每个线性规划问题都有一个与之对应的对偶问题。

简单考虑如下的生产分配问题

生产I、II两种产品，要占用A、B、C设备时间，每件产品机时利润如表所示：

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
占用C机时	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大？

我们有下面的对偶问题：

现在，该生产厂对外承包

候选的承包商，经过调研得知如下信息：

① 该厂现有三种设备A、B、C，对应的每日可用时间分别是15小时、24小时和5小时；

② 该厂宣布对外承包前，利用这三种设备生产两种产品I、II；

③ 产品I、II投放市场后的利润分别不低于2、1

那么，候选承包商应该如何投标才最划算？

对比这两个优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1+x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_2\le 15 \\
& 6x_1+2x_2\le 24 \\
& x_1+x_2\le 5 \\
& x_1\ge 0,\ x_2\ge 0
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\min\ & 15y_1+24y_2+5y_3 \\
\text{s.t.}\ & 6y_2+y_3\ge 2 \\
& 5y_1+2y_2+y_3\ge 1 \\
& y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0
\end{aligned}
$$

该问题的任意一个可行解对应的目标函数值都不小于原问题的目标函数值，但是两个问题的最优目标函数值（有限）相同。

一般而言：

1、每个对偶变量对应原问题的一个约束条件

2、原问题是等式约束则对偶变量无不等式约束（非负约束）

3、原问题是不等式约束则对偶变量有不等式约束

4、原问题变量和对偶问题约束条件同样具有如上规律

任何原问题和对偶问题之间都存在下述相互关系：

弱对偶性：原对偶问题任何可行解的目标值都是另一问题最优目标值的界（推论：原对偶问题目标值相等的一对可行解是各自的最优解）

强对偶性：原对偶问题只要有一个有最优解，另一个就有最优解，并且最优目标值相等

互为对偶的线性规划问题解之间关系有如下四种：

原 \ 对偶	有最优解	问题无界	无可行解
有最优解		×	×
问题无界	×	×	
无可行解	×		

原问题与对偶问题之间存在互补松弛性：

原问题 $\max\ C^TX$ s.t. $AX\le\vec b$, $X\ge 0$　　对偶问题 $\min\ \vec b^TY$ s.t. $A^TY\ge C$, $Y\ge 0$

设 $\hat X$ 和 $\hat Y$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则它们分别是各自问题最优解的充要条件是满足互补松弛性等式

$$\hat Y^T\left(\vec b-A\hat X\right)=0,\quad \hat X^T\left(A^T\hat Y-C\right)=0$$

含义：如果原问题某个不等式是松的（不等于0），则其相应的对偶变量必须是紧的（等于0），反之亦然

一般形式的线性规划互补松弛定理：

$$
\begin{aligned}
\max\ & C_1^TX_1+C_2^TX_2 \\
\text{s.t.}\ & A_{11}X_1+A_{12}X_2=\vec b_1 \\
& A_{21}X_1+A_{22}X_2\le\vec b_2 \\
& X_1\ge 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\min\ & Y_1^T\vec b_1+Y_2^T\vec b_2 \\
\text{s.t.}\ & Y_1^TA_{11}+Y_2^TA_{21}\ge C_1^T \\
& Y_1^TA_{12}+Y_2^TA_{22}=C_2^T \\
& Y_2\ge 0
\end{aligned}
$$

原问题可行解 $\hat X_1,\hat X_2$ 和对偶问题可行解 $\hat Y_1,\hat Y_2$ 都是最优解的充要条件是

$$\left(Y_1^TA_{11}+Y_2^TA_{21}-C_1^T\right)\hat X_1=0,\quad \hat Y_2^T\left(\vec b_2-A_{21}X_1-A_{22}X_2\right)=0$$

经济学中有所谓影子价格的概念：如果增加某些约束条件的数值，原问题的最优目标值应该增加，增加单位约束使得原问题最优值的增加量为该约束条件的影子价格。影子价格可以由对偶线性规划问题清楚地描述：

原问题 $\max\ C^TX$ s.t. $AX\le\vec b$, $X\ge 0$　　对偶问题 $\min\ b^TY$ s.t. $A^TY\ge C$, $Y\ge 0$

设对偶问题最优解为 $\hat Y$，由强对偶性知，原问题的最优目标值为

$$\vec b^T\hat Y=\sum_{i=1}^m \hat y_i b_i$$

所以，原问题最优目标值关于 $b_i, 1\le i\le m$ 的梯度分别是 $\hat y_i, 1\le i\le m$，说明增加单位 b_i 可望增加 $\hat y_i$ 的最优目标值，故称其为 b_i 的影子价格

对偶单纯形法：

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ \text{s.t.} & P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n=\vec{b} \\ & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=z \\ & x_j\ge 0,\ \forall 1\le j\le n \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & Y^T\vec{b} \\ \text{s.t.} & Y^TP_j\ge c_j,\ \forall 1\le j\le n \end{array}$$

已知 $B=(P_{j(1)},\cdots,P_{j(m)})$ 满足$\sigma_j=c_j-C_B^TB^{-1}P_j\le 0$，$\forall 1\le j\le n$

令 $Y_B^T=C_B^TB^{-1}$ 是对偶问题的可行解，目标值 $\hat{z}=C_B^TB^{-1}\vec{b}$

一次迭代后得到 B' 仍满足$\sigma_j'=c_j-C_B^TB'^{-1}P_j\le 0$，$\forall 1\le j\le n$

$Y_{B'}^T=C_{B'}^TB'^{-1}$ 还是对偶问题可行解，目标值 $\hat{z}'=C_{B'}^TB'^{-1}\vec{b}$

非退化时 $\hat{z}'<\hat{z}$，可保证收敛到对偶问题的最优解

当线性规划问题中地某个约束条件或价值变量中含有参数时，原问题称之为参数线性规划，它有如下的处理方法：

1）固定 λ 的数值解线性规划问题

2）确定保持当前最优基不变的 λ 的区间

3）确定 λ 在上述区间附近的最优基，回 2）

如以下问题：

例3 $\max\ z=(2+\lambda)x_1+(1+2\lambda)x_2$

$$\begin{array}{ll} \text{s.t.} & 5x_2+x_3=15 \\ & 6x_1+2x_2+x_4=24 \\ & x_1+x_2+x_5=5 \qquad x_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,5 \end{array}$$

取 $\lambda=0$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
	0	0	0	−0.25	−0.5	$z-8.5$

带入参数

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
	$2+\lambda$	$1+2\lambda$	0	0	0	z

行变换

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

由上表知最优目标值 $z(\lambda)=8.5+6.5\lambda,\forall -0.2\le\lambda\le 1$

对于 $\lambda>1$，从下面的单纯形表可以看出，x_4 的检验数大于0，因此应该让其进基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

比较各行RHS和 x_4 的系数的比值，可以确定出基变量为 x_3

对于 $\lambda<-0.2$，从以下单纯形表可以看出，x_5 的检验数大于0，因此应该让其进基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

比较各行RHS和 x_5 的系数的比值，可以确定出基变量为 x_2

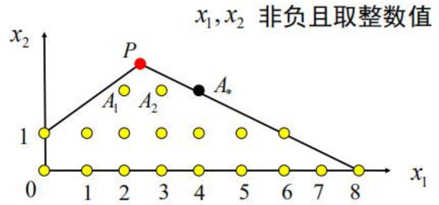
在实际问题中，许多变量以及它们的约束条件往往是离散的，或者说限定在整数域上，这便引入了整数线性规划的概念。

具体而言，整数线性规划包含纯整数线性规划（所有变量是整数变量）、混合整数线性规划（同时包含整数和非整数变量）、0-1 型整数线性规划（变量等于 0 或 1）

去除整数规划的整数约束后的问题称为其松弛问题。一般情况，原问题的解并不一定是其松弛问题的最优解附近的整数解，例如：

例4： $\max\ x_1+4x_2$

$$\begin{array}{ll} \text{s.t.} & -2x_1+3x_2\le 3 \\ & x_1+2x_2\le 8 \\ & x_1,x_2\ \text{非负且取整数值} \end{array}$$

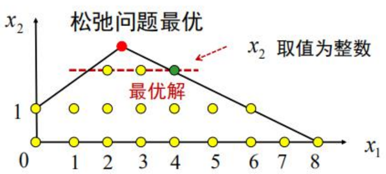


P 点是松弛问题最优解，距其最近的整数可行解是 A_1,A_2，但最优解是 A_*

通常的解决办法是在松弛问题的基础上出发，不断地引入整数的约束条件，从而求出整数规划的解。

例：$\max\ x_1+4x_2$

$$\begin{array}{ll} \text{s.t.} & -2x_1+3x_2\le 3 \\ & x_1+2x_2\le 8 \\ & x_1,x_2\ \text{非负且取整数值} \end{array}$$



可用一个约束割去松弛问题最优解，不改变可行集

现在，问题便转化为找到合适的约束条件（割平面），以实现不改变原问题可行域，将松弛问题的最优解“割去”。

考虑对应的松弛问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

用 Q, K 分别代表最优的基变量和非基变量下标集

等式约束可写成 $x_i + \sum_{j \in K} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i \in Q$

对应的最优解为 $x_i^* = \bar{b}_i, \forall i \in Q, x_j^* = 0, \forall j \in K$

如果所有 $\bar{b}_i, i \in Q$ 都是整数，已得原问题最优解

（因为松弛问题的可行集包含原问题的可行集）

否则，取非整数 $\bar{b}_k, k \in Q$ ，令

$$\bar{a}_{kj} = N_{kj} + \alpha_{kj}, \ \forall j \in K, \ \bar{b}_k = M_k + \beta_k$$

其中 N_{kj}, M_k 为整数，α_{kj} 为非负小数，β_k 为正小数，例如

$$5.2 = 5 + 0.2, \ -5.2 = -6 + 0.8$$

代入等式约束 $x_k + \sum_{j \in K} \bar{a}_{kj} x_j = \bar{b}_k$ 可得

$$x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$$

考虑差值

$$\Delta_k(X) = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = \left(x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k \right)$$

1）对于松弛问题的最优解 $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)^T$

由于 $x_j^* = 0, \forall j \in K$

所以 $\Delta_k\left(X^*\right) = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j^* = \beta_k > 0$

松弛问题的最优解在 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = 0$ “上方”

2）对原问题的任意的可行解 $\bar{X}$（整数解）

由于 $\underbrace{\boxed{\bar{x}_k + \sum_{j \in K} N_{kj} \bar{x}_j - M_k}}_{\text{整数}} = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} \bar{x}_j$

β_k 是正小数，$\sum_{j \in K} \alpha_{kj} \bar{x}_j \geq 0$

如果 $\sum_{j \in K} \alpha_{kj} \bar{x}_j < 1$，则成立 $\left| \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} \bar{x}_j \right| < 1$，又因为

$\bar{x}_k + \sum_{j \in K} N_{kj} \bar{x}_j - M_k$ 是整数，一定有

$$\Delta_k\left(\bar{X}\right) = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = 0$$

可行解在约束 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = 0$ 的“下方”

如果 $\sum_{j \in K} \alpha_{kj} \bar{x}_j \geq 1$，一定有 $\Delta_k\left(\bar{X}\right) < 0$

总结前面的讨论可知：

对于差值 $\Delta_k(X) = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$

当前获得的松弛问题最优的基本可行解 X^* 满足

$$\Delta_k\left(X^*\right) > 0$$

原问题的任意的可行解 $\bar{X}$ 满足

$$\Delta_k\left(\bar{X}\right) \leq 0$$

说明当前非基变量构成的平面方程 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = 0$

将当前最优的基本可行解和原问题的所有可行解分割在 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j > 0$ 和 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \leq 0$ 两个区域

根据前面的讨论，若对松弛问题增加不等式约束：

$\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \leq 0$ 形成新的松弛问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

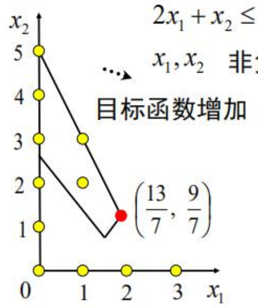
$$-\sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \leq -\beta_k$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

那么当前不满足整数约束的最优解将被切割掉，而原问题的所有的可行解都仍然包含在新的可行集中。

例： $\max \ 3x_1 - x_2$

s.t. $3x_1 - 2x_2 \leq 3$	$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$
$5x_1 + 4x_2 \geq 10$	$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$
$2x_1 + x_2 \leq 5$	$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$
x_1, x_2 非负且取整数值	



松弛问题可行集及最优解如左图所示不满足整数约束

此时等式约束如下：

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{9}{7}$$

$$x_4 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{22}{7}x_5 = \frac{31}{7}$$

利用等式约束 $x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$

构造割平面约束，因为

$$\frac{1}{7} = 0 + \frac{1}{7}, \ \frac{2}{7} = 0 + \frac{2}{7}, \ \frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7}$$

所以割平面约束为 $-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \leq -\frac{6}{7}$

利用 $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5$

可得原变量表示的割平面约束为 $x_1 \leq 1$

新的优化问题为 $\max \ 3x_1 - x_2$

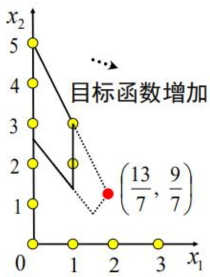
$$\text{s.t.} \ 3x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

x_1, x_2 非负且取整数值



新的松弛问题可行集及原可行集被切割部分见左图

1）原最优解被切割掉

2）所有整数解被保存

可以观察得到，每次增加一个不等式约束后，可以用新的不等式约束的松弛变量做新增加的基变量，从而上一个松弛问题的非基变量都没有改变，因此其检验数也不改变，每次增加一个不等式约束后，可以在上一个松弛问题的最后的单纯型表的基础上用对偶单纯型法求解新的松弛问题。

比如某次松弛问题的优化过程已经得到以下的最优单纯形表：

最终表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	5/4	−15/2	15/2
x_1	1	0	0	1/4	−1/2	7/2
x_2	0	1	0	−1/4	3/2	3/2
	0	0	0	0	−1	$Z-5$

利用等式约束 $x_1+\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5=\frac{7}{2}$ 构造割平面

$-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5\le-\frac{1}{2}$　　利用 $6x_1+2x_2+x_4=24$，$x_1+x_2+x_5=5$

可得原变量表示的割平面约束为 $2x_1+x_2\le 8$

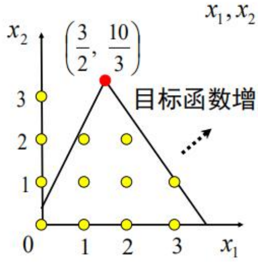
引入变量 x_6 随后的优化过程如下

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	5/4	−15/2	0	15/2
x_1	1	0	0	1/4	−1/2	0	7/2
x_2	0	1	0	−1/4	3/2	0	3/2
x_6	0	0	0	−1/4	−1/2	1	−1/2
	0	0	0	0	−1	0	$Z-5$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	0	5	5	5
x_1	1	0	0	0	−1	1	3
x_2	0	1	0	0	2	−1	2
x_4	0	0	0	1	2	−4	2
	0	0	0	0	−1	0	$Z-5$

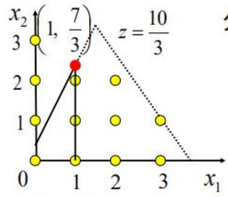
上面的“割平面”方法在实际使用的过程中依然有很多不便之处，所以我们引入一种新的分枝定界法。

例：
$$\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负且取整数值}\end{aligned}$$

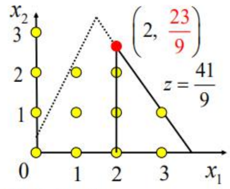


松弛问题可行集及最优解如右图所示不满足整数约束

依据松弛问题最优解进行如下的分支：



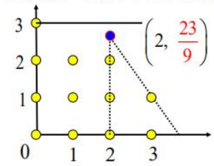
分枝

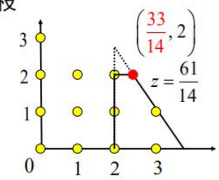


$$\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1\le 1\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1\ge 2\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}$$

任何可行解都属于某枝问题的可行集

选目标函数值大的优先分枝

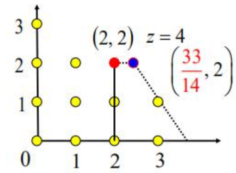


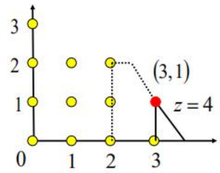


$$\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1\ge 2,\ x_2\ge 3\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1\ge 2,\ x_2\le 2\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}$$

无可行解，不再考虑

继续选目标函数值大的优先分枝

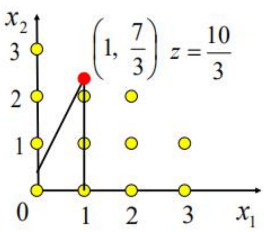




$$\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1=2,\ x_2\le 2\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}&\max\ x_1+x_2\\ &\text{s.t. } 14x_1+9x_2\le 51\\ &\qquad -6x_1+3x_2\le 1\\ &\qquad x_1\ge 3,\ x_2\le 2\\ &\qquad x_1,x_2\ \text{非负取整}\end{aligned}$$

所谓的定界是指，对于上面两张图所示的可行集，已经找到最优解，最优目标函数值等于 4 ，由此确定了该问题最优目标函数的一个下界，如果某个分枝的松弛问题的最优值小于这个界，由于整数最优目标值更小，所以可断定该枝不含最优解，不用再分枝。

回到尚未确定最优解的一枝，如下图所示，由于其松弛问题的最优值小于前面确定的下界 4，因此可断定该枝不含最优解，因此不用再分枝，从而确定了该整数规划问题的最优解



0-1 型整数线性规划在一般的线性规划问题中

有特殊的用途，一般而言，我们用 0-1 变量统一互相排斥的约束条件，比方说下面的问题：

某工序有两种加工方式，一种方法周工时约束为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150$$

另一种方式周工时约束为：

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120$$

规划时可选用两种方式中的任意一种

如何将这两种互相排斥的约束条件统一在一个规划模型中？

定义0-1变量 y_1, y_2 如下：

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第一种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第一种加工方式} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第二种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第二种加工方式} \end{cases}$$

统一的约束条件为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 + M_1 y_1$$
$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120 + M_2 y_2$$
$$y_1 + y_2 = 1$$

其中 M_1, M_2 为充分大的正数（使约束不起作用）