# 概率论与数理统计（6）

清华大学

2020 年春季学期

# 依概率收敛

- 设 $\{X_n\}$ 为一随机变量序列，$X$ 为一随机变量，如果对任意的 $\epsilon > 0$, 有
$$P(|X_n - X| \geqslant \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$
则称序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 $X$, 记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

# 依概率收敛

- 设 $\{X_n\}$ 为一随机变量序列，$X$ 为一随机变量，如果对任意的 $\epsilon > 0$，有

$$P(|X_n - X| \geqslant \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$

  则称序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 $X$，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

- 依概率收敛的含义是：绝对偏差 $|X_n - X|$ 小于任何给定量的可能性随着 $n$ 的增大越来越接近 1，其等价于

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \to 1, \quad n \to \infty.$$

# 依概率收敛的运算规则

- $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ 为两个随机变量序列，$a$, $b$ 为两个常数，若

$$X_n \xrightarrow{P} a, \quad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

则有

  - $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;

# 依概率收敛的运算规则

- $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ 为两个随机变量序列，$a$, $b$ 为两个常数，若

$$X_n \xrightarrow{P} a, \quad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

则有

  - $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;
  - $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;

# 依概率收敛的运算规则

- $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ 为两个随机变量序列，$a$, $b$ 为两个常数，若

$$X_n \xrightarrow{P} a, \quad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

则有

  - $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;
  - $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;
  - 若 $b \neq 0$, 则 $X_n / Y_n \xrightarrow{P} a/b$.

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;
- $$\{|X_n + Y_n - (a+b)| \geqslant \epsilon\} \subset \left\{(|X_n - a| \geqslant \frac{\epsilon}{2}) \cup (|Y_n - b| \geqslant \frac{\epsilon}{2})\right\},$$

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$;
- $$\{|X_n + Y_n - (a+b)| \geqslant \epsilon\} \subset \left\{(|X_n - a| \geqslant \frac{\epsilon}{2}) \cup (|Y_n - b| \geqslant \frac{\epsilon}{2})\right\},$$
- $$0 \leqslant P(|X_n+Y_n-(a+b)| \geqslant \epsilon) \leqslant P((|X_n-a| \geqslant \frac{\epsilon}{2})+P(|Y_n-b| \geqslant \frac{\epsilon}{2}) \to 0,$$

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b.$

- $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$.
- $X_n \xrightarrow{P} 0, \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow{P} 0$. 因为 $P(|X_n^2| \geqslant \epsilon) = P(|X_n| \geqslant \sqrt{\epsilon})$.

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$.
- $X_n \xrightarrow{P} 0, \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow{P} 0$. 因为 $P(|X_n^2| \geqslant \epsilon) = P(|X_n| \geqslant \sqrt{\epsilon})$.
- $X_n \xrightarrow{P} a, \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}, \quad cX_n \xrightarrow{P} ca$ 因为对于 $c \neq 0$ （$c = 0$ 的情况显然）

$$P(|cX_n - ca| \geqslant \epsilon) = P(|X_n - a| \geqslant \epsilon/c).$$

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$.
- $X_n \xrightarrow{P} 0, \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow{P} 0$. 因为 $P(|X_n^2| \geqslant \epsilon) = P(|X_n| \geqslant \sqrt{\epsilon})$.
- $X_n \xrightarrow{P} a, \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}, \quad cX_n \xrightarrow{P} ca$ 因为对于 $c \neq 0$ （$c = 0$ 的情况显然）
$$P(|cX_n - ca| \geqslant \epsilon) = P(|X_n - a| \geqslant \epsilon/c).$$
- $X_n \xrightarrow{P} a, \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{P} a^2$ 因为 $X_n^2 - a^2 = (X_n - a)^2 - 2a(X_n - a)$.

# 依概率收敛的运算规则

- $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$.
- $X_n \xrightarrow{P} 0, \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow{P} 0$. 因为 $P(|X_n^2| \geqslant \epsilon) = P(|X_n| \geqslant \sqrt{\epsilon})$.
- $X_n \xrightarrow{P} a, \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}, \quad cX_n \xrightarrow{P} ca$ 因为对于 $c \neq 0$ （$c = 0$ 的情况显然）

$$P(|cX_n - ca| \geqslant \epsilon) = P(|X_n - a| \geqslant \epsilon/c).$$

- $X_n \xrightarrow{P} a, \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{P} a^2$ 因为 $X_n^2 - a^2 = (X_n - a)^2 - 2a(X_n - a)$.
- $X_n \times Y_n = \frac{1}{2}[(X_n + Y_n)^2 - X_n^2 - Y_n^2] \xrightarrow{P} \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$.

# 依概率收敛的运算规则

- $b \neq 0,\ X_n/Y_n \xrightarrow{P} a/b.$

# 依概率收敛的运算规则

- $b \neq 0,\ X_n/Y_n \xrightarrow{P} a/b.$
- 首先 $1/Y_n \xrightarrow{P} 1/b$:

# 依概率收敛的运算规则

- $b \neq 0,\ X_n/Y_n \xrightarrow{P} a/b.$
- 首先 $1/Y_n \xrightarrow{P} 1/b$:

$$
\begin{aligned}
P(|1/Y_n - 1/b| \geqslant \epsilon) &= P(|\frac{Y_n - b}{Y_n b}| \geqslant \epsilon) \\
&= P\Big(|\frac{Y_n - b}{b^2 + b(Y_n - b)}| \geqslant \epsilon, |Y_n - b| < \epsilon\Big) \\
&\quad + P\Big(|\frac{Y_n - b}{b^2 + b(Y_n - b)}| \geqslant \epsilon, |Y_n - b| \geqslant \epsilon\Big) \\
&\leqslant P(|\frac{Y_n - b}{b^2 - \epsilon|b|}| \geqslant \epsilon) + P(|Y_n - b| \geqslant \epsilon).
\end{aligned}
$$

# 依概率收敛的运算规则

- $b \neq 0,\ X_n/Y_n \xrightarrow{P} a/b.$
- 首先 $1/Y_n \xrightarrow{P} 1/b$:

$$
\begin{aligned}
P(|1/Y_n - 1/b| \geqslant \epsilon) &= P(|\frac{Y_n - b}{Y_n b}| \geqslant \epsilon) \\
&= P\Big(|\frac{Y_n - b}{b^2 + b(Y_n - b)}| \geqslant \epsilon, |Y_n - b| < \epsilon\Big) \\
&\quad + P\Big(|\frac{Y_n - b}{b^2 + b(Y_n - b)}| \geqslant \epsilon, |Y_n - b| \geqslant \epsilon\Big) \\
&\leqslant P(|\frac{Y_n - b}{b^2 - \epsilon|b|}| \geqslant \epsilon) + P(|Y_n - b| \geqslant \epsilon).
\end{aligned}
$$

- $X_n/Y_n = X_n \times (1/Y_n).$

# 按分布收敛

- 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 的分布函数为 $\{F_n(x)\}$, $X$ 的分布函数为 $F(x)$. 若对于 $F(x)$ 的任一连续点 $x$, 都有

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty,$$

则称 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$, 记作 $F_n(x) \xrightarrow{W} F$, 同时称 $\{X_n\}$ 按分布收敛于 $X$, 记作

$$X_n \xrightarrow{L} X.$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

## 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

$$\begin{aligned} \text{当}\, x' < x,\ \{X \leqslant x'\} &= \{X_n \leqslant x, X \leqslant x'\} \cup \{X_n > x, X \leqslant x'\} \\ &\subset \{X_n \leqslant x\} \cup \{|X_n - X| \geqslant x - x'\}, \end{aligned}$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

$$\text{当}\, x' < x,\ \{X \leqslant x'\} = \{X_n \leqslant x, X \leqslant x'\} \cup \{X_n > x, X \leqslant x'\}$$
$$\subset \{X_n \leqslant x\} \cup \{|X_n - X| \geqslant x - x'\},$$

$$F(x') \leqslant F_n(x) + P(|X_n - X| > x - x') \Rightarrow F(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \ \Rightarrow \ F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

$$\begin{aligned}\text{当} x' < x,\ \{X \leqslant x'\} &= \{X_n \leqslant x, X \leqslant x'\} \cup \{X_n > x, X \leqslant x'\} \\ &\subset \{X_n \leqslant x\} \cup \{|X_n - X| \geqslant x - x'\},\end{aligned}$$

$$F(x') \leqslant F_n(x) + P(|X_n - X| > x - x') \Rightarrow F(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

$$F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

$$\text{当} x' < x,\ \{X \leqslant x'\} = \{X_n \leqslant x, X \leqslant x'\} \cup \{X_n > x, X \leqslant x'\}$$
$$\subset \{X_n \leqslant x\} \cup \{|X_n - X| \geqslant x - x'\},$$

$$F(x') \leqslant F_n(x) + P(|X_n - X| > x - x') \Rightarrow F(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

$$F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

类似地，$x < x'$, $\{X_n \leqslant x\} = \{X < x', X_n \leqslant x\} \cup \{X > x', X_n \leqslant x\}$

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

# 两种收敛的关系

- $X_n \xrightarrow{P} X, \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

$$X_n \xrightarrow{P} X \ \Rightarrow \ F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

$$\text{当} x' < x,\ \{X \leqslant x'\} = \{X_n \leqslant x, X \leqslant x'\} \cup \{X_n > x, X \leqslant x'\}$$
$$\subset \{X_n \leqslant x\} \cup \{|X_n - X| \geqslant x - x'\},$$

$$F(x') \leqslant F_n(x) + P(|X_n - X| > x - x') \Rightarrow F(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

$$F(x-0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

类似地，$x < x'$, $\{X_n \leqslant x\} = \{X < x', X_n \leqslant x\} \cup \{X > x', X_n \leqslant x\}$

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

- 一般情况下按分布收敛不能推出依概率收敛：考虑 $X:\ P(X=-1)=0.5,\ P(X=1)=0.5,\ X_n=-X.$

# 两种收敛的关系

- 若 $c$ 为常数，$X_n \xrightarrow{L} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c.$

# 两种收敛的关系

- 若 $c$ 为常数，$X_n \xrightarrow{L} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$.
- $X = c$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geqslant c. \end{cases}.$$

# 两种收敛的关系

- 若 $c$ 为常数，$X_n \xrightarrow{L} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$.
- $X = c$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geqslant c. \end{cases}.$$

对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| \geqslant \epsilon) &= P(X_n \geqslant c + \epsilon) + P(X_n \leqslant c - \epsilon) \\ &\leqslant P(X_n > c + \epsilon/2) + P(X_n \leqslant c - \epsilon) \\ &= 1 - F_n(c + \epsilon/2) + F_n(c - \epsilon) \\ &= 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

# 两种收敛的关系

- 若 $c$ 为常数，$X_n \xrightarrow{L} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$.
- $X = c$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geqslant c. \end{cases}.$$

对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| \geqslant \epsilon) &= P(X_n \geqslant c + \epsilon) + P(X_n \leqslant c - \epsilon) \\ &\leqslant P(X_n > c + \epsilon/2) + P(X_n \leqslant c - \epsilon) \\ &= 1 - F_n(c + \epsilon/2) + F_n(c - \epsilon) \\ &= 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

- $X_n$ 依分布收敛到 $X$, $Y_n$ 依分布收敛到 $Y$, $X_n + Y_n$ 是否依分布收敛到 $X + Y$?

# 依概率 1 收敛或者几乎必然收敛

- 如果 $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, 则称 $X_n$ 依概率 1 收敛于 $X$, 记为

$$X_n \to X, \ \ a.s.$$

# 依概率 1 收敛或者几乎必然收敛

- 如果 $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, 则称 $X_n$ 依概率 1 收敛于 $X$, 记为
$$X_n \to X, \ a.s.$$

- $$X_n \to X, \ a.s. \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k\geqslant n}|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$

# 依概率 1 收敛或者几乎必然收敛

- 如果 $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, 则称 $X_n$ 依概率 1 收敛于 $X$, 记为

$$X_n \to X, \ a.s.$$

- $$X_n \to X, \ a.s. \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k\geqslant n}|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$

- $\forall \epsilon > 0$, $A_n^\epsilon = \{|X_n - X| \geqslant \epsilon\}$, $A^\epsilon = \cap_{n=1}^\infty \cup_{k\geqslant n} A_k^\epsilon$, 则

$$\{X_n \to X\}^c = \cup_{m=1}^\infty A^{1/m}.$$

- $$0 = P(\{X_n \to X\}^c) \leftrightarrow P(\cup_{m=1}^\infty A^{1/m}) = 0 \leftrightarrow P(A^{1/m}) = 0, \quad \forall m \geqslant 1$$
$$\leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k\geqslant n}|X_k - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$

# 依概率 1 收敛于依概率收敛

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$

# 依概率 1 收敛于依概率收敛

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$
- 反之不然。

# 依概率 1 收敛于依概率收敛

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$
- 反之不然。考虑 $S = (0, 1)$ 的均匀分布，令随机变量

$$X_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}), \\ 0, & else, \end{cases}$$

其中 $i$, $k$ 满足 $n = 2^i + k$. 令 $X = 0$.

# 依概率 1 收敛于依概率收敛

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$
- 反之不然。考虑 $S = (0,1)$ 的均匀分布，令随机变量

$$X_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right), \\ 0, & else, \end{cases}$$

其中 $i$, $k$ 满足 $n = 2^i + k$. 令 $X = 0$.显然任意 $x$ 都有无限个 $n$ 使得 $X_n(x) = 1$, 所以 $X_n$ 不依概率 1 收敛于 0. 但依概率收敛于 0:

# 依概率 1 收敛于依概率收敛

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$
- 反之不然。考虑 $S=(0,1)$ 的均匀分布，令随机变量

$$X_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}), \\ 0, & else, \end{cases}$$

其中 $i$, $k$ 满足 $n = 2^i + k$. 令 $X = 0$.显然任意 $x$ 都有无限个 $n$ 使得 $X_n(x) = 1$, 所以 $X_n$ 不依概率 1 收敛于 0. 但依概率收敛于 0:

$$P(|X_n - 0| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{2^{i(n)}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

- $X_n \to X,\ a.s. \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$
- 反之不然。考虑 $S=(0,1)$ 的均匀分布，令随机变量

$$X_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(\frac{k}{2^i},\frac{k+1}{2^i}),\\ 0, & else,\end{cases}$$

其中 $i,\ k$ 满足 $n=2^i+k$. 令 $X=0$.显然任意 $x$ 都有无限个 $n$ 使得 $X_n(x)=1$, 所以 $X_n$ 不依概率 1 收敛于 0. 但依概率收敛于 0:

$$P(|X_n-0|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{1}{2^{i(n)}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

几乎必然收敛不作考试要求

# 特征函数的定义

- 若 $X$ 为一随机变量，则称

$$\varphi(t) = E(e^{itX}), \quad -\infty < t < \infty,$$

为 $X$ 的特征函数。

## 特征函数的定义

- 若 $X$ 为一随机变量，则称
$$\varphi(t) = E(e^{itX}), \quad -\infty < t < \infty,$$
为 $X$ 的特征函数。
- $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$, $|e^{itX}| = 1$，所以 $E(|e^{itX}|) = 1$, $E(e^{itX})$ 总是存在的。

# 特征函数的定义

- 若 $X$ 为一随机变量，则称

$$\varphi(t) = E(e^{itX}), \quad -\infty < t < \infty,$$

为 $X$ 的特征函数。

- $e^{itx} = \cos tx + i\sin tx$, $|e^{itX}| = 1$，所以 $E(|e^{itX}|) = 1$, $E(e^{itX})$ 总是存在的。
- 离散情形：$X$ 的分布列为 $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$，则 $X$ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k, \quad -\infty < x < \infty.$$

# 特征函数的定义

- 若 $X$ 为一随机变量，则称
$$\varphi(t) = E(e^{itX}), \quad -\infty < t < \infty,$$
为 $X$ 的特征函数。
- $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$, $|e^{itX}| = 1$，所以 $E(|e^{itX}|) = 1$, $E(e^{itX})$ 总是存在的。
- 离散情形：$X$ 的分布列为 $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$，则 $X$ 的特征函数为
$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k, \quad -\infty < x < \infty.$$
连续情形：$X$ 的密度函数为 $p(x)$, 则 $X$ 的特征函数为
$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx.$$

# 常见分布的特征函数一

- 单点分布：$P(X=a)=1$, $\varphi(t)=E(e^{itX})=e^{ita}$.

# 常见分布的特征函数一

- 单点分布：$P(X=a)=1$, $\varphi(t)=E(e^{itX})=e^{ita}$.
- $0-1$ 分布：$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, $\varphi(t)=pe^{it}+(1-p)$.

# 常见分布的特征函数一

- 单点分布：$P(X=a)=1$, $\varphi(t)=E(e^{itX})=e^{ita}$.
- $0-1$ 分布：$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, $\varphi(t)=pe^{it}+(1-p)$.
- 泊松分布 $P(\lambda)$: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\ldots,$

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{ikt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- 单点分布：$P(X=a)=1$, $\varphi(t)=E(e^{itX})=e^{ita}$.
- $0-1$ 分布：$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, $\varphi(t)=pe^{it}+(1-p)$.
- 泊松分布 $P(\lambda)$: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots,$

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{ikt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- 均匀分布 $U(a,b)$: 其密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & else\end{cases}$, 则

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_a^b\frac{e^{itx}}{b-a}dx=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}.$$

# 常见分布的特征函数二

- 标准正态分布 $N(0,1)$: 密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<\infty$.

# 常见分布的特征函数二

- 标准正态分布 $N(0,1)$: 密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<\infty$.

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(itx)^n}{n!}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(it)^{2m}}{(2m)!}\frac{(2m)!}{2^m m!}=\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{t^2}{2})^m\frac{1}{m!}=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

# 常见分布的特征函数三

- 指数分布 $Exp(\lambda)$，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

# 常见分布的特征函数三

- 指数分布 $Exp(\lambda)$，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

- 其特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda[\int_0^\infty \cos(tx) e^{-\lambda x} dx + i\int_0^\infty \sin(tx) e^{-\lambda x} dx] \\ &= \lambda[\frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} + i\frac{t}{\lambda^2 + t^2}] = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}. \end{aligned}$$

- $\int_0^\infty cos(tx) e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}\cos(tx) e^{-\lambda x}|_0^\infty - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t\sin tx e^{-\lambda x} dx.$

# 特征函数的性质一

- $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$

# 特征函数的性质一

- $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$
- $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}.$

# 特征函数的性质一

- $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$.
- $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.
- 若 $Y = aX + b$, 其中 $a$, $b$ 为常数，则 $\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

# 特征函数的性质一

- $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$.
- $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.
- 若 $Y = aX + b$, 其中 $a$, $b$ 为常数，则 $\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

$$E(e^{i(aX+b)t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaxt+ibt} p_X(x)\,dx = e^{ibt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(at)} p_X(x)\,dx.$$

- 独立随机变量和的特征函数为每个随机变量的特征函数的积：若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

# 特征函数的性质一

- $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$
- $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}.$
- 若 $Y = aX + b$，其中 $a$，$b$ 为常数，则 $\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

$$E(e^{i(aX+b)t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaxt+ibt} p_X(x)\,dx = e^{ibt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(at)} p_X(x)\,dx.$$

- 独立随机变量和的特征函数为每个随机变量的特征函数的积：若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

$$\begin{aligned} E(e^{i(X+Y)t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+y)t} p_X(x) p_Y(y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} p_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} p_Y(y)\,dy. \end{aligned}$$

- 二项分布 $b(n,p)$: 若 $Y\sim b(n,p)$, 则 $Y=X_1+\cdots+X_n$，其中 $X_i$ 是独立同分布的 $0-1$ 分布随机变量，所以我们有

$$\varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)=(pe^{it}+1-p)^n.$$

# 常见分布的特征函数四

- 二项分布 $b(n,p)$: 若 $Y \sim b(n,p)$, 则 $Y = X_1 + \cdots + X_n$，其中 $X_i$ 是独立同分布的 $0-1$ 分布随机变量，所以我们有

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$： $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, 则 $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以

$$\varphi_Y(t) = e^{i\mu t}\varphi_X(\sigma t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2}.$$

# 常见分布的特征函数四

- 二项分布 $b(n,p)$: 若 $Y \sim b(n,p)$, 则 $Y = X_1 + \cdots + X_n$，其中 $X_i$ 是独立同分布的 $0-1$ 分布随机变量，所以我们有

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$： $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, 则 $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以

$$\varphi_Y(t) = e^{i\mu t}\varphi_X(\sigma t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2}.$$

- 伽玛分布 $Ga(n,\lambda)$: $Y \sim Ga(n,\lambda)$, 则 $Y = X_1 + \cdots + X_n$，其中 $X_i$ 为独立同分布的服从指数分布 $Exp(\lambda)$ 的随机变量，则

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-n}.$$

# 特征函数的性质二

- 一致连续性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续，即

# 特征函数的性质二

- 一致连续性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续，即任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得若 $|x - y| \leqslant \delta$,, 则

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \epsilon.$$

# 特征函数的性质二

- 一致连续性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续，即任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得若 $|x-y|\leqslant\delta$,, 则
$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\epsilon.$$
- 对于任意 $a>0$ 和 $t,h\in\mathbb{R}$, 有
$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ihx}-1)\,e^{itx}p(x)\,dx\right|$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ihx}-1|p(x)\,dx\leqslant\int_{-a}^{a}|e^{ihx}-1|p(x)\,dx+2\int_{|x|>a}p(x)\,dx.$$

- 一致连续性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续，即任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得若 $|x-y|\leqslant\delta$,, 则

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\epsilon.$$

- 对于任意 $a>0$ 和 $t,h\in\mathbb{R}$, 有

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ihx}-1)e^{itx}p(x)\,dx|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ihx}-1|p(x)\,dx\leqslant\int_{-a}^{a}|e^{ihx}-1|p(x)\,dx+2\int_{|x|>a}p(x)\,dx.$$

对于任意 $\epsilon>0$, 先取 $a$ 充分大使得 $2P(|X|>a)\leqslant\frac{\epsilon}{2}$, 再取 $h=\frac{\epsilon}{2a}$,

$$\int_{-a}^{a}|e^{ihx}-1|p(x)\,dx=\int_{-a}^{a}|e^{ihx/2}(e^{ihx/2}-e^{-ihx/2})|p(x)\,dx$$

$$\leqslant|2\sin hx/2|2a<2ah.$$

# 特征函数的性质三

- 非负定性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的，即对任意正整数 $n$ 及 $n$ 个实数 $t_1, \ldots, t_n$，和 $n$ 个复数 $z_1, \ldots, z_n$，有

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1} \varphi(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j \geqslant 0.$$

- 非负定性：随机变量 $X$ 的特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的，即对任意正整数 $n$ 及 $n$ 个实数 $t_1,\ldots,t_n$，和 $n$ 个复数 $z_1,\ldots,z_n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j \geqslant 0.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_k\bar{z}_j\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_k-t_j)x}p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_k\bar{z}_j e^{i(t_k-t_j)x}p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}z_k e^{it_kx})(\sum_{j=1}^{n}e^{-it_jx}\bar{z}_j)p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{it_kx}|^2 p(x)\,dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

- 若 $E(X^m)$ 存在，则特征函数 $\varphi(t)$ $m$ 次可导，且对于 $1 \leqslant k \leqslant m$, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

# 特征函数的性质四

- 若 $E(X^m)$ 存在，则特征函数 $\varphi(t)$ $m$ 次可导，且对于 $1 \leqslant k \leqslant m$, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dt}(e^{ixt})p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k e^{itx} p(x)\,dx.$$

# 特征函数的性质四

- 若 $E(X^m)$ 存在，则特征函数 $\varphi(t)$ $m$ 次可导，且对于 $1 \leqslant k \leqslant m$, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dt}(e^{ixt}) p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k e^{itx} p(x)\, dx.$$

特别地，我们有，

$$E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i}, \quad Var(X) = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2.$$

- 若 $E(X^m)$ 存在，则特征函数 $\varphi(t)$ $m$ 次可导，且对于 $1 \leqslant k \leqslant m$, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dt}(e^{ixt})p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k e^{itx} p(x)\,dx.$$

特别地，我们有，

$$E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i}, \quad Var(X) = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2.$$

这两条公式是证明大数定律和中心极限定理的关键!

# 特征函数唯一决定分布函数

- 逆转公式：设 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为随机变量 $X$ 的分布函数和特征函数，则对 $F(x)$ 的任意两个连续点 $x_1 < x_2$，有

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

# 特征函数唯一决定分布函数

- 逆转公式：设 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为随机变量 $X$ 的分布函数和特征函数，则对 $F(x)$ 的任意两个连续点 $x_1 < x_2$，有

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

- 唯一性定理：随机函数的分布函数由其特征函数唯一决定。

# 特征函数唯一决定分布函数

- 逆转公式：设 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为随机变量 $X$ 的分布函数和特征函数，则对 $F(x)$ 的任意两个连续点 $x_1 < x_2$，有

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\,dt.$$

- 唯一性定理：随机函数的分布函数由其特征函数唯一决定。对于 $F(x)$ 的每一个连续点 $x$，让 $y_n$ 沿着 $F(x)$ 的连续点趋向 $-\infty$，则由逆转公式有

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{y_n\to-\infty} F(x) - F(y_n) \\ &= \lim_{y_n\to-\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity_n} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

# 特征函数唯一决定密度函数

- 设 $X$ 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $\varphi(t)$. 若
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt < \infty,$$
则 $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$

# 特征函数唯一决定密度函数

- 设 $X$ 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $\varphi(t)$. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty,$$

则 $p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$.

-

$$\begin{aligned}
p(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{it(x+\Delta)}}{it \cdot \Delta} \varphi(t)\, dt. \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta \to 0} \frac{e^{-itx} - e^{it(x+\Delta)}}{it \cdot \Delta} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.
\end{aligned}$$

# 特征函数唯一决定密度函数

- 设 $X$ 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$，特征函数为 $\varphi(t)$. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty,$$

则 $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\, dt$.

-

$$\begin{aligned} p(x) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{it(x+\Delta)}}{it\cdot\Delta}\varphi(t)\, dt. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{-itx} - e^{it(x+\Delta)}}{it\cdot\Delta}\varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\, dt. \end{aligned}$$

- 这个公式一般被称为傅里叶逆变换公式。

# 一些例子

- 相互独立正态分布的可加性：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$，$X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}},$$

所以 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

- 相互独立正态分布的可加性：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$，$X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X + Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}},$$

所以 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

- 伽玛分布的可加性：$X \sim Ga(\alpha_1, \lambda)$，$Y \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$，$X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X + Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_1}(1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_2} = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_1-\alpha_2}.$$

# 一些例子

- 相互独立正态分布的可加性：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$，$X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X + Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}},$$

  所以 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

- 伽玛分布的可加性：$X \sim Ga(\alpha_1, \lambda)$，$Y \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$，$X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X + Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_1}(1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_2} = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha_1-\alpha_2}.$$

  所以 $X + Y \sim Ga(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

- 某概率分布的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$, 求对应的分布?

# 一些例子

- 某概率分布的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$，求对应的分布？
- $$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{-|t|}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+ix)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}dt$$
  $$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

# 一些例子

- 某概率分布的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-|t|}$，求对应的分布？
- $$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{-|t|}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+ix)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}dt$$
  $$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$
- 这是柯西分布。

# 特征函数与弱收敛

- 分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$ 的充分必要条件是 $\{F_n\}$ 的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 弱收敛于 $F(x)$ 的特征函数 $\varphi(t)$.

- 分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$ 的充分必要条件是 $\{F_n\}$ 的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 弱收敛于 $F(x)$ 的特征函数 $\varphi(t)$.
- $X_\lambda$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

- 分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$ 的充分必要条件是 $\{F_n\}$ 的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 弱收敛于 $F(x)$ 的特征函数 $\varphi(t)$.
- $X_\lambda$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

- $X_\lambda$ 的特征函数为 $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, 则 $\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为

$$g_\lambda(t) = \varphi_\lambda(\frac{t}{\sqrt{\lambda}})e^{-i\sqrt{\lambda}t} = e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)-i\sqrt{\lambda}t}.$$

- 分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$ 的充分必要条件是 $\{F_n\}$ 的特征函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 弱收敛于 $F(x)$ 的特征函数 $\varphi(t)$.
- $X_\lambda$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

- $X_\lambda$ 的特征函数为 $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$，则 $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为

$$g_\lambda(t) = \varphi_\lambda(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) e^{-i\sqrt{\lambda}t} = e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)-i\sqrt{\lambda}t}.$$

指数部分 $\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1) - i\sqrt{\lambda}t =$
$\lambda(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^{3/2}}) - 1) - i\sqrt{\lambda}t \to -\frac{t^2}{2}, \quad \lambda \to \infty.$