第四次作业第三、四题参考解答

第三题：设 X 和 Y 是两个相互独立且都服从参数为 p 的几何分布。证明：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}, i=1,\ldots,n-1.$$

参考解答：

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{P(X=i,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=i)P(Y=n-i)}{P(X+Y=n)}.$$

由于它们服从参数为 p 的几何分布，所以

$$P(X=i)=p(1-p)^{i-1},\quad P(Y=n-i)=p(1-p)^{n-i-1}.$$

于是

$$P(X=i)P(Y=n-i)=p^2(1-p)^{n-2}.$$

这个值跟 i 无关，所以 $P(X=i|X+Y=n)=P(X=j|X+Y=n)$.
由全概率公式，有

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}.$$

第四题：1) X 服从 $(0,l)$ 上的均匀分布，若 X 取值 x，Y 服从 $(0,x)$ 上的均匀分布所以我们有

$$P(X\in[x,x+\Delta],Y=y\in[a,a+\Delta'])=\frac{1}{l}\Delta\times\frac{1}{X}\Delta'=\frac{1}{lx}\Delta\Delta'+o(\Delta\Delta'),a,a+\Delta'\leqslant x+\Delta'.$$

所以我们有 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{lx}, & x\in(0,l),y\in(0,x)\\ 0, & else.\end{cases}$$

2) 因为 $Y\leqslant X$, 所以 Y 的边际密度函数为

$$p(y)=\int_y^1 p(x,y)dx=\int_y^l\frac{1}{lx}dx=\frac{1}{l}(\ln l-\ln y),\ y\in(0,l).$$

所以

$$E(Y)=\frac{1}{l}\int_0^l y(\ln l-\ln y)dy=\frac{l}{4}.$$