概率论与数理统计：第八次作业（共八题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的解答必须个人书写完成。

(1) 某工厂生产的电容器的使用寿命服从指数分布，为了解其平均寿命，从中抽出 n 件产品测其实际的使用寿命。请说明在这里，什么是总体，什么是样本，并指出样本的分布。

(2) 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, n 个样本的经验分布函数为 $F_n(x)$，请说明：

$$E(F_n(x)) = F(x), \quad Var(F_n(x)) = \frac{1}{n}F(x)[1-F(x)].$$

(3) 设 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 是从同一个正态分布总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中独立抽取的容量相同的两个样本的样本均值。试确定样本容量 n 使得两个样本均值的差超过 σ 的概率不超过 0.01.

(4) 设总体密度函数为 $p(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$, $x_1, \ldots, x_n$ 是来自该总体的简单样本。当 $n = 9$ 时，求样本中位数的密度函数。当 $n = 100$（较大）时，求样本中位数的渐进密度函数。

(5) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(5)}$ 为来自该总体的容量为 5 的样本的次序统计量。

(a) 求二维随机向量 $(x_{(2)}, x_{(4)})$ 的联合分布.

(b) 求随机变量 $Y = \frac{x_{(2)}}{x_{(4)}}$ 的密度函数。

(c) 请说明 Y 与 $x_{(4)}$ 相互独立。

(6) 设 x_1, x_2 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本。

(a) 求二维随机向量 (Y, Z) 的联合密度函数, 其中 $Y = x_1 + x_2$, $Z = x_1 - x_2$。

(b) Z 与 Y 是否相互独立?

(c) 求 $(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2})^2$ 的分布类型。

(7) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本，$y_1, \ldots, y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，两个样本相互独立，请说明

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_1) + (\bar{y} - \mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2),$$

其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 为各自的样本均值，$s_w^2 = \frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{m+n-2}$, 而 s_x^2 和 s_y^2 为各自的样本方差。

(8) 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自总体 X 的样本。X 的分布函数为连续单调递增函数 $F(x)$.
   (a) 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数。
   (b) 求 $Z = -\ln Y$ 的分布类型。
   (c) 求统计量 $T = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i)$ 的分布类型。