《高等微积分 1》第九周作业

本次作业在第十周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上有各个高阶导数. 证明: 如果 $f(x)=0$ 有 n 个不同的零点, 则对 $1\le k\le (n-1)$, $f^{(k)}(x)=0$ 至少有 $(n-k)$ 个不同的零点.

2 设 $0<x<y$. 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$ 时, 有 $\alpha x^{\alpha-1}(y-x)<y^\alpha-x^\alpha<\alpha y^{\alpha-1}(y-x)$.

(2) 当 $0<\alpha<1$ 时, 有 $\alpha y^{\alpha-1}(y-x)<y^\alpha-x^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}(y-x)$.

(3) $\frac{y-x}{y}<\ln\frac{y}{x}<\frac{y-x}{x}$.

3 定义函数 $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为 $f(x)=(1-\frac{1}{x})^x$.

(1) 研究 f 在 $(1,+\infty)$ 的单调性.

(2) 证明: 对正整数 $k<n$, 有 $(1-\frac{k}{n})^n<(1-\frac{k}{n+1})^{n+1}$.

(3) 定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $a_n=\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^n$. 证明: $a_n<a_{n+1}$.

(4) 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

(5) 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)<\frac{1}{e}$.

(6) 证明: 对于正整数 $k<n$, 有 $(1-\frac{k}{n})^n<(\frac{1}{e})^k$.

(7) 证明: 对于正整数 n, 有 $a_n<\frac{e}{e-1}$.

(8) 证明: 极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(9) 设 k 是给定的正整数. 注意到, 对任何正整数 $n\ge k+1$, 有

$$a_n=1+f(\frac{n}{1})^1+f(\frac{n}{2})^2+...+f(\frac{n}{n-1})^{n-1}\ge 1+\sum_{i=1}^k f(\frac{n}{i})^i.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \sum\limits_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{e}\right)^i$.

(10) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{e}{e-1}$.