统计物理作业五

1. 求弱简并理想费米(玻色)气体的压强和熵。

提示：$S=\int \frac{C_V}{T}dT+S_0(V)$。当$n\lambda^3<<1$时弱简并理想费米(玻色)气体趋于经典理想气体，据此可以确定函数 $S_0(V)$。

答：

$$p = nkT\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right], S=Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

弱简并理想费米(玻色)气体在体积V内,能量处于$\varepsilon\to\varepsilon+d\varepsilon$范围内粒子的可能微观状态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

因此系统的粒子总数和能量分别为

$$N = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon \quad U = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon$$

当满足弱简并条件时$e^{-\alpha}\ll 1$（$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}\approx\varepsilon^{-\alpha-\beta\varepsilon}\left(1\mp\varepsilon^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)$），因此关于能量和粒子数表达式展开到一阶有

$$\begin{aligned}
N &= g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon & U &= g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon\\
&\approx g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}}e^{-\alpha}\right] & &\approx g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}}e^{-\alpha}\right]\\
&= g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}Ve^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}}e^{-\alpha}\right] & &= \frac{3}{2}g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}VkTe^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}}e^{-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

由于$e^{-\alpha}\ll 1$，采用零级近似可以得到（系统的自由变量选择位 n，V，T）

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \quad U = \frac{3}{2}NkT\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}}\frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

同样系统的巨配分函数的对数可以近似为

$$\begin{aligned}
\ln\Xi &= \sum_l \mp\omega_l\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)\approx\mp g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\varepsilon^{1/2}\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)d\varepsilon\\
&= \mp g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\left\{\left[\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)\right]_0^\infty\mp\beta\int_0^\infty\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3\left(e^{\alpha+\beta\varepsilon}\mp 1\right)}d\varepsilon\right\}\\
&= \frac{2U}{3kT} = nV\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}}\frac{n}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

所以有

$$P = \frac{3U}{2V} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi = nkT\left[1 \pm \frac{1}{2^{5/2}g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

$$S = k\left(\ln \Xi + \alpha N + \beta U\right) = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

根据 U 的表达式可以得到定容热容为

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk\left[1 \mp \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

利用玻尔玻尔兹曼统计得到经典统计熵为

$$S' = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right\} = \int \frac{C_{V0}}{T}dT + S_0, C_{V0} = \frac{3}{2}Nk$$

对于玻色和费米系统，热容将会发生变化，熵可以表示为

$$S = S' + \int \frac{C_V - C_{V0}}{T}dT = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

2. 试证明，在热力学极限下均匀的二维理想玻色气体不会发生 Bose－Einstein 凝聚现象。

提示：在热力学极限下理想玻色气体的凝聚温度 Tc 由积分 $\int \frac{D(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = n$ 确定。对于二维气体上述积分发散，这意味着在有限温度下二维理想玻色气体的化学势不可能趋于 0，因此不存在玻色凝聚现象。

二维情况下，电子能量处于 $\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$ 范围内的量子态数目可以表示为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi Apdp}{h^2} = \frac{2\pi mAd\varepsilon}{h^2}$$

发生 Bose-Einstein 凝聚现象是由于系统的化学势随着温度的降低而升高，如果其化学势可以升高到趋于-0 的情况，那么处于基态的粒子数将与总粒子数可比，即产生凝聚现象。如果存在凝聚现象，那么临界温度可以由下式确定(化学势为-0)

$$\int_0^\infty \frac{D(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = N$$ 即需要满足

$$\frac{2\pi m}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1}dx = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}dx = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

因此不存在使得化学势趋于-0 的有限温度，所以二维系统不会发生 Bose-Einstein 凝聚现象。

3. 假设自由电子在二维平面上运用，密度为 n。试求 0K 时二维电子气体的费米能级、内能和简并压。

答：$\mu(0) = \frac{h^2}{4\pi m}n$， $U = \frac{1}{2}N\mu(0)$， $p = \frac{1}{2}n\mu(0)$

二维情况下，电子能量处于$\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$范围内的量子态数目可以表示为（计及电子自旋贡献）

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi Apdp}{h^2} = \frac{4\pi mAd\varepsilon}{h^2}$$

在温度 T 下，能量为 ε 的量子态的平均电子数满足费米分布

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}$$

因此电子数可以表示为$\frac{4\pi mA}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} d\varepsilon = N$

0K 时能量低于化学势的能级为满态，而高于化学势的能级为空态，因此有

$$\frac{4\pi mA}{h^2}\mu(0) = N \Rightarrow \mu(0) = \frac{h^2}{4\pi m} n$$

内能为$U(0) = \frac{4\pi mA}{h^2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} d\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{4\pi mA}{h^2}\mu(0)^2 = \frac{1}{2}N\mu(0)$

简并压为

$$P = -\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = -\sum_l a_l \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{2mA}(2\pi\hbar)^2\left(n_x^{\ 2} + n_y^{\ 2}\right)\right)$$

$$= \sum_l a_l \frac{1}{2mA^2}(2\pi\hbar)^2\left(n_x^{\ 2} + n_y^{\ 2}\right) = \frac{U}{A} = \frac{1}{2}n\mu(0)$$

4. 试证明空窖辐射的辐射通量密度 J_u 为 $J_u = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60\hbar^3 c^2}$。

提示：计算单位时间内碰到单位面积器壁上的光子所携带的能量。

对于空窖辐射（开系）而言不存在粒子数守恒，因此光子的分布率为

$$f = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}, \varepsilon = \hbar\omega = cp, p = \hbar k$$

因此空窖辐射的通量密度为（考虑电子自旋简并度）

$$J_u = \frac{2}{h^3}\int \frac{\hbar\omega c\cos\theta p^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$= \frac{2c}{(2\pi c)^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60\hbar^3 c^2}$$

5. 写出二维空间中平衡辐射的普朗克公式，并据此求平均总光数、内能和辐射通量密度。

答：普朗克公式：$\frac{A}{\pi c^2}\frac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$；平均总光子数：$\overline{N} = \frac{\pi A}{6c^2\hbar^2}k^2T^2$；

内能：$U=\dfrac{2.404A}{\pi c^2\hbar^2}k^3T^3$；辐射能量密度：$J_u=\dfrac{1.202}{\pi^2 c\hbar^2}k^3T^3$

二维情况下的态密度可以表示为

$$D(\omega)d\omega=\frac{2Apdp\int_0^{2\pi}d\theta}{h^2}=\frac{A\omega d\omega}{\pi c^2}$$

因此可以得到普朗克公式：$\dfrac{A}{\pi c^2}\dfrac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$

平均总光子数为

$$\bar{N}=\frac{A}{\pi c^2}\int_0^\infty\frac{\omega d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}=\frac{Ak^2T^2}{\pi\hbar^2c^2}\int_0^\infty\frac{xdx}{e^x-1}=\frac{\pi Ak^2T^2}{6\hbar^2c^2}$$

$$U=\frac{A}{\pi c^2}\int_0^\infty\frac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}=\frac{Ak^3T^3}{\pi\hbar^2c^2}\int_0^\infty\frac{xdx}{e^x-1}=\frac{2.404Ak^3T^3}{\pi\hbar^2c^2}$$

$$\begin{aligned}J_u&=\frac{2}{h^2}\int\frac{\hbar\omega c\cos\theta pdpd\theta}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\\&=\frac{\hbar}{2c\pi^2}\int_0^\infty\frac{\omega^2d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta\\&=\frac{k^3T^3}{c\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty\frac{x^2dx}{e^x-1}=\frac{2.404k^3T^3}{c\pi^2\hbar^2}\end{aligned}$$

6. 试求在绝对零度下电子气体中电子的平均速率$\bar{v}$。（答：$\bar{v}=3p_0/4m$。P_0是费密动量）

电子动量处于$p\to p+dp$范围内的量子态数目可以表示为（计及电子自旋贡献）

$$D(p)dp=\frac{8\pi Vp^2dp}{h^3}\Rightarrow D(v)dv=\frac{8\pi m^3Vv^2dv}{h^3}$$

在温度 T 下，能量为 ε 的量子态的平均电子数满足费米分布

$$f=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1},\ \varepsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2}mv^2$$

因此 0K 电子平均速率可以表示为

$$\bar{v}=\frac{8\pi m^3V}{Nh^3}\int_0^{v_0}\frac{v^3dv}{e^{\frac{mv^2/2-\mu}{kT}}+1}=\frac{8\pi m^3V}{Nh^3}\frac{v_0^4}{4}$$

$$N=\frac{8\pi m^3V}{h^3}\int_0^{v_0}\frac{v^2dv}{e^{\frac{mv^2/2-\mu}{kT}}+1}=\frac{8\pi m^3V}{h^3}\frac{v_0^3}{3}$$

所以有$\bar{v}=\dfrac{3}{4}v_0=\dfrac{3p_0}{4m}$

7. 在固态时，硒原子和碲原子均排成平行的长链，请证明对于这些物质在低温时的热容量 C_V 与温度 T 成正比。在固态时，石墨中的 C 原子按照平面排列，请证明在低温下其 C_V 与 T^2 成正比。

由于硒原子和碲原子均排成平行的长链，可以近似认为系统为一维的。由 N 个原子组成的系统，其振动自由度为 N。

一维和二维情况下，采用准连续近似可以求得态密度分别为

$$D(\omega)d\omega = \frac{2Ldp}{h} = \frac{Ld\omega}{\pi c_l} = B_1 d\omega \qquad D(\omega)d\omega = \frac{2\pi Apdp}{h^2} = \frac{A\omega d\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{c_l^{\,2}} + \frac{1}{c_t^{\,2}}\right) = B_2\omega d\omega$$

由此可以得到一维和二维情况下的德拜频率分别为

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega = \int_0^{\omega_D} B_1 d\omega = N \Rightarrow \omega_D = \frac{N}{B_1} \qquad \int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega = \int_0^{\omega_D} B_2\omega d\omega = 2N \Rightarrow \omega_D = \frac{4N}{B_2}$$

低温下系统的内能为

$$U = U_0 + \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega D(\omega)d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = U_0 + \frac{B_1 k^2 T^2}{\hbar}\int_0^{x_D}\frac{xdx}{e^x - 1} \approx U_0 + \frac{B_1 k^2 T^2}{\hbar}\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x - 1} = U_0 + \frac{B_1\pi^2 k^2 T^2}{6\hbar}$$

$$U = U_0 + \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega D(\omega)d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = U_0 + \frac{B_2 k^3 T^3}{\hbar^2}\int_0^{x_D}\frac{x^2dx}{e^x - 1} \approx U_0 + \frac{B_2 k^3 T^3}{\hbar^2}\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{e^x - 1} = U_0 + \frac{2.404 B_2 k^3 T^3}{\hbar^2}$$

因此一维系统和二维系统低温热容分别为

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{B_1\pi^2 k^2 T}{3\hbar} \propto T \qquad C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3\times 2.404 B_2 k^3 T^2}{\hbar^2} \propto T^2$$

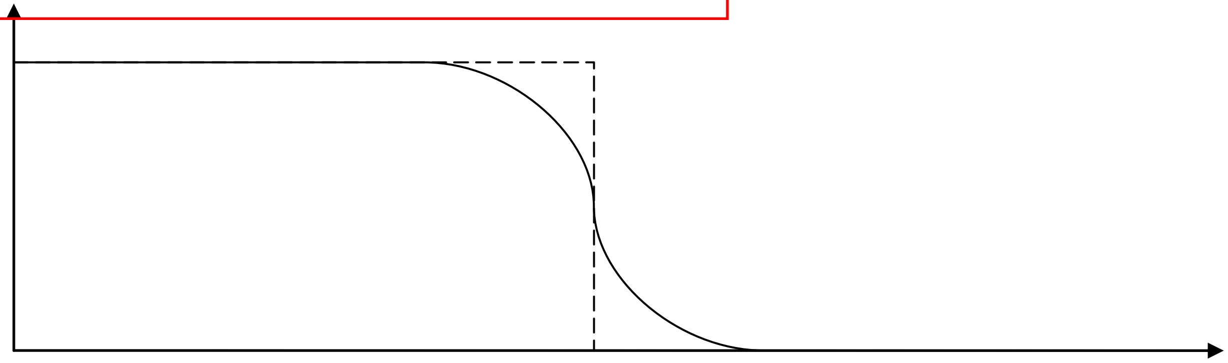
8. 试求在低温下金属中自由电子气体的巨配分函数的对数，从而求出电子气体的压强，内能和熵。

提示：积分

$$\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\ln(1+e^{-\alpha-\beta\varepsilon})d\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(1+e^{-\alpha-\beta\varepsilon})\Big|_0^\infty - \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon$$

答：$\ln\Xi = \dfrac{16\pi V}{15h^3}\left(\dfrac{2m}{\beta}\right)^{3/2}(-\alpha)^{5/2}\left(1+\dfrac{5\pi^2}{8\alpha^2}\right)$。



三维空间的态密度为（计及电子自旋简并度 2）

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

因此准连续近似下存在

$$\ln \Xi = \sum_l \omega_l \ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right) = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right) d\varepsilon$$

$$= 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon})\Big|_0^\infty - \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} + 1} d\varepsilon\right]$$

$$= \frac{8\pi V\beta}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} + 1} d\varepsilon = \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{\alpha+x} + 1} dx$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_\alpha^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy = \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy - \int_0^\alpha \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy\right]$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy + \int_0^{-\alpha} \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^{-y} + 1} dy\right]$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy - \int_0^{-\alpha} \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy - \int_0^{-\alpha} (y-\alpha)^{3/2} dy\right]$$

$$\approx \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy - \int_0^\infty \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^y + 1} dy + \frac{2}{5}(-\alpha)^{5/2}\right]$$

$$\approx \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[3(-\alpha)^{1/2}\int_0^\infty \frac{y}{e^y + 1} dy + \frac{2}{5}(-\alpha)^{5/2}\right]$$

$$= \frac{16\pi V}{15h^3}(\frac{2m}{\beta})^{3/2}(-\alpha)^{5/2}(1 + \frac{5\pi^2}{8\alpha^2})$$

因此有内能，压强及熵为

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln \Xi = \frac{3}{2\beta}\ln \Xi \qquad P = \frac{2U}{3V} = \frac{\ln \Xi}{\beta V}$$

$$\alpha\bar{N} = -\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln \Xi = \frac{1}{2}\frac{16\pi V}{15h^3}(\frac{2m}{\beta})^{3/2}(-\alpha)^{5/2}(5 + \frac{5\pi^2}{8\alpha^2})$$

$$S = k\left(\ln \Xi + \alpha\bar{N} + \beta U\right) = \frac{5}{2}k\ln \Xi + k\alpha\bar{N}$$