《高等微积分 1》第十周习题课材料

1 用 Lagrange 中值定理证明如下不等式.

(1)(伯努利不等式) 设 $x > -1$. 证明: 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时, 有 $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$.

(2) 设 $1 \le x_1 < x_2$. 证明: 当 $\alpha > 1$ 时, 有 $(x_2^\alpha - x_1^\alpha) > \alpha(x_2 - x_1)x_1^{\alpha-1}$; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $x_2^\alpha - x_1^\alpha < \alpha(x_2 - x_1)$.

2 给定实数 α, 设 $f(x) = x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $[1, +\infty)$ 上是否一致连续.

3 (1) 设 $f \in C([0, +\infty))$ 且在 $(0, +\infty)$ 上处处可导. 证明: 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$, 则存在 $\xi \in (0, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 证明: 存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得 $f'(c) = 0$.

4 设 $g(x)$ 有各个高阶导数, $f(x) = (x-a)^n g(x)$. 证明:

$$f^{(0)}(a) = f^{(1)}(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

5 (1) n 次勒让德多项式为

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

证明: $P_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内恰好有 n 个不同的根.

(2) n 阶拉盖尔 (Laguerre) 多项式为

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

证明: $L_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 n 个不同的根.

6 设 $P(x)$ 是多项式. 已知 $P(x)-a=0$ 与 $P(x)-b=0$ 的全部根都是单实根. 证明: 对任何实数 $c\in(a,b)$, $P(x)-c=0$ 的全部根也都是单实根.

7 设 I 是开区间, f 在 I 上有 n 阶导函数.

(1) 证明: 如果 f 在 $n+1$ 个点 $x_0<x_1<...<x_n$ 处的值都为 0, 则存在 $\xi\in I$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

(2) 设 $x_1<x_2<...<x_p$ 是 I 中的点, $n_1,n_2...,n_p$ 是正整数且 $n_1+n_2+...+n_p=n$. 假设对每个 $i=1,2,...,p$, 有 $f^{(0)}(x_i)=...=f^{(n_i-1)}(x_i)=0$. 证明: 存在 $\xi\in[x_1,x_p]$ 使得 $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

8 设 I 是开区间且 $[a,b]\subset I$, 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 I 上处处可导.

(1)(Darboux 中值定理) 证明: 导函数 f' 在 $[a,b]$ 上能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任何中间值.

(2) 证明: 如果 f' 在 (a,b) 上处处可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$.

证明: (1) 设 v 严格介于 $f'(a),f'(b)$ 之间, 我们来证明存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=v$. 用反证法, 假设对任何 $c\in(a,b)$ 有 $f'(c)\neq v$. 考虑函数 $g(x)=f(x)-vx$, 它在 I 上处处可导 (从而在 I 上连续), 且 g' 在 (a,b) 上处处非零. 对任何 $a\le x_1<x_2\le b$, 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使得 $g(x_2)-g(x_1)=(x_2-x_1)g'(\xi)\neq 0$. 这样, g 是 $[a,b]$ 上的连续单射, 从而在 $[a,b]$ 上严格单调. 若 g 在 $[a,b]$ 上严格单调递增, 则 g' 在 $[a,b]$ 上处处非负; 若 g 在 $[a,b]$ 上严格单调递减, 则 g' 在 $[a,b]$ 上处处非正. 总之, 有 $g'(a)\cdot g'(b)\ge 0$, 这与 $g'(a)\cdot g'(b)=(f'(a)-v)\cdot(f'(b)-v)<0$ 矛盾!

(2) 我们证明如下结果. 设函数 h 在 (a,b) 上处处可导, 在 $[a,b]$ 上满足介值定理的结论 (即能取到一切中间值), 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $h(b)-h(a)=h'(\xi)\cdot(b-a)$. 先考虑 $h(a)=h(b)=0$ 的情形. 用反证法, 假设对 $\xi\in(a,b)$ 都有 $h'(\xi)\neq 0$. 对任何 $a<x_1<x_2<b$, 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使得 $h(x_2)-h(x_1)=(x_2-x_1)h'(\xi)\neq 0$. 这样, h 是 (a,b) 上的连续单射, 从而在 (a,b) 上严格单调. 不妨设 h 在 (a,b) 上严格单调递增, 分三种情况讨论. (i) 如果存在 $c\in(a,b)$ 使得 $h(c)<0$, 则 h 在 $[a,c]$ 上取不到 $h(a),h(c)$ 的中间值 $\frac{h(c)}{2}$, 矛盾! (ii) 如果存在 $c\in(a,b)$ 使得 $h(c)>0$, 则 h 在 $[c,b]$ 上取不到 $h(c),h(b)$ 的中间值 $\frac{h(c)}{2}$, 矛盾! (iii)

如果 (i),(ii) 都不成立, 则 h 在 (a,b) 上恒等于 0, 与 h 在 (a,b) 上严格单调递增矛盾! 这样, 我们在 $h(a)=h(b)=0$ 的条件下, 证明了存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$. 对一般的 h, 考虑函数 $h(x)-\left(\frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)\right)$ 即可.

$\square$