

概率论与数理统计：第二次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的答案必须个人书写完成。

- (1) 小明和大毛下象棋，约定第一个赢得一局的人得胜。如果连下 10 局都是和棋，则两人握手言和。假如小明每局赢的概率为 0.4，输的概率为 0.3，和棋的概率为 0.3。那么小明赢得比赛的概率是多少？两人下棋局数的分布列是？
- (2) 设 a 和 b 都是正整数，且 $a < b$ 。令 X 为一随机变量，它以相同的概率取值 2^i , $a \leq i \leq b$ 。求 X 的期望和方差。
- (3) X 的密度函数为 $f_X(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ ，其中 $\lambda > 0$ 。求 X 的期望和方差。
- (4) 巧克力工厂开展了一个宣传活动，在一些巧克力糖里放了金奖券。只要有一张金奖券就可以到工厂参观和任意品尝各种巧克力。假设每一包巧克力含有金奖券的概率为 p 。求出为拿到金奖券所需购买的巧克力糖的包数的期望和方差。
- (5) 有两枚硬币，将它们同时抛掷的时候，其中第一枚正面向上的概率为 p ，第二枚正面向上的概率为 q 。连续地同时抛掷这两枚硬币，直到出现一枚正面向上，另一枚反面向上为止。
 - (a) 写出抛掷次数的分布列，期望及方差。
 - (b) 最后一次抛掷得到第一枚正面向上的概率是多大？
- (6) 随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0.$$

求 X 的期望与方差。

- (7) 设 X 为非负随机变量， $a > 0$ 。假如 $E(e^{aX})$ 存在，证明：对于任意的 $x > 0$ ，有

$$P(X \geq x) \leq e^{-ax} E(e^{aX}).$$

- (8) 设 X 为取值非负整数的离散随机变量，且其数学期望存在。证明：

$$(a) E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

$$(b) \sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}(E(X^2) - E(X)).$$

- (9) (a) 在一个智力游戏中一共有两个问题需要回答。游戏规则要求你选择一个问题作为首先回答的问题。问题 1 比较容易，你能够回答正确的概率为 0.8，回答正确则能够得到奖金 100 元。问题 2 比较难，你只有 0.5 的概率回答正确，回答正确则能够得到奖金 200 元。如果你先选的问题回答错误了，则无法得到奖金且不能继续作答。如果回答

正确，则可达到该问题的奖金并可以回答剩下的一题。请问你会选择哪道题作为先答的问题？

- (b) (*) 现在一共有 n 个问题，你可以选择任意的答题次序。对于问题 i ，你答对的概率为 p_i ，如果答对，你可以拿到奖金 v_i ，并且你可以继续作答，如果答错，你无法获得该题的奖金，且不能继续作答，但你之前作答的获得的奖金保留。请问你会怎么选择你的做题次序呢？