第二章
命题逻辑的等值和推理演算

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

本章提纲

本章主要内容

- 本章讨论命题逻辑的**等值和推理演算**，是命题逻辑的核心内容。

- 首先介绍命题公式等值的概念，并通过等值定理给出命题公式等值的充要条件。

2.1 等值定理

- 等值

给定两个命题公式 A 和 B，设$P_1,P_2,\ldots,P_n$为出现于 A 和 B 中的所有命题变项，则公式A和B共有2^n个解释。

若在其中的任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称A和 B 是等值的，记作

A=B 或 A⇔B

2.1 等值定理

- 定理2-1-1

  设**A,B**为两个命题公式，**A = B**的充分必要条件是**A↔B**为一个重言式。

- 等值定理的证明

等值定理的证明

- 必要性：$\leftarrow$

若$A\leftrightarrow B$是重言式，则在任一解释下，$A\leftrightarrow B$的真值均为真。

由 $A\leftrightarrow B$的定义，仅当A、B真值相同时，才有$A\leftrightarrow B = T$。

所以在任一解释下，A、B都有相同的真值，从而有$A = B$。

等值定理的证明

- 充分性：→

若有A＝B，则在任一解释下，A、B都有相同的真值，依 A↔B 的定义，A↔B的取值只能为真，故推出A↔B是重言式。

2.1 等值定理

- 由等值定理，若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。
- 等值关系是一种**等价关系**，满足**自反性、传递性、对称性**。

逆命题、否命题与逆否命题

- 逆命题

  若将$P \to Q$视为原命题，则称$Q \to P$为它的<u>**逆命题**</u>。

- 否命题

  若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg P \to \neg Q$为它的<u>**否命题**</u>。

- 逆否命题

  若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg Q \to \neg P$为它的<u>**逆否命题**</u>。

逆命题、否命题与逆否命题

- 一个命题与它的逆否命题等值

$$\neg Q \rightarrow \neg P \;=\; P \rightarrow Q$$

- 一个命题P→Q的逆命题与它的否命题等值

$$Q \rightarrow P \;=\; \neg P \rightarrow \neg Q$$

数学证明中的反证法

本章主要内容（续1）

- 介绍常用的基本等值公式（命题定律），并对一些重要的公式给出解释性的说明。

- 给出由给定的真值表列写相应的命题公式的方法，从而进一步揭示命题公式与真值表的关系。

2.2 等值公式

◉ 2-2-4　子公式

若 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

2.2 等值公式

- 2-2-5　置换规则

  设 X 为公式 A 的子公式，用与 X 等值的公式Y 将 A中的 X代替，称为置换，该规则称为置换规则。

- 置换后公式 A 化为公式 B，置换规则的性质保证公式 A 与公式 B 等值，即A=B。

- 当且当 A 是重言式时，置换后的公式B也是重言式。

置换与代入的差别

- 置换
  - 不要求替换所有的命题变项，代入要求“所有”
- 代入是相对**重言式**而言

2.2 等值公式

- 定理：

设Φ(A)是含命题公式 A 的命题公式，Φ(B)是用命题公式 B 置换了Φ(A)中的 A 之后得到的命题公式

如果 A = B，则Φ(A) = Φ(B)。

2.2.6 基本的等值公式

- 双重否定律

  $\neg\neg P = P$

- 结合律

  $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

  $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ $(P=F?)$

- 交换律

  $P \vee Q = Q \vee P$

  $P \wedge Q = Q \wedge P$

  $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

  $P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$

2.2.6 基本的等值公式

- 分配律

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$

- 等幂律（恒等律）

$P \vee P = P$

$P \wedge P = P$

$P \rightarrow P = T$

$P \leftrightarrow P = T$

- 吸收律

$P \vee (P \wedge Q) = P$

$P \wedge (P \vee Q) = P$

2.2.6 基本的等值公式

- 摩根（De Morgan）律：

$$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$

2.2.6 基本的等值公式

- 同一律：

$$\mathbf{P \lor F = P} \qquad \mathbf{P \land T = P}$$

$$\mathbf{T \rightarrow P = P} \qquad \mathbf{T \leftrightarrow P = P}$$

还有

$$\mathbf{P \rightarrow F = \neg P} \qquad \mathbf{F \leftrightarrow P = \neg P}$$

2.2.6 基本的等值公式

- 零律：

$$P \vee T = T$$

$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \to T = T$$

$$F \to P = T$$

- 补余律：

$$P \vee \neg P = T$$

$$P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \to \neg P = \neg P$$

$$\neg P \to P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用的等值式

- 蕴涵等值： $\mathbf{P \to Q = \neg P \lor Q}$
- 假言易位： $\mathbf{P \to Q = \neg Q \to \neg P}$
- 前提合并： $\mathbf{P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R}$
- 前提互换： $\mathbf{P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)}$

常用的等值式

- 等价等值：

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q = (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$$

- 等价否定等值：

$$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$$

- 归谬论：

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$$

思考题

- 给定由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到命题公式 A 的真值表，如何从取F的行来列写命题公式 A 对$P_1,P_2,\ldots,P_n$的逻辑表达式.

P	Q	g_0	g_1
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	F	T

思考题

- 给定由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到命题公式 A 的真值表，如何从取T的行来列写命题公式 A 对$P_1,P_2,\ldots,P_n$的逻辑表达式.

P	Q	g_0	g_1
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	F	T