否定词越过量词的移动，使用摩根定律
- (给出具体的分析方法)

- 例: “天下乌鸦一般黑” 的表示

设F(x): x是乌鸦, G(x, y): x与y 一般黑

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$$

即不存在x, y是乌鸦但不一般黑。这两句话含义是相. 同的。

- 经计算有

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$$

$$= (\forall x)\neg(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y)))$$

$$= (\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x)\wedge F(y))\vee G(x, y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

5.2 量词分配等值式

5.2 量词分配等值式

- 5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \lor q) = (\forall x)P(x) \lor q$$
$$(\exists x)(P(x) \lor q) = (\exists x)P(x) \lor q$$
$$(\forall x)(P(x) \land q) = (\forall x)P(x) \land q$$
$$(\exists x)(P(x) \land q) = (\exists x)P(x) \land q$$

- 其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

5.2 量词分配等值式

- 5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$
$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$
$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

- 其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

- 给出上面等式的证明。

- 先证明其中的第一个等式。

$$
\begin{aligned}
& (\forall x)(P(x) \rightarrow q) \\
= \ & (\forall x)(\neg P(x) \vee q) \\
= \ & (\forall x)\neg P(x) \vee q && \text{依5.2.1的等值式} \\
= \ & \neg(\exists x)P(x) \vee q && \text{依5.1.2的等值式} \\
= \ & (\exists x)P(x) \rightarrow q
\end{aligned}
$$

- 再证明其中的第三个等式

$$
\begin{aligned}
& (\forall x)(p \to Q(x)) \\
= \ & (\forall x)(\neg p \vee Q(x)) \\
= \ & \neg p \vee (\forall x)Q(x) \qquad \text{依5.2.1的等值式} \\
= \ & p \to (\forall x)Q(x)
\end{aligned}
$$

- 同样可证其余两个等值式。

$\forall x\, P(x) \to q$ 跟 $\forall x\, ((P(x) \to q)$的差别

5.2 量词分配等值式

- 5-2-3 全称量词 ∀ 对∧，存在量词 ∃ 对 ∨ 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) = (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \lor Q(x)) = (\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$$

用{1,2}域方法验证：

- ∀ 对∨ 不满足分配率，∃ 对∧不满足分配率

- 但需注意：

$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$$

5.2 量词分配等值式

- 5-2-3 **变元易名**∀与对∨，∃对∧的分配等值式(分配和易名对比)

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \neq (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

5.3 范式 (Normal Form)

5-3-1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

  (1) 所有量词都位于该公式的最左边；

  (2) 所有量词前都不含否定词；

  (3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

  则称A为前束范式。

5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

- 其中$Q_i(1\leq i\leq n)$为 ∀ 或 ∃，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

5-3-2 前束范式存在定理

Tsinghua University

- 一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. **消去联结词** →，↔。

2. **右移否定词** ¬（利用否定型等值式与摩根律）。

3. **量词左移**（使用量词分配等值式）。

4. **变元易名**（使用变元易名分配等值式）。

例1：求下式的前束范式

$$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x)))$$

可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

得 $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b) \vee R(x)))$

(2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge \neg (\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\land(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$$

$$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\land(\exists y)\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\land(\exists z)\neg Q(z, b)\land\neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\land\neg Q(z, b)\land\neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$$

思考：为什么不能直接写成：$(\forall x)(\exists y)\ (P(a, x, y)\land\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$

- 使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \land P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

5-3-4 SKOLEM 标准型

- **Thoralf Skolem：** 生于1887年，挪威；死于1963年；
- **主要工作是研究**丢番图方程，**数理逻辑, 集合论**等

Skolem tends to treat general problems by concrete examples. He often seemed to present proofs in the same order as he came to discover them. This results in a fresh informality as well as a certain inconclusiveness. Many of his papers strike one as progress reports. Yet his ideas are often pregnant and potentially capable of wide application. He was very much a ‘free spirit’: he did not belong to any school, he did not found a school of his own, he did not usually make heavy use of known results... he was very much an innovator and most of his papers can be read and understood by those without much specialized knowledge. It seems quite likely that if he were young today, logic...

5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称 量词的左边, 且，至少有一个存在量词;

  (2) 或仅保留全称量词而没有任何存在量词，便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

5-3-5 ∃前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists \boldsymbol{x_1})(\exists \boldsymbol{x_2})\ldots(\exists \boldsymbol{x_i})(\forall \boldsymbol{x_{i+1}})\ldots(\forall \boldsymbol{x_n})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n})$$

- 即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词(i ≥ 1)，同时$M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中不含量词也无自由个体变项

5-3-6 ∃前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 都存在与之等值的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

- **例2: 求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃前束范式(P中无量词)。**

将一公式化成∃前束形, 首先要求出前束形, 再做∃前束。这个例子已是前束形， 便可直接求∃前束形。

首先将全称量词$(\forall y)$改写成存在量词$(\exists y)$, 其次是引入谓词S和一个变元z, 得$S(x, z)$, 建立公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x, y)) \vee (\forall z)(S(x, z)))$$

其中$\neg S(x, y)$的变元, 是$(\forall y)$的变元y和$(\forall y)$左边存在量词$(\exists x)$的变元x。附加的$(\forall z)S(x, z)$中的变元z是新引入的未在原公式中出现过的个体, S也是不曾在M中出现过的谓词。

- 进而将$(\forall z)$左移(等值演算), 便得∃前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u) \land \neg S(x, y)) \lor S(x, z))$$

- 当原公式中有多个全称量词在存在量词的左边时，可按上述方法将全称量词逐一右移。
- ∃前束范式仅在**普遍有效**的意义下与原公式等值。∃前束形对谓词逻辑完备性的证明是重要的。

补充说明I：如何得来的？

$$\vdash \forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))$$ 推理公式

$$\vdash \neg(\forall x(\neg F(x)\vee G(x)))\vee(\neg(\forall xF(x))\vee\forall xG(x))$$ 去掉所有蕴含

$$\vdash \exists x(\neg(\neg F(x)\vee G(x)))\vee\neg(\forall xF(x))\vee\forall xG(x)$$ 否定内移

$$\vdash \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\boxed{\neg(\forall xF(x))}\vee\forall xG(x)$$ 否定内移

$$\vdash \boxed{\neg(\forall xF(x))}\vee(\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\forall xG(x))$$ 换位置，加括号

$$\vdash \forall xF(x)\to(\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\forall xG(x))$$ 等值变换

$$\vdash \forall xF(x)\to(\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\forall zG(z))$$ 变元易名

$$\vdash \forall xF(x)\to\exists x\forall z((F(x)\wedge\neg G(x))\vee G(z))$$ 分配量词

补充说明II：存在前束范式存在定理及其证明

- 定理：谓词逻辑的任一公式A, 都可化成相应的∃前束范式, 并且A是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。
- 见附件材料——自学

5-3-7 ∀前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 的∀前束范式（或称 SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A 是不可满足的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

- 应注意，该定理是说对不可满足的公式，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

- **例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。**

- 将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形
- 首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。
- 进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数f (y, z) (未在P中出现过)代入。

- 最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数
g(y, z, v) (未在P中出现过也不同于f(y, z))代入。

- 这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$

- 消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x，可视作x的某个函数$f(x)$。

从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是x的函数f, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

- 在{1, 2}域上

  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

  $= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$

  $(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$

  两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

  这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。