第三章
命题逻辑的公理化

计算机系　黄民烈

Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

第三章主要内容

- 本章介绍了命题逻辑的公理化，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：

  介绍了命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍了一个命题逻辑公理系统的构成

第三章主要内容

- 为什么要建立或引入命题逻辑的公理系统？
- 什么叫做公理系统？公理系统的构成是什么？
- 具有代表性的命题逻辑的公理系统有哪些？
- 是否所有的定理都可由公系统推出来？（**完备性**）

  非重言式或不成立的公式是否也可推导出来？（**可靠性**）

为什么要建立或引入命题逻辑的公理系统

- 重言式——命题逻辑研究的重点。
- 重要的重言式是逻辑规律。
- 如何掌握这些逻辑规律，以便从整体上理解和掌握命题逻辑，而不仅仅停留在对部分公式所作的直观解释性的讨论上。
- 需要系统、全面、严谨地研究等值式和推理式
- 需要掌握重言式所揭示的逻辑规律的全体，将它们作为一个整体来考虑。

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做**公理系统**（axiom system）。
- 公理系统自成体系，是一个**抽象符号系统**。又称之为**形式系统**。

公理系统的例子——Euclid几何学

- Euclid几何学就是一个典型的公理系统。

- 平面Euclid 几何学的公理体系由关联、顺序、合同、平行、连续五条公设或五组公理构成。

Euclid几何学

- 任意两个点可以通过一条直线连接。
- 任意线段能无限延伸成一条直线。
- 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
- 所有直角都全等。
- 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。

命题逻辑的公理系统

- 命题演算的重言式可组成一个严谨的公理系统，它是从一些作为初始命题的重言式（公理）出发，应用明确规定的推理规则，进而推导出**一系列重言式（定理）的演绎体系**。
- 命题逻辑的公理系统是一个**抽象符号系统**，不再涉及到**真值**。

公理系统的结构

1. 初始符号

公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. 形成规则

公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则。

公理系统的结构(续)

- **3. 公理**

  精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

- **4. 变形规则**

  公理系统所规定的推理规则。

- **5. 建立定理**

  公理系统所作演算的主要内容，包括所有的重言式和对它们的证明。

3.2 命题逻辑的公理系统

具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	5	4
Frege公理系统	1879	6	3
Hilbert—Bernays	1934	15	
王浩算法	1959	1 (10条变形规则)	
自然演绎系统		0 (5条变形规则)	

罗素(Russell)公理系统

1. 初始符号

- A, B, C, … （大写英文字母, 表示命题）
- ¬, ∨（表示联结词）
- ( ) （圆括号）
- ⊢ （断言符，写在公式前，如 ⊢A表示A是所要肯定的(A是重言式)，由Frege最先引入

罗素(Russell)公理系统（续）

2. 形成规则

(1) 符号π是合式公式（π取值为A, B, C,…）

(2) 若A, B是合式公式，则(A∨B)是合式公式

(3) 若A是合式公式，则¬A是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

罗素(Russell)公理系统（续）

3. 定义

- $(A \to B)$定义为$(\neg A \vee B)$。
- $(A \wedge B)$定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。
- $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$。

罗素(Russell)公理系统（续）

4. 公理

- 公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$ （重言律）
- 公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$
  （∨引入律，类似基本推理公式4）
- 公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (析取交换律）
- 公理4 $\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$

罗素(Russell)公理系统（续）

5. 变形（推理）规则

- (1). 代入规则

  如果 $\vdash$A，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$(将合式公式A中出现的符号π处处都代以合式公式B）。

- (2). 分离规则

  如果 $\vdash$A，$\vdash$A→B，那么 $\vdash$B。

- (3). 置换规则

  定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash$A，那么 $\vdash$B。

罗素(Russell)公理系统（续）

6. 定理的推演

定理的证明必须依据公理或已证明的定理，同时证明的过程（符号的变换过程）必须依据变形规则。

第三章主要内容（续1）

- 通过大量定理推演的实例，给出了使用公理系统进行定理证明的过程和方法，此外，还对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做了简要的叙述。

定理推演举例

(具体见教材)

3.3 公理系统的完备性和演绎定理

3.3.1 公理系统的完备性

- 公理系统的完备性是指，**是否所有的重言式或所有成立的定理**都可由所建立的公理系统推导出来。

- 形象地说，完备性是指所建立的系统所能推演出的定理**少不少**。

3.3.2 公理系统的可靠性

- 公理系统的可靠性是指，**非重言式或者不成立的定理是否**也可由所建立的公理系统推导出来。

- 形象地说，可靠性是指所建立的系统所能推演出的定理**多不多**。不具备可靠性的系统是不能使用的。

命题逻辑的公理系统具有以下性质

- **语义完全性**（公理系统的完备性）

  任一重言式在命题逻辑的公理系统中都是可证的。即重言式是定理。

- **语义无矛盾性**（相容性）

  公理系统必须不含有矛盾。

- **命题演算的可判定性**

  任给一个公式，存在一种机械的方法在有穷步内判定该公式是否为定理。

证明：所建立的公理系统是完备的

设A是任一重言式，需说明它是公理系统中的定理，即

$\vdash$A成立

可将A写成与之等值的合取范式 (<u>范式存在定理、待证</u>)

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

其中每个A_i都是析取式，

∵A是重言式，故每个A_i亦为重言式

每个A_i必可表为$\pi \vee \neg \pi \vee B$ 的形式，

π是命题变项。

证明：所建立的公理系统是完备的(续)

由公理系统

（1） $\vdash P \vee \neg P$　　（定理3.2.4）

（2） $\vdash \neg P \vee (P \vee Q)$　　由公理2 再用定义1

（3） $\vdash P \vee \neg P \vee Q$　　（括号省略与析取可交换，可证）

从而有 $\vdash A_i$　$(i = 1, \ldots, n)$　　(3)与$\pi \vee \neg \pi \vee B$的形式相同

又依 $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$*　　（见下面的补充定理）

（4） $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1 \wedge A_2)$*　　（代入$P=A_1$；$Q=A_2$）

（5） $\vdash A_1 \wedge A_2$　　（分离两次）

多次使用以上推导过程，有 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

*补充定理$\vdash P \to (Q \to P\wedge Q)$

- 证：（1） $\vdash P \vee \neg P$ （定理3.2.4）

  （2） $\vdash (\neg P\vee\neg Q) \vee \neg(\neg P\vee\neg Q)$

  （1）代入$P/(\neg P\vee\neg Q)$

  （3） $\vdash (\neg P\vee\neg Q) \vee (P\wedge Q)$ (2) 定义2

  （4） $\vdash \neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$ 括号省略规则

  （5） $\vdash P \to (Q\to P\wedge Q)$ (4) 定义1

证毕

第三章主要内容（续2）

- 介绍了命题逻辑的另一公理系统——王浩算法；
- 给出了该算法的具体结构；
- 举例说明了使用该算法进行定理推演的过程；

王浩算法—定理证明自动化系统

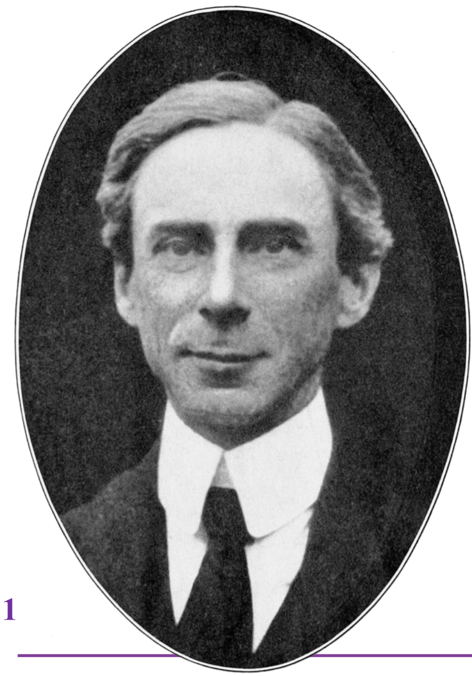
- 王浩算法是利用计算机来实现定理证明的机械化方法，由美籍华裔科学家王浩于1959年提出。

王浩算法及其影响（一）

- 1958年，王浩写了三个处理一阶逻辑的程序，其中包括一些当时未解决的问题。
- 程序用SAP语言（一种汇编语言）编写，在IBM 704机器上实现。
- 王浩使用该程序，将数学原理（Principia Mathematica ）一书中一阶逻辑部分的全部定理（共约350条），在不到9分钟内证明完毕。

王浩算法及其影响（二）

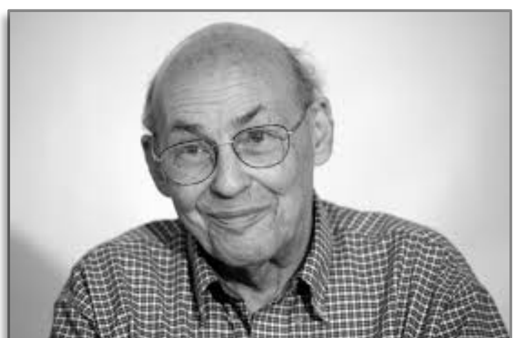
我真希望，在Whitehead和我浪费了十年时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能性。我愿相信，演绎逻辑中的一切都能由机器来完成。



—— **Bertrand Russell** (1872-1970，英国)
1950年Nobel文学奖获得者
Principia Mathematica 作者之一

王浩算法及其影响（三）

Turing机器首次用类似计算机的模型进行阐述，始见于王（浩）的论文中。该文所包含的结果，如用过去的方式来表示将会困难得多。



—— **Marvin Minsky**

MIT计算机系教授

1969年Turing奖获得者

王浩算法及其影响（四）

- 1972年美国洛克菲勒大学授予Godel名誉学位，王浩在授予仪式上为Godel致贺词。
- 1977年10月，王浩应邀在中科院做了6次关于数理逻辑的学术讲演，讲演内容的中译本《数理逻辑通俗讲话》于1981年由科学出版社出版。

王浩算法—定理证明自动化系统

- 作为命题逻辑的一个公理系统，王浩算法的结构组成与罗素系统类似，下面重点给出与罗素系统的主要差别：

王浩算法与罗素系统的主要差别

- (1) 初始符号中的联结词扩充为5个常用联结词，分别是$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$；为方便描述推理规则和公理，引入公式串$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$。
- (2) 定义了相继式。即，如果α和β都是公式串，则称 $\alpha \xrightarrow{s} \beta$是相继式。其中$\alpha$为前件，$\beta$为后件。

王浩算法与罗素系统的主要差别(续)

- (3) 公理只有一条：$\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 是公理（为真）的充分必要条件是α和β中至少含有一个相同的命题变项；
- (4) 变形（推理）规则共有10条，分别包括5条前件规则和5条后件规则；

王浩算法与罗素系统的主要差别(续)

- (5) 定理推演的过程将所要证明的定理写成相继式形式；然后反复使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式；
  若所有无联结词的相继式都是公理，则定理得证，否则定理不成立。

3.5 自然演绎系统(自学)

- 自然演绎系统也是一种逻辑演算体系，与公理系统的明显区别在于它的出发点只是一些变形规则而没有公理，是附有前提的推理系统。
- 自然演绎系统可导出公理系统的所有定理，同时自然演绎系统的所有定理也可由重言式来描述，从而可由公理系统导出。

3.6 非标准逻辑(自学)

- 前面的命题逻辑通常称作标准（古典）的命题逻辑，而除此之外的命题逻辑可统称作非标准逻辑。
- 其中一类是与古典逻辑有相违背之处的非标准逻辑，如多值逻辑，模糊逻辑等。
- 另一类是古典逻辑的扩充，如模态逻辑，时态逻辑等。

3.6.1 多值逻辑(自学)

- 在古典命题逻辑中，命题定义的取值范围仅限于真和假两种，故又称作二值逻辑。
- 多值逻辑将命题定义的取值范围推广到可取多个值。
- 因此，多值逻辑是普通二值逻辑的推广，并在此基础上研究如何给出各种取值含义的解释以及命题运算规律是否保持等问题。

3.6.1 多值逻辑(自学)

- 已有的多值逻辑研究以三值逻辑为主，具有代表性的包括
  - Kleene逻辑（1952）
  - Lukasiewicz逻辑（1920）
  - Bochvar逻辑（1939）等

3.6.2 模态逻辑(自学)

- 考虑必然性和可能性的逻辑是模态逻辑
- 引入“可能的世界”作为参量（条件），必然真表示所有可能的世界下为真，而可能真表示在现实世界下为真，不要求所有可能的世界下为真。存在的问题是可能的世界如何描述还有待研究。
- 有一种观点认为，命题逻辑是用来描述永恒或绝对真理的，模态逻辑和谓词逻辑则是描述非永恒或相对真理的。

3.6.3 不确定性推理与非单调逻辑(自学)

- 不确定性推理与非单调逻辑是人工智能系统中经常使用的知识表示和推理方法
- 首先，标准逻辑是单调的。一个正确的公理加到理论T 中得到理论T’，T ⊂ T’。如果T ⊢P 必有T’ ⊢P。即随着条件的增加，所得结论也必然增加。
- 而对于非单调逻辑，一个正确的公理加到理论T 中，有时反而会使预先所得到的一些结论失效。

第三章小结

- 本章介绍了命题逻辑的公理化，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容总结如下：
- 介绍了命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍了一个命题逻辑公理系统的构成；

重点掌握公理系统概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（axiom system）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

第三章小结（续1）

- 通过大量定理推演的实例，给出了使用公理系统进行定理证明的过程和方法；
- 此外，还对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做了简要的叙述。