概率论与数理统计（12-2）

清华大学

2020 年春季学期

似然比检验

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自密度函数为 $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ 的总体的样本，考虑如下检验问题：

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0.$$

似然比定义为

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, \ldots, x_n; \theta)} = \frac{p(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_0)}.$$

似然比检验

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是来自密度函数为 $p(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ 的总体的样本，考虑如下检验问题：

$$H_0:\ \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0.$$

似然比定义为

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} p(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} p(x_1, \ldots, x_n; \theta)} = \frac{p(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_0)}.$$

- (Wilk 定理) 对于假设检验: $H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \neq \theta_0$. 在原假设成立的情况下，$2\ln\Lambda(x_1, \ldots, x_n) \to \chi^2(1)$ 当 $n \to \infty$.
- 似然比检验：选取似然比为参考统计量，取拒绝域为

$$W = \{\Lambda(x_1, \ldots, x_n) \geqslant c\}$$

选定显著水平 α, 近似地，$c = \chi^2_{1-\alpha}(1)$.

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验
$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$
- 参数空间 $\Theta_0 := \{(\mu, \sigma_0^2) | \mu \in \mathbb{R}\}$, $\Theta := \{(\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_i^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0 := \{(\mu, \sigma_0^2) | \mu \in \mathbb{R}\}$, $\Theta := \{(\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_i^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ, σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \text{ vs } H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0:=\{(\mu,\sigma_0^2)|\mu\in\mathbb{R}\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ,σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\mu}=\bar{x}$

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0 := \{(\mu, \sigma_0^2) | \mu \in \mathbb{R}\}$, $\Theta := \{(\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_i^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ, σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\mu} = \bar{x}$
- 似然比：$\Lambda = \frac{(2\pi s_n^2)^{-n/2} \exp(-\frac{n}{2})}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} \exp(-\frac{ns_n^2}{2\sigma_0^2})} = [\frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \exp(-\frac{s_n^2}{\sigma_0^2})]^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{n}{2})$.

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \text{ vs } H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0:=\{(\mu,\sigma_0^2)|\mu\in\mathbb{R}\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ,σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\mu}=\bar{x}$
- 似然比：$\Lambda=\frac{(2\pi s_n^2)^{-n/2}\exp(-\frac{n}{2})}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp(-\frac{ns_n^2}{2\sigma_0^2})}=[\frac{s_n^2}{\sigma_0^2}\exp(-\frac{s_n^2}{\sigma_0^2})]^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{n}{2})$.
- $\{\Lambda\geqslant c\}$ 等价于 $\{\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\leqslant d_1$ 或者 $\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\geqslant d_2\}$

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \text{ vs } H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0:=\{(\mu,\sigma_0^2)|\mu\in\mathbb{R}\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ,σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\mu}=\bar{x}$
- 似然比：$\Lambda=\frac{(2\pi s_n^2)^{-n/2}\exp(-\frac{n}{2})}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp(-\frac{ns_n^2}{2\sigma_0^2})}=[\frac{s_n^2}{\sigma_0^2}\exp(-\frac{s_n^2}{\sigma_0^2})]^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{n}{2})$.
- $\{\Lambda\geqslant c\}$ 等价于 $\{\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\leqslant d_1$ 或者 $\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\geqslant d_2\}$因为函数 xe^{-x} 在 (0,1) 增，在 $[1,\infty)$ 减。

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \text{ vs } H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

- 参数空间 $\Theta_0:=\{(\mu,\sigma_0^2)|\mu\in\mathbb{R}\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: (μ,σ^2) 的最大似然估计：$\bar{x}$, $s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\mu}=\bar{x}$
- 似然比：$\Lambda=\frac{(2\pi s_n^2)^{-n/2}\exp(-\frac{n}{2})}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp(-\frac{ns_n^2}{2\sigma_0^2})}=[\frac{s_n^2}{\sigma_0^2}\exp(-\frac{s_n^2}{\sigma_0^2})]^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{n}{2})$.
- $\{\Lambda\geqslant c\}$ 等价于 $\{\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\leqslant d_1$ 或者$\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2}\geqslant d_2\}$因为函数 xe^{-x} 在 (0,1) 增，在 $[1,\infty)$ 减。
- 卡方检验。

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

例子

- 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

- $\Theta_0 := \{(\mu_0, \sigma^2) | \sigma^2 > 0\}$, $\Theta := \{(\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_i^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: $\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

例子

- 设 $x_1,\dots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\mu=\mu_0 \text{ vs } H_1:\mu\neq\mu_0.$$

- $\Theta_0:=\{(\mu_0,\sigma^2)|\sigma^2>0\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: $\hat{\mu}=\bar{x},\hat{\sigma}^2=s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验
$$H_0:\mu=\mu_0 \text{ vs } H_1:\mu\neq\mu_0.$$

- $\Theta_0 := \{(\mu_0,\sigma^2)|\sigma^2>0\}$, $\Theta := \{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: $\hat{\mu}=\bar{x},\hat{\sigma}^2=s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$
- 似然比 $\Lambda=\frac{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2]^{-n/2}}{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2]^{-n/2}}=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}\right]^{n/2}=$ $(1+\frac{1}{n-1}(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s})^2)^{n/2}$.

例子

- 设 $x_1,\dots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\mu=\mu_0 \text{ vs } H_1:\mu\neq\mu_0.$$

- $\Theta_0:=\{(\mu_0,\sigma^2)|\sigma^2>0\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: $\hat{\mu}=\bar{x},\hat{\sigma}^2=s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.$\Theta_0$: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$
- 似然比 $\Lambda=\frac{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2]^{-n/2}}{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2]^{-n/2}}=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}\right]^{n/2}=(1+\frac{1}{n-1}(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s})^2)^{n/2}$. $\{\Lambda\geqslant c\}\Leftrightarrow\{|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}|\geqslant d\}$

例子

- 设 $x_1,\ldots,x_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，用似然比检验

$$H_0:\mu=\mu_0 \text{ vs } H_1:\mu\neq\mu_0.$$

- $\Theta_0:=\{(\mu_0,\sigma^2)|\sigma^2>0\}$, $\Theta:=\{(\mu,\sigma^2)|\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}$.
- 似然函数 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\sum_i^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θ: $\hat\mu=\bar x,\hat\sigma^2=s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2$.$\Theta_0$: $\hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$
- 似然比 $\Lambda=\frac{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2]^{-n/2}}{[2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2]^{-n/2}}=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2+n(\bar x-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2}\right]^{n/2}=$ $(1+\frac{1}{n-1}(\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu_0)}{s})^2)^{n/2}$. $\{\Lambda\geqslant c\}\Leftrightarrow\{|\frac{\sqrt{n}(\bar x-\mu_0)}{s}|\geqslant d\}$
- t-检验。

分类数据的 χ^2 拟合

- 总体被分为 r 类：$A_1, \ldots, A_r$, 检验假设为

$$H_0: \; P(A_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

其中 $p_1 + \cdots + p_r = 1$。

- 总体被分为 r 类：$A_1, \dots, A_r$, 检验假设为

$$H_0: \ P(A_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

其中 $p_1 + \cdots + p_r = 1$。考虑

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

分类数据的 χ^2 拟合

- 总体被分为 r 类：$A_1, \ldots, A_r$, 检验假设为

$$H_0: \; P(A_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

其中 $p_1 + \cdots + p_r = 1$。考虑

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

- (K. 皮尔逊) 在原假设成立下，当 $n \to \infty$ 时，$\chi^2 \to \chi^2(r-1)$.

分类数据的 χ^2 拟合

- 总体被分为 r 类：$A_1, \ldots, A_r$, 检验假设为

$$H_0: \ P(A_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

其中 $p_1 + \cdots + p_r = 1$。考虑

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

- (K. 皮尔逊) 在原假设成立下，当 $n \to \infty$ 时，$\chi^2 \to \chi^2(r-1)$.给定显著水平 $\alpha \in (0,1)$, 可以选择拒绝域为

$$W = \{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(r-1)\}.$$

- 掷一颗骰子 60 次，结果下：

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	8	12	11	9	13

在显著水平（近似）为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。

- 掷一颗骰子 60 次，结果下:

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	8	12	11	9	13

在显著水平（近似）为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。

- $H_0 : p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$,

例子

- 掷一颗骰子 60 次，结果下:

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	8	12	11	9	13

  在显著水平（近似）为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。
- $H_0 : p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(5)\}$, $\chi^2_{0.05}(5) = 11.0705$.

- 掷一颗骰子 60 次，结果下：

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	8	12	11	9	13

在显著水平（近似）为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。
- $H_0: p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(5)\}$, $\chi^2_{0.05}(5) = 11.0705.$
- 计算统计量 $\chi^2 = \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \cdots + \frac{(13-10)^2}{10} = 2.8 \leqslant \chi^2_{0.05}(5).$
- 接受原假设。

例子

- 掷一颗骰子 60 次，结果下：

点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	8	12	11	9	13

  在显著水平（近似）为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。
- $H_0 : p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(5)\}$,
  $\chi^2_{0.05}(5) = 11.0705.$
- 计算统计量
  $\chi^2 = \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \cdots + \frac{(13-10)^2}{10} = 2.8 \leqslant \chi^2_{0.05}(5).$
- 接受原假设。
- （近似）p-值为 $p = P(\chi^2(5) \geqslant 2.8) = 0.7308.$

- 如果 p_{i_0} 依赖于 k 个未知参数?
- (费希尔) 寻找这 k 个参数的最大似然估计，再算出 p_{i_0} 的估计值 $\hat{p}_i$, 则

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \to \chi^2(r-k-1).$$

- 如果 p_{i_0} 依赖于 k 个未知参数?
- (费希尔) 寻找这 k 个参数的最大似然估计，再算出 p_{i_0} 的估计值 $\hat{p}_i$, 则

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \to \chi^2(r-k-1).$$

- 譬如： $p_1 = \theta^2, \quad p_2 = 2\theta(1-\theta), \quad p_3(1-\theta)^2.$

列联表的独立性检验

A\B	1	...	j	...	c	和
1	$n_{1,1}$	...	$n_{1,j}$	...	$n_{1,c}$	n_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n_{i,1}$	...	$n_{i,j}$	...	n_{ic}	n_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r	$n_{r,1}$	...	$n_{r,j}$	...	$n_{r,c}$	n_r
列和	N_1	...	N_j	...	N_c	N

列联表的独立性检验

-

A\B	1	...	j	...	c	和
1	$n_{1,1}$	...	$n_{1,j}$	...	$n_{1,c}$	n_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n_{i,1}$	...	$n_{i,j}$	...	n_{ic}	n_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r	$n_{r,1}$	...	$n_{r,j}$	...	$n_{r,c}$	n_r
列和	N_1	...	N_j	...	N_c	N

- $p_{i-} = P(A_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $p_{-j} = P(B_j)$, $j = 1, \ldots, c$, $p_{ij} = P(A_i B_j)$.

A\B	1	...	j	...	c	和
1	$n_{1,1}$	...	$n_{1,j}$	...	$n_{1,c}$	n_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n_{i,1}$	...	$n_{i,j}$	...	n_{ic}	n_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r	$n_{r,1}$	...	$n_{r,j}$	...	$n_{r,c}$	n_r
列和	N_1	...	N_j	...	N_c	N
- $p_{i-} = P(A_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $p_{-j} = P(B_j)$, $j = 1, \ldots, c$, $p_{ij} = P(A_iB_j)$.
- 假设检验：$H_0 : p_{ij} = p_{i-}p_{-j}$, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, c$. 即 A_i 与 B_j 相互独立。

列联表的独立性检验

A\B	1	...	j	...	c	和
1	$n_{1,1}$	...	$n_{1,j}$	...	$n_{1,c}$	n_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n_{i,1}$	...	$n_{i,j}$	...	n_{ic}	n_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r	$n_{r,1}$	...	$n_{r,j}$	...	$n_{r,c}$	n_r
列和	N_1	...	N_j	...	N_c	N
- $p_{i-} = P(A_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $p_{-j} = P(B_j)$, $j = 1, \ldots, c$, $p_{ij} = P(A_iB_j)$.
- 假设检验：$H_0 : p_{ij} = p_{i-}p_{-j}$, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, c$. 即 A_i 与 B_j 相互独立。
- 统计量：$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{i,j} - N\hat{p}_{i,j})^2}{N\hat{p}_{i,j}}$, $\hat{p}_{i,j} = \frac{n_i}{N}\frac{N_j}{N}$.

列联表的独立性检验

-

A\B	1	...	j	...	c	和
1	$n_{1,1}$	...	$n_{1,j}$	...	$n_{1,c}$	n_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$n_{i,1}$	...	$n_{i,j}$	...	n_{ic}	n_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r	$n_{r,1}$	...	$n_{r,j}$	...	$n_{r,c}$	n_r
列和	N_1	...	N_j	...	N_c	N

- $p_{i-} = P(A_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $p_{-j} = P(B_j)$, $j = 1, \ldots, c$, $p_{ij} = P(A_iB_j)$.
- 假设检验：$H_0 : p_{ij} = p_{i-}p_{-j}$, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, c$. 即 A_i 与 B_j 相互独立。
- 统计量：$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{i,j}-N\hat{p}_{i,j})^2}{N\hat{p}_{i,j}}$, $\hat{p}_{i,j} = \frac{n_i}{N}\frac{N_j}{N}$.
- 在原假设成立的情况下，当 N 很大，$\chi^2 \sim \chi^2\Big((r-1)(c-1)\Big)$.

例子

- 在研究某种新措施对非洲猪瘟的防治效果，获得一下数据：

	存活数	死亡数	合计
对照组	114	36	150
新措施	132	18	150
合计	246	54	300

在显著水平（近似）为 0.05 下检验该措施是否有效。

例子

- 在研究某种新措施对非洲猪瘟的防治效果，获得一下数据：

	存活数	死亡数	合计
对照组	114	36	150
新措施	132	18	150
合计	246	54	300

  在显著水平（近似）为 0.05 下检验该措施是否有效。
- H_0: 措施与防疫无关。

例子

- 在研究某种新措施对非洲猪瘟的防治效果，获得一下数据：

	存活数	死亡数	合计
对照组	114	36	150
新措施	132	18	150
合计	246	54	300

  在显著水平（近似）为 0.05 下检验该措施是否有效。
- H_0: 措施与防疫无关。
- 自由度 $r = c = 2$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(1) = 3.8415\}$.

例子

- 在研究某种新措施对非洲猪瘟的防治效果，获得一下数据：

	存活数	死亡数	合计
对照组	114	36	150
新措施	132	18	150
合计	246	54	300

  在显著水平（近似）为 0.05 下检验该措施是否有效。
- H_0: 措施与防疫无关。
- 自由度 $r=c=2$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(1) = 3.8415\}$.
- 统计量：$n_{11}=114$, $n_{12}=36$, $n_1=150$, $n_{21}=132$, $n_{22}=18$, $n_2=150$, $N_1=246$, $N_2=54, N=300$, $\hat{p}_{11}=\frac{1}{2}\frac{246}{300}$, $\hat{p}_{12}=\frac{1}{2}\frac{54}{300}$, $\hat{p}_{21}=\frac{1}{2}\frac{246}{300}$, $\hat{p}_{22}=\frac{1}{2}\frac{54}{300}$.

$$\chi^2 = \frac{(114-\frac{300\cdot 246}{2\cdot 300})^2}{300\cdot\frac{246}{2\cdot 300}} + \frac{(36-\frac{300\cdot 54}{2\cdot 300})^2}{300\cdot\frac{54}{2\cdot 300}} + \frac{(132-123)^2}{123} + \frac{(18-27)^2}{27}$$

- $\chi^2 = 7.31$, 拒绝原假设。p-值为 $P(\chi^2(1) \geqslant 7.31) = 0.0068$.

非参数检验:Kolmogorov-Simrnov 检验

- 检验样本是否来自分布函数为 $F(x)$ 的总体。

非参数检验:Kolmogorov-Simrnov 检验

- 检验样本是否来自分布函数为 $F(x)$ 的总体。
- H_0： 是； vs H_1： 不是.

- 检验样本是否来自分布函数为 $F(x)$ 的总体。
- H_0： 是； vs H_1： 不是.
- 统计量: $F_n(x)$ 是经验分布函数:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[-\infty, x_{(i)}]}(x),$$

考虑 $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$. 当 $n \to \infty$, $\sqrt{n}D_n \to \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 服从 Kolmogorov 分布。

- 检验样本是否来自分布函数为 $F(x)$ 的总体。
- H_0： 是； vs H_1： 不是.
- 统计量: $F_n(x)$ 是经验分布函数:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[-\infty, x_{(i)}]}(x),$$

  考虑 $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$. 当 $n \to \infty$, $\sqrt{n}D_n \to \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 服从 Kolmogorov 分布。
- 给定显著水平 α, 拒绝域为 $\sqrt{n}D_n > \mathcal{K}_\alpha$.

非参数检验：Kolmogorov-Simrnov 检验

- 两组样本 $x_1, \dots, x_n$ 和 $y_1, \dots, y_m$. 检验两种样本是否来自相同的总体分布 (不知)。

非参数检验：Kolmogorov-Simrnov 检验

- 两组样本 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$. 检验两种样本是否来自相同的总体分布 (不知)。
- H_0： 是； vs H_1： 不是.

非参数检验：Kolmogorov-Simrnov 检验

- 两组样本 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$. 检验两种样本是否来自相同的总体分布 (不知)。
- H_0 : 是； vs H_1 : 不是.
- 经验分布函数分别为 $F_{1,n}(z)$, $F_{2,m}(z)$. 考虑统计量 $D_{m,n} = \sup_z |F_{1,n}(z) - F_{2,m}(z)|$.

- 两组样本 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$. 检验两种样本是否来自相同的总体分布（不知）。
- H_0：是； vs H_1：不是.
- 经验分布函数分别为 $F_{1,n}(z)$, $F_{2,m}(z)$. 考虑统计量 $D_{m,n} = \sup_z |F_{1,n}(z) - F_{2,m}(z)|$.
- 给定显著水平 α, 拒绝域为 $\{D_{m,n} > c(\alpha)\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\}$.
- 一般来说 $c(\alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2}\ln \alpha}$.

- $X_1, \ldots, X_n$ 是样本。假设检验问题：H_0: 样本来自正态总体 vs H_1：不是。

正态性检验: Shapiro-Wilk 检验

- $X_1, \ldots, X_n$ 是样本。假设检验问题：H_0: 样本来自正态总体 vs H_1：不是。
- 统计量: $W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

$$(a_1, \ldots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{C},$$

其中 $C = (m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}$, $m = (m_1, \ldots, m_n)^T$ 为来自标准正态总体的样本容量为 n 的样本次序统计量。V 是该次序统计量的协方差矩阵。

- 当原假设成立时，W 靠近 1. 给定显著水平 α， 拒绝域为 $\{W \leqslant W_\alpha\}$

正态性检验：Epps-Pulley 检验

- $X_1, \ldots, X_n$ 是样本。假设检验问题：H_0: 样本来自正态总体 vs H_1：不是。

正态性检验：Epps-Pulley 检验

- $X_1, \ldots, X_n$ 是样本。假设检验问题：H_0: 样本来自正态总体 vs H_1：不是。
- 统计量：

$$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} e^{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2s_n^2}} - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{4s_n^2}}.$$

正态性检验：Epps-Pulley 检验

- $X_1, \ldots, X_n$ 是样本。假设检验问题：H_0: 样本来自正态总体 vs H_1 : 不是。
- 统计量：

$$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} e^{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2s_n^2}} - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{4s_n^2}}.$$

- 给定显著水平 α，　　拒绝域为 $\{T_{EP} \geqslant T_{1-\alpha,EP}(n)\}$.