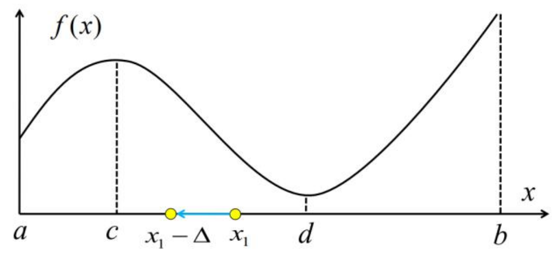
运筹学主要用于解决现实生活中各种复杂问题，特别是改善或优化。其主要分支包括一般的数学规划模型如线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、网络优化等，也包括特定实际问题的数学模型如网络计划、排队论、存储论、决策论、对策论等。

很显然，一切运筹学所研究的问题都是优化的问题，而从优化本身出发，可分为基于确定性的搜索与基于不确定性的搜索：前者是经典的优化课程介绍的主要内容，后者包括模拟退火、禁忌搜索、遗传算法、免疫算法、蚂蚁算法等方法，一般统称为智能算法。

基于确定性的搜索如梯度下降法：

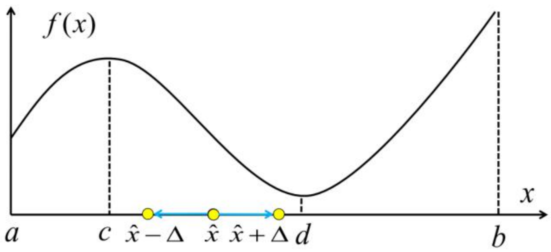
例 $\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$



基本方法: 从 a,b 之间的任一点出发, 朝着能改进目标函数的方向搜索前进: $X_{k+1}=X_k+\lambda_k D_k$，直至不能改进

肯定能够收敛到一个局部最优解, 不能保证全局最优

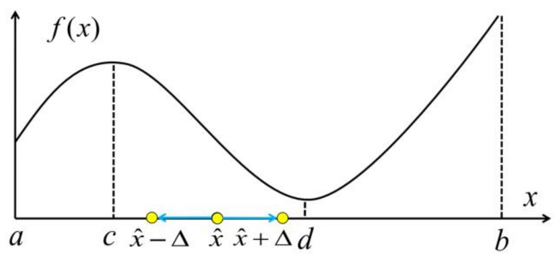
基于不确定的搜索：



走出局部最优解的唯一途经是在搜索过程中允许前进到目标函数值变差的点, 例如在 c,d 之间容许目标函数下降才有可能找到全局最优解

由此产生新问题，无法保证算法收敛

基于不确定性的搜索改进版：



为了使算法收敛，只能引入不确定性，让算法在任何一点以一定的概率前进到邻近的某点，移动概率和相应点的目标函数值正相关，所以图中例子：

$$p(\hat{x}+\Delta\mid\hat{x})<p(\hat{x}-\Delta\mid\hat{x})$$

由此产生的算法是结果不确定的算法

而要在实际问题中应用运筹学的相关知识，则需要建立合适的模型，以一个典型的回归例子举例：

已知某个标量 y 和某个向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 之间若干一一对应的样本数据

$$\{y(t),X(t)\}$$
$$X(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T,\ t=1,2,\cdots,N$$

要确定一个函数 $f(X)$，使在包含所有样本数据的某个集合 Ω 里能够用 $f(X)$ 描述 y 和 X 之间的对应关系，即使误差 $|y-f(X)|$ 对任意的 $\{y,X\}\in\Omega$ 都尽量小

我们通常采用极小化误差函数的方法：

基本方法：选择含有待定参数的函数 $\hat{f}(X,\theta)$, 通过极小化某种样本误差, 确定待定参数得到所需函数

常用 l_1,l_2,l_∞ 范数的样本误差

$$E_p(\theta)=\begin{cases}\sum\limits_{t=1}^{N}\left|y(t)-\hat{f}(X(t),\theta)\right| & p=1\\ \sum\limits_{t=1}^{N}\left(y(t)-\hat{f}(X(t),\theta)\right)^2 & p=2\\ \max\limits_{1\le t\le N}\left|y(t)-\hat{f}(X(t),\theta)\right| & p=\infty\end{cases}$$

于是，最终要解决的是下述优化问题

$$\min_{\theta} E_p(\theta)$$

这是连续变量无约束优化问题

特别是，当 $\hat{f}(X,\theta)$ 是 θ 的线性函数时，即

$$\hat{f}(X,\theta)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\varphi_i(X)$$

上面的优化问题是线性规划问题

通常可以选择足够多的基函数 $\varphi_i(X)$ 使优化问题

$$\min_{\theta}\sum_{t=1}^{N}\left|y(t)-\sum_{i=1}^{m}\theta_i\varphi_i(X(t))\right|^p$$

的样本误差任意小, 但这样得到的模型在样本集以外往往会产生很大的预报误差, 这就是所谓过度拟合或过度训练问题

解决该问题的根本途经是同时极小化基函数的个数, 最终要解决连续和离散变量混合的优化问题:

$$\min\sum_{t=1}^{N}\left|y(t)-\sum_{i=1}^{m}\theta_i\sigma_i\varphi_i(X(t))\right|^p+w\sum_{i=1}^{m}\sigma_i$$
$$\text{s.t. } \sigma_i\in\{0,1\},\ \forall 1\le i\le m$$

其中 w 是设定的正的权值

基于该例子的数学规划模型，可得出如下认识

给定基函数及其数量 $\Rightarrow$ 线性规划

容易，可以找到全局最优解

数量给定优化基函数 $\Rightarrow$ 非线性规划

难，只能获得局部最优解

解决过拟合问题 $\Rightarrow$ 非线性规划

很难，只能获得较好的解

在解决实际问题时可参考以上认知选择合适模型

运筹学中最简单的是线性规划模型，我们中学时都遇到过这样的题目：

例：生产I、II两种产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
调试时间	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大?

显然可建立数学模型为:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2\le 15 \\ & 6x_1+2x_2\le 24 \\ & x_1+x_2\le 5 \\ & x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{aligned}$$

为了统一地研究这一类问题，引入线性规划标准模型：

$$\max\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad \text{目标函数}$$

$$\text{s.t.}\ \left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}\right\} \text{等式约束}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&\ge 0 \\ x_2&\ge 0 \\ &\vdots \\ x_n&\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{决策变量具有非负约束}$$

其中可引入变量的方式将不等式条件转化为等式条件：

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2\le 15 \\ & 6x_1+2x_2\le 24 \\ & x_1+x_2\le 5 \\ & x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \max\ & 2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2+x_3=15 \\ & 6x_1+2x_2+x_4=24 \\ & x_1+x_2+x_5=5 \\ & x_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,5 \end{aligned}$$

标准模型具有如下的矩阵形式：

$$\begin{aligned} \min\ (\text{ or }\max)\ & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\quad \forall 1\le i\le m \\ & x_j\ge 0,\ \forall 1\le j\le n \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \min\ (\text{ or }\max)\ & C^TX \\ \text{s.t.}\ & AX=\vec{b} \\ & X\ge 0 \end{aligned}$$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

为方便进一步分析可引入两条基本假定：

1. 系数矩阵 A 的行向量线性无关
2. 系数矩阵 A 的列数大于其行数，即 n＞m

1. 系数矩阵A的行向量 $\vec{a}_1^T,\vec{a}_2^T,\cdots,\vec{a}_m^T$ 线性无关

如果该假定不满足，某个行向量，比如$\vec{a}_m^T$，可以表示为 $\vec{a}_1^T,\vec{a}_2^T,\cdots,\vec{a}_{m-1}^T$ 的线性组合，即

$$\vec{a}_m^T=\lambda_1\vec{a}_1^T+\lambda_2\vec{a}_2^T+\cdots+\lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1}^T$$

则对任何满足前 $m-1$ 个约束的X 都成立

$$\vec{a}_m^TX=\lambda_1\vec{a}_1^TX+\cdots+\lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1}^TX=\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_{m-1}b_{m-1}$$

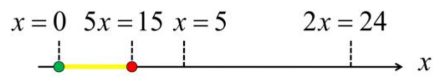
当 $b_m=\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_{m-1}b_{m-1}$ 时，第 m 个约束不起作用，故可以删除，若上述等式不满足原问题无可行解

2. 系数矩阵A的列数大于其行数，即 $n>m$

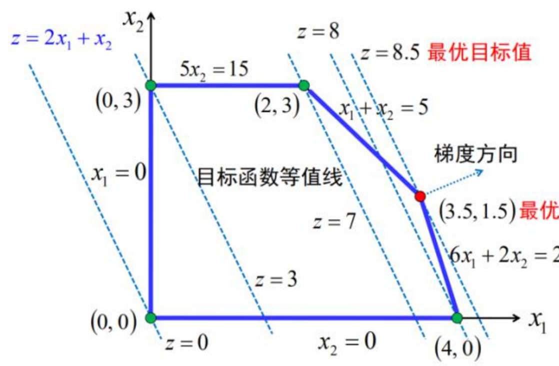
如果 $n<m$ ，由于 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 是 m 个 n 维的向量不可能线性无关，如果 $n=m$ ，A 是行向量线性无关的方阵，因此有逆，满足 $AX=\vec{b}$ 的只有一个向量 $\hat{X}=A^{-1}\vec{b}$ ，不需要优化！

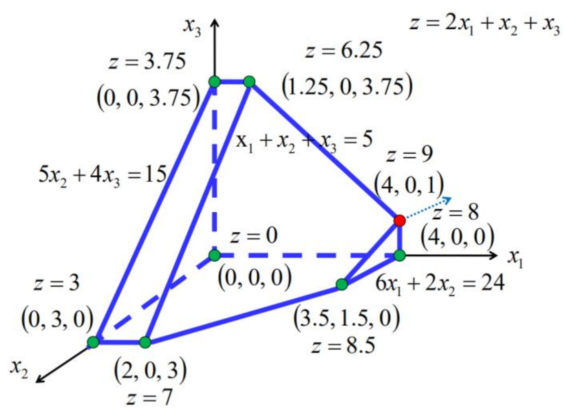
在解决低维的线性规划问题时，常用图解法，一维到三维的情况如所示：

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ & 5x\le 15 \\ & 2x\le 24 \\ & x\le 5 \\ & x\ge 0 \end{aligned}$$



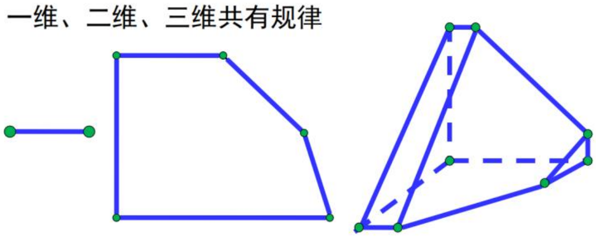
黄实线是可行集，红点是最优解





一维图解法中的线段（可行集）在高维时变成空间中的多面体形式，像这样的的图形被成为单纯形，或者说是空间中的凸集。由简单的的观察可得：线性规划的最优解总在单纯形的顶点处取得，所以要求解线性规划只需要寻找一种能遍历原问题可行集顶点的方法。

一维、二维、三维共有规律



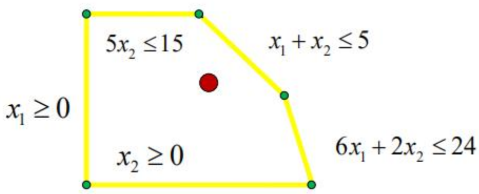
1. 可行集是不等式约束成为等式约束围成的集合（等式：一维是点、二维是直线、三维是平面）
2. “绿点”中有最优解（有限目标函数值）
3. “绿点”个数有限

启示：在绿点中找最优解
挑战：高维绿点如何计算

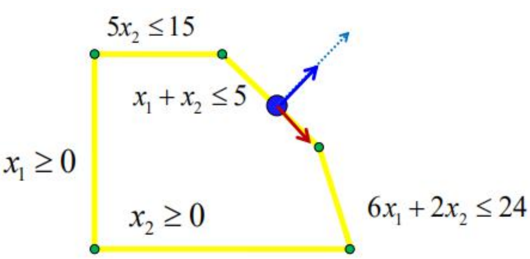
最优解总在单纯形的顶点处取得的详细证明需要运用矩阵的方法，然而可以借助目标函数的等值面给出简单的证明：

目标函数：min(or max)C^TX，它的等值面 $C^TX=f(X)$ 是空间中的一组相互平行的平面，平面的法线方向便是目标函数值发生变化的梯度方向。

如果可行解为可行集内点，即没有起作用约束（可行解使得某约束条件等号成立），沿梯度方向必可改进目标函数，不可能是最优解，如红点所示：



如果可行解不是起作用约束的唯一解，但梯度如下图所示，和所有起作用约束的法线垂直，此时蓝点是最优解，但沿着红色方向前进可以得到至少增加一个起作用约束的最优解，因此也可得到是最优解的绿点（有无穷多最优解）：



在高于三维的空间中运用图解法很不方便，但是借助于低维情况的分析，我们可以通过所谓“入基”、“出基”的手段遍历高维时的顶点：

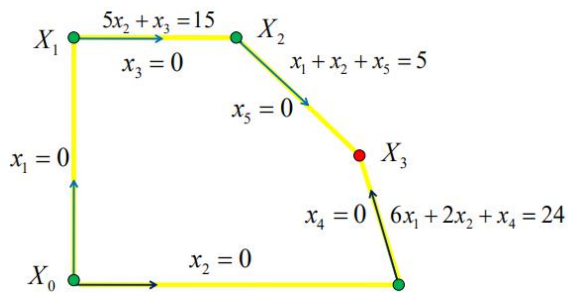
以如下问题为例：

$$\begin{aligned}
\max\ & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

首先通过引入附加变量 x3, x4, x5 的方法转化为标准型问题，系数矩阵如下：

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

各约束条件及各边的起作用约束如下：



观察发现：

$X_0 = (0, 0, 15, 24, 5)^T$	$X_1 = (0, 3, 0, 18, 2)^T$
$\Downarrow$ 起作用约束	$\Downarrow$ 起作用约束
$5x_2 + x_3 = 15$	$5x_2 + x_3 = 15$
$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$	$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$	$x_1 + x_2 + x_5 = 5$
$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
$x_2 = 0$	$x_3 = 0$

1. 相邻顶点间只有一个起作用约束不同（非基变量）
2. 相邻顶点搜索是变量的“进基”“出基”互换

于是我们可以引入下面所示的单纯形算法：

在 $\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ 中选定一行，用其它行减去该行，即可达到只有一行有 x_2 的目的，例如：

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 - x_5 \\ 0.5x_4 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

整理后可得

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

整理后得到

$$\begin{pmatrix}x_2\\0.5x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0.2\\-0.2\\-0.2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}3\\9\\2\end{pmatrix}$$

再将第二行除以0.5得到基本可行解的表示式

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0.2\\-0.4\\-0.2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}3\\18\\2\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$$

该基本可行解是 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$，x_3 变成非基变量，它是原来的基本可行解在保留 x_2 的行的基变量

由于 $\begin{pmatrix}0.2x_3\\0.5x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}3\\12\\5\end{pmatrix}$ 的 $\begin{pmatrix}3\\12\\5\end{pmatrix}$ 等于 $\begin{pmatrix}15/5\\24/2\\5/1\end{pmatrix}$

其中 $\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$ 分别是 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$

中进基变量 x_2 的系数向量和右边常数向量，所以前面选择保留 x_2 的行的方法可以总结为选择达到 $\boxed{\min\left\{\frac{15}{5},\frac{24}{2},\frac{5}{1}\right\}}$ 的行，选定这样的行，则在该行的基变量将变成非基变量，从而确定了出基变量（这里是x5）

由于 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0.2\\-0.4\\-0.2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}3\\18\\2\end{pmatrix}$，让 x_3 进基只能

用第一行的 x_3 消去其它行的 x_3，对于 x_3 的系数不是正数的行，我们需要将第一行乘以一个合适的正数加到相应的行，这种操作不会使右边项的数变成为负数，因此在选择保留进基变量所在行的过程中不用考虑进基变量的系数不是正数的行

简单起见，有如下的单纯形表法：

对于例 $\max\ 2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$

$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots,5$$

可以利用数据表完成换基运算

（基变量） （右边项）

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_4	6	2	0	1	0	24
x_5	1	1	0	0	1	5

让 x_2 进基是对数据表进行如下运算：

$\min\left\{\frac{15}{5},\frac{24}{2},\frac{5}{1}\right\}\Rightarrow$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
x_3	0	5	1	0	0	15	①
x_4	6	2	0	1	0	24	②
x_5	1	1	0	0	1	5	③

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
① ÷ 5 ⇒	x_2	0	1	0.2	0	0	3	④
④ × (-2) + ② ⇒	x_4	6	0	−0.4	1	0	18	
④ × (-1) + ③ ⇒	x_5	1	0	−0.2	0	1	2	

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0.2\\-0.4\\-0.2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}3\\18\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-0.2x_3\\18-6x_1+0.4x_3\\2-x_1+0.2x_3\end{pmatrix}$$

将上式确定的基变量对非基变量的函数关系代入目标函数 $f(X)=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$，可以得到

$$f(X)=3+2x_1-0.2x_3=f(\bar{X})+2x_1-0.2x_3$$

由于每个变量都不能小于0，由上式可知，当且仅当 x_1 取正数（等价于让其进基）时，才能获得比 $f(\bar{X})$ 更大的目标函数值

加入函数值的关系之后得到最终的单纯形表：

前面由 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 的表示式获得其扩充表示式的过程可利用下面扩充的数据表（单纯形表）完成

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0.2	0	0	3
x_4	6	0	−0.4	1	0	18
x_5	1	0	−0.2	0	1	2
	2	1	0	0	0	z

其中前面三行数据由 $\bar{X}$ 的表示式确定，最后一行是目标函数和变量间的（任意一种）约束式

利用 $\bar{X}$ 的单纯形表，很容易获得让 x_1 进基后的基本可行解的单纯形表，即先由右边项和 x_1 前面的系数的比值确定出基变量为 x_5

$\min\left\{\frac{3}{0},\frac{18}{6},\frac{2}{1}\right\}\Rightarrow$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0.2	0	0	3
x_4	6	0	−0.4	1	0	18
x_5	1	0	−0.2	0	1	2
	2	0	−0.2	0	0	$z-3$

然后通过行变换将 x_1 所在列除了第三行以外的系数变成 0 即可得到新的基本可行解对应的单纯形表

新的基本可行解对应的单纯形表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0.2	0	0	3
x_4	0	0	0.8	1	−6	6
x_1	1	0	−0.2	0	1	2
	0	0	0.2	0	−2	$z-7$

据此可知：

1. $\tilde{X}=(2,3,0,6,0)^T$ 是基本可行解
2. $\tilde{X}$ 的目标函数值满足 $0=z-7$，即 $z=7$
3. 让 x_3 进基能够增加目标函数值

x_3进基后新的基本可行解对应的单纯形表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
	0	0	0	−0.25	−0.5	$z-8.5$

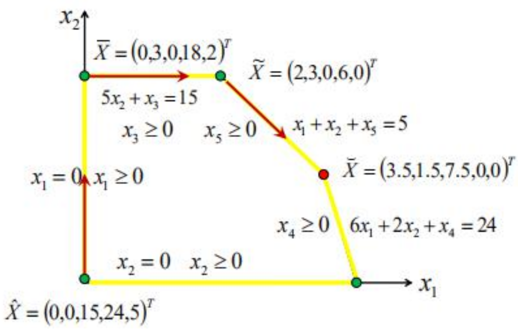
据此可知：

1. $\bar{X}=(3.5,1.5,7.5,0,0)^T$ 是基本可行解
2. $\bar{X}$ 的目标函数值满足 $0=z-8.5$，即 $z=8.5$
3. 任何非基变量进基都不能增加目标函数值

任何可行解的目标函数都要满足 $z = 8.5 - 0.25x_4 - 0.5x_5$
任何可行解的目标函数值都不会大于 $\bar{X}$ 的目标函数值 8.5，所以可断定 $\bar{X}$ 是该问题的最优解

单纯形的“进基”、“出基”方法有着其明确的几何含义，具体而言，上述的搜索轨迹如下图所示：

顶点搜索轨迹



一般而言，单纯表方法的每一步都有如下的表格：

BV	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	RHS
$x_{j(1)}$	$\hat{p}_{11}$	$\cdots$	$\hat{p}_{1k}$	$\cdots$	$\hat{p}_{1n}$	$\hat{p}_{1n+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{j(m)}$	$\hat{p}_{m1}$	$\cdots$	$\hat{p}_{mk}$	$\cdots$	$\hat{p}_{mn}$	$\hat{p}_{mn+1}$
	σ_1	$\cdots$	σ_k	$\cdots$	σ_n	$z-\hat{z}$

其中 $(\hat{P}_{j(1)},\cdots,\hat{P}_{j(m)}) = I_m$， $\hat{z} = C_B^T\hat{P}_{n+1} = C_B^T B^{-1}\vec{b}$
$\sigma_j = c_j - C_B^T\hat{P}_j = c_j - C_B^T B^{-1} P_j$， $\forall 1 \le j \le n$
称 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为检验数，可看出基变量检验数等于0

如果 $\hat{p}_{ij(t)} \le 0,\ \forall 1 \le i \le m$，是前面讨论进基方法时提到的特殊情况，此时在可行集可让 $x_{j(t)}$ 趋于无穷大
由 $z = \hat{z} + \sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(n)}x_{j(n)}$，如果
$\sigma_{j(t)} > 0$ 可断定该问题没有有限的最优目标值

另一方面，单纯形算法的收敛性有如下的充分条件
如果在迭代过程中始终有 $\hat{P}_{n+1} = B^{-1}\vec{b} > 0$，即迭代过程中产生的每个基本可行解的基变量数值都严格大于 0（称其为非退化条件），此时一定有

$$\hat{p}'_{ln+1} = \hat{p}_{ln+1} / \hat{p}_{lj(t)} > 0,\ \hat{z}' = \hat{z} + \hat{p}'_{ln+1}\sigma_{j(t)} > \hat{z}$$

即每步迭代都能保证目标函数严格增加，由于基本可行解的数目是有限的，上述过程不会无限进行，因此一定在有限次迭代后出现所有检验数都不大于 0 的情况，从而得到最优的基本可行解

然而，某些退化情况依然会导致导致采用最大检验数规则的单纯形算法不收敛：

$$\max\ \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + x_6 = 1$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,\cdots,7$$

初始基变量 $\{x_1,x_2,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	1/4	−8	−1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	−20	1/2	−6	

一次迭代后的基变量 $\{x_4,x_2,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	4	0	0	1	−32	−4	36	0
x_2	−2	1	0	0	4	3/2	−15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	−3	0	0	0	4	7/2	−33	

二次迭代后的基变量 $\{x_4,x_5,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	−12	8	0	1	0	8	9	0
x_5	−1/2	1/4	0	0	1	3/8	−84	0
x_3	0	0	1	0	0	1	−15/4	1
	−1	−1	0	0	0	2	−18	

三次迭代后的基变量 $\{x_6,x_5,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	−2/3	1	0	1/8	0	1	−21/2	0
x_5	1/16	−1/8	0	−3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	−1	1	−1/8	0	0	−15/4	1
	2	−3	0	−1/4	0	0	21/2	

四次迭代后的基变量 $\{x_6,x_7,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	2	−6	0	−5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	−2/3	0	−1/4	16/3	0	1	0
x_3	−2	6	1	5/2	−56	0	0	1
	1	−1	0	1/2	−16	0	0	

五次迭代后的基变量 $\{x_1,x_7,x_3\}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	−3	0	−5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	1/3	0	1/6	−4	−1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	7/4	−44	−1/2	0	

整个迭代过程中，虽然可行基矩阵不断改变，但对应的基本可行解始终是 $X=(0,0,1,0,0,0,0)^T$，没有变化，目标函数值也一直没有变化，出现循环。

退化情况的本质是多个可行基阵对应于一个基本可行解。此时经过一次进出基迭代后得到的是同一个基本可行解，因此有可能出现迭代算法在一个基本可行解的几个基阵之间循环不止的情况只要设法避免回到已经搜索过的基阵，就可以保证算法有限步内停止。比方说如下的 Bland 规则：

Bland规则：始终选择下标最小的可进（出）基

Robert G. Bland, Mathematics of Operations Research Vol.2, No.2, May 1977.

从任意基本可行解出发，采用 Bland 规则进行单纯形法迭代，在有限次迭代后停止于以下两种情况之一：

1、得到一个最优的基本可行解；

2、确定目标函数没有有限的最优值

单纯形法的迭代过程总需要从一个基本可行解（单纯形的顶点）开始，确定初始解的基本方法是添加人工变量，通过在迭代过程中把这些变量换出可行基获得原问题可行基。

原问题的约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,2,\cdots,m$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,\cdots,n$

添加人工变量 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i=1,2,\cdots,m$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,\cdots,n+m$

具体算法有大 M 法、两阶段法等。

1、大M法

把目标函数变为 $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} (-M) x_{n+i}$

其中M是个很大的正数

2、两阶段法

先把目标函数设为 $\max \sum_{i=1}^{m} (-1) x_{n+i}$

迭代到该目标函数等于0时，再用原目标函数