

概率论与数理统计：第十一次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的答案必须个人书写完成。

- (1) 在一批货物中随机抽取 80 件，发现有 11 件不合格，试求这批货物的不合格率的置信水平为 0.90 的置信区间。
- (2) 随机选取 9 发炮弹，测得炮弹的炮口速度的样本标准差为  $s = 11\text{m/s}$ ，若炮弹的炮口速度服从正态分布，求其标准差的置信水平为 0.95 的置信区间。
- (3) 设从总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和总体  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  中分别抽取容量为  $n_1 = 7$ ,  $n_2 = 12$  的独立样本，可计算得  $\bar{x} = 72$ ,  $s_x^2 = 58$ ,  $\bar{y} = 70$ ,  $s_y^2 = 49$ .
  - (a) 若已知  $\sigma_1^2 = 64$ ,  $\sigma_2^2 = 49$ ，求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信水平为 95% 的置信水平；
  - (b) 若已知  $\sigma_1 = \sigma_2$ ，求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信水平为 95% 的置信区间。
  - (c) 若对  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  一无所知，求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信水平为 95% 的近似置信区间。
  - (d) 求  $\sigma_1/\sigma_2$  的置信水平为 95% 的置信区间。
- (4) 有一位市场调查员想了解某一地区的成年人购买某种产品的比率  $\theta$  (即该产品的市场占有率)。他希望能 95% 肯定真实的  $\theta$  落到某个长度为 0.01 的区间内。
  - (a) 请问，他需要访问多少个顾客？
  - (b) 如果他事先知道  $\theta < 0.2$ ，那他能减少采访的人数吗？可以减到多少？
- (5) 设总体  $X$  的密度函数为：

$$p(x; \theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

$x_1, \dots, x_n$  是该总体的样本，当  $n$  比较大时，寻找参数  $\theta$  的近似置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间。(提示：可考虑样本中位数。)

- (6) 设总体  $X$  的密度函数为：

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{\{x > \theta\}}, -\infty < \theta < \infty.$$

$x_1, \dots, x_n$  是该总体的样本。

- (a) 求随机变量  $x_{(1)} - \theta$  的密度函数。
  - (b) 构造  $\theta$  的一个置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间。
- (7) 设  $x_1, \dots, x_n$  为来自总体  $X$  的样本。 $X$  的密度函数为

$$p(x; \theta) = \theta x^{-2}, x > \theta > 0.$$

求  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间。

(8) 假设  $X_1, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本。

(a) 如果  $\sigma^2$  已知，确定样本容量  $n$  让  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过  $\frac{\sigma}{4}$ 。

(b) 如果  $\sigma^2$  未知，确定样本容量  $n$ ，保证有 90% 的把握让  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过  $\frac{\sigma}{4}$ 。