

概率论与数理统计：第十一次作业部分提示

- (1) 第四题提示：1) 区间长度为  $2u_{0.975} \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}}$ ，而在不知道  $\bar{x}$  的具体数值时， $\bar{x}(1-\bar{x}) \leq 0.25$ 。  
2) 如果知道  $\theta < 0.2$ ，那么我们可以预先知道  $\theta(1-\theta) < 0.2 \times 0.8 = 0.16$ ，可适当减少采访人数。
- (2) 第五题提示： $\theta$  时该分布的 0.5 分位数，可以用样本中位数的渐进正态性构造。
- (3) 第七题提示：考虑  $Y = \frac{X}{\theta}$ ，那么  $X = \theta Y$ 。Y 的密度函数为

$$p_Y(y) = \theta(\theta y)^{-2} \theta = y^{-2}, y > 1.$$

考虑最小次序统计量  $x_{(1)}$ ，那么

$$P\left(\frac{x_{(1)}}{\theta} > c\right) = P\left(\frac{x_i}{\theta} > c, i = 1, \dots, n\right) = \left(P\left(\frac{X}{\theta} > c\right)\right)^n = \left(\frac{1}{c^n}\right), c > 1.$$

所以可以让  $\frac{x_{(1)}}{\theta}$  作为枢轴量。

- (4) 第八题 (2)：区间长度为  $2t_{0.975}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma}{4}$ ，即

$$4t_{0.975}(n-1)s^2/n \leq \frac{\sigma^2}{16}.$$

注意到  $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ ，考虑分位数  $\chi_{0.9}^2(n-1)$ ，通过计算机软件求解

$$4t_{0.975}(n-1)\chi_{0.9}^2(n-1)/(n(n-1)) \leq \frac{1}{16}.$$

也可以粗略的估算， $\chi^2(n-1)$  的数学期望为  $n-1$ ，方差为  $2(n-1)$ ，所以  $s^2$  的期望为  $\sigma^2$ ，方差为  $2\sigma^4/(n-1)$ 。可以通过切比雪夫不等式  $P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$  来估计概率为 0.9 的取值范围，接着用  $u_{0.975}$  来代替  $t_{0.975}(n-1)$ ，即可给出  $n$  的粗略估计。