

概率论与数理统计：第十四次作业（共五题）

作业请按时完成，过期不接受补交。同学之间可以相互讨论，但最终的答案必须个人书写完成。

- (1) 假设回归直线通过原点，即一元线性回归模型为

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$E(\epsilon_i) = 0, \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ , 诸观测数值相互独立。

(a) 写出  $\beta$  的最小二乘估计, 和  $\sigma^2$  的无偏估计;

(b) 对给定的  $x_0$ , 其对应的因变量均值的估计为  $\hat{y}_0$ , 求  $\text{Var}(\hat{y}_0)$ .

- (2) 设回归模型为

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \text{各 } \epsilon_i \text{ 独立同分布, } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

求  $\beta_0, \beta_1$  的最大似然估计, 它们与其最小二乘估计一致吗?

- (3) 现收集到 16 组合金钢中的碳含量  $x$  与强度  $y$  的数据, 求得  $\bar{x} = 0.13, \bar{y} = 49, l_{xx} = 0.4, l_{xy} = 27, l_{yy} = 2542$ .

(a) 建立  $y$  关于  $x$  的一元线性回归方程  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ .

(b) 写出  $\hat{\beta}_0$  与  $\hat{\beta}_1$  的分布。

(c) 求  $\hat{\beta}_0$  与  $\hat{\beta}_1$  的相关系数。

(d) 给出  $\beta_1$  的 0.95 置信区间。

(e) 在  $x = 0.16$  时求对应的  $y$  的 0.95 预测区间。

- (4) 在生产中累积了 32 组某种铸件在不同腐蚀时间  $x$  下腐蚀深度  $y$  的数据, 求得回归方程为

$$\hat{y} = -0.45 + 0.002x.$$

且误差方差的无偏估计  $\hat{\sigma}^2 = 0.001$ , 总偏差平方和为 0.13.

(a) 对回归方程作显著性检验 ( $\alpha = 0.05$ ).

(b) 求样本相关系数;

(c) 在腐蚀时间为  $x = 900$  下给出腐蚀深度  $y$  的 0.95 近似预测区间。

- (5) 设回归模型为

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \\ \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

现收集到 15 组数据, 经计算得到

$$\bar{x} = 0.8, \bar{y} = 24, l_{xx} = 20, l_{xy} = 32, l_{yy} = 45.$$

经核查后，发现一组数据有错，正确的数据应该为  $(1.2, 32)$ ，被记录成了  $(1.5, 31)$ 。

- (a) 求  $\beta_0, \beta_1$  修正后的最小二乘估计。
- (b) 对回归方程的显著性进行检验 ( $\alpha = 0.05$ )。
- (c) 若  $x_0 = 1.3$ ，给出对应响应变量  $y$  的 0.95 预测区间。