第二章
命题逻辑的等值和推理演算

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1,P_2,\ldots,P_n$的命题公式 A 来说，可由$P_1,P_2,\ldots,P_n$的真值根据命题公式 A给出A的真值，从而建立起由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到 A的真值表。

- 反之，若给定了由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到 A的真值表，可以用下述方法写出命题公式A对$P_1,P_2,\ldots,P_n$的逻辑表达式：

2.3 命题公式与真值表的关系

1. 根据取T的行，进行枚举

考查 A的真值表中取T的行，若取T的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_m$$

其中$Q_i = (R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n)$，

$$R_i = P_i \text{或} \neg P_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

若该行的$P_i = T$，则$R_i = P_i$，

若$P_i = F$，则$R_i = \neg P_i$

2.3 命题公式与真值表的关系

2．根据取F的行，进行枚举

考查真值表中取F的行，若取F的行数共有k行，
则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中

$$Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n),$$

$R_i = P_i$ 或 $R_i = \neg P_i$（i=1, 2, …,n）

若该行的 $P_i = T$，则 $R_i = \neg P_i$
若该行的 $P_i = F$，则 $R_i = P_i$.

2.4 联接词的完备集

- 主要内容
  - 介绍联结词的完备集及其简单的判别方法，包括对偶式的概念
  - 重点介绍范式和主范式的概念，给出求范式和主范式的步骤，特别是将命题公式化成相应的主析取范式和主合取范式的方法；

两个重要的命题联结词

- 与非联接词
  与非词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非词“$\uparrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$，读作P和Q的“与非”。

- 当且仅当P和Q的真值都是T时，$P\uparrow Q$的真值为F，否则$P\uparrow Q$的真值为T。

$$P\uparrow Q = \neg (P\wedge Q)$$

两个重要的命题联结词

- 或非联接词

  或非词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非词“$\downarrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\downarrow Q$，读作P和Q的“或非”。

- 当且仅当P和Q的真值都是F时，$P\downarrow Q$的真值为T，否则$P\downarrow Q$的真值为F。

$$P\downarrow Q = \neg (P \vee Q)$$

2.4 联接词的完备集

2.4.3 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

可理解为关于命题变项的函数

N = 2 时的所有真值函项

P	Q	g0	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9	g10	g11	g12	g13	g14	g15
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

$g_0 = F$　　$g_1 = P \wedge Q$　　$g_6 = P \bigtriangledown Q$

$g_7 = P \vee Q$　　$g_8 = P \downarrow Q$　　$g_9 = P \leftrightarrow Q$

$g_{13} = P \rightarrow Q$　　$g_{14} = P \uparrow Q$　　$g_{15} = T$

$g_3 = P$　　$g_5 = Q$

$g_{10} = \neg Q$　　$g_{12} = \neg P$

尚余

$g_2 = P \wedge \neg Q$　　$g_4 = \neg P \wedge Q$

$g_{11} = P \vee \neg Q$

2.4 联接词的完备集

2.4.4 联接词的完备集

设C是一个联结词的集合，如果任何n元($n \geq 1$)真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

- 定理2.4.1
  { ¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬，∨，∧表示出来，从而{¬,∨,∧}是完备的。

- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 {¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（n≥1）元真值函项都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词¬, ∨, ∧，所以S = {¬, ∨, ∧}是联结词的完备集。

联结词的完备集

推论：　以下联结词集都是完备集：

（1）　$S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2）　$S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3）　$S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4）　$S_4 = \{\uparrow\}$

（5）　$S_5 = \{\downarrow\}$

- 课后补充作业：证明（4）和（5）

2.5 对偶式

- 对偶式

将给定的命题公式 A 中出现的 $\vee, \wedge, T, F$ 分别以 $\wedge, \vee, F, T$ 代换，得到公式 A^*，则称 A^* 是公式 A 的对偶式，或说 A 和 A^* 互为对偶式。

- [有关对偶式的定理]

有关对偶式的定理

- 在以下定理2.5.1~定理2.5.6中，记

$$A \ = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ 则A^-为原公式A的逆

有关对偶式的定理

- 定理2.5.1

  $\neg(A^*) = (\neg A)^*$，　$\neg(A^-) = (\neg A)^-$

- 定理2.5.2

  $(A^*)^* = A$，　$(A^-)^- = A$

- 定理2.5.3

  $\neg A = A^{*-}$

有关对偶式的定理（续）

- 定理2.5.4

  若$A = B$，必有 $A^* = B^*$

- 定理2.5.5

  若$A \rightarrow B$ 永真，必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真

- 定理2.5.6

  A与A^-同永真，同可满足；

  $\neg A$与A^*同永真，同可满足。

2.5 对偶式

- **证明定理2.5.3**。可用数学归纳法,

  施归纳于A中出现的联结词个数n来证明。

- 起始: 设$n = 0$, A中无联结词, 便有

  $A = P$, 从而 $\neg A = \neg P$

  但 $A^{*-} = \neg P$

  $\therefore$ $n = 0$时定理成立。

2.5 对偶式

- 归纳： 设$n \le k$时定理成立，往证$n = k + 1$时定理也成立

$\because n = k + 1 \ge 1$，A 中至少有一个联结词，可分为三种情形：

$$A = \neg A_1, \quad A = A_1 \wedge A_2, \quad A = A_1 \vee A_2$$

其中A_1, A_2中联结词个数$\le k$。

2.5 对偶式

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1{}^{*-}$，$\neg A_2 = A_2{}^{*-}$

当 $A = \neg A_1$时，

$\neg A = \neg(\neg A_1)$

$= \neg(A_1{}^{*-})$ --归纳法假设

$= \neg((A_1{}^{*})^{-})$ --加括号

$= (\neg(A_1{}^{*}))^{-}$ **--定理2.5.1-2** $\neg(A^{-}) = (\neg A)^{-}$

$= ((\neg A_1)^{*})^{-}$ **--定理2.5.1-1** $\neg(A^{*}) = (\neg A)^{*}$

$= A^{*-}$ --由条件$A = \neg A_1$

2.5 对偶式

当 $A = A_1 \wedge A_2$ 时：

$$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2)$$

$$= \neg A_1 \vee \neg A_2 \qquad \text{摩根律}$$

$$= A_1{}^{*-} \vee A_2{}^{*-} \qquad \text{归纳法假设}$$

$$= (A_1{}^{*} \vee A_2{}^{*})^{-} \qquad A^{-}\text{定义}$$

$$= (A_1 \wedge A_2)^{*-} \qquad A^{*}\text{定义}$$

$$= A^{*-}$$

当 $A = A_1 \vee A_2$ 时证明过程类似。**定理证毕**。

该定理实为摩根律的另一种形式。它把¬、*、－有机地联系起来。

2.5 对偶式

- 定理 2.5.4　若 $A = B$ 必有 $A^* = B^*$

- 证明: 因为 $A = B$ 等价于 $A \leftrightarrow B$ 永真。

  从而 $\neg A \leftrightarrow \neg B$　永真。

  依定理2.5.3，$\neg A = A^{*-}$，$\neg B = B^{*-}$

  于是 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$　永真

  必有 $A^* \leftrightarrow B^*$ 永真

  故 $A^* = B^*$

2.5 对偶式(补充材料)

- 定理 2.5.5　若 $A \rightarrow B$永真，　必有 $B^* \rightarrow A^*$永真

- 证明: $A \rightarrow B$ 等价于 $R=\neg A \vee B$;

  $R^* = (\neg A)^* \wedge B^*$ 。

  R与 $\neg(R^*)=(R^*)^{*-}=R^-$同永真　---(1)

  $\neg(R^*) = \neg(\neg A)^* \vee \neg B^*$

  $= \neg\neg(A^*) \vee \neg B^*$

  $= B^* \rightarrow A^*$

  由(1)，R永真则R^-

  即$A \rightarrow B$永真则$B^* \rightarrow A^*$

2.6 范式

⊙2.6.1 文字与互补对

◆ 命题变项P及其否定式$\neg P$统称**文字**。且P与$\neg P$称为**互补对**。

2.6 范式

- 2.6.2 合取式

  由文字的合取所组成的公式称为合取式。

- 2.6.3 析取式

  由文字的析取所组成的公式称为析取式。

2.6 范式

- 2.6.4 析取范式

  析取范式是形如

  $$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

  的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为合取式。

- 2.6.5 合取范式

  合取范式是形如

  $$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

  的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为析取式。

2.6 范式

2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式不是唯一的。

由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究主范式。

主范式——极小项和极大项

⊙2.6.7 极小项

n 个命题变项 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 组成的合取式：

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。

则称合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$ 为极小项，并以 m_i 表示。

极小项

- 由P_1 P_2两个命题变项组成的极小项

二进制标记法

- $\neg P_1 \wedge \neg P_2$ 00
- $\neg P_1 \wedge P_2$ 01
- $P_1 \wedge \neg P_2$ 10
- $P_1 \wedge P_2$ 11

主范式——极小项和极大项

2.6.8 极大项

n个命题变项$P_1,P_2,...,P_n$组成的析取式：

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ 或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$表示。

极大项

- 由P1 P2两个命题变项组成的极大项

二进制标记法

- $\neg P_1 \vee \neg P_2$ 00
- $\neg P_1 \vee P_2$ 01
- $P_1 \vee \neg P_2$ 10
- $P_1 \vee P_2$ 11

主析取范式与主合取范式

- 主析取范式

设由n个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

主析取范式与主合取范式

Tsinghua University

- 主合取范式

　　设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

主范式

- 2.6.11 主析取范式定理

任一含有n 个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n 个命题变项的主析取范式。

主范式

- 2.6.12 主合取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主合取范式。

主范式——极小项的性质

- (1) 任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。

- (2) 每个极小项只在一个解释下为真。

- (3) 极小项两两不等值，并且

$$m_i \land m_j = \mathrm{F}\ (i \neq j\ )。$$

主范式——极小项的性质（续）

- (4) 任一含有n 个命题变项的公式，都可由k个($k \le 2^n$)极小项的析取来表示。

- (5) 恰由2^n个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$$

主范式——极大项的性质

- (1) 任一含有n个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。

- (2) 每个极大项只在一个解释下为假。

- (3) 极大项两两不等值，并且

$$M_i \vee M_j = \mathrm{T} \quad (i \neq j)$$

主范式——极大项的性质(续)

- (4) 任一含有n个命题变项的公式，都可由k个($k \leq 2^n$)极大项的合取来表示。

- (5) 恰由2^n个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。即

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$$

主析取范式与主合取范式的求法

- 求主析取范式的方法
  - 1. 先求析取范式
  - 2. 再填满变项

主析取范式与主合取范式的求法

- 1 $P \leftrightarrow Q = (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

  $m_3 \qquad\qquad m_0$

  $= m_0 \lor m_3 = \lor_{0,3}$

- 2 填满命题变项

  $P \rightarrow Q = \neg P \lor Q$

  $\because \neg P = \neg P \land (Q \lor \neg Q)$

  $= (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

  $\because Q = Q \land (P \lor \neg P)$

  $= (P \land Q) \lor (\neg P \land Q)$

主析取范式与主合取范式的求法

$$P\rightarrow Q = \underbrace{(\neg P \wedge Q)}_{m_1} \vee \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q)}_{m_0} \vee \underbrace{(P \wedge Q)}_{m_3}$$

$$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$= \vee_{0,\,1,\,3}$$

填满变项的简便方法

$$\neg P \lor Q$$

$$= m^{0x} \lor m^{x1}$$

$$= m_0 \lor m_1 \lor m_3$$

0 0

0 1 0 1

0 1

1 1

主范式的求法与举例

- 综合举例

(P∨¬Q)→(¬P↔(Q∧¬R)) 求主析与主合范式

原式 $= \neg (P\vee\neg Q) \vee ((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R)) \vee (P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$= (\neg P\wedge Q) \vee (\neg P\wedge Q\wedge\neg R) \vee (P\wedge\neg Q) \vee (P\wedge R)$

$= m^{01X} \vee m^{010} \vee m^{10X} \vee m^{1X1}$

主范式的求法与举例

$\therefore$主析范式 $= \vee_{2.3.4.5.7}$

主合范式 $= \wedge_{(\{0.1\ldots7\}\ -\ \{2.3.4.5.7\}\ )\text{补}}$

$= \wedge_{\{0.1.6\}\text{补}}$

$= \wedge_{1.6.7}$

思考题：如何证明这个过程是对的

列写真值表验算

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

主析与主合之间的转换(简化方法)

已知 $A = \bigvee_{0，1，4，5，7}$

$= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{0，1，4，5，7\})补}$

$= \bigwedge_{(2.3.6)补}$

$= \bigwedge_{5,4,1}$

主析与主合之间的转换(简化方法)

$$
\begin{aligned}
\text{已知 } \mathbf{A} &= \bigwedge{}_{1,4,5} \\
&= \bigvee{}_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{1,4,5\}\text{补})} \\
&= \bigvee{}_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{2,3,6\})} \\
&= \bigvee{}_{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7}
\end{aligned}
$$

2.6 空公式（补充）

- 求P∨¬P的主析取和主合取范式

主析取范式： P∨¬P

主合取范式： 空公式

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式