

## 《高等微积分 1》第十周作业

本次作业在第十一周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

- 1 设  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  在  $\mathbf{R}$  上处处有  $n$  阶导数. 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = A$ , 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n}.$$

- 2 定义函数  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  为

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & \text{如果 } x \neq 0 \\ e, & \text{如果 } x = 0. \end{cases}$$

其中  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ . 计算  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ .

- 3 求  $\tan x$  在  $x = 0$  处的带皮亚诺余项的 5 阶泰勒公式.

- 4 求  $\arcsin x$  在  $x = 0$  处的带皮亚诺余项的  $n$  阶泰勒公式.

- 5 设  $f(x) = \arctan x$ . 对于正整数  $n$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

- 6 定义函数  $f(x) = \sqrt{1-x}$ . 请找出  $x$  的多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| \leq 0.01, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{4}].$$

- 7 设函数  $f$  在  $\mathbf{R}$  上处处有  $(n+1)$  阶导函数,  $a \neq b$  是给定的实数.

(1) 定义函数

$$F(x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

计算  $F$  的导函数  $F'(x)$ .

(2) 证明: 存在  $\xi$  介于  $a, b$  之间, 使得

$$F(b) - F(a) = (b - a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b - \xi)^n.$$

8 设函数  $f$  在  $\mathbf{R}$  上处处有 3 阶导函数.

(1) 写出  $f$  在点  $x$  处的 3 阶的带佩亚诺余项的泰勒公式.

(2) 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x)}{h^3}.$$