# 第一章
# 命题逻辑的基本概念

计算机系　黄民烈

Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

# 第一章 命题逻辑的基本概念

# 1.1 命题

- 命题

  命题是一个能表达判断并具有确定真值的陈述句。

# 1.1 命题

- 真值

  作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值。

- 真值只有**真**和**假**两种，通常记为***T*** 和***F***。
- 真值为真的命题称为**真命题**，真值为假的命题称为**假命题**。

- 任何命题的真值都是唯一的。

# 命题举例

- 雪是黑的。
- $5 > 6$
- 好美的清华园！
- 请举例说明什么叫命题。
- 难道今天不是星期二吗？
- 我正在说谎话。

# 1.1 命题

- 命题变项

用命题标识符（大写字母）来表示任意命题时，该命题标识符称为命题变项。

# 命题变项举例

- P表示“离散数学的课在六教上”这一命题。
- Q表示“北京是中国首都”这一命题

类比：初等数学中常量和变量的关系

| 命题 | 命题变项 |
| --- | --- |
| 北京是中国首都 | Q |
| 常量 | 变量 |
| 5 | X |

# 1.1 命题

- 简单命题

  无法继续分解的简单陈述句称为简单命题或原子命题。(不包含任何与、或、非一类联结词的命题)

# 1.1 命题

- 复合命题

　　由一个或几个简单命题通过联结词复合所构成的新的命题，称为复合命题，也称分子命题。

# 简单命题和复合命题举例

- 雪是黑的
- 1＋1＝2
- 雪是黑的并且1＋1＝2

“复合命题的真值取决于各简单命题和联结词”

# 1.2 命题联结词及真值表

- 命题联结词 （联接词列表）
  
  命题联结词可将命题联结起来构成复杂的命题，是由已有命题定义新命题的基本方法。
- 命题联结词又可分为一元命题联结词、二元命题联结词和多元命题联结词。
- 常用的命题联结词包括否定词、合取词、析取词、蕴涵词和双条件词。
- 其它联结词还包括异或（不可兼或）、与非和或非等。

# 1.2 命题联结词及真值表

- 否定词　（Negator）
  - 否定词是一元命题联结词。

- 设$P$为一命题，$P$的否定是一个新的命题，记作$\neg P$，读作非$P$。

- 若$P$为$T$，　$\neg P$为$F$；若$P$为$F$，　$\neg P$为$T$。

# 否定词真值表及举例

| P | ¬P |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

例：

P：雪是黑的。　　¬P：雪不是黑的。

## 1. 2 命题联结词及真值表

- 合取词　（Conjunctive）
  - 合取词是二元命题联结词

- 两个命题$P$和$Q$的合取构成一个新的命题，记作$P \wedge Q$。读作$P$、$Q$的合取（或读作$P$与$Q$，$P$且$Q$）。
- 当且仅当$P$、$Q$同时为$T$ 时，　$P \wedge Q$为$T$。　否则，$P \wedge Q$的真值为$F$。

# 合取词真值表及举例

| P | Q | P∧Q |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

P：北京是中国首都。

Q：星期四我不上课。

P∧Q：北京是中国首都并且星期四我不上课。

# 1.2 命题联结词及真值表

- 析取词　（Disjunctive）
  - 析取词是二元命题联结词

- 两个命题$P$和$Q$的析取构成一个新的命题，记作$P \vee Q$。读作$P$、$Q$的析取（也读作$P$或$Q$）。

- 当且仅当$P$、$Q$同时为$F$时，$P \vee Q$为$F$。否则，　$P \vee Q$的真值为$T$。

# 析取词真值表及举例

| P | Q | PVQ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

P：今天刮风。

Q：今天下雨。

PVQ：今天刮风或者下雨。

# 1.2 命题联结词及真值表

- 蕴涵词

  蕴涵词是二元命题联结词

- 两个命题$P$和$Q$用蕴涵词"→"联结起来，构成一个新的命题，记作$P \rightarrow Q$ 。

  读作如果$P$则$Q$ ，或读作$P$蕴涵$Q$ 。

- 当且仅当$P$的真值为$T$，$Q$的真值为$F$ 时，$P \rightarrow Q$的真值为$F$，否则$P \rightarrow Q$的真值为$T$。

# 蕴涵词真值表及举例

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

P：整数n大于3

Q：整数n的平方大于9

P→Q：如果整数n大于3，那么整数n的平方大于9

# 蕴涵关系

- P为假时，蕴涵关系真值为真；

  P：下午下雨

  Q：邓肯将待在房间里

  P→Q：如果下午下雨，邓肯将待在房间里

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| 下午下雨 | 邓肯在房间 | T |
| 下午下雨 | 邓肯不在房间 | F |
| 下午不下雨 | 邓肯在房间 | T |
| 下午不下雨 | 邓肯不在房间 | T |

# 1.2 命题联结词及真值表

- 双条件词
  - 双条件词是二元命题联结词

- 两个命题$P$和$Q$用双条件词“$\leftrightarrow$”联结起来，构成一个新的命题，记作$P\leftrightarrow Q$ 。
- 读作$P$当且仅当$Q$，或读作$P$等价$Q$ 。
- 当$P$和$Q$的真值相同时，$P\leftrightarrow Q$的真值为$T$，否则$P\leftrightarrow Q$的真值为$F$。

# 双条件词真值表及举例

| P | Q | P↔Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

**P：△ABC是等腰三角形**

**Q：△ABC有两个角相等**

**P ↔ Q：△ABC是等腰三角形当且仅当△ABC有两个角相等**

# 1.2 命题联结词及真值表

- 命题的解释

设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在命题$A$中的全部命题变项，给$P_1, P_2, \ldots, P_n$各指定一个真值，称为对命题$A$的一个解释或一个赋值，命题的解释用符号$I$表示。

# 命题的解释举例

举例：

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |

类比：初等代数中的函数赋值

$f(x)=3x+5$

$x=4$可以看作对函数$f(x)$的解释

# 1.2 命题联结词及真值表

- 真值表

在命题公式中， 对于全部命题变项指定不同真值的所有可能的解释，确定了该命题公式的各种真值情形，把所有解释（赋值）下的取值情形列成表，称作命题公式的真值表。

# 1.3 合式公式

Tsinghua University 清華大學

- 合式公式

将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系连接起来的符号串称为合式公式。当使用联结词集{¬，∧，∨，→，↔}中的联结词时，合式公式可归纳定义如下：

# 1.3 合式公式

（1） 简单命题是合式公式；

（2） 若$A$是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

（3） 若$A$、$B$是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式；

（4） 当且仅当经过有限次地使用(1)-(3)所形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式，并简称为公式。

# 1.3 合式公式

- 联结词运算的优先级

　　由命题变项、命题联结词和圆括号组成命题逻辑的基本符号。

- 本课程约定的联结词运算的优先次序为

$$( ),\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

多个同一优先级的联结词，按照从左到右的次序，先出现者先运算。

# 1.4 重言式与代入规则

- 重言式 *(Tautology)*

如果一个命题公式，对于它的任一解释 $I$ 下其对应的真值都为真，则称该命题公式为重言式或永真式。

# 1.4 重言式与代入规则

- 矛盾式

  如果一个命题公式，对于它的任一解释 $I$ 下其对应的真值都为假，则称该命题公式为矛盾式或永假式，也称为不可满足式。

# 1.4 重言式与代入规则

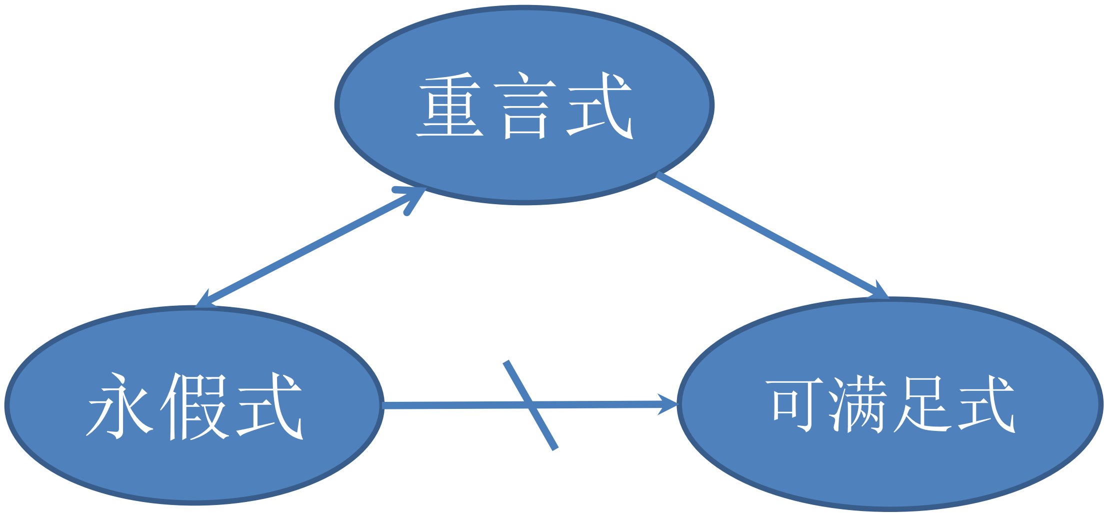
- 可满足式

一个命题公式，如存在某个解释 $I_0$，在 $I_0$ 下该公式真值为真，则称该命题公式是可满足的。

重言式是一类特殊的可满足式。

# 1.4 重言式与代入规则

- 重言式命题、可满足式命题、永假式命题、命题的关系是什么？



# 1.4 重言式与代入规则

- 代入规则

一个重言式，对其中**所有**相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，$A$是一个公式，对$A$使用代入规则得到公式$B$，若$A$是重言式，则$B$也是重言式。

# 1.4 重言式与代入规则

- 代入规则的具体要求为：

  1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题

  2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

# 1.4 重言式与代入规则

1. 公式中被代换的只能是**命题变元**（原子命题）而不能是复合命题。如可用(R∧S)来代换某公式中的P, 记作

,
$$\frac{P}{(R \wedge S)}$$

而不能反过来将公式中的(R∧S)以P代之。

# 1.4 重言式与代入规则

这一要求可以用代数的例子来说明，如对

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

可以$a = cd$代入，仍会保持等式成立。

而若将$a + b$以$cd$代入，结果左端得$(cd)^2$，而右端无法代入$cd$，不能保持等式成立了。

# 1.4 重言式与代入规则

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的**所有同一命题**变项代换同一公式。

公式A经代入规则可得任一公式, 而仅当A是重言式时, 代入后重言式的性质方得保持。

如 $A = P \vee \neg P$, 作代入 $\dfrac{P}{\neg Q}$

得 $B = \neg Q \vee \neg\neg Q$ 仍是重言式。

# 1.4 重言式与代入规则

若将¬P以Q代之得B = P∨Q (这不是代入，违反了规定2) 已不是重言式。

在第三章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用 。

# 1.4 重言式与代入规则

使用代入规则证明重言式。

**例1：判断(R∨S) ∨¬(R∨S)为重言式。**

P∨¬P为重言式, 作代入

$$\frac{P}{(R \vee S)}$$

依据代入规则,便得(R∨S) ∨¬(R∨S)。

这公式必是重言式。

# 1.4 重言式与代入规则

**例2：判断 $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$ 为重言式.**

不难验证$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$是重言式,

# 1.4 重言式与代入规则

作代入

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知

$$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q))\rightarrow(P\vee Q)$$

是重言式。

# 1.5 命题形式化

- 注意掌握用不同的方式表示同一命题公式的方法

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

- 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题形式化中的问题

# 1.5 命题形式化

思考题1

IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句

记 A = IF P THEN Q ELSE R

试将其形式化（用所学的联接词表示）

进一步可尝试给出两种不同的表示（彼此等值）

思考题2

给定真值表，如何写出对应的命题公式。