第三次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 你一次又一次地写一个电脑程序，每写一次都有一个成功的概率 p. 假定每次成功与否与前面的历史记录相互独立。令 X 是你一直到成功为止所写的次数。求 X 的分布列，数学期望和方差。

(2) 设随机变量 X 服从二项分布 $b(2,p)$, 随机变量 Y 服从二项分布 $b(4,p)$. 若 $P(X \geqslant 1) = \frac{8}{9}$, 求 $P(Y \geqslant 2)$.

(3) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$, 求随机变量 $Y = \frac{1}{X+1}$ 的数学期望。

(4) 求具有以下密度函数的随机变量的数学期望及方差：

(a) $p_1(x) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+4x+4}, x \in \mathbb{R}$, 其中 $C > 0$ 为某确定常数.

(b)

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{0.5^2}{\int_0^\infty x e^{-x} dx} x e^{-0.5x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(c)

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^\infty x e^{-x} dx}{(\int_0^\infty x^{0.1} e^{-x} dx)(\int_0^\infty x^{-0.1} e^{-x} dx)} x^{0.1}(1-x)^{-0.1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(5) 随机变量 X 服从区间 $[-1/2, 1/2]$ 上的均匀分布，求

(a) $P(|X| < 0.25)$.

(b) 随机变量 $Y = X^2$ 的密度函数。

(c) 随机变量 $Z = \tan(\pi X)$ 的密度函数。

(6) 某城市的气温为正态随机变量，其均值和标准差都是 10 度。请问在某一时刻气温不高于 30 度的概率是?。

(7) 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟算）服从指数分布：

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。他一个月要到 5 次银行。求他至少有两次没有得到服务的概率。

(8) 某烟鬼在左右口袋各放一盒火柴，各有 n 根火柴。每次吸烟时，他随机地从左右口袋掏出火柴盒点烟（消耗一根）。当这烟鬼第一次从口袋里掏出一个空火柴盒时，另外一个火柴盒里还剩火柴数量的分布列是?

(9) 传送器发出的信号是 0-1 信号。发出 1 的概率是 p，发出 0 的概率为 $1-p$, 并且每次发送的信号相互独立。现假设在一定时间内发出信号的个数服从柏松分布，其参数为 λ. 请寻找在同一段时间内发出信号 1 的个数所服从的分布类型。