1. 自由粒子在边长为 L 的方盒内运动，其动量的可能值为

$$p_x=\frac{2\pi\hbar}{L}n_x \qquad n_x=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$p_y=\frac{2\pi\hbar}{L}n_y \qquad n_y=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$p_x=\frac{2\pi\hbar}{L}n_z \qquad n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

试由此证明，在体积$V=L^3$内，在 p_x到p_x+dp_x， p_y到p_y+dp_y， p_z到p_z+dp_z的动量范围内，自由粒子的量子态数为

$$\frac{Vdp_xdp_ydp_z}{h^3}。$$

$$d\Omega=dn_xdn_ydn_z=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3dp_xdp_ydp_z=\frac{V}{h^3}dp_xdp_ydp_z$$

2. 试根据题 1 结果,证明在体积 V 内,在ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围内,三维自由粒子的量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon。$$

提示：将动量空间直角坐标转化为球极坐标（体积元为$p^2\sin\theta dpd\theta d\varphi$），并利用自由粒子的能量公式$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$。

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{V}{h^3}dp_xdp_ydp_z=\frac{V}{h^3}p^2dp\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon$$

3. 试证明,对于一维自由粒子,在长度 L 内，在ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围内,量子态数为

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2L}{h}(\frac{m}{2\varepsilon})^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon$$

动量为矢量，在一维情况下，其方向可以为正可以为负，结合$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$，可知能量的简并度为 2。所以

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{L}{h}\mathrm{d}p=\frac{2L}{h}(\frac{m}{2\varepsilon})^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon$$

4. 在极端相对论情形下，粒子的能量动量关系为 $\varepsilon = cp$。试求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内三维粒子的量子态数。

（答：$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon$ ）

$$
\begin{aligned}
D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon &= \frac{V}{h^3}dp_x dp_y dp_z = \frac{V}{h^3}p^2 dp\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \\
&= \frac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}
$$

5. 刚性转子的能级 $\varepsilon = \dfrac{J\left(J+1\right)\hbar^2}{2I}$ 是非均匀分布的,能级间距随着量子数 J 的增大而增大。当 J 很大时，能级可以看作是准连续的,可以当作经典转子处理。证明，此时转子的态密度 $D(\varepsilon)$为常数。

$\varepsilon_{J+1} - \varepsilon_J = \dfrac{2(J+1)\hbar^2}{2I}$， $\dfrac{\varepsilon_{J+1} - \varepsilon_J}{\varepsilon_J} = \dfrac{2}{J}$

当 $J \to \infty, \dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \to 0$，即能级可以近似认为是准连续的

量子数为 J 的能级简并度为 $2J+1$，因此能量处于 $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ { J 处于 $(J, J+dJ)$ } 间的转子数目可以表示为：

$dn = (2J+1)dJ = D(\varepsilon)d\varepsilon$

且根据 $\varepsilon = \dfrac{J\left(J+1\right)\hbar^2}{2I}$， 有 $d\varepsilon = \dfrac{\left(2J+1\right)\hbar^2}{2I}dJ$

所以 $D(\varepsilon) = \dfrac{2I}{\hbar^2}$

解法二：当 J 很大时，能级可以看作是准连续的,可以当作经典转子处理。能量的表达式可以采用经典转子的能量表示 $\varepsilon = \dfrac{1}{2I}\left(p_\theta{}^2 + \dfrac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi{}^2\right) = \dfrac{p^2}{2I}$

具体步骤希望大家自己完成一下，加深理解。因为你们采用的都是上面的方法，所以采用经典方法如何完成需要你们自己探索一下。

经典转子的自由度为 2，其共轭的广义坐标和广义动量为{ (θ, p_θ)， (φ, p_φ) }。坐标空间体积微元为 $\sin\theta d\theta d\varphi$，动量空间微元可以采用极坐标表示 $pdpd\phi$，因此

能量处于$(\varepsilon, \varepsilon+d\varepsilon)$之间的转子数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{pdp\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\phi}{h^2} = \frac{2pdp}{\hbar^2}$$

又$d\varepsilon = \dfrac{2pdp}{2I}$，所以有$D(\varepsilon) = \dfrac{2I}{\hbar^2}$

另外对于自由度为n的粒子，其能量动量关系为$\varepsilon = \alpha p^s$，α为常数，s为正整数，

证明$D(\varepsilon)$正比于$\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$

对于自由度为 n 的例子，能量处于$(\varepsilon, \varepsilon+d\varepsilon)$之间的粒子动量包含在 n 维动量空

间模长处于$(p, p+dp)$的球壳中。

因此其间的粒子数为

$$\boxed{D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{p^{n-1}dpV\int_0^{\pi}d\theta_1\int_0^{\pi}d\theta_{n-1}\cdots\int_0^{2\pi}d\varphi}{h^n} = \beta p^{n-1}dp}$$

又$d\varepsilon = s\alpha p^{s-1}dp$，所以$D(\varepsilon) = C\varepsilon^{n/s-1}$

从这个结果可以看出：在非相对论极限下，能量正比于动量的平方，因此二维粒子的态密度为常数；在相对论极限下能量正比于动量，因此一维粒子的态密度为常数。

n 维空间球体体积公式$V_n(R) = \dfrac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(n/2+1)} = C_nR^n$，采用求导的方式可以得到其表

面积公式为$S_n(R) = \dfrac{dV}{dR} = nC_nR^{n-1}$

统计物理作业二

1. 设系统含有两种粒子，其粒子数分别为 N 和 N'。粒子间的相互作用很弱，可以看作是近独立的。假设粒子可以分辨，处在一个个体量子态的粒子数不受限制。试证明，在平衡态下两种粒子的最概然分布分别为

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l} \text{ 和 } a_l' = \omega_l e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}$$

其中 ε_l 和 ε_l' 是两种粒子的能级，ω_l 和 ω_l' 是能级的简并度。
提示：系统的微观状态数等于第一种粒子的微观状态数 Ω 与第二种粒子的微观状态数 Ω' 的乘积 $\Omega\cdot\Omega'$。
讨论：如果把一种粒子看作是一个子系统，系统由两个子系统组成，以上结果表明，两个子系统具有相同的 β。
由于两种粒子之间的相互作用很弱，可以近似为近独立的，能级不受另一粒子影响。粒子可分辨，因此系统内两种粒子的微观状态都满足 $\Omega = \frac{N!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l^{a_l}$。系统的微观状态数为两种独立粒子微观状态数的乘积。$\boxed{\Xi = \Omega\cdot\Omega' = \frac{N!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l^{a_l}\frac{N'!}{\prod_l a_l'!}\prod_l \omega_l^{a_l'},}$ 由于 $\ln\Xi$ 是 Ξ 的单调增函数，因此求 Ξ 的极大值可以等价于求 $\ln\Xi$ 的极大值。

$$\ln\Xi = \ln N! - \sum_l \ln a_l! + \sum_l a_l \ln\omega_l + \ln N'! - \sum_l \ln a_l'! + \sum_l a_l' \ln\omega_l'$$

假设 $N \gg 1, a_l \gg 1$，采用 Stirling 近似可以得到

$$\begin{aligned}\ln\Xi &= N(\ln N - 1) - \sum_l a_l(\ln a_l - 1) + \sum_l a_l\ln\omega_l + N'(\ln N' - 1) - \sum_l a_l'(\ln a_l' - 1) + \sum_l a_l'\ln\omega_l' \\ &= N\ln N - \sum_l a_l\ln a_l + \sum_l a_l\ln\omega_l + N'\ln N' - \sum_l a_l'\ln a_l' + \sum_l a_l'\ln\omega_l'\end{aligned}$$

其中 $N = \sum_l a_l$， $N' = \sum_l a_l'$， $E = \sum_l \varepsilon_l a_l + \sum_l \varepsilon_l' a_l'$

$\ln\Xi$ 取极大值时，对于 $\delta a_l, \delta a_l'$ 满足 $\delta\ln\Xi = 0$，即

$$\delta\ln\Xi = -\sum_l \ln\left(\frac{a_l}{\omega_l}\right)\delta a_l - \sum_l \ln\left(\frac{a_l'}{\omega_l'}\right)\delta a_l' = 0$$ (其中已经使用了 N, N' 为常数，$\delta N = 0, \delta N' = 0$)

$\delta N = \sum_l \delta a_l = 0$， $\delta N' = \sum_l \delta a_l' = 0$， $\delta E = \sum_l \varepsilon_l\delta a_l + \sum_l \varepsilon_l'\delta a_l' = 0$ (体积不变，能级不变)

结合能量守恒和粒子数守恒可以得到条件极值问题

$$\begin{aligned}&\delta\ln\Xi - \alpha\delta N - \alpha'\delta N - \beta\delta E \\ &= -\sum_l\left[\ln\left(\frac{a_l}{\omega_l}\right) + \alpha + \beta\varepsilon_l\right]\delta a_l - \sum_l\left[\ln\left(\frac{a_l'}{\omega_l'}\right) + \alpha' + \beta\varepsilon_l'\right]\delta a_l' = 0\end{aligned}$$

所以有

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l} \text{ 和 } a_l' = \omega_l e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}$$

2．同上题，如果粒子是玻色子或费米子，结果如何。
如果粒子为玻色子，那么

$$\Xi = \Omega \cdot \Omega' = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!} \prod_l \frac{(\omega_l' + a_l' - 1)!}{a_l'!(\omega_l' - 1)!}$$

假设 $\omega_l + a_l - 1 >> 1, \omega_l - 1 >> 1, a_l >> 1$，采用 Stirling 近似可以得到

$$\ln \Xi = \sum_l (\omega_l + a_l)\ln(\omega_l + a_l) - a_l \ln a_l - \omega_l \ln \omega_l + (\omega_l' + a_l')\ln(\omega_l' + a_l') - a_l' \ln a_l' - \omega_l' \ln \omega_l'$$

其中 $N = \sum_l a_l$， $N' = \sum_l a_l'$， $E = \sum_l \varepsilon_l a_l + \sum_l \varepsilon_l' a_l'$

$\ln \Xi$ 取极大值时，对于 $\delta a_l, \delta a_l'$ 满足 $\delta \ln \Xi = 0$，即

$$\delta \ln \Xi = \sum_l \left(\ln(\omega_l + a_l) - \ln a_l\right)\delta a_l + \left(\ln(\omega_l' + a_l') - \ln a_l'\right)\delta a_l'$$

$\delta N = \sum_l \delta a_l = 0$， $\delta N' = \sum_l \delta a_l' = 0$， $\delta E = \sum_l \varepsilon_l \delta a_l + \sum_l \varepsilon_l' \delta a_l' = 0$ (体积不变，能级不变)
结合能量守恒和粒子数守恒可以得到条件极值问题

$$\delta \ln \Xi - \alpha \delta N - \alpha' \delta N' - \beta \delta E$$
$$= \sum_l \left(\ln(\omega_l + a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta \varepsilon_l\right)\delta a_l + \left(\ln(\omega_l' + a_l') - \ln a_l' - \alpha' - \beta \varepsilon_l'\right)\delta a_l' = 0$$

所以有 $a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}$ 和 $a_l' = \frac{\omega_l'}{e^{\alpha' + \beta \varepsilon_l'} - 1}$

对于费米子同样可以得到

$$\Xi = \Omega \cdot \Omega' = \prod_l \frac{\omega_l!}{a_l!(\omega_l - a_l)!} \prod_l \frac{\omega_l'!}{a_l'!(\omega_l' - a_l')!}$$

假设 $\omega_l >> 1, \omega_l - a_l >> 1, a_l >> 1$，采用 Stirling 近似可以得到

$$\ln \Xi = \sum_l \omega_l \ln \omega_l - (\omega_l - a_l)\ln(\omega_l - a_l) - a_l \ln a_l + \omega_l' \ln \omega_l' - (\omega_l' - a_l')\ln(\omega_l' - a_l') - a_l' \ln a_l'$$

其中 $N = \sum_l a_l$， $N' = \sum_l a_l'$， $E = \sum_l \varepsilon_l a_l + \sum_l \varepsilon_l' a_l'$

$\ln \Xi$ 取极大值时，对于 $\delta a_l, \delta a_l'$ 满足 $\delta \ln \Xi = 0$，即

$$\delta \ln \Xi = \sum_l \left(\ln(\omega_l - a_l) - \ln a_l\right)\delta a_l + \left(\ln(\omega_l' - a_l') - \ln a_l'\right)\delta a_l'$$

$\delta N = \sum_l \delta a_l = 0$， $\delta N' = \sum_l \delta a_l' = 0$， $\delta E = \sum_l \varepsilon_l \delta a_l + \sum_l \varepsilon_l' \delta a_l' = 0$ (体积不变，能级不变)
结合能量守恒和粒子数守恒可以得到条件极值问题

$$\delta \ln \Xi - \alpha \delta N - \alpha' \delta N' - \beta \delta E$$
$$= \sum_l \left(\ln(\omega_l - a_l) - \ln a_l - \alpha - \beta \varepsilon_l\right)\delta a_l + \left(\ln(\omega_l' - a_l') - \ln a_l' - \alpha' - \beta \varepsilon_l'\right)\delta a_l' = 0$$

所以有 $a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1}$ 和 $a_l' = \frac{\omega_l'}{e^{\alpha' + \beta \varepsilon_l'} + 1}$

3．假设有两个孤立的玻色子（费米子）系统，粒子数分别为 N1 和 N2，能量分别为 E1 和 E2，体积分别为 V1 和 V2。假设两个系统中粒子的相互作用很弱，可以忽略不计。（玻色子或者费米子系统，选其一讨论。）

a、试推导它们的最概然分布。

b、如果让两个系统只进行热交换，试推导它们进行热交换达到热平衡后的最概然分布。

c、如果让两个系统既进行热交换，又进行粒子交换（但是粒子属于不同的相，即：两个系统中的粒子具有不同系列的能级和简并度），试推导它们达到热力学平衡后的最概然分布。

d、从上述推导中，是否可以看出拉氏乘子α和β的物理意义是什么。

e、在 c 中，如果两个系统的粒子属于同一个相，试讨论系统的最概然分布。

A.对于玻色子系统

$$\Omega_1=\prod_l\frac{(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1}-1)!}{a_l^{\,1}!(\omega_l^{\,1}-1)!}$$

假设$\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1}-1>>1,\omega_l^{\,1}-1>>1,a_l^{\,1}>>1$，采用 Stirling 近似可以得到

$$\ln\Omega_1=\sum_l(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1})\ln(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1})-a_l^{\,1}\ln a_l^{\,1}-\omega_l^{\,1}\ln\omega_l^{\,1}$$

其中 $N_1=\sum_l a_l^{\,1}$， $E_1=\sum_l\varepsilon_l^{\,1}a_l^{\,1}$

$\ln\Omega_1$取极大值时，对于任意$\delta a_l^{\,1}$满足$\ln\Omega_1=0$，即

$$\delta\ln\Omega_1=\sum_l\left(\ln(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1})-\ln a_l^{\,1}\right)\delta a_l^{\,1}$$

$\delta N_1=\sum_l\delta a_l^{\,1}=0$， $\delta E_1=\sum_l\varepsilon_l^{\,1}\delta a_l^{\,1}=0$ (体积不变，能级不变)

结合能量守恒和粒子数守恒可以得到条件极值问题

$$\delta\ln\Omega_1-\alpha^1\delta N_1-\beta^1\delta E_1$$
$$=\sum_l\left(\ln(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1})-\ln a_l^{\,1}-\alpha^1-\beta^1\varepsilon_l^{\,1}\right)\delta a_l^{\,1}=0$$

所以有$a_l^{\,1}=\dfrac{\omega_l^{\,1}}{e^{\alpha^1+\beta^1\varepsilon_l^{\,1}}-1}$和$a_l^{\,2}=\dfrac{\omega_l^{\,2}}{e^{\alpha^2+\beta^2\varepsilon_l^{\,2}}-1}$

B.如果两系统之间只可以进行热交换，那么总能量守恒，两种粒子数分别守恒，则两者达到平衡后的最概然分布与第二题结果一致，即$a_l^{\,1}=\dfrac{\omega_l^{\,1}}{e^{\alpha^1+\beta\varepsilon_l^{\,1}}-1}$和$a_l^{\,2}=\dfrac{\omega_l^{\,2}}{e^{\alpha^2+\beta\varepsilon_l^{\,2}}-1}$。

C.如果两系统之间既可以进行能量交换，又可以进行粒子交换，但是粒子分别属于不同相，那么达到平衡后总能量，总粒子数守恒。不同相中粒子能级不一致，因此可以得到最概然分布满足

$\ln\Xi$取极大值时，对于$\delta a_l^{\,1},\delta a_l^{\,2}$满足$\delta\ln\Xi=0$，即

$$\delta\ln\Xi=\sum_l\left(\ln(\omega_l^{\,1}+a_l^{\,1})-\ln a_l^{\,1}\right)\delta a_l^{\,1}+\left(\ln(\omega_l^{\,2}+a_l^{\,2})-\ln a_l^{\,2}\right)\delta a_l^{\,2}$$

$\delta N=\delta N_1+\delta N_2=\sum_l\delta a_l^{\,1}+\sum_l\delta a_l^{\,2}=0$， $\delta E=\delta E_1+\delta E_2=\sum_l\varepsilon_l^{\,1}\delta a_l^{\,1}+\sum_l\varepsilon_l^{\,2}\delta a_l^{\,2}=0$

结合能量守恒和粒子数守恒可以得到条件极值问题

$$\delta\ln\Xi-\alpha\delta N-\beta\delta E$$
$$=\sum_l\left(\left(\ln(\omega_l^{\ 1}+a_l^{\ 1})-\ln a_l^{\ 1}-\alpha-\beta\varepsilon_l^{\ 1}\right)\delta a_l^{\ 1}+\left(\ln(\omega_l^{\ 2}+a_l^{\ 2})-\ln a_l^{\ 2}-\alpha-\beta\varepsilon_l^{\ 2}\right)\delta a_l^{\ 2}\right)=0$$

所以有 $a_l^{\ 1}=\dfrac{\omega_l^{\ 1}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l^{\ 1}}-1}$ 和 $a_l^{\ 2}=\dfrac{\omega_l^{\ 2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l^{\ 2}}-1}$

D.根据 B 的结果可以看出，当两个子系统只可以进行能量交换时，应该具有相同的温度和 β，说明 β 是由温度决定的，可以认为是温度的函数。
根据 C 的结果可以看出，当两个子系统可以既可以进行能量交换又可以进行粒子交换时，应该具有相同的温度和化学势。同时计算显示其不仅具有相同的 β，而且有相同的 α，说明 α 是由温度和化学势共同决定的，可以认为 α 是温度和化学势的函数。

E.如果两者为相同的相，那么结果与 A 一致，但是其中的能级及能级简并度并不一样。最概然分布满足 $a_l=\dfrac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}$

对于费米子系统除了分母是加号以外，结果全部一致。

A． $a_l^{\ 1}=\dfrac{\omega_l^{\ 1}}{e^{\alpha^1+\beta^1\varepsilon_l^{\ 1}}+1}$ 和 $a_l^{\ 2}=\dfrac{\omega_l^{\ 2}}{e^{\alpha^2+\beta^2\varepsilon_l^{\ 2}}+1}$

B． $a_l^{\ 1}=\dfrac{\omega_l^{\ 1}}{e^{\alpha^1+\beta\varepsilon_l^{\ 1}}+1}$ 和 $a_l^{\ 2}=\dfrac{\omega_l^{\ 2}}{e^{\alpha^2+\beta\varepsilon_l^{\ 2}}+1}$

C． $a_l^{\ 1}=\dfrac{\omega_l^{\ 1}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l^{\ 1}}+1}$ 和 $a_l^{\ 2}=\dfrac{\omega_l^{\ 2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l^{\ 2}}+1}$

E． $a_l=\dfrac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}+1}$

4．考虑一个由 10^6 个三维自由粒子组成的系统。粒子的质量 m＝20000 m_e（m_e 是电子的质量），自旋等于零，粒子之间的相互作用可以忽略不计。粒子在边长 L＝1 m 的容器内运动。

a、试推导出粒子的能级表达式，并讨论能级的间隔大小。

b、在室温下，能否将粒子的能级和动量看成是准连续的？如果是，请给出粒子能级的简并度表达式。

c、假设系统的能量为 10^{-16} J，请问你能否求出系统的 α 和 β 值（给出具体的计算思路）。

A．根据题目条件可知粒子在 x，y，z 方向的动量可能测量值满足

$$p_x=\frac{2\pi\hbar}{L}n_x\quad n_x=0,\pm1,\pm2,\cdots\ p_y=\frac{2\pi\hbar}{L}n_y\quad n_y=0,\pm1,\pm2,\cdots\ p_z=\frac{2\pi\hbar}{L}n_z\quad n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

粒子平动能与动量之间的关系满足

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2),\ n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此不同能级之间的差为

$$\Delta\varepsilon=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2(\Delta n_x^2+\Delta n_y^2+\Delta n_z^2+2n_x\Delta n_x+2n_y\Delta n_y+2n_z\Delta n_z)\neq0$$
$$n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots,\Delta n_x,\Delta n_y,\Delta n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

显然$|\Delta\varepsilon|_{\min}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2(1+2\min\{|n_x|,|n_y|,|n_z|\})\approx 1.2\times10^{-34}(1+2\min\{|n_x|,|n_y|,|n_z|\})J$

B．室温下粒子的平均平动能为$\frac{3}{2}kT\approx 6.17\times10^{-21}J>>|\Delta\varepsilon|_{\min}$

因此室温下粒子的能级和动量可以看成是准连续的。

粒子能级的简并度表示为$\frac{\Delta\omega_l}{h^3}=\frac{L^3dp_xdp_ydp_z}{h^3}$

C．粒子满足玻耳兹曼统计规律，其分布表达式为

$$a_l=e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\frac{\Delta\omega_l}{h^3}，\quad N=\sum_l a_l，\quad E=\sum_l \varepsilon_l a_l$$

且粒子满足准连续条件，求和可以使用积分代替，即

$$N=\sum_l a_l=\frac{V}{h^3}\iiint e^{-\alpha-\frac{\beta}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}dp_xdp_ydp_z=e^{-\alpha}V\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$E=\sum_l \varepsilon_l a_l=\frac{V}{h^3}\iiint \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)e^{-\alpha-\frac{\beta}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}dp_xdp_ydp_z=\frac{3}{2\beta}N$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4\xi}}$$

因此可以求出系统的α和β值分别为-52.63，$1.5\times10^{22}J^{-1}$

5. 试根据公式$p=-\sum_l \alpha_l\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial V}$证明，对于非相对论粒子，

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2),\ n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots，\ 有\ p=\frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

上述结论对于玻耳兹曼分布，玻色分布和费米分布都成立。

粒子的能量满足关系$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2),\ n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且$V=L^3$

所以有$\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial V}=-\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_l}{V}$，带入$p=-\sum_l \alpha_l\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial V}$，得到

$$p=-\sum_l \alpha_l\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial V}=\sum_l \alpha_l\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_l}{V}=\frac{2}{3V}\sum_l \alpha_l\varepsilon_l=\frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

上述证明中并未涉及粒子需要满足什么统计规律，因此结论对于玻耳兹曼分布，玻色分布和费米分布都成立。

统计物理作业三

1、 固体中含有 A、B 两种原子，试证明由于原子在晶格格点的随机分布引起的混合熵为：

$$s = k\ln\frac{N!}{[Nx]![N(1-x)]!} = -Nk[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)]$$

其中，N 是总原子数，x 是 A 原子的百分比，（1－x）是 B 原子的百分比。注意：x<1，上式给出的熵为正值。

由于晶格点是空间定域坐标，将 N 个粒子排在格点上有 $N!$ 种排列方式。同时每种原子自己之间的交换并不产生新的微观状态，因此系统的微观状态数为

$$\Omega = \frac{N!}{(Nx)!(N(1-x))!}$$

根据波尔兹曼关系 $S = k\ln\Omega$ 可知

$$S = k\ln\frac{N!}{(Nx)!(N(1-x))!} \approx kN(\ln N - 1) - kNx(\ln N + \ln x - 1) - kN(1-x)(\ln N + \ln(1-x) - 1)$$
$$= -kN(x\ln x + (1-x)\ln(1-x))$$

2、 晶体中含有 N 个原子。正常情况下原子在晶体中占据格点位置。当原子离开格点位置，占据格点之间的间隙位置时，晶体中出现缺位（该格点上没有原子时称为缺位）和间隙原子。这种缺陷称为 Frankel 缺陷。（1）假设正常位置（格点位置）和间隙位置数目都是 N，试证明由于在晶体中形成了 n 个缺位和间隙原子而具有的熵等于：

$$s = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

（2）假设原子在间隙位置和正常位置的能量差为 u。试由自由能 F＝nu－TS 为极小证明，温度为 T 时，缺位和间隙原子的数目为：

$$n \approx Ne^{-\frac{\mu}{2kT}}$$ （n<<N）.

（1）整个系统由两套可以独立处理的晶格组成。对于晶格坐标，总格点数为 N，空位为 n，原子为 N-n。对于间隙坐标，总格点数为 N，间隙原子为 n，剩余间隙为 N-n。系统的微观状态数为

$$\Omega = \Omega_1 \bullet \Omega_2 = \left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)^2$$

因此系统的熵根据波尔兹曼关系 $S = k\ln\Omega$ 可知

$$S = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

（2）系统的自由能 $F = n\mu - TS$（参考态能量为常数，对求极值没有影响，所以没有列入自由能项）。

系统温度为 T 时，能量极小需要满足

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0 = \mu - 2kT\ln\frac{N-n}{n} \approx \mu - 2kT\ln\frac{N}{n}, (N \gg n)$$

所以有 $n \approx Ne^{-\frac{\mu}{2kT}}$

3、 如果原子脱离晶体内部的正常位置而占据表面上的正常位置，构成新的一层，晶体内部将出现缺位（不会形成间隙原子）。这种缺陷称为 Schottkey 缺位。以 N 表示晶体中的原子数，n 表示晶体中的缺位数，如果忽略晶体体积的变化，试由自由能为极小的条件证明，在温度 T 下，

$n \approx Ne^{-\frac{w}{kT}}$（假设 n<<N），w 为原子在表面位置和正常位置的能量差。

可以认为系统由 N+n 个格点组成，其中 N 个原子，n 个空位，其微观状态数为

$$\Omega = \frac{(N+n)!}{N!n!}$$

因此系统的熵根据波尔兹曼关系 $S = k\ln\Omega$ 可知

$$S = k\ln\frac{(N+n)!}{n!N!}$$

系统的自由能 $F = nw - TS$（参考态能量为常数，对求极值没有影响，所以没有列入自由能项）。

系统温度为 T 时，能量极小需要满足

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0 = w - kT\ln\frac{N+n}{n} \approx w - kT\ln\frac{N}{n}, (N \gg n)$$

所以有 $n \approx Ne^{-\frac{w}{kT}}$

4、 已知粒子遵循玻尔兹曼分布。其能量表达式为：

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + ax^2 + bx$$

其中，a，b 是常数。求粒子的平均能量。

粒子遵循波尔兹曼分布，表面上看能量存在三个平方项（p_x，p_y，p_z）和一个非平方项（x），如果对能量表达式进行基本修改可以得到

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right) + \frac{1}{2}2a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$

因此根据能量均分定理可以得到粒子的平均能量为 $\bar{\varepsilon} = 2kT - \frac{b^2}{4a}$

5、 设有 N 个 A 原子的理想气体，和 N 个 B 原子的理想气体在容器的隔板两侧。这两种气体的温度与体积都相等。如果抽去隔板，两种气体互相扩散。证明：扩散达到平衡后气体的总熵增加了 $2Nk_B\ln 2$。如果这两种原子全同（A=B），证明，扩散达到平衡后总的熵不变。（不同气体混合后增加的熵 $2Nk_B\ln 2$ 称为混合熵。）

混合前系统的总熵是两部分熵之和即 $S_0 = S_{A0} + S_{B0} = k\ln\Omega_{A0} + k\ln\Omega_{B0}$，其中 Ω_{A0} 和 Ω_{B0} 分别是 A(N)，B(N)分别占据 V/2 体积时的微观状态数。其中 V 为总体积。

$$S_{M0} = Nk\left(\ln Z_{M0} - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_{M0}\right) - k\ln N!$$

其中 $Z_{M0} = \frac{V}{2}\left(\frac{2\pi m_M}{h^2\beta}\right)^{3/2}$

当两者混合时 $S = S_A + S_B = k\ln\Omega_A + k\ln\Omega_B$，其中 Ω_A 和 Ω_B 分别是 A(N)，B(N)分别占据 V 体积时的微观

状态数。

$$S_M = Nk\left(\ln Z_M - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_M\right) - k\ln N!$$

其中 $Z_M = V\left(\frac{2\pi m_M}{h^2\beta}\right)^{3/2}$，粒子占据空间体积的变化对熵的影响只是熵公式中的第一项。

因此混合前后熵差为 $\boxed{\Delta S = S - S_0 = 2Nk\ln 2}$

若 A 和 B 是同种粒子，那么当两者混合时 $S = S_A = k\ln\Omega_A$，其中 Ω_A 分别是 A(2N)占据 V 体积时的微观状态数。那么混合后

$$S = 2Nk\left(\ln Z - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\right) - k\ln(2N)!$$

$$\approx 2Nk\left(\ln\frac{Z}{2N} - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\right) + 2Nk$$

混合前 $S_0 = 2S_{A0} = 2k\ln\Omega_{A0}$

$$S_0 = 2Nk\left(\ln Z0 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_0\right) - 2k\ln N!$$

$$\approx 2Nk\left(\ln\frac{Z_0}{N} - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_0\right) + 2Nk$$

其中 $\frac{Z_0}{N} = \frac{Z}{2N} = \frac{V}{2N}\left(\frac{2\pi m_M}{h^2\beta}\right)^{3/2}$，$\boxed{\text{所以混合前后熵不变}}$

作为证明题第一题应该没有任何问题才对，但是很多人化简过程中正负号弄错了，得到了错误结果。证明题起码你们应该看看你得到的表达式是不是与题目要求的一样。简单一对照就会知道自己错，但是很多人并没对照，这就有点太粗心了。

第四题的问题说明还有部分人没弄清楚能量均分定理

统计物理作业四

1. 试证明，单位时间内，碰到单位面积器壁上，速率介于 v 与 v+dv 之间的分子数为

$$d\Gamma = \pi\, n\,(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^3 dv$$

在体积 V 内动量为 $dp_x dp_y dp_z$ 范围内的状态数为 $Vdp_x dp_y dp_z/h^3$

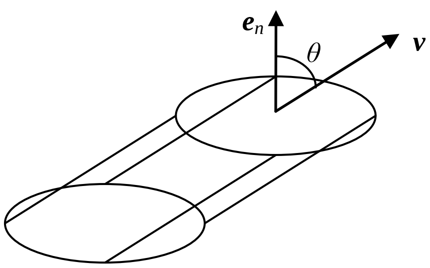
转化为极坐标，即体积 V 内动量为 dp 范围内的微观状态数为 $4\pi Vp^2dp/h^3$

因此有总粒子数表达式为 $\int_0^\infty \frac{4\pi V}{h^3}\, p^2 e^{-\alpha-\frac{p^2}{2mkT}} dp = N$，则可以得到下式

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} = n\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}$$

因此可以得到麦克斯韦速度分布率，单位体积速度处于 $dvd\theta d\varphi$ 范围的粒子数为

$$\begin{aligned}
f(v,\theta,\varphi)dvd\theta d\varphi &= \frac{p^2}{h^3} n\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \sin\theta dp d\theta d\varphi \\
&= \frac{m^2v^2}{h^3} n\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} m\sin\theta dv d\theta d\varphi \\
&= n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi
\end{aligned}$$



由此可以得到时间 dt 内穿过 ds 面积的速度为 v，方向由 θ，φ 确定的粒子数为

$$dn = f(v,\theta,\varphi)dvd\theta d\varphi v\cos\theta dt ds$$

因此单位时间内碰到单位面积器壁上速度处于 v 到 $v+dv$ 范围内的粒子数为

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \iint_{\theta,\varphi} \frac{dn}{dtds} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^3 dv \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^3 dv
\end{aligned}$$

2. 分子从器壁的小孔射出，求在射出的分子束中，分子的平均速率、方均根速率和平均能量。（答：平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$， 方均根速率 $v_s = \sqrt{\frac{4kT}{m}}$，平均能量 $\overline{\frac{1}{2}mv^2} = 2kT$）。

结合第一题结果可以知道，单位时间单位面积上射出的粒子数为

$$\Gamma=\int_0^\infty d\Gamma dv=\int_0^\infty \pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^3dv=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

出射粒子束的平均速率为

$$\bar{v}=\frac{1}{\Gamma}\int_0^\infty d\Gamma v dv=2\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\int_0^\infty \pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^4dv=\sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$$

平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{\Gamma}\int_0^\infty d\Gamma\frac{1}{2}mv^2dv=2\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\int_0^\infty \frac{1}{2}m\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^5dv=2kT$$

因此方均根速率为

$$v_s=\sqrt{\frac{2\bar{\varepsilon}}{m}}=\sqrt{\frac{4kT}{m}}$$

3. 双原子分子转动能量的经典表式是

$$\varepsilon^r=\frac{1}{2I}(p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2)$$

对于双原子分子理想气体，在常温下 k_BT 远远大于转动能级的间距。试求在此条件下双原子分子理想气体的转动配分函数 Z^r 以及转动内能 U^r 和熵 S^r。

由于常温下 kT 远大于转动能级的间距，因此可以采用准连续对其进行处理，所以转动配分函数为

$$\boxed{\begin{aligned}Z^r&=\sum_l\omega_l e^{-\beta\varepsilon_l}=\int e^{-\frac{p_\theta^2}{2IkT}-\frac{p_\varphi^2}{2I\sin^2\theta kT}}\frac{dp_\theta dp_\varphi d\theta d\varphi}{h^2}\\&=\frac{1}{h^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p_\varphi^2}{2I\sin^2\theta kT}}dp_\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p_\theta^2}{2IkT}}dp_\theta\\&=\frac{4\pi^2IkT}{h^2}\int_0^\pi\sin\theta d\theta=\frac{8\pi^2IkT}{h^2}=\frac{8\pi^2I}{h^2\beta}\end{aligned}}$$

经典方法

根据统计关系可以得到内能和熵

$$U^r=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z^r=\frac{N}{\beta}=NkT$$

$$S^r=Nk(\ln Z^r-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z^r)=Nk(\ln\frac{8\pi^2I}{h^2\beta}+1)$$

4. 线性谐振子能量的经典表式为

$$\varepsilon^v=\frac{1}{2\mu}p^2+\frac{\mu\omega^2}{2}q^2$$

试计算经典近似的振动配分函数 Z^v 以及振动内能 U^v 和熵 S^v。

经典近似情况下可以采用准连续处理相关问题

$$\boxed{Z^{v}=\sum_{l}\omega_{l}e^{-\beta\varepsilon_{l}}=\int e^{-\frac{\beta p^{2}}{2\mu}-\frac{\beta\omega^{2}q^{2}}{2\mu}}\frac{dpdq}{h}=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\beta p^{2}}{2\mu}}dp\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\beta\omega^{2}q^{2}}{2\mu}}dq=\frac{2\pi}{h\beta\omega}}$$

因此根据统计关系可以得到内能和熵

$$U^{v}=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z^{v}=\frac{N}{\beta}=NkT$$

$$S^{v}=Nk(\ln Z^{v}-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z^{v})=Nk(\ln\frac{2\pi}{h\beta\omega}+1)$$

5. 晶体中含有 N 个原子，设原子的总的角动量量子数为 1。在外磁场 B 作用下，原子磁距μ可以有三个选择：平行、反平行、或者垂直于外磁场 B。假设磁距之间的相互作用可以忽略。试求在温度为 T 时晶体的磁化强度 m，及其在**弱场高温极限**和**强场低温极限**下的近似值。

原子磁矩μ可以有三个选择：平行、反平行、或者垂直于外磁场 B，因此系统的配分函数为

$$Z=\sum_{l=1}^{3}\omega_{l}e^{-\beta\varepsilon_{l}}=e^{-\beta\mu B}+e^{\beta\mu B}+1$$

所以可以得到晶体的磁化强度为

$$m=\frac{N}{V\beta}\frac{\partial}{\partial B}\ln Z=n\mu\frac{e^{\beta\mu B}-e^{-\beta\mu B}}{e^{\beta\mu B}+e^{-\beta\mu B}+1}=n\mu\frac{2\sinh(\beta\mu B)}{1+2\cosh(\beta\mu B)}$$

弱场高温极限下 $\beta\mu B=\frac{\mu B}{kT}\ll 1$， $e^{\pm\mu B/kT}\approx 1\pm\mu B/kT$

$$m=n\mu\frac{2\sinh(\beta\mu B)}{1+2\cosh(\beta\mu B)}\approx\frac{2}{3}\frac{n\mu^{2}}{kT}B$$

强场低温极限下 $\beta\mu B=\frac{\mu B}{kT}\gg 1$， $e^{-\mu B/kT}\approx 0$， $e^{\mu B/kT}\gg 1$

$$m=n\mu\frac{2\sinh(\beta\mu B)}{1+2\cosh(\beta\mu B)}\approx n\mu$$

6. 银原子蒸气置于磁场 B 中，它的磁距只能取两个方向：沿着磁场或者逆着磁场方向，银原子蒸气总能量为 E。求：(1)磁距μ沿着磁场方向的分子占总数的比例。（2）单个分子的平均磁距$\overline{\mu}$。

假设能级 $\varepsilon_{0}=-\delta,\varepsilon_{1}=\delta$，粒子可以处于两种能量状态中的任意一种。试求：（3）熵 S 同系统的内能 E 的关系式。（4）定性画出 S－E 曲线。（5）如果系统的 S 达到极大值，它对应的分布是什么？

原子磁矩μ可以有两个选择：平行、反平行于外磁场 B，因此系统的配分函数为

$$Z=\sum_{l=1}^{3}\omega_{l}e^{-\beta\varepsilon_{l}}=e^{-\beta\mu B}+e^{\beta\mu B}$$

则系统的内能为

$$E=\mu BNf-\mu BN(1-f)=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z=-N\mu\tanh\frac{\mu B}{kT}$$

有此可以得到磁距μ沿着磁场方向的分子占总数的比例

$$f=\frac{E}{2\mu BN}+\frac{1}{2}$$

单个原子的平均磁矩为

$$\bar{\mu}=\mu f-\mu(1-f)=\frac{E}{BN}$$

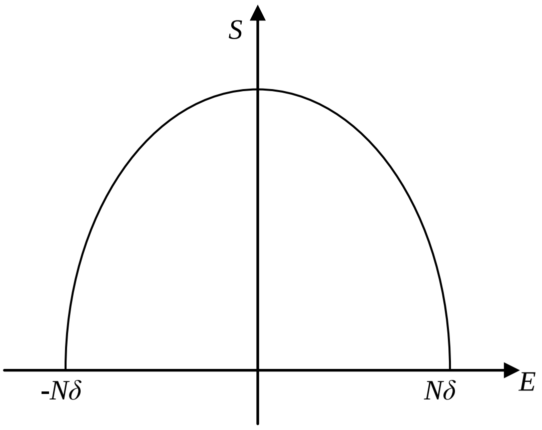
根据波尔兹曼关系式 $S=k\ln\Omega$ 可以计算系统的熵，系统微观状态数 $\Omega=\dfrac{N!}{(Nf)!(N(1-f))!}$

所以有

$$S=k\ln\Omega=-Nk(f\ln f+(1-f)\ln(1-f))$$

$$=Nk\left[\ln 2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{E}{N\delta}\right)\ln\left(1+\frac{E}{N\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{N\delta}\right)\ln\left(1-\frac{E}{N\delta}\right)\right]$$

熵随能量的变化简图为



熵最大值对应的分布是 $S=Nk\ln 2=k\ln 2^N$，即每个粒子都有一半概率平行或反平行与外场。

7. 试证明，对于理想玻色或费米系统，$S=k\ln\Omega$。
对于玻色和费米系统，存在关系

$$\bar{N}=\sum_l a_l=\sum_l\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp 1}$$

其巨配分函数为 $\Xi=\prod_l\Xi_l=\prod_l\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)^{\mp\omega_l}$，$\ln\Xi=\mp\sum_l\omega_l\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$

则可以得到

$$\bar{N}=\sum_l\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp 1}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi$$

$$U=\sum_l a_l\varepsilon_l=\sum_l\frac{\omega_l\varepsilon_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp 1}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi$$

$$Y=\sum_l a_l\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial y}=\sum_l\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp1}\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial y}=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\ln\Xi$$

由于 $\ln\Xi$ 是 α、β、y 的函数，因此其全微分为

$$d\ln\Xi=\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}d\beta+\frac{\partial\ln\Xi}{\partial y}dy$$

因此有

$$\beta\left(dU-Ydy+\frac{\alpha}{\beta}d\bar{N}\right)=-\beta d\left(\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial\ln\Xi}{\partial y}dy-\alpha d\left(\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}\right)$$

$$=d\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}\right)$$

与热力学关系式 $\frac{1}{T}\left(dU-Ydy-\mu d\bar{N}\right)=dS$ 对比可知 $\beta=\frac{1}{kT},\alpha=-\frac{\mu}{kT}$

因此有 $dS=kd\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}\right)$，即 $S=k\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}\right)=k\left(\ln\Xi+\alpha\bar{N}+\beta U\right)$

$$S=k\left(\ln\Xi+\alpha\bar{N}+\beta U\right)=k\left(\mp\sum_l\omega_l\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)+\sum_l\frac{\alpha\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp1}+\sum_l\frac{\beta\omega_l\varepsilon_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\mp1}\right)$$

$$=k\left(\mp\sum_l\omega_l\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)+\sum_l\left(\alpha+\beta\varepsilon_l\right)a_l\right)$$

$$=k\left(\mp\sum_l\omega_l\ln\frac{\omega_l}{\omega_l\pm a_l}+\sum_l a_l\ln\frac{\omega_l\pm a_l}{a_l}\right)$$

$$=\begin{cases}k\sum_l\left[\left(\omega_l+a_l\right)\ln\left(\omega_l+a_l\right)-a_l\ln a_l-\omega_l\ln\omega_l\right]\\ k\sum_l\left[\omega_l\ln\omega_l-a_l\ln a_l-\left(\omega_l-a_l\right)\ln\left(\omega_l-a_l\right)\right]\end{cases}$$

$$e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}=\frac{a_l}{\omega_l\pm a_l}$$

8. 试证明，对于玻色和费米系统的熵可分别表示为：

$$S_{\text{B. E.}}=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s-\left(1+f_s\right)\ln\left(1+f_s\right)\right]$$

$$S_{\text{F. D.}}=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s+\left(1-f_s\right)\ln\left(1-f_s\right)\right]$$

其中，f_s 为量子态 S 上的平均粒子数， 上式表示对所有量子态求和。并证明当 f_s <<1 时，有 $S_{\text{B. E.}}\approx S_{\text{F. D.}}\approx S_{\text{M. B.}}=-k\sum_s[f_s\ln f_s-f_s]$。

玻色系统和费米系统的微观状态数分别为

$$\Omega_{\text{B.E.}}=\prod_l\frac{(\omega_l-a_l-1)!}{a_l!(\omega_l-1)!},\ \ \Omega_{\text{F.D.}}=\prod_l\frac{\omega_l!}{a_l!(\omega_l-a_l)!}$$

则有

$$\begin{aligned}
S_{\text{B.E.}} &= k\ln\Omega_{\text{B.E.}} = k\sum_l\left[\ln(\omega_l+a_l-1)!-\ln a_l!-\ln(\omega_l-1)!\right] \\
&\approx k\sum_l\left[(\omega_l+a_l)\ln(\omega_l+a_l)-a_l\ln a_l-\omega_l\ln\omega_l\right] \\
&= k\sum_l\omega_l\left[(1+f_l)\ln\omega_l(1+f_l)-f_l\ln\omega_l f_l-\ln\omega_l\right] \\
&= -k\sum_s\left[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)\right]
\end{aligned}$$

其中使用了近似条件 $a_l\gg1,\omega_l\gg1,\omega_l+a_l-1\approx\omega_l+a_l,\omega_l-1\approx\omega_l$，以及 Sterling 近似。最后一步展开是从能级到量子态的展开。能级可能是简并的，但是量子态是非简并的，且同一能级的不同量子态上的平均粒子数是一样的。

$$\begin{aligned}
S_{\text{F.D.}} &= k\ln\Omega_{\text{F.D.}} = k\sum_l\left[\ln\omega_l!-\ln a_l!-\ln(\omega_l-a_l)!\right] \\
&\approx k\sum_l\left[\omega_l\ln\omega_l-a_l\ln a_l-(\omega_l-a_l)\ln(\omega_l-a_l)\right] \\
&= k\sum_l\omega_l\left[\ln\omega_l-f_l\ln\omega_l f_l-(1-f_l)\ln\omega_l(1-f_l)\right] \\
&= -k\sum_s\left[f_s\ln f_s+(1-f_s)\ln(1-f_s)\right]
\end{aligned}$$

其中使用了 Sterling 近似。最后一步展开是从能级到量子态的展开。能级可能是简并的，但是量子态是非简并的，且同一能级的不同量子态上的平均粒子数是一样的。
经典的玻尔兹曼统计未计及粒子全同性的影响，根据定域玻尔兹曼统计计算的熵不满足广延性要求，其熵为

$$\begin{aligned}
S_{\text{M.B.}} &= k\ln\frac{\Omega_{\text{M.B.}}}{N!} = k\sum_l\left[-\ln a_l!-a_l\ln\omega_l\right] \\
&\approx k\sum_l\left[-a_l\ln a_l-a_l-a_l\ln\omega_l\right] \\
&= k\sum_l\omega_l\left[-f_l\ln\omega_l-f_l\ln\omega_l f_l-f_l\right] \\
&= -k\sum_s\left[f_s\ln f_s-f_s\right]
\end{aligned}$$

当 f_s<<1 时，$(1-f_s)\ln(1-f_s)\to0,(1+f_s)\ln(1+f_s)\to0$

利用泰勒展开可以得到 $(1-f_s)\ln(1-f_s)\approx-f_s,(1+f_s)\ln(1+f_s)\approx f_s$

因此有 $S_{\text{B.E.}}\approx S_{\text{F.D.}}\approx S_{\text{M.B.}}=-k\sum_s\left(f_s\ln f_s-f_s\right)$

当然利用 f_s<<1 时，满足非简并条件，则有 $\Omega_{\text{B.E.}}\approx\Omega_{\text{F.D.}}\approx\dfrac{\Omega_{\text{M.B.}}}{N!}$，因此有 $S_{\text{B.E.}}\approx S_{\text{F.D.}}\approx S_{\text{M.B.}}$

统计物理作业五

1. 求弱简并理想费米(玻色)气体的压强和熵。

提示：$S=\int\frac{C_V}{T}dT+S_0(V)$。当$n\lambda^3<<1$时弱简并理想费米(玻色)气体趋于经典理想气体，据此可以确定函数 $S_0(V)$。

答：

$$p = nkT\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right], S = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

弱简并理想费米(玻色)气体在体积 V 内,能量处于$\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$范围内粒子的可能微观状态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

因此系统的粒子总数和能量分别为

$$N = g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon \quad U = g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon$$

当满足弱简并条件时$e^{-\alpha} \ll 1$（$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}\approx \varepsilon^{-\alpha-\beta\varepsilon}\left(1\mp\varepsilon^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)$），因此关于能量和粒子数表达式展开到一阶有

$$\begin{aligned}
N &= g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon & U &= g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon\\
&\approx g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}}e^{-\alpha}\right] & &\approx g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}}e^{-\alpha}\right]\\
&= g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}Ve^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}}e^{-\alpha}\right] & &= \frac{3}{2}g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}VkTe^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}}e^{-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

由于$e^{-\alpha} \ll 1$，采用零级近似可以得到（系统的自由变量选择位 n，V，T）

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \quad U = \frac{3}{2}NkT\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}}\frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

同样系统的巨配分函数的对数可以近似为

$$\begin{aligned}
\ln\Xi &= \sum_l \mp\omega_l \ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right) \approx \mp g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)d\varepsilon\\
&= \mp g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\left\{\left[\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln\left(1\mp e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)\right]_0^\infty \mp \beta\int_0^\infty \frac{2\varepsilon^{3/2}}{3\left(e^{\alpha+\beta\varepsilon}\mp 1\right)}d\varepsilon\right\}\\
&= \frac{2U}{3kT} = nV\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}}\frac{n}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

所以有

$$P = \frac{3U}{2V} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi = nkT\left[1 \pm \frac{1}{2^{5/2}g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

$$S = k\left(\ln \Xi + \alpha N + \beta U\right) = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

根据 U 的表达式可以得到定容热容为

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk\left[1 \mp \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{gV}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

利用玻尔玻尔兹曼统计得到经典统计熵为

$$S' = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right\} = \int \frac{C_{V0}}{T}dT + S_0, C_{V0} = \frac{3}{2}Nk$$

对于玻色和费米系统，热容将会发生变化，熵可以表示为

$$S = S' + \int \frac{C_V - C_{V0}}{T}dT = Nk\left\{\ln\left(\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}$$

2. 试证明，在热力学极限下均匀的二维理想玻色气体不会发生 Bose－Einstein 凝聚现象。

提示：在热力学极限下理想玻色气体的凝聚温度 Tc 由积分 $\int \frac{D(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = n$ 确定。对于二维气体上述积分发散，这意味着在有限温度下二维理想玻色气体的化学势不可能趋于 0，因此不存在玻色凝聚现象。

二维情况下，电子能量处于 $\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$ 范围内的量子态数目可以表示为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi Apdp}{h^2} = \frac{2\pi mAd\varepsilon}{h^2}$$

发生 Bose-Einstein 凝聚现象是由于系统的化学势随着温度的降低而升高，如果其化学势可以升高到趋于-0 的情况，那么处于基态的粒子数将与总粒子数可比，即产生凝聚现象。如果存在凝聚现象，那么临界温度可以由下式确定(化学势为-0)

$\int_0^\infty \frac{D(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = N$ 即需要满足

$$\frac{2\pi m}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{\exp(\varepsilon / kT_C) - 1}d\varepsilon = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1}dx = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}dx = \frac{2\pi mkT_C}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

因此不存在使得化学势趋于-0 的有限温度，所以二维系统不会发生 Bose-Einstein 凝聚现象。

3. 假设自由电子在二维平面上运用，密度为 n。试求 0K 时二维电子气体的费米能级、内能和简并压。

答：$\mu(0) = \frac{h^2}{4\pi m}n$，$U = \frac{1}{2}N\mu(0)$，$p = \frac{1}{2}n\mu(0)$

二维情况下，电子能量处于$\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$范围内的量子态数目可以表示为（计及电子自旋贡献）

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi Apdp}{h^2} = \frac{4\pi mAd\varepsilon}{h^2}$$

在温度 T 下，能量为 ε 的量子态的平均电子数满足费米分布

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}$$

因此电子数可以表示为$\frac{4\pi mA}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} d\varepsilon = N$

0K 时能量低于化学势的能级为满态，而高于化学势的能级为空态，因此有

$$\frac{4\pi mA}{h^2}\mu(0) = N \Rightarrow \mu(0) = \frac{h^2}{4\pi m}n$$

内能为$U(0) = \frac{4\pi mA}{h^2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} d\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{4\pi mA}{h^2}\mu(0)^2 = \frac{1}{2}N\mu(0)$

简并压为

$$P = -\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = -\sum_l a_l \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{2mA}(2\pi\hbar)^2\left(n_x^2 + n_y^2\right)\right)$$

$$= \sum_l a_l \frac{1}{2mA^2}(2\pi\hbar)^2\left(n_x^2 + n_y^2\right) = \frac{U}{A} = \frac{1}{2}n\mu(0)$$

4. 试证明空窖辐射的辐射通量密度 J_u 为 $J_u = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60\hbar^3 c^2}$。

提示：计算单位时间内碰到单位面积器壁上的光子所携带的能量。

对于空窖辐射（开系）而言不存在粒子数守恒，因此光子的分布率为

$$f = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}, \varepsilon = \hbar\omega = cp, p = \hbar k$$

因此空窖辐射的通量密度为（考虑电子自旋简并度）

$$J_u = \frac{2}{h^3}\int \frac{\hbar\omega c\cos\theta p^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$= \frac{2c}{(2\pi c)^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60\hbar^3 c^2}$$

5. 写出二维空间中平衡辐射的普朗克公式，并据此求平均总光数、内能和辐射通量密度。

答：普朗克公式：$\frac{A}{\pi c^2}\frac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$；平均总光子数：$\overline{N} = \frac{\pi A}{6c^2\hbar^2}k^2T^2$；

内能：$U=\dfrac{2.404A}{\pi c^2\hbar^2}k^3T^3$；辐射能量密度：$J_u=\dfrac{1.202}{\pi^2 c\hbar^2}k^3T^3$

二维情况下的态密度可以表示为

$$D(\omega)d\omega = \frac{2Apdp\int_0^{2\pi} d\theta}{h^2} = \frac{A\omega d\omega}{\pi c^2}$$

因此可以得到普朗克公式：$\dfrac{A}{\pi c^2}\dfrac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$

平均总光子数为

$$\bar{N} = \frac{A}{\pi c^2}\int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{Ak^2T^2}{\pi\hbar^2c^2}\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x-1} = \frac{\pi Ak^2T^2}{6\hbar^2c^2}$$

$$U = \frac{A}{\pi c^2}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{Ak^3T^3}{\pi\hbar^2c^2}\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x-1} = \frac{2.404Ak^3T^3}{\pi\hbar^2c^2}$$

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{2}{h^2}\int \frac{\hbar\omega c\cos\theta pdpd\theta}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} \\ &= \frac{\hbar}{2c\pi^2}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{k^3T^3}{c\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x-1} = \frac{2.404k^3T^3}{c\pi^2\hbar^2} \end{aligned}$$

6. 试求在绝对零度下电子气体中电子的平均速率$\bar{v}$。（答：$\bar{v}=3p_0/4m$。P_0是费密动量）

电子动量处于$p\to p+dp$范围内的量子态数目可以表示为（计及电子自旋贡献）

$$D(p)dp = \frac{8\pi Vp^2dp}{h^3} \Rightarrow D(v)dv = \frac{8\pi m^3Vv^2dv}{h^3}$$

在温度 T 下，能量为 ε 的量子态的平均电子数满足费米分布

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1},\ \varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$$

因此 0K 电子平均速率可以表示为

$$\bar{v} = \frac{8\pi m^3V}{Nh^3}\int_0^{v_0}\frac{v^3dv}{e^{\frac{mv^2/2-\mu}{kT}}+1} = \frac{8\pi m^3V}{Nh^3}\frac{v_0^4}{4}$$

$$N = \frac{8\pi m^3V}{h^3}\int_0^{v_0}\frac{v^2dv}{e^{\frac{mv^2/2-\mu}{kT}}+1} = \frac{8\pi m^3V}{h^3}\frac{v_0^3}{3}$$

所以有$\bar{v} = \dfrac{3}{4}v_0 = \dfrac{3p_0}{4m}$

7. 在固态时，硒原子和碲原子均排成平行的长链，请证明对于这些物质在低温时的热容量 C_V 与温度 T 成正比。在固态时，石墨中的 C 原子按照平面排列，请证明在低温下其 C_V 与 T^2 成正比。

由于硒原子和碲原子均排成平行的长链，可以近似认为系统为一维的。由 N 个原子组成的系统，其振动自由度为 N。

一维和二维情况下，采用准连续近似可以求得态密度分别为

$$D(\omega)d\omega=\frac{2Ldp}{h}=\frac{Ld\omega}{\pi c_l}=B_1 d\omega \qquad D(\omega)d\omega=\frac{2\pi Apdp}{h^2}=\frac{A\omega d\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{c_l{}^2}+\frac{1}{c_t{}^2}\right)=B_2\omega d\omega$$

由此可以得到一维和二维情况下的德拜频率分别为

$$\int_0^{\omega_D}D(\omega)d\omega=\int_0^{\omega_D}B_1 d\omega=N\Rightarrow\omega_D=\frac{N}{B_1} \qquad \int_0^{\omega_D}D(\omega)d\omega=\int_0^{\omega_D}B_2\omega d\omega=2N\Rightarrow\omega_D=\frac{4N}{B_2}$$

低温下系统的内能为

$$U=U_0+\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega D(\omega)d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=U_0+\frac{B_1k^2T^2}{\hbar}\int_0^{x_D}\frac{xdx}{e^x-1}\approx U_0+\frac{B_1k^2T^2}{\hbar}\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x-1}=U_0+\frac{B_1\pi^2k^2T^2}{6\hbar}$$

$$U=U_0+\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega D(\omega)d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=U_0+\frac{B_2k^3T^3}{\hbar^2}\int_0^{x_D}\frac{x^2dx}{e^x-1}\approx U_0+\frac{B_2k^3T^3}{\hbar^2}\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{e^x-1}=U_0+\frac{2.404B_2k^3T^3}{\hbar^2}$$

因此一维系统和二维系统低温热容分别为

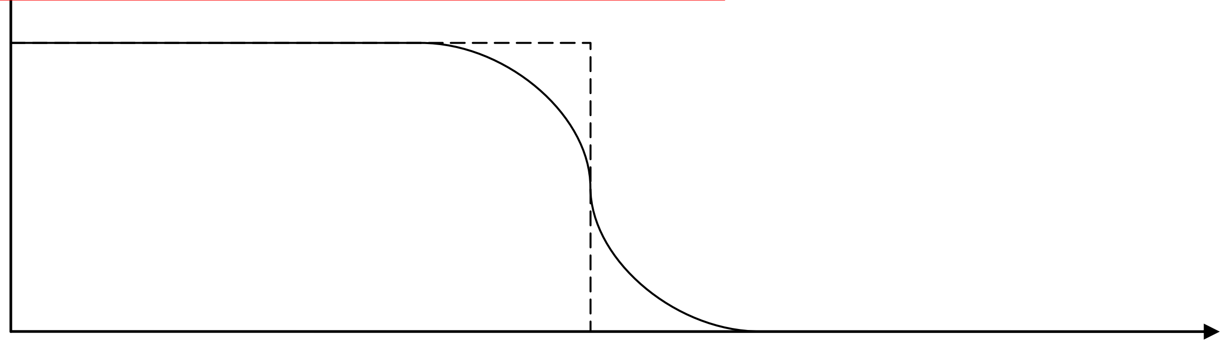
$$C_V=\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{B_1\pi^2k^2T}{3\hbar}\propto T \qquad C_V=\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{3\times 2.404B_2k^3T^2}{\hbar^2}\propto T^2$$

8. 试求在低温下金属中自由电子气体的巨配分函数的对数，从而求出电子气体的压强，内能和熵。
提示：积分

$$\int_0^\infty\varepsilon^{1/2}\ln(1+e^{-\alpha-\beta\varepsilon})d\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(1+e^{-\alpha-\beta\varepsilon})\Big|_0^\infty-\frac{2}{3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon$$

答：$\ln\Xi=\dfrac{16\pi V}{15h^3}(\dfrac{2m}{\beta})^{3/2}(-\alpha)^{5/2}(1+\dfrac{5\pi^2}{8\alpha^2})$。



三维空间的态密度为（计及电子自旋简并度 2）

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

因此准连续近似下存在

$$\begin{aligned}
\ln \Xi &= \sum_{l} \omega_l \ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right) = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)d\varepsilon \\
&= 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon})\Big|_0^\infty - \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}(-\beta)}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon\right] \\
&= \frac{8\pi V\beta}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}d\varepsilon = \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{\alpha+x}+1}dx \\
&= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_\alpha^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy = \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy - \int_0^\alpha \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy\right] \\
&= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy + \int_0^{-\alpha} \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^{-y}+1}dy\right] \\
&= \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy - \int_0^{-\alpha} \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy - \int_0^{-\alpha}(y-\alpha)^{3/2}dy\right] \\
&\approx \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{(y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy - \int_0^{\infty} \frac{(-y-\alpha)^{3/2}}{e^{y}+1}dy + \frac{2}{5}(-\alpha)^{5/2}\right] \\
&\approx \frac{8\pi V}{3h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\left[3(-\alpha)^{1/2}\int_0^\infty \frac{y}{e^{y}+1}dy + \frac{2}{5}(-\alpha)^{5/2}\right] \\
&= \frac{16\pi V}{15h^3}(\frac{2m}{\beta})^{3/2}(-\alpha)^{5/2}(1 + \frac{5\pi^2}{8\alpha^2})
\end{aligned}$$

因此有内能，压强及熵为

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi = \frac{3}{2\beta}\ln\Xi \qquad P = \frac{2U}{3V} = \frac{\ln\Xi}{\beta V}$$

$$\alpha\bar{N} = -\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi = \frac{1}{2}\frac{16\pi V}{15h^3}(\frac{2m}{\beta})^{3/2}(-\alpha)^{5/2}(5 + \frac{5\pi^2}{8\alpha^2})$$

$$S = k\left(\ln\Xi + \alpha\bar{N} + \beta U\right) = \frac{5}{2}k\ln\Xi + k\alpha\bar{N}$$