第四章　大数定律与中心极限定理

习题 4.1

1． 如果 $X_n \xrightarrow{P} X$，且 $X_n \xrightarrow{P} Y$．试证：$P\{X=Y\}=1$．

证：因 $|X-Y| = |-(X_n-X)+(X_n-Y)| \le |X_n-X|+|X_n-Y|$，对任意的$\varepsilon>0$，有

$$0 \le P\{|X-Y| \ge \varepsilon\} \le P\left\{|X_n-X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|X_n-Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

又因 $X_n \xrightarrow{P} X$，且 $X_n \xrightarrow{P} Y$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{|X_n-X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{|X_n-Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$，

则 $P\{|X-Y| \ge \varepsilon\}=0$，取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$，有 $P\left\{|X-Y| \ge \frac{1}{k}\right\}=0$，即 $P\left\{|X-Y| < \frac{1}{k}\right\}=1$，

故 $P\{X=Y\}=P\left\{\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\left\{|X-Y|<\frac{1}{k}\right\}\right\}=\lim\limits_{k\to+\infty}P\left\{|X-Y|<\frac{1}{k}\right\}=1$．

2． 如果 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$．试证：

（1） $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$；

（2） $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$．

证：（1）因 $|(X_n+Y_n)-(X+Y)| = |(X_n-X)+(Y_n-Y)| \le |X_n-X|+|Y_n-Y|$，对任意的$\varepsilon>0$，有

$$0 \le P\{|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \ge \varepsilon\} \le P\left\{|X_n-X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|Y_n-Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

又因 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{|X_n-X| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{|Y_n-Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$，

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \ge \varepsilon\}=0$，即 $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$；

（2）因 $|X_nY_n-XY| = |(X_n-X)Y_n+X(Y_n-Y)| \le |X_n-X|\cdot|Y_n|+|X|\cdot|Y_n-Y|$，对任意的$\varepsilon>0$，有

$$0 \le P\{|X_nY_n-XY| \ge \varepsilon\} \le P\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|X|\cdot|Y_n-Y| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

对任意的 $h>0$，存在 $M_1>0$，使得 $P\{|X| \ge M_1\}<\frac{h}{4}$，存在 $M_2>0$，使得 $P\{|Y| \ge M_2\}<\frac{h}{8}$，

存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$P\{|Y_n-Y| \ge 1\}<\frac{h}{8}$，

因$|Y_n| = |(Y_n-Y)+Y| \le |Y_n-Y|+|Y|$，有 $P\{|Y_n| \ge M_2+1\} \le P\{|Y_n-Y| \ge 1\}+\{|Y| \ge M_2\}<\frac{h}{4}$，

存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，$P\left\{|X_n-X| \ge \frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}<\frac{h}{4}$，当 $n>\max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$P\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\le P\left\{|X_n-X|\ge\frac{\varepsilon}{2(M_2+1)}\right\}+P\{|Y_n|\ge M_2+1\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{4}=\frac{h}{2},$$

存在 $N_3>0$，当 $n>N_3$ 时，$P\left\{|Y_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2M_1}\right\}<\frac{h}{4}$，有

$$P\left\{|Y_n-Y|\cdot|X|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\le P\left\{|Y_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2M_1}\right\}+P\{|X|\ge M_1\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{4}=\frac{h}{2},$$

则对任意的 $h>0$，当 $n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时，有

$$0\le P\{|X_nY_n-XY|\ge\varepsilon\}\le P\left\{|X_n-X|\cdot|Y_n|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|X|\cdot|Y_n-Y|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\frac{h}{2}+\frac{h}{2}=h,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_nY_n-XY|\ge\varepsilon\}=0$，即 $X_nY_n\xrightarrow{P}XY$.

3． 如果 $X_n\xrightarrow{P}X$，$g(x)$ 是直线上的连续函数，试证：$g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$.

证：对任意的 $h>0$，存在 $M>0$，使得 $P\{|X|\ge M\}<\frac{h}{4}$，

存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$P\{|X_n-X|\ge1\}<\frac{h}{4}$，

因$|X_n|=|(X_n-X)+X|\le|X_n-X|+|X|$，

则$P\{|X_n|\ge M+1\}\le P\{|X_n-X|\ge1\}+P\{|X|\ge M\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{4}=\frac{h}{2}$，

因 $g(x)$ 是直线上的连续函数，有 $g(x)$ 在闭区间 $[-(M+1),M+1]$ 上连续，必一致连续，
对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$，

存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，$P\{|X_n-X|\ge\delta\}<\frac{h}{4}$，

则对任意的 $h>0$，当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$0\le P\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon\}\le P\{\{|X_n-X|\ge\delta\}\cup\{|X_n|\ge M+1\}\cup\{|X|\ge M\}\}$$

$$\le P\{|X_n-X|\ge\delta\}+P\{|X_n|\ge M+1\}+P\{|X|\ge M\}<\frac{h}{4}+\frac{h}{2}+\frac{h}{4}=h,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|g(X_n)-g(X)|\ge\varepsilon\}=0$，即 $g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$.

4． 如果 $X_n\xrightarrow{P}a$，则对任意常数 c，有 $cX_n\xrightarrow{P}ca$.

证：当 $c=0$ 时，有 $cX_n=0$，$ca=0$，显然 $cX_n\xrightarrow{P}ca$；

当 $c\ne0$ 时，对任意的$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{|X_n-a|\ge\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}=0$，

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|cX_n-ca|\ge\varepsilon\}=0$，即 $cX_n\xrightarrow{P}ca$.

5． 试证：$X_n\xrightarrow{P}X$ 的充要条件为：$n\to+\infty$ 时，有 $E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)\to0$.

证：以连续随机变量为例进行证明，设 $X_n - X$ 的密度函数为 $p(y)$，

必要性：设 $X_n \xrightarrow{P} X$，对任意的$\varepsilon > 0$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$，

对 $\dfrac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < \dfrac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$，

则 $E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{|y|}{1+|y|} p(y)dy = \int\limits_{|y|<\varepsilon} \dfrac{|y|}{1+|y|} p(y)dy + \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \dfrac{|y|}{1+|y|} p(y)dy$

$$\leq \int\limits_{|y|<\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p(y)dy + \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} p(y)dy = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} + P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = \varepsilon,$$

故 $n \to +\infty$ 时，有 $E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \to 0$；

充分性：设 $n \to +\infty$ 时，有 $E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \to 0$，

因 $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} p(y)dy = \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p(y)dy \leq \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \dfrac{|y|}{1+|y|} p(y)dy$

$$\leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{1+|y|} p(y)dy = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$，即 $X_n \xrightarrow{P} X$．

6． 设 $D(x)$为退化分布：

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

试问下列分布函数列的极限函数是否仍是分布函数？（其中 $n = 1, 2, \cdots$.）

（1）$\{D(x + n)\}$；

（2）$\{D(x + 1/n)\}$；

（3）$\{D(x - 1/n)\}$.

解：（1）对任意实数 x，当 $n > -x$ 时，有 $x + n > 0$，$D(x + n) = 1$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x+n) = 1$，

则 $\{D(x + n)\}$ 的极限函数是常量函数 $f(x) = 1$，有 $f(-\infty) = 1 \neq 0$，

故 $\{D(x + n)\}$ 的极限函数不是分布函数；

（2）若 $x \geq 0$，有 $x + \dfrac{1}{n} > 0$，$D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 1$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 1$，

若 $x < 0$，当 $n > -\dfrac{1}{x}$ 时，有 $x + \dfrac{1}{n} < 0$，$D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 0$，

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ 这是在 0 点处单点分布的分布函数，满足分布函数的基本性质，

故$\left\{D\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\}$的极限函数是分布函数；

（3）若 $x\le 0$，有 $x-\frac{1}{n}<0$， $D\left(x-\frac{1}{n}\right)=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=0$，

若 $x>0$，当 $n>\frac{1}{x}$ 时，有 $x-\frac{1}{n}>0$， $D\left(x-\frac{1}{n}\right)=1$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=1$，

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left(x-\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不是右连续，

故$\left\{D\left(x-\frac{1}{n}\right)\right\}$的极限函数不是分布函数.

7． 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于连续的分布函数 $F(x)$，试证：$\{F_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于分布函数 $F(x)$.

证：因 $F(x)$ 为连续的分布函数，有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，对任意的$\varepsilon>0$，取正整数 $k>\frac{2}{\varepsilon}$，

则存在分点 $x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}$，使得 $F(x_i)=\frac{i}{k},\quad i=1,2,\cdots,k-1$，并取 $x_0=-\infty$，$x_k=+\infty$，

可得 $F(x_i)-F(x_{i-1})=\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,k-1,k$，

因 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$，且 $F(x)$ 连续，有 $\{F_n(x)\}$ 在每一点处都收敛于 $F(x)$，

则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|F_n(x_i)-F(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,k-1$，

且显然有 $|F_n(x_0)-F(x_0)|=0<\frac{\varepsilon}{2}$，$|F_n(x_k)-F(x_k)|=0<\frac{\varepsilon}{2}$，

对任意实数 x，必存在 j，$1\le j\le k$，有 $x_{j-1}\le x<x_j$，

因 $F(x_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2}<F_n(x_{j-1})\le F_n(x)\le F_n(x_j)<F(x_j)+\frac{\varepsilon}{2}$，

则 $F_n(x)-F(x)>F(x_{j-1})-F(x)-\frac{\varepsilon}{2}>-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=-\varepsilon$，且 $F_n(x)-F(x)<F(x_j)-F(x)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

即对任意的$\varepsilon>0$ 和任意实数 x，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon$，

故 $\{F_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于分布函数 $F(x)$.

8． 如果 $X_n\xrightarrow{L}X$，且数列 $a_n\to a$，$b_n\to b$．试证：$a_nX_n+b_n\xrightarrow{L}aX+b$.

证：设 y_0 是 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点，

则对任意的$\varepsilon>0$，存在 $h>0$，当 $|y-y_0|<h$ 时，$|F_{aX+b}(y)-F_{aX+b}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

又设 y 是满足 $|y-y_0|<h$ 的 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点，

因 $F_{aX+b}(y)=P\{aX+b\le y\}=P\left\{X\le\frac{y-b}{a}\right\}=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$，有 $x=\frac{y-b}{a}$ 是 $F_X(x)$ 的连续点，且 $X_n\xrightarrow{L}X$，

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即 $|F_{aX_n+b}(y)-F_{aX+b}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

则当 $n > N_1$ 且 $|y - y_0| < h$ 时，

$$|F_{aX_n+b}(y) - F_{aX+b}(y_0)| \le |F_{aX_n+b}(y) - F_{aX+b}(y)| + |F_{aX+b}(y) - F_{aX+b}(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因 X 的分布函数 $F_X(x)$ 满足 $F_X(-\infty) = 0$，$F_X(+\infty) = 1$，$F_X(x)$ 单调不减且几乎处处连续，

存在 M，使得 $F_X(x)$ 在 $x = \pm M$ 处连续，且 $F_X(M) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$， $F_X(-M) < \frac{\varepsilon}{4}$，

因 $X_n \xrightarrow{L} X$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(M) = F_X(M) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$， $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(-M) = F_X(-M) < \frac{\varepsilon}{4}$，

则存在 N_2，当 $n > N_2$ 时， $F_{X_n}(M) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$， $F_{X_n}(-M) < \frac{\varepsilon}{4}$，

可得 $P\{|X_n| > M\} = F_{X_n}(-M) + 1 - F_{X_n}(M) < \frac{\varepsilon}{2}$，

因数列 $a_n \to a$，$b_n \to b$，存在 N_3，当 $n > N_3$ 时，$|a_n - a| < \frac{h}{4M}$， $|b_n - b| < \frac{h}{4}$，

可得当 $n > \max\{N_2, N_3\}$时，

$$P\left\{|(a_n X_n + b_n) - (aX_n + b)| > \frac{h}{2}\right\} = P\left\{|(a_n - a)X_n + (b_n - b)| > \frac{h}{2}\right\}$$

$$\le P\left\{|a_n - a| \cdot |X_n| + |b_n - b| > \frac{h}{2}\right\} \le P\left\{\frac{h}{4M} \cdot |X_n| + \frac{h}{4} > \frac{h}{2}\right\} = P\{|X_n| > M\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

则 $F_{a_nX_n+b_n}(y_0) = P\{a_n X_n + b_n \le y_0\} \le P\left\{\left\{aX_n + b \le y_0 + \frac{h}{2}\right\} \cup \left\{|(a_n X_n + b_n) - (aX_n + b)| > \frac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\le P\left\{aX_n + b \le y_0 + \frac{h}{2}\right\} + P\left\{|(a_n X_n + b_n) - (aX_n + b)| > \frac{h}{2}\right\} < F_{aX_n+b}\left(y_0 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2},$$

且 $F_{aX_n+b}\left(y_0 - \frac{h}{2}\right) = P\left\{aX_n + b \le y_0 - \frac{h}{2}\right\} \le P\left\{\{a_n X_n + b_n \le y_0\} \cup \left\{|(a_n X_n + b_n) - (aX_n + b)| > \frac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\le P\{a_n X_n + b_n \le y_0\} + P\left\{|(a_n X_n + b_n) - (aX_n + b)| > \frac{h}{2}\right\} < F_{a_nX_n+b_n}(y_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

即 $F_{aX_n+b}\left(y_0 - \frac{h}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{a_nX_n+b_n}(y_0) < F_{aX_n+b}\left(y_0 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$，

因当 $n > N_1$ 且 $|y - y_0| < h$ 时， $F_{aX+b}(y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{aX_n+b}(y) < F_{aX+b}(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}$，

在区间 $\left(y_0 + \frac{h}{2}, y_0 + h\right)$ 取 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点 y_1，满足 $|y_1 - y_0| < h$，当 $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$时，

$$F_{a_nX_n+b_n}(y_0) < F_{aX_n+b}\left(y_0 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \le F_{aX_n+b}(y_1) + \frac{\varepsilon}{2} < F_{aX+b}(y_0) + \varepsilon,$$

在区间 $\left(y_0 - h, y_0 - \frac{h}{2}\right)$ 取 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点 y_2，满足 $|y_2 - y_0| < h$，当 $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$时，

$$F_{a_nX_n+b_n}(y_0) > F_{aX_n+b}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2} \ge F_{aX_n+b}(y_2)-\frac{\varepsilon}{2} > F_{aX+b}(y_0)-\varepsilon,$$

即对于 $F_{aX+b}(y)$ 的任一连续点 y_0，当 $n>\max\{N_1, N_2, N_3\}$时，$|F_{a_nX_n+b_n}(y_0)-F_{aX+b}(y_0)|<\varepsilon$，

故 $F_{a_nX_n+b_n}(y)\xrightarrow{W}F_{aX+b}(y)$，$a_nX_n+b_n\xrightarrow{L}aX+b$.

9. 如果 $X_n\xrightarrow{L}X$，$Y_n\xrightarrow{P}a$，试证：$X_n+Y_n\xrightarrow{L}X+a$.

证：设 y_0 是 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点，

则对任意的$\varepsilon>0$，存在 $h>0$，当 $|y-y_0|<h$ 时，$|F_{X+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

又设 y 是满足 $|y-y_0|<h$ 的 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点，

因 $F_{X+a}(y)=P\{X+a\le y\}=P\{X\le y-a\}=F_X(y-a)$，有 $x=y-a$ 是 $F_X(x)$ 的连续点，且 $X_n\xrightarrow{L}X$，

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即$|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

则当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，$|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|\le|F_{X_n+a}(y)-F_{X+a}(y)|+|F_{X+a}(y)-F_{X+a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$，

因$Y_n\xrightarrow{P}a$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}=0$，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}$，

则 $F_{X_n+Y_n}(y_0)=P\{X_n+Y_n\le y_0\}\le P\left\{\left\{X_n+a\le y_0+\frac{h}{2}\right\}\cup\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\le P\left\{X_n+a\le y_0+\frac{h}{2}\right\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

且 $F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)=P\left\{X_n+a\le y_0-\frac{h}{2}\right\}\le P\left\{\{X_n+Y_n\le y_0\}\cup\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\le P\{X_n+Y_n\le y_0\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n+Y_n}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{X_n+Y_n}(y_0)<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}$，

因当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，$F_{X+a}(y_0)-\frac{\varepsilon}{2}<F_{X_n+a}(y)<F_{X+a}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}$，

在区间$\left(y_0+\frac{h}{2}, y_0+h\right)$取 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_1，满足 $|y_1-y_0|<h$，当 $n>\max\{N_1, N_2\}$时，

$$F_{X_n+Y_n}(y_0)<F_{X_n+a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\le F_{X_n+a}(y_1)+\frac{\varepsilon}{2}<F_{X+a}(y_0)+\varepsilon,$$

在区间$\left(y_0-h, y_0-\frac{h}{2}\right)$取 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_2，满足 $|y_2-y_0|<h$，当 $n>\max\{N_1, N_2\}$时，

$$F_{X_n+Y_n}(y_0)>F_{X_n+a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\ge F_{X_n+a}(y_2)-\frac{\varepsilon}{2}>F_{X+a}(y_0)-\varepsilon\,,$$

即对于 $F_{X+a}(y)$ 的任一连续点 y_0，当 $n>\max\{N_1, N_2\}$时，$|F_{X_n+Y_n}(y_0)-F_{X+a}(y_0)|<\varepsilon$，

故 $F_{X_n+Y_n}(y)\xrightarrow{W}F_{X+a}(y)$， $X_n+Y_n\xrightarrow{L}X+a$．

10．如果 $X_n\xrightarrow{L}X$，$Y_n\xrightarrow{P}0$，试证：$X_nY_n\xrightarrow{P}0$．

证：因 X 的分布函数 $F_X(x)$ 满足 $F_X(-\infty)=0$，$F_X(+\infty)=1$，$F_X(x)$ 单调不减且几乎处处连续，

则对任意的 $h>0$，存在 M，使得 $F_X(x)$ 在 $x=\pm M$ 处连续，且 $F_X(M)>1-\frac{h}{4}$， $F_X(-M)<\frac{h}{4}$，

因 $X_n\xrightarrow{L}X$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(M)=F_X(M)>1-\frac{h}{4}$， $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(-M)=F_X(-M)<\frac{h}{4}$，

则存在 N_1，当 $n>N_1$ 时， $F_{X_n}(M)>1-\frac{h}{4}$， $F_{X_n}(-M)<\frac{h}{4}$，

可得 $P\{|X_n|>M\}=F_{X_n}(-M)+1-F_{X_n}(M)<\frac{h}{2}$，

因 $Y_n\xrightarrow{P}0$，对任意的$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}=0$，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时， $P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}<\frac{h}{2}$，

则当 $n>\max\{N_1, N_2\}$时，有

$$P\{|X_nY_n|>\varepsilon\}\le P\left\{\{|X_n|>M\}\cup\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}\right\}\le P\{|X_n|>M\}+P\left\{|Y_n|>\frac{\varepsilon}{M}\right\}<h\,,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_nY_n|>\varepsilon\}=0$，即 $X_nY_n\xrightarrow{P}0$．

11．如果 $X_n\xrightarrow{L}X$，$Y_n\xrightarrow{P}a$，且 $Y_n\ne 0$，常数 $a\ne 0$，试证：$\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{L}\frac{X}{a}$．

证：设 y_0 是 $F_{X/a}(y)$ 的任一连续点，

则对任意的$\varepsilon>0$，存在 $h>0$，当 $|y-y_0|<h$ 时，$|F_{X/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

又设 y 是满足 $|y-y_0|<h$ 的 $F_{X/a}(y)$ 的任一连续点，

因 $F_{X/a}(y)=P\left\{\frac{X}{a}\le y\right\}=P\{X\le ay\}=F_X(ay)$，有 $x=ay$ 是 $F_X(x)$ 的连续点，且 $X_n\xrightarrow{L}X$，

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|F_{X_n}(x)-F_X(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，即$|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$，

则当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，

$$|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|\le|F_{X_n/a}(y)-F_{X/a}(y)|+|F_{X/a}(y)-F_{X/a}(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

因 X 的分布函数 $F_X(x)$ 满足 $F_X(-\infty)=0$，$F_X(+\infty)=1$，$F_X(x)$ 单调不减且几乎处处连续，

存在 M，使得 $F_X(x)$ 在 $x=\pm M$ 处连续，且 $F_X(M)>1-\dfrac{\varepsilon}{12}$，$F_X(-M)<\dfrac{\varepsilon}{12}$，

因 $X_n\xrightarrow{L}X$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(M)=F_X(M)>1-\dfrac{\varepsilon}{12}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_n}(-M)=F_X(-M)<\dfrac{\varepsilon}{12}$，

则存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$F_{X_n}(M)>1-\dfrac{\varepsilon}{12}$，$F_{X_n}(-M)<\dfrac{\varepsilon}{12}$，

可得 $P\{|X_n|>M\}=F_{X_n}(-M)+1-F_{X_n}(M)<\dfrac{\varepsilon}{6}$，

因 $Y_n\xrightarrow{P}a\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{|Y_n-a|>\dfrac{h}{2}\right\}=0$，

存在 $N_3>0$，当 $n>N_3$ 时，$P\left\{|Y_n-a|>\dfrac{|a|}{2}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$，有 $P\left\{|Y_n|<\dfrac{|a|}{2}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$，且 $P\left\{|Y_n-a|>\dfrac{a^2h}{4M}\right\}<\dfrac{\varepsilon}{6}$，

可得当 $n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时，

$$P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}=P\left\{\left|\frac{X_n(a-Y_n)}{aY_n}\right|>\frac{h}{2}\right\}=P\left\{\frac{|X_n|\cdot|Y_n-a|}{|a|\cdot|Y_n|}>\frac{h}{2}\right\}$$

$$\leq P\left\{\{|X_n|>M\}\cup\left\{|Y_n-a|>\frac{a^2h}{4M}\right\}\cup\left\{|Y_n|<\frac{|a|}{2}\right\}\right\}$$

$$\leq P\{|X_n|>M\}+P\left\{|Y_n-a|>\frac{a^2h}{4M}\right\}+P\left\{|Y_n|<\frac{|a|}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2},$$

则 $F_{X_n/Y_n}(y_0)=P\left\{\dfrac{X_n}{Y_n}\leq y_0\right\}\leq P\left\{\left\{\dfrac{X_n}{a}\leq y_0+\dfrac{h}{2}\right\}\cup\left\{\left|\dfrac{X_n}{Y_n}-\dfrac{X_n}{a}\right|>\dfrac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\leq P\left\{\frac{X_n}{a}\leq y_0+\frac{h}{2}\right\}+P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n/a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

且 $F_{X_n/a}\left(y_0-\dfrac{h}{2}\right)=P\left\{\dfrac{X_n}{a}\leq y_0-\dfrac{h}{2}\right\}\leq P\left\{\left\{\dfrac{X_n}{Y_n}\leq y_0\right\}\cup\left\{\left|\dfrac{X_n}{Y_n}-\dfrac{X_n}{a}\right|>\dfrac{h}{2}\right\}\right\}$

$$\leq P\left\{\frac{X_n}{Y_n}\leq y_0\right\}+P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n}-\frac{X_n}{a}\right|>\frac{h}{2}\right\}<F_{X_n/Y_n}(y_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $F_{X_n/a}\left(y_0-\dfrac{h}{2}\right)-\dfrac{\varepsilon}{2}<F_{X_n/Y_n}(y_0)<F_{X_n/a}\left(y_0+\dfrac{h}{2}\right)+\dfrac{\varepsilon}{2}$，

因当 $n>N_1$ 且 $|y-y_0|<h$ 时，$F_{X/a}(y_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}<F_{X_n/a}(y)<F_{X/a}(y_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$，

在区间 $\left(y_0+\dfrac{h}{2},y_0+h\right)$ 取 $F_{X/a}(y)$ 的任一连续点 y_1，满足 $|y_1-y_0|<h$，当 $n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时，

$$F_{X_n/Y_n}(y_0)<F_{X_n/a}\left(y_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\leq F_{X_n/a}(y_1)+\frac{\varepsilon}{2}<F_{X/a}(y_0)+\varepsilon,$$

在区间$\left(y_0-h, y_0-\frac{h}{2}\right)$取$F_{X/a}(y)$的任一连续点$y_2$，满足$|y_2-y_0|<h$，当$n>\max\{N_1, N_2, N_3\}$时，

$$F_{X_n/Y_n}(y_0) > F_{X_n/a}\left(y_0-\frac{h}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2} \ge F_{X_n/a}(y_2)-\frac{\varepsilon}{2} > F_{X/a}(y_0)-\varepsilon\,,$$

即对于$F_{X/a}(y)$的任一连续点y_0，当$n>\max\{N_1, N_2, N_3\}$时，$|F_{X_n/Y_n}(y_0)-F_{X/a}(y_0)|<\varepsilon$，

故$F_{X_n/Y_n}(y)\xrightarrow{W}F_{X/a}(y)$，$\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{L}\frac{X}{a}$．

12．设随机变量X_n服从柯西分布，其密度函数为

$$p_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},\quad -\infty<x<+\infty\,.$$

试证：$X_n\xrightarrow{P}0$．

证：对任意的$\varepsilon>0$，$P\{|X_n|<\varepsilon\}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\arctan(nx)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon)$，

则$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_n-0|<\varepsilon\}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan(n\varepsilon)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$，

故$X_n\xrightarrow{P}0$．

13．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}, & 0<x<\beta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中常数$\beta>0$，令$Y_n=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，试证：$Y_n\xrightarrow{P}\beta$．

证：对任意的$\varepsilon>0$，$P\{|Y_n-\beta|<\varepsilon\}=P\{\beta-\varepsilon<Y_n<\beta+\varepsilon\}=P\{\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}>\beta-\varepsilon\}$

$=1-P\{\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\le\beta-\varepsilon\}=1-P\{X_1\le\beta-\varepsilon\}\,P\{X_2\le\beta-\varepsilon\}\cdots P\{X_n\le\beta-\varepsilon\}$

$$=1-\left(\frac{\beta-\varepsilon}{\beta}\right)^n,$$

则$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-\beta|<\varepsilon\}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{\beta-\varepsilon}{\beta}\right)^n\right]=1$，

故$Y_n\xrightarrow{P}\beta$．

14．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}e^{-(x-a)}, & x\ge a;\\ 0, & x<a.\end{cases}$$

其中$Y_n=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，试证：$Y_n\xrightarrow{P}a$．

证：对任意的$\varepsilon>0$，$P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=P\{a-\varepsilon<Y_n<a+\varepsilon\}=P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}<a+\varepsilon\}$

$=1-P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\ge a+\varepsilon\}=1-P\{X_1\ge a+\varepsilon\}\,P\{X_2\ge a+\varepsilon\}\cdots P\{X_n\ge a+\varepsilon\}$

$$=1-\left(\int_{a+\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-a)}\,dx\right)^n=1-\left(-\mathrm{e}^{-(x-a)}\Big|_{a+\varepsilon}^{+\infty}\right)^n=1-\mathrm{e}^{-n\varepsilon}，$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-n\varepsilon})=1$，

故 $Y_n\xrightarrow{P}a$.

15．设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $X_i\sim U(0, 1)$．令 $Y_n=\left(\prod\limits_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}$，试证明：$Y_n\xrightarrow{P}c$，其中 c 为常数，并求出 c.

证：设 $Z_n=\ln Y_n=\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{i=1}^n X_i\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i$，因 $X_i\sim U(0, 1)$，

则 $E(\ln X_i)=\int_0^1\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1$，$E(\ln^2 X_i)=\int_0^1\ln^2 x dx=(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_0^1=2$，

$\mathrm{Var}(\ln X_i)=E(\ln^2 X_i)-[E(\ln X_i)]^2=1$，

可得 $E(Z_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n E(\ln X_i)=-1$，$\mathrm{Var}(Z_n)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n\mathrm{Var}(\ln X_i)=\dfrac{1}{n}$，

由切比雪夫不等式，可得对任意的 $\varepsilon>0$，$P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{\mathrm{Var}(Z_n)}{\varepsilon^2}=\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$，

则 $0\le\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n\varepsilon^2}=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Z_n-E(Z_n)|\ge\varepsilon\}=0$，$Z_n\xrightarrow{P}E(Z_n)=-1$，

因 $Y_n=\mathrm{e}^{Z_n}$，且函数 e^x 是直线上的连续函数，根据本节第 3 题的结论，可得 $Y_n=\mathrm{e}^{Z_n}\xrightarrow{P}\mathrm{e}^{-1}$，

故 $Y_n\xrightarrow{P}c$，其中 $c=\mathrm{e}^{-1}$ 为常数.

16．设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$，且 $F_n(x)$ 和 $F(x)$ 都是连续、严格单调函数，又设 ξ 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布，试证：$F_n^{-1}(\xi)\xrightarrow{P}F^{-1}(\xi)$.

证：因 $F(x)$ 为连续的分布函数，有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，

则对任意的 $h>0$，存在 $M>0$，使得 $F(M)>1-\dfrac{h}{2}$，$F(-M)<\dfrac{h}{2}$，

因 $F(x)$ 是连续、严格单调函数，有 $F^{-1}(y)$ 也是连续、严格单调函数，

可得 $F^{-1}(y)$ 在区间 $[F(-M-1), F(M+1)]$ 上一致连续，

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $y, y^*\in[F(-M-1), F(M+1)]$ 且 $|y-y^*|<\delta$ 时，$|F^{-1}(y)-F^{-1}(y^*)|<\varepsilon$，

设 y^* 是 $[F(-M), F(M)]$ 中任一点，记 $x^*=F^{-1}(y^*)$，有 $x^*\in[-M, M]$，不妨设 $0<\varepsilon<1$，

则对任意的 $\bar{x}$ 若满足 $|\bar{x}-x^*|\ge\varepsilon$，就有 $|F(\bar{x})-y^*|\ge\delta$，

根据本节第 7 题的结论知，$\{F_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于分布函数 $F(x)$，

则对 $\delta>0$ 和任意实数 x，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $|F_n(x)-F(x)|<\delta$，

因当 $n>N$ 时，$|F_n(\bar{x})-F(\bar{x})|<\delta$ 且 $|F(\bar{x})-y^*|\ge\delta$，有 $F_n(\bar{x})\ne y^*$，即 $\bar{x}\ne F_n^{-1}(y^*)$，

则对任意的 $0<\varepsilon<1$，当 $n>N$ 时，$F_n^{-1}(y^*)$ 满足 $|F_n^{-1}(y^*)-x^*|=|F_n^{-1}(y^*)-F^{-1}(y^*)|<\varepsilon$，

可得对任意的 $0<\varepsilon<1$，当 $n>N$ 时，$P\{|F_n^{-1}(\xi)-F^{-1}(\xi)|<\varepsilon\}\ge P\{\xi\in[F(-M), F(M)]\}>1-h$

由 h 的任意性可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|F_n^{-1}(\xi)-F^{-1}(\xi)|<\varepsilon\}=1$，

故 $F_n^{-1}(\xi)\xrightarrow{P}F^{-1}(\xi)$.

17．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，数学期望、方差均存在，且 $E(X_n)=\mu$，试证：

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cdot X_k\xrightarrow{P}\mu .$$

证：令 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot X_k$ ，并设 $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$，

因 $E(Y_n)=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}k\mu=\dfrac{2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)\mu=\mu$,

且 $\mathrm{Var}(Y_n)=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\sigma^2=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2=\dfrac{4n+2}{3n(n+1)}\sigma^2$,

则由切比雪夫不等式可得，对任意的$\varepsilon>0$，$1\ge P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}\ge1-\dfrac{\mathrm{Var}(Y_n)}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{4n+2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\sigma^2$,

因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{4n+2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\sigma^2\right]=1$，由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1$,

故 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot X_k\xrightarrow{P}\mu$.

18．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，数学期望、方差均存在，且 $E(X_n)=0$，$\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$．试证：
$E(X_n)=0$，$\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$．

试证：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2 .$$

注：此题与第 19 题应放在习题 4.3 中，需用到 4.3 节介绍的辛钦大数定律．

证：因随机变量序列$\{X_n^2\}$独立同分布，且 $E(X_n^2)=\mathrm{Var}(X_n)+[E(X_n)]^2=\sigma^2$ 存在，

故$\{X_n^2\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n^2\}$服从大数定律，即 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2$.

19．设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，且 $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$ 存在，令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i ,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 .$$

试证：

$$S_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2 .$$

证：$S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\overline{X}+n\overline{X}^2\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$,

设 $E(X_n)=\mu$，$\{X_n\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律，即 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}\mu$，

则根据本节第 2 题第（2）小问的结论知，$\overline{X}^2\xrightarrow{P}\mu^2$，

因随机变量序列$\{X_n^2\}$独立同分布，且$E(X_n^2)=\mathrm{Var}(X_n)+[E(X_n)]^2=\sigma^2+\mu^2$存在，

则$\{X_n^2\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n^2\}$服从大数定律，即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2$，

故根据本节第 2 题第（1）小问的结论知，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\xrightarrow{P}(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2=\sigma^2$．

20．将 n 个编号为 1 至 n 的球放入 n 个编号为 1 至 n 的盒子中，每个盒子只能放一个球，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{编号为}i\text{的球放入编号为}i\text{的盒子;}\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}$$

且$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，试证明：

$$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0\,.$$

证：因$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}$，

且 $i\neq j$ 时，$P\{X_iX_j=1\}=\frac{1}{n(n-1)}$，$P\{X_iX_j=0\}=1-\frac{1}{n(n-1)}$，

则$E(X_i)=\frac{1}{n}$，$\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$，

且 $i\neq j$ 时，$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$，$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$，

有$E(S_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=1$，$\mathrm{Var}(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=1-\frac{1}{n}+n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=1$，

可得$E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n}[E(S_n)-E(S_n)]=0$，$\mathrm{Var}\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)=\frac{1}{n^2}$，

由切比雪夫不等式，可得对任意的$\varepsilon>0$，

$$P\left\{\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}-E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\,,$$

则$0\le\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}-E\left[\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right]\right|\ge\varepsilon\right\}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon^2}=0$，

故$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0$．

习题 4.2

1. 设离散随机变量 X 的分布列如下，试求 X 的特征函数.

X	0	1	2	3
P	0.4	0.3	0.2	0.1

解：特征函数$\varphi(t) = \mathrm{e}^{it\cdot 0}\times 0.4 + \mathrm{e}^{it\cdot 1}\times 0.3 + \mathrm{e}^{it\cdot 2}\times 0.2 + \mathrm{e}^{it\cdot 3}\times 0.1 = 0.4 + 0.3\,\mathrm{e}^{it} + 0.2\,\mathrm{e}^{2it} + 0.1\,\mathrm{e}^{3it}$.

2. 设离散随机变量 X 服从几何分布 $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$， $k = 1, 2, \cdots$. 试求 X 的特征函数. 并以此求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

解：特征函数 $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{itk}\cdot(1-p)^{k-1}p = p\,\mathrm{e}^{it}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[\mathrm{e}^{it}(1-p)]^{k-1} = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}$；

因 $\varphi'(t) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{it}\cdot i\cdot[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}] - p\,\mathrm{e}^{it}\cdot[-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}\cdot i]}{[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^2} = \dfrac{ip\,\mathrm{e}^{it}}{[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^2}$，有 $\varphi'(0) = \dfrac{ip}{p^2} = \dfrac{i}{p} = iE(X)$，

故 $E(X) = \dfrac{1}{p}$；

因 $\varphi''(t) = ip\,\mathrm{e}^{it}\cdot i\cdot[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^{-2} - 2ip\,\mathrm{e}^{it}[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^{-3}\cdot[-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}\cdot i] = \dfrac{-p\,\mathrm{e}^{it}[1+(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]}{[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^3}$，

有 $\varphi''(0) = \dfrac{-p(2-p)}{p^3} = -\dfrac{2-p}{p^2} = i^2E(X^2)$，可得 $E(X^2) = \dfrac{2-p}{p^2}$，

故 $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{2-p}{p^2} - \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$.

3. 设离散随机变量 X 服从巴斯卡分布

$$P\{X = k\} = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\text{，}\ k = r, r+1, \cdots$$

试求 X 的特征函数.

解：特征函数 $\varphi(t) = \sum\limits_{k=r}^{+\infty}\mathrm{e}^{itk}\cdot\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} = \dfrac{p^r\,\mathrm{e}^{itr}}{(r-1)!}\sum\limits_{k=r}^{+\infty}(k-1)\cdots(k-r+1)(1-p)^{k-r}\,\mathrm{e}^{it(k-r)}$

$$= \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{+\infty}(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r}\Big|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}} = \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{d^{r-1}(x^{k-1})}{dx^{r-1}}\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}$$

$$= \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}\right)\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}} = \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}} = \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{(r-1)!}\cdot\frac{(r-1)!}{(1-x)^r}\Bigg|_{x=(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}$$

$$= \frac{(p\,\mathrm{e}^{it})^r}{[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}]^r} = \left[\frac{p\,\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^{it}}\right]^r.$$

4. 求下列分布函数的特征函数，并由特征函数求其数学期望和方差.

（1）$F_1(x)=\dfrac{a}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-a|t|}\,dt,\quad (a>0)$；

（2）$F_2(x)=\dfrac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{t^2+a^2}\,dt,\quad (a>0)$．

解：（1）因密度函数 $p_1(x)=F_1'(x)=\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|x|}$，

故 $\varphi_1(t)=\dfrac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{-a|x|}\,dx=\dfrac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(it+a)x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{(it-a)x}\,dx\right]=\dfrac{a}{2}\left[\left.\dfrac{\mathrm{e}^{(it+a)x}}{it+a}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\dfrac{\mathrm{e}^{(it-a)x}}{it-a}\right|_{0}^{+\infty}\right]$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{it+a}-\frac{1}{it-a}\right)=\frac{a^2}{t^2+a^2};$$

因 $\varphi_1'(t)=-\dfrac{a^2}{(t^2+a^2)^2}\cdot 2t=-\dfrac{2a^2t}{(t^2+a^2)^2}$，有 $\varphi_1'(0)=0=iE(X)$，

故 $E(X)=0$；

因 $\varphi_1''(t)=-\dfrac{2a^2\cdot(t^2+a^2)^2-2a^2t\cdot 2(t^2+a^2)\cdot 2t}{(t^2+a^2)^4}=\dfrac{6a^2t^2-2a^4}{(t^2+a^2)^3}$，

有 $\varphi_1''(0)=\dfrac{-2a^4}{a^6}=-\dfrac{2}{a^2}=i^2E(X^2)$，可得 $E(X^2)=\dfrac{2}{a^2}$，

故 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{2}{a^2}-0^2=\dfrac{2}{a^2}$；

（2）因密度函数 $p_2(x)=F_2'(x)=\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2}$，

则 $\varphi_2(t)=\dfrac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx$，

由第（1）小题的结论知

$$\varphi_1(t)=\frac{a^2}{t^2+a^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\,p_1(x)dx,$$

根据逆转公式，可得

$$p_1(x)=\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|x|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\,\varphi_1(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\cdot\frac{a^2}{t^2+a^2}\,dt,$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{1}{t^2+a^2}\,dt=\frac{2\pi}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-a|-y|}=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|y|},$$

故 $\varphi_2(t)=\dfrac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx=\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|t|}=\mathrm{e}^{-a|t|}$；

因 $\varphi_2'(t)=\begin{cases}a\,\mathrm{e}^{at}, & t<0,\\ -a\,\mathrm{e}^{-at}, & t>0,\end{cases}$ 有 $\varphi_2'(0-0)=a\neq\varphi_2'(0+0)=-a$，即 $\varphi_2'(0)$ 不存在，

故 $E(X)$ 不存在，$\mathrm{Var}(X)$ 也不存在．

5． 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试用特征函数的方法求 X 的 3 阶及 4 阶中心矩．

解：因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有 X 的特征函数是 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，

则 $\varphi'(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(i\mu-\sigma^2 t)$，$\varphi''(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(i\mu-\sigma^2 t)^2+\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(-\sigma^2)$，

因 $\varphi'''(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(i\mu-\sigma^2 t)^3+\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot 3(i\mu-\sigma^2 t)\cdot(-\sigma^2)$，

有 $\varphi'''(0)=\mathrm{e}^0\cdot(i\mu)^3+\mathrm{e}^0\cdot 3i\mu\cdot(-\sigma^2)=-i\mu^3-3i\mu\sigma^2=i^3E(X^3)=-iE(X^3)$，

故 $E(X^3)=\mu^3+3\mu\sigma^2$；

又因 $\varphi^{(4)}(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(i\mu-\sigma^2 t)^4+\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot 6(i\mu-\sigma^2 t)^2\cdot(-\sigma^2)+\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot 3(-\sigma^2)^2$，

有 $\varphi^{(4)}(0)=\mathrm{e}^0\cdot(i\mu)^4+\mathrm{e}^0\cdot 6(i\mu)^2\cdot(-\sigma^2)+\mathrm{e}^0\cdot 3\sigma^4=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4=i^4E(X^4)=E(X^4)$，

故 $E(X^4)=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4$.

6．试用特征函数的方法证明二项分布的可加性：若 $X\sim b(n,p)$，$Y\sim b(m,p)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim b(n+m,p)$.

证：因 $X\sim b(n,p)$，$Y\sim b(m,p)$，且 X 与 Y 独立，

有 X 与 Y 的特征函数分别为 $\varphi_X(t)=(p\mathrm{e}^{it}+1-p)^n$，$\varphi_Y(t)=(p\mathrm{e}^{it}+1-p)^m$，

则 $X+Y$ 的特征函数为 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)=(p\mathrm{e}^{it}+1-p)^{n+m}$，这是二项分布 $b(n+m,p)$ 的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim b(n+m,p)$.

7．试用特征函数的方法证明泊松分布的可加性：若 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

证：因 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，且 X 与 Y 独立，

有 X 与 Y 的特征函数分别为 $\varphi_X(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{it}-1)}$，$\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^{it}-1)}$，

则 $X+Y$ 的特征函数为 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(\mathrm{e}^{it}-1)}$，这是泊松分布 $P(\lambda_1+\lambda_2)$ 的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

8．试用特征函数的方法证明伽马分布的可加性：若 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

证：因 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 X 与 Y 独立，

有 X 与 Y 的特征函数分别为 $\varphi_X(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_1}$，$\varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_2}$，

则 $X+Y$ 的特征函数为 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$，这是伽马分布 $Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$ 的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

9．试用特征函数的方法证明 χ^2 分布的可加性：若 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

证：因 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，

有 X 与 Y 的特征函数分别为 $\varphi_X(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$，$\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-\frac{m}{2}}$，

则 $X+Y$ 的特征函数为 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-\frac{n+m}{2}}$，这是 χ^2 分布 $\chi^2(n+m)$ 的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

10．设 X_i 独立同分布，且 $X_i\sim Exp(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n$．试用特征函数的方法证明：$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Ga(n,\lambda)$.

证：因 $X_i\sim Exp(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n$，且 X_i 相互独立，

有 X_i 的特征函数为 $\varphi_{X_i}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}=\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$，

则 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的特征函数为 $\varphi_{Y_n}(t)=\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)=\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-n}$，这是伽马分布 $Ga(n,\lambda)$的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $Y_n\sim Ga(n,\lambda)$.

11．设连续随机变量 X 的密度函数如下：

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中参数$\lambda>0,-\infty<\mu<+\infty$，常记为 $X\sim Ch(\lambda,\mu)$.

（1）试证 X 的特征函数为 $\exp\{i\mu t-\lambda|t|\}$，且利用此结果证明柯西分布的可加性；

（2）当$\mu=0,\lambda=1$ 时，记 $Y=X$，试证$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$，但是 X 与 Y 不独立；

（3）若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且服从同一柯西分布，试证：$\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ 与 X_1 同分布.

证：（1）根据第 4 题第（2）小题的结论知：若 X^*的密度函数为 $p^*(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$，即 $X^*\sim Ch(\lambda,0)$，

则 X^*的特征函数为$\varphi^*(t)=\mathrm{e}^{-\lambda|t|}$，且 $X=X^*+\mu$ 的密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$，

故 X 的特征函数为$\varphi_X(t)=\mathrm{e}^{i\mu t}\varphi^*(t)=\mathrm{e}^{i\mu t}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda|t|}=\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda|t|}$；

若 $X_1\sim Ch(\lambda_1,\mu_1)$，$X_2\sim Ch(\lambda_2,\mu_2)$，且相互独立，

有 X_1 与 X_2 的特征函数分别为 $\varphi_{X_1}(t)=\mathrm{e}^{i\mu_1 t-\lambda_1|t|}$，$\varphi_{X_2}(t)=\mathrm{e}^{i\mu_2 t-\lambda_2|t|}$，

则 X_1+X_2 的特征函数为 $\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)=\mathrm{e}^{i(\mu_1+\mu_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)|t|}$，

这是柯西分布 $Ch(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2)$的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $X_1+X_2\sim Ch(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2)$；

（2）当$\mu=0,\lambda=1$ 时，$X\sim Ch(1,0)$，有 X 的特征函数为$\varphi_X(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，

又因 $Y=X$，有 Y 的特征函数为$\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，且 $X+Y=2X$，

故 $X+Y$ 的特征函数为$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_{2X}(t)=\varphi_X(2t)=\mathrm{e}^{-|2t|}=\mathrm{e}^{-|t|}\cdot\mathrm{e}^{-|t|}=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$；

但 $Y=X$，显然有 X 与 Y 不独立；

（3）因 $X_i\sim Ch(\lambda,\mu)$，$i=1,2,\cdots,n$，且 X_i 相互独立，

有 X_i 的特征函数为 $\varphi_{X_i}(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda|t|}$，

则 $Y_n=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\frac{1}{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\mathrm{e}^{n\left(i\mu\cdot\frac{t}{n}-\lambda\cdot\left|\frac{t}{n}\right|\right)}=\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda|t|}=\varphi_{X_1}(t),$$

故根据特征函数的唯一性定理知$\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ 与 X_1 同分布.

12．设连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$，试证：$p(x)$ 关于原点对称的充要条件是它的特征函数是实的偶函数.

证：方法一：根据随机变量 X 与$-X$ 的关系

充分性：设 X 的特征函数$\varphi_X(t)$是实的偶函数，有$\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)$，

则$-X$ 的特征函数$\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)=\varphi_X(t)$，根据特征函数的唯一性定理知$-X$ 与 X 同分布，

因 X 的密度函数为 $p(x)$，有$-X$ 的密度函数为 $p(-x)$，
故由$-X$ 与 X 同分布可知 $p(-x) = p(x)$，即 $p(x)$ 关于原点对称；
必要性：设 X 的密度函数 $p(x)$ 关于原点对称，有 $p(-x) = p(x)$，
因$-X$ 的密度函数为 $p(-x)$，即$-X$ 与 X 同分布，

则$-X$ 的特征函数$\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \varphi_X(t)$，且 $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t) = E[e^{it(-X)}] = E[e^{-itX}] = \overline{E[e^{itX}]} = \overline{\varphi_X(t)}$，

故 X 的特征函数$\varphi_X(t)$是实的偶函数.
方法二：根据密度函数与特征函数的关系
充分性：设连续随机变量 X 的特征函数$\varphi_X(t)$是实的偶函数，有$\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$，

因 $p(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$，有 $p(-x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(-x)}\varphi(t)dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\varphi(t)dt$，

令 $t = -u$，有 $dt = -du$，且当 $t\to-\infty$时，$u\to+\infty$；当 $t\to+\infty$时，$u\to-\infty$，

则 $p(-x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}e^{i(-u)x}\varphi(-u)(-du)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iux}\varphi(-u)du=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iux}\varphi(u)du=p(x)$，

故 $p(x)$ 关于原点对称；
必要性：设 X 的密度函数 $p(x)$ 关于原点对称，有 $p(-x) = p(x)$，

因$\varphi(t)=E(e^{-itX})=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx$，有$\varphi(-t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(-t)x}p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}p(x)dx$，

令 $x = -y$，有 $dx = -dy$，且当 $x\to-\infty$时，$y\to+\infty$；当 $x\to+\infty$时，$y\to-\infty$，

则$\varphi_X(-t)=\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-it(-y)}p(-y)(-dy)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ity}p(-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ity}p(y)dy=\varphi_X(t)$，

且$\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)=E[e^{i(-t)X}]=E[e^{-itX}]=\overline{E[e^{itX}]}=\overline{\varphi_X(t)}$，

故 X 的特征函数$\varphi_X(t)$是实的偶函数.

13．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$分布，试求 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布.

证：因 $X_i\sim N(\mu, \sigma^2)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且 X_i 相互独立，有 X_i 的特征函数为 $\varphi_{X_i}(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，

则 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的特征函数为 $\varphi_{\overline{X}}(t)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\frac{1}{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=e^{n\left[i\mu\cdot\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]}=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2n}}$，

这是正态分布 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

14．利用特征函数方法证明如下的泊松定理：设有一列二项分布$\{b(k, n, p_n)\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty}b(k, n, p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

证：二项分布 $b(n, p_n)$的特征函数为$\varphi_n(t) = (p_ne^{it} + 1 - p_n)^n = [1 + p_n(e^{it} - 1)]^n$，且 $n\to\infty$时，$p_n\to0$，

因$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}[1+p_n(e^{it}-1)]^n=\lim\limits_{p_n\to0}[1+p_n(e^{it}-1)]^{\frac{1}{p_n(e^{it}-1)}\cdot np_n(e^{it}-1)}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$，

这正是泊松分布 $P(\lambda)$的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} b(k, n, p_n) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$.

15．设随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，证明：当$\alpha \to \infty$时，随机变量 $(\lambda X - \alpha)\big/\sqrt{\alpha}$ 按分布收敛于标准正态变量.

证：因 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，有 X 的特征函数为 $\varphi_X(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$ ，令 $Y = \dfrac{\lambda X - \alpha}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} X - \sqrt{\alpha}$ ，

则 Y 的特征函数为 $\varphi_Y(t) = \mathrm{e}^{-it\sqrt{\alpha}}\,\varphi_X\left(\dfrac{\lambda t}{\sqrt{\alpha}}\right) = \mathrm{e}^{-it\sqrt{\alpha}}\left(1 - \dfrac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}$ ，

可得 $\ln\varphi_Y(t) = -it\sqrt{\alpha} - \alpha\ln\left(1 - \dfrac{it}{\sqrt{\alpha}}\right) = -\alpha\left[\dfrac{it}{\sqrt{\alpha}} + \ln\left(1 - \dfrac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]$ ，

令 $u = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ，当$\alpha \to \infty$时，有 $u \to 0$，且 $\alpha = \dfrac{1}{u^2}$ ， $\ln\varphi_Y(t) = -\dfrac{1}{u^2}[itu + \ln(1 - itu)]$ ，

则 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\ln\varphi_Y(t) = -\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{itu + \ln(1 - itu)}{u^2} = -\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{it + \dfrac{-it}{1 - itu}}{2u} = -\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-(it)^2 u}{2u(1 - itu)} = -\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{t^2}{2(1 - itu)} = -\dfrac{t^2}{2}$ ，

可得 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi_Y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ ，这正是标准正态分布 $N(0, 1)$的特征函数，

故根据特征函数的唯一性定理知 $Y = \dfrac{\lambda X - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 按分布收敛于标准正态变量.

习题 4.3

1． 设$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$P\{X_k=\pm\sqrt{\ln k}\}=\frac{1}{2},\quad k=1,2,\cdots$$

证明$\{X_k\}$服从大数定律．

证：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，

且$E(X_k)=(-\sqrt{\ln k})\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\ln k}\cdot\frac{1}{2}=0$，

$$\operatorname{Var}(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=E(X_k^2)=(-\sqrt{\ln k})^2\cdot\frac{1}{2}+(\sqrt{\ln k})^2\cdot\frac{1}{2}=\ln k\text{，}\ k=1,2,\cdots\text{，}$$

则$\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln k\le\frac{1}{n^2}\times n\ln n=\frac{\ln n}{n}$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0$，

故$\{X_k\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律．

2． 设$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且

$$P\{X_k=\pm 2^k\}=\frac{1}{2^{2k+1}},\ P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{2^{2k}},\quad k=1,2,\cdots$$

证明$\{X_k\}$服从大数定律．

证：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，

且$E(X_k)=(-2^k)\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+0\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)+2^k\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=0$，

$$\operatorname{Var}(X_k)=E(X_k^2)=(-2^k)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)+(2^k)^2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=1\text{，}\ k=1,2,\cdots\text{，}$$

即方差有共同的上界，

故$\{X_k\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律．

3． 设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且$P\{X_1=0\}=1$，

$$P\{X_n=\pm\sqrt{n}\}=\frac{1}{n},\ P\{X_n=0\}=1-\frac{2}{n},\quad n=2,3,\cdots$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律．

证：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，$E(X_1)=0$，$\operatorname{Var}(X_1)=0$，

且$E(X_k)=(-\sqrt{k})\cdot\frac{1}{k}+0\cdot\left(1-\frac{2}{k}\right)+\sqrt{k}\cdot\frac{1}{k}=0$，

$$\operatorname{Var}(X_k)=E(X_k^2)=(-\sqrt{k})^2\cdot\frac{1}{k}+0^2\cdot\left(1-\frac{2}{k}\right)+(\sqrt{k})^2\cdot\frac{1}{k}=2\text{，}\ k=2,3,\cdots\text{，}$$

即方差有共同的上界，

故$\{X_k\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_k\}$服从大数定律．

4． 在伯努利试验中，事件A出现的概率为p．令

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{若在第 } n \text{ 次及第 } n+1 \text{ 次试验中 } A \text{ 出现;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律．

证：因 X_k 的分布为

X_k	0	1
P	$1-p^2$	p^2

则 $E(X_k) = p^2$，$\operatorname{Var}(X_k) = p^2(1-p^2)$，

又因当 $|i-k| \ge 2$ 时，X_i 与 X_k 相互独立，且 $\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_k X_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1}) = p^3 - p^4$，

则 $\dfrac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+1})\right] = \dfrac{1}{n^2}[np^2(1-p^2) + 2(n-1)(p^3-p^4)]$，

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0$，

故$\{X_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

5． 设$\{X_n\}$为独立的随机变量序列，且

$P\{X_n = 1\} = p_n$，$P\{X_n = 0\} = 1 - p_n$，$n = 1, 2, \cdots$，

证明$\{X_n\}$服从大数定律.

证：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且 $E(X_k) = p_k$，$\operatorname{Var}(X_k) = p_k(1-p_k) \le 1$，即方差有共同的上界，

故$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

6． 设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a},\quad -\infty < x < +\infty .$$

试问：辛钦大数定律对此随机变量序列是否适用？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，

且密度函数 $p(x) = F'(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{1}{a^2+x^2}$，$-\infty < x < +\infty$，

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{1}{a^2+x^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty}\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{x}{a^2+x^2}dx = \dfrac{a}{\pi}\ln(a^2+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$，

即 X_n 的数学期望不存在，

故辛钦大数定律对此随机变量序列不适用.

7． 设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$P\{X_n = \frac{2^k}{k^2}\} = \frac{1}{2^k},\quad k = 1, 2, \cdots$$

试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2^k}{k^2}\cdot\dfrac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$ 收敛，

故$\{X_n\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

8． 设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$P\{X_n = k\} = \frac{c}{k^2\lg^2 k},\quad k = 2, 3, \cdots,$$

其中

$$c = \left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2\lg^2 k}\right)^{-1},$$

试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解：因$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n)=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\frac{c}{k^2\lg^2 k}=c\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\lg^2 k}$ 收敛，

故$\{X_n\}$满足辛钦大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

9．设$\{X_n\}$为独立的随机变量序列，其中 X_n 服从参数为 $\sqrt{n}$ 的泊松分布，试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解：因$\{X_k\}$为独立随机变量序列，且 $\operatorname{Var}(X_k)=\sqrt{k}$，

则 $\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{1}{n^2}\times n\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$，有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0$，

故$\{X_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

10．设$\{X_n\}$为独立的随机变量序列，证明：若诸 X_n 的方差 σ_n^2 一致有界，即存在常数 c，使得

$$\sigma_n^2\le c,\quad n=1,2,\cdots,$$

则$\{X_n\}$服从大数定律.

证：$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

11．（泊松大数定律）设 S_n 为 n 次独立试验中，事件 A 出现的次数，而事件 A 在第 i 次试验出现的概率为 p_i, $i=1,2,\cdots,n,\cdots$，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

证：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 发生;}\\ 0, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不发生.}\end{cases}$ 有 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

因$\{X_n\}$独立，且 $E(X_i)=p_i$，$\operatorname{Var}(X_i)=p_i(1-p_i)<1$，

则$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律，即 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1$，

故 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1$.

12．（伯恩斯坦大数定律）设$\{X_n\}$是方差一致有界的随机变量序列，且当 $|k-l|\to+\infty$ 时，一致地有 $\operatorname{Cov}(X_k,X_l)\to 0$，证明$\{X_n\}$服从大数定律.

证：设 $\operatorname{Var}(X_k)\le c$，且对任意的 $\varepsilon>0$，存在 M，当 $|k-l|>M$ 时，$\operatorname{Cov}(X_k,X_l)<\frac{\varepsilon}{2}$，

且当 $1\le|k-l|\le M$ 时，$\operatorname{Cov}(X_k,X_l)\le\sqrt{\operatorname{Var}(X_k)}\sqrt{\operatorname{Var}(X_l)}\le c$，

则 $\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k)+2\sum_{1\le k<l\le n}\operatorname{Cov}(X_k,X_l)\right]$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k)+2\sum_{1\le|k-l|\le M}\operatorname{Cov}(X_k,X_l)+2\sum_{|k-l|>M}\operatorname{Cov}(X_k,X_l)\right]$$

$$\le \frac{1}{n^2}\left[nc+(M-1)(2n-M-1)c+(n-M)(n-M-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\le \frac{1}{n^2}\left[nc+(M-1)\cdot 2nc+n^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]=\frac{(2M-1)c}{n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N=\left[\dfrac{(4M-2)c}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)<\varepsilon$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=0$，

故$\{X_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{X_n\}$服从大数定律.

13．（格涅坚科大数定律）设$\{X_n\}$是随机变量序列，若记

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i).$$

则$\{X_n\}$服从大数定律的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0.$$

证：以连续随机变量为例进行证明，设 Y_n 的密度函数为 $p(y)$，

必要性：设$\{X_n\}$服从大数定律，即对任意的$\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=\lim_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=0,$$

不妨设 $0<\varepsilon<1$，有$\varepsilon-\varepsilon^2>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}<\varepsilon-\varepsilon^2$，

则 $E\left[\dfrac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy=\int_{|y-a_n|<\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy+\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy$

$$\le\int_{|y-a_n|<\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}p(y)dy+\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}p(y)dy=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}+P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}<\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}+\varepsilon-\varepsilon^2<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}E\left[\dfrac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0$；

充分性：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}E\left[\dfrac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right]=0$，

因 $P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=\displaystyle\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}p(y)dy=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}p(y)dy$

$$\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{|y-a_n|\ge\varepsilon}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-a_n)^2}{1+(y-a_n)^2}p(y)dy=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E\left[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}\right],$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|Y_n-a_n|\ge\varepsilon\}=0$，即$\{X_n\}$服从大数定律.

14．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，方差存在．又设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$为绝对收敛级数．令$Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，证明$\{a_nY_n\}$服从大数定律．

证：设$\operatorname{Var}(X_n)=\sigma^2$，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$，

$$则\ \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right)=\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\right]=\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{k=i}^{n} a_k\right)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i)\cdot\left(\sum_{k=i}^{n} a_k\right)^2$$

$$\le\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2S^2=\frac{\sigma^2S^2}{n},$$

有$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right)=0$，

故$\{a_nY_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{a_nY_n\}$服从大数定律．

15．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，方差存在，令$Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$．又设$\{a_n\}$为一列常数，如果存在常数$c>0$，使得对一切n有$|na_n|\le c$，证明$\{a_nY_n\}$服从大数定律．

证：设$\operatorname{Var}(X_n)=\sigma^2$，

$$则\ \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right)=\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\right]=\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{k=i}^{n} a_k\right)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i)\cdot\left(\sum_{k=i}^{n} a_k\right)^2$$

$$\le\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\cdot\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{c}{k}\right)^2=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}+2\sum_{1\le k<l\le n}\frac{1}{kl}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(2\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{kl}-\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{kl}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{kl}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}k\cdot\frac{1}{kl}-\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{l}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2\sum_{l=1}^{n}l\cdot\frac{1}{l}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\left(2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)<\frac{\sigma^2c^2}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^2c^2}{n},$$

有$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right)=0$，

故$\{a_nY_n\}$满足马尔可夫大数定律条件，$\{a_nY_n\}$服从大数定律．

16．设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其方差有限，且X_n不恒为常数．如果$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，试证：随机变量序列$\{S_n\}$不服从大数定律．

注：此题有误，条件“X_n不恒为常数”应该改为“X_n不恒为常数的概率大于 0”或“$\operatorname{Var}(X_n)>0$”

证：设$T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$，有$T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)X_i=X_1+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i$，

记$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i$，有 $T_n=X_1+Y_n$，且 X_1 与 Y_n 相互独立，

因$\{X_n\}$独立同分布且 X_n 不恒为常数的概率大于 0，有 $P\{X_1-E(X_1)<0\}$与 $P\{X_1-E(X_1)>0\}$都大于 0，则存在$\varepsilon>0$，使得 $P\{X_1-E(X_1)\le-\varepsilon\}=p_1>0$ 且 $P\{X_1-E(X_1)\ge\varepsilon\}=p_2>0$，

因$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)X_i$不恒为常数的概率也大于 0，

则 $P\{Y_n-E(Y_n)\le 0\}$与 $P\{Y_n-E(Y_n)\ge 0\}$至少有一个大于 0.5，

可得$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(S_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=P\{|T_n-E(T_n)|\ge\varepsilon\}$

$$\ge P\{X_1-E(X_1)\le-\varepsilon\}P\{Y_n-E(Y_n)\le 0\}+P\{X_1-E(X_1)\ge\varepsilon\}P\{Y_n-E(Y_n)\ge 0\}\ge 0.5\min\{p_1,p_2\},$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(S_i)\right|\ge\varepsilon\right\}\ge 0.5\min\{p_1,p_2\}>0$，$\{S_n\}$不服从大数定律.

17．分别用随机投点法和平均值法计算下列定积分：

（1）$J_1=\int_0^1\frac{e^x-1}{e-1}dx$；

（2）$J_2=\int_{-1}^1 e^x\,dx$.

解：随机投点法：

计算定积分$\int_0^1 f(x)dx$，且 $0\le f(x)\le 1$，

用计算机产生在 (0, 1) 区间上均匀分布的 n 对随机数 (x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，记录满足不等式 $y_i\le f(x_i)$ 的数据对的个数μ_n，用频率$\frac{\mu_n}{n}$作为积分$\int_0^1 f(x)dx$的估计值.

计算一般的定积分$\int_a^b g(x)dx$，

可通过变量替换$y=\frac{x-a}{b-a}$化为关于 y 的函数在 0 与 1 之间的积分，

$$\int_a^b g(x)dx=(b-a)\int_0^1 g[a+(b-a)y]dy,$$

进一步，若 $c\le g(x)\le d$，通过函数变换$f(y)=\frac{g[a+(b-a)y]-c}{d-c}$，使得 $0\le f(y)\le 1$，可得

$$\int_a^b g(x)dx=(b-a)(d-c)\int_0^1 f(y)dy+c(b-a),$$

用蒙特卡洛方法计算出$\int_0^1 f(y)dy$，进而就得到$\int_a^b g(x)dx$的值.

（1）$J_1=\int_0^1\frac{e^x-1}{e-1}dx$，因积分区间为 [0, 1] 且$\frac{e^x-1}{e-1}$在 [0, 1] 之间取值，

记 k_1 为满足不等式 $y_i\le\frac{e^{x_i}-1}{e-1}$ 的数对个数，

故 $J_1=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx \approx \frac{k_1}{n}$；

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');k=0;
for i=1:n
    x=rand;y=rand;
    if y<=(exp(x)-1)/(exp(1)-1);
        k=k+1;
    end
end
J1=k/n
```

（2） $J_2=\int_{-1}^1 e^x\,dx$，因积分区间为 $[-1, 1]$ 且 e^x 在 $[0, e]$ 之间取值，

设 $f_2(x)=\frac{e^{-1+2x}-0}{e-0}=e^{-2+2x}$，记 k_2 为满足不等式 $y_i \le e^{-2+2x_i}$ 的数对个数，

故 $J_2=\int_{-1}^1 e^x\,dx=2\left[0+(e-0)\int_0^1 e^{-2+2t}\,dt\right]=2e\frac{k_2}{n}$；

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');k=0;
for i=1:n
    x=rand;y=rand;
    if y<=exp(-2+2*x);
        k=k+1;
    end
end
J2=k/n*2*exp(1)
```

平均值法：

计算定积分 $\int_0^1 f(x)dx$，

用计算机产生在 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的 n 个随机数 x_i，$i=1, 2, \cdots, n$，计算 $f(x_i)$ 的平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

作为积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的估计值.

计算一般的定积分 $\int_a^b g(x)dx$，

可通过变量替换 $y=\frac{x-a}{b-a}$ 化为关于 y 的函数在 0 与 1 之间的积分，

$$\int_a^b g(x)dx=(b-a)\int_0^1 g[a+(b-a)y]dy \overset{\Delta}{=} (b-a)\int_0^1 f(y)dy,$$

用蒙特卡洛方法计算出 $\int_0^1 f(y)dy$，进而就得到 $\int_a^b g(x)dx$ 的值.

（1） $J_1=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx$，因积分区间为 $[0, 1]$，

故 $J_1=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e-1}dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{x_i}-1}{e-1}$；

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');
x=rand(n);
J1=mean((exp(x)-1)/(exp(1)-1))
```

（2）$J_2=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{x}\,dx$，因积分区间为 $[-1, 1]$，设 $f_2(x)=\mathrm{e}^{-1+2x}$，

故 $J_2=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{x}\,dx=2\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-1+2t}\,dt\approx\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-1+2x_i}$.

MATLAB 程序：

```
n=input('number of tests=');
x=rand(n);
J2=2*mean(exp(-1+2*x))
```

习题 4.4

1．某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数．

（1）写出 X 的分布列；

（2）求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值．

解：（1）因 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，

故 X 的分布列为 $P\{X=k\}=\begin{pmatrix}100\\k\end{pmatrix}\times 0.2^k\times 0.8^{100-k},\quad k=0,1,2,\cdots,100$；

（2）因 $E(X)=np=20$，$\mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16$，

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{14\le X\le 30\}=P\{13.5<X\le 30.5\}\approx\Phi\left(\dfrac{30.5-20}{4}\right)-\Phi\left(\dfrac{13.5-20}{4}\right)=\Phi(2.625)-\Phi(-1.625)$

$=\Phi(2.625)+\Phi(1.625)-1=0.9957+0.9479-1=0.9436$．

2．某电子计算机主机有 100 个终端，每个终端有 80%的时间被使用．若各个终端是否被使用是相互独立的，试求至少有 15 个终端空闲的概率．

解：设 X 表示空闲的终端个数，有 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，

因 $E(X)=np=20$，$\mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16$，

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{X\ge 15\}=P\{X>14.5\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{14.5-20}{4}\right)=1-\Phi(-1.375)=\Phi(1.375)=0.9154$．

3．有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3 m，现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3 m 的概率是多少？

解：设 X 表示短于 3m 的木柱根数，有 X 服从二项分布 $b(100, 0.2)$，

因 $E(X)=np=20$，$\mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16$，

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-20}{4}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{X\ge 30\}=P\{X>29.5\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{29.5-20}{4}\right)=1-\Phi(2.375)=1-0.9912=0.0088$．

4．掷一颗骰子 100 次，记第 i 次掷出的点数为 X_i，$i=1,2,\cdots,100$，点数之平均为 $\overline{X}=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，试求概率 $P\{3\le\overline{X}\le 4\}$．

解：因 X_i 的概率分布为 $P\{X_i=k\}=\dfrac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6$，

则 $E(X_i)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+\cdots+6\times\dfrac{1}{6}=3.5$，$E(X_i^2)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{6}+\cdots+6^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{91}{6}$，

可得 $\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$，

因 $E(\overline{X})=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}E(X_i)=3.5$， $\mathrm{Var}(\overline{X})=\dfrac{1}{100^2}\sum\limits_{i=1}^{100}\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{1}{10000}\times100\times\dfrac{35}{12}=\dfrac{7}{240}$，

且 $n=100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-3.5}{\sqrt{7/240}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{3\le\overline{X}\le4\}\approx\Phi\left(\dfrac{4-3.5}{\sqrt{7/240}}\right)-\Phi\left(\dfrac{3-3.5}{\sqrt{7/240}}\right)=\Phi(2.9277)-\Phi(-2.9277)=2\times\Phi(2.9277)-1$

$=2\times0.9983-1=0.9966$.

5． 连续地掷一枚骰子 80 次，求点数之和超过 300 的概率．

解：记第 i 次掷出的点数为 X_i， $i=1,2,\cdots,80$，有 X_i 的概率分布为 $P\{X_i=k\}=\dfrac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6$，

则 $E(X_i)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+\cdots+6\times\dfrac{1}{6}=3.5$， $E(X_i^2)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{6}+\cdots+6^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{91}{6}$，

可得 $\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$，

因 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{80}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{80}E(X_i)=80\times3.5=280$， $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{80}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{80}\mathrm{Var}(X_i)=80\times\dfrac{35}{12}=\dfrac{700}{3}$，

且 $n=80$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{80}X_i-280}{\sqrt{700/3}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{80}X_i>300\right\}\approx1-\Phi\left(\dfrac{300-280}{\sqrt{700/3}}\right)=1-\Phi(1.3093)=1-0.9048=0.0952$.

6． 有 20 个灯泡，设每个灯泡的寿命服从指数分布，其平均寿命为 25 天．每次用一个灯泡，当使用的灯泡坏了以后立即换上一个新的，求这些灯泡总共可使用 450 天以上的概率．

解：记第 i 个灯泡的寿命为 X_i， $i=1,2,\cdots,20$，有 $X_i\sim Exp(1/25)$，

则 $E(X_i)=1/\lambda=25$，$\mathrm{Var}(X_i)=1/\lambda^2=625$，

因 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{20}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{20}E(X_i)=20\times25=500$， $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{20}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{20}\mathrm{Var}(X_i)=20\times625=12500$，

且 $n=20$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}X_i-500}{\sqrt{12500}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{20}X_i>450\right\}=1-\Phi\left(\dfrac{450-500}{\sqrt{12500}}\right)=\Phi(0.4472)=0.6726$.

7． 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{48}$ 为独立同分布的随机变量，共同分布为 $U(0,5)$．其算术平均为 $\overline{X}=\dfrac{1}{48}\sum\limits_{i=1}^{48}X_i$，试求概率 $P\{2\le\overline{X}\le3\}$.

解：因 X_i 服从均匀分布 $U(0, 5)$，有 $E(X_i)=\dfrac{a+b}{2}=2.5$， $\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{25}{12}$，

可得 $E(\overline{X})=\dfrac{1}{48}\sum_{i=1}^{48}E(X_i)=2.5$， $\mathrm{Var}(\overline{X})=\dfrac{1}{48^2}\sum_{i=1}^{48}\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{1}{48^2}\times 48\times\dfrac{25}{12}=\dfrac{25}{576}$，

且 $n=48$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-2.5}{5/24}\,\dot\sim\, N(0,1)$，

故 $P\{2\le\overline{X}\le 3\}\approx\Phi\left(\dfrac{3-2.5}{5/24}\right)-\Phi\left(\dfrac{2-2.5}{5/24}\right)=\Phi(2.4)-\Phi(-2.4)=2\times\Phi(2.4)-1=2\times 0.9918=0.9836$.

8. 某汽车销售点每天出售的汽车数服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布．若一年 365 天都经营汽车销售，且每天出售的汽车数是相互独立的，求一年中售出 700 辆以上汽车的概率．

解：设 X_i 表示一年中第 i 日售出的汽车数，有 X_i 服从泊松分布 $P(2)$，可得 $E(X_i)=\lambda=2$，$\mathrm{Var}(X_i)=\lambda=2$，

因一年中售出的汽车数为 $Y=\sum_{i=1}^{365}X_i$，有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{365}E(X_i)=730$， $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{365}\mathrm{Var}(X_i)=730$，

且 $n=365$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-730}{\sqrt{730}}\,\dot\sim\, N(0,1)$，

故 $P\{Y\ge 700\}=P\{Y>699.5\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{699.5-730}{\sqrt{730}}\right)=1-\Phi(-1.1289)=\Phi(1.1289)=0.8705$.

9. 某餐厅每天接待 400 名顾客，设每位顾客的消费额（元）服从 (20, 100) 上的均匀分布，且顾客的消费额是相互独立的．试求：

（1）该餐厅每天的平均营业额；

（2）该餐厅每天的营业额在平均营业额 ±760 元内的概率．

解：设 X_i 表示第 i 个顾客的消费额，有 X_i 服从均匀分布 $U(20, 100)$，

则 $E(X_i)=\dfrac{a+b}{2}=60$， $\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1600}{3}$，

（1）因该餐厅一天内的营业额为 $Y=\sum_{i=1}^{400}X_i$，

故该餐厅每天的平均营业额 $E(Y)=\sum_{i=1}^{400}E(X_i)=400\times 60=24000$ （元）；

（2）因 $E(Y)=24000$， $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{400}\mathrm{Var}(X_i)=400\times\dfrac{1600}{3}=\dfrac{640000}{3}$，

且 $n=400$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-24000}{800/\sqrt{3}}\,\dot\sim\, N(0,1)$，

故 $P\{-760\le Y-24000\le 760\}\approx\Phi\left(\dfrac{760}{800/\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(\dfrac{-760}{800/\sqrt{3}}\right)=\Phi(1.6454)-\Phi(-1.6454)$

$=2\Phi(1.6454)-1=2\times 0.9501-1=0.9002$.

10. 一仪器同时收到 50 个信号 U_i， $i=1, 2, \cdots, 50$．设 U_i 是相互独立的，且都服从 (0, 10) 内的均匀分布，

试求 $P\left\{\sum_{i=1}^{50} U_i > 300\right\}$.

解：因 U_i 服从均匀分布 $U(0, 10)$，有 $E(U_i)=\frac{a+b}{2}=5$， $\mathrm{Var}(U_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{25}{3}$，

可得 $E\left(\sum_{i=1}^{50} U_i\right)=\sum_{i=1}^{50} E(U_i)=50\times 5=250$， $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i\right)=\sum_{i=1}^{50} \mathrm{Var}(U_i)=50\times\frac{25}{3}=\frac{1250}{3}$，

且 $n=50$ 较大，根据中心极限定理知 $\frac{\sum_{i=1}^{50} U_i-250}{\sqrt{1250/3}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$，

故 $P\left\{\sum_{i=1}^{50} U_i > 300\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{300-250}{\sqrt{1250/3}}\right)=1-\Phi(2.4495)=1-0.9928=0.0072$.

11．计算机在进行加法运算时对每个加数取整数（取最为接近于它的整数）．设所有的取整误差是相互独立的，且它们都服从 $(-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布．

（1）若将 1500 个数相加，求误差总和的绝对值超过 15 的概率；

（2）最多几个数加在一起可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 90%．

解：设 X_i 表示第 i 个加数的取整误差，有 X_i 服从均匀分布 $U(-0.5, 0.5)$，

则 $E(X_i)=\frac{a+b}{2}=0$， $\mathrm{Var}(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{12}$，

（1）因 1500 个数相加的误差总和为 $Y=\sum_{i=1}^{1500} X_i$，有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{1500} E(X_i)=0$， $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{1500}\mathrm{Var}(X_i)=125$，

且 $n=1500$ 较大，根据中心极限定理知 $\frac{Y-0}{\sqrt{125}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$，

故 $P\{|Y|>15\}\approx 2\left[1-\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)\right]=2[1-\Phi(1.3416)]=2\times(1-0.9101)=0.1798$；

（2）因 n 个数相加的误差总和为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$，有 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=0$， $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{n}{12}$，

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-0}{\sqrt{n/12}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$，

因 $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|<10\right\}\ge 0.9$，有 $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|<10\right\}\approx\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right)=2\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)-1\ge 0.9$，

则 $\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.95$，即 $\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\ge 1.6449$，

故 $n\le 443.5338$，即 n 不超过 443．

12．设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5 kg，标准差为 0.1 kg，问 5000 只零件的总重量超过 2510 kg 的概率是多少？

解：设 X_i 表示第 i 个零件的重量，有 $E(X_i)=0.5$，$\mathrm{Var}(X_i)=0.1^2=0.01$，

因 5000 只零件的总重量为 $Y=\sum_{i=1}^{5000}X_i$，有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{5000}E(X_i)=2500$， $\text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{5000}\text{Var}(X_i)=50$，

且 $n = 5000$ 很大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-2500}{\sqrt{50}}\dot{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{Y>2510\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{2510-2500}{\sqrt{50}}\right)=1-\Phi(1.4142)=1-0.9214=0.0786$.

13．某种产品由 20 个相同部件连接而成，每个部件的长度是均值为 2 mm，标准差为 0.02 mm 的随机变量．假如这 20 个部件的长度相互独立同分布，且规定产品总长为 (40 ± 0.2) mm 时为合格品，求该产品的不合格品率．

解：设 X_i 表示第 i 个部件的长度，有 $E(X_i) = 2$，$\text{Var}(X_i) = 0.02^2 = 0.0004$，

因 20 个部件总长为 $Y=\sum_{i=1}^{20}X_i$，有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{20}E(X_i)=40$， $\text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{20}\text{Var}(X_i)=0.008$，

且 $n = 20$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-40}{\sqrt{0.008}}\dot{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{|Y-40|>0.2\}\approx 2\left[1-\Phi\left(\dfrac{0.2}{\sqrt{0.008}}\right)\right]=2[1-\Phi(2.2361)]=2\times(1-0.9873)=0.0254$.

14．一个保险公司有 10000 个汽车投保人，每个投保人平均索赔 280 元，标准差为 800 元．求总索赔额超过 2700000 元的概率．

解：设 X_i 表示第 i 个投保人索赔额，有 $E(X_i) = 280$，$\text{Var}(X_i) = 800^2 = 640000$，

因总索赔额 $Y=\sum_{i=1}^{10000}X_i$，有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{10000}E(X_i)=2800000$， $\text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{10000}\text{Var}(X_i)=6400000000$，

且 $n = 10000$ 很大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-2800000}{\sqrt{6400000000}}=\dfrac{Y-2800000}{80000}\dot{\sim}N(0,1)$，

故 $P\{Y>2700000\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{2700000-2800000}{80000}\right)=1-\Phi\left(-\dfrac{10}{8}\right)=\Phi(1.25)=0.8944$.

15．有两个班级同时上一门课，甲班有 25 人，乙班有 64 人．该门课程期末考试平均成绩为 78 分，标准差为 14 分．试问甲班的平均成绩超过 80 分的概率大，还是乙班的平均成绩超过 80 分的概率大？

解：设 X_i 表示第 i 个同学的考试成绩，有 $E(X_i) = 78$，$\text{Var}(X_i) = 14^2 = 196$，

因平均成绩 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，有 $E(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=78$， $\text{Var}(\overline{X})=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)=\dfrac{196}{n}$，

且 $n = 25$ 或 64 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{\overline{X}-78}{\sqrt{196/n}}\dot{\sim}N(0,1)$，

则 $P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\dfrac{80-78}{\sqrt{196/25}}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{7}\right)$，

因甲班有 25 人，甲班的平均成绩超过 80 分的概率

$$P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{25}}{7}\right)=1-\Phi(0.7143)=1-0.7625=0.2375,$$

乙班有 64 人，乙班的平均成绩超过 80 分的概率

$$P\{\overline{X}>80\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{64}}{7}\right)=1-\Phi(1.1429)=1-0.8735=0.1265,$$

故甲班的平均成绩超过 80 分的概率大．

16．进行独立重复试验，每次试验中事件 A 发生的概率为 0.25．试问能以 95%的把握保证 1000 次试验中事件 A 发生的频率与概率相差多少？此时 A 发生的次数在什么范围内？

解：设 X 表示 1000 次试验中事件 A 发生的次数，X 服从二项分布 $b(1000, 0.25)$，

因 $E(X) = np = 250$，$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 187.5$，

且 $n = 1000$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-250}{\sqrt{187.5}}\mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

设 1000 次试验中事件 A 发生频率与概率相差不超过 a 的概率为 95%，即 $P\left\{\left|\dfrac{X}{1000}-0.25\right|\le a\right\}=0.95$，

则 $P\{|X-250|\le 1000a\}\approx\Phi\left(\dfrac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)-\Phi\left(\dfrac{-1000a}{\sqrt{187.5}}\right)=2\Phi\left(\dfrac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)-1=0.95$，

故 $\Phi\left(\dfrac{1000a}{\sqrt{187.5}}\right)=0.975$，即 $\dfrac{1000a}{\sqrt{187.5}}=1.96$，$a = 0.0268$；

可见能以 95%的把握保证 $\left|\dfrac{X}{1000}-0.25\right|\le 0.0268$，即 $|X-250|\le 26.8$，$223.2\le X\le 276.8$，

故 A 发生的次数在 223 次到 277 次之间．

17．设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 min，且各件产品的组装时间是相互独立的．

（1）试求组装 100 件产品需要 15 h 至 20 h 的概率；

（2）保证有 95%的可能性，问 16 个 h 内最多可以组装多少件产品．

解：设 X_i 表示组装第 i 件产品的时间，有 X_i 服从指数分布 $Exp(\lambda)$ 且 $E(X_i) = 10$，

则 $\lambda = 0.1$，$E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}=10$，$\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}=100$，

（1）因组装 100 件产品需要的时间为 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，

则 $E(Y)=\sum\limits_{i=1}^{100}E(X_i)=1000$，$\mathrm{Var}(Y)=\sum\limits_{i=1}^{100}\mathrm{Var}(X_i)=10000$，

且 $n = 100$ 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-1000}{100}\mathrel{\dot\sim} N(0,1)$，

$$\text{故 } P\{15\times 60\le Y\le 20\times 60\}=P\{900\le Y\le 1200\}\approx\Phi\left(\frac{1200-1000}{100}\right)-\Phi\left(\frac{900-1000}{100}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1=0.8185;$$

（2）因组装 n 件产品需要的时间为 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

则$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=10n$， $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=100n$，

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-10n}{10\sqrt{n}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

因$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 16\times 60\right\}\ge 0.95$，有$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 960\right\}\approx\Phi\left(\dfrac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right)\ge 0.95$，

可得$\dfrac{960-10n}{10\sqrt{n}}\ge 1.6449$，即$10n+16.449\sqrt{n}-960\le 0$，解方程得$\sqrt{n}\le 9.01$，

故 $n\le 81.1801$，即 n 不超过 81.

18．某种福利彩票的奖金额 X 由抽奖决定，其分布列为

X（万元）	5	10	20	30	40	50	100
P	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

若一年中要开出 300 个奖，问需要多少奖金总额，才有 95%的把握能够发放奖金.

解：设 X_i 表示第 i 次抽奖的奖金额，

则 $E(X_i) = 5\times 0.2 + 10\times 0.2 + 20\times 0.2 + 30\times 0.1 + 40\times 0.1 + 50\times 0.1 + 100\times 0.1 = 29$，

且$E(X_i^2)=5^2\times 0.2+10^2\times 0.2+20^2\times 0.2+30^2\times 0.1+40^2\times 0.1+50^2\times 0.1+100^2\times 0.1=1605$，

可得$\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=1605-29^2=764$，

因一年开出的奖金总额为$Y=\sum_{i=1}^{300}X_i$，有$E(Y)=\sum_{i=1}^{300}E(X_i)=8700$， $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{300}\mathrm{Var}(X_i)=229200$，

且 $n = 300$ 较大，根据中心极限定理知$\dfrac{Y-8700}{\sqrt{229200}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

设需要准备的奖金总额为 a 万元，有$P\{Y\le a\}\approx\Phi\left(\dfrac{a-8700}{\sqrt{229200}}\right)=0.95$，

故$\dfrac{a-8700}{\sqrt{229200}}=1.6449$，即 $a=9487.49$（万元）.

19．一家有 500 间客房的大旅馆的每间客房装有一台 2 kW（千瓦）的空调机．若开房率为 80%，需要多少 kW 的电力才能有 99%的可能性保证有足够的电力使用空调机.

解：设 X 表示开房的房间数，有 X 服从二项分布 $b(500, 0.8)$，

因 $E(X) = np = 400$，$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 80$，

且 $n = 500$ 较大，根据中心极限定理知$\dfrac{X-400}{\sqrt{80}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

设需要的电力为 a kW，有$P\{2X\le a\}=P\{X\le 0.5a\}\approx\Phi\left(\dfrac{0.5a-400}{\sqrt{80}}\right)=0.99$，

故$\dfrac{0.5a-400}{\sqrt{80}}=2.3263$，即 $a=841.615$ kW.

20．设某元件是某电器设备的一个关键部件，当该元件失效后立即换上一个新的元件．假定该元件的平均

寿命为 100 小时，标准差为 30 小时，试问应准备多少备件，才能以 0.95 以上的概率，保证这个系统能连续运行 2000 小时以上？

解：设 X_i 表示第 i 个元件的使用寿命，有 $E(X_i) = 100$，$\text{Var}(X_i) = 30^2 = 900$，

因准备 n 个备件时系统连续运行时间 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

有 $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=100n$， $\text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)=900n$，

且 n 应大于 20 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y-100n}{\sqrt{900n}}\dot{\sim}N(0,1)$，

则 $P\{Y>2000\}\approx1-\Phi\left(\dfrac{2000-100n}{\sqrt{900n}}\right)=\Phi\left(\dfrac{100n-2000}{30\sqrt{n}}\right)\geq0.95$，

即 $\dfrac{100n-2000}{30\sqrt{n}}\geq1.645$， $100n-49.35\sqrt{n}-2000\geq0$，解得 $n\geq22.3321$，

故至少应准备 23 个备件．

21．独立重复地对某物体的长度 a 进行 n 次测量，设各次测量结果 X_i 服从正态分布 $N(a,\ 0.2^2)$．记 $\overline{X}$ 为 n 次测量结果的算术平均值，为保证有 95%的把握使平均值与实际值 a 的差异小于 0.1，问至少需要测量多少次？

解：因 X_i 服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$ 且相互独立，有 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从正态分布，

则 $E(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=a$， $\text{Var}(\overline{X})=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)=\dfrac{0.2^2}{n}$， 即 $\dfrac{\overline{X}-a}{0.2/\sqrt{n}}\dot{\sim}N(0,1)$，

因 $P\{|\overline{X}-a|<0.1\}=\Phi\left(\dfrac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\dfrac{-0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq0.95$，

可得 $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq0.975$， 即 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\geq1.96$，

故 $n\geq15.3664$，即至少需要测量 16 次．

22．某工厂每月生产 10000 台液晶投影机，但它的液晶片车间生产液晶片合格率为 80%，为了以 99.7%的可能性保证出厂的液晶投影机都能装上合格的液晶片，试问该液晶片车间每月至少应该生产多少片液晶片？

解：设每月应该生产 n 片液晶片，其中合格液晶片有 X 片，有 X 服从二项分布 $b(n, 0.8)$，

因 $E(X) = np = 0.8n$，$\text{Var}(X) = np(1-p) = 0.16n$，

且 n 应大于 10000，n 很大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\dot{\sim}N(0,1)$，

因 $P\{X\geq10000\}\approx1-\Phi\left(\dfrac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\dfrac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}\right)\geq0.997$，

则 $\dfrac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}\geq2.7478$，即 $0.8n-1.0991\sqrt{n}-10000\geq0$，解方程得 $\sqrt{n}\geq112.4924$，

故 $n\geq12654.55$，即 n 至少为 12655．

23．某产品的合格率为 99%，问包装箱中应该装多少个此种产品，才能有 95%的可能性使每箱中至少有 100 个合格产品．

解：设包装箱中应该装 n 个此种产品，其中合格产品有 X 个，有 X 服从二项分布 $b(n, 0.99)$，

因 $E(X) = np = 0.99n$，$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 0.0099n$，

且 n 应大于 100，n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-0.99n}{\sqrt{0.0099n}} \dot\sim N(0,1)$，

因 $P\{X \ge 100\} \approx 1-\Phi\left(\dfrac{100-0.99n}{\sqrt{0.0099n}}\right) = \Phi\left(\dfrac{0.99n-100}{\sqrt{0.0099n}}\right) \ge 0.95$，

则 $\dfrac{0.99n-100}{\sqrt{0.0099n}} \ge 1.6449$，即 $0.99n - 0.1637\sqrt{n} - 100 \ge 0$，解方程得 $\sqrt{n} \ge 10.1334$，

故 $n \ge 102.69$，即 n 至少为 103．

24．为确定某城市成年男子中吸烟者的比例 p，任意调查 n 个成年男子，记其中的吸烟人数为 m，问 n 至少为多大才能保证 m/n 与 p 的差异小于 0.01 的概率大于 95%．

解：因 m 服从二项分布 $b(n, p)$，有 $E(m) = np$，$\mathrm{Var}(m) = np(1-p)$，

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot\sim N(0,1)$，

因 $P\left\{\left|\dfrac{m}{n}-p\right| < 0.01\right\} \approx \Phi\left(\dfrac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{-0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\dfrac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 > 0.95$，

则 $\Phi\left(\dfrac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) > 0.975$，$\dfrac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} > 1.96$，即 $n > 196^2 p(1-p)$，

因 $p(1-p) \le 0.25$，

故只需 $n > 196^2 \times 0.25 = 9604$．

25．设 $X \sim Ga(n, 1)$，试问 n 应该多大，才能满足

$$P\left\{\left|\frac{X}{n}-1\right| > 0.01\right\} < 0.01 .$$

解：设 X_i 独立同分布，且都服从 $Exp(1)$，有 $E(X_i) = 1$，$\mathrm{Var}(X_i) = 1$，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n,1)$，

则 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n$，$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = n$，

不妨设 n 较大，根据中心极限定理知 $\dfrac{X-n}{\sqrt{n}} \dot\sim N(0,1)$，

因 $P\left\{\left|\dfrac{X}{n}-1\right| > 0.01\right\} = P\left\{\left|\dfrac{X-n}{\sqrt{n}}\right| > 0.01\sqrt{n}\right\} \approx 2[1-\Phi(0.01\sqrt{n})] < 0.01$，

则 $\Phi(0.01\sqrt{n}) > 0.995$，即 $0.01\sqrt{n} > 2.5758$，$n > 66348.9660$，

故 n 应该至少为 66349．

26．设$\{X_n\}$为一独立同分布的随机变量序列，已知 $E(X_i^k) = a_k$，$k = 1, 2, 3, 4$．试证明：当 n 充分大时，

$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出此正态分布的参数.

注：此题应将随机变量 X_n 与其平方和的平均值的使用不同的记号，这里已改记为 Y_n

证：因 $E(Y_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=a_2$，$\mathrm{Var}(Y_n)=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i^2)=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2\}=\dfrac{1}{n}(a_4-a_2^2)$，

当 n 充分大时，根据中心极限定理知 $\dfrac{Y_n-a_2}{\sqrt{(a_4-a_2^2)/n}}\stackrel{\cdot}{\sim}N(0,1)$，

故当 n 充分大时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布 $N\left(a_2,\dfrac{a_4-a_2^2}{n}\right)$.

27．用概率论的方法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{2}.$$

证：首先证明泊松分布的正态逼近：设 $X\sim P(\lambda)$，记 $Y_\lambda^*=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$，则 Y_λ^* 按分布收敛于标准正态分布，

设 $X\sim P(\lambda)$，有 X 的特征函数为 $\varphi(v)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{iv}-1)}$，

则 $Y_\lambda^*=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X-\sqrt{\lambda}$ 的特征函数为 $\varphi_{Y_\lambda^*}(v)=\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}v}\,\varphi\left(\dfrac{v}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}v}\cdot\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1)}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1-\frac{iv}{\sqrt{\lambda}})}$，

因 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，有 $\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}=1+\dfrac{iv}{\sqrt{\lambda}}+\dfrac{-v^2}{2\lambda}+o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$，即 $\mathrm{e}^{\frac{iv}{\sqrt{\lambda}}}-1-\dfrac{iv}{\sqrt{\lambda}}=-\dfrac{v^2}{2\lambda}+o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$，

则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi_{Y_\lambda^*}(v)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{\lambda\left[-\frac{v^2}{2\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}+o(1)}=\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$，

这正是标准正态分布的特征函数，

则 Y_λ^* 按分布收敛于标准正态分布，即对任意实数 y，都满足 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F_{Y_\lambda^*}(y)=\Phi(y)$，

特别是取 $\lambda=n$，$y=0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n^*}(0)=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$，

因 $F_{Y_n^*}(0)=P\left\{Y_n^*=\dfrac{X-n}{\sqrt{n}}\le 0\right\}=P\{X\le n\}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=\left(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}=\dfrac{1}{2}$.