概率论与数理统计：第四次作业（共九题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，它们的分布列如下：

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 若 x=1,2,3,\\ 0, & 其它;\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y=0,\\ \frac{1}{3}, & y=1,\\ \frac{1}{6}, & y=2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $X+Y$ 的分布列和 $P(X+Y\leqslant 3)$.

(2) 在坐标平面上画上格子，水平线之间的距离为 a，垂直线之间的距离为 b。现在往平面上丢一根长度为 l 的针，假设 l<a, l<b。针与格子相交的边数的期望是多少？针与至少一条边相交的概率是多少？

(3) 设 X 和 Y 是两个相互独立且都服从参数为 p 的几何分布。证明：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}, i=1,\ldots,n-1.$$

(4) 我们从一根长度为 l 的杆开始，在杆上随机选一个点，以这一点为切割点，将杆切断。我们保留杆的左边部分，设这段长度为 X。对这个长度为 X 的杆，再重复之前的过程，得到一个长度为 Y 的杆。

(a) 求 X 和 Y 的联合密度函数。

(b) 求 Y 的边际分布和数学期望。

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从标准正态分布。定义随机变量 $R\geqslant 0, \Theta\in[0,2\pi)$，使得

$$X=R\cos\Theta,\quad Y=R\sin\Theta.$$

(a) 求 R 和 Θ 的联合分布和边际分布。

(b) R 与 Θ 是否相互独立？

(c) 求随机变量 R^2 的密度函数。

(6) 设两盏灯的寿命 X 和 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布。令 $Z=\min\{X,Y\}$. 求 Z 的分布列，数学期望，和方差。

(7) 设二维随机变量 (X,Y) 服从圆心在原点上的单位圆上的均匀分布。

(a) 求 X 和 Y 的边际分布。

(b) X 和 Y 是否相互独立?

(8) 设随机变量 U_1 和 U_2 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。证明:

(a) $Z_1 = -2\ln U \sim Exp(1/2)$, $Z_2 = 2\pi U_2 \sim U(0, 2\pi)$.

(b) $X = \sqrt{Z_1}\cos Z_2$, $Y = \sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态分布。

(9) 随机变量$X_k \sim N(k, k^2)$, $k = 1, 2, 3$，且相互独立。

(a) 求随机变量$Y = \sum_{k=1}^{3} k^2 X_k$ 的密度函数。

(b) 随机变量$Z = e^{10X_1^2}$ 的数学期望是否存在。