概率论与数理统计：第五次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 假设随机变量 X 满足 $E[X]=0$, $E[X^2]=1$, $E[X^3]=0$, $E[X^4]=3$. 令 $Y=a+bX+cX^2$. 计算相关系数 $\rho(X,Y)$.

(2) X 与 Y 相互独立。证明

$$Var(XY)=(E[X])^2Var(Y)+(E[Y])^2Var(X)+Var(X)Var(Y).$$

(3) 设随机变量 X 服从区间 $(1,2)$ 上均匀分布，在 $X=x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件分布为参数为 x 的指数分布，求随机变量 XY 的密度函数。

(4) 一个大箱子里有 M 个盒子，M 服从参数为 p 的几何分布。第 i 个盒子含有 K_i 个小零件，K_i 服从参数为 μ 的泊松分布，每个小零件的重量服从参数为 λ 的指数分布。假设所涉及的随机变量都是相互独立的。求整个箱子的总重量的期望和方差。

(5) $X\sim N(0,1)$, Z 与 X 相互独立，且 $P(Z=1)=P(Z=-1)=\frac{1}{2}$.

 (a) 随机变量 $Y=ZX$ 服从什么分布？

 (b) X 与 Y 是否相互独立？是否相关？

(6) 小红和小明约会。他们的所有约会都是在晚上 9 点之后。小明每次都是 9 点的时候到达，但小红比较散漫，她到达的时间服从 8 点到 10 点之间的均匀分布。记 X 是 8 点和小红到达时间之间的间隔。如果小红在 9 点之前到达，她们的约会时间将会是 3 个小时。如果小红在 9 点之后到达，他们的约会时间均匀分布在 0 小时和 $3-X$ 小时之间。他们的约会在见面后开始。如果小红迟到，小明会很生气，并且如果在他们的下一次约会小红迟到多于 45 分钟，小明会提出分手。假设每次约会都是独立的。

 (a) 小明等待小红的小时数的期望是?

 (b) 一般约会持续时间的期望是?

 (c) 他们分手前，约会次数的期望是?

(7) 假设涉及的数学期望均存在。证明以下的等式:

 (a) $E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$;

 (b) $E(XY)=E(XE(Y|X))$;

 (c) $Cov(X,E(Y|X))=Cov(X,Y)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布，求 $E(X|X+Y=z)$, $z>0$.

(9) 假设某赌徒每次赢或者输的概率分别为 p 和 $(1-p)$, 而且每次输赢相互独立。押注 a 元，赢了则收获 $2a$ 元，输了则失去这 a 元。当 $p > 0.5$ 时，一种流行的赌博方法（成为凯利策略）是每次赌上当前总赌资的 $2p-1$ 部分，即总赌资 $\times(2p-1)$. 假设初始赌资为 x 元，运用凯里策略，经过 n 次赌博后的剩余赌资的数学期望。