概率论与数理统计：部分参考解答

第六题：对应的密度函数为 $p(x)=2xe^{-x^2}, x>0$. 则数学期望为

$$E(X)=\int_0^\infty 2x^2e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(高斯积分的计算，可以这样考虑 $(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2})^2=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$, 接着通过极坐标变换可以计算)

$$E(X^2)=\int_0^\infty 2x^3e^{-x^2}dx=\int_0^\infty x^2e^{-x^2}d(x^2)=\int_0^\infty ye^{-y}dy=\int_0^\infty e^{-y}dy=1.$$

所以方差为 $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1-\frac{1}{4}\pi$.

第九题 (b) 考虑答题顺序

$$L=(i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},\dots,i_n),$$
$$L'=(i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_{k+1},i_k,\cdots,in_n).$$

注意到答题顺序 L 和 L' 的差别只在于对调了第 k 题和 $k+1$ 题的顺序，其他没有变化。下面我们计算总奖金的期望，

$$\begin{aligned}E(L)&=p_{i_1}v_{i_1}+p_{i_1}p_{i_2}v_{i_2}+\cdots+p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}v_{i_n},\\ E(L')&=p_{i_1}v_{i_1}+\cdots p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}v_{i_{k-1}}\\ &\quad+p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}p_{i_{k+1}}v_{i_{k+1}}+p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}p_{i_{k+1}}p_{i_k}v_{i_k}\\ &\quad+p_{i_1}\cdots p_{i_{k+2}}v_{i_{k+2}}+\cdots+p_{i_1}\cdots p_{i_n}v_{i_n}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&E(L')-E(L)\\ &=p_{i_1}\cdots p_{i_{k-1}}(p_{i_{k+1}}v_{i_{k+1}}-p_{i_k}v_{i_k}+p_{i_k}p_{i_{k+1}}v_{i_k}-p_{i_k}p_{i_{k+1}}v_{i_{k+1}})\\ &=p_{i_1}\cdots p_{i_{k-1}}(1-p_{i_k})(1-p_{i_{k+1}})(\frac{p_{i_{k+1}}v_{i_{k+1}}}{1-p_{i_{k+1}}}-\frac{p_{i_k}v_{i_k}}{1-p_{i_k}}).\end{aligned}$$

如果 $\frac{p_{i_{k+1}}v_{i_{k+1}}}{1-p_{i_{k+1}}}-\frac{p_{i_k}v_{i_k}}{1-p_{i_k}}>0$, 可以通过交换第 k 题和 $k+1$ 的顺序让增大。所以在期望意义下的最佳答题顺序 $(i_1,\dots,i_n)$ 应该满足 $r(i_1)\geqslant r(i_2)\geqslant \dots.\geqslant r(i_n)$, 其中 $r(i_k)=\frac{p_{i_k}v_{i_k}}{1-p_{i_k}}$.

第六次作业部分参考解答

第四题：X 的特征函数为 $\varphi_X(t) = (1-\frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$, $\frac{\lambda X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 的特征函数为 $\varphi(t) = e^{-i\sqrt{\alpha}t}(1-\frac{i\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}t}{\lambda})^{-\alpha}$.

$$\log\varphi(t) = -i\sqrt{\alpha}t-\alpha\log(1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}t) = -i\sqrt{\alpha}t-\alpha(0-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}+\frac{t^2}{2\alpha}+o(\frac{1}{\alpha})) \to -\frac{t^2}{2}$$

所以 $\varphi(t) \to e^{-t^2/2}$。所以依分布收敛到标准正态分布。

第六题：

1) $\Phi(n)$ 随着 n 的变化可以是奇数可以是偶数。可以取到任意大的 m 和 n 使得 $\Phi(m)$ 是奇数 $\Phi(n)$ 是偶数, 对于这样的 m, n, $|Y_m - Y_n| = 2|X|$，可以大概率大于 1，所以 Y_n 不依概率收敛。

2) 标准正态分布左右对称性，所以 Y_n 都服从标准正态分布，于是 Y_n 依分布收敛。

第七题：考虑这样的一个情况，X 是标准正态分布，X_n 是标准正态分布，Y_n 也是标准正态分布，X_n 与 Y_n 相互独立。我们有 X_n 依分布收敛到 X, Y_n 依分布收敛到 $Y = X$, 而 $X_n + Y_n \sim N(0,2)$, $X + Y = 2X \sim N(0,4)$.

概率论与数理统计：第七次作业部分题目参考解答

第三题（c）：事件 $N \geqslant 220$，对应着前 219 天生产的配件数小于 1000，即 $\{X_1 + \cdots + X_{219} < 1000\}$. 所以

$$P(N \geqslant 220) = P(X_1 + \cdots + X_{219} < 1000) \approx \Phi(\frac{1000 - 5 * 219}{\sqrt{219 * 9}}).$$

第六题：参数为 $\sqrt{n}$ 的柏松分布的方差为 $\sqrt{n}$, 所以

$$\frac{1}{n^2} Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) < \frac{1}{n^2}(n\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad , n \to \infty.$$

由马尔可夫大数定律知 $\{X_n\}$ 满足大数定律。

第七题：随机变量序列 $h(X_i)$ 独立同分布，期望与方差均存在。满足中心极限定理记 $E(h(X_i)) = a$, $Var(h(X_i)) = b^2$, 则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h(X_i) - na}{b\sqrt{n}} \tilde{\sim} N(0,1)$$

所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \tilde{\sim} N(a, \frac{b^2}{n}).$$

第八题：

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_k - Y_n)^2 = -Y_n^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k^2.$$

X_n 服从大数定律，即有 $Y_n \to E(X)$; X_i^2 服从大数定律，即有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to E(X^2)$. 于是

$$Z_n \to -(E(X))^2 + E(X^2) = Var(X) = \sigma^2.$$

第三次作业第八第九题的参考答案

(8) 烟鬼问题：设 X 为发现一个火柴盒为空时，另一个火柴盒中火柴的根数。对于 $k=0,1,...n$，记

$$L_k=\{\text{发现的空盒在左边, 右边一个火柴盒有}k\text{根火柴}\}$$

$$R_k=\{\text{发现的空盒在右边, 左边一个火柴盒有}k\text{根火柴}\}$$

则 X 的分布列为 $p_X(k)=P(L_k)+\ P(R_k),k=0,1,\ldots,n.$

若 L_k 发生，则一共掏了 2n-k+1 次口袋，其中前 $2n-k$ 次掏了 n 左边，$n-k$ 次右边，而且第 $2n-k+1$ 次是掏了左边，所以

$$P(L_k)=\binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}\times\frac{1}{2}.$$

由对称性，$P(L_k)=P(R_k)$, 所以

$$p_X(k)=\binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^{2n-k},\quad k=0,\ldots,n.$$

(9) 信号问题：设 Z 为在该段时间发送信号的个数，则

$$P(Z=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,\ldots.$$

令 A_j 表示：事件在该段时间发送出 1 的个数为 j, B_k 为该段时间发出信号总数为 k, 则

$$P(A_jB_k)=\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},k\geqslant j\geqslant 0.$$

则

$$\begin{aligned}P(A_j)=\sum_{k\geqslant j}P(A_jB_k)&=\sum_{k\geqslant 0}\binom{j+k}{j}p^j(1-p)^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j+k}}{(k+j)!}\\&=\sum_{k\geqslant 0}e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\times\frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^k}{k!}\\&=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{k\geqslant 0}\frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^k}{k!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}.\end{aligned}$$

其为参数为 λp 的柏松分布。

第四次作业第三、四题参考解答

第三题：设 X 和 Y 是两个相互独立且都服从参数为 p 的几何分布。证明：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}, i=1,\ldots,n-1.$$

参考解答：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{P(X=i,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=i)P(Y=n-i)}{P(X+Y=n)}.$$

由于它们服从参数为 p 的几何分布，所以

$$P(X=i)=p(1-p)^{i-1}, \quad P(Y=n-i)=p(1-p)^{n-i-1}.$$

于是

$$P(X=i)P(Y=n-i)=p^2(1-p)^{n-2}.$$

这个值跟 i 无关，所以 $P(X=i|X+Y=n)=P(X=j|X+Y=n)$.
由全概率公式，有

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}.$$

第四题：1) X 服从 $(0,l)$ 上的均匀分布, 若 X 取值 x，Y 服从 $(0,x)$ 上的均匀分布所以我们有

$$P(X\in[x,x+\Delta],Y=y\in[a,a+\Delta'])=\frac{1}{l}\Delta\times\frac{1}{X}\Delta'=\frac{1}{lx}\Delta\Delta'+o(\Delta\Delta'),a,a+\Delta'\leqslant x+\Delta'.$$

所以我们有 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{lx}, & x\in(0,l),y\in(0,x)\\ 0, & else.\end{cases}$$

2) 因为 $Y\leqslant X$, 所以 Y 的边际密度函数为

$$p(y)=\int_y^1 p(x,y)dx=\int_y^l\frac{1}{lx}dx=\frac{1}{l}(\ln l-\ln y),\ y\in(0,l).$$

所以

$$E(Y)=\frac{1}{l}\int_0^l y(\ln l-\ln y)dy=\frac{l}{4}.$$

作业第七题参考解答

第七题：1）前 n 次试验均不成功的概率是 $\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$, 而

$$P(N) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) \to 0, n \to \infty.$$

（考虑 $\ln\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = \sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(-p_i) \to -\infty.$）所以 $p(N) = 0.$

同理，事件 A_n: 第 n 次之后无成功的，它概率是 $\prod_{i=n}^{\infty}(1-p_i) = 0$, $\bar{I} = \cup_{n=1}^{\infty}A_n$, 所以 $P(I) = 1 - P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) = 1.$

2) 令事件 B_n 为第 n 次试验后至少还有一次成功的试验。则 $P(B_n) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty}p_i$。由收敛性，$P(B_n) \to 0$, $n \to \infty$. 而 $I \subset B_n$, $\forall n$. 所以 $P(I) = 0.$

第九题：注意到第二名只要在每一轮里避免第一名就能晋级。第 i 轮有 2^{n-i+1} 支队伍，第二名的可能对手有 $2^{n-i+1}-1$ 个，获胜的概率为 $1-\frac{1}{2^{n-i+}-1}$. 所以能到最终决赛的概率为 $\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-i+1}-1})$.