概率论与数理统计 第六次作业 张锦程 2018012082

(1) 证明: (a) $\forall \varepsilon>0$, $P(|Y_n-0|\ge\varepsilon)$ ~~...~~ 则 $1-P(-\varepsilon\le \frac{X_n}{n}\le\varepsilon)$

取 $n=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 有 $-\varepsilon\le-\frac{1}{n}\le\frac{X_n}{n}\le\frac{1}{n}\le\varepsilon$ $\therefore P(|Y_n-0|\ge\varepsilon)=0$ #

[ ] 取整符号

(b) $P(Y_n=-1)=0$, $P(Y_n=1)=0$ $\therefore \forall\varepsilon>0\ P(|Y_n-0|\ge\varepsilon)=1-P(-\varepsilon\le X_n^n\le\varepsilon)=1-P(|X_n|^n\le\varepsilon)$

取 $n=[\log_{|X_n|}\varepsilon]+1$, 有 $|X_n|^n<\varepsilon$, $P(|Y_n-0|\ge\varepsilon)=0$, #

(c) 即证明 $\forall\varepsilon>0$, $\delta>0$ $\exists n$ 使 $P(|Y_n-1|\ge\varepsilon)<\delta$

$|Y_n-1|=1-Y_n\ge\varepsilon \Rightarrow Y_n\le1-\varepsilon \Rightarrow X_1\le1-\varepsilon,\ X_2\le1-\varepsilon\ \dots\ X_n\le1-\varepsilon$

$\therefore P(|Y_n-1|\ge\varepsilon)=(\frac{2-\varepsilon}{2})^n=(1-\frac{\varepsilon}{2})^n$

取 $n=[\log_{(1-\frac{\varepsilon}{2})}(\delta)]+1>\log_{(1-\frac{\varepsilon}{2})}(\delta)$ 有 $(1-\frac{\varepsilon}{2})^n<\delta$ #

(2) (a) $\varphi_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{a}{2}e^{-a|x|}dx=-\frac{ta}{t^2+a^2}$

$\therefore E_1(X)=\frac{1}{i}\varphi_1'(0)=$ ~~$\frac{-a}{2}\ln(t^2+a^2)|_{t=0}=-a\ln a=-a\ln a$~~ $=\frac{-ta(3t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^2}\Big|_{t=0}=$ -a

$E_1(X^2)=\frac{1}{i^2}\varphi_1''(0)=\frac{2}{a^2}$

$\therefore Var_1(X)=\frac{2}{a^2}-(-\frac{1}{a})^2=\frac{1}{a^2}$

(b) $\varphi_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{a}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\sin tx}{x^2+a^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx]$

$=\cancel{\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots}=e^{-at}$

$\therefore E_2(X)=\frac{1}{i}\varphi_2'(0)=-\frac{a}{i}=ai$

$E_2(X^2)=\frac{1}{i^2}\varphi_2''(0)=\frac{+a^2}{i^2}=-a^2<0$, 不合理, 因此方差不存在

~~$\therefore Var_2(X)=\dots+a^2-(ai)^2=2a^2$~~

(3) (a) $\lim_{n\to+\infty}E(Y_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2+(1-\frac{1}{n})\cdot0=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$

(b) 它依概率收敛, 极限为0

$\forall\varepsilon>0$. $P(|Y_n-0|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{n}$ $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to0$

(4) ~~$Ga(\alpha,\lambda)$ 分布函数 $F_1=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}dt$~~

~~$Y=\frac{\lambda X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 分布函数 $F_2=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^Y(\frac{\sqrt\alpha Y+\alpha}{\lambda})^{\alpha-1}e^{-(\sqrt\alpha Y+\alpha)}\frac{\sqrt\alpha}{\lambda}dY$~~

~~$=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^Y(\sqrt\alpha Y+\alpha)^{\alpha-1}e^{-\frac{\alpha}{\lambda}Y-\frac{\alpha\sqrt\alpha}{\lambda}}dY$~~

$Y=\frac{\lambda X}{\sqrt\alpha}\sim Ga(\lambda,\sqrt\alpha)=\frac{(\sqrt\alpha)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\sqrt\alpha y}$

$Z\sim N(\sqrt\alpha,1)$

Y 特征函数为 $(1-\frac{it}{\sqrt\alpha})^{-\alpha}$ Z 特征函数为 $\exp(i\sqrt\alpha t-\frac{t^2}{2})$ 令 $\beta=\frac{t}{\alpha}$, 在 $\beta=0$ 处泰勒展开.

$\exp(i\sqrt\alpha t-\frac{t^2}{2})=$ ~~$1+i\sqrt\alpha x+(-0.5\alpha-0.5)x^2+o(x^2)$~~ $=1+\frac{i}{\beta}t+o(\beta)=1+i\sqrt\alpha t+o(\frac{1}{\alpha})$

$(1-\frac{it}{\sqrt\alpha})^{-\alpha}=1+\frac{i}{\beta}t+o(\beta)=1+i\sqrt\alpha t+o(\frac{1}{\alpha})$

$\therefore$ 当 $\alpha\to+\infty$ 时 $Y-Z\to0$, 同时作变量代换 $Y'=Y-\sqrt\alpha$, $Z'=Z-\sqrt\alpha$

则 $Y'=\frac{\lambda X-\alpha}{\sqrt\alpha}$, $Z'\sim N(0,1)$ $\therefore Y'$ 依分布收敛到 $N(0,1)$

(5) (a) $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}dx=\frac{1}{\pi}e^{it\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\lambda t)z}\frac{1}{z^2+1}dz\quad(z=\frac{x-\mu}{\lambda})$

$=e^{it\mu}\,e^{-|\lambda t|}$ （由 Cauchy 分布的特征函数可得）

(b) $p(x)=p(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

$\varphi_{X+Y}(t)=E(e^{it(X+Y)})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(X+Y)}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(2t)X}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$

$=e^{-2|t|}=e^{-|t|}\cdot e^{-|t|}$，但 $X=Y$，故 X与Y不独立

(c) $\varphi_{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)}(t)=\varphi_{\frac{X_1}{n}}(t)\cdot\varphi_{\frac{X_2}{n}}(t)\cdots\varphi_{\frac{X_n}{n}}(t)=e^{-\frac{1}{n}|t|}\cdots e^{-\frac{1}{n}|t|}=e^{-|t|}$

$\therefore\ \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ 的密度函数为 $p(y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

(6) X_n不依概率收敛，因为 $n\to\infty$时 ~~$|X_n-X|$~~ $\exists\, n$，使得 $|X_n-X|\geq|X|$

则取 $\varepsilon\leq|X|$，$P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\nrightarrow 0$

X_n 依分布收敛，因为 $X_n=X$ 或 $X_n=-X$，

$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)=F(-x)$

(7) 不能，可以取 $X_n\sim N(0,1)$，$Y_n\sim N(0,1)$，$X_n=-Y_n$

则 X_n，Y_n 均依分布收敛到 $N(0,1)$

但 $X+Y$ 不依分布收敛到 0

若X_n与Y_n相互独立，则 X_n+Y_n 依分布收敛到 $X+Y$

(8) $n\to\infty$时，Z_n依概率收敛到 $E(Z_n)=N$

证明如下：设$E(Y^2)=E(Y)=N\leq 1$

$Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=N-N^2$

$E(Z_n)=E(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n})=E(Y)=N$

$Var(Z_n)=Var(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n})=\frac{1}{n}Var(Y)=\frac{1}{n}(N-N^2)$

由切比雪夫不等式：$P(|Z_n-EZ_n|\geq\varepsilon)=P(|Z_n-N|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(Z_n)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n}(N-N^2)}{\varepsilon^2}\leq\frac{\frac{1}{n}}{\varepsilon^2}$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，$n\to\infty$时，$P(|Z_n-E(Z_n)|\geq\varepsilon)\to 0$. #