2017 年秋季《高等微积分 1》期中考试

2017 年 11 月 11 日 $8:00-10:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 3 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设函数 $u(x), v(x)$ 处处有二阶导数, $u(x)$ 的值处处为正数. 定义函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$.

(1) 求 $f'(x)$.

(2) 求 $f''(x)$.

要求把计算结果用 u, v 及它们的高阶导函数表示.

2 给定 $0<a<b$. 定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$x_1=b, \quad x_{n+1}=\sqrt{a(2x_n-a)}, \quad \forall n\in\mathbf{Z}_+.$$

(1) 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

3 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 令

$$Y=\{y\in\mathbf{R}|\ 存在x\in[a,b]\ 使得y=f(x)\}$$

为 f 的像集. 证明: 如果 $[a,b]\subseteq Y$, 则存在 $x\in[a,b]$ 使得 $f(x)=x$.

4 定义函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & 如果x\neq 0,\\ 0, & 如果x=0,\end{cases}$$

其中 $e^{-1/x^2}=\exp(-\frac{1}{x^2})$. 计算 $f'(0)$ 与 $f''(0)$.

5 设函数 f 在 $x=a$ 处的导数为 $f'(a)=L$, 且 $f(a)\neq 0$.

(1) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|\right).$$

(2) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n.$$

6 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=K$.

(1) 定义函数 $h:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为

$$h(y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+y)}{y}, & \text{如果} y\neq 0\\ 1, & \text{如果} y=0.\end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{x\to x_0}(h\circ f)(x)=1$.

(2) 利用 (1) 的结论, 证明:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+f(x))=K.$$

注意: 这个结论不是显然的. 因为, 不一定能找到 x_0 的去心邻域 $N^*(x_0,r)$, 使得在其中 $f(x)$ 处处非零, 这样, 利用简单的换元法计算上述极限是不严谨的.

7 (1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的数列, 且极限为 A. 证明: 对任何正整数 n, 有 $a_n\leq A$.

(2) 令 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. 证明: 对正整数 n, 有

$$(1+\frac{1}{n})^n\leq e\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{(n+1)^n}{e^n}\leq n!\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$