《高等微积分 1》第五周习题课材料

1 设 A, B 是非空有界的实数集合. 定义

$$A+B=\{x+y|x\in A, y\in B\},\quad AB=\{xy|x\in A, y\in B\}.$$

(1) 证明:

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B,\quad \sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

(2) 设 A, B 都是由非负实数构成的集合. 证明:

$$\inf(AB)=\inf A\cdot\inf B,\quad \sup(AB)=\sup A\cdot\sup B.$$

2 (第一周作业题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 证明:

(1) 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{A}$;

(2) 对于正偶数 k, 如果 $A>0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{A}$.

3 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

(2)(第二周作业题) 给定正整数 k 及实数 $a_0, ..., a_{k-1}$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0}.$$

4 (1) 给定正整数 k 及实数 $a>1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$.

(2) 给定正数 α, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$.

5 (1)(第二周作业题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 给定 $q>e$ 其中 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{q})^n}{n!}$.

6 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2})$.

$1-\frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{3\times 4}$

(2) 设 $a_1, ..., a_m$ 是给定的正数, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+...+a_m^{-n})^{-1/n}.$$

7 给定正数 x. 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^1}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)$ 存在.

e^x

8 给定正整数 $k \geq 2$ 与实数 $a > 0$. 定义数列为:

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出该极限.

$y=\frac{k-1}{k}y+\frac{a}{ky^{k-1}}$

$y=\frac{a}{ky^{k-1}}$

$y=\sqrt[k]{a}$

9 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}.$$

1

(1) 令集 $C=A+B$.

$\forall \{c_n\}\in C$, $\{a_n\}\in A$, $\{b_n\}\in B$,

且 $c_n \to \inf C$ $\quad a_n \to \inf A$ $\quad b_n \to \inf B$.

(i) 考虑 c_n, 由 $c_n \in C$ 知

$c_n \geqslant \inf C$ 又 $\exists\, a_n' \in A,\ b_n' \in B$ st $c_n = a_n' + b_n'$

其中 $a_n' \geqslant \inf A$

$b_n' \geqslant \inf B$

$\therefore\ c_n = a_n' + b_n' \geqslant \inf A + \inf B$.

由 $c_n \to \inf C$, 由保号性, $\inf C \geqslant \inf A + \inf B$.

(ii) 考虑 a_n, b_n

令 $c_n' = a_n + b_n$, 则 $c_n' \in C$ $\therefore c_n' \geqslant \inf C$

又由保号性: $\inf A + \inf B = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n') \geqslant \inf C$

故 $\inf C \leqslant \inf A + \inf B \leqslant \inf C$ 证毕

(2) 完全一样

补充: 复习 inf、sup 定义

由定义构造数列

四则运算

2.

2 (第一周作业题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 证明:

(1) 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$;

(2) 对于正偶数 k, 如果 $A > 0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

$\left(\frac{A}{a_n}\right)^k \le 1+\varepsilon$ 同下

$\left(\frac{a_n}{A}\right)^k \le 1+\varepsilon$

$\left(\frac{a_n}{A}\right) \le (1+\varepsilon)^{\frac{1}{k}} \le 1+\frac{\varepsilon}{k}$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$

(1) 作差:

由 $a_n - A = a_n^{\frac{k}{k}} - A^{\frac{k}{k}}$

$$= \left(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right)\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_n^{\frac{i}{k}} A^{\frac{k-1-i}{k}}\right) \qquad (*)$$

对足够大的N (令 $\varepsilon = \frac{A}{2}$), a_n 与 A 同号, (*)式右边齐次共(k-1)次方, 故若 $A<0$, 提出 $(-1)^{k-1} > 0$ 即可.

从而 $\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = \left|\dfrac{a_n - A}{(\sum \_\_\_)}\right|$

$i=0$

$$< \left|\frac{a_n - A}{A^{1-\frac{1}{k}}}\right|$$

$\forall \varepsilon$.

令 $\varepsilon' = A^{1-\frac{1}{k}}\varepsilon$, $\exists N$, st $|a_n - A| < \varepsilon'$

即 $|a_n - A| < A^{1-\frac{1}{k}}\varepsilon$

从而 $\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| < \varepsilon$

(2) 同理

3.

3 (1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$. $n=(1+\varepsilon_n)^n \geq \frac{n^2}{4}\varepsilon_n^2 \Rightarrow \varepsilon_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$

(2)(第二周作业题) 给定正整数 k 及实数 $a_0,\dots,a_{k-1}$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\dots+a_0}.\quad \lim = (\sqrt[n]{n})^k$$

(1) 猜：极限为1.

法一 (i) 比如反证，若 $\lim\sqrt[n]{n}=1+\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0.)$ 会发生什么

则当n足够大，$\sqrt[n]{n}>1+\frac{\varepsilon_0}{2}$

$$n>\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^n>1+\frac{\varepsilon_0}{2}n+C_n^2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 \quad \text{必有矛盾.}$$

法二 (ii) $n=(1+\varepsilon_n)^n=1+n\varepsilon_n+C_n^2\varepsilon_n^2+\cdots \geq \frac{n^2}{4}\varepsilon_n^2$ (一个n，一个ε_n)

$\therefore \varepsilon_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ $\therefore n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$.

$\therefore \sqrt[n]{n}=1+\varepsilon_n\to 1.$

(2) $\sqrt[n]{\frac{n^k}{n^k}+a_{k-1}\frac{n^{k-1}}{n^k}+\dots+\frac{a_0}{n^k}}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^k \longrightarrow 1.$

$\uparrow$ 严格化 (ε—N 语言) $\qquad \uparrow$ 乘法

$1+\alpha_1\frac{1}{n}+\alpha_2\frac{1}{n^2}+\cdots$

$<1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots^{(k个)}$

$<1+n\varepsilon$ (n够大)

$<(1+\varepsilon)^n$

4 (1) 给定正整数 k 及实数 $a>1$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$. $\longrightarrow 0$.

(2) 给定正数 α, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$.

(1) 令 $a=1+\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$ 当n足够大

则 $$\frac{n^k}{(1+\varepsilon_0)^n}=\frac{n^k}{1+C_n^1\varepsilon_0+\dots+C_n^k\varepsilon_0^k+C_n^{k+1}\varepsilon_0^{k+1}+\cdots}$$

$$<\frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon_0^{k+1}}=\frac{(k+1)!}{\varepsilon_0^{k+1}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{n}{n-i}\right)\frac{1}{n}$$

2^k

(2) $$\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{\frac{2}{\alpha}\ln n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}<\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}=\frac{2}{\alpha}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cdots n^{\alpha}$

$|a_n| < |a_m|(q+\varepsilon)^{n-m}$

5 (1)(第二周作业题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 给定 $q>e$ 其中 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{q})^n}{n!}$.

$\frac{(\frac{n+1}{q})^{n+1}}{n+1}$

a_n

(1) 由保号性:

n够大时 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q+\varepsilon_0$ （令 $\varepsilon_0 < 1-q$）

则 $|a_{n+1}| < (q+\varepsilon_0)a_n < \cdots (q+\varepsilon_0)^{n-N_0}|a_{N_0}|$

$\therefore \lim a_{n+1} \to 0$

(2) 令 $a_n = \frac{(\frac{n}{q})^n}{n!}$

则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{q^{n+1}}}{(n+1)!}}{\frac{\frac{n^n}{q^n}}{n!}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{1}{q}$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{q} < \frac{e}{q} < 1$

6 (1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2})$.

(2) 设 $a_1,\ldots,a_m$ 是给定的正数, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+\ldots+a_m^{-n})^{-1/n}.$$

$1-\frac{1}{n}$

猜 0.

(1)

$k\geq 2$ $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$\therefore \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n}\left(1+1-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n-1}\right)$

$<\frac{2}{n}\longrightarrow 0$

(2) 不妨设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_m$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\cdots+\frac{1}{a_m^n}}}$$

a_1 a_1

$$=\frac{a_1}{\sqrt[n]{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_m}\right)^n}}\longrightarrow a_1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_k\}$$

x<1 易错

7 给定正数 x. 证明: 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{x^1}{1!}+\dots+}_{a_n}\underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{b_n}\right)$ 存在. 不用找常数

则 则 $a_n = \sum_{m=0}^{n} b_m$

用柯西收敛判别法: $(m<n)$ 当 $m>N, n>N$

$$\boxed{\frac{x}{1}\ \frac{x}{2}\ \frac{x}{3}\cdots\frac{x}{N}}\ \frac{x}{N+1}$$

$$a_n-a_m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

令 $\frac{x}{N+1}=\alpha$

$$=\frac{x^N}{N!}\left(\underbrace{\left(\frac{x}{N+1}\right)\left(\frac{x}{N+2}\right)\cdots}_{m-N\text{个}}+\_\_\_+\underbrace{\_\_\_}_{n-N\text{个}}\right)$$

$$<\frac{x^N}{N!}\left(\alpha^{m-N}+\alpha^{m-N+1}+\dots+\dots\right)$$

$$=A\cdot\alpha^{m-N}\cdot\frac{1}{1-\alpha}$$

令 m 够大即可 (N_1)

9 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}.$$

$\underline{A}$

$\forall \varepsilon.\quad \exists N_1.\quad |a_n - A| < \varepsilon_1$

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}+a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n} - A\right|$$

$$=\left|\frac{\alpha}{n} + \frac{\Sigma(a_{N_i} - A)}{n}\right|$$

$$<\left|\frac{\alpha}{n}\right| + \left|\frac{(n-N)\varepsilon_1}{n}\right|$$

$$<\left|\frac{\alpha}{n}\right| + \varepsilon_1$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \frac{\varepsilon}{2}$$

8 给定正整数 $k \geq 2$ 与实数 $a > 0$. 定义数列为:

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出该极限.

$y = \frac{k-}{}$

$x_{n+1} > x_n$

$\Leftrightarrow \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} > x_n$

$\Leftrightarrow \frac{a}{k x_n^{k-1}} - \frac{1}{k} x_n > 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{x_n^{k-1}} - x_n > 0 \quad (x_n > 0)$

$\Leftrightarrow x_n^k < a \quad \Leftrightarrow x_n < \sqrt[k]{a}$

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} = \overbrace{\frac{1}{k} x_n + \cdots + \frac{1}{k} x_n}^{k-1\text{个}} + \frac{a}{k x_n^{k-1}}$$

$$\geq k \sqrt[k]{\frac{1}{k^k} \cdot a} = \sqrt[k]{a}$$

✓

补充：