1. 自由粒子在边长为 L 的方盒内运动，其动量的可能值为

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x \qquad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$p_y = \frac{2\pi\hbar}{L} n_y \qquad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_z \qquad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

试由此证明，在体积 $V = L^3$ 内，在 $p_x$到$p_x + dp_x$， $p_y$到$p_y + dp_y$， $p_z$到$p_z + dp_z$ 的动量范围内，自由粒子的量子态数为

$$\frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3}。$$

$$d\Omega = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 dp_x dp_y dp_z = \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

2. 试根据题 1 结果,证明在体积 $V$ 内,在 $\varepsilon$ 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内,三维自由粒子的量子态数为

$$D(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon。$$

提示：将动量空间直角坐标转化为球极坐标（体积元为 $p^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi$），并利用自由粒子的能量公式 $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ 。

$$\begin{aligned} D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon &= \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{V}{h^3} p^2 dp \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon \end{aligned}$$

3. 试证明,对于一维自由粒子,在长度 L 内，在 $\varepsilon$ 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内,量子态数为

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2L}{h} \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon$$

动量为矢量，在一维情况下，其方向可以为正可以为负，结合 $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$，可知能量的简并度为 2。所以

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{L}{h}\mathrm{d}p = \frac{2L}{h} \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon$$

4. 在极端相对论情形下，粒子的能量动量关系为 $\varepsilon = cp$。试求在体积 V 内，在 $\varepsilon$ 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内三维粒子的量子态数。

（答：$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon$）

$$
\begin{aligned}
D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon &= \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{V}{h^3} p^2 dp \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}
$$

5. 刚性转子的能级 $\varepsilon = \dfrac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$ 是非均匀分布的,能级间距随着量子数 $J$ 的增大而增大。当 $J$ 很大时，能级可以看作是准连续的,可以当作经典转子处理。证明，此时转子的态密度 $D(\varepsilon)$为常数。

$\varepsilon_{J+1} - \varepsilon_J = \dfrac{2(J+1)\hbar^2}{2I}$，$\dfrac{\varepsilon_{J+1} - \varepsilon_J}{\varepsilon_J} = \dfrac{2}{J}$

当 $J \to \infty, \dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \to 0$，即能级可以近似认为是准连续的

量子数为 $J$ 的能级简并度为 $2J+1$，因此能量处于 $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ { $J$ 处于 $(J, J+dJ)$ } 间的转子数目可以表示为：

$dn = (2J+1)dJ = D(\varepsilon)d\varepsilon$

且根据 $\varepsilon = \dfrac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$，有 $d\varepsilon = \dfrac{(2J+1)\hbar^2}{2I} dJ$

所以 $D(\varepsilon) = \dfrac{2I}{\hbar^2}$

解法二：当 $J$ 很大时，能级可以看作是准连续的,可以当作经典转子处理。能量的表达式可以采用经典转子的能量表示 $\varepsilon = \dfrac{1}{2I}\left(p_\theta{}^2 + \dfrac{1}{\sin^2\theta} p_\varphi{}^2\right) = \dfrac{p^2}{2I}$

具体步骤希望大家自己完成一下，加深理解。因为你们采用的都是上面的方法，所以采用经典方法如何完成需要你们自己探索一下。

经典转子的自由度为 2，其共轭的广义坐标和广义动量为{ $(\theta, p_\theta)$，$(\varphi, p_\varphi)$ }。坐标空间体积微元为 $\sin\theta d\theta d\varphi$，动量空间微元可以采用极坐标表示 $pdpd\phi$，因此

能量处于$(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$之间的转子数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{pdp\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\phi}{h^2}=\frac{2pdp}{\hbar^2}$$

又$d\varepsilon=\dfrac{2pdp}{2I}$，所以有$D(\varepsilon)=\dfrac{2I}{\hbar^2}$

另外对于自由度为$n$的粒子，其能量动量关系为$\varepsilon=\alpha p^s$，$\alpha$为常数，$s$为正整数，

证明$D(\varepsilon)$正比于$\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$

对于自由度为 $n$ 的例子，能量处于$(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$之间的粒子动量包含在 $n$ 维动量空

间模长处于$(p,p+dp)$的球壳中。

因此其间的粒子数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{p^{n-1}dpV\int_0^{\pi}d\theta_1\int_0^{\pi}d\theta_{n-1}\cdots\int_0^{2\pi}d\varphi}{h^n}=\beta p^{n-1}dp$$

又$d\varepsilon=s\alpha p^{s-1}dp$，所以$D(\varepsilon)=C\varepsilon^{n/s-1}$

从这个结果可以看出：在非相对论极限下，能量正比于动量的平方，因此二维粒子的态密度为常数；在相对论极限下能量正比于动量，因此一维粒子的态密度为常数。

n 维空间球体体积公式$V_n(R)=\dfrac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(n/2+1)}=C_nR^n$，采用求导的方式可以得到其表

面积公式为$S_n(R)=\dfrac{dV}{dR}=nC_nR^{n-1}$