《高等微积分 1》第一二周作业

本次作业在第四周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 设 X, Y, Z 是集合.

(1) 证明: 映射 $f : X \to Y$ 是双射的充分必要条件是存在映射 $f^{-1} : Y \to X$, 使得

$$f^{-1} \circ f = id_X, \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

称满足上述条件的映射 $f^{-1} : Y \to X$ 为 $f : X \to Y$ 的逆映射.

(2) 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 都是双射, 它们的逆映射分别为 $f^{-1} : Y \to X, g^{-1} : Z \to Y$. 证明: $g \circ f : X \to Z$ 也是双射, 且

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2 设 A, B 是 $\mathbf{R}$ 的非空有界子集. 证明:

(1) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(2) 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 则有

$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}, \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

3 设映射 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足如下条件:

(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上是有界函数, 即存在正数 M, 使得对任何 x 都有 $|f(x)| \leq M$.

(2) 对任何实数 x 都有 $f(2x) = 2f(x)$.

求出所有这样的映射 f.

4 设映射 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

证明: 存在实数 a, 使得对每个有理数 x 都有 $f(x) = ax$.

5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

(2) 如果 $A > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

6 计算极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n} \right)$.

(2) 给定实数 a, b, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+an+b} - n \right)$.

7 设 $0 < a < 1$ 是给定的实数. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

8 给定正整数 k 及实数 $a_0, ..., a_{k-1}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_0}$.