《高等微积分 1》第十一周习题课材料

1 设 f 在 (a,b) 上处处可导, 且

$$f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

证明: f 在 (a,b) 上严格单调.

2 计算极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\sqrt[7]{\dfrac{x^3+x}{1+x^3}} - \cos\dfrac{1}{x})$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\dfrac{1}{e} - (\dfrac{x}{x+1})^x)$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

3 设 f 在 $[-1,1]$ 上处处有任意阶导数, 且对任何非负整数 n 都有 $f^{(n)}(0) = 0$. 假设存在常数 C 使得:

$$|f^{(n)}(x)| \leq n!C, \quad \forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

证明: f 在 $[-1,1]$ 上恒等于 0.

4 (1) 求函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的局部泰勒公式, 要求余项形如 $o(x^n)$.

(2) 求函数 $\arctan x$ 在 $x=0$ 处的局部泰勒公式, 要求余项形如 $o(x^n)$.

5 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 证明:

(1) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

(2) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(3) $(\frac{\sin x}{x})^3 > \cos x$.

6 请给出 x 的多项式 $p(x)$, 使得对任何 $x \in [0.5, 1.5]$, 如下不等式成立

$$|p(x) - \ln x| \leq \frac{1}{100}.$$

7 给定实数 $a < b < c$. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 2 阶导函数.

(1) 求二次函数 q, 使得

$$q(a) = q(a), \quad q(b) = f(b), \quad q(c) = f(c).$$

(2) 证明: 存在 $\xi \in (a, c)$, 使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(\xi)}{2}.$$

(3) 证明: 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得

$$f(a) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\eta).$$

8 设 f 在 $[a, b]$ 上处处有一阶导函数, 在 (a, b) 上处处有二阶导函数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$|f''(x_0)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

9 设 f 在开区间 I 上处处有二阶导函数, 且 $f''(x)$ 处处非负.

(1) 证明: f' 在 I 上不减.

(2) 设 $x_1 < x_2 < x_3$ 是 I 上三个不同的点. 证明:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

由此可知, 对任何 $x, y \in I$ 及 $\alpha \in [0, 1]$, 有

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y).$$

(3) 设 $[a, b] \subset I$. 证明: f 在 $[a, b]$ 上的最大值一定在区间端点取得.

(4) 证明: 对 I 上任何两点 x_0, x 有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

10 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有二阶导函数, $f(a)=f(b)=0$ 且

$$|f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

(1) 证明: 对任何 $x \in [a,b]$, 有 $|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

(2) 证明: 对任何 $x \in [a,b]$, 有 $|f(x)| \leq \frac{M}{8}(b-a)^2$.

(3) 证明: 对任何 $x \in [a,b]$, 有 $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}(b-a)$.