2017 年秋季《高等微积分 1》期中考试参考解答

2017 年 11 月 11 日 $8:00-10:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 3 题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设函数 $u(x), v(x)$ 处处有二阶导数, $u(x)$ 的值处处为正数. 定义函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$.

(1) 求 $f'(x)$.

(2) 求 $f''(x)$.

要求把计算结果用 u, v 及它们的高阶导函数表示.

解. (1) 利用链式法则与 Leibniz 法则进行求导, 有

$$f'=(e^{v\ln u})'=e^{v\ln u}(v'\ln u+v\frac{1}{u}u')=u^v(v'\ln u+\frac{vu'}{u}).$$

(2) 对 (1) 的结果进一步求导, 可得

$$\begin{aligned} f''&=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2+u^v\left(v''\ln u+v'\frac{1}{u}u'+\frac{(v'u'+vu'')u-vu'u'}{u^2}\right)\\ &=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2+u^v\left(v''\ln u+\frac{v'u'}{u}+\frac{v'u'u+vu''u-v(u')^2}{u^2}\right). \end{aligned}$$

□

第 (1) 问 7 分; 第 (2) 问第一个等式有两项, 每项 4 分.

2 给定 $0<a<b$. 定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$x_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{a(2x_n-a)},\quad \forall n\in\mathbf{Z}_+.$$

(1) 证明: 极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2) 计算极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 的值.

解. 注意到,

$$x_{n+1} = \sqrt{a(2x_n - a)} > a \iff x_n > a,$$

由 $x_1 = b > a$ 可知 x_n 都有定义且都大于 a. 另外, 由平均不等式可知

$$x_{n+1} = \sqrt{a(2x_n - a)} \leq \frac{a + (2x_n - a)}{2} = x_n.$$

这样, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不增且有下界 a, 因而是收敛的. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $A \geq a$. 对该数列的递推式两边取极限, 可得

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a(2x_n - a)} = \sqrt{a(2A - a)},$$

解得 $A = a$, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

□

第 (1) 问 8 分, 其中单调性 4 分, 数列有下界 2 分, 用 Weierstrass 定理说明收敛 2 分; 第 (2) 问 7 分.

3 设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 令

$$Y = \{y \in \mathbf{R} |\ 存在 x \in [a, b]\ 使得 y = f(x)\}$$

为 f 的像集. 证明: 如果 $[a, b] \subseteq Y$, 则存在 $x \in [a, b]$ 使得 $f(x) = x$.

证明: 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 g 是连续函数. 由于 $[a, b] \subseteq Y$, 设 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$, 则有

$$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = a - x_1 \leq 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - x_2 = b - x_2 \geq 0.$$

由介值定理, 存在 x 介于 x_1, x_2 之间, 使得 $g(x) = 0$, 此即 $f(x) = x$.

□

构造 $g(x)$ 给 2 分, 此外不设中间分.

4 定义函数 f 为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & 如果 x \neq 0, \\ 0, & 如果 x = 0, \end{cases}$$

其中 $e^{-1/x^2} = \exp(-\frac{1}{x^2})$. 计算 $f'(0)$ 与 $f''(0)$.

解. 我们要用到如下极限式

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^k}{e^{y^2}}=0.$$

因为, 通过换元 $y^2=z$, 可得

$$\lim_{y\to\infty}\frac{|y|^k}{e^{y^2}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^{k/2}}{e^z}=0,$$

其中最后一步用到了熟知的极限式: 对 $a>1$, 有 $\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z^\alpha}{a^z}=0$.

(1) 由导数的定义, 有

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y^2}}{1/y}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}\\&=0\end{aligned}$$

(2) 当 $x\neq0$ 时, 有

$$f'(x)=e^{-1/x^2}(-\frac{1}{x^2})'=2e^{-1/x^2}x^{-3}.$$

利用 (1) 的结果, 可得

$$\begin{aligned}f''(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2e^{-1/x^2}x^{-3}}{x}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{2y^4}{e^{y^2}}\\&=0.\end{aligned}$$

□

第 (1) 问 7 分, 其中写下 $f'(0)$ 的定义式 2 分, 换元法计算极限 3 分, 答案 2 分; 第 (2) 问 8 分, 其中计算出 $f'(x)$ 给 2 分, 写下 $f''(0)$ 的定义式 2 分, 换元法计算极限 2 分, 答案 2 分.

5 设函数 f 在 $x=a$ 处的导数为 $f'(a)=L$, 且 $f(a)\neq 0$.

(1) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|\right).$$

(2) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n.$$

解. (1) 函数 f 在 $x=a$ 处可导, 则在 $x=a$ 处连续. 由此可知, 在 a 的某个邻域内 $f(x)$ 处处非零, 且与 $f(a)$ 同号. 定义函数 $g(x)=\ln|f(x)|$, 由链式法则可得

$$g'(a)=\frac{1}{f(a)}f'(a)=\frac{L}{f(a)},$$

即有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln|f(a+h)|-\ln|f(a)|}{h}=\frac{L}{f(a)}.$$

利用 Heine 定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|}{\frac{1}{n}}=\frac{L}{f(a)},$$

此即

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|\right)=\frac{L}{f(a)}.$$

(2) 注意到指数函数 $h(y)=e^y$ 处处连续, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|f(a+\frac{1}{n})|}{|f(a)|}\right)^n\\ &=\lim_{n\to\infty}\exp\left(n(\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|)\right)\\ &=\exp\left(\lim_{n\to\infty} n(\ln|f(a+\frac{1}{n})|-\ln|f(a)|)\right)\\ &=\exp\left(\frac{L}{f(a)}\right).\end{aligned}$$

□

第 (1) 问 7 分, 其中算出 $g'(a)$ 给 3 分, 写出 $g'(a)$ 的定义式 2 分, 用 Heine 定理求数列极限 2 分; 第 (2) 问 8 分, 利用第 (1) 问的答案以及指数函数的连续性进行计算 5 分, 答案 3 分.

6 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=K.$

(1) 定义函数 $h:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为

$$h(y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+y)}{y}, & \text{如果} y\neq 0\\ 1, & \text{如果} y=0.\end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{x\to x_0}(h\circ f)(x)=1.$

(2) 利用 (1) 的结论, 证明:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+f(x))=K.$$

注意: 这个结论不是显然的. 因为, 不一定能找到 x_0 的去心邻域 $N^*(x_0,r)$, 使得在其中 $f(x)$ 处处非零, 这样, 利用简单的换元法计算上述极限是不严谨的.

证明: (1) 对数函数 $\ln z$ 在 $z=1$ 处连续, 则有

$$\lim_{y\to 0}h(y)=\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{1/y}=\ln\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=1=h(0).$$

这样, 由复合函数的极限定理, 有

$$\lim_{x\to x_0}(h\circ f)(x)=\lim_{y\to 0}h(y)=1.$$

(2) 注意到

$$(h\circ f)(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}, & \text{如果} f(x)\neq 0,\\ 1, & \text{如果} f(x)=0,\end{cases}$$

从而有

$$((h\circ f)(x))\cdot(f(x)g(x))=\begin{cases}g(x)\ln(1+f(x)), & \text{如果} f(x)\neq 0,\\ 0, & \text{如果} f(x)=0.\end{cases}$$

这表明, 对任何 x 都有

$$((h\circ f)(x))\cdot(f(x)g(x)) = g(x)\ln(1+f(x)).$$

这样, 利用 (1) 的结论, 以及极限和四则运算可交换, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+f(x)) &= \lim_{x\to x_0}((h\circ f)(x))\cdot(f(x)g(x))\\ &= \lim_{x\to x_0}(h\circ f)(x)\cdot\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))\\ &= K.\end{aligned}$$

$\square$

第 (1) 问 7 分, 不设中间分; 第 (2) 问 8 分, 不严格作法给 5 分.

7 (1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的数列, 且极限为 A. 证明: 对任何正整数 n, 有 $a_n \le A$.

(2) 令 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. 证明: 对正整数 n, 有

$$(1+\frac{1}{n})^n \le e \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

解答. (1) 对给定正整数 n, 有

$$a_n \le a_k, \quad \forall k > n,$$

由极限不等式可得 $a_n \le \lim_{k\to\infty} a_k = A$.

(2) 熟知, 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增且收到到 e. 由 (1) 的结论可知, 对正整数 n, 有 $(1+\frac{1}{n})^n \le e$. 下面, 我们来证明 $e \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

一方面, 可直接计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e.$$

另一方面, 利用算术-几何平均不等式可得

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} &= \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n+1})\cdot(1+\frac{1}{n+1})^2} \\
&\le \frac{1}{n+1}\left(n(1+\frac{1}{n+1})+(1+\frac{1}{n+1})^2\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot(n+1+\frac{1}{n+1})\cdot(1+\frac{1}{n+1}) \\
&= 1+\frac{1}{n+1}+(\frac{1}{n+1})^2+(\frac{1}{n+1})^3 \\
&= \frac{1-(\frac{1}{n+1})^4}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&< \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&= 1+\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

即有

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}<(1+\frac{1}{n})^{n+1},\quad \forall n\in\mathbf{Z}_+.$$

结合这两方面, 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 递减且收敛到 e. 由 (1) 的结论可知, 对正整数 n, 有 $e\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

(3) 利用 (2) 的结论, 可得

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{i})^{i}\le e^n\le\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{i})^{i+1},$$

此即

$$\frac{(n+1)^n}{n!}\le e^n\le\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

这就证明了

$$\frac{(n+1)^n}{e^n}\le n!\le\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 可得

$$\frac{n+1}{ne}\le\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\le\frac{(n+1)\cdot(n+1)^{1/n}}{ne}\le\frac{(n+1)\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{ne}.$$

熟知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne}=\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{ne}.$$

这样, 由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}.$$

□

第 (1) 问 4 分; 第 (2) 问每个不等式 2 分; 第 (3) 问 3 分; 第 (4) 问给出适当的上下界估计 2 分, 利用夹逼定理给出结果 2 分.