

概率论与数理统计：第七次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的答案必须个人书写完成。

- (1) 设 X_1, X_2, \dots 为独立同分布随机变量序列，且服从 $[2, 3]$ 上的均匀分布。 Y_1, Y_2, \dots 为另一个独立同分布随机变量序列，且服从参数为 $p > 0$ 的几何分布。令

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{Y_1 + \dots + Y_n}.$$

请问当 $n \rightarrow \infty$ 时， Z_n 是否依概率收敛？

- (2) 假设你将在赌场玩轮盘赌，作为专业人士，你首先会验证轮盘的公正性。你的办法如下：轮盘上有 1 到 36 的数字，将轮盘转动 100 次，然后计算轮盘停止在奇数点数出的总次数。如果次数大于 55 次，你就认为轮盘是不公正的。假如轮盘是公正的，估算你根据这个办法做出错误判断的概率是多少？
- (3) 一工厂在第 n 天生产小配件 X_n ，且 X_n 是相互独立的随机变量序列，均值为 5，方差为 9。
- (a) 求 100 天内至少生产 440 件小配件的概率的近似值。
- (b) 给出最大的 n 的近似值，使得 $P(X_1 + \dots + X_n \geq 200 + 5n) \leq 0.05$ 。
- (c) 用 N 表示小配件的总产量首次超过 1000 的天数，计算 $N \geq 220$ 的概率的近似值。
- (4) 设 X_1, \dots 和 Y_1, \dots 是相互独立的随机变量序列，且服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。定义

$$W = \frac{(X_1 + \dots + X_{16}) - (Y_1 + \dots + Y_{16})}{16}.$$

求概率 $P(|W - E[W]| < 0.001)$ 的近似值。

- (5) 设 $\{X_n\}$ 是方差一致有界的随机变量序列，且当 $|k - l| \rightarrow \infty$ 时，一致地有 $Cov(X_k, X_l) \rightarrow 0$ ，证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律。
- (6) 设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，其中 X_n 服从参数为 \sqrt{n} 的柏松分布，试问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律。
- (7) X_n 是独立同分布随机变量序列， $h(x)$ 是有界函数。当 n 很大时，求 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$ 的近似分布。
- (8) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $Var(X_n) = \sigma^2$ 。令

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_n)^2.$$

当 $n \rightarrow \infty$, Z_n 是否依概率收敛？极限是？说明理由。