概率论与数理统计：第七次作业部分题目参考解答

第三题（c）：事件 $N \geqslant 220$，对应着前 219 天生产的配件数小于 1000，即 $\{X_1 + \cdots + X_{219} < 1000\}$. 所以

$$P(N \geqslant 220) = P(X_1 + \cdots + X_{219} < 1000) \approx \Phi(\frac{1000 - 5 * 219}{\sqrt{219 * 9}}).$$

第六题：参数为 $\sqrt{n}$ 的柏松分布的方差为 $\sqrt{n}$, 所以

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) < \frac{1}{n^2}(n\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad , n \to \infty.$$

由马尔可夫大数定律知 $\{X_n\}$ 满足大数定律。

第七题：随机变量序列 $h(X_i)$ 独立同分布，期望与方差均存在。满足中心极限定理记 $E(h(X_i)) = a$, $Var(h(X_i)) = b^2$, 则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h(X_i) - na}{b\sqrt{n}} \tilde{\sim} N(0,1)$$

所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \tilde{\sim} N(a, \frac{b^2}{n}).$$

第八题：

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_k - Y_n)^2 = -Y_n^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k^2.$$

X_n 服从大数定律，即有 $Y_n \to E(X)$; X_i^2 服从大数定律，即有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to E(X^2)$. 于是

$$Z_n \to -(E(X))^2 + E(X^2) = Var(X) = \sigma^2.$$