概率论与数理统计：第一次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 将一个均匀的具有 6 个面的骰子连续抛掷两次。
  (a) 抛出“一对”的概率是?
  (b) 已知抛掷得到的点数总和不超过 4，求抛掷出“一对”的概率是?
  (c) 求至少一个骰子抛出 6 点的概率是?
  (d) 已知抛掷得到两个骰子的点数不同，求至少一个骰子抛出 6 点的概率?

(2) 有一批产品共 100 件。按规定，从中随机地抽出 4 件产品进行检查，只要这 4 件产品中有一件不合格，那么就认为这一批产品不合格。假如这批产品中含有 5 件不合格产品，这批产品被定为不合格的概率是?

(3) 将 n 跟绳子的 $2n$ 个头任意两两相接，求恰好结成 n 个圈的概率。

(4) 盒子 a 里放着 10000 个同样的黑球，盒子 b 里放着 10000 个同样的白球。现在进行一次球的交换，即同时从两个盒子各自随机拿出一个球放到对方里。请问，经过 4 次这样的交换后，两个盒子还是只有单色球的概率是?

(5) 一共有 k 个盒子，每个盒子里有 m 个白球和 n 个黑球。从盒子 1 里随机抽一个球放到盒子 2，接着从盒子 2 随机抽一个球到盒子 3，如此继续下去，直到从第 k 个盒子随机抽出一个球。请问从第 k 个盒子里抽出的球是白球的概率是?

(6) 某血库急需 AB 型血，要从身体合格的献血者中获得。假如 AB 型血出现的概率是 0.02.
  (a) 20 个身体合格的献血者中，至少有一个人是 AB 型血的概率是?
  (b) 要保证以 0.95 的概率至少获得一份 AB 型血，需要多少位身体合格的献血者?

(7) (*) 考虑一个无穷实验序列。假定第 i 次实验成功的概率是 p_i. 事件 N= 没有一次实验成功。事件 I= 无穷多次实验成功。
  (a) 假设实验都是独立的，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$, 求概率 $P(N)$ 和 $P(I)$.
  (b) 假如 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < +\infty$, 求 $P(I)$.

(8) 某罕见疾病被检查出来的概率是 0.95：若被检者有该病，检查结果为阳性的概率为 0.95；如果被检者没有该病，检查结

果为阴性的概率是 0.95. 假如该病在某特定人群里的发病率为 0.001。现从这一群体里随机抽取一人进行检查，检查结果为阳性。问这个人患病的概率是多大？如果复查还是阳性，这个人患病的概率又是多大？

(9) (*) 有 2^n 支队伍比赛。每队排名不同，比赛形式为淘汰赛，胜者晋级。每一轮各自的对手都是随机分配的，且排名高者胜。请问决赛在排名前两位的队伍之间进行的概率是多少？

概率论与数理统计：第二次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 小明和大毛下象棋，约定第一个赢得一局的人得胜。如果连下 10 局都是和棋，则两人握手言和。假如小明每局赢的概率为 0.4，输的概率为 0.3，和棋的概率为 0.3. 那么小明赢得比赛的概率是多少？两人下棋局数的分布列是？

(2) 设 a 和 b 都是正整数，且 $a < b$. 令 X 为一随机变量，它以相同的概率取值 $2^i, a \leqslant i \leqslant b$. 求 X 的期望和方差。

(3) X 的密度函数为 $f_X(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, 其中 $\lambda > 0$. 求 X 的期望和方差。

(4) 巧克力工厂开展了一个宣传活动，在一些巧克力糖里放了金奖券。只要有一张金奖券就可以到工厂参观和任意品尝各种巧克力。假设每一包巧克力含有金奖券的概率为 p. 求出为拿到金奖券所需购买的巧克力糖的包数的期望和方差。

(5) 有两枚硬币，将它们同时抛掷的时候，其中第一枚正面向上的概率为 p，第二枚正面向上的概率为 q。连续地同时抛掷这两枚硬币，直到出现一枚正面向上，另一枚反面向上为止。
   (a) 写出抛掷次数的分布列，期望及方差。
   (b) 最后一次抛掷得到第一枚正面向上的概率是多大？

(6) 随机变量 X 的分布函数为
$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0.$$
求 X 的期望与方差。

(7) 设 X 为非负随机变量，$a > 0$. 假如 $E(e^{aX})$ 存在，证明：对于任意的 $x > 0$, 有
$$P(X \geqslant x) \leqslant e^{-ax}E(e^{aX}).$$

(8) 设 X 为取值非负整数的离散随机变量，且其数学期望存在。证明：
   (a) $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$.
   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}(E(X^2) - E(X))$.

(9) (a) 在一个智力游戏中一共有两个问题需要回答。游戏规则要求你选择一个问题作为首先回答的问题。问题 1 比较容易，你能够回答正确的概率为 0.8，回答正确则能够得到奖金 100 元。问题 2 比较难，你只有 0.5 的概率回答正确，回答正确则能够得到奖金 200 元。如果你先选的问题回答错误了，则无法得到奖金且不能继续作答。如果回答

正确，则可达到该问题的奖金并可以回答剩下的一题。请问你会选择哪道题作为先答的问题?

(b) (*) 现在一共有 n 个问题，你可以选择任意的答题次序。对于问题 i，你答对的概率为 p_i，如果答对，你可以拿到奖金 v_i，并且你可以继续作答，如果答错，你无法获得该题的奖金，且不能继续作答，但你之前作答的获得的奖金保留。请请问你会怎么选择你的做题次序呢?

第三次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 你一次又一次地写一个电脑程序，每写一次都有一个成功的概率 p. 假定每次成功与否与前面的历史记录相互独立。令 X 是你一直到成功为止所写的次数。求 X 的分布列，数学期望和方差。

(2) 设随机变量 X 服从二项分布 $b(2,p)$, 随机变量 Y 服从二项分布 $b(4,p)$. 若 $P(X \geqslant 1) = \frac{8}{9}$, 求 $P(Y \geqslant 2)$.

(3) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$, 求随机变量 $Y = \frac{1}{X+1}$ 的数学期望。

(4) 求具有以下密度函数的随机变量的数学期望及方差:

(a) $p_1(x) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+4x+4}, x \in \mathbb{R}$, 其中 $C > 0$ 为某确定常数.

(b)

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{0.5^2}{\int_0^\infty xe^{-x}dx} xe^{-0.5x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(c)

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^\infty xe^{-x}dx}{(\int_0^\infty x^{0.1}e^{-x}dx)(\int_0^\infty x^{-0.1}e^{-x}dx)} x^{0.1}(1-x)^{-0.1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(5) 随机变量 X 服从区间 $[-1/2, 1/2]$ 上的均匀分布，求

(a) $P(|X| < 0.25)$.

(b) 随机变量 $Y = X^2$ 的密度函数。

(c) 随机变量 $Z = \tan(\pi X)$ 的密度函数。

(6) 某城市的气温为正态随机变量，其均值和标准差都是 10 度。请问在某一时刻气温不高于 30 度的概率是?。

(7) 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟算）服从指数分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。他一个月要到 5 次银行。求他至少有两次没有得到服务的概率。

(8) 某烟鬼在左右口袋各放一盒火柴，各有 n 根火柴。每次吸烟时，他随机地从左右口袋掏出火柴盒点烟（消耗一根）。当这烟鬼第一次从口袋里掏出一个空火柴盒时，另外一个火柴盒里还剩火柴数量的分布列是?

(9) 传送器发出的信号是 0-1 信号。发出 1 的概率是 p，发出 0 的概率为 $1-p$, 并且每次发送的信号相互独立。现假设在一定时间内发出信号的个数服从柏松分布，其参数为 λ. 请寻找在同一段时间内发出信号 1 的个数所服从的分布类型。

概率论与数理统计：第四次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，它们的分布列如下：

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 若 x=1,2,3,\\ 0, & 其它;\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y=0,\\ \frac{1}{3}, & y=1,\\ \frac{1}{6}, & y=2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $X+Y$ 的分布列和 $P(X+Y\leqslant 3)$.

(2) 在坐标平面上画上格子，水平线之间的距离为 a，垂直线之间的距离为 b。现在往平面上丢一根长度为 l 的针，假设 l<a, l<b。针与格子相交的边数的期望是多少？针与至少一条边相交的概率是多少？

(3) 设 X 和 Y 是两个相互独立且都服从参数为 p 的几何分布。证明：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}, i=1,\ldots,n-1.$$

(4) 我们从一根长度为 l 的杆开始，在杆上随机选一个点，以这一点为切割点，将杆切断。我们保留杆的左边部分，设这段长度为 X。对这个长度为 X 的杆，再重复之前的过程，得到一个长度为 Y 的杆。

(a) 求 X 和 Y 的联合密度函数。

(b) 求 Y 的边际分布和数学期望。

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从标准正态分布。定义随机变量 $R\geqslant 0, \Theta\in[0,2\pi)$，使得

$$X=R\cos\Theta,\quad Y=R\sin\Theta.$$

(a) 求 R 和 Θ 的联合分布和边际分布。

(b) R 与 Θ 是否相互独立？

(c) 求随机变量 R^2 的密度函数。

(6) 设两盏灯的寿命 X 和 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布。令 $Z=\min\{X,Y\}$. 求 Z 的分布列，数学期望，和方差。

(7) 设二维随机变量 (X,Y) 服从圆心在原点上的单位圆上的均匀分布。

(a) 求 X 和 Y 的边际分布。

(b) X 和 Y 是否相互独立?

(8) 设随机变量 U_1 和 U_2 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。证明:

(a) $Z_1 = -2\ln U \sim Exp(1/2)$, $Z_2 = 2\pi U_2 \sim U(0,2\pi)$.

(b) $X = \sqrt{Z_1}\cos Z_2$, $Y = \sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态分布。

(9) 随机变量$X_k \sim N(k,k^2)$, $k = 1,2,3$，且相互独立。

(a) 求随机变量$Y = \sum_{k=1}^{3} k^2 X_k$ 的密度函数。

(b) 随机变量$Z = e^{10X_1^2}$ 的数学期望是否存在。

概率论与数理统计：第五次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 假设随机变量 X 满足 $E[X]=0$, $E[X^2]=1$, $E[X^3]=0$, $E[X^4]=3$. 令 $Y=a+bX+cX^2$. 计算相关系数 $\rho(X,Y)$.

(2) X 与 Y 相互独立。证明

$$Var(XY)=(E[X])^2Var(Y)+(E[Y])^2Var(X)+Var(X)Var(Y).$$

(3) 设随机变量 X 服从区间 $(1,2)$ 上均匀分布，在 $X=x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件分布为参数为 x 的指数分布，求随机变量 XY 的密度函数。

(4) 一个大箱子里有 M 个盒子，M 服从参数为 p 的几何分布。第 i 个盒子含有 K_i 个小零件，K_i 服从参数为 μ 的泊松分布，每个小零件的重量服从参数为 λ 的指数分布。假设所涉及的随机变量都是相互独立的。求整个箱子的总重量的期望和方差。

(5) $X\sim N(0,1)$, Z 与 X 相互独立，且 $P(Z=1)=P(Z=-1)=\frac{1}{2}$.

  (a) 随机变量 $Y=ZX$ 服从什么分布？

  (b) X 与 Y 是否相互独立？是否相关？

(6) 小红和小明约会。他们的所有约会都是在晚上 9 点之后。小明每次都是 9 点的时候到达，但小红比较散漫，她到达的时间服从 8 点到 10 点之间的均匀分布。记 X 是 8 点和小红到达时间之间的间隔。如果小红在 9 点之前到达，她们的约会时间将会是 3 个小时。如果小红在 9 点之后到达，他们的约会时间均匀分布在 0 小时和 $3-X$ 小时之间。他们的约会在见面后开始。如果小红迟到，小明会很生气，并且如果在他们的下一次约会小红迟到多于 45 分钟，小明会提出分手。假设每次约会都是独立的。

  (a) 小明等待小红的小时数的期望是？

  (b) 一般约会持续时间的期望是？

  (c) 他们分手前，约会次数的期望是？

(7) 假设涉及的数学期望均存在。证明以下的等式：

  (a) $E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$;

  (b) $E(XY)=E(XE(Y|X))$;

  (c) $Cov(X,E(Y|X))=Cov(X,Y)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布，求 $E(X|X+Y=z)$, $z>0$.

(9) 假设某赌徒每次赢或者输的概率分别为 p 和 $(1-p)$, 而且每次输赢相互独立。押注 a 元，赢了则收获 $2a$ 元，输了则失去这 a 元。当 $p>0.5$ 时，一种流行的赌博方法（成为凯利策略）是每次赌上当前总赌资的 $2p-1$ 部分，即总赌资 $\times(2p-1)$. 假设初始赌资为 x 元，运用凯里策略，经过 n 次赌博后的剩余赌资的数学期望。

概率论与数理统计：第六次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，且服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布。证明 $n \to \infty$, 以下 Y_n 均依概率收敛。
 (a) $Y_n = \frac{X_n}{n}$;
 (b) $Y_n = (X_n)^n$;
 (c) $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(2) 求下列分布函数的对应的随机变量的特征函数并求其数学期望和方差。
 (a) $F_1(x) = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-a|t|}dt \quad (a > 0)$;
 (b) $F_2(x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2+a^2}dt, \quad (a > 0)$. (提示：$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-at}$, $t > 0$.)

(3) 考虑离散随机变量序列 Y_n, 其分布列为 $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(Y_n = n^2) = \frac{1}{n}$.
 (a) 求 $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n)$.
 (b) Y_n 是否依概率收敛？若是极限是？说明理由。

(4) 设随机变脸 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 证明：当 $\alpha \to \infty$ 时，随机变量 $\frac{\lambda X - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 依分布收敛到标准正态分布。

(5) 设连续随机变量 X 的密度函数为：

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中参数 $\lambda > 0$, $-\infty < \mu < \infty$.
 (a) 求 X 的特征函数。
 (b) 当 $\mu = 0$, $\lambda = 1$ 时，令 $Y = X$, 证明 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$. 但显然 X 与 Y 不独立。
 (c) $X_1, \ldots, X_N$ 相互独立，且与 X 同分布。求 $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ 的密度函数。

(6) X 服从标准正态分布。令 $Y_n = (-1)^{\Phi(n)}X$, 其中 $\Phi(n)$ 是 n 的不同素因子的个数。请问 Y_n 是否依概率收敛？是否依分布收敛？

(7) X_n 依分布收敛到 X, Y_n 依分布收敛到 Y, 是否能推出 $X_n + Y_n$ 依分布收敛到 $X + Y$? 若是，请说明理由；若否，给出反例。假如 X_n 与 Y_n 相互独立呢？

(8) 设 $f_X(x)$ 为某个概率密度函数，它满足这样的条件：a, b, c 为三个非负实数 $(a < b)$, $f_X(x)$ 在区间 $[a,b]$ 外为 0，并且

$xf_X(x) \leqslant c$ 对所有 x 都成立。(V_i, W_i)，$i = 1, \ldots, n$, 均服从有四个点 $(a, 0), (b, 0), (a, c), (b, c)$ 组成的矩形上的均匀分布，且相互独立。令

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{若} W_i \leqslant V_i f_X(V_i), \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

令 $Z_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. 当 $n \to \infty$, Z_n 是否依概率收敛？如果是，极限是？说明理由。(提示：用切比雪夫不等式)

概率论与数理统计：第七次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $X_1, X_2, \ldots$ 为独立同分布随机变量序列，且服从 $[2,3]$ 上的均匀分布。$Y_1, Y_2 \ldots$ 为另一个独立同分随机变量序列，且服从参数为 $p > 0$ 的几何分布。令

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n}.$$

请问当 $n \to \infty$ 时，Z_n 是否依概率收敛？

(2) 假设你将在赌场玩轮盘赌，作为专业人士，你首先会验证轮盘的公正性。你的办法如下：轮盘上有 1 到 36 的数字，将轮盘转动 100 次，然后计算轮盘停止在奇数点数出的总次数。如果次数大于 55 次，你就认为轮盘是不公正的。假如轮盘是公正的，估算你根据这个办法做出错误判断的概率是多少？

(3) 一工厂在第 n 天生产小配件 X_n, 且 X_n 是相互独立的随机变量序列，均值为 5，方差为 9.

(a) 求 100 天内至少生产 440 件小配件的概率的近似值。

(b) 给出最大的 n 的近似值，使得 $P(X_1 + \cdots + X_n \geqslant 200 + 5n) \leqslant 0.05$.

(c) 用 N 表示小配件的总产量首次超过 1000 的天数，计算 $N \geqslant 220$ 的概率的近似值。

(4) 设 $X_1, \ldots$ 和 $Y_1, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列，且服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。定义

$$W = \frac{(X_1 + \cdots + X_{16}) - (Y_1 + \cdots + Y_{16})}{16}.$$

求概率 $P(|W - E[W]| < 0.001)$ 的近似值。

(5) 设 $\{X_n\}$ 是方差一致有界的随机变量序列，且当 $|k-l| \to \infty$ 时，一致地有 $Cov(X_k, X_l) \to 0$, 证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

(6) 设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，其中 X_n 服从参数为 $\sqrt{n}$ 的柏松分布，试问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律。

(7) X_n 是独立同分布随机变量序列, $h(x)$ 是有界函数。当 n 很大时，求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$ 的近似分布。

(8) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $Var(X_n) = \sigma^2$。令

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)^2.$$

当 $n \to \infty$, Z_n 是否依概率收敛？极限是？说明理由。