

## 第六次作业部分参考解答

第四题:  $X$  的特征函数为  $\varphi_X(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$ ,  $\frac{\lambda X - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$  的特征函数为  $\varphi(t) = e^{-i\sqrt{\alpha}t}(1 - \frac{i\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}t}{\lambda})^{-\alpha}$ .

$$\log \varphi(t) = -i\sqrt{\alpha}t - \alpha \log(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}t) = -i\sqrt{\alpha}t - \alpha(0 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}} + \frac{t^2}{2\alpha} + o(\frac{1}{\alpha})) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

所以  $\varphi(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ 。所以依分布收敛到标准正态分布。

第六题:

1)  $\Phi(n)$  随着  $n$  的变化可以是奇数可以是偶数。可以取到任意大的  $m$  和  $n$  使得  $\Phi(m)$  是奇数  $\Phi(n)$  是偶数, 对于这样的  $m, n$ ,  $|Y_m - Y_n| = 2|X|$ , 可以大率大于 1, 所以  $Y_n$  不依概率收敛。

2) 标准正态分布左右对称性, 所以  $Y_n$  都服从标准正态分布, 于是  $Y_n$  依分布收敛。

第七题: 考虑这样的一个情况,  $X$  是标准正态分布,  $X_n$  是标准正态分布,  $Y_n$  也是标准正态分布,  $X_n$  与  $Y_n$  相互独立。我们有  $X_n$  依分布收敛到  $X$ ,  $Y_n$  依分布收敛到  $Y = X$ , 而  $X_n + Y_n \sim N(0, 2)$ ,  $X + Y = 2X \sim N(0, 4)$ 。