# 2018 年秋季《高等微积分 1》期中考试参考解答

2018 年 11 月 10 日 $8:00-10:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 2 题 25 分, 第 $1,3,5$ 题每题 15 分, 第 $4,6,7$ 题每题 10 分.

1 (1) 叙述函数 $f$ 在 $x_0$ 处可微的定义.

(2) 证明: 一元函数 $f$ 在 $x_0$ 处可微的充分必要条件是 $f$ 在 $x_0$ 处可导.

(3) 设 $g(0)=h(0)=0$, 且对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|g(x)|\le|h(x)|$. 证明: 如果 $g$ 与 $h$ 在 $x=0$ 处都可导, 则 $|g'(0)|\le|h'(0)|$.

解. (1) 称 $f$ 在 $x_0$ 处可微, 如果存在线性映射 $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, L(h)=Ah, \forall h\in\mathbf{R}$, 使得在 $h=0$ 的某个邻域中有 $f(x_0+h)=f(x_0)+L(h)+\alpha(h)$, 且 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$.

(2)

$$
\begin{aligned}
& f\text{在}x_0\text{处可导}\\
\iff & \text{极限}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{存在}\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0\\
\iff & \text{存在}A\in\mathbf{R},\text{使得}f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\alpha(h),\text{且}\lim_{h\to0}\frac{\alpha(h)}{h}=0\\
\iff & f\text{在}x_0\text{处可微}.
\end{aligned}
$$

(3) 由条件, 对任何 $x\neq0$ 有

$$|\frac{g(x)-g(0)}{x}|=\frac{|g(x)|}{|x|}\le\frac{|h(x)|}{|x|}=|\frac{h(x)-h(0)}{x}|,$$

利用极限不等式可得

$$\lim_{x\to 0}|\frac{g(x)-g(0)}{x}| \le \lim_{x\to 0}|\frac{h(x)-h(0)}{x}|$$

此即 $|g'(0)| \le |h'(0)|$. $\square$

2 (1) 设 $k,n$ 是正整数且 $k\le n$, 计算函数极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})...(1-x^{n-k+1})}{(1-x^k)(1-x^{k-1})...(1-x^1)}.$$

(2) 设 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}$.

(3) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 每项非零且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(4) 给定无理数 $\alpha$ 与实数 $x\in(-1,1)$. 计算数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

(5) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=K$. 计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{g(x)}$.

解答. (1) 利用 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^m}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x+...+x^{m-1})=m$, 可知所求的极限值为 $C_n^k$.

(2) 所求的极限值为 $\alpha$.

(3) 所求的极限值为 0.

(4) 直接用 (3) 的结论, 所求的极限值为 0.

(5) 所求的极限值为 $e^K$.

$\square$

3 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是处处可导的双射, 其反函数为 $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(1) $f^{-1}$ 是否一定处处可导? 请说明理由.

(2) 设 $f$ 的导函数处处非零. 设函数 $f$ 与 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 都处处有二阶导数. 定义函数 $h(x)=g(f^{-1}(x)),\quad \forall x\in\mathbf{R}$. 计算 $h$ 的一阶导函数 $h'(x)$ 与二阶导函数 $h''(x)$, 要求用 $f$ 与 $g$ 的高阶导函数表示.

解. (1) $f^{-1}$ 不一定处处可导. 例如 $f(x)=x^3$ 是处处可导的双射, 其反函数为 $f^{-1}(y)=y^{1/3}$, 它在 $y=0$ 处的导数由如下极限定义

$$\lim_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^{1/3}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^{2/3}},$$

该极限不存在 (否则的话, 利用极限的四则运算, 可得

$$1=\lim_{y\to 0}\left(y^{2/3}\cdot\frac{1}{y^{2/3}}\right)=\lim_{y\to 0}y^{2/3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^{2/3}}=0\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^{2/3}}=0,$$

矛盾!), 因而 $f^{-1}$ 在 0 处不可导.

(2) 假设 $f$ 的导函数处处非零, 则可由反函数的求导法则可得

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

这样, 利用链式法则可得

$$h'(x)=g'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=\frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}.$$

在此基础上, 利用 Leibniz 法则与链式法则可以进一步求导

$$\begin{aligned}h''(x)&=\frac{\frac{d}{dx}g'(f^{-1}(x))\cdot f'(f^{-1}(x))-g'(f^{-1}(x))\cdot\frac{d}{dx}f'(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2}\\&=\frac{\frac{g''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}\cdot f'(f^{-1}(x))-g'(f^{-1}(x))\cdot\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2}\\&=\frac{g''(f^{-1}(x))\cdot f'(f^{-1}(x))-g'(f^{-1}(x))\cdot f''(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^3}.\end{aligned}$$

□

4 设 $P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 是实数系数的多项式. 证明: $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 即存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $P(x)\geq P(x_0)$.

*证明:* 当 $x\to\infty$ 时, $(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})$ 趋近于 1, 从而有

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\lim_{x\to\infty}x^4(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})=+\infty.$$

由此可知, 存在 $M > 0$, 使得当 $|x| > M$ 时有 $P(x) > P(0)$. 由最值定理, 连续函数 $P(x)$ 在有界闭区间 $[-M, M]$ 上有最小值, 设最小值点为 $x_0$, 显然 $P(0) \geq P(x_0)$. 这样, 对 $|x| > M$ 有

$$P(x) > P(0) \geq P(x_0).$$

再结合 $x_0$ 是 $P(x)$ 在 $[-M, M]$ 上的最小值点, 可知 $x_0$ 是 $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

$\square$

5 定义函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{如果} x > 0 \\ 0, & \text{如果} x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 证明: 对每个正整数 $n$, 存在多项式 $P_n(t)$, 使得对每个 $x > 0$, $f$ 在点 $x$ 处的 $n$ 阶导数为

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}.$$

(2) 对每个正整数 $n$, 计算 $f$ 在 0 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

解. (1) 对 $n$ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 对每个 $x > 0$, 有

$$f^{(1)}(x) = e^{-1/x}(-\frac{1}{x})' = e^{-1/x}(\frac{1}{x})^2,$$

取 $P_1(t) = t^2$ 即可. 假设 $f$ 在 $x > 0$ 处有 $n$ 阶导数

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x},$$

其中 $P_n$ 是多项式. 利用 Leibniz 法则与链式法则, 可知 $f$ 在每个 $x > 0$ 处有 $n+1$ 阶导数

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}\right)' = P_n'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})e^{-1/x} + P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}(\frac{1}{x})^2,$$

令 $P_{n+1}(t) = -t^2P_n'(t) + t^2P_n(t)$, 它是多项式, 且有

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-1/x}, \quad \forall x > 0,$$

这就完成了归纳证明.

(2) 约定 $P_0(t)=1$. 我们用归纳法证明对每个非负整数 $n$, 有 $f^{(n)}(0)=0$. 当 $n=0$ 时, 显然成立. 以下假设 $n=m$ 时 $f^{(m)}(0)=0$, 来证明 $n=m+1$ 的情形. 首先, 由于 $f$ 在 $\mathbf{R}_-$ 上恒为零, 则它在 $\mathbf{R}_-$ 上各个高阶导数都为 0, 从而有

$$\left(f^{(m)}\right)'(0-)=\lim_{x\to 0-}\frac{f^{(m)}(x)-f^{(m)}(0)}{x}=0.$$

其次, 由第 (1) 小问的结论, 有

$$\begin{aligned}\left(f^{(m)}\right)'(0+)&=\lim_{x\to 0+}\frac{f^{(m)}(x)-f^{(m)}(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{P_m(\frac{1}{x})e^{-1/x}}{x}\\&=\lim_{y\to+\infty}\frac{yP_m(y)}{e^y}\\&=0,\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了熟知的极限式 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^k}{e^y}=0$.

结合这两方面, 可得 $f^{(m+1)}(0)=\left(f^{(m)}\right)'(0)=0$. 这就完成了归纳证明. □

6 设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 严格单调递增, 且满足:

(1) 对任何实数 $b\geq 1$, 有 $f(\frac{1}{b})<\frac{1}{b+1}$;

(2) 对任何 $t>1$, 存在 $M\geq 1$, 使得当 $b\geq M$ 时, 总有 $f(\frac{1}{b})>\frac{1}{b+t}$.

定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$0<a_1<1,\quad a_{n+1}=f(a_n),\quad \forall n\geq 1.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

*证明:* 首先,

$$a_1<1,\quad a_2=f(a_1)<f(1)<\frac{1}{2},\quad a_3=f(a_2)<f(\frac{1}{2})<\frac{1}{3},\ldots$$

依此下去, 可知对每个正整数 $n$ 有 $a_n<\frac{1}{n}$, 即有 $na_n<1$.

其次, 对任何 $0 < \epsilon < 1$, 令 $t = \frac{1}{1-0.5\epsilon} > 1$, 由题意存在 $M \geq 1$ 使得当 $b \geq M$ 时 $f(\frac{1}{b}) > \frac{1}{b+t}$. 取正数 $c$, 使得 $a_1 > \frac{1}{M+c}$, 则有

$$\begin{aligned}
&a_2 = f(a_1) > f(\frac{1}{M+c}) > \frac{1}{M+c+t},\\
&a_3 = f(a_2) > f(\frac{1}{M+c+t}) > \frac{1}{M+c+2t},\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

依此下去, 可知对任何正整数 $n$, 有 $a_n > \frac{1}{M+c+(n-1)t}$, 从而有

$$na_n > \frac{n}{M+c+(n-1)t}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{M+c+(n-1)t} = \frac{1}{t} = 1 - 0.5\epsilon > 1 - \epsilon$, 则存在 $N \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n > N$, 有 $\frac{n}{M+c+(n-1)t} > 1 - \epsilon$, 由此可得

$$na_n > \frac{n}{M+c+(n-1)t} > 1 - \epsilon, \quad \forall n > N.$$

结合上述两方面可得, 对任何 $n > N$, 有 $1 - \epsilon < na_n < 1$, 特别的有 $|na_n - 1| < \epsilon$. 这就验证了 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

$\square$

7 设 $f : (a,b) \in \mathbf{R}$ 满足对任何 $x, y \in (a,b)$ 以及任何 $\lambda \in [0,1]$, 总有

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

(1) 证明: 对 $(a,b)$ 上任何三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(2) 证明: $f$ 是 $(a,b)$ 上的连续函数.

*证明:* (1) 要证明的两个不等式都等价于

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \tag{1}$$

令 $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, 由题目条件有

$$f\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\right) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3),$$

此即 (1) 式.

(2) 对任何 $x_0 \in (a,b)$, 来证明 $f$ 在 $x_0$ 处连续. 为此, 取 $x_L < x_0 < X_R$. 设 $x \in (x_L, x_R)\backslash\{x_0\}$, 对 $x_L, x_0, x$ 使用第 (1) 问的结论, 有

$$\frac{f(x_0)-f(x_L)}{x_0-x_L} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

对 $x_0, x, x_R$ 使用第 (1) 问的结论, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_R)-f(x_0)}{x_R-x_0}.$$

结合起来, 有

$$\frac{f(x_0)-f(x_L)}{x_0-x_L} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_R)-f(x_0)}{x_R-x_0}.$$

令 $K = \max\{|\frac{f(x_0)-f(x_L)}{x_0-x_L}|, |\frac{f(x_R)-f(x_0)}{x_R-x_0}|\}$, 则有

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| \le K, \quad \forall x \in (x_L, x_R)\backslash\{x_0\}. \tag{2}$$

这样, 对任何 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{K}, x_0 - x_L, x_R - x_0\}$, 则对任何 $|x - x_0| < \delta$, 由 (2) 式可得

$$|f(x) - f(x_0)| \le K|x - x_0| < K\delta \le \epsilon,$$

这就验证了 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 从而完成了证明. $\square$