离散数学期末复习重点
Discrete Mathematics Review Notes

2025 年 12 月 31 日

目录

1 数理逻辑 (Mathematical Logic)

合式公式 (Well-Formed Formula, wff) 由原子命题 (Atomic Propositions) 和逻辑操作符 (Logical Operators) 组成。

1.1 命题逻辑 (Propositional Logic)

1. **逻辑操作符 (Logical Operators)**: 尤其关注 **异或 (Exclusive-Or, XOR)**, 记作 $\oplus$。请务必记住其真值表（相同为假，不同为真）。

2. **命题变体**:

   - 原命题: $p \to q$
   - **逆命题 (Converse)**: $q \to p$
   - **逆否命题 (Contrapositive)**: $\neg q \to \neg p$ （与原命题逻辑等价）
   - **反命题 (Inverse)**: $\neg p \to \neg q$

3. **优先级 (Precedence)**: $\neg > \wedge > \vee > \to > \leftrightarrow$.

4. **命题分类**:

   - **永真式 (Tautology)**: 无论真值赋值如何，结果恒为真。
   - **永假式 (Contradiction)**: 无论真值赋值如何，结果恒为假。
   - **可满足式 (Contingency)**: 既不是永真式也不是永假式。

5. **逻辑等价性 (Logical Equivalence)**: p iff q 当且仅当 $p \leftrightarrow q$ 是永真式，记作 $p \equiv q$。

性质 (Property) 1.1: 关键等价表达式

- **异或 (XOR)**:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

- **蕴含 (Implication)**:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

- **双蕴含 (Biconditional)**:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

6. **运算定律 (Laws of Logic)**:
   - **恒等律 (Identity Laws)**: $p \wedge T \equiv p$, $p \vee F \equiv p$
   - **支配律 (Domination Laws)**: $p \vee T \equiv T$, $p \wedge F \equiv F$
   - **幂等律 (Idempotent Laws)**: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
   - **双重否定律 (Double Negation)**: $\neg(\neg p) \equiv p$
   - **交换律 (Commutative Laws)**, **结合律 (Associative Laws)**
   - **分配律 (Distributive Laws)**:
   $$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
   $$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
   - **德摩根定律 (De Morgan's Laws)**:
   $$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
   $$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
   - **吸收律 (Absorption Laws)**:
   $$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
   - **否定律 (Negation Laws)**: $p \vee \neg p \equiv T$, $p \wedge \neg p \equiv F$
7. **同余性质**: 了解即可。
8. **可满足性 (Satisfiability)**: 是否存在一组真值赋值使得公式为真。

1.2 谓词逻辑 (Predicate Logic)

1. **基本概念**: 命题函数 (Propositional Function) $P(x)$ 和量词 (Quantifiers)。

   注意 (Note)

   论域 (Domain of Discourse) 至关重要。
   - 对于**空论域**: 全称量化命题 ($\forall$) 为**真**，存在量化命题 ($\exists$) 为**假**。
2. **变元**:
   - **自由变元 (Free Variable)**: 没有被量词绑定的变量。
   - **约束变元 (Bound Variable)**: 被量词绑定的变量。

3. **受限量词转化 (Restricted Quantifiers)**:

$$\forall x \in S, P(x) \equiv \forall x(x \in S \to P(x))$$

$$\exists x \in S, P(x) \equiv \exists x(x \in S \wedge P(x))$$

4. **与命题逻辑的关系**: (有限论域 $D = \{a_1, ..., a_n\}$)

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$$

5. **谓词逻辑的等价关系**:

   - **量词的德摩根定律**:
   $$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$
   $$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

   - **分配律 (注意成立条件)**:

   $$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

   $$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

   - **以下不成立**:
   $$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$
   $$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

6. **嵌套量词 (Nested Quantifiers)**:

   - **同类量词可交换**: $\forall x \forall y \equiv \forall y \forall x$, $\exists x \exists y \equiv \exists y \exists x$.
   - **异类量词不可交换**: $\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$.
   - **单向推导**: $\exists y \forall x P(x, y) \implies \forall x \exists y P(x, y)$ (存在一个通用的 $y \implies$ 每个人都有对应的 y)。

7. **量词的否定**: $\neg$ 穿过量词时，量词翻转 ($\forall \leftrightarrow \exists$)，**论域不变**。

8. **范式 (Normal Forms)**:

   - **析取范式 (DNF)**: 文字合取项的析取。从真值表真值项构造。
   - **合取范式 (CNF)**: 文字析取项的合取。从真值表假值项取反构造。
   - **前束范式 (Prenex Normal Form)**: 所有量词都在前面的范式。

9. **推理规则 (Rules of Inference)**:

   - **肯定前件 (Modus Ponens)**: $p, p \to q \implies q$
   - **否定后件 (Modus Tollens)**: $\neg q, p \to q \implies \neg p$
   - **假言三段论 (Hypothetical Syllogism)**: $p \to q, q \to r \implies p \to r$
   - **选言三段论 (Disjunctive Syllogism)**: $p \vee q, \neg p \implies q$
   - **归结 (Resolution)**: $p \vee q, \neg p \vee r \implies q \vee r$
   - **全称/存在实例化/泛化**: Universal/Existential Instantiation/Generalization.

2 集合论 (Set Theory)

2.1 朴素集合论 (Naive Set Theory)

1. **基本符号**: 属于 ($a \in A$), 包含 ($A \subseteq B$), 相等 ($A = B$).

2. **集合运算**:

   - 并集 (Union): $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
   - 交集 (Intersection): $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
   - 差集 (Difference): $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
   - 补集 (Complement): $\overline{A} = U - A$

3. **笛卡尔积 (Cartesian Product)**: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

4. **幂集 (Power Set)**: $P(A) = \{S | S \subseteq A\}$. 若 $|A| = n$, 则 $|P(A)| = 2^n$.

2.2 公理集合论与有序对

有序对的定义: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

2.3 关系 (Relations)

定义 (Definition) 2.1: 关系 (Relation)

R 是集合 A 到 B 的关系，即 $R \subseteq A \times B$. 记作 aRb.

1. **特殊关系及其形式化定义 (必须背诵)**:

   - **自反性 (Reflexive)**: $\forall a \in A, (a, a) \in R$.
   - **对称性 (Symmetric)**: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \to (b, a) \in R$.
   - **反对称性 (Anti-symmetric)**: $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to a = b$.
   - **传递性 (Transitive)**: $\forall a, b, c \in A, ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R$.

2. **复合关系 (Composition)**:

$$S \circ R = \{(a, c) | \exists b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

   注意: $S \circ R$ 表示先进行 R，再进行 S (顺序是从右向左)。

3. **逆关系 (Inverse)**: $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

4. **闭包 (Closures)**:

- **自反闭包**: $R_{ref} = R \cup I_A$ (其中 I_A 是恒等关系).
- **对称闭包**: $R_{sym} = R \cup R^{-1}$.
- **传递闭包**: $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. 计算方法: $R^{n+1} = R^n \cup (R^n \circ R)$, 直到稳定。

注意 (Note)

传递闭包证明: 需掌握 Warshall 算法思想或通过矩阵乘法逻辑证明其最小性。

5. **等价关系 (Equivalence Relation)**: 满足**自反、对称、传递**。
   - **等价类 (Equivalence Class)**: $[a]_R = \{x \in A | aRx\}$.
   - **划分 (Partition)**: 等价类构成了集合的一个划分 (不相交且并集为全集)。
6. **偏序关系 (Partial Ordering)**: 满足**自反、反对称、传递**。记作 (A, R) 或 $(A, \preceq)$。

2.4 函数 (Functions)

1. **定义**: 每个定义域元素对应唯一的陪域元素。
2. **分类**:
   - **单射 (Injective / One-to-one)**: $f(x) = f(y) \implies x = y$.
   - **满射 (Surjective / Onto)**: 值域等于陪域，即 $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$.
   - **双射 (Bijective)**: 既是单射又是满射 (存在逆函数)。
3. **像与逆像 (Image and Preimage)**:

性质 (Property) 2.1: 集合在函数下的性质

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

3 图论 (Graph Theory)

3.1 基本概念 (Basics)

1. **图的类型**:
   - **简单图 (Simple Graph)**: 无自环，无多重边。
   - **多重图 (Multigraph)**: 允许多重边，无自环。
   - **伪图 (Pseudograph)**: 允许自环和多重边。
   - **有向图 (Directed Graph)**: 边有方向。
2. **握手定理 (Handshaking Theorem)**:

定理 (Theorem) 3.1: 握手定理

- 无向图: $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E|$ (度数和是偶数)。
- 有向图: $\sum_{v\in V}\deg^-(v) = \sum_{v\in V}\deg^+(v) = |E|$.

3. **特殊图**:
   - **完全图 (Complete Graph)** K_n: 任意两点相连，边数 $n(n-1)/2$.
   - **圈图 (Cycle)** C_n; **轮图 (Wheel)** W_n; **立方图 (Q-cube)** Q_n.
4. **子图 (Subgraph)**: 点集和边集都是原图的子集。
   - **导出子图 (Induced Subgraph)** $G[V']$: 包含 V' 中所有顶点以及原图中所有两端点均在 V' 中的边。

3.2 二分图 (Bipartite Graphs)

1. **定义**: 顶点集可划分为两个互不相交的子集 V_1, V_2，每条边连接 V_1 和 V_2。
2. **判定**: 一个图是二分图当且仅当它**不包含奇数长度的回路**。
3. **完全二分图** $K_{m,n}$: 边数 mn。
4. **匹配 (Matching)**: 没有公共端点的边集。
5. **霍尔婚姻定理 (Hall's Marriage Theorem)**:

定理 (Theorem) 3.2: Hall 定理

二分图 $G = (V_1, V_2, E)$ 存在覆盖 V_1 的匹配，当且仅当对于 V_1 的任意子集 S，都有 $|N(S)| \geq |S|$，其中 $N(S)$ 是 S 的邻居集合。

3.3 同构与连通性

1. **图同构 (Isomorphism)** $G \cong H$: 存在保邻接性的双射。
2. **不变量 (Invariants)**: 顶点数、边数、度数序列、连通性、圈的长度等。
3. **连通性 (Connectivity)**:
   - **强连通 (Strongly Connected)**: 有向图中任意两点双向可达。
   - **割点 (Cut Vertex)**: 删去该点及关联边导致连通分量增加。
   - **割边 (Cut Edge / Bridge)**: 删去该边导致连通分量增加。
   - **点/边连通度** $(\kappa(G), \lambda(G))$: 破坏连通性所需删除的最小点/边数。

3.4 欧拉与哈密顿 (Euler & Hamilton)

1. **欧拉回路 (Euler Circuit)**: 包含所有边的简单回路。
   - **充要条件**: 连通图且所有顶点的度数均为**偶数**。
2. **欧拉路径 (Euler Path)**: 包含所有边的简单路径。
   - **充要条件**: 连通图且恰有 **0 个或 2 个**奇度数顶点。
3. **哈密顿回路 (Hamilton Circuit)**: 经过每个顶点恰好一次的回路。
   - 没有简单的充要条件，但有充分条件 (如 Dirac 定理: $n \geq 3, \deg(v) \geq n/2$).

3.5 平面图 (Planar Graphs)

1. **欧拉公式 (Euler's Formula)**: 对于连通平面图，

$$V - E + F = 2$$

2. **面的度数和**: $\sum \deg(f) = 2E$.
3. **库拉托夫斯基定理 (Kuratowski's Theorem)**: 图是平面的当且仅当它不包含同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。
4. **对偶图 (Dual Graph)** G^*: 面变点，相邻面变连边。

3.6 树 (Trees)

1. **性质**: 连通且无环。$|E| = |V| - 1$.
2. **生成树 (Spanning Tree)**: 包含原图所有顶点的树子图。
3. **最小生成树 (MST)**: 边权和最小的生成树 (Prim 算法, Kruskal 算法)。
4. **霍夫曼编码 (Huffman Coding)**:
   - 一种最优前缀码。
   - **算法**: 每次选取频率最小的两个节点合并，作为新节点的左右子树，重复直到只剩一棵树。频率高的字符编码短。

4 组合数学 (Combinatorics)

4.1 容斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

对于有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

4.2 错排问题 (Derangements)

关注 html 文件.