概率论与数理统计：第十次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 $x_1, \dots, x_n$ 是以下总体的样本，求未知参数的最大似然估计：
 (a) $p(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, $\theta > 0$;
 (b) $p(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$, $\theta_1 < x < \theta_2$.
 (c) $P(X = x; p) = \frac{\binom{2}{x} p^x (1-p)^{2-x}}{1-(1-p)^2}$, $x = 1, 2$.

(2) 设 $X \sim Exp(\frac{1}{\lambda})$, $x_1, \dots, x_n$ 是其样本。
 (a) 请说明 $\bar{x}$ 是 λ 的矩估计也是最大似然估计，并且是具有相合性的无偏估计。
 (b) 寻找形如 $a\bar{x}$ 的统计估计量，它在均方差准则下优于 $\bar{x}$.

(3) 设 $x_1, \dots, x_m$ 和 $y_1, \dots, y_n$ 分别为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两个相互独立的样本。求 (μ_1, μ_2, σ^2) 的最大似然估计。

(4) 设总体的密度函数为 $p(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$, $x_1, \dots, x_n$ 是其样本。
 (a) $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$ 的最大似然估计。并说明其是无偏估计。
 (b) 求 θ 的费希尔信息量。
 (c) 说明 $g(\theta)$ 的最大似然估计是有效估计。

(5) 设 $x_1, \dots, x_n$ 是来自伽马分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 的样本，$\alpha > 0$ 已知。
 (a) 求 λ 的费希尔信息量。
 (b) 说明 $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。
 (c) 说明 $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)$ 的一致最小方差无偏估计（UMVUE）。

(6) 设 $x_1, \dots, x_n$ 以下总体的样本：

$$P(X=-1) = \frac{1-\theta}{2},\ P(X=0) = \frac{1}{2},\ P(X=1) = \frac{\theta}{2}.$$

 (a) 求 θ 的最大似然估计和矩估计。
 (b) 计算 θ 的无偏估计的 $C-R$ 下界。
 (c) 当 n 很大时，给出 θ 的最大似然估计的近似分布。

(7) 设 $x_1, \dots, x_n$ 是来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的样本。假设 θ 的先验分布为 Pareto 分布，密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^\beta},\ \theta > \theta_0,$$

其中 β 和 θ_0 均是已知常数。求 θ 的贝叶斯估计。

(8) 设 $x_1, \dots, x_n$ 是以下总体的样本：

$$p(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1.$$

假如 θ 的先验分布为指数分布 $Exp(\lambda)$，λ 已知。求 θ 的贝叶斯分布。