第一章
命题逻辑的基本概念

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

本讲提纲

- 命题形式化
- 波兰表达式

1.5 命题形式化

- 举例

考察 IF P THEN Q ELSE R

试将其形式化（用所学的联接词表示）

- $A_1 = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$
- $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

```
function boolean
  Program(boolen P)
{
     if ( P )
          return Q;
     else
          return R;
}
```

- 真值表如下

1.5 命题形式化

P	Q	R	P→Q	¬P→R	A_1	P∧Q	¬P∧R	A_2
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	1		1	1
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	1				
1	1	0	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1		1

1.5 命题形式化

由上述真值表可得出 $A_1 = A_2$

- 记 $A_3 = (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q)$
- 但 $A_3 \neq A_2$

- 注意掌握用不同的形式表示同一命题公式的方法
- 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题演算中的问题

1.5 命题形式化

- 需注意：逻辑联结词是从自然语句中提炼出来的，它仅保留了逻辑内容。
- 自然语句本身并不严谨，常有二义性（歧义），自然会出现同一自然语句的不同形式的逻辑描述。

1.5 命题形式化-忌生搬硬套

- 例1：张三与李四是表兄弟。

这是普通的自然用语，它应是一个命题，以R表示。

若形式地规定：

P：张三是表兄弟。
Q：李四是表兄弟。

那么$R = P \wedge Q$。

1.5 命题形式化

- 显然，这样的形式化是错误的

原因很简单：“张三是表兄弟”，“李四是表兄弟”都不是命题。实际上“张三与李四是表兄弟”才是一个命题，而且是一个简单命题。

该例说明自然语句中的“与”不一定都能用合取词来表达。

1.5 命题形式化

- 例2：张三或李四都能做这件事。

这句话中的“或”就并非用析取词来表示。

该命题的内容可以理解为：

张三能做这件事而且李四也能做这件事。

这样，这句话便应以$P \wedge Q$的形式表示了。

1.5 命题形式化

- 例3：给出三个命题
  - A：今晚我在家里看电视。
  - B：今晚我去体育场看球赛。
  - C：今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：C与A∨B表达的是否是同一命题？

1.5 命题形式化

C同A、B的真值关系可由表1.5.1给出

A	B	C	A∨B
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	T

1.5 命题形式化

该表的前三行很容易理解，而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然对同一个人来说这是不可能的。

从而这时C的真值为F。这就说明了C与A∨B逻辑上是并不相等的。即C中出现的“或”不能以“∨”来表示。

1.5 命题形式化

由图1.5.1给出的C同A,B的逻辑关系，常称为异或（也称不可兼或）。

以▽表示，有C=A▽B

不难验证$C=(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

若以A,B分别表示一位二进制数字，则C就表示了A与B的和（不考虑进位）。

1.5 命题形式化

- 异或（不可兼或）联结词

  异或（又称不可兼或）词是二元命题联结词。

- 两个命题P和Q的异或构成一个新的命题，记作 $P \triangledown Q$。

- 当且仅当P与Q的真值不相同时，$P \triangledown Q$为T，否则 $P \triangledown Q$的真值为F。

1.5 命题形式化

- 异或真值表

P	Q	P▽Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1.5 命题形式化

- 例4：今天我上班，除非我今天生病了。

P：今天我生病
Q：今天我上班

例4是个因果关系，意思是：

如果今天我不生病，那么我上班。

所以可描述成$\neg P \rightarrow Q$。

1.5 命题形式化

- 举例：将“除非他通知我，否则我不参加会议”表示为复合命题的形式。
- 思路：这里的联结词是“除非……否则……”
  一种方式可以理解为“如果他通知我，则我参加会议而且，如果他不通知我，则我不参加会议”

1.5 命题形式化

或表述为“他通知我”和“我参加会议”同为真或同为假。按照这种理解可以如下形式化：

用P表示“他通知我”，Q表示“我参加会议”，则该语句可表为

$$(P \rightarrow Q) \land (\neg P \rightarrow \neg Q)$$

或 $$P \leftrightarrow Q$$

1.5 命题形式化

另外，对这句话，有人也可能会这样理解：

只有他通知我，我才可能参加会议，但不一定就参加

换句话说可以理解为：

如果我参加会议，他一定通知我了

这样，上面语句又可表示为：

$$\neg P \rightarrow \neg Q$$

或 $$Q \rightarrow P$$

1.5 命题形式化

说明： 自然语言是很复杂的，常常会出现一些没有明确定义过的联结词。要根据语句的含义将联结词翻译为命题联结词。

在将自然语言表为命题时，需要根据上下文来分析。

另外，自然语言有时又是含混不清的，一句话往往可以有多种不同的解释。

1.5 命题形式化

由此可见，在自然语句形式化中，对原句如何理解至关重要。

1.6 波兰表达式（选学内容）

- 波兰的数理逻辑学家J. Lukasiewicz提出的一种符号表达式标记方法（**前缀表达式**）

$$a+b \rightarrow +ab$$

- 逆波兰表达式：**后缀表达式**

$$a+b \rightarrow ab+$$

- 在数据结构和编译原理中广泛采用

1.6 波兰表达式（选学内容）

- 括号的使用，联结词的中缀、前缀、后缀形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。
- 若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

1.6.1 计算机识别括号的过程

- 合式公式的定义中使用的是联结词的中缀表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

- 计算机识别处理这种中缀表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。如考察公式

$$(P\vee(Q\wedge R))\vee(S\wedge T)$$

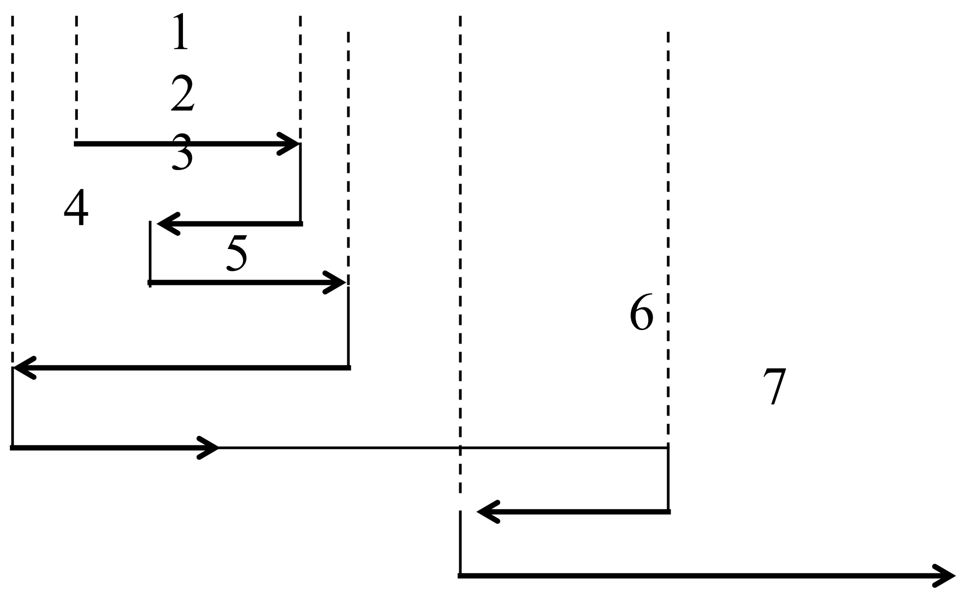
1.6.1 计算机识别括号的过程

- 其真值的计算过程，开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式(Q∧R)方可计算真值。
- 随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式(P∨(Q∧R))并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

1.6.1 计算机识别括号的过程

- 如图所示的扫描过程 1→2→3→…→6→7

(P ∨ (Q∧R)) ∨ (S ∧ T)



1.6.1 计算机识别括号的过程

- 公式中的运算符是否非要括号才能定义呢?

若一个式子中同时使用两种或两种以上的运算符放置方式时，无论怎样对运算符的优先级进行规定，括号都不能完全避免。

例如：对数运算符 **log** 是前置运算符(log1024)；

阶乘运算符 ！ 是后置运算符(n!)。

1.6.1 计算机识别括号的过程

- 解决方案：可以采用下面的方法
  - 将中置、后置全部换成前置（波兰式）
  - 或将中置、前置全部换成后置(逆波兰式)

这样，便可不使用任何括号。

1.6.1 波兰式

- 一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

中置式如	P∨Q	（中缀式）
前置式如	∨PQ	（前缀式）
后置式如	PQ∨	（后缀式）

前置式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家

J. Lukasiewicz提出的，故称之为波兰表达式。

1.6.1 波兰式

- 如将公式P∨((Q∧R)∧S)的这种中置表示化成波兰式，可使用由内层括号逐步向外层脱开（或由外层向内逐层脱开）的办法。

P ∨ ((Q∨R)∧S)

1

∨QR

2

∧∨QRS

3

∨P∧∨QRS

1.6.1 波兰式

- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自左向右扫描一次完成，避免了重复扫描。同样后置表示（逆波兰式）也有类似的优点。

- 而且自左向右一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

1.6.1 波兰式

举例：中置变前置 $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

由里向外：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$P\vee(\vee QR\wedge S)$

$P\vee\wedge\vee QRS$

$\vee P\wedge\vee QRS$

由外向里：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\ ((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\wedge(Q\vee R)\ S$

$\vee P\wedge\vee QRS$