《高等微积分 1》第四周作业

本次作业在第五周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 (1) 设 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 证明: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

利用 (1) 的结论, 求如下极限.

(2) 给定 $a>0$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$.

(3) 给定 $a>1$ 与正整数 k, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$.

(4) 给定 $0<q<e$ 其中 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(\frac{n}{q})^n}$.

2 给定正实数 a,k. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为

$$x_0=a,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n}),\quad \forall n=0,1,2,...$$

(1) 证明: 对正整数 n, 有 $x_n\geq\sqrt{k}$.

(2) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增的, 即有 $x_1\geq x_2\geq....$

(3) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛.

(4) 求极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

3 给定正实数 a,b. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty},\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为

$$x_0=a,\quad y_0=b,$$

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n),\quad \forall n=0,1,2,...$$

(1) 证明: 对正整数 n, 有 $y_n\geq x_n$.

(2) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增的.

(3) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界.

(4) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛.

(5) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4 (1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的数列, 且极限为 A. 证明: 对任何正整数 n, 有 $a_n \leq A$.

(2) 令 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. 证明: 对正整数 n, 有

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq e \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

5 设 a, b 是给定的实数, 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{如果} x > 0, \\ a\cos x + b\sin x, & \text{如果} x < 0. \end{cases}$$

当 a, b 取哪些值时, 极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在?

6 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

(1) 证明: 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.

(2) 证明: 对于正偶数 k, 如果 $A > 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.