作业一

1．一个质点按照 $\sin wt$ 的规律作简谐振动。试证明：对质点位置进行测量时，测得质点的位置在 x 到 x+dx 的几率为：, $r(x)dx = \frac{1}{p}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ，并证明几率分布满足归一化条件：$\int r(x)dx = 1$ 。
[提示 :以 T 代表振动周期,dt 表示运动粒子由 x 移至 x+dx 所经历的时间,则所求得的几率 $r(x)dx = 2dt/T$ 。在周期 T 内，粒子两次进入上述间隔，故引入因子 2]。

解：

$$x = \sin wt$$

$$v = \frac{dx}{dt} = w \cdot coxwt$$

$$r(x)dx = 2\frac{dt}{T} = \frac{2}{T}\cdot\frac{dx}{v} = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{w\cos wt}\cdot dx = \frac{2}{2p/w}\cdot\frac{1}{w\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{1}{p}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int r(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{p}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{1}{p}\cdot\frac{\cos u}{\cos u}du = \frac{1}{p}\cdot p = 1$$

$let \quad x = \sin u.$

2．若粒子有两个能级，每个能级的简并度为 4。设系统由 4 个费米子组成。问：系统可能出现那几种分布？各分布对应的微观状态数目是多少？各分布出现的几率是多少？那一种分布出现的几率最大？试列表表示之。如果上题中是玻色子，结果又如何？

F.D.

ε_1	ε_2	$\prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$	
0	4	1	1/70
1	3	16	16/70
2	2	36	36/70
3	1	16	36/70
4	0	1	1/70

B.E

ε_1	ε_2	$\prod_i \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$	
0	4	35	35/330
1	3	80	80/330
2	2	100	100/330
3	1	80	80/330
4	0	35	35/330

3．试证明，在体积 V 内，在ε到ε+dε的能量范围内，三维自由粒子的量子态数目为：
$D(e)de = 2pVh^{-3}(2m)^{3/2}e^{1/2}de$

解：

$$\Omega(\varepsilon) = \int dxdydzdp_x p_y p_z = V\cdot 4p\int_0^{\sqrt{2mE}} p^2dp = \frac{4p}{3}V(2m\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$$

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{d\Omega(\varepsilon)}{h^3} = \frac{\frac{4p}{3}V\cdot\frac{3}{2}\cdot 2m(2m\varepsilon)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{h^3} = 2pV\cdot h^{-3}(2m)^{\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon$$

4．试证明，对于一维自由粒子，在长度 L 内，在ε到ε+dε的能量范围内，量子态数目为：
$D(e)de = 2Lh^{-1}m^{1/2}(2e)^{-1/2}de$

解：

$$\Omega(\varepsilon)=\int\int dxdp_x = L\cdot\int_{-\sqrt{2m\varepsilon}}^{\sqrt{2m\varepsilon}} dp_x = 2L\cdot\sqrt{2m\varepsilon}$$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{d\Omega(\varepsilon)}{h}=h^{-1}\cdot 2L\cdot\frac{1}{2}\cdot(2m\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\cdot 2md\varepsilon = 2Lh^{-1}\cdot m^{\frac{1}{2}}\cdot(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\,d\varepsilon$$

5．试证明，对于二维自由粒子，在面积 L2 内，在ε到ε+dε的能量范围内，量子态数目为：
$D(e)de = 2pL^2h^{-2}mde$

解：

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{d\Omega(\varepsilon)}{h^2}$$

$$\Omega(\varepsilon)=\int\int dxdydp_xdp_y = L^2\cdot 2p\cdot\int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} pdp = L^2\cdot 2p\cdot\frac{1}{2}\cdot 2m\varepsilon = L^2\cdot 2p\,m\varepsilon$$

$$\therefore g(\varepsilon)\,d\varepsilon = L^2\cdot 2p\,m\cdot\ h^{-2}d\varepsilon$$

6．在极端相对论情形下，粒子的能量和动量关系为：ε＝cp。试求在体积 V 内，在ε到ε+dε的能量范围内三维自由粒子的量子态数目。

解：

$$\Omega(\varepsilon)=\int\int dxdydzdp_xdp_ydp_z = V\cdot 4p\int_0^{\varepsilon/c} p^2dp = V\cdot\frac{4p}{3}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^3$$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{d\Omega(\varepsilon)}{h^3}=h^{-3}\cdot V\cdot\frac{4p}{3}\cdot 3\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2\frac{1}{c}d\varepsilon = h^{-3}\cdot 4pV\cdot c^{-3}\varepsilon^2d\varepsilon$$

7．根据粒子的自旋，判断下列粒子试费米子还是玻色子:
12C 原子，13C 原子，H2 分子，3He 原子，4He 原子，4He＋离子，α粒子，正电子，6Li＋离子。

解：

B.E. $\ ^{12}C, H_2, {}^4He$，a，$^6Li^+$

$F.D.\ \ ^{13}C, {}^3He, {}^4He^+, e^+$

统计物理作业二

8．假设有两个孤立的玻色子（费米子）系统，粒子数分别为 N1 和 N2，能量分别为 E1 和 E2，体积分别为 V1 和 V2。假设两个系统中粒子的相互作用很弱，可以忽略不计。(玻色子或者费米子系统，选其一讨论。)

a、试推导它们的最概然分布。

b、如果让两个系统只进行热交换，试推导它们进行热交换达到热平衡后的最概然分布。

c、如果让两个系统既进行热交换，又进行粒子交换（但是粒子属于不同的相，即：两个系统中的粒子具有不同系列的能级和简并度)，试推导它们达到热力学平衡后的最概然分布。

d、从上述推导中，是否可以看出拉氏乘子α和β的物理意义是什么。

e、在 c 中，如果两个系统的粒子属于同一个相，试讨论系统的最概然分布

9．考虑一个由 106 个三维自由粒子组成的系统。粒子的质量 m＝20000 me（me 是电子的质量)，自旋等于零，粒子之间的相互作用可以忽略不计。粒子在边长 L＝1 m 的容器内运动。

a、试推导出粒子的能级表达式，并讨论能级的间隔大小。

b、在室温下，能否将粒子的能级和动量看成是准连续的？如果是，请给出粒子能级的简并度表达式。

c、假设系统的能量为 10－16 J，请问你能否求出系统的α和β值（给出具体的计算思路)。

解：

$$a.)\, p_x=\frac{hn_x}{L},\, p_y=\frac{hn_y}{L},\, p_z=\frac{hn_z}{L}$$

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}+U=\frac{h^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)+U$$

$$U=\begin{cases}0 & 0\le x,y,z\le L\\ \infty & x,y,z>L\end{cases};$$

$$\therefore \Delta\varepsilon=\frac{h^2}{2mL^2}\cdot K$$

$$b.)\quad \frac{h^2}{2mL^2}\sim10^{-41}J,\quad KT\left(300K\right)\sim10^{-21}J.\quad \Delta\varepsilon<<KT.$$

此时能级和动量看成准连续的。

$$g\left(\varepsilon\right)=2pVh^{-3}\left(2m\right)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon$$

$$c.)N=\int g\left(\varepsilon\right)e^{-a-b\varepsilon}d\varepsilon\quad,\quad E=\int\varepsilon\cdot g\left(\varepsilon\right)e^{-a-b\varepsilon}d\varepsilon$$

$$\rightarrow\quad a,b.$$

$$Z=\int g\left(\varepsilon\right)e^{-b\varepsilon}d\varepsilon=\frac{1}{h^3}\int e^{-bU}dxdydz\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b\frac{\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)}{2m}}dp_xdp_ydp_z=\frac{V}{h^3}\left(\frac{2pm}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$E=-N\frac{\partial}{\partial b}\ln Z=\frac{3}{2}\cdot\frac{N}{b},\quad e^a=\frac{Z}{N},\quad\rightarrow a,b.$$

统计物理作业三

10. **固体中含有** A、B **两种原子，试证明由于原子在晶格格点的随机分布引起的混合熵为**

$$s = k\ln\frac{N!}{[Nx]![N(1-x)]!} = -Nk[x\ln x-(1-x)\ln(1-x)]$$

其中，N **是总原子数，**x **是** A **原子的百分比，（**1－x**）是** B **原子的百分比。注意：**x<1**，上式给出的熵为正值。**

解：

$$\Omega = C_N^{Nx} = \frac{N!}{[Nx]!\left[N(1-x)\right]!};$$

$$S = k\ln\Omega = k\ln\frac{N!}{[Nx]!\left[N(1-x)\right]!} = k\left[N(\ln N-1)-Nx(\ln Nx-1)-N(1-x)\left(\ln(N-Nx)-1\right)\right]$$

$$\therefore S \approx -Nk\left[x\ln x+(1-x)\ln(1-x)\right]$$

11. **晶体中含有** N **个原子。正常情况下原子在晶体中占据格点位置。当原子离开格点位置，占据格点之间的间隙位置时，晶体中出现缺位（该格点上没有原子时称为缺位）和间隙原子。这种缺陷称为** Frankel **缺陷。（**1**）假设正常位置（格点位置）和间隙位置数目都是** N**，试证明由于在晶体中形成了** n **个缺位和间隙原子而具有的熵等于：**

$$s = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

2**）假设原子在间隙位置和正常位置的能量差为** u**。试由自由能** F＝nu－TS **为极小证明，温度为** T **时，缺位和间隙原子的数目为：**

$$n \approx Ne^{-\frac{m}{2kT}} \quad \text{(n<<N)}.$$

解：

(1)

$$\Omega = C_N^n C_N^n,$$

$$\therefore S = 2k\ln C_N^n = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

(2)

$$F = nu - TS = nu - 2kT\left[N\ln N - n\ln n-(N-n)\ln(N-n)\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = u-2kT\left(-\ln n-1+\ln(N-n)+1\right) = u-2kT\left[\ln(N-n)-\ln \cancel{N}\right] = 0.$$

$$N >> n, \to N- n \approx N.$$

$$\therefore 2kT\ln\frac{n}{N} = -u$$

$$\therefore n \approx Ne^{-\frac{m}{2kT}}. \quad and \quad \frac{\partial^2 E}{\partial n^2} = 2kT\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{N-n}\right) > 0$$

12． **如果原子脱离晶体内部的正常位置而占据表面上的正常位置，构成新的一层，晶体内部将出现缺位（不会形成间隙原子）。这种缺陷称为 Schottkey 缺位。以 N 表示晶体中的原子数，n 表示晶体中的缺位数，如果忽略晶体体积的变化，试由自由能为极小的条件证明，在温度 T 下，**

$$n \approx N e^{-\frac{w}{kT}}$$ **（假设 n<<N），w 为原子在表面位置和正常位置的能量差。**

解：同第二题。

$$\boxed{\Omega = C_N^n,}$$

$$S = k \ln C_N^n = k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

$$n \approx N e^{-\frac{w}{kT}}.$$

统计物理作业四

13． **已知粒子遵循玻尔兹曼分布。其能量表达式为：**

$$e=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+ax^2+bx$$

其中，a，b **是常数。求粒子的平均动能。**

解：

$$\bar{E}=\frac{E}{N}=\frac{\frac{1}{h^3}\int \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)\cdot e^{-a-b\varepsilon}dxdydzdp_xdp_ydp_z}{\frac{1}{h^3}\int e^{-a}e^{-b\varepsilon}dxdydzdp_xdp_ydp_z}$$

$$=\frac{\int e^{-a-b\left(ax^2+bx\right)}dxdydz\cdot\int\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)e^{-b\cdot\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)}dp_xdp_ydp_z}{\int e^{-a-b\left(ax^2+bx\right)}dxdydz\int e^{-b\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)}dp_xdp_ydp_z}$$

$$=3\left(\frac{\int\frac{1}{2m}p_x^2\cdot e^{-b\frac{p_x^2}{2m}}dp_x}{\int e^{-b\frac{p_x^2}{2m}}dp_x}\right)=\frac{3}{2}kT$$

$$or,\bar{E}=\frac{\int\varepsilon e^{-b\varepsilon}m\sqrt{2m\varepsilon}d\varepsilon}{\int e^{-b\varepsilon}m\sqrt{2m\varepsilon}d\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon=t^2}\frac{\int e^{-bt^2}t^4dt}{\int e^{-bt^2}t^2dt}=\frac{\frac{3}{8b}\sqrt{p}}{\frac{1}{4b}\sqrt{p}}=\frac{3}{2b}=\frac{3}{2}kT$$

14． **在课上我们已经推导除出了双原子分子理想气体的振动子配分函数** Zv**,以及与振动有关的内能** Uv **和热容量** CVv **的计算公式。试推导出振动部分对双原子分子理想气体的熵的贡献** Sv。

解：

能级的简并度为 1，

$$\varepsilon_n^v=\left(n+\frac{1}{2}\right)hn,\quad n=0,1,2,\cdots,\quad g_n^v=1$$

$$\therefore Z^v(b)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-b\left(n+\frac{1}{2}\right)hn}=\frac{e^{-\frac{1}{2}bhn}}{1-e^{-bhn}},$$

$$S^v=Nk\left(\ln Z-b\frac{\partial\ln Z}{\partial b}\right)=Nk\left(-\frac{1}{2}bhn-\ln\left(1-e^{-bhn}\right)+\frac{bhn}{2}+\frac{bhn}{e^{bhn}-1}\right)$$

$$=Nk\left(\frac{bhn}{e^{bhn}-1}-\ln\left(1-e^{-bhn}\right)\right)$$

15．　对于双原子分子理想气体，在常温下 kBT 远远大于转动能级的间距。试求在此条件下双原子分子理想气体的转动熵 Sr。

解：

$$Z^r(T)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-\frac{q_r}{T}l(l+1)},\quad q_r=\frac{h^2}{8p^2IK}$$

$$k_BT>>\Delta E^r,$$

$$\therefore Z^r(T)=\int_0^{\infty}(2l+1)e^{-\frac{q_r}{T}l(l+1)}dl\xrightarrow{y^2=l(l+1)}\int_0^{\infty}e^{-\frac{q_r}{T}y^2}2ydy=\frac{T}{q_r}=\frac{8p^2IkT}{h^2}$$

$$\therefore S^r=Nk\left(\ln Z-b\frac{\partial\ln Z}{\partial b}\right)=Nk\left(\ln\frac{T}{q_r}+1\right)$$

16．　晶体中含有 N 个原子，设原子的总的角动量量子数为 1。在外磁场 B 作用下，原子磁距μ可以有三个选择：平行、反平行、或者垂直于外磁场 B。假设磁距之间的相互作用可以忽略。试求在温度为 T 时晶体的磁化强度 m，及其在弱场高温极限和强场低温极限下的近似值。

解：

平行、反平行、垂直

$$m_1=m,m_2=0,m_3=-m.\quad \varepsilon_1=-mB,\varepsilon_2=0,\varepsilon_3=mB.$$

$$\therefore n_i=n_0e^{-b\varepsilon_i},\quad n=\sum n_i=n_0\left(\sum e^{-b\varepsilon_\iota}\right)\to n_0=\frac{n}{2}$$

$$m=\sum m_in_i=n_ime^{\frac{mB}{kT}}-n_0me^{\frac{mB}{kT}}.$$

$$=\frac{n}{z}\left(me^{\frac{mB}{kT}}-me^{-\frac{mB}{kT}}\right)=\frac{N}{V}\cdot\frac{m\left(e^{\frac{mB}{kT}}-e^{-\frac{mB}{kT}}\right)}{e^{\frac{mB}{kT}}+1+e^{-\frac{mB}{kT}}}$$

high temperature，weak B: $\frac{mB}{kT}<<1,\quad e^{\frac{mB}{kT}}=1+\frac{mB}{kT}$

$$m=\frac{N}{V}\cdot\frac{m\cdot\frac{2mB}{kT}}{3}=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{m^2B}{kT}.$$

low temperature, strong B: $\frac{mB}{kT}>>1,\quad e^{\frac{mB}{kT}}>>1,\quad e^{-\frac{mB}{kT}}<<1$

$$e^{\frac{mB}{kT}}-e^{-\frac{mB}{kT}}\approx e^{\frac{mB}{kT}},e^{-\frac{mB}{kT}}+1+e^{\frac{mB}{kT}}\approx e^{\frac{mB}{kT}}.$$

$$\therefore m\approx\frac{N}{V}m$$

17．　银原子蒸气置于磁场 B 中，它的磁距只能取两个方向：沿着磁场或者逆着磁场方向。求：(1)磁距μ沿着磁场方向的分子占总数的比例。(2）单个分子的平均磁距 $\overline{m}$ 。假设能级 $e_0=-d,e_1=d$ ，粒子可以处于两种能量状态中的任意一种。试求：(3）熵 S 同系统的内能 E 的关系式。(4）定性画出 S－E 曲线。(5）如果系统的 S 达到极大值，它对应的分布是什么？（5）如果系统的能量连续，即：E 可以在【－Nδ，＋Nδ】内连续取值，证明该系统可以具有负温度。(6）讨论以下为什么该系统可以具有负温度，而在容器中气体却不可能处于负温度状态？

解：

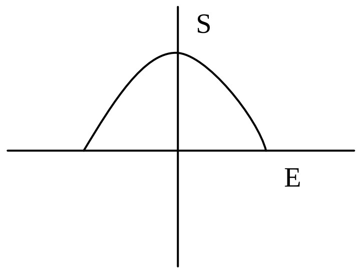
$$\frac{n_0}{n_1}=\frac{e^{-b\varepsilon_0}}{e^{-b\varepsilon_1}}=e^{-b(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}=e^{\frac{2d}{kT}}.$$

$$(1)\therefore\frac{n_0}{n_1+n_0}=\frac{e^{\frac{2d}{kT}}}{e^{\frac{2d}{kT}}+1}$$

$$(2)\overline{m}=\frac{me^{\frac{2d}{kT}}-m}{e^{\frac{2d}{kT}}+1},$$

$$(3)\begin{cases}N=n_0+n_1\\E=-n_0d+n_1d\end{cases}\to\begin{cases}n_0=\dfrac{1}{2}\left(N-\dfrac{E}{d}\right)\\n_1=\dfrac{1}{2}\left(N+\dfrac{E}{d}\right)\end{cases},$$

$$\therefore S=k\ln\Omega=k\ln\frac{N!}{n_0!n_1!}=nK\left[\ln2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{E}{Nd}\right)\ln\left(1+\frac{E}{Nd}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{Nd}\right)\ln\left(1-\frac{E}{Nd}\right)\right]$$



$$(4)\frac{\partial S}{\partial E}=0,\frac{\partial S}{\partial E}=nK\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{Nd}\right)\left(\ln\left(1+\frac{E}{Nd}\right)-\ln\left(1-\frac{E}{nd}\right)\right)\equiv0$$

$$\therefore n_0=n_1=\frac{N}{2}$$

$$(5)\frac{\partial S}{\partial E}=Nk\left(-\frac{1}{2Nd}\right)\left(\ln\frac{1+\dfrac{E}{nd}}{1-\dfrac{E}{nd}}\right),\quad if\ E>0,\ln\frac{1+\dfrac{E}{nd}}{1-\dfrac{E}{nd}}>0,\therefore \mathrm{T}\equiv\frac{\partial S}{\partial E}<0$$

18. **设有 N 个 A 原子的理想气体，和 N 个 B 原子的理想气体在容器的隔板两侧。这两种气体的温度与体积都相等。如果抽去隔板，两种气体互相扩散。证明：扩散达到平衡后气体的总熵增加了 2NkBln2。如果这两种原子全同（A=B），证明，扩散达到平衡后总的熵不变。（不同气体混合后增加的熵 2NkBln2 称为混合熵。）**

解：

$$S(T,V)=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=Nk\left[\ln\frac{V}{N}+\frac{3}{2}\ln kT+\frac{5}{2}+j\right]$$

$$(1),\Delta S=S-S_A-S_B=Nk\left[\ln\frac{2V}{N}+\ln\frac{2V}{N}-\ln\frac{V}{N}-\ln\frac{V}{N}\right]=2Nk\ln2.$$

$$(2),\Delta S=(S_A'+S_B')-S_A-S_B=2Nk\left[\ln\frac{2V}{2N}\right]-Nk\left[\ln\frac{V}{N}+\ln\frac{V}{N}\right]=0.$$

统计物理作业五

19． 试证明对于玻色系统，熵可以表示为：

$$S=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)\right]$$

其中，fs 为量子态 S 上的平均粒子数， 上式表示对所有量子态求和。

解：

$$\Omega=\prod\frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$

$$S=k\ln\Omega=k\sum_i\left[\ln(n_i+g_i-1)!-\ln n_i!-\ln(g_i-1)!\right]$$

$$if\quad g_i-1\approx g_i,\quad n_i+g_i-1\approx n_i+g_i,\quad Stirling:$$

$$S=k\sum_i\left[(n_i+g_i)\ln(n_i+g_i)-n_i\ln n_i-g_i\ln g_i\right]$$

$$=k\sum_i\left[gi\left(\frac{n_i}{g_i}+1\right)\ln\left(\frac{n_i}{g_i}+1\right)+(n_i+g_i)\ln g_i-n_i\ln n_i-g_i\ln g_i\right]$$

$$=k\sum_i\left[g_i\left(\frac{n_i}{g_i}+1\right)\ln\left(\frac{n_i}{g_i}+1\right)-g_i\frac{n_i}{g_i}\ln\frac{n_i}{g_i}\right]$$

$$=\sum_i\left[g_i(1+f_s)\ln(1+f_s)-g_if_s\ln f_s\right]$$

$$=-\sum_s\left[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)\right]$$

20． 试证明，对于费米系统，熵可以表示为：

$$S=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s+(1-f_s)\ln(1-f_s)\right]$$

其中，fs 为量子态 S 上的平均粒子数， 上式表示对所有量子态求和。

21． 试证明对于一维和二维理想玻色气体，不存在 Bose—Einstein 凝聚现象。

解：

$$N=\sum_i n_i=\sum_i\frac{g_i}{e^{\frac{\varepsilon_i-u}{kT}}-1}$$

$$for\quad 1,2D,\ g(\varepsilon)\,d\varepsilon=2Lh^{-1}m^{\frac{1}{2}}(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\,d\varepsilon$$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=2p\,L^2h^{-2}m\,d\varepsilon$$

$$\int\to\sum,$$

$$1D,\quad N=\sqrt{2}Lh^{-1}m^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-u}{kT}}-1}d\varepsilon\quad;\quad 2D:N=2p\,L^2h^{-2}m\int_0^\infty\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-u}{kT}}-1}d\varepsilon$$

由于在一维和二维情况下，积分式中并未忽略，所以不出现 B.E. 凝聚。

22． 假设自由电子在二维平面上运用，密度为 n。试求 0K 时二维电子气体的费米能级和内能。

解：

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{A}{h^2}\cdot\boxed{J}\cdot 2p\,pdp=\frac{A}{h^2}\cdot\boxed{2}\times 2p\,md\varepsilon=\frac{4p\,mA}{h^2}d\varepsilon$$

$$when\quad k=0;\quad f_i=\begin{cases}1 & \varepsilon\le u_0\\ 0 & \varepsilon>u_0\end{cases}.$$

$$\therefore N=\int_0^{\varepsilon_F}g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{4p\,mA}{h^2}\cdot\int_0^{\varepsilon_F}d\varepsilon=\frac{4p\,mA}{h^2}\cdot\varepsilon_F\rightarrow\varepsilon_F=\frac{n\cdot h^2}{4p\,m}$$

$$U=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{4p\,mA}{h^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_F^2=\frac{1}{2}N\cdot\varepsilon_F.$$

它忽略了晶体的各项异性。实际的固体是具有一定的对称性的晶体结构，呈各向异性，并且当波长与原子间平均距离可以比拟时，晶体的各向异性对模式密度的影响变的很重要，因此各向同性的连续介质模型是不符合的。②它忽略了光学波和高频声学波对热容的贡献。当弹性波频率很高时光学波和高频声学波对热容的贡献不可忽视，但光学波和高频声学波是色散波，它们的模式密度比弹性波要复杂的多。③德拜理论只适用于单原子晶体，对分子晶体不适用

23. **简要说明为什么德拜的模型可以很好地解释整个温度范围内绝缘体的热容量，但是对于金属在低温下仍有偏差.**

24. **在固态时，硒原子和碲原子均排成平行的长链，请证明对于这些物质在低温时的热容量 Cv 与温度 T 成正比。在固态时，石墨中的 C 原子按照平面排列，请证明在低温下其 Cv 与 T2 成正比。**

解：

$$g(v)\,dv=\frac{2L}{h}\cdot dp=\frac{2L}{h}\cdot\frac{hdv}{c_0}=\frac{2L}{c_0}dv$$

$$N=\int_0^{v_M}g(v)\,dv=\frac{2Lv_M}{c_0}$$

$$\therefore g(v)\,dv=\left(\frac{N}{v_M}\right)dv$$

$$U=\varepsilon_0+\int_0^{v_M}\frac{hv}{e^{\frac{hv}{kT}}-1}\cdot\frac{N}{v_M}dv.$$

$$\therefore C_V=\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{N}{v_M}\int_0^{v_M}\frac{e^{\frac{hv}{kT}}}{\left(e^{\frac{hv}{kT}}-1\right)^2}\cdot\frac{(hv)^2}{kT^2}dv$$

$$x=\frac{hv}{kT},q_D=\frac{hv_M}{k},$$

$$C_V=Nk\frac{p}{q_D}\int_0^{\frac{q_D}{T}}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}dx$$

$$when\quad T<<q_D,\quad\int_0^{\frac{q_D}{T}}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}dx\approx\int_0^{\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}dx\cdot\frac{p^2}{3}$$

$$C_V=\frac{p^2}{3}Nk\left(\frac{T}{q_D}\right)$$

$$g(v)\,dv = 2pL^2\left(\frac{1}{c_L^2}+\frac{1}{c_t^{\,2}}\right)v\,dv.$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 4Nk\left(\frac{T}{q_D}\right)^2 \int_0^{\frac{q_D}{T}} \frac{x^3 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}\,dx.$$

at low temperature: $C_V \approx 4Nk\left(\frac{T}{q_D}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}\,dx.$