

华中科技大学

物理光学大作业报告

题目：基于介质超透镜阵列的光学多参量
探测

院 系：光学与电子信息学院

	班级	姓名	学号
组 长：	本硕博 2001	闫锦	U202014895
组 员：	光实 2001	刘智杰	U202014160
	光实 2001	叶芷萱	U202014173
	光实 2001	陈赞宇	U202014147

指导教师：杨振宇

2022 年 12 月 16 日

摘要

强度、相位、偏振和波长是光束的基本参量。与光强相比，光束的偏振和相位参量包含了更加丰富的信息，实现光束多参量测量对人们进一步认识和改造世界具有重要的意义。而传统的偏振和相位探测方法大多有着光路复杂、功能单一的缺陷，无法满足现代光学探测系统的集成化、小型化的发展要求。近年发展起来的超材料和超表面作为人工电磁材料，具有自然介质所不具备的新颖电磁特性。其利用微结构阵列与电磁波的相互作用可以实现对电磁波振幅、偏振和相位等特性的有效操控。超表面光学器件，以其轻薄、设计结构简单、集成度高、小型化的特点，为光束多参量测量提供了新的思路。

本论文主要围绕超材料超材料和超表面在光场调控和光学多参量探测方面的相关理论和技术展开研究，主要研究成果和创新点如下：

(1). 设计了一种能够实现光学多参量同时探测的超表面透镜阵列。该超透镜阵列工作在1550 nm 波长，能够将透射光中6种不同的偏振分量汇聚在焦平面上不同焦点处，通过测量聚焦光斑的强度以及质心位置信息，能够得到光束的偏振和相位分布。实验结果显示该透镜阵列的平均聚焦效率可达33.65%，偏振态探测相对误差可达4.83%。

(2). 简要开展了超表面透镜阵列的优化设计与实验研究。通过将超表面透镜阵列中子透镜的周期长度由1500nm调整为1000nm，对组成超表面透镜的单元结构选取方案进行优化，使得透镜阵列结构的聚焦效率得到显著提升。仿真结果显示，优化后超透镜阵列的平均聚焦效率可达79.86%。

关键词：螺旋超材料；超表面；超透镜；光场调控；偏振探测；相位探测；重构矩阵

目录

摘 要	II
1 研究背景与意义	1
1.1 电磁与偏振探测	1
1.2 光学多参量检测	3
1.2.1 偏振探测方法	3
1.2.2 波前探测方法	3
1.2.3 国内外发展现状	4
2 理论基础	6
2.1 广义折反射定律	6
2.2 PB 相位调制	7
2.3 斯托克斯参量	9
2.3.1 斯托克斯参量的定义与推导	9
2.3.2 偏振度	10
2.3.3 偏振类型和旋向	11
2.3.4 偏振角度	11
2.4 哈特曼-夏克波前探测	12
2.5 BP (BACKPROPAGATION) 神经网络	13
2.5.1 BP 神经网络定义	13
2.5.2 BP 神经网络步骤	14
2.5.3 BP 神经网络数学推导	15
3 结构设计与仿真	16
3.1 金属螺旋结构的设计与仿真	16
3.1.1 金属螺旋结构的设计	16
3.1.2 金属螺旋结构的仿真	17
3.2 单个超表面单元的设计与仿真	17
3.2.1 单个超表面单元	17
3.2.2 对扫描结果的 BP 神经网络拟合	19
3.3 超透镜阵列的设计与仿真	20
3.3.1 X、Y、A、B 偏光透镜设计	20
3.3.2 左旋圆偏光透镜设计	22
3.3.3 六个超透镜阵列的组合	23
3.3.4 不同入射角的平面波的相位梯度探测	25
3.3.5 重构矩阵的构建	27
3.3.6 入射光斯托克斯参量的还原	27

4 模型的优化设计与仿真	29
4.1 单个优化结构单元的设计与仿真	29
4.1.1 仿真结构与结果	29
4.1.2 BP 神经网络的建立	30
4.2 优化透镜阵列的设计与仿真	31
4.2.1 优化 X 偏光敏感透镜设计	31
4.2.2 优化左旋圆偏光敏感透镜设计	33
5 拓展题	34
6 个人心得体会	34
• 闫锦	34
• 刘智杰	35
• 叶芷萱	35
• 陈赞宇	36
参考文献	37
附录：代码部分(核心代码，略去了不重要的部分)	38

1 研究背景与意义

1.1 电磁与偏振探测

光作为一种电磁波（图 1-1），光强、波长、偏振、相位是光波的基本参量。这些参量均可由被测信息加载或者调制，因此光作为载波，可以为人们提供一种多维度的信息探测手段。在光学技术不断发展探索的过程中，早期大部分的研究都是建立在标量理论上，即只关注光波的光强信息，对光束偏振和相位特性的关注较少。近年来，越来越多的研究表明，在一些诸如红外成像、大气通信等研究领域中，忽略光束的偏振和相位特性会丢失很多信息，因此对光波的相位、偏振等电磁参量探测显得尤为重要。

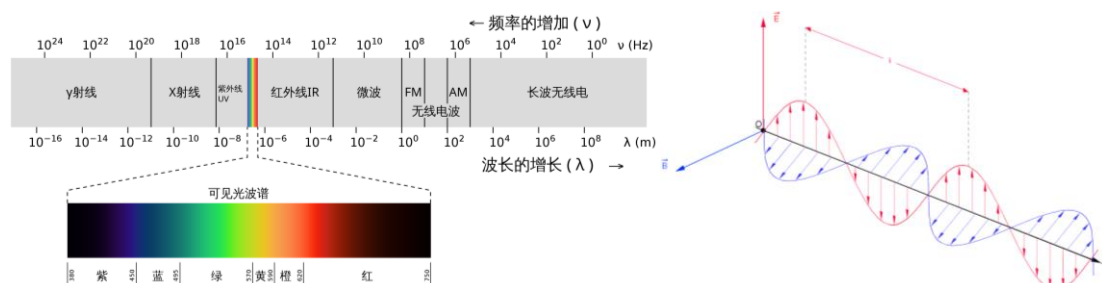


图 1-1 (左)电磁波的频谱 (右)电磁波的振动

在正弦波的每一个周期，电场向量和磁场向量都会描绘出一个椭圆形（线偏振与圆偏振是椭圆偏振的特别案例）。这椭圆的形状与定向定义了电磁波的偏振态。图 1-2 展示出几种不同种类的偏振。

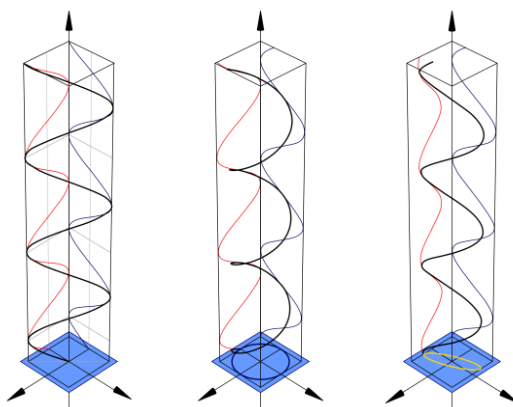


图 1-2 线偏振(左)、圆偏振(中)、椭圆偏振(右)的示意图

相较于传统的强度成像探测技术，偏振光学成像探测技术在低能见度和复杂背景条件下凸现目标的能力要更强，偏振探测在军事和民用等诸多领域都具有非常重要的实用价值，如

图像去雾、红外军事目标识别、非接触式指纹检测以及医学中癌症检测等。而相位探测技术通过对波前相位信息的实时测量并进行校准，最早应用于自适应光学系统中，使其具有克服外界环境动态扰动的能力。而目前越来越多的研究表明相位探测同样可以应用于激光器的光束净化、遥感成像、空间激光通讯和医疗诊断等各个前沿领域。

光波的相位、偏振等电磁参量的调控和光学多参量的同时探测在通信、测量、医学等领域有广泛的应用，然而传统的光探测器只能探测光强，无法直接感知光的偏振和相位信息。要想获得偏振信息，一般使用相干探测方法或在光探测器前增加偏振片和四分之一波片；要想获得相位信息，传统的波前探测系统则在探测器前面增加微透镜阵列。总之，为了探测光波除光强以外的基本参量信息，一般会选择在探测器前加上分立元件来实现，这导致了传统探测方法光路复杂（图 1-3），体积庞大且功能单一等问题。

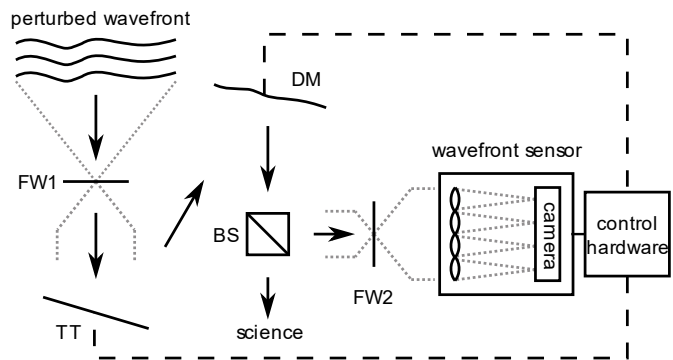


图 1-3 一种基于传统波前探测的自适应光学系统

超材料（Metamaterials）作为一种人工复合电磁材料，近年来获得国内外学者的广泛关注。通过对超材料组成结构的精心设计，能够使其具有很多特殊电磁特性，此外超材料利用自身微结构阵列与电磁波之间的相互作用，可以在亚波长尺度下直接调控电磁波的振幅、偏振和相位信息。超表面（Metasurface）作为二维的超材料，具有更易加工、损耗低、设计灵活等特点，在光场调控方面有着更广泛的应用前景。基于超材料和超表面结构的小型化、轻薄、功能复杂等特点，为设计出具有多维光信息探测能力且系统简单、集成化程度高的探测器件提供了全新的思路与方法。

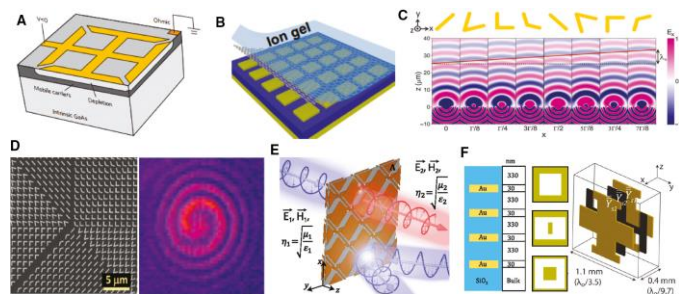


图 1-4 (a-f) 几种常见的超表面实例

1.2 光学多参量检测

1.2.1 偏振探测方法

偏振探测技术是一种能够识别并提取目标偏振信息的技术，在获取目标偏振信息过程中，由于大多数成像探测器只能得到光强信息，对偏振特性并不敏感，因此需要通过偏振器件对光束的偏振信息进行处理，获得与目标偏振信息有关的光强图像。传统的偏振探测方法根据原理及系统的结构不同，主要分为三种方法：分时偏振成像探测方法、同时偏振成像探测方法以及偏振光谱成像探测方法。三种方法的工作原理以及各自的优缺点分别如表 1-1 所示。

表 1-1 传统偏振探测方法的工作原理及优缺点

探测方法	工作原理	优点	缺点
分时偏振成像	通过改变检偏器透光轴方向，分四次成像来获得目标的四种偏振分量	结构简单 系统成本和体积不高	实时性不好 对环境因素要求高
同时偏振成像	将入射光分解成四束平行光路，用不同透光轴方向的检偏器同时检测，在同一时间获得四幅偏振图像	动态目标探测灵敏 容易与现有光学成像系统结合	结构复杂 系统体积大
偏振光谱成像	用偏振调制模块将目标的斯托克斯参数调制到不同光谱上，然后用傅立叶变换解调来获得偏振信息	能够同时获得光谱和偏振信息	调制模块复杂 波长范围较窄

1.2.2 波前探测方法

传统的波前探测方法根据探测的原理不同，主要分为哈特曼-夏克波前探测技术、四棱

锥波前探测技术以及多波前剪切干涉波前探测技术等。这些波前探测方法的原理及各自的优缺点分别如表 1-2 所示。

表 1-2 传统偏振探测方法的工作原理及优缺点

探测方法	工作原理	优点	缺点
哈特曼-夏克波前传感	利用微透镜阵列将目标分成若干个子波前并聚焦到同一平面，通过测量子光斑偏移量还原目标的相位梯度	提高光斑质心衍射效率，结构简单	微透镜加工工艺要求高，分辨率低
四棱锥波前探测技术	用四棱锥作为分光和相位滤波器，将目标光分成四份子波前，聚焦得到四份图像，通过解调获得目标波前	探测范围及灵敏度可调，可以适用不同环境	对四棱锥加工精度要求高
双波前剪切干涉技术	利用分光器件将待测光分为两束光波，使之错切干涉，得到剪切干涉图	不受振动影响 不会引入系统误差	不能直接获得波前相位信息

1.2.3 国内外发展现状

在现有的近红外光束多参量探测的研究应用中，基本所有的仪器都选择专精偏振探测或者相位探测中的一种，尚未出现能够同时探测偏振和相位的仪器。而针对偏振探测和相位探测领域，一些国内外大型公司的相关技术路线分别如下：

在偏振探测领域，Hinds Instruments 公司作为世界领先的偏振测量技术的来源，主要研究、开发和制造偏振测量仪器，其利用光弹性调制器技术的超高灵敏度，提供先进实时偏振分析。Hinds 公司利用光弹调制器技术开发的科研级高精度偏振态测量系统可以获得比一般偏振测量仪高出一个数量级的精度，在速度上，也可以从一秒钟 10 组（40 个）斯托克斯参量提升到 100 组（400 个）斯托克斯参量。但是，其因为系统较为复杂，整体体积庞大，没有便携的特性，需要在固定场景使用。美国 Meadowlark 公司开发的超宽带偏振测量仪结合了液晶可变相位延迟器技术和偏振技术，具有超宽带、高精度及无运动部件等特点，这种液晶偏振态测量仪因为不存在内部运动部件磨损问题，可以大大提高偏振态测量的精度与一致性。但是其因为引入了液晶设备，存在造价昂贵的问题。国内波弗光电

研制的 PAX1000 系列偏振测量仪基于旋转四分之一波片技术，然后用傅里叶分析的方法计算出斯托克斯参数，从而还原得到待测光的偏振态。但是这个系列的探测仪器一方面对待测光的要求比较严格，入射光必须是波长已知的单色相干光，在近红外方面只能测量 1700nm 的准直单色。

在相位探测领域，法国 Alpao 公司研制的 WFS 波前传感器主要基于哈特曼-夏克波前技术（图 1-5），专为自适应光学而优化设计，因此其主要特征为高灵敏度，但是还是存在系统复杂，不易便携等问题。法国的 Phasics 公司专注于研究高分辨率波前传感技术，其自主研发的波前传感器是基于四波横向剪切干涉技术，其研发的 SID4 系列波前分析仪相较传统的夏克-哈特曼波前探测器具有高分辨率、消色差、高灵敏度等独特优势，为波前相差、畸变的检测以及激光光束的测量提供了全新的解决方案。但是其一方面价格较贵，且没有推出具有偏振测量功能的产品。国内在相位探测领域走在前列的是中科院光电所，其研制的波前传感器通过将传统哈特曼波前传感器种的核心器件微透镜阵列替换为锯齿形相位光栅阵列，同样可以实现对目标的波前探测，这项新型的波前探测技术是我国在光束诊断和光学检验技术领域的一项创新突破。

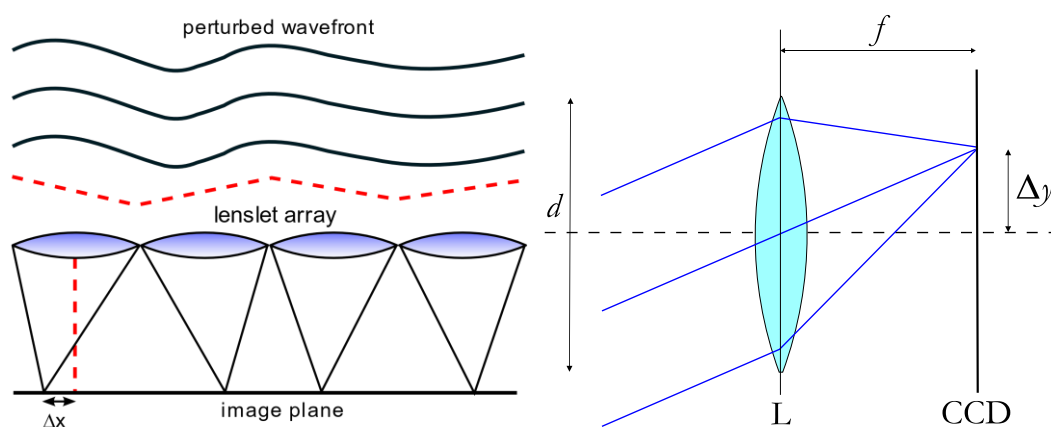


图 1-5 (左)哈特曼-夏克波前探测透镜组示意图 (右)对单个哈特曼-夏克波前透镜的处理

综上所述，尽管目前有很多方法能够实现偏振探测和相位探测，国内外也有不少相关仪器在研制生产及应用，但它们依旧存在不足之处。一方面传统的探测方法结构都较为复杂，不便携带；另一方面功能较为单一，暂时还不具备能够实现偏振和波前同时探测，难以满足未来光探测领域的发展需求。

2 理论基础

2.1 广义折反射定律

通过在波长尺度上引入突然的相位变化来获得新的自由度，相位不连续性为光束的设计提供了极大的灵活性。在两种介质的界面上引入突然的相移，即相位不连续，使我们可以通过应用费马原理重新审视反射和折射定律。考虑一个入射平面波。假设这两条路径与实际光路的距离无穷小（图 2-1），

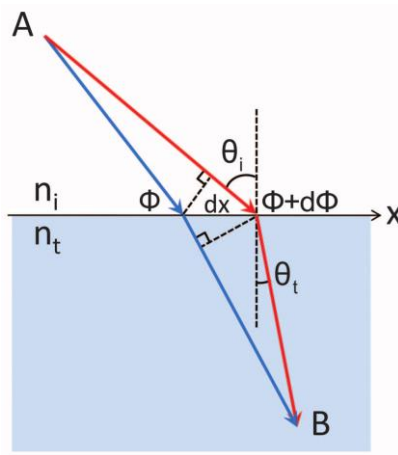


图 2-1 广义折反射定律示意图

则它们之间的相位差为零。即方程（1）：

$$[k_0 n_i \sin \theta_i dx + (\Phi + d\Phi)] - [k_0 n_t \sin \theta_t dx + \Phi] = 0 \dots\dots (1)$$

其中 θ_t 是折射角， Φ 和 $\Phi + d\Phi$ 是在两条路径穿过界面的位置上的相位不连续度， dx 是两界面交点之间的距离。如果沿界面的相位梯度设计为常数，则改写方程（1）可得到广义斯涅尔折射定律方程（2）：

$$\sin(\theta_t) n_t - \sin(\theta_i) n_i = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx} \dots\dots (2)$$

于是我们可以知道只要引入合适的相位不连续梯度 $\frac{d\Phi}{dx}$ ，折射光束就可以有任意的方向，比如我们可以研究临界角。由于该修正的斯涅尔定律中存在非零相位梯度，两个入射角 $\pm\theta_i$ 导致折射角值不同，假设 $n_t < n_i$ ，因此可能的两个临界角满足方程（3）：

$$\theta_c = \arcsin\left(\pm \frac{n_t}{n_i} - \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \frac{d\Phi}{dx}\right) \dots\dots (3)$$

同样的，我们也有广义反射定律方程（4）：

$$\sin(\theta_r) - \sin(\theta_i) = \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \frac{d\Phi}{dx} \dots\dots (4)$$

可以看出反射角 θ_r 与入射角 θ_i 之间是非线性的，这与传统反射定律大相径庭。且由方程（4）可以得到总有一个入射临界角满足方程（5）：

$$\theta'_c = \arcsin\left(1 - \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \left|\frac{d\Phi}{dx}\right|\right) \dots\dots (5)$$

在方程（2）和方程（4）中令 $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ ，则得到传统折反射定律。

2.2 PB 相位调制

研究金属螺旋超材料能否通过几何相位方法来调控出射光的相位，即通过改变螺旋超材料的旋转角度（图 2-2）来调节出射光的相位，这里螺旋超材料的旋转角度定义为螺旋的起始角 θ ，即螺旋起始点与螺旋中心的连线沿顺时针旋转到 X 轴正半轴的夹角。

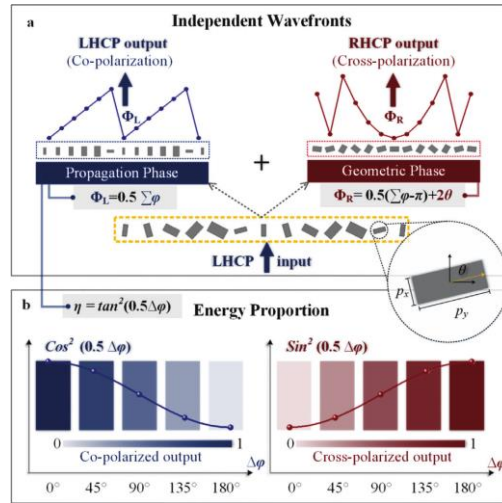


图 2-2 一种 PB 相位调制的例子

将螺旋超材料的五个基本机构参数设置为螺旋直径 $DH=100\text{nm}$ ，螺旋线直径 $DW=34\text{nm}$ ，螺旋节距 $LH=200\text{nm}$ ，螺旋节数 $NH=2$ 和螺旋间距 $SG=200\text{nm}$ ，只改变螺旋起始角，观测出射光的圆偏光转换效率（出射右旋光振幅 A_{rcp} 与入射左旋光振幅 A_{icp} 比值）和相移变化（出射右旋光相位 Φ_{hrcp} ，与入射右旋光相位差值 Φ_{hicp} ，用 ψ 表示）。

相移与螺旋起始角的关系具体由下表 2-2 给出，分别给出了以起始角 0° 为参考值，螺

旋起始角分别为 45° 、 90° 、 135° 和 180° 情况下左旋光入射时右旋光出射的相移值和右旋光入射时左旋光出射的相移值。

表 2-2 出射圆偏光的相移与螺旋起始角之间的关系

相位变化 φ ($^\circ$)	螺旋起始角 θ ($^\circ$)									
波长 (μm)	0 (参考)		45		90		135		180	
	R-L	L-R	R-L	L-R	R-L	L-R	R-L	L-R	R-L	L-R
0.60	360	0	270.2	86.0	183.0	169.5	88.1	258.1	2.5	349.9
0.65	360	0	270.0	87.8	181.0	171.9	86.8	259.4	2.5	350.8
0.70	360	0	269.3	89.2	179.1	174.1	86.1	260.7	2.8	351.5
0.75	360	0	268.4	90.2	177.4	176.0	85.7	261.7	3.3	351.9
0.80	360	0	267.9	91.0	176.0	177.2	84.9	262.1	3.5	351.9
0.85	360	0	268.0	91.1	176.0	177.0	85.0	261.5	3.8	351.3

从表 2-2 中可以很明显地看出，在 600nm 到 860nm 的宽谱范围内，出射光的相移和螺旋起始角之间有一个非常简单的线性关系，即 $\psi = \pm 2\theta$ 。同时利用螺旋起始角来调控出射光相移还有两个优点：一个是出射光的相移只与螺旋起始角相关，与波长无关，因此可以以此制作宽谱消色差器件；第二个是出射光的圆偏光转换效率几乎可以保持稳定，与螺旋起始角无关，因此可以在调控相位的同时保证出射光强的稳定。上述的螺旋起始角与出射光相移的线性关系是基于几何相位调控，也就是 PB 相位。

我们也可以使用琼斯微积分从理论上分析它的光学性能。对于任意的各向异性单元结构，它的琼斯矩阵可以表示为

$$M = R(-\theta) \begin{pmatrix} t_o & t_o' \\ t_e' & t_e \end{pmatrix} R(\theta) \dots\dots (1)$$

其中 t_o ， t_e ， t_o' ， t_e' 分别是两种正交线偏光 (x 线偏光和 y 线偏光) 沿着各向异性结构的快慢轴传输的复合系数， $R(\theta)$ 是各向异性结构的旋转矩阵，其中 θ 代表结构的旋转角，在这里为螺旋结构的起始角，可以由式(2)表示。

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \dots\dots (2)$$

入射光为右圆偏振(RCP)和左圆偏振(LCP)时，透射光的琼斯矩阵可以表示为:

$$E_{tr}^{RCP} = M \cdot E_{in}^{RCP} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{(t_o + t_e) - i(t_o' - t_e')}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{(t_o - t_e) - i(t_o' + t_e')}{2} \exp(-i2\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \dots\dots (3)$$

$$E_{tr}^{LCP} = M \cdot E_{in}^{LCP} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{(t_o + t_e) + i(t_{o'} - t_{e'})}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{(t_o - t_e) + i(t_{o'} + t_{e'})}{2} \exp(i2\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

其中 E_{in}^{RCP} 和 E_{in}^{LCP} 表示 RCP 和 LCP 入射光的透射光， t_o 和 t_e 是晶胞沿椭圆长轴和短轴的复透射， θ 是逆时针方向的取向角。如果 RCP 和 LCP 光的取向角覆盖 $0-\pi$ ，则该附加的几何相移覆盖 $0-2\pi$ 。第一项代表了与入射光具有相同偏振态的出射光分量，第二项代表的是与入射偏振光具有正交偏振态的出射光分量。从上面两个公式中可以很明显地看出，第二项即在具有正交偏振态的出射光和入射光之间会引入一个 $\pm 2\theta$ 的相移，而在具有相同偏振态的出射光和入射光之间则不会产生额外的相位变化，这与仿真结果一致。此外，通过时域有限差分（FDTD）仿真方法可以计算得到上述结构参数下螺旋结构的四个复合传输系数 t_o ， t_e ， $t_{o'}$ ， $t_{e'}$ ，结果如表 2-3 所示。从表中可以发现， $|\frac{(t_o-t_e)-i(t_{o'}+t_{e'})}{2}|$ 和 $|\frac{(t_o-t_e)+i(t_{o'}+t_{e'})}{2}|$ 的值比较接近，并且与仿真中观测到的圆偏光转换率吻合得很好，证实可以用上述琼斯矩阵的方法解释螺旋超材料的起始角能够调控出射光相位的原因。

表 2-3 单螺旋结构的复合传输系数

波长(μm)	t_o	t_e	$t_{o'}$	$t_{e'}$	$ \frac{(t_o-t_e)-i(t_{o'}+t_{e'})}{2} $	$ \frac{(t_o-t_e)+i(t_{o'}+t_{e'})}{2} $
0.60	$0.34e^{i0.94}$	$0.65e^{i1.20}$	$0.38e^{i6.16}$	$0.38e^{i2.91}$	0.1636	0.1685
0.70	$0.42e^{i4.07}$	$0.71e^{i3.86}$	$0.33e^{i2.41}$	$0.32e^{i5.45}$	0.1608	0.1621
0.80	$0.55e^{i1.55}$	$0.70e^{i1.23}$	$0.29e^{i5.85}$	$0.27e^{i2.66}$	0.1216	0.1228

2.3 斯托克斯参量

2.3.1 斯托克斯参量的定义与推导

斯托克斯参量可以用来描述光波的光强和偏振态。斯托克斯参量可用矩阵表示，均为光强的时间平均值，用来描述光波的偏振态.分别表示光波的 x，y 分量，为两分量之间的相位差.斯托克斯矩阵可以表示为:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x^2 + E_y^2 \\ E_x^2 - E_y^2 \\ 2E_xE_y \cos \delta \\ 2E_xE_y \sin \delta \end{bmatrix}$$

将一些特殊的数值代入，可以得到常见的几种各向同性偏振光的斯托克斯矢量，如图 2-3 所示。

完全偏振光				完全非偏振光		自然光
线偏振光				圆偏振光		
光矢量 沿 x 轴	光矢量 沿 y 轴	光矢量 与 x 轴 成 $+45^\circ$	光矢量 与 x 轴 成 -45°	右旋	左旋	
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

图 2-3 几种常见偏振光的斯托克斯矢量

从上表中容易得出各参量对应的物理意义： S_0 表示光波的总强度； S_1 表示水平方向的线偏振光分量； S_2 表示 45° 方向的线偏振光分量； S_3 表示右旋圆偏振光分量；当出现与上述偏振光正交的光束时，即竖直方向的线偏振光、 -45° 方向的线偏振光、左旋圆偏振光，对应的参量为负值。

全面描述光波的偏振状态需要四个要素：偏振度、偏振类型、偏振旋向、偏振角度。

2.3.2 偏振度

偏振度定义为 $P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$ ，其意义为判断光波偏振的程度，即是否为完全偏振光。一般情况下 $1 \geq P \geq 0$ 。当 $P = 0$ 时，光波为完全非偏振光，也就是自然光；当 $1 > P > 0$ 时，光波为部分偏振光；当 $P = 1$ 时，光波为完全偏振光。

斯托克斯参量之间并非相互正交，四个参量之间存在着一个不等式关系，即，也就是说光波的偏振态可以由以为坐标轴，为半径的球上。这个球也叫做偏振庞加莱球，如图 2-4 所示。

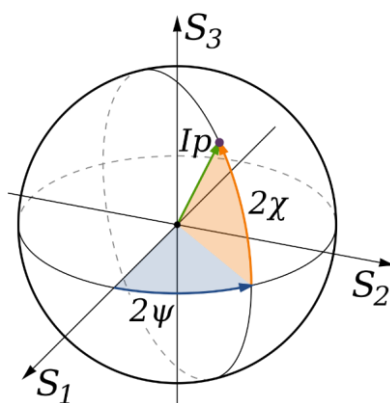


图 2-4 偏振庞加莱球

偏振庞加莱球的球面上任意一点都可以表示完全偏振光，所以光波的偏振态可以映射到球面的某一点上，并由两个角度(经纬度)坐标 (θ, σ) 确定。

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)$$

$$\sigma = \tan^{-1} \left(\frac{S_3}{S_0} \right)$$

2.3.3 偏振类型和旋向

光波的偏振类型可分为线偏、圆偏、椭圆偏三种，椭圆偏振是偏振态的一般表现形式，而线偏振和圆偏振可以看作是椭圆偏振的特殊情况。由于 S_3 表示右旋圆偏振分量，那么可以用 $\frac{S_3}{S_0}$ 作为偏振类型的判断依据：当 $\frac{S_3}{S_0} = 0$ 时，说明光波没有圆偏振分量，即为线偏振光；当 $abs\left(\frac{S_3}{S_0}\right) = 1$ 时，表示光波只有圆偏振分量，说明光波为圆偏振光；而当 $0 < abs\left(\frac{S_3}{S_0}\right) < 1$ 时，光波有圆偏振分量，也存在线偏振分量，说明光波的偏振态为椭圆偏振。

该比值的正负决定偏振旋向。正值表示右旋偏振，负值表示左旋偏振。

2.3.4 偏振角度

将线偏振光和椭圆偏振光的长轴与水平方向的夹角定义为偏振角度，如图 2-5 中的角 α 所示。

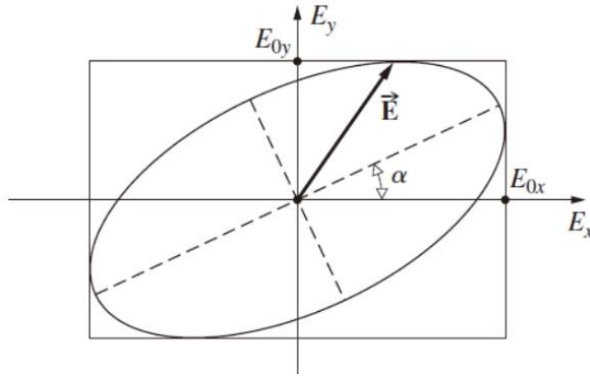


图 2-5 椭圆偏振光

其中有：

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_x E_y \cos \delta}{E_x^2 - E_y^2} = \frac{S_2}{S_1}$$

那么偏振角度可以用斯托克斯参量表示为：

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)$$

光波偏振态的判定方法和偏振庞加莱球的经纬度坐标非常相似,那么同样可以用偏振庞加莱球简易表示光波的偏振类型和偏振角度。简单比较公式后可以发现,偏振庞加莱球的赤道表面表示线偏振光,北极表示右旋圆偏振光,南极表示左旋圆偏振光,其他位置的表面表示椭圆偏振光,且在同一经度上,椭圆偏振光随着纬度的增加越来越接近圆偏振光。偏振庞加莱球的北半球表示右旋偏振光,南半球表示左旋偏振光。除南北极两点外,其余每个位置的偏振角度均为其位置所在经度的一半。

可进一步根据此方法在实验上验证光波的偏振态。

2.4 哈特曼-夏克波前探测

哈特曼 - 夏克 (Hartmann-Shack) 原理的基本思想是把一个待测区域内完整波前划分为很多小区域叠加的形式,这个划分通过使用密排列的微透镜阵列加以实现。入射波前经过透镜阵列后在透镜阵列的焦平面上得到一系列的焦点,位于焦平面上的 CCD 能够捕获光波前通过每一个微透镜后汇聚点所在的位置。畸变的波前经过透镜阵列后,其汇聚点相对于理想平面波垂直入射透镜阵列所形成的汇聚点 (微透镜焦点) 之间会产生一个偏移量 (图 2-6)。

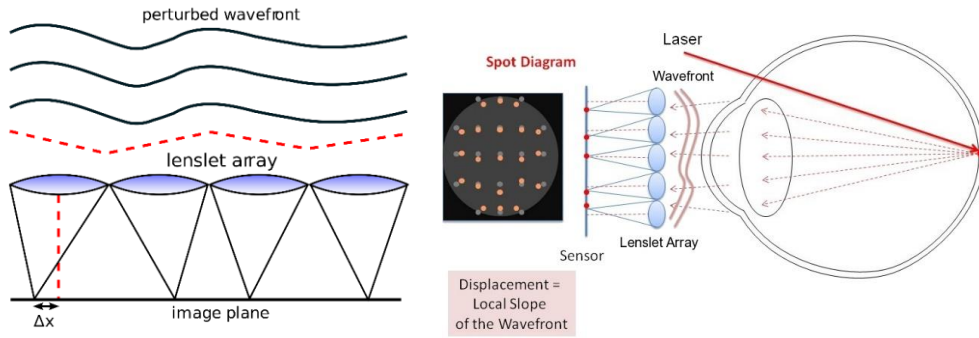


图 2-6 光波前入射微透镜阵列后的汇聚点分布

图 1 光波前入射微透镜阵列后的汇聚点分布

微透镜阵列将畸变波前分解为多个倾斜子波前,在 CCD 相机上呈现出一个个偏离各自孔径中心的子光斑阵列,每个子光斑的位置可以通过质心算法计算得出,如式 (1) 和式 (2) 所示:

$$X_c = \frac{\sum_{i,j} x_{i,j} I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}} \dots\dots (1)$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i,j} y_{i,j} I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}} \dots\dots (2)$$

其中 (X_c, Y_c) 为子光斑的光斑质心位置, $I_{i,j}$ 为第 i 行第 j 列 CCD 像素的灰度值, $(x_{i,j}, y_{i,j})$ 为第 i 行第 j 列像素的坐标。计算出光斑的质心位置之后, 通过与孔径中心位置相比较, 可以获得相应的子光斑位置偏移量, 如式 (3) 和式 (4) 所示:

$$\Delta x = X_c - X_o \dots\dots (3)$$

$$\Delta y = Y_c - Y_o \dots\dots (4)$$

其中 (X_o, Y_o) 是每个微透镜对应的孔径中心位置, 通过计算每个光波汇聚点的质心相对于微透镜焦点在焦平面上的偏移量, 结合微透镜的焦距 f , 可以计算得到各子波面的平均法线斜率。

$$\frac{\partial W_i(x, y)}{\partial x} = \frac{\Delta x_i}{f} = k_x \dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial W_i(x, y)}{\partial y} = \frac{\Delta y_i}{f} = k_y \dots\dots (6)$$

式中 $W_i(x, y)$ 为第 i 个子孔径上的被测波前; f 为微透镜阵列中一个微透镜的焦距, 为形成共同的焦平面, 所有微透镜都有着相同的焦距 f ; Δx 和 Δy 分别是焦点质心在 x 轴和 y 轴的偏移量。

理论上, 仅当微透镜取的无限小, 才能获得被测波面上任意点的法线斜率; 实验中, 当微透镜的采样孔径取得足够小, 即认为波面在这一足够小的采样孔径内是平坦的, 亦即采样孔径内的波面法向量是相同的, 从而通过上式得到的平均法线斜率可代表微透镜所在的微小孔径的波面法线斜率。

最后可以基于区域法和模式法等方法, 通过求解线性矩阵方程来对波前进行重构。

2.5 BP (Backpropagation) 神经网络

2.5.1 BP 神经网络定义

反向传播 (英语: Backpropagation, 意为误差反向传播, 缩写为 BP) 是对多层人工神经网络进行梯度下降的算法, 也就是用链式法则以网络每层的权重为变数计算损失函数的梯度, 以更新权重来最小化损失函数。

任何监督式学习算法的目标是找到一个能把一组输入最好地映射到其正确的输出的函数。例如一个简单的分类任务, 其中输入是动物的图像, 正确的输出将是动物的名称。一些

输入和输出模式可以很容易地通过单层神经网络（如感知器）学习。但是这些单层的感知机只能学习一些比较简单的模式，例如那些非线性可分的模式。例如，人可以通过识别动物的图像的某些特征进行分类，例如肢的数目，皮肤的纹理（无论是毛皮，羽毛，鳞片等），该动物的体型，以及种种其他特征（图 2-7）。但是，单层神经网络必须仅仅使用图像中的像素的强度来学习一个输出一个标签函数。因为它被限制为仅具有一个层，所以没有办法从输入中学习任何抽象特征。多层的网络克服了这一限制，因为它可以创建内部表示，并在每一层学习不同的特征。第一层可能负责从图像的单个像素的输入学习线条的走向。第二层可能会结合第一层所学并学习识别简单形状（如圆形）。每升高一层就学习越来越多的抽象特征，如上文提到的用来图像分类。每一层都是从它下方的层中找到模式，就是这种能力创建了独立于为多层网络提供能量的外界输入的内部表达形式。反向传播算法的发展的目标和动机是找到一种训练的多层神经网络的方法，于是它可以学习合适的内部表达来让它学习任意的输入到输出的映射。

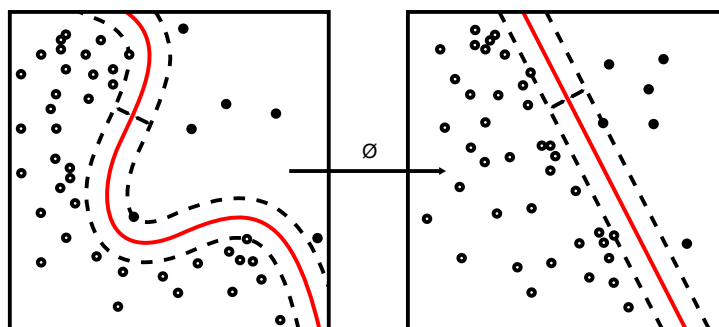


图 2-7 BP 神经网络工作原理图

2.5.2 BP 神经网络步骤

● 第 1 阶段：激励传播

每次迭代中的传播环节包含两步：

- 1.（前向传播阶段）将训练输入送入网络以获得预测结果；
- 2.（反向传播阶段）对预测结果同训练目标求差(损失函数)。

● 第 2 阶段：权重更新

对于每个突触上的权重，按照以下步骤进行更新：

1. 将输入激励和响应误差相乘，从而获得权重的梯度；将这个梯度乘上一个比例并取反后

加到权重上。

2. 这个比例（百分比）将会影响到训练过程的速度和效果，因此成为“训练因子”。

梯度的方向指明了误差扩大的方向，因此在更新权重的时候需要对其取反，从而减小权重引起的误差。第 1 和第 2 阶段可以反复循环迭代，直到网络对输入的响应达到满意的预定的目标范围为止。

2.5.3 BP 神经网络数学推导

假设多层人工神经网络的第 l 层是由线性算子 $W^l: R^{n_{l-1}} \rightarrow R^{n_l}$ 和激活函数 $f^l: R \rightarrow R$ 所构成，也就是说，第 l 层的输入是 n_{l-1} 维实数向量： $y^{l-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_{l-1}})$ ，输出则为 n_l 维实向量： $y^l = (y_1, y_2, \dots, y_{n_l})$ 。换句话说，第 $l-1$ 层的输出 y^{l-1} 就是第 l 层的输入。而 y^l 和 y^{l-1} 的具体(以第 i 分量表示)递归关系式为：

$$y_i^l = f^l\{[W^l(y^{l-1})]_i\} = f^l\left[\sum_{j=1}^{n_{l-1}} y_j^{l-1} W_{ji}^l\right] \quad (1 \leq i \leq n_l) \dots\dots (1)$$

上式通常会简写为：

$$y^l = f^l[W^l(y^{l-1})] \dots\dots (2)$$

若这个多层人工神经网络总共有 L 层，也就是说， y^0 是最一开始的输入，而 y^L 是最后一层的输出，那跟损失函数 g 是以最后一层输出 y^L 的各分量 y_i^L (与真实值) 为变数。依据上面的递归关系式|递归关系，可以把 g 进一步的转成以第 L 层的输入 y^{L-1} 与权重因子 W_{ij}^m 为变数的函数 g^L ：

$$g^L(W_{ij}^L, y_k^{L-1}) = g\left[f^L\left(\sum_{a=1}^{n_{L-1}} y_a^{L-1} W_{ab}^L\right)\right], \quad (1 \leq k \leq n_{L-1}, 1 \leq b \leq n_L) \dots\dots (3)$$

由此可以归纳到 $1 \leq l < L$ 的情况(注意到前几层的权重因子不会消失在表达式中)

$$g^l(W_{ij}^l, \dots, W_{ij}^L, y_k^{l-1}) = g^{l+1}\left[W_{ij}^{l+1}, \dots, W_{ij}^L, f^l\left(\sum_{a=1}^{n_{l-1}} y_a^{l-1} W_{ab}^l\right)\right] \dots\dots (4)$$

$$(1 \leq k \leq n_{l-1}, 1 \leq b \leq n_l)$$

那这样“如果假设适当的可微分条件”，由链式法则会有以下的递归关系式(若取 $g^{m+1} := g$ 和 $1 \leq l \leq L$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^l}{\partial W_{cd}^l} &= \frac{\partial g^{l+1}}{\partial y_d^l} \Big|_{y_d^l=f^l(x)} \times \frac{df^l}{dx} \Big|_{x=\sum y^{l-1}_a W_{ad}^l} \times y^{l-1}_c \cdot \frac{\partial g^l}{\partial y_c^{l-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_l} \left[\frac{\partial g^{l+1}}{\partial y_i^l} \Big|_{y_i^l=f^l(x)} \times \frac{df^l}{dx} \Big|_{x=\sum y^{l-1}_a W_{ai}^l} \times W_{ci}^l \right] \dots\dots (5) \end{aligned}$$

这样就可以依据这个递归关系式进行梯度下降,因为计算上是由 y_i^L 对损失函数 g 的偏微分出发,层层向后递推出前面各层的权重因子梯度,所以被称为“反向传播”。

注意到可将输入设为: $y^{l-1} = (1, x_1, x_2, \dots, x_{n_{l-1}})$,多加一行权重因子 W_{i0}^l 为偏移,就可以把有偏移的多层网络纳入刚刚讨论的范围内。

3 结构与仿真

3.1 金属螺旋结构的设计与仿真

3.1.1 金属螺旋结构的设计

螺旋结构超材料 (Helical Metamaterials) 作为一种手性人工介质,最早由德国的 J.K Gansel 等人于 2009 年报道,他们提出将亚波长的螺旋结构通过阵列式分布设计出宽带集成化的圆偏振器,并用三维激光直写的加工方法实现了该螺旋超材料结构的制备。这种螺旋超材料结构具有宽谱的圆二向色性,即能够抑制具有匹配偏振态的圆偏光,而非匹配的圆偏光则不受影响几乎能完全透过,如针对左手螺旋结构,左旋圆偏光入射会被抑制,右旋圆偏光则不受影响。相比于传统的由起偏器和四分之一波片组成的圆偏振器,螺旋结构超材料具有易于集成和宽谱的优点,因此国际上对螺旋超材料的研究处于蓬勃发展阶段。然而,国内外的研究主要围绕在如何扩展螺旋超材料的工作范围,提高圆偏振特性的信噪比等方面,还没有涉及到对出射光相位调控这方面的研究。

在大作业开始初期,本小组成员在学习 FDTD 建模过程中,完成了一种金属螺旋结构的 FDTD 设计螺旋结构的结构参数主要如下:螺旋线的直径 DW;螺旋直径 DH (螺旋的导体中心的直径);螺旋结构之间的间距 SG;螺旋的节距 LH;螺旋的节数 NH。我们使螺旋直径 DH=100nm,螺旋线直径 DW=34 nm,螺旋节距 LH=200 nm,螺旋节数 NH=2 和螺旋

间距 $SG=200nm$ ，初次探究了螺旋结构超材料的光学特性，但未扫描更多结构。

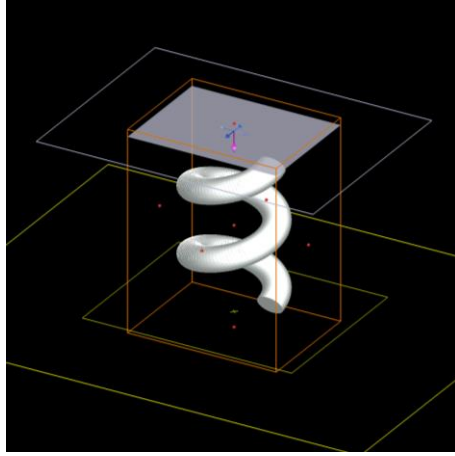


图 3-1 一种金属螺旋超结构的设计

3.1.2 金属螺旋结构的仿真

小组对上文中提到的金属螺旋结构超材料进行了仿真，并得到了仿真结果（图 3-2），我们发现，对于亚波长的超结构单元可以改变光的透过率和传输相位，也为我们后文的研究奠定了基础。

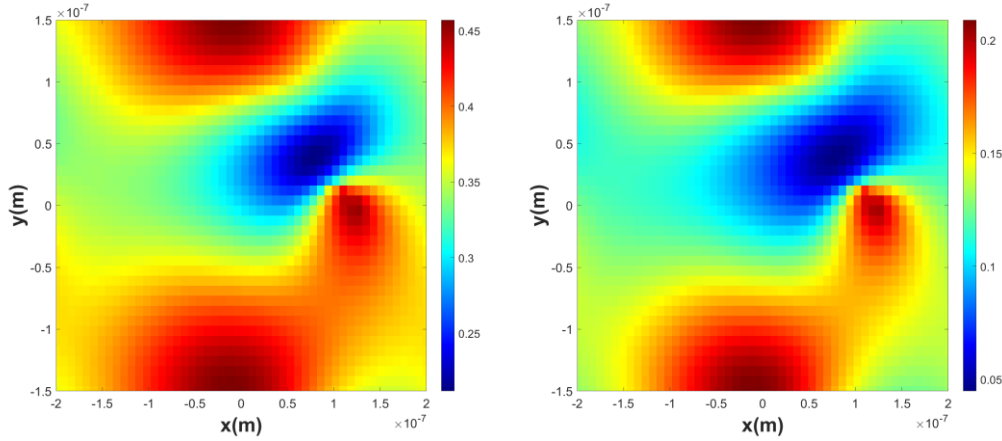


图 3-2 (左)结果的场强分布 (右)结果的透过率分布

3.2 单个超表面单元的设计与仿真

3.2.1 单个超表面单元

超表面透镜的仿真从单元结构开始。单元结构示意图 3-5 所示，衬底选用的二氧化硅材料，周期长度 $A_x = A_y = 1500nm$ 。衬底上方使用椭圆状硅柱作为结构，为了便于实验制备，硅柱的高度为 $340nm$ ，市面上可以买到这种厚度的 *SOI (Silicon On Insulator, SOI)* 基

片来进行加工。此外，硅柱还有三个参数可变，分别为椭圆硅柱的长短轴 D_x 和 D_y ，以及硅柱的旋转角度 θ 。改变 D_x 和 D_y 能够提供不同的传输相位，用来设计线偏振敏感聚焦透镜；改变 θ 能够提供不同的几何相位，用来设计圆偏光敏感聚焦透镜。

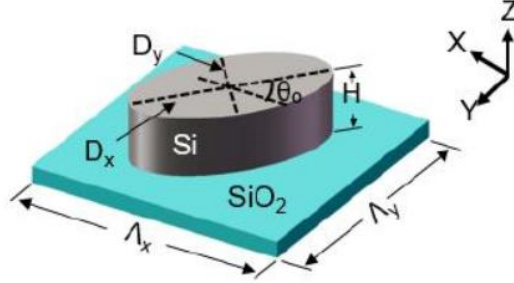


图 3-3 超表面单元结构示意图

使用 *FDTD* 仿真软件 (*FDTD Solutions*, 加拿大 *Lumerical Solutions* 公司)对上述的单元结构进行仿真扫描，仿真条件设置如下：入射光源选择波长 $\lambda = 1550\text{ nm}$ 的 x 偏振光从衬底中向 z 轴正方向入射，衬底材料选用 SiO_2 ，折射率为 1.450，硅柱材料选用的 $\text{Si} - \text{Palik}$ 模型，在 1550 nm 波长下折射率为 3.478，吸收率为 0。基于等效折射率理论，衬底和上面结构具有较大的折射率差时，更容易产生覆盖 $0 - 2\pi$ 的传输相位。 z 方向上，边界条件使用完美吸收 (PML) 的边界条件， x 和 y 方向上，则使用周期边界 (PBC) 条件来模拟结构阵列。由于结构旋转角 θ 与出射圆偏光相移之间的线性关系在上章中已经证实，所以在本次仿真中不再涉及，主要考虑的是结构尺寸与传输相位之间的关系。因此将结构旋转角 θ 固定为 0，改变椭圆硅柱的长短轴 D_x 和 D_y 进行扫描仿真， D_x 和 D_y 的范围为 200 nm 到 1400 nm ，每隔 12 nm 的步长改变一次。

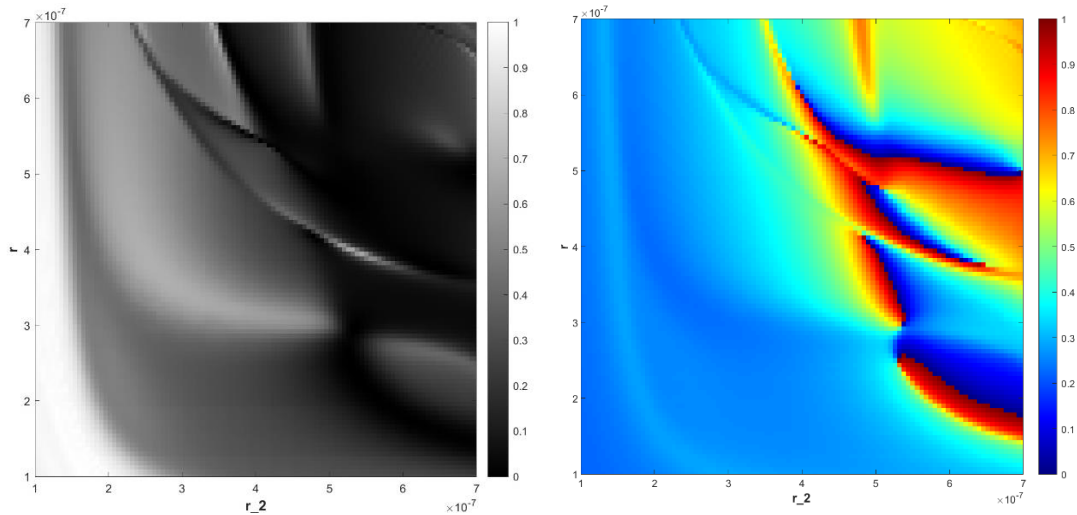


图 3-4 超表面单元结构扫描结果

图 3-4 显示的是扫描之后的透过率和相位结果图，图（a）表示的是归一化之后的透过率，图（b）表示的是出射光的相位除以 2π 后归一化结果，x 轴和 y 轴分别代表椭圆硅柱的长短轴直径。从图 3-6 中可以看出 x 偏振光经过椭圆硅柱之后的相位确实覆盖了 $0-2\pi$ ，即可以通过传输相位的方法来设计线偏光敏感的聚焦透镜。

3.2.2 对扫描结果的 BP 神经网络拟合

小组成员在扫描单元结构后，发现样本点数据为离散的数据点，考虑到 BP 神经网络可以看作一种非线性拟合，在处理离散数据点上具有良好的预测功能，于是小组构建了如下结构的 BP 神经网络：

2 inputs: R1, R2

1 output: phase shift/T

增加隐含层数量为 200 层，使用贝叶斯 BP-net，其中训练集 65%测试集 35%（图 3-5）。

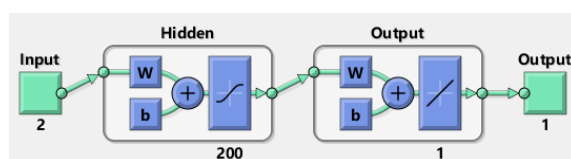


图 3-5 BP 神经网络结构图

训练后所得的网络参数如图 3-6:

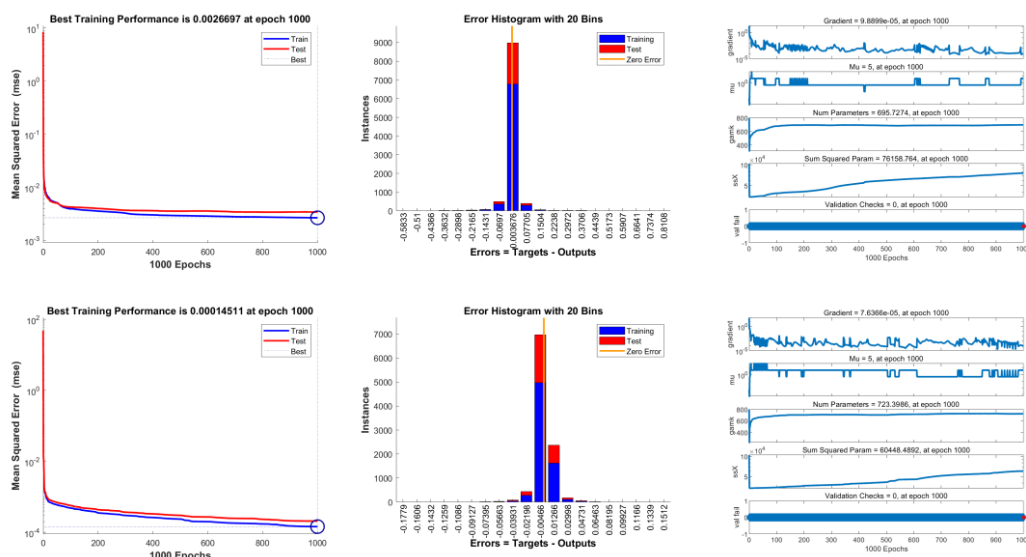


图 3-6 BP 神经网络训练参数(上)透射率、(下)相位变化

本文中 BP 神经网络只考虑超表面单元结构参数变化部分(200nm~1400nm)的样本点,因此只需做局部优化,无需考虑结构单元区间外的样本点,而 BP 神经网络在隐含层较多的情况下,局部拟合情况良好,结果如图 3-7 所示:

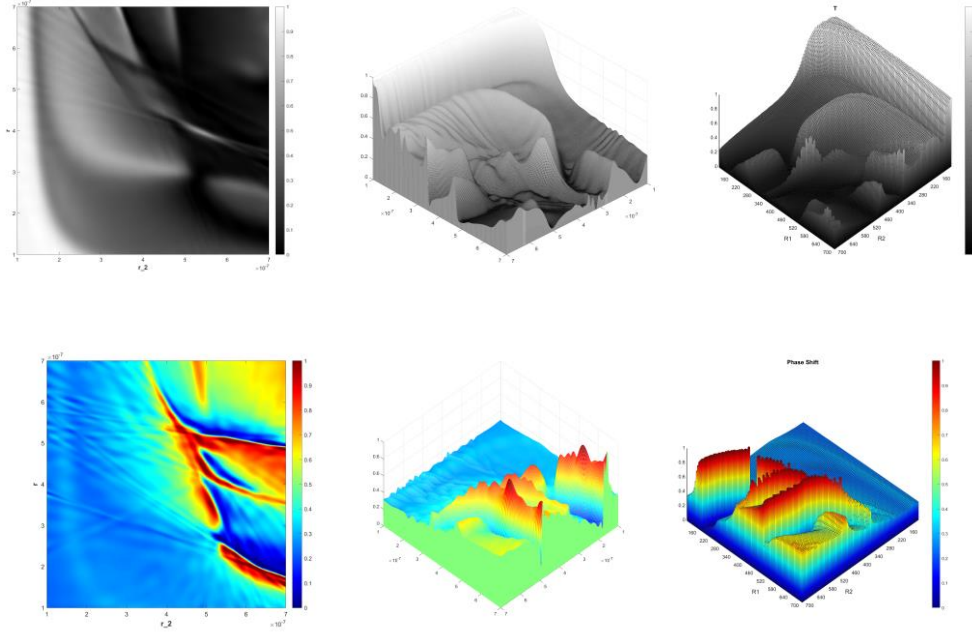


图 3-7 BP 神经网络所得结果、三维图与散点图比较(上)透射率(下)相位

由图中结果可知, BP 神经网络的预测结果与原文结果非常接近, 计算归一化后的相关系数分别为:

$$R_P = 0.96211$$

$$R_T = 0.99888$$

因此, 误差极小, 满足仿真需求。故小组至此完成了从离散数据点到连续数据点的转换, 也为后期的超透镜优化工作打下了基础。

3.3 超透镜阵列的设计与仿真

3.3.1 X、Y、A、B 偏光透镜设计

首先设计 x 偏光敏感的聚焦透镜。对于超透镜聚焦相位公式, 选取焦距 $f = 30 \mu m$, 并将波长 $\lambda = 1550 nm$ 代入, 通过 *MATLAB* 软件(美国 *Mathworks* 公司)选取每个位置满足

相位要求（图 3-8）的椭圆结构。

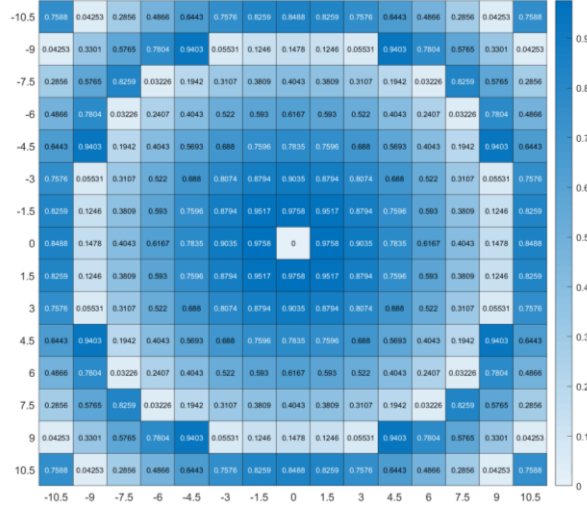


图 3-8 归一化相移图

值得注意的是，在找结构的时候，主要优先满足如下两个条件：①每个位置结构的透过率尽可能高且平均，这样设计出的超透镜才会性能好聚焦效率高；②每个位置结构的长短轴之差尽可能大，这样选出的硅柱椭圆化程度会高一些，对线偏光的偏振敏感度要好，才能设计出只针对特定线偏光聚焦的透镜。

且由仿真结果发现，在优先满足相位需求时，整体透过率偏小（绝大多数透过率小于 0.2），难以满足聚焦效率需求，故另外引入评价函数 T2，T2 为设计方案下所有透镜透过率的总和，归一化标准相移整体加减一常数不影响设计结果，故调整这一常数使 T2 最大，可得到整体透过率较大的设计结果。

本组设计的另一特色在于考虑到选取结构的影响因素较多，故引入评价函数 h1，以寻找整体最优解：

$$h1 = aT(i,j)^m + b[1 - D(i,j)]^n + c/h2^l$$

其中 a, b, c, l, m, n 均为常参数， T 为透过率， D 为长短轴长度之比， $h2$ 为归一化相移与归一化标准相移差之绝对值。通过调整常参数大小，可以控制三个影响因素所占比例大小，并通过遍历所有可能取值，得到使评价函数 $h1$ 最大的一组取值，即得到了最符合要求的透镜设计方案。

一共选取了 15×15 个椭圆硅柱结构，整体结构如图 3-7 所示，白色背景为玻璃基底，

蓝色椭圆圈为椭圆硅柱。由于单个硅柱之间的周期为 $1.5\ \mu\text{m}$ ，因此设计好的单个超表面透镜尺寸为 $22.5\ \mu\text{m} \times 22.5\ \mu\text{m}$ 的正方形透镜，具有较高的数值孔径为 $NA = 0.35$ 。

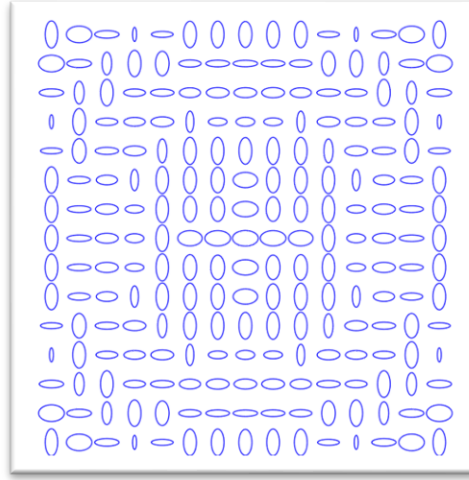


图 3-9 X 偏光敏感透镜阵列设计图

3.3.2 左旋圆偏光透镜设计

线偏光聚焦透镜设计好后，开始设计圆偏光聚焦透镜。以左旋圆偏光聚焦透镜为例，相位只需要调节椭圆硅柱的旋转角，使其为图 3-8 (pha) 中需求相位的一半即可，即只需要找到一种拥有高效圆偏转换率的结构即可。

整个透镜使用相同尺寸的结构可以保证每个位置的圆偏光转换效率相同，透镜的整体性能较优。接下来通过 MATLAB 寻找结构，需要考虑两个条件：①长短轴尺寸之差尽可能大，尽可能保证结构椭圆化；②使圆偏光转换率尽可能高，即 $(t_o - t_e)/2$ 的绝对值尽可能大。 t_o 和 t_e 分别是 x 偏振光和 y 偏振光入射时的传输系数，在这里 $t_o = A \cdot \exp(i\psi)$ ， A 和 ψ 分别是 x 偏振光入射时的振幅和相位， t_e 这里本来需要用到 y 偏振光入射时的振幅和相位，但为了简化，可以通过将 x 轴和 y 轴颠倒得到。

我们对椭圆的长短轴之间的差距进行了约束，在该条件下让我们圆偏振光转换率尽可能高，记录下此时的转换率和椭圆结构，改变约束条件，记录下多组数据。综合所有数据，我们最后得出了最优的尺寸结构。通过 MATLAB 找到最优结构尺寸之后，改变单元结构的旋转角，得到整体的左旋圆偏光聚焦透镜，如图 3-10(左)所示，右旋圆偏光同理，单元结构的尺寸不需要改变，只需将旋转角加上负号，变为 $-\theta$ 即可，如图 3-10(右)所示。

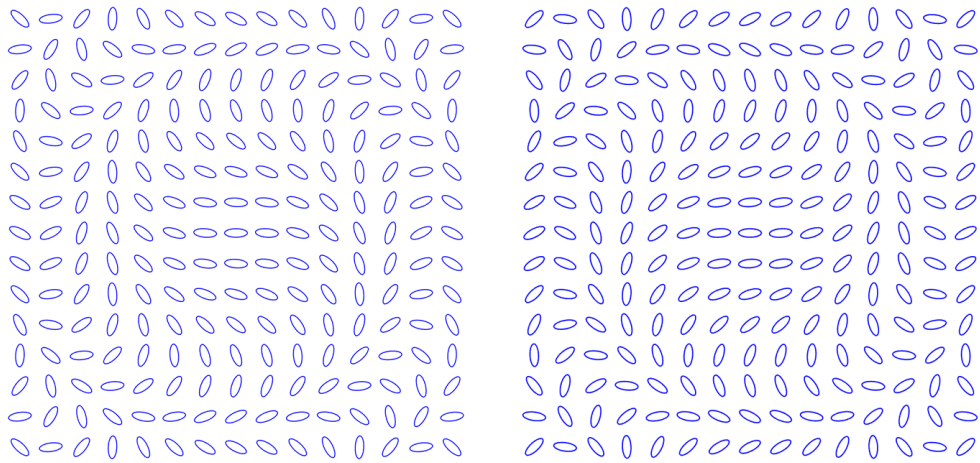


图 3-10 (左)左旋圆偏光敏感透镜阵列设计图 (右)右旋圆偏光敏感透镜阵列设计图

3.3.3 六个超透镜阵列的组合

分别设计好线偏敏感聚焦透镜和圆偏敏感聚焦透镜之后，将其按图 3-11 的方式排列成 3x2 的超透镜阵列。

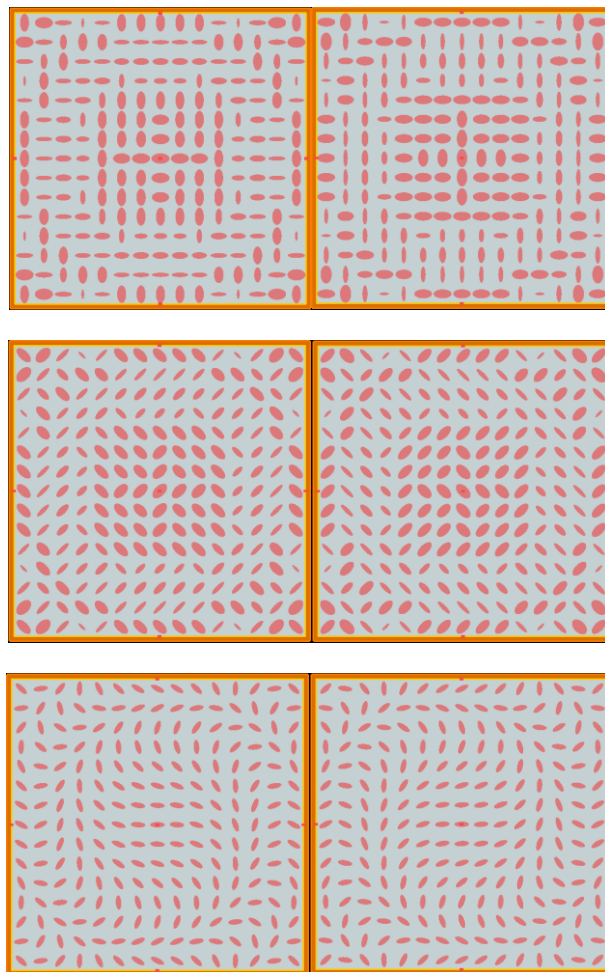


图 3-11 介质超表面透镜的整体结构设计图

超透镜阵列整体结构设计好后，分别使用六种基准偏振光（水平线偏光，竖直线偏光， $\pm 45^\circ$ 线偏光以及左右旋圆偏光）正入射到结构上。在透镜垂直方向聚焦效果最强的位置设置观察面，相应的光强分布如图 3-12 所示。

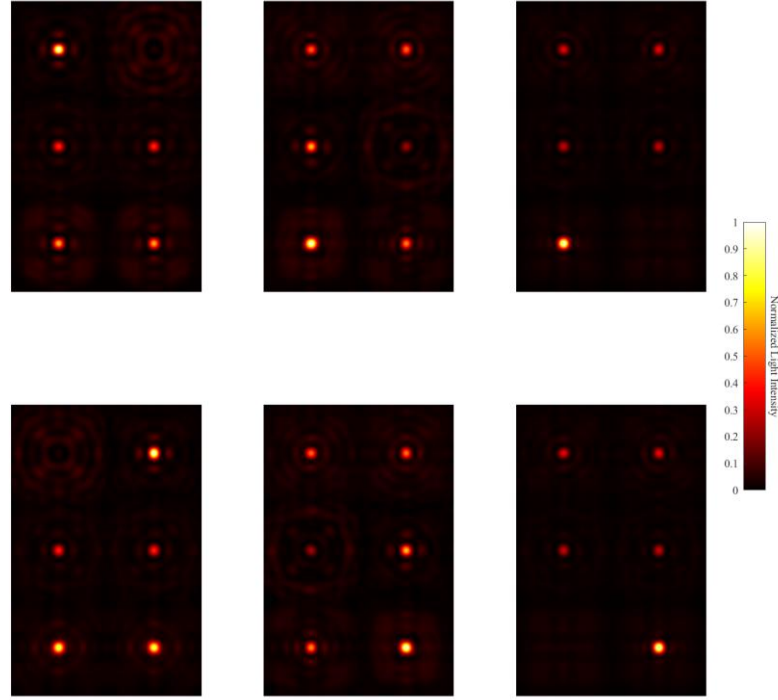


图 3-12 单个超透镜阵列上的聚焦光斑分布

从图中可以看出，当线偏光入射时，对应的线偏光敏感超透镜形成的聚焦光斑最强，与之相正交的偏振态敏感超透镜形成的聚焦光斑最弱，近乎没有，而其余的两个线偏敏感超透镜和两个圆偏敏感超透镜形成的聚焦光斑强度适中。当圆偏光入射时，对应的圆偏敏感聚焦透镜形成的聚焦光斑最强，与之正交的偏振态对应的超透镜形成的光斑最弱，四个线偏敏感超透镜形成的聚焦光斑强度为最强光斑强度的一半。

在获得了 6 种基准光入射时的聚焦光斑图之后，由 x 偏振光入射超透镜阵列与左旋圆偏振光入射超透镜阵列时的聚焦光斑分布图可分别测得仿真中线偏振透镜和圆偏振透镜的聚焦效率如图 3-13 所示，本文中聚焦效率均指的是相对聚焦效率，即光在通过样片之后在聚焦平面上形成的聚焦光斑光强与探测器探测到的子透镜对应面积上的总光强之比。对于图 3-13 左图中 x 偏光入射时，取 x 偏振敏感透镜上焦平面处总光强和作为分母，聚焦光斑的光强和作为分子，测得线偏振敏感透镜的聚焦效率为 33.65%。同理，对于图 3-13 右图，取左旋圆偏光偏振敏感透镜上聚焦平面处总光强作为分母，聚焦光斑的光强作为分

子，测得圆偏振敏感透镜的聚焦效率约为 37.73%。

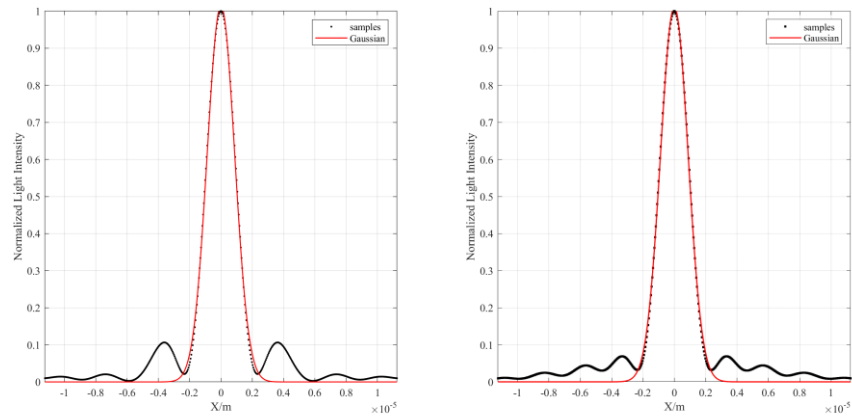
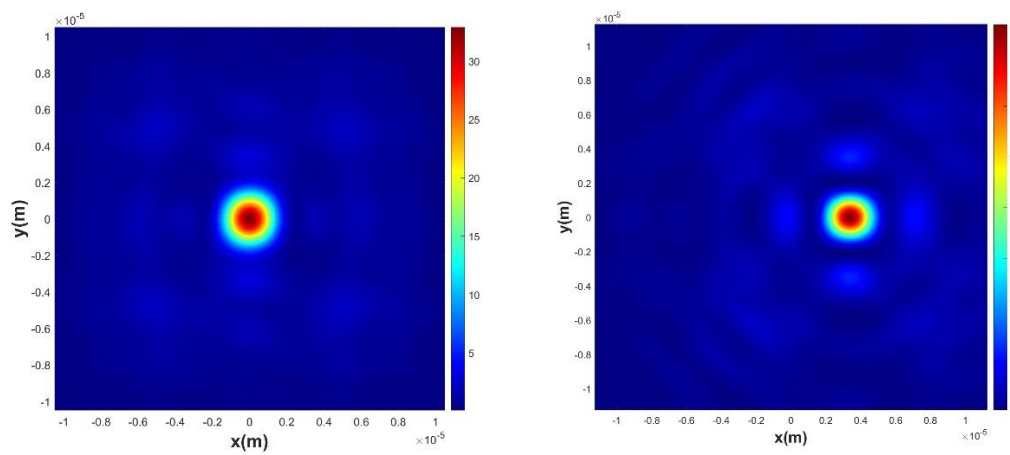


图 3-13 超透镜的聚焦光斑光强分布图，左为线偏敏感透镜，右为圆偏敏感透镜

3.3.4 不同入射角的平面波的相位梯度探测

验证超透镜是否能和微透镜一样进行波前探测。当超透镜用作波前探测时，一个阵列中的 6 个子透镜起到的作用是相同的，因此对单个透镜仿真即可。以 x 偏振敏感聚焦透镜为例，图 3-14 分别给出了 x 偏光正入射和以 4° 、 8° 以及 12° 倾斜入射时，在设计好的焦平面处的聚焦光斑图。



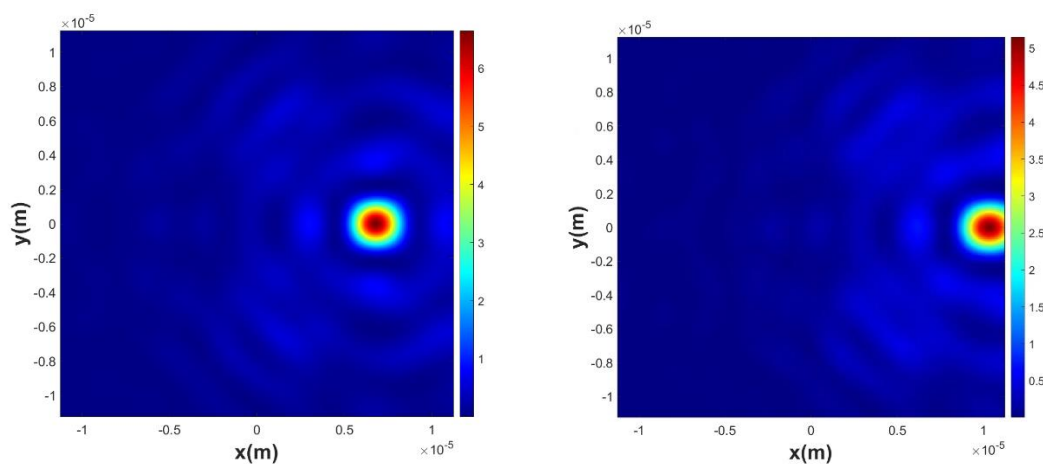


图 3-14 x 偏光正入射和以 4°、8°以及 12°倾斜入射时焦平面处的聚焦光斑图

从图中可以看出，当光斜入射时，聚焦光斑会发生一定的偏移。由于透镜焦距为 30mm，可以通过式（1）和式（2）：

$$k_x = \frac{\Delta x}{f} \dots\dots (1)$$

$$k_x = \tan \theta_x \dots\dots (2)$$

计算出理论上不同角度斜入射时对应的光斑偏移量。图 5 分别给出了光斑偏移量的理论值和仿真测量值，其中在入射角分别为 0°、4°、8°、12° 各进行一次仿真，光斑偏移量由 0°光入射时聚焦光斑的位置作为标准求得。

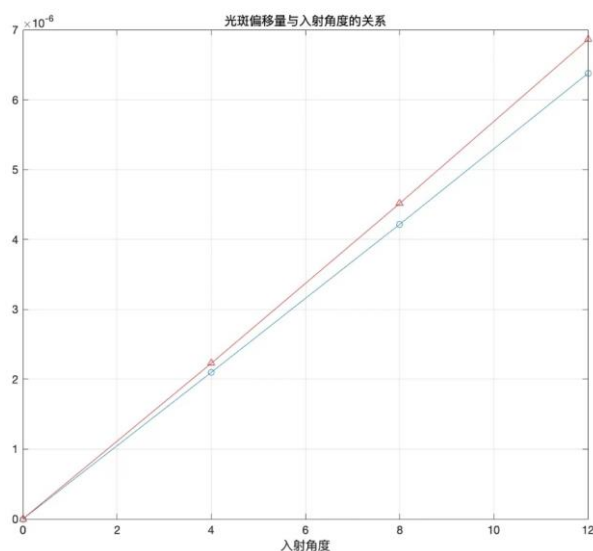


图 3-15 x 偏光倾斜入射时光斑偏移量与入射角度的关系

图 3-15 中当入射光为小角度时(入射角度小于 6°)仿真测量的光斑偏移量与通过理论计

算得到的值吻合得非常好，当入射光斜入射角度逐渐增大时，仿真与理论值开始出现差异。说明设计的超透镜在光小角度斜入射时，可以和微透镜一样探测到光斑偏移量，从而反推出入射光的波前信息，能够实现一种广义的哈特曼-夏克波前探测。而由于超透镜的聚焦设计本来是针对正入射光的，当光波斜入射角度过大时，超透镜会有像差出现，这在图 1、2、3、4 中也有所体现，因此误差会偏大，在后续的设计中可以从这方面进行优化。

3.3.5 重构矩阵的构建

接下来是基于 6 种基准偏振光入射时的结果来构建超表面透镜的重构矩阵。重构矩阵通过测量 6 种基准光入射时光强大小得到，即水平线偏光，垂直线偏光，45°线偏光，-45°线偏振光，左旋圆偏光以及右旋圆偏光。使用这六种偏振光分别入射，每一种偏振光都能测得 6 个光强，而每种偏振光也有一个已知的斯托克斯参数。这样可利用六种斯托克斯参数与测得的 36 个光强求解得到设计好的超透镜阵列的 4×6 的重构矩阵 M ，可以由下式计算得出：

$$M = S \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{yx} & I_{ax} & I_{bx} & I_{lx} & I_{rx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{ay} & I_{by} & I_{ly} & I_{ry} \\ I_{xa} & I_{ya} & I_{aa} & I_{ba} & I_{la} & I_{ra} \\ I_{xb} & I_{yb} & I_{ab} & I_{bb} & I_{lb} & I_{rb} \\ I_{xl} & I_{yl} & I_{al} & I_{bl} & I_{ll} & I_{rl} \\ I_{xr} & I_{yr} & I_{ar} & I_{br} & I_{lr} & I_{rr} \end{pmatrix}^{-1}$$

3.3.6 入射光斯托克斯参量的还原

接下来是对其他偏振态的线偏光和椭圆偏光进行还原，以验证超表面透镜的偏振态探测性能。

通过用 18 种线偏光和圆偏振光入射设计好的超表面透镜阵列，这 18 种入射光包括了 8 种线偏振光，两种圆振光和 8 种圆偏振光，可以通过在 FDTD 中更改光源设置参数得到，具体的偏振信息列在了表 3-1 中。每一种偏振光都能测得 6 种光强，在这 6 种光强与斯托克斯参数之间可以构建一个联系如下：

$$S = M \cdot I$$

其中 M 为设计好的超透镜阵列的 4×6 重构矩阵 M ，在 3.3.5 中求出。

表 3-1 理论与重构的 18 种偏振态的斯托克斯参数对比

标号	理论值 (S_0, S_1, S_2, S_3)	重构值 (S_0, S_1, S_2, S_3)	相对误差
a	(1.000, 1.000, 0.000, 0.000)	(1.000, 1.000, 0.000, 0.000)	0%
b	(1.000, 0.500, -0.866, 0.000)	(1.000, 0.508, -0.880, 0.000)	1.58%
c	(1.000, 0.000, -1.000, 0.000)	(1.000, 0.000, -1.000, 0.000)	0%
d	(1.000, -0.809, -0.588, 0.000)	(1.000, -0.772, -0.561, 0.000)	4.60%
e	(1.000, -1.000, 0.000, 0.000)	(1.000, -1.000, 0.000, 0.000)	0%
f	(1.000, -0.719, 0.695, 0.000)	(1.000, -0.692, 0.668, 0.000)	3.81%
g	(1.000, 0.000, 1.000, 0.000)	(1.000, 0.000, 1.000, 0.000)	0%
h	(1.000, 0.500, 0.866, 0.000)	(1.000, 0.504, 0.872, 0.000)	0.73%
i	(1.000, 0.000, 0.000, 1.000)	(1.000, 0.000, 0.000, 1.000)	0%
j	(1.000, 0.000, -0.707, 0.707)	(1.000, 0.000, -0.657, 0.731)	5.55%
k	(1.000, 0.000, -0.707, -0.707)	(1.000, 0.000, -0.668, -0.752)	5.94%
l	(1.000, 0.000, 0.000, -1.000)	(1.000, 0.000, 0.000, -1.000)	0%
m	(1.000, 0.000, 0.707, -0.707)	(1.000, 0.000, 0.675, -0.761)	6.28%
n	(1.000, 0.000, 0.707, 0.707)	(1.000, 0.000, 0.679, 0.735)	3.96%
o	(1.000, 0.707, 0.000, 0.707)	(1.000, 0.721, 0.000, 0.694)	1.91%
p	(1.000, 0.707, 0.000, -0.707)	(1.000, 0.740, 0.000, -0.678)	4.39%
q	(1.000, -0.707, 0.000, -0.707)	(1.000, -0.656, 0.000, -0.744)	6.30%
r	(1.000, -0.707, 0.000, 0.707)	(1.000, -0.648, 0.000, 0.742)	6.86%
平均相对误差			2.87%

斯托克斯参量的还原误差分析：我们对 18 种具有不同偏振态的光进行斯托克斯参量的还原所得到的平均相对误差是 2.87%，最大的误差达到 6.89%，且每组斯托克斯参量都至少有两个值与理论完全相符，还原的效果较好。我们认为如果使用优化后的透镜阵列（即 21×21 ）测量光的偏振信息会得到更加接近理论值的数据，这是我们改进的方向。

为了更直观地表示超透镜对不同偏振态的还原结果，将上面测量的 18 种具有不同振态的入射光经过重构矩阵还原后的偏振态和理论值标注在庞加莱球上，如图 3-16 所示。

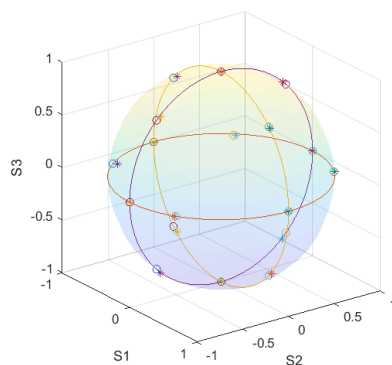


图 3-16 斯托克斯参量庞加莱球

为了更直观地表示超透镜对不同偏振态的还原结果，将上面测量的 18 种入射光经过重构矩阵还原的偏振态和理论值标注在庞加莱球上，理想情况下(即在无损传输时)有 $S_0 = \text{const}$ ，所以 S_1, S_2, S_3 所表示的是一个球面。 $S_0 = 1$ 的球就是庞加莱球。球壳上各点与光的全偏振态一一对应。如图 3-16 所示。

庞加莱球上的空心圆代表理论的斯托克斯参数，星号代表通过实验还原得到的斯托克斯参数，三种颜色则是分别代表了斯托克斯参数中的 S_1, S_2 和 S_3 分别为 0。从庞加莱球上可以很直观看出通过实验还原出来的偏振态与理论值吻合得好，而从表 3-1 中可以知道，18 种偏振态还原的平均误差为 2.87%，比之前结构对偏振态还原的误差 4.83% 要小一些。相关误差的产生主要还是归结于实验过程，包括不同偏振态的准确产生与测定，在这方面使用新的器件和方法应该可以有效地降低误差。但总体来说，优化过后的超表面透镜阵列在单个偏振态的测量上没有什么问题，能够达到以前的水准。

$$\text{error} = \frac{\sqrt{(s_1 - s'_1)^2 + (s_2 - s'_2)^2 + (s_3 - s'_3)^2}}{s_0}$$

4 模型的优化设计与仿真

4.1 单个优化结构单元的设计与仿真

4.1.1 仿真结构与结果

在单个超表面单元的仿真过程中，我们发现仿真结果图样与论文中并不完全一致，在老师指导与小组成员讨论后，我们决定改变参数重新仿真：

周期长度 $A_x = A_y = 1000 \text{ nm}$ 。衬底上方使用椭圆状硅柱作为结构，衬底材料选用 SiO_2 ，折射率为 1.450，硅柱的高度为 340 nm ，入射光源选择波长 $\lambda = 1550 \text{ nm}$ 的 x 偏振光从衬底中向 z 轴正方向入射，硅柱材料选用的 $\text{Si} - \text{Palik}$ 模型，在 1550 nm 波长下折射率为 3.478，吸收率为 0。 z 方向上，边界条件使用完美吸收 (PML) 的边界条件， x 和 y 方向上，则使用周期边界 (PBC) 条件来模拟结构阵列。结构旋转角 θ 固定为 0，改变椭圆硅柱的长短轴 D_x 和 D_y 进行扫描仿真， D_x 和 D_y 的范围为 100 nm 到 900 nm ，每隔 8 nm 的步长改变一次。优化后的仿真结果如下：

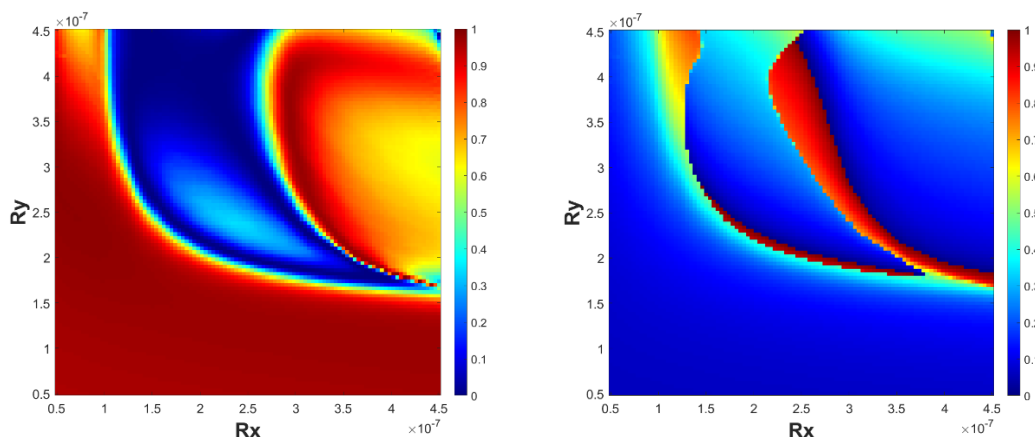


图 4-1 仿真结果图

图 4-1 显示的是扫描之后的透过率和相位结果图，图（a）表示的是归一化之后的透过率，图（b）表示的是出射光的相位除以 2π 后归一化结果， x 轴和 y 轴分别代表椭圆硅柱的长短轴直径。从图 4-1 中可以看出 x 偏振光经过椭圆硅柱之后的相位确实覆盖了 $0 - 2\pi$ ，即可以通过传输相位的方法来设计线偏光敏感的聚焦透镜。并且仿真结果与论文几乎一模一样。

4.1.2 BP 神经网络的建立

与本文第三章中提到的方法类似，我们在此处也进行了 BP 神经网络的拟合处理，得到了类似的结果如图 4-2。

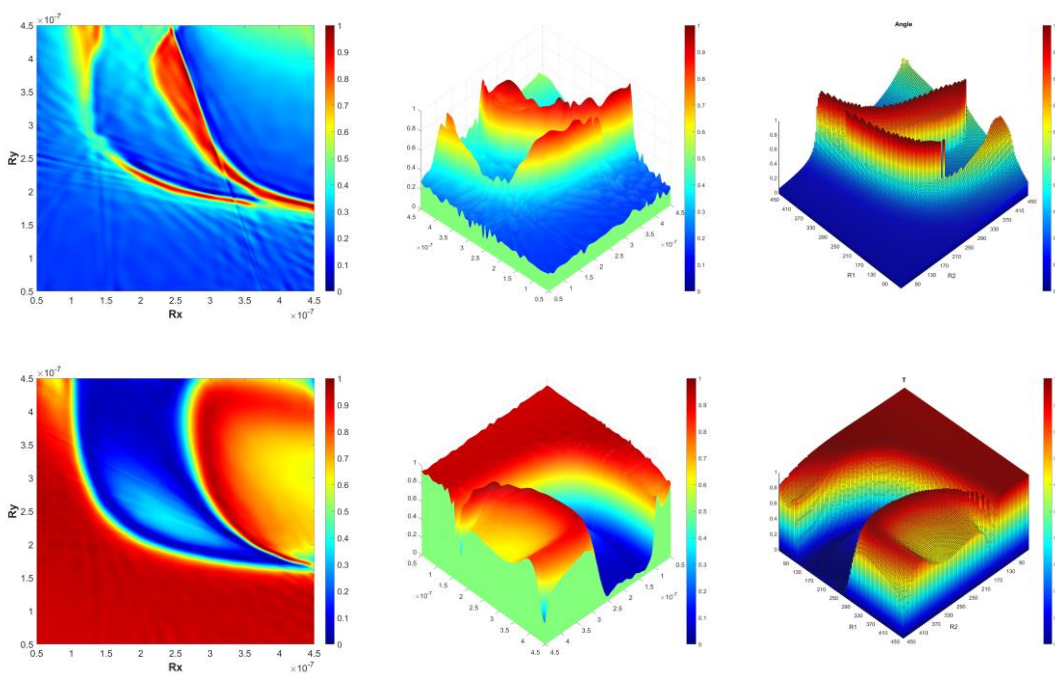


图 4-2 BP 神经网络拟合结果与离散值对比图

类似地，由图中结果可知，BP 神经网络的预测结果与原文结果非常接近，计算归一化后的相关系数分别为：

$$R_P = 0.96155$$

$$R_T = 0.99945$$

因此，误差极小，满足仿真需求。故小组至此完成了从离散数据点到连续数据点的转换，也为后期的超透镜优化工作打下了基础。

4.2 优化透镜阵列的设计与仿真

4.2.1 优化 X 偏光敏感透镜设计

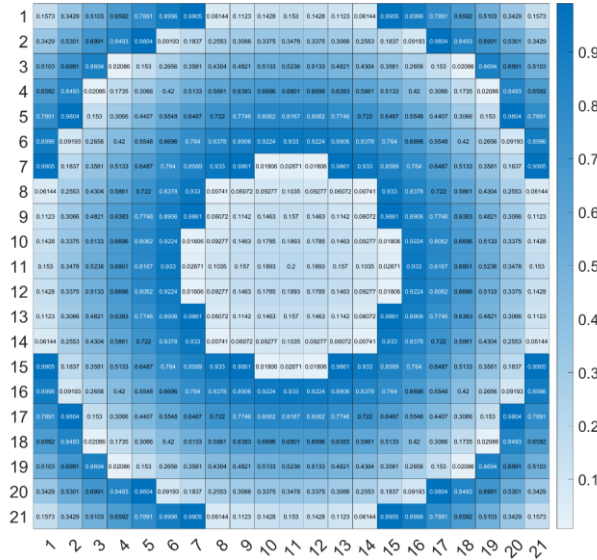


图 4-3 归一化后，新透镜所需的相位图

如图 4-3 所示，优化透镜设计原理与设计 X 偏光超透镜阵列（15×15）类似，但此次由仿真结果发现，在优先满足相位需求时，绝大多数透过率大于 0.7，很容易满足聚焦效率需求，故透过率影响可忽略，不再引入评价函数 $T2$ 。评价函数 $h1$ 变为：

$$h1 = b[1 - D(i, j)]^n + c/h2^l$$

其中 b, c, l, n 均为常参数， D 为长短轴长度之比， $h2$ 为归一化相移与归一化标准相移差之绝对值。通过调整常参数大小，可以控制两个影响因素所占比例大小，并通过遍历所有可能取值，得到使评价函数 $h1$ 最大的一组取值，即得到了最符合要求的透镜设计方案。

小组一共选取了 21×21 个椭圆硅柱结构，整体结构如图 3-7 所示，白色背景为玻璃基底，蓝色椭圆圈为椭圆硅柱。由于单个硅柱之间的周期为 $1\mu m$ ，因此设计好的单个超表面透镜尺寸为 $21\mu m \times 21\mu m$ 的正方形透镜，具有较高的数值孔径为 $NA = 0.33$ 。

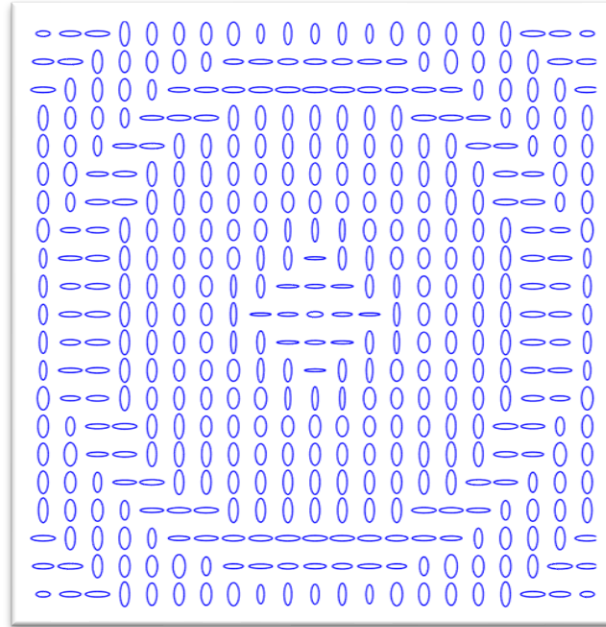


图 4-4 优化设计的 X 偏光敏感透镜示意图

由 x 偏光入射 x 偏光敏感透镜仿真结果可以看出，聚焦效率较低，我们认为主要原因在于透镜整体透过率很低，难以主要考虑相位因素。计算得聚焦效率为 32.65%。

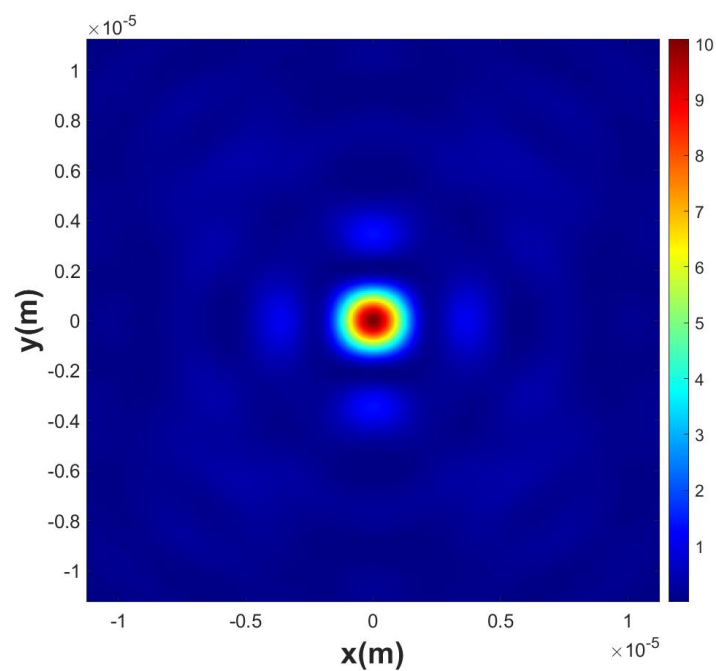


图 4-6 未优化的透镜聚焦效果图

由于时间原因，本组暂时没有完成所有超透镜阵列的仿真，但是由 x 偏光入射 x 偏光敏感透镜仿真结果可以看出，聚焦效率有了很大提升,计算得聚焦效率为 79.82%。

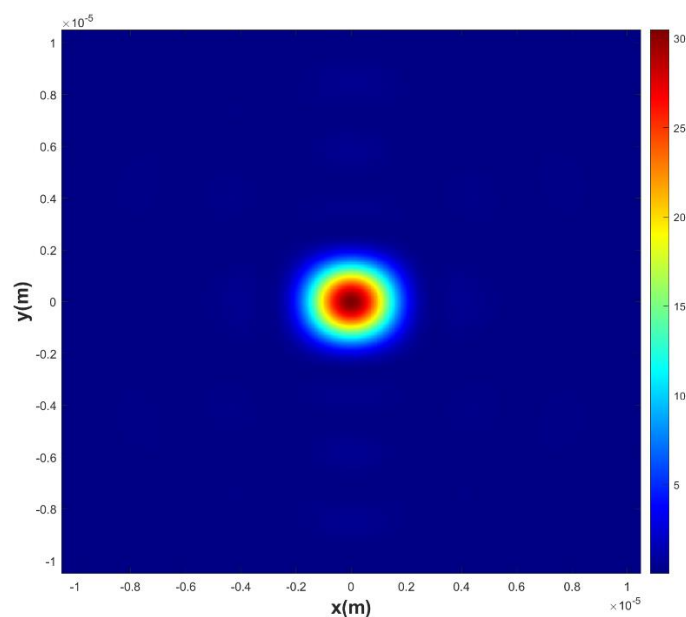


图 4-7 优化的透镜聚焦效果图

4.2.2 优化左旋圆偏光敏感透镜设计

方法与 3.3 中类似，我们同样是在综合考虑椭圆的长短轴之间的差距与圆偏振光转换率尽之后，得出了最优的尺寸结构。通过 MATLAB 找到最优结构尺寸之后，改变单元结构的旋转角，得到整体的左旋圆偏光聚焦透镜，如图 4-5(左)所示，右旋圆偏光同理，单元结构的尺寸不需要改变，只需将旋转角加上负号，变为 $-\theta$ 即可，如图 4-5(右)所示。

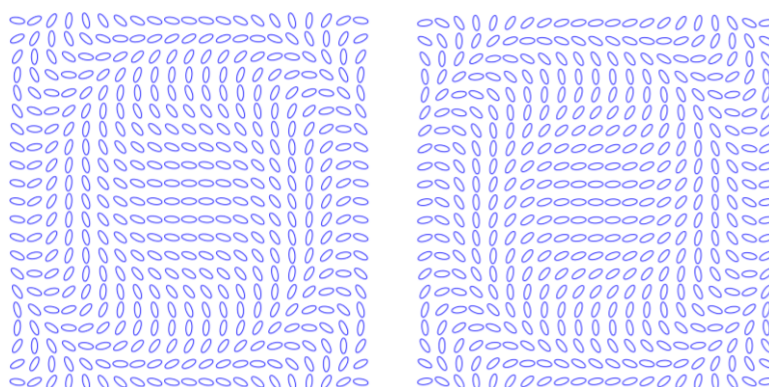


图 4-8 优化设计左旋右旋偏光敏感透镜示意图

5 拓展题

- 使用了波片和 Wollaston 棱镜，可以分裂任何两个正交的极化状态，并同时以高效率 and 微表将它们聚焦到不同点。这样的超表面可以直接集成在图像传感器上，以制造偏振相机。
- 具有完全控制光的相位和偏振能力的光学超表面可以在更小的体积上执行相同的任务，而无需更改任何光学组件。
- 它可以完全 Stokes 表征极化状态，并克服了基于极化滤波器的 DoFP-PCs 的 50% 理论效率极限和先前演示的 DoFP-PCs 的一个像素配准误差（由偏振滤波器的不同物理区域引起）。因为这一种基于介电超表面的 DoFP-PCs 的新原理和设计，不是靠偏振滤波，而是基于在三个不同的偏振基中分离和聚焦光来拥有控制极化和相位的能力。

6 个人心得体会

- 闫锦：

本次大作业我们小组非常团结，正所谓“运海抟扶，必借垂天之羽；乘流击汰，必伫飞云之楫”，我们小组的硕果累累与每个人的努力是分不开的。

在本次设计与仿真任务中，我基本上参与了所有的环节，从原理的推导（小组线上腾讯会议讨论），到 FDTD 仿真软件的学习（制作引导 word 供全组成员学习）；从单个超透镜单元的仿真与扫描，到整体超透镜结构的扫描；从聚焦光斑的高斯拟合，到整体透镜热力图成像；从 BP 神经网络的建立，到新单元结构模型优化等等，都有我的参与。

小组成员在本次设计中也各司其职，刘智杰同学主要担任单元结构扫描、可视化工作以及 X 偏光敏感透镜的设计与仿真，她提出的评价函数在透镜设计中起到了非常不错的效果；叶芷萱同学则深入挖掘 PB 相位调控，在设计左旋、右旋圆偏光透镜的过程中取得了正确的结果；陈赞宇同学在光斑数据处理、重构矩阵的建立中起到了至关重要的作用，大家都很棒！

在大作业进行的阶段，我不但学习了有关超表面光学的前沿知识，了解了斯托克斯参量、夏克-哈特曼波前探测的知识，还运用 matlab 结合 BP 神经网络的知识对数据进行了处理，也学习了代码、GUI 界面如何操作 FDTD 来进行光学仿真。更重要的是，我学会了如何和组员进行小组合作，学会了如何在日常学习的时间里见缝插针地完成科研任务，也终于将知识

从纸面上带到了生活中，切身地使用了工程软件来进行结构设计。

“丹山九仞，烟峰非数簣之功；紫极千门，云台俟万楹之力”，这次大作业对我来说是一个开始，虽然我们小组取得了不错的成果，但是我知道我还有很多可以学习的东西；在往后的学习中，我会更加深入地学习物理光学和应用光学，争取在超表面领域有更多的成果！

● **刘智杰：**

通过本次大作业，我们学习并复现了基于介质超透镜阵列的光学多参量探测的论文，第一次真正接触到科研的前沿领域，对科研流程和方法有了一个大致的体验和认识。在复现论文的过程中，我学习了光学超表面原理，加深了对费马定理等物理光学知识的理解，并对哈特曼-夏克波前传感相关理论进行学习，学会了利用超透镜阵列对波前相位梯度进行探测的方法，我还学习了 FDTD 仿真软件的使用，为将来 B 方向的学习打下基础，并且在实践中提高了 MATLAB 编程能力，受益良多。

在本次大作业中，我们每个人都进行了 MATLAB 编程和 FDTD 仿真，我主要负责 X 偏光敏感透镜的设计、各类可视化工作和 FDTD 仿真①1550nm 波长下，不同偏振光经过超透镜阵列后的聚焦光斑仿真结果，②斯托克斯参量。在此过程中，组长闫锦同学把握研究的大方向，制作了 FDTD 仿真的详细教程，指出我们在重构矩阵的建立中的问题，安排我们其他组员每人汇报一次，对我帮助良多。叶芷萱同学主要负责左旋圆偏光敏感透镜的设计和其他理论知识的总结，陈赞宇同学主要负责重构矩阵的建立、斯托克斯参量的还原和相位梯度的计算。

总的来说，我们这次大作业完成得很成功，这与每个组员的付出与努力是分不开的。除此之外还要感谢杨振宇老师和助教学长们的指导和答疑解惑。很遗憾我们没有来得及完成 21×21 超透镜组和基于 BP 神经网络的超透镜组的仿真，但相信以后会有机会进一步学习和研究！

● **叶芷萱：**

这次物理光学大作业对我来说是一次全新的体验，我第一次从无到有在理论上初步复现了一篇论文，这可以说是让我触摸到了科研这个领域的门槛，对于我在这方面的助益也是显而易见的。

在这近三个月的不断学习中，我顺利掌握了仿真软件的基本使用以及对超表面的初步了

解，在与组员的通力合作中克服一个又一个难题，解决一个又一个疑惑，深刻感受到了小组合作的优越之处。另外，每周一次的组会更是一定程度上治好了我的拖延症，看着大作业项目每周都有新进展，一点一点的将它打磨成形，更是让我成就感颇深，对这个领域的兴趣也愈加浓厚了。

本次大作业中，我主要负责的是左右旋圆偏光透镜的设计工作与部分 matlab 仿真。在这过程中，组长闫锦认真负责，承担起了组长的责任，细致地为我们分配工作，同时督促我们。陈赞宇同学更是在我负责的部分给出了极大的帮助，有很多问题我都是在与他的讨论之中一点一点得到解决的。一开始我们设计的线偏光敏感透镜总是不理想，是刘智杰同学提出了用分配函数来解决问题，最后成功设计出了线偏光敏感透镜，这给予了我很大的启发。

总而言之，这次的物光大作业是一次极佳的锻炼，十分感谢学校在大三这一年给了我们这样一个机会去提升自己，也十分感谢杨振宇老师每周负责的为我们答疑解惑。

● 陈赞宇：

通过本次大作业，我了解并学习了基于介质超透镜阵列的光学多参量探测研究方法，主要手段是通过改变结构设计从而控制人造超表面对入射光波前进行任意相位调制。我们研究复现的是利用介质超表面构建一个超透镜阵列，并基于该设计实现了一种高效、快速的光学多参量(偏振态、相位)检测方法，该方法可实时获取参量分布信息，偏振态和相位同时探测，这在斯托克斯参量以及哈特曼-夏克波前等可以体现。我们设计了六种不同光(x 偏光、y 偏光、+45° 偏光、-45° 偏光、左旋圆偏光、右旋圆偏光)敏感的透镜阵列并放在一起组合成了超透镜表面，然后建立了重构矩阵，并对挑选出的 18 组光进行了斯托克斯参量的还原，结果可视化在庞加莱球上。

本次大作业中，我主要负责建立重构矩阵、斯托克斯参量的还原、相位梯度的计算（主要是在 matlab 上实现的），并协助叶芷萱同学的部分 matlab 仿真工作，同时我也学习了 FDTD 的基本使用方法并完成了多个仿真（我们进一步将 FDTD 的仿真结果展现在了 matlab 中）。

在本次大作业完成过程中，我特别感谢组长闫锦同学每次都细致有条理的安排好工作任务，耐心解答我们的问题，坚持每周汇报使用 ppt 督促我们认真完成任务。叶芷萱同学承担了基本全部的 matlab 仿真工作，非常辛苦，还有论文的撰写工作也出了很大的力，我们也是一起负责 matlab 工作这部分的，所以平常的交流会更多，她给予了我很多学习过程中的

新思考新发现，我收获颇丰。刘智杰同学设计并建立了 x 偏光等六个超透镜阵列，并且协助我在最后斯托克斯参量还原对比构建了庞加莱球，也给予了我很大的帮助。通过本次大作业，我感受到了小组团结互助的力量，也真真切切的学习到了新的知识，是很有收获的一次大作业！

参考文献

- [1] Edward Collett. Field Guide to Polarization. Society of Photo Optical. 2005
- [2] L.N.Thibos. Principles of Hartmann-Shack aberrometry. Journal of Refractive
- [3] Zhenyu Yang, Zhaokun Wang, Yuxi Wang, et al. Generalized Hartmann-Shack array of dielectric metalens sub-arrays for polarimetric beam profiling. Nature
- [4] 汪肇坤, 杨振宇, 陶欢等. 复合结构螺旋超材料对光波前的高效调控. 物理学报, 2016, 65(21): 217802
- [5] Yuxi Wang, Zhaokun Wang, Xing Feng, et al. Dielectric metalens-based Hartmann-Shack array for high-efficiency optical multi-parameter detection system. Photonics Research, 2020, 8(4): 482-489

附录：代码部分(核心代码，略去了不重要的部分)

```
Circle_design_15.m
clear all,clc;
x=[-10.5:1.5:10.5];
y=[-10.5:1.5:10.5];

%% 计算每一点的相移

% $\lambda=1550\text{nm}=1.55\mu\text{m}$ ,  $f=30\mu\text{m}$ 
for k=1:15
    for j=1:15
        a=x(1,k)^(2)+y(1,j)^(2)+30*30;
        b=sqrt(a)-30;
        Pha(k,j)=-2*pi/1.55*b;
        if -2*pi<Pha(k,j)&Pha(k,j)<0
            Pha(k,j)=Pha(k,j)+2*pi;
        else if Pha(k,j)<-4*pi
            Pha(k,j)=Pha(k,j)+6*pi;
        else if Pha(k,j)==0
            Pha(k,j)=0;
        else
            Pha(k,j)=Pha(k,j)+4*pi;
        end
    end
    end
    Pha(k,j)=Pha(k,j)/2/pi;
    p(k,j)=Pha(k,j)*pi;
end
end

R1=load('R1.txt'); %%%长轴
R2=load('R2.txt'); %%%短轴
T=load('E_2.txt');
A=load('angle.txt');
a1=min(min(A));
A=A-a1;
b1=max(max(A));
A=A./b1;
for x=1:101
    for y=1:101
        if T(x,y)>1
            A(x,y)=0;
            T(x,y)=0;
        end
    end
end
```

```

    end
end
end

for x=1:101
for y=1:101
    m(x,y)=abs(x-y);
    if m(x,y)<50
        A(x,y)=0;
        T(x,y)=0;
    end
end
end
end

for k=1:15
    for j=1:15
        for x=1:101
            for y=1:101
                t0(x,y)=T(x,y)*exp(i*A(x,y));
                x1=y;
                y1=x;
                te(x,y)=T(x1,y1)*exp(i*A(x1,y1));
                M(x,y)=(t0(x,y)-te(x,y))/2;
                M1(x,y)=abs(M(x,y));

                end
            end
            M2(k,j)=max(max(M1));
            for x=1:101
                for y=1:101
                    if M1(x,y)==M2
                        a=R1(x);
                        b=R2(y);

                    end
                end
            end
            Rx(k,j)=a;
            Ry(k,j)=b;

        end
    end
end

save Rx.1.1.txt -ascii Rx
save Ry.1.1.txt -ascii Ry
save p.txt -ascii p
%% 输入数据
A=load('Rx.1.1.txt');
```

```

B=load('Ry.1.1.txt');
for k=1:15
    for j=1:15
        a=A(k,j);
        b=B(k,j);
        lamda=-Pha(k,j)*pi;
        m=15*0.000001*(k-0.5);
        n=15*0.000001*(j-0.5);
        theta=0:pi/20:2*pi;
        x=a*cos(theta);
        y=b*sin(theta);
        x1=x*cos(lamda)+y*sin(lamda)+m;
        y1=-x*sin(lamda)+y*cos(lamda)+n;
        plot(x1,y1,'b','LineWidth',1);
        hold on
    end
end
end

```

```

Circle_design_15.m
clear all,clc;
x=[-10.5:1:10.5];
y=[-10.5:1:10.5];

P1=load('phase_shift.mat');
T1=load('T_new.mat');
A1=load('angle_new.mat');
A=A1.C;
T=T1.C;
Pha=P1.Pha;
R1=[50e-9:4e-9:450e-9];
R2=R1;
a1=min(min(A));
A=A-a1;
b1=max(max(A));
A=A./b1;
p=Pha*pi;
for x=1:101
for y=1:101
    if T(x,y)>1
        A(x,y)=0;
        T(x,y)=0;
    end
end
end

for x=1:101
for y=1:101
    m(x,y)=x/y;
    if 1/2<m(x,y)&m(x,y)<2
        A(x,y)=0;
        T(x,y)=0;
    end
end

end
end

for k=1:21
    for j=1:21
        for x=1:101
            for y=1:101
                t0(x,y)=T(x,y)*exp(i*A(x,y));
                x1=y;
                y1=x;
                te(x,y)=T(x1,y1)*exp(i*A(x1,y1));
                M(x,y)=(t0(x,y)-te(x,y))/2;
            end
        end
    end
end

```

```

        M1(x,y)=abs(M(x,y));

    end
end
for x=1:101
    for y=1:101
        if M1(x,y)<0.48
            M1(x,y)=0;
        end
    end
end

    M2(k,j)=max(max(M1));
for x=1:101
    for y=1:101
        if M1(x,y)==M2
            a=R1(x);
            b=R2(y);
        end
    end
end
Rx(k,j)=a;
Ry(k,j)=b;

end
end

save Rx.1.1.txt -ascii Rx
save Ry.1.1.txt -ascii Ry
save p.txt -ascii p
% 输入数据
A=load('Rx.1.1.txt');
B=load('Ry.1.1.txt');
for k=1:21
    for j=1:21
        a=A(k,j);
        b=B(k,j);
        lamda=-Pha(k,j)*pi;
        m=10*0.0000001*(k-0.5);
        n=10*0.0000001*(j-0.5);
        theta=0:pi/20:2*pi;
        x=a*cos(theta);
        y=b*sin(theta);
        x1=x*cos(lamda)+y*sin(lamda)+m;
        y1=-x*sin(lamda)+y*cos(lamda)+n;
        plot(x1,y1,'b','LineWidth',1);
    end
end

```

```
        xlim([0,2.1e-5]);
ylim([0,2.1e-5]);
ax=gca;
ax.XAxis.Visible='off';
ax.YAxis.Visible='off';
    hold on
end
end
```

```

stokes.m
clear all,clc;
x3=load('pos_numberb.mat');
x4=load('neg_numberb.mat');
x5=load('b_1_z.txt');
x6=load('rr_numberb.mat');
x1=load('x.mat');
x2=load('y_numberb.mat');

x1=x1.lum.z;
x2=x2.lum.z;
x3=x3.lum.z;
x4=x4.lum.z;
% x5=x5.lum.z;
x6=x6.lum.z;
I=[0;0;0;0;0;0];

for i=1:506
    for j=1:506
        I(1)=I(1)+x1(i,j);
        I(2)=I(2)+x2(i,j);
        I(3)=I(3)+x3(i,j);
        I(4)=I(4)+x4(i,j);
        I(5)=I(5)+x5(i,j);
        I(6)=I(6)+x6(i,j);
    end
end

M=load('M.1.txt');
N=I;
S=[1 0.5 -0.866 0];
S0=M*N;
i2=max(max(S0));
S0=S0./i2;

a=(S(2)-S0(2))^2+(S(4)-S0(4))^2+(S(3)-S0(3))^2;
error=sqrt(a)/S(1);

```



```

M_calculation.m
clear all,clc;
x3=load('x_a.mat');
x4=load('x_b.mat');
x5=load('x_l.mat');
x6=load('x_r.mat');
x1=load('x_x 的副本.mat');
x2=load('x_y.mat');
r3=load('r_a.mat');
r4=load('r_b.mat');
r5=load('r_l.mat');
r6=load('R_R.txt');
r1=load('R_X.txt');
r2=load('r_y.mat');
a3=load('a_a.txt');
a4=load('a_b.mat');
a5=load('a_L.txt');
a6=load('a_r.mat');
a1=load('a_x.txt');
a2=load('a_y.txt');
b3=load('b_a.txt');
b4=load('b_b.txt');
b5=load('b_l.mat');
b6=load('b_r.mat');
b1=load('b_x.txt');
b2=load('b_y.txt');
y3=load('Y_a.mat');
y4=load('Y_b.mat');
y5=load('Y_L.txt');
y6=load('Y_R.txt');
y1=load('Y_X.txt');
y2=load('Y_Y.txt');
l3=load('L_a.mat');
l4=load('L_b.mat');
l5=load('L_L.txt');
l6=load('L_R.mat');
l1=load('L_X.txt');
l2=load('L_y.mat');

x1=x1.lum.z;
x2=x2.lum.z;
x3=x3.lum.z;
x4=x4.lum.z;
x5=x5.lum.z;
x6=x6.lum.z;
% y1=y1.lum.z;
% y2=y2.lum.z;

```

```

y3=y3.lum.z;
y4=y4.lum.z;
% y5=y5.lum.z;
% y6=y6.lum.z;
% l1=l1.lum.z;
l2=l2.lum.z;
l3=l3.lum.z;
l4=l4.lum.z;
% l5=l5.lum.z;
l6=l6.lum.z;
% r1=r1.lum.z;
r2=r2.lum.z;
r3=r3.lum.z;
r4=r4.lum.z;
r5=r5.lum.z;
% r6=r6.lum.z;
% a1=a1.lum.z;
% a2=a2.lum.z;
% a3=a3.lum.z;
a4=a4.lum.z;
% a5=a5.lum.z;
a6=a6.lum.z;
% b1=b1.lum.z;
% b2=b2.lum.z;
% b3=b3.lum.z;
% b4=b4.lum.z;
b5=b5.lum.z;
b6=b6.lum.z;

I=[0 0 0 0 0 0 ;0 0 0 0 0 0 ;0 0 0 0 0 0 ;0 0 0 0 0 0 ;0 0 0 0 0 0 ;0 0 0 0 0 0 ];
S=[1 1 1 1 1 1 ;1 -1 0 0 0 0 ; 0 0 1 -1 0 0;0 0 0 0 -1 1];

for i=200:300
    for j=200:300
        I(1,1)=I(1,1)+x1(i,j);
        I(1,2)=I(1,2)+x2(i,j);
        I(1,3)=I(1,3)+x3(i,j);
        I(1,4)=I(1,4)+x4(i,j);
        I(1,5)=I(1,5)+x5(i,j);
        I(1,6)=I(1,6)+x6(i,j);

        I(2,1)=I(2,1)+y1(i,j);
        I(2,2)=I(2,2)+y2(i,j);
        I(2,3)=I(2,3)+y3(i,j);
        I(2,4)=I(2,4)+y4(i,j);
        I(2,5)=I(2,5)+y5(i,j);
    end
end

```

```

        I(2,6)=I(2,6)+y6(i,j);

        I(3,1)=I(3,1)+a1(i,j);
        I(3,2)=I(3,2)+a2(i,j);
        I(3,3)=I(3,3)+a3(i,j);
        I(3,4)=I(3,4)+a4(i,j);
        I(3,5)=I(3,5)+a5(i,j);
        I(3,6)=I(3,6)+a6(i,j);

        I(4,1)=I(4,1)+b1(i,j);
        I(4,2)=I(4,2)+b2(i,j);
        I(4,3)=I(4,3)+b3(i,j);
        I(4,4)=I(4,4)+b4(i,j);
        I(4,5)=I(4,5)+b5(i,j);
        I(4,6)=I(4,6)+b6(i,j);

        I(5,1)=I(5,1)+l1(i,j);
        I(5,2)=I(5,2)+l2(i,j);
        I(5,3)=I(5,3)+l3(i,j);
        I(5,4)=I(5,4)+l4(i,j);
        I(5,5)=I(5,5)+l5(i,j);
        I(5,6)=I(5,6)+l6(i,j);

        I(6,1)=I(6,1)+r1(i,j);
        I(6,2)=I(6,2)+r2(i,j);
        I(6,3)=I(6,3)+r3(i,j);
        I(6,4)=I(6,4)+r4(i,j);
        I(6,5)=I(6,5)+r5(i,j);
        I(6,6)=I(6,6)+r6(i,j);
    end
end

I1=inv(I);
M=S*(I1);
save M.1.txt -ascii M

M=load('M.1.txt');
N=I(:,[1]);
S=[1 1 0 0];
S0=M*N;
i2=max(max(S0));
S0=S0./i2;

a=(S(2)-S0(2))^(2)+(S(4)-S0(4))^(2)+(S(3)-S0(3))^(2);
error=sqrt(a)/S(1);

```



```

obliged_incident.m
clear all
X0=load("x_x.mat");
X1=load("x_4.mat");
X2=load("x_8.mat");
X3=load("x_12injection.mat");
A0=X0.lum.z;
A1=X1.lum.z;
A2=X2.lum.z;
A3=X3.lum.z;
X=X1.lum.x;
Y=X1.lum.y;
A01=max(max(A0));
A11=max(max(A1));
A21=max(max(A2));
A31=max(max(A3));
[x0, y0]=find(A0==A01);
[x1, y1]=find(A1==A11);
[x2, y2]=find(A2==A21);
[x3, y3]=find(A3==A31);
x0=X(x0);
x1=X(x1);
x2=X(x2);
x3=X(x3);
y0=Y(y0);
y1=Y(y1);
y2=Y(y2);
y3=Y(y3);

x0=x0/1.5;
x1=x1/1.5;
x2=x2/1.5;
x3=x3/1.5;
y0=y0/1.5;
y1=y1/1.5;
y2=y2/1.5;
y3=y3/1.5;

x=[x0,x1,x2,x3];
y=[y0,y1,y2,y3];

for i=1:4
    dd_x(i)=x(i)-x0;
end
angle=[0,4,8,12];

```

```
d_x1=0;
d_x2=tan(pi*4/180)*30*10^-6;
d_x3=tan(pi*8/180)*30*10^-6;
d_x4=tan(pi*12/180)*30*10^-6;
s1=[d_x1 d_x2 d_x3 d_x4];
s2=dd_x;
figure
plot(angle,s1,'o-');
hold on
plot(angle,s2,'r^');
grid on

xlabel('入射角度');

title('光斑偏移量与入射角度的关系');
```

```

BP net.m
%% 提取数据
% 载入数据
clear all;clc;
A=load('angle.txt');
T=load('E_2.txt');
R1=load('R.txt');
R2=load('R.txt');

%% 数据归一化处理
% 相位归一化
a1=min(min(A));
A=A-a1;
b1=max(max(A));
A=A./b1;
% 透射率归一化
a2=min(min(T));
T=T-a2;
b2=max(max(T));
T=T./b2;

%% 形成一整个列向量以便构建神经网络
% 将 A 变成一整列
B=A';
A=B(:);
% 将 T 变成一整列
B=T';
T=B(:);
%寻找输入变量 X（两列）
for i=1:1:101
    for j=1:1:101
        x=(i-1)*101+j;
        X(x,1)=R1(i);
        X(x,2)=R2(j);
    end
end

%% 利用形成的神经网络画图
%产生 601*601 的矩阵
r1=[100:1:700];
r1=r1*10^(-9);
r2=r1;
for i=1:1:601
    for j=1:1:601
        x=(i-1)*601+j;
        r(x,1)=r1(i);
        r(x,2)=r2(j);
    end
end

```

```

    end
end
angle=myNeuralNetworkFunction(r);
for i=1:1:601
    for j=1:1:601
        x=(i-1)*601+j;
        Result(i,j)=angle(x);
    end
end
end
%作曲线图
R=Result;
q1=min(min(R));
R=R-q1;
p1=max(max(R));
R=R./p1;
h = meshz (r1,r2,R);

%=====测试=====
% R=R-R(601,601);
% for i1=1:601
%     for j1=1:601
%         if (R(i1,j1)<0)
%             R(i1,j1)=R(i1,j1)+1;
%         end
%     end
% end
% 作热力图
colormap jet ;
imagesc(r1, r2, real(transpose(R)));
set(get(gca, 'XLabel'), 'String', 'r\_{2}')
set(get(gca, 'XLabel'), 'FontSize', 12)
set(get(gca, 'XLabel'), 'FontWeight', 'bold')
set(get(gca, 'YLabel'), 'String', 'r')
set(get(gca, 'YLabel'), 'FontSize', 12)
set(get(gca, 'YLabel'), 'FontWeight', 'bold')
set(gca, 'XLim', [1e-07 7e-07])
set(gca, 'YLim', [1e-07 7e-07])
set(get(gca, 'Title'), 'String', '')
set(get(gca, 'Title'), 'FontSize', 14)
set(get(gca, 'Title'), 'FontWeight', 'bold')
colorbar;
caxis([0,1]);
set(gca, 'YDir','normal');

function [y1] = myNeuralNetworkFunction(x1)
%MYNEURALNETWORKFUNCTION neural network simulation function.

```



```
% [y1] = myNeuralNetworkFunction(x1) takes these arguments:
%   x = Qx2 matrix, input #1
% and returns:
%   y = Qx1 matrix, output #1
% where Q is the number of samples.

%#ok<*RPMT0>

% ===== NEURAL NETWORK CONSTANTS =====

% Input 1
x1_step1.xoffset = [1e-07;1e-07];
x1_step1.gain = [3333333.33333333;3333333.33333333];
x1_step1.ymin = -1;

% Layer 1
b1 = [-
4.5546964669069609499;5.4155582879939281327;7.8408733267450818616;8.2333602422146281441;-
5.8247925803784319498;5.6546320763415272026;-
4.5520996428508775367;6.8982897080250138444;10.737465194872296337;2.2094515293063698991;2.
5298778813018985012;8.1769034688846389258;-9.9566510702753046047;-
5.2268706099748785121;6.5672539192504233441;6.2767475278818478657;-
6.8014099264546894474;7.1746744805287736568;-7.0278553245948378603;-
9.0737096846856317711;6.7550909221846033859;9.76598974648831053;-
6.0846761953950618818;7.344797796445731386;8.888371120378376844;10.968172964438403838;5.53
15987323201660786;-4.4576671430023111498;-6.8718990232644987515;-7.5806560715384785354;-
5.7113292825343675574;7.3996966526595873148;-
10.068905159834830698;9.076191647446195887;18.237149272452594317;5.6264451864644486889;-
7.6417832335363105045;-5.0932630715815019329;-15.865444958956802068;-
5.6738577253567221703;-8.8496510058233486262;8.8516308682861168933;-
7.8277711516522927582;4.870452867468711311;-
4.850187867117513818;6.7064689290139449795;14.230768301778118357;-
7.4223095105676213379;5.095837103869668816;7.7546000809552291244;-23.42350571336992715;-
12.945637552691458438;6.8055484562379522373;14.048391646648608955;8.3340021122028620226;-
3.7627296173880639962;-9.4806204850992248367;-8.9249244197315675819;-7.04268866483843059;-
4.9859030291678099189;3.6178449156850978063;-4.1634249531691418511;3.463882782234457558;-
4.3623216685126928738;8.0629788066685836867;5.6522640148991634135;-2.533565573408448568;-
7.5129491448076732851;3.4962741435877924268;-2.7917749262577613578;9.6133632132912278934;-
4.7784439924353820928;-7.7764041903279172985;1.8642004962177005645;1.8435252949734055594;-
1.716848953410690326;-7.5846891184996358959;-
0.86908814682059054579;2.0657464175869431067;5.6247625610490663561;2.0833840253623034933;-
2.1158784152904028808;5.6611291292304093403;-1.7281026386930395944;1.2069688462513175065;-
1.9008009684452369381;9.6670928713007366895;2.2438971972378802811;-
5.4897674403548650801;0.56634358909657478431;1.1591386722617833538;4.3840193581186364113;-
5.4182417541906540137;-
2.3165521257780894437;5.9699024249408170206;0.29508141293276202166;-6.167304611344845533;-
1.9213722610226386944;-3.8548206868522352231;-3.2655047886470738305;-
```

4.417654518928722851;3.5131702455555697817;4.7269410974025189986;1.3784560532330114579;-
5.1440136005072263359;-1.6134299113468895115;-
0.90491374068111996021;6.2071696421595339288;0.79911060693291868784;-
0.70020801949610489423;1.0182232866834961538;-
11.727920893426469817;0.4391350965180906285;2.732575628664508649;3.8452173198119603548;-
0.071474780525140640952;5.9890377961145384589;4.2854190130309657292;-
0.82677652565487980141;4.239488469077215882;6.5143727922917431528;0.52216196009530746469;-
0.44194700390751867625;-4.7768323689715659341;-
1.1670155975425557937;2.5557306471541210158;0.55416960276154547671;-
9.4429315008199470327;0.67796730785341052794;-
3.9642678433404339167;1.2310834559394980836;-16.77806092301989338;-2.1432518678116285749;-
0.75692998362646746191;-1.0479295121937979296;3.5162047623252132844;-
9.4476177688728206761;1.6129614151497775332;25.190195713490837193;-7.9945158993171654416;-
2.1256579594979858605;-1.7431275540796866697;1.6750158281344789124;4.2244279262834156796;-
17.074377332755815928;-4.6293324415386711834;-
5.8780313560372743353;3.1871143632832428239;4.0337071736946965572;-
7.3185379658945270975;12.104011720701226551;1.547222976791065685;-3.3628361052491126948;-
3.0195526686325897536;-3.7494859045483837079;6.6436560979535066451;-
3.6477269933651359501;2.2393844072651454269;-
4.461615732079562413;1.7413303627563516685;4.7947409883594422908;2.3871642170683444739;5.4
39620204778999657;2.8665349078981829933;-16.904792482589382274;-22.613617447606966238;-
5.3985978463818105055;3.9808228973993409205;-4.238292092617505169;3.5967880988888727423;-
4.9275805294842420778;-5.4406695271772900213;3.6702724591567101875;-
4.7889473829364090918;9.6849634588307846883;3.2057889129156915686;7.1541260996146300855;-
5.5160918834450125559;-17.695090505544694537;-7.404801357282932095;-
4.5113098098815598291;5.757843061886459779;-19.032912526301739575;3.1370446663964739464;-
6.9752212905628514505;-4.0202309654432095698;-
5.0458762723144499063;4.5525326304303916913;-5.2836411489854144818;-
3.5402880051845988518;6.3053410378830081484;4.3498692507919711758;3.9497035305341210432;-
6.724272822337456823;-3.9663226365455037659;5.0659092958820748365;-6.6450551755406523924;-
8.0518890741045296977;-5.4299071293023226659;5.9120413115102179447];
IW1_1 = [2.8100005357344515211 5.9341561103281303957;-5.8657197912841203546 -
0.4505430990438970551;-5.2050065724299905412 2.295053757383653803;-1.826432384549562693
6.3246660744998495218;4.5630291866690884106 -2.8203339141455843198;-2.5529530846513108777
-5.8848002024798917731;4.4526245803931807643 1.0049267802645247549;-3.0743727840235886006
-11.977537660895610117;-3.9577692715299344073 11.282995359202431018;-1.9915835589925228177
-1.2579982225005432728;-3.5639980091251275418 1.65408820802015466;-2.5812587796100108228
7.4087388659534401114;5.8048923685165734199 11.255640973636502622;5.1351687041465670092
3.3914628124232706341;-4.714092431052722354 -5.2101786522721065253;-4.2682182000763431162
6.2342856516173208448;3.8097381352640473651 6.1764514999821713559;-4.0962038482864464584
7.4295036697377412338;7.2006101179179271554 -3.4453745509482627263;6.2585032827635220798
11.239311305256030948;-8.9172020262273097302 3.2664055089983414781;-7.9298888370049223084
-13.418234044295116902;5.2808412289037773846 6.9704536110015951067;-8.6375206591730719907
6.6505555411684307288;-7.3813284204229461238 10.927229716145530958;-11.955593006973661119
-18.106262423214371182;-6.3302625085560855211 3.5296611364406156319;2.7303246019404854295
-5.9406847762905696797;7.6118634298662950499 8.6091744128566638494;12.460518042455779764
3.475900269933522857;4.6991109341398953347 -4.9634185261072216733;-8.0432217246595758553 -

11.973759667487362535;12.536607604486370349 8.4732507630422482237;-14.147825577440833911
5.719926998952311159;-8.221139627095711333 -37.167734801573104164;-7.3420756007664076392
4.9303478122962411945;10.625570698240299095 10.45402142700483239;9.0793310635264621311
2.6918472262808763595;13.955122708276403998 25.008861212461386714;3.6289919980883409423 -
7.8656589638111160667;16.133115106020394336 -3.9104351413515479052;-16.2956524719844289 -
4.5720011228288486294;9.0865603634869742677 -7.6264654013491988138;-0.53910276566010795207
10.743268911382696018;0.23326847608738082718 -10.479711077217849891;2.3615372755882466649
15.775711282269829994;-29.105766346818189305 -20.140229172461090457;10.030626603402282626
-7.2425550643585170363;-11.127569092190979561 -5.6403640403111019452;-
22.408170337180262521 0.81273559861742949995;7.8283280068949228081
51.711091415033806129;26.620818849722521549 18.551265514800043377;-14.620550826310312331 -
3.1773144735554752494;-21.666577074983027984 -21.621818254914938251;-17.40927282864040393
-1.5010931479969757962;7.2567739984140331444 -6.9263901749557206244;17.460162201650856417
-4.3637787309358362364;23.539078932934422994 5.3461401397591581386;10.756199419684465468
13.02356627990937632;9.5904433397887309809 -4.1836805525653941729;-7.8918791506269299063 -
8.8100931530895056909;3.9232472086806735589 9.863808184976134541;-6.8198309040647284718
6.2672180738455338656;8.4063839418801702408 8.0079767319802641623;-23.283421099216280226 -
13.262998815700781208;-10.79179199483368734 -17.686007300637825779;2.0035424114738580315
8.8056110300223231491;13.412701892733123188 29.666837802088469545;-4.5045772179248384504
8.8029744131337679391;-1.3607344582900113839 -9.0588905010740390367;-30.28340646126200042
-14.620632134208301878;16.704564990497495103 8.0645685962469357833;13.267955223547717836
28.350609709466976227;-4.8205421478510848132 2.2299756712285061511;-6.7510081412691720359
16.591769992663778055;5.002647533139117364 -11.604322702133719858;23.286651335592971179
13.921609934494895811;0.47605687051620471095 -11.175073216300487999;-7.0058968899770555083
-5.5723364475684338259;-11.034124758495503116 -17.829040095362451268;-
7.1106537398769935621 18.288293178322025057;8.7358353533863617457 -
0.86662779394464695137;-20.618471931745929737 -10.116168058348648628;7.0259516743064835964
-15.940813053628611229;-5.6957231046562624144 -5.3344420777663952293;8.345766652927826712
-18.049378837152836752;-23.423611211874916904 -
6.6811428806200368058;0.96290930130777330209 6.2112249198884139645;3.0531486195724757415
13.158535459311551108;-10.941165456974736969 -12.341123778016422463;-8.063227148745358619
-6.2147439584563191062;-18.976104936515625354 -5.9099417561028850798;19.432415791255671422
9.9448406517506420244;9.9953370364160942785 -0.77210863136573182341;-11.876825627978245592
-36.203261480292901808;-6.4493672138164157559 0.54963900105853991107;12.020922690471818939
37.057058680902393633;1.1497690106593749793 7.961409538553733789;16.158534713319582465
5.1544107121957898343;-2.456155452643801862 12.364710092174563627;11.577012341758152303
22.796857296616913402;-13.725088514240702864 -4.7090516257210364159;24.834444679002537271
34.200371248765229382;-8.4843173826515236868 -0.58573739352132059288;-
3.2498584017567524462 14.919022065682451483;9.9404758609530059488
0.41484115356727485624;12.329605756670719785 7.7045004808098793703;-10.923500798049978755
-24.002131632567316188;-7.390862790104501201 -3.3744849693279119762;-7.809651756654234056
2.7821346943363556292;-11.579338723173121295 -5.1525025841459228815;1.246520396169591427
30.856602793339835245;-10.961290573121010183 -2.3805556987400859903;1.8913263853663129233
-8.9951552864725581315;-7.4201923657371686716 -29.811521937108921065;-
11.389064965319825262 -7.9002770556674439817;18.944282519105755114
31.050200244121121784;11.457368303429459999 20.711331913953600292;-5.464673472948263111 -
0.22372377392790424033;22.680085858824355682 31.583573731976642307;20.929087723242936647

34.585129660433011622;6.3428122914235984808 3.4027421544853715396;-6.1334629904388053845 -
3.8711861437791199592;1.3147612942202446806 14.438162458944894695;-6.2996296110956091496
1.9179152258275991016;11.523916767264944738 12.055996508754898144;9.2038653322965782166
2.1761878235450642372;-0.8439863224512029749 22.689279087803665647;6.8103244276774557164 -
2.1725549488434281464;-21.674961753655495045 -30.56116110620501658;7.1851508658962446319
1.732253568634136931;-13.769853998083670277 -40.465141703408313845;-9.7697269923188407859
-10.57599812433691433;-7.7037918942816343559 1.8595270024947851972;-5.0375739293569603561
-2.1358023304422135702;2.0719279475536898083 11.956066049478943469;-2.6577995300803314294
21.158719445835000528;3.5891028820367862906 -0.38853160024461869115;-8.0953138292336177528
-55.235217428047747035;0.27925320652051371928 19.216596739061959198;-7.9738352382800750107
-0.8657577701377476842;-6.0000244971753433632 -1.1241749968654410896;7.8249237863345761923
8.8720263721689516245;1.62618575750420713 -7.9143002019498407407;-13.7494948680380773 -
41.367316359713072416;-12.954636925619732679 -21.134679241125994054;-15.821348561063453886
-25.413954975026971539;6.4902071483673688945 0.38567004570085128279;10.904467774853724649
19.114033227398035564;1.0357620669155198634 14.708936172977786327;-0.6951043641540332052 -
28.603053344557626048;3.8857772058288295725 4.6805779868510626329;-3.4619443879794964403 -
8.3598710770984734353;-2.6204972707864615522 6.1695201626062923239;-3.9113243900800234165
1.4364140964767431186;0.54215478930696003879 -11.803553892137719217;-5.402805389431464711
-2.5828582777540853854;4.3725589359351424434 6.1170581927819638324;-0.957148023116404012
6.297022467592598538;3.0821725676062543542 -3.1591356091320670352;7.0996347136487640839
1.1173883725098310293;2.0693209523237663383 -4.9586404468131641821;4.49854269200627499 -
3.3591116529539588598;4.9037713263800766228 2.8844524048160908869;-14.262588996235583849 -
40.512461837232258688;7.8894175256568708221 50.315047886821105294;-5.5327571565944566601 -
12.334358120313016371;4.5583440442367058054 -0.67632065973460109287;-5.1624500639440444871
1.4450330658241499204;6.1846860840063149212 6.3697067629927621724;-
0.0021189190584671945515 8.5631871844115252657;-0.72305213953439273489
7.3373900285351769668;3.708633130564914282 2.6334352751008514026;-6.264229250716098818 -
2.2663765466598650988;-1.1990315109033728991 -21.693783290894948834;4.9707326400363696095
3.7106496820084520216;4.9627256326953652632 -4.3488917054403248841;-5.173645583771404155 -
2.417443856904263555;-15.246696958204147165 -42.190567566352449091;-2.8465243810057518914
-13.76321903404972069;-4.4861397605386743592 -10.668948970586910718;6.1155317474441819314
0.14994606226712542396;9.6446771113696421196 36.695194666847420706;2.9385347615976948887
4.024471997489688313;-3.3992340510852345759 5.3542016947490518319;-5.6478879807176731731 -
1.6331628443109567073;-0.54956889190736935014 -4.4164968429186490795;4.0756149927890197304
11.153882649787020043;-1.5365095170122449186 3.5161584996575840911;-2.4617557006759036575
-2.7115404678441765718;6.3847539746713044551 0.72823597111432458728;4.4351906081786793834
3.1205330303215306209;2.4486811833631896285 -2.078177677991015937;-5.7191155515246192564
2.2461018390917533161;-3.3443686344188146009 -3.6647339058989780725;-3.336913145659016422
-3.6796107740757797444;-2.6541641302010146042 -3.875681018764910224;-5.324843944023744946
4.2393127512241415289;-2.1762045229964326332 0.96448911273949777812;5.2345250284573729971
1.5702619242507336317];

% Layer 2

b2 = 0.60200505565747974845;

LW2_1 = [-12.986901220846066352 -1.5988214388608674721 -7.2323497339014686247

6.2839739607670530575 2.7602637037395352237 -4.330237793376484845 -3.7656331914742322553

1.7925898269214810554 0.50478559770527775541 -7.6256307700592804721 10.523561958409130668

2.1865629361824532317 2.2697869314504957039 -2.2597599577265654602 -2.913569743060477002 -
4.3284938363782350379 -3.7144972771725339733 1.8001264215439816141 1.6123359854902774568
6.3454274726497326142 -1.7124686690732306982 -4.4148602364766675876 -4.4021853217343078768
4.9930970310457754024 -0.43212521904956480157 3.1157622510582116959 -2.1032829568348505589
-5.1179675816967673541 -3.0966794566671635991 -3.3224027996140250707 -
2.5978193133740488108 -8.0207574970017354588 -0.32065859182723260856 -
0.83939746173206741808 0.53431045020053713479 -6.7616474643305082282 -
2.6212010973099113542 9.3269358156597981235 0.56782562762349397811 2.4136811371524231618
2.0167173213662903386 2.5458096026493088893 2.5091327205088722607 1.7127317353989828241
2.0052470807507121187 -0.88498698291501276536 -4.5993736510832459174 -
2.4730813663668240743 -1.5558455055129525313 -0.24687959711855103628 -
15.472076514301733141 -5.4143855075087525819 1.6038867381566652703 0.89082077037923057539
-0.42580922679352617433 -1.2367794388830626318 -1.7440194275663476464 -
0.89607368362957884322 3.7581598617983114075 1.1003054289050562264 -5.8138988999429637161
2.0578119281348650205 -1.5853334367335949473 -7.6825612850154945122 -1.6907984678567007375
5.9108817423754320686 -5.1477937701847640284 -4.362949700999076974 0.13185233228429693586
6.0484154671933261227 2.2368878556177813621 8.0703609000914884319 -2.0678126444136259998 -
1.0411619690700475438 6.6084448918750808843 -0.43152875753921393631 -1.3606556935403113506
0.19618273070462641239 13.65209202877327499 -5.6804010015979562453 -2.9706050680950535359
-3.4785930745563455879 8.1581312110233099588 6.382234145633923994 -11.061685977673320735 -
2.4048631160584492683 -0.6928972527481119803 7.7929834221614742162 -3.0081436155391299003
-0.45937431701301301157 7.0601654805024276484 -2.4901132264046981213 4.7089812474975767387
2.6251768600172957768 -4.5186531779940724007 1.945802955036833426 -4.4484272055940108359
3.6012651207035721868 -5.8014672142576664271 2.8832270735989915522 -0.35375779473001478515
-4.0517245698904424955 5.5834633135943443349 -3.954440421887170487 1.5814716474628891518 -
2.4632015734079577562 -1.0102606474181752283 -7.3157178220539034186 -8.9328848819713080331
1.1053389889331910467 1.6877819056583012181 2.017147168117018996 -0.98212881378250516118
6.9969113334203294485 0.24570965457153179368 1.0944754407953571906 -10.081244961972847918
6.6411908658214926504 3.1793624614489170987 -12.405804794920326728 6.0925452863949551841
1.4805624939789854277 5.031367889630645962 2.5803678510314149719 0.6677469394784880663
1.7592033380600133885 2.2461690847046802411 1.3553965504908069839 2.4386064092048265195 -
6.6497904947420902744 4.4876407819107395625 21.9815661724546203 5.3821496029551072482
0.82652196540682987269 3.9778635216322086876 2.0292217126282241502 -0.31861318415449402242
-4.6105247100903827828 -7.5059726685732721663 -8.9395714209730776645
0.88970567608067674392 -5.4189400640037135304 5.1824724223675140422 1.5657598570268829175
-10.182936911397645119 -18.055550081731752243 7.5791432780237188993 1.8380071345807356131
-12.874085470979359513 2.3500463708232732785 -4.0074142513351658224 -4.9993276685140655147
3.7296762037966217918 -1.9788436660980377457 -0.50989589609070551379 2.267973075008532291
-1.5700781225943745145 3.0717112590274910922 -4.9430946111622349193 0.19327734715911401575
1.6607370071139273549 -4.1096791288125613661 1.7755471921548835468 2.3169537751117590396 -
18.667338351739452662 7.7336679672122627949 2.2430504442547998245 -4.7584597300267255093 -
1.0647137081553059712 -0.40310174376314533706 5.867699580851054364 3.26412229185745284
1.7376312060326106756 -1.5611154068675203721 -2.1053928691183001476 -1.747811637541074381
4.0925893858190223185 -2.8761859724142158079 6.7176945154536467086 0.50328883245786926182
-7.3792034913414212838 4.1127513512053583966 -0.48138582192645545943 -1.886431233954165787
4.3745032877952310102 3.3272915857295362052 4.8712198632044616531 -3.0701095718388575762 -
2.9083203747062342792 4.0857356332535754717 -4.1414237703774583466 2.3858669779361187935 -

```

3.1434802115348219331 5.445254478822890043 2.8432411817960230316 1.8991609618220537392 -
3.5966907329052313358 -5.7953817126395454906 1.1529717521312619066 3.6357377233528538341];

% Output 1
y1_step1.ymin = -1;
y1_step1.gain = 2;
y1_step1.xoffset = 0;

% ===== SIMULATION =====

% Dimensions
Q = size(x1,1); % samples

% Input 1
x1 = x1';
xp1 = mapminmax_apply(x1,x1_step1);

% Layer 1
a1 = tansig_apply(repmat(b1,1,Q) + IW1_1*xp1);

% Layer 2
a2 = repmat(b2,1,Q) + LW2_1*a1;

% Output 1
y1 = mapminmax_reverse(a2,y1_step1);
y1 = y1';
end

% ===== MODULE FUNCTIONS =====

% Map Minimum and Maximum Input Processing Function
function y = mapminmax_apply(x,settings)
y = bsxfun(@minus,x,settings.xoffset);
y = bsxfun(@times,y,settings.gain);
y = bsxfun(@plus,y,settings.ymin);
end

% Sigmoid Symmetric Transfer Function
function a = tansig_apply(n,~)
a = 2 ./ (1 + exp(-2*n)) - 1;
end

% Map Minimum and Maximum Output Reverse-Processing Function
function x = mapminmax_reverse(y,settings)
x = bsxfun(@minus,y,settings.ymin);
x = bsxfun(@rdivide,x,settings.gain);
x = bsxfun(@plus,x,settings.xoffset);

```

end