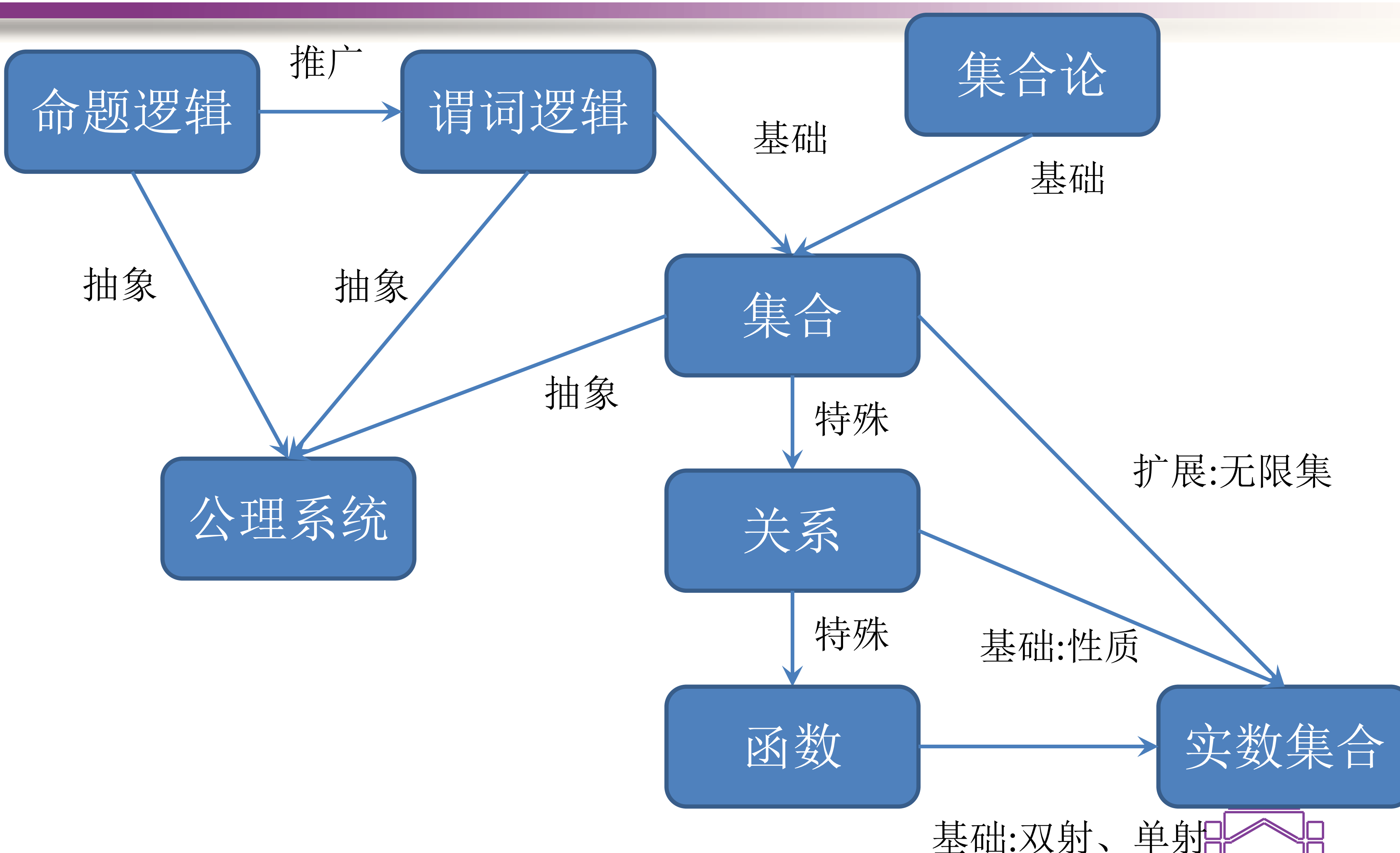
第九章 集合（1）

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

课程章节关系

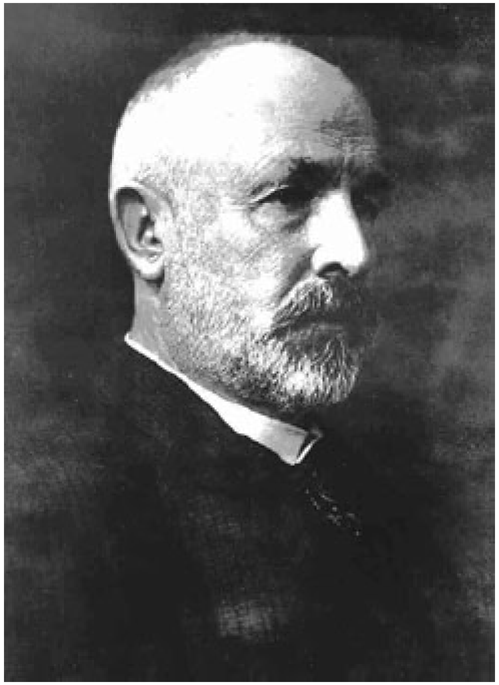

命题逻辑
推广
谓词逻辑
集合论
基础
基础
抽象
抽象
集合
抽象
特殊
扩展:无限集
公理系统
关系
特殊
基础:性质
函数
实数集合
基础:双射、单射

内容提纲

9.1 集合的概念与表示方法

人物简介 — 集合论的创始人：George Cantor（康托）（1845 ~ 1918)

- 丹麦犹太商之子，出生在彼得堡，后移居到德国
- 先后在瑞士苏黎世和德国柏林大学学习
- 22岁时在柏林获博士学位
- 1879-1905年在德国Halle大学任教



Georg Cantor:
1845-1918

人物简介 — 集合论的创始人：
George Cantor（康托）（1845 ~ 1918)

- 除集合论的创立外，康托在数学领域有诸多方面的贡献：

  1. 1874年引入基数概念，证明“超越数大大多于代数数”。

  2. 定义了序型、超限序数等概念。

  3. 定义了聚点、闭集、开集等概念。

  4. 建立了维数理论，为拓扑空间理论开辟了道路。

人物简介 — 集合论的创始人：George Cantor（康托）（1845 ~ 1918)

没有任何人能够将我们从Cantor所创造的这个乐园（集合论）中驱赶出去！

— David Hilbert（希尔伯特）

9-1-1 集合(set)的概念

- 集合是无法给出严格精确定义的最基本的数学概念之一。
- 康托的定义

“将具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时，这一整体就称为集合，而这些事物或对象就称为属于该集合的元素”

特征：是指特有属性；性质，是指本质属性

9-1-1 集合(set)的概念

- 吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

—— 肖文灿《集合论初步》

9-1-2 集合的元素与集合之间的关系

- 一个集合的元素和该集合之间是隶属关系，即属于或不属于。若元素a属于集合A，记作$a \in A$，否则记作$a \notin A$。

  符号“∈”由Peano最早引入并使用。

- 教材采用的体系中规定集合的元素都是集合。同时为保持体系上的严谨性，规定：对任何集合A都有$A \notin A$。同时，也规定不存在包含所有集合的集合。

9-1-3 集合的表示法

表示一个集合的方法有两种：

- 外延表示法和内涵表示法。
- 前一种方法又称之为穷举法，即列出集合的所有元素。
- 后一种方法又称之为谓词表示法，即用谓词来概括集合中元素的性质。一般而言，如果$P(x)$表示一个谓词，则可以用$\{x|P(x)\}$或$\{x:P(x)\}$表示一个集合。
- $\{x|P(x)\}$是使$P(x)$为真的所有元素x组成的集合。即，若$P(a)$为真，则a属于该集合。

Russell悖论

- **伯特兰·阿瑟·威廉·罗素**，第三代罗素伯爵，OM，FRS（Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell，1872年5月18日－1970年2月2日）是二十世纪最有影响力的哲学家、数学家和逻辑学家之一，同时也是活跃的政治活动家，并致力于哲学的大众化、普及化
- 罗素最早对数学产生兴趣，然后才逐渐转向哲学方面，因此他在数学方面也有很多重要的建树。在数理逻辑方面，罗素提出了罗素悖论。罗素在1900年便认识到，数学是逻辑学的一部分。1910年，他和他的老师阿弗烈·诺夫·怀海德一起发表了三卷本的《数学原理》，在其中对这一概念做了初步的系统整理。

伯特兰·罗素(1907年)

Russell悖论

把所有的集合分成2类，第一类中的集合以其自身为元 $P=\{A|A \in A\}$；第二类集合不以自身为元素 $Q=\{A|A \notin A\}$，那么Q应该属于P还是Q？

思考：假定Q属于Q，而Q不以自身为元素，矛盾；

假定Q属于P，而P只以自身为元素，又推导出矛盾；

唯一可能的解释：

P、Q都不是集合。

Russell悖论

- 康托集合定义的概括原则：若P是描述或刻划对象的特有属性或本质属性的命题或条件，则{ x | P(x)}是集合，其中P(x)指“P(x)为真”或“x满足条件P”
- 因此，之前定义的P、Q都不是集合，因为没有定义各自的本质属性！

- Russell悖论的重要意义：

  (1)否定或取消康托集合定义中**特有属性或本质属性**的要求，就会产生悖论;

  (2) { x| P(x)}可以不是集合；例如，“所有集合的集合”

- 关于$\{ x \mid P(x) \}$是否为集合的问题，集合论的公理系统会进一步深入探索。
- 集合论公理系统会探讨集合的存在性、合法性，以及如何由已知集合构造新的集合。

9.2 集合间的关系和特殊集合

定义9.2.1 集合的相等

- 两个集合A, B相等，当且仅当它们具有相同的元素。若集合A和B相等，则记作$A=B$；否则记作$A\neq B$。该定义的符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (\forall \mathrm{x})(\mathrm{x} \in \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{B})$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists \mathrm{x})\neg(\mathrm{x} \in \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{B})$$

定义9.2.2 子集(subset)

- 设A, B为集合，若A中的每个元素都是B的元素，则称A为B的子集合，简称子集。这时称B包含A，记作$A\subseteq B$。该定义的符号化表示为

$$A\subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x\in \mathrm{A}\rightarrow x\in \mathrm{B})$$

定理9.2.1

- 两个集合相等的充要条件是它们互为子集。
- 符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

定理9. 2. 2

- 对任意的集合A, B 和C，包含关系 $\subseteq$ 分别具有下列性质：

(1) $A \subseteq A$ （自反性）

(2) $(A\subseteq B \wedge B\subseteq A)\Rightarrow A=B$ （反对称性）

(3) $(A\subseteq B \wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$ （传递性）

定义9.2.3 真子集(proper subset)

- 对任意两个集合A和B，若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称A是B的真子集，或称B真包含A。记作$A\subset B$。该定义的符号化表示为

$$A\subset B\Leftrightarrow(\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}\ \wedge\ \mathrm{A}\neq\mathrm{B})$$

用谓词公式怎么写？

定义9.2.4 不相交

- 若两个集合*A*和*B*没有公共元素，就称*A*和*B*是不相交的。该定义也可写成

$$A\text{和}B\text{不相交} \quad \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

定义9.2.5 空集 (empty set)

- 不含任何元素的集合称为空集，记作Φ。空集可符号化为

$$\Phi=\{x \mid x \neq x\}$$

- 为何要引入？非常重要且基础的一个集合

定理9.2.3 空集是一切集合的子集

- 空集是一切集合的子集。即，对任意的集合A，$\Phi \subseteq A$。

- 证明：反证法，假设存在集合A，使 $\Phi \not\subset A$，则存在x，使x$\in\Phi$，且x$\notin A$。这与空集Φ的定义矛盾，所以定理得证。

$(\forall x)(x \neq \Phi)$ 为永真式，恒成立。

思考题

- 仅用空集构造：

  一个集合的无穷序列$A_1,A_2,\ldots A_n$，序列中每个集合至多包含一个元素；且满足$A_1 \in A_2 \in \ldots \in A_n$

定义9.2.6 全集(universal set)

- 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记作E。该定义亦可叙述为，在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集。全集的定义可符号化表示为

$$E = \{x|x = x\}$$

全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集。即使同一个问题也可以取不同的全集。

9.3 集合的运算

定义9.3.1 （五种基本运算）

- 集合的基本运算包括并，交，差（相对补）和对称差。
- 对集合A和B

(1)并集(union) $A\cup B$定义为

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

(2)交集(intersection) $A\cap B$定义为

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

定义9.3.1 （五种基本运算）

(3) 差集(difference) $A-B$ 定义为

$$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

又称B对A的相对补集。

- 差运算与并运算不是逆运算。

一般而言，（$A-B$）$\cup$ $B \neq A$

同样，（$A \cup B$）$-B \neq A$ *(反例)*

定义9.3.1 （五种基本运算）

(4) 补集(complement) –*A* 定义为

$$-A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$$

其中*E*为全集。又称*A*的绝对补集，也是*A*对*E*的相对补集

(5) 对称差(symmetric difference) *A*⊕*B*定义为 *

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in A \,\nabla\, x \in B\}$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

定义9.3.2 广义并和广义交

- 设A为集合，A的所有元素的元素组成的集合称为A的广义并，记作$\cup A$；符号化表示为

$$\cup A = \{x|\exists z(z\in A \wedge x\in z)\}$$

$$\cup A=\{x \mid x \in \text{某个}z \in A\} \text{(简化写法)}$$

- 此外，对空集Φ可以进行广义并，$\cup\Phi = \Phi$。

定义9.3.2 广义并和广义交

- 设A为非空集合，把A的所有元素的公共元素组成的集合称为A的广义交，记作$\cap A$。符号化表示为

$$\cap A = \{x | \forall z(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$$\cap A = \{x | x \in \text{每个} z \in A\} \ \text{(简化写法)}$$

- $\cap \Phi$不是集合，没有意义。

广义并和广义交举例

- 已知

$$A = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$$
$$\cup A = \{a, b, c, d\}$$
$$\cap A = \{b\}$$

广义并和广义交

- 为什么叫做广义交和广义并？

定义9.3.3 幂集(power set)

- 设A为集合，把 A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作$P(A)$。符号化表示为

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

对任意的集合A，有$\Phi \subseteq A$和$A \subseteq A$，因此有$\Phi \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$。

$$\mathrm{x} \in P(A) \Leftrightarrow \mathrm{x} \subseteq A$$

9-3-4 有序对

- 由两个元素x和y（允许$x=y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中

  x是它的第一元素，y是它的第二元素。

- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

  1. 当$x \neq y$ 时，$<x, y> \neq <y, x>$。

  2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是

  $x = u$ 且 $y = v$。

定义9.3.4

- 用集合的形式，有序对<x, y>定义为

$$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

定义9.3.5　*n*元组

- 若$n \in N$且$n > 1$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是n个元素，则

  n元组 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 定义为

  当$n = 2$时，二元组是有序对$<x_1, x_2>$。

  当$n \neq 2$时，$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = <<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$

定义9.3.6 集合A 和B 的笛卡儿积

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素， B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$。

A和B的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{< x, y > | x \in A \land y \in B\}$$

9-3-7 n 阶笛卡儿积

- 若$n\in N$且$n>1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个集合，它们的n阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n \\ = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n > | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

- $x \in R^n$

9-3-8 集合运算的优先顺序

- 称广义并，广义交，幂集，绝对补运算($\cup A$, $\cap A$, $P(A)$, $-A$)为一类运算；

- 并，交，对称差，笛卡儿积，相对补运算($\cup$, $\cap$, $\oplus$, $\times$, $-$)为二类运算 。

9-3-8 集合运算的优先顺序(续)

- 一类运算优先于二类运算
- 二类运算优先于集合关系运算($=, \subseteq, \subset, \in$)
- 同时，上述集合运算优先于逻辑运算($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow, \Rightarrow$)
- 括号内优先于括号外的；同一层括号内，相同优先级的，按从左到右的顺序进行

9.4 集合的图形表示法

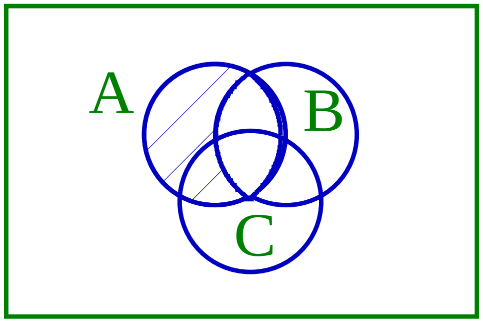
9-4-1 文氏图(Venn Diagram)

- 英国逻辑学家J.Venn(1834-1923)于1881年在《符号逻辑》一书中，首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。
- 后来人们以他的名字来命名这种用图形来表示集合间的关系和集合的基本运算的方法。简称文氏图。

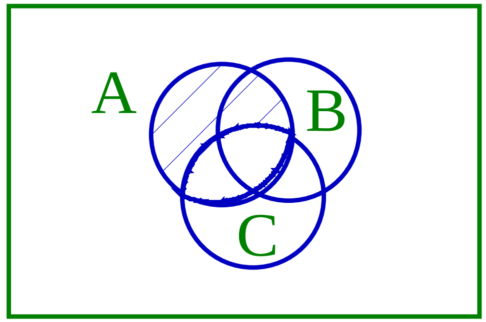
9-4-1 文氏图(Venn Diagram)

- 其构造如下：
  - 用一个大的矩形表示全集的所有元素（有时为简单起见，可将全集省略）
  - 在矩形内画一些圆（或任何其它形状的闭曲线），用圆的内部的点表示相应集合的元素
  - 不同的圆代表不同的集合
  - 用阴影或斜线的区域表示新组成的集合
- 文氏图的优点是形象直观，易于理解。
- 缺点是理论基础不够严谨。不能用于证明。

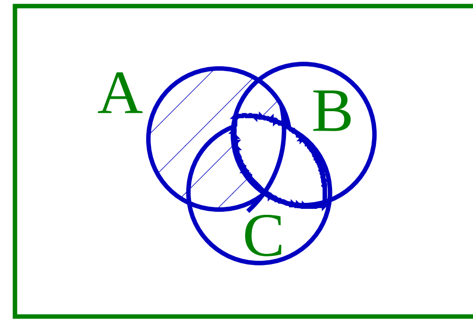
$(A\text{-}B) \cup (A\text{-}C) = A\text{-}(B \cap C)$



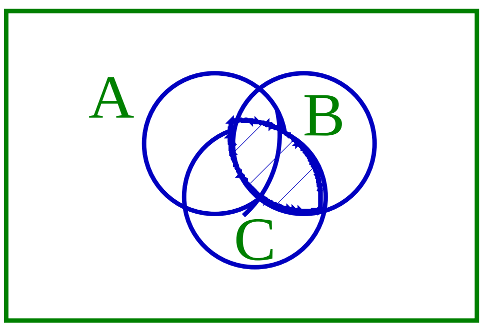
$A - B$

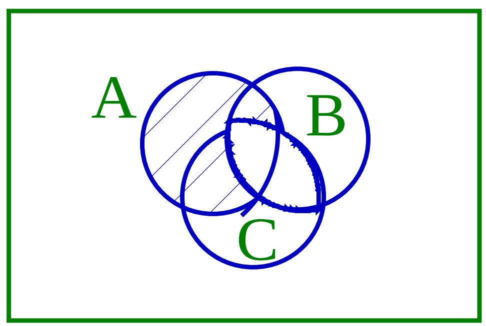


$A - C$



$(A - B) \cup (A - C)$





$A - (B \cap C)$

9.5 集合运算的性质和证明

定理9.5.1 集合恒等式

- 对任意的集合A, B, C，下列恒等式成立：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) 幂等律 $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

(5) 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

(6) 狄摩根律

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$-(B \cup C) = -B \cap -C$$

$$-(B \cap C) = -B \cup -C$$

(7) 同一律

$$A \cup \Phi = A$$

$$A \cap E = A$$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

(8) 零律 $A \cup E = E$

$A \cap \Phi = \Phi$

(9) 补余律 $A \cup -A = E$ (排中律)

$A \cap -A = \Phi$ (矛盾律)

(10) 补律

$-\Phi = E$

$-E = \Phi$

(11) 双补律

$-(-A) = A$

定理9.5.2 差集的性质

- 对任意的集合 A, B, C

$$(1) A - B = A - (A \cap B)$$

$$(2) A - B = A \cap -B$$

$$(3) A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$(4) A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

定理9.5.3 对称差的性质

- 对任意的集合 A, B, C

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \oplus (\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C})$

(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(4) 同一律 $A \oplus \Phi = A$

(5) 零律　 $A \oplus A = \Phi$

(6) 吸收律 $\boldsymbol{A} \oplus (\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}$

对称差结合律补充资料1

首先：$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap -B) \cup (B \cap -A)$

$$(A \oplus B) \oplus C = (A \oplus B - C) \cup (C - A \oplus B)$$

其次：

$1.\ A \oplus B - C$

$= \big((A \cap -B) \cup (B \cap -A)\big) \cap -C$

$= (A \cap -B \cap -C) \cup (-A \cap B \cap -C)$

对称差结合律补充资料2

$2. C - A \oplus B$

$= C - (A - B) \cup (B - A)$

$= C \cap -\big((A - B) \cup (B - A)\big)$

$= C \cap \big(-(A - B) \cap -(B - A)\big)$

$= C \cap (-\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (-\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A})$

$= C \cap \big((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (-\boldsymbol{A} \cap -\boldsymbol{B})\big)$

$= (A \cap B \cap C) \cup (-A \cap -B \cap C)$

注： $(-\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup -\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (-\boldsymbol{A} \cap -\boldsymbol{B})$

因此：$(A \oplus B) \oplus C = (A \cap -B \cap -C) \cup (-A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (-A \cap -B \cap C)$

同理可得

$$A \oplus (B \oplus C) = (-A \cap -B \cap C) \cup (-A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap -B \cap -C)$$

定理9.5.4 集合间的⊆关系的性质

- 对任意的集合 A, B, C 和 D

(1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

(3) $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

(4) $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

(5) $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$

(6) $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

- 求证 $\mathbf{A \cup B = B}$ **(1)**

  $\mathbf{\Leftrightarrow A \subseteq B}$ **(2)**

  $\mathbf{\Leftrightarrow A \cap B = A}$ **(3)**

  $\mathbf{\Leftrightarrow A - B = \Phi}$ **(4)**

证 (4) $\Rightarrow$ (1)， 已知 $A-B=\Phi$， 求证$A \cup B = B$

$A \cup B$

$= B \cup A$

$= B \cup (A-B)$ 由差集的性质(3) $A \cup (B-A) = A \cup B$

$= B \cup \Phi$ $B \cup (A-B) = B \cup A$

$= B$

- 例1的重要结论：

  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \Phi$

- 后面的例3 即利用此结论

- 例2 对任意的集合A, B和C, 有

  $A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \Rightarrow B=C$

- 证明 方法1:

$B = B\cap (A\cup B)$	吸收律
$= B\cap (A\cup C)$	已知前提
$= (B\cap A) \cup (B\cap C)$	分配律
$= (A\cap C) \cup (B\cap C)$	已知前提
$= (A\cup B) \cap C$	分配律
$= (A\cup C) \cap C$	已知前提
$= C$	吸收律

- 方法2：

假设$B \neq C$，即存在x, 使$(x \in B \wedge x \notin C)$

若$x \in A \Rightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C)$

若$x \notin A \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cup C)$

均与已知条件$A \cup B = A \cup C$, $A \cap B = A \cap C$矛盾

因此只有 $B=C$。

- 问题：仅由$A\cup B = A\cup C$

  是否可推出 $B = C$？

  或仅由$A\cap B = A\cap C$是否可推出 $B = C$？

$A\cup A = A\cup \Phi$?$\Rightarrow A = \Phi$

$A\cap -A = A\cap \Phi$?$\Rightarrow -A = \Phi$

可见必须同时满足两个条件

幂集合的性质

- 定理9.5.5 幂集合的性质1

  对任意的集合 A和B

$$(1)\ A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$
$$(2)\ A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

- 定理9.5.6 幂集合的性质2

  对任意的集合 A和B

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

幂集合的性质(续)

- 定理9.5.7 幂集合的性质3

  对任意的集合 A和B

$$(1)\ P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$$
$$(2)\ P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$$

- 定理9.5.8 幂集合的性质4

  对任意的集合 A和B

$$P(A-B)\subseteq (P(A)-P(B))\cup\ \{\Phi\}$$

- 证（2）$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$x \in P(A) \cup P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$ --并集定义

$\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$ --幂集合定义

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \vee (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B)$ --子集关系定义

$\Rightarrow (\forall y)((y \in x \rightarrow y \in A) \vee (y \in x \rightarrow y \in B))$ --谓词推理公式

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in (A \cup B))$ --谓词等值推理公式

$\Leftrightarrow x \subseteq A \cup B$ --子集关系定义

$\Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$ --幂集定义

$x \subseteq A \vee x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq A \cup B$

- 但 $x \subseteq A \cup B$ ？$\Rightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

- 老师，终于可以休息啦！