《高等微积分 1》第十一周作业

本次作业在第十二周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 (1) 叙述带 Peano 余项的 Taylor 公式.

(2) 叙述带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1},\quad \forall x\neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

3 给定 $\alpha>0$. 求函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

(2) 求集合 $\{\sqrt[n]{n}|n\in\mathbf{Z}_+\}$ 的最大元素.

4 给定正数 $a\geq b$. 已知矩形内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 且其边平行于坐标轴. 求该矩形面积与周长的最大值.

5 给定正数 $p\geq 1$. 证明: 对任何正数 $x_1,...,x_n$, 有

$$\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)^p\leq\frac{x_1^p+...+x_n^p}{n}.$$

6 称 x_0 为函数 f 的拐点, 如果在 x_0 一侧 f 是下凸的, 在 x_0 的另一侧 f 是上凸的. 确定下列函数的拐点, 确定它们的上凸和下凸区间.

(1) $f(x)=\sin x$.

(2) $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

(3) 设 $a_1,...,a_n\geq 1$. 证明:

$$\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}.$$

7 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有非负的二阶导函数. 证明: f 在 $[a,b]$ 上的最大值一定在区间端点 a 或 b 处取得.