خلاصه ای از MHD

ژینا مجاهد
401170275

۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱ مقدمه

مقدمه مغناطوهیدرودینامیک یا MHD شاخه‌ای از فیزیک است که رفتار سیالات رسانای الکتریکی در میدان‌های مغناطیسی را مطالعه می‌کند. این نظریه برای توصیف پویایی کُند و مقیاس بزرگ پلاسماها در کاربردهایی همچون فیزیک پلاسما، اخترفیزیک و مهندسی هسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲ فرضیات و معادلات پایه

در MHD، پلاسما به عنوان یک سیال رسانای الکتریکی در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم شامل معادلات دینامیک سیالات و معادلات ماکسول است که بطور خود–سازگار چگالی جرم ρ، سرعت $\vec{V}$، فشار P و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را به هم مرتبط می‌سازند. معادلات پایه MHD عبارتند از:

۱. معادله پیوستگی جرم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

۲. معادله حرکت (معادله اویلر):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B}$$

۳. معادله انرژی در حالت آدیاباتیک:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) = 0 \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

۴. معادله حالت گاز ایده‌آل برای پلاسمای هیدروژنی:

$$P = \frac{2k_B}{m_p}\rho T$$

۵. قانون اهم:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E'}$$

۶. تبدیل لورنتز برای میدان الکتریکی:

$$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$$

با جایگذاری روابط اهم و لورنتز در معادله حرکت، معادله تکاملی میدان مغناطیسی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}\right)$$

که در آن η لزجت مغناطیسی یا گرانروی اهمی است.

۳ لکه خورشیدی

در اینجا، رابطه بین دمای داخل لکه خورشیدی و اطراف آن با استفاده از معادلات حالت و انرژی کل سیستم بدست آمده است:

$$\frac{T_0}{T_E} = 1 - \frac{B_0^2}{2\mu_0 P_E}$$

از آنجایی که در لکه‌های خورشیدی، میدان مغناطیسی B_0 قوی است، بنابراین دمای مرکز لکه TE بزرگتر از دمای اطراف T_0 خواهد بود. به همین دلیل لکه‌ها تاریک‌تر از محیط اطراف دیده می‌شوند.

۴ پلاسمای ایده آل

در این صفحات، معادلات پایه MHD برای یک پلاسمای ایده آل معرفی شده اند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}\right) = -\nabla P - \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)=0$$

سپس حالت تعادل با شرایط $V=0$ و $\partial/\partial t=0$ بررسی شده و معادله مغنطوستاتیک زیر حاصل می شود:

$$\nabla P_0+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0\times(\nabla\times\vec{B}_0)=0$$

در اینجا ، اغتشاشات کوچک حول حالت تعادل با روابط زیر معرفی شده اند:

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\vec{B}_0+\vec{B}_1(\vec{r},t)\\ \vec{V}&=\vec{0}+\vec{V}_1(\vec{r},t)\\ P&=P_0+P_1(\vec{r},t)\\ \rho&=\rho_0+\rho_1(\vec{r},t)\end{aligned}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات پایه MHD و صرف نظر از اغتشاشات مرتبه بالاتر، معادلات خطی سازی شده MHD بدست می آیند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\vec{V}_1&=0\\ \rho_0\frac{\partial\vec{V}_1}{\partial t}&=-\nabla P_1-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0\times(\nabla\times\vec{B}_1)\\ \frac{\partial P_1}{\partial t}-\gamma P_0\frac{\partial\rho_1}{\partial t}&=0\\ \frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}&=\nabla\times(\vec{V}_1\times\vec{B}_0)\end{aligned}$$

سپس میدان مغناطیسی تعادلی B_0 در صفحه xz به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\vec{B}_0=B_0\sin\alpha\hat{e}_x+B_0\cos\alpha\hat{e}_z$$

۵ پلاسمای غیر ایده‌آل

روش کلی حل معادلات MHD برای یک پلاسمای غیرایده آل به شرح زیر است:

۱. ابتدا معادلات پایه MHD غیرایده آل که شامل اثرات اتلافی مانند رسانش گرمایی، لزجت و هدایت الکتریکی محدود می باشند، معرفی می شوند:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right)=-\nabla P+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\rho\vec{g}+\nabla\cdot\vec{\tau}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{V}\times\vec{B}-\eta\mu_0\vec{J})$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma-1}P\rho^{-\gamma}\right)=\frac{1}{\sigma}\vec{J}^2+\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+\Phi_v$$

۲. معادلات فوق با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه مناسب، حل عددی یا تحلیلی می شوند.

۳. حل این معادلات معمولا به روش عددی با استفاده از روش های گسسته سازی مانند روش تفاضل محدود، حجم محدود و عنصر محدود انجام می گیرد.

۴. در حل تحلیلی، فرضیات سازگار با شرایط مسأله در نظر گرفته می شود تا معادلات تبدیل به فرم ساده تری شوند.

۵. مدل های تقریبی برای موارد خاص مانند مدل های رسانش، MHD شعاعی و... نیز می توانند به کار گرفته شوند.

۶. در نهایت پروفایل های سرعت، دما، چگالی، میدان مغناطیسی و فشار با توجه به شرایط اولیه و مرزی محاسبه می گردند.

لازم به ذکر است که حل معادلات MHD غیرایده آل به دلیل وجود اثرات اتلافی، معمولا پیچیده تر از حالت ایده آل است و نیاز به فرضیات ساده کننده یا حل عددی دارد. همچنین باید به پایداری و شرایط همگرایی روش حل توجه ویژه ای داشت.

۶ حل مثال از معادلات پایه و بدست اوردن رابطه‌ی دیسپرسیونی آن

در این قسمت، حل موجی از معادلات خطی شده MHD برای اغتشاشات فشار P_1، چگالی ρ_1، سرعت V_1 و میدان مغناطیسی B_1 در امتداد میدان مغناطیسی تعادلی B_0 مورد بررسی قرار گرفته است:

$$P_1=P_0e^{i(k_zz-\omega t)}$$

$$\rho_1=\rho_0e^{i(k_zz-\omega t)}$$

$$V_{1z}=V_0e^{i(k_zz-\omega t)}$$

$$B_{1z}=B_0e^{i(k_zz-\omega t)}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات خطی شده، رابطه دیسپرسیونی زیر برای موج صوتی در امتداد میدان مغناطیسی بدست می آید:

$$\omega^4-\omega^2k_z^2(V_A^2+C_s^2)+k_z^2V_A^2C_s^2\cos^2\alpha=0$$

که در آن $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}$ و $C_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ به ترتیب سرعت آلفون و سرعت صوت هستند.
حالت های ویژه رابطه دیسپرسیونی:
۱) $\alpha = 0$ (موج صوتی عمود بر میدان مغناطیسی):

$$\omega = \pm k_z C_s$$

۲) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (موج صوتی موازی با میدان مغناطیسی):

$$\omega = \pm k_z \sqrt{V_A^2 + C_s^2}$$

۳) $k_z = 0$ (مد آلفون یا نوسانهای آلفون):

$$\omega = \pm k_z V_A \cos\alpha$$

در این حالت اخیر، فرکانس نوسانها متناسب با $\cos\alpha$ است که نشان می دهد در $\alpha = 0$ (موازی با میدان)، این نوسانها از بین می روند.

*****

در این صفحات، حل موجی از معادلات خطی شده MHD برای اغتشاشات فشار P_1، چگالی ρ_1، سرعت $\leq□_1$ و میدان مغناطیسی B_1 در راستای عمود بر میدان مغناطیسی تعادلی B_0 مورد بررسی قرار گرفته است:

$$P_1 = P_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$
$$\rho_1 = \rho_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$
$$V_{1x} = V_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$
$$B_{1x} = B_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات خطی MHD، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم زیر برای سرعت عرضی V_{1y} حاصل می شود:

$$\frac{d^4 V_{1y}}{dy^4} - \left(\frac{2k_x^2 V_A^2 \cos^2\alpha}{V_A^2\cos^2\alpha + C_s^2} + k_x^2\right)\frac{d^2 V_{1y}}{dy^2} + k_x^2 \frac{\omega^2 - k_x^2 C_s^2}{C_s^2}\frac{d^2 V_{1y}}{dy^2} = 0$$

این معادله به همراه شرایط مرزی مناسب، نوسانات آلفون در صفحه عمود بر ۰□ را توصیف می کند. رابطه ی دیسپرسیونی زیر برای موج صوتی در راستای عمود بر میدان مغناطیسی بدست میاید.

$$\omega^2 = k_x^2 C_s^2$$

که در آن $C_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ سرعت صوت است.

****
در این صفحات، حل موجی از معادلات خطی شده MHD برای اغتشاشات فشار P_1، چگالی ρ_1، سرعت V_1 و میدان مغناطیسی B_1 در راستای موازی با میدان مغناطیسی تعادلی B_0 مورد بررسی قرار گرفته است:

$$P_1 = P_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$\rho_1 = \rho_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$V_{1z} = V_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$B_{1z} = B_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات خطی شده، رابطه دیسپرسیونی زیر برای موج صوتی در راستای موازی با میدان مغناطیسی بدست می آید:

$$\omega^2 = k_z^2 (V_A^2 + C_s^2)$$

که در آن $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$ سرعت آلفون است. در این حالت، سرعت فاز موج صوتی برابر با $\sqrt{V_A^2 + C_s^2}$ است که بیشتر از هر دو سرعت صوت و سرعت آلفون است.

۷ حالت انتشاری در معادله القاگری میداد مغناطیسی

بله، در این صفحه بحث در مورد حالت انتشاری یا Diffusive Limit در معادله القاگری میدان مغناطیسی برای شرایطی که عدد رینولدز مغناطیسی Rm کوچک است، آمده است.
در این حالت، اثر جریان جابجایی بر روی میدان مغناطیسی نسبت به اثر انتشاری آن قابل صرف نظر است و معادله القاگری به معادله انتشار تبدیل می شود:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}$$

این معادله نشان می دهد که تغییرات میدان مغناطیسی در یک مقیاس طولی l_0 در یک مقیاس زمانی انتشار $\tau d = \frac{l_0^2}{\nu}$ از بین می روند. هرچه مقیاس طولی کوچکتر باشد، میدان مغناطیسی سریعتر انتشار می یابد.
در پلاسمای کاملا یونیزه شده، این مقیاس زمانی برابر است با:

$$\tau_d \approx 10^{-9} l_0^2 T^{3/2}$$

که در آن l_0 بر حسب متر و T بر حسب کلوین است.
سپس به عنوان مثال، برای تاج خورشید با دمای $T = 10^6 K$ و مقیاس طولی $l_0 = 10^6 m$، τd حدود 30,000 سال به دست می آید!

از آنجا که فرآیندهای رهاسازی انرژی مغناطیسی مانند شعله های خورشیدی در مدت زمان کوتاه 100 تا 1000 ثانیه رخ می دهند، پس مقیاس طولی بسیار کوچکی در حدود 10 متر برای این فرآیندها نیاز است.

مثال مطرح شده در این صفحه در مورد انتشار یک میدان مغناطیسی یک جهته $B(x,t)$ با شرط اولیه تابع پله است:

$$B(x,0) = \begin{cases} +B_0, & x > 0 \\ -B_0, & x < 0 \end{cases}$$

این شرط اولیه نشان دهنده یک "جریان ورقه ای" است که می تواند برای مثال در helmet streamers در تاج خورشید رخ دهد.

با این شرط اولیه، معادله انتشار باید برای میدان مغناطیسی $B(x,t)$ حل شود تا روند انتشار آن در طول زمان مشخص گردد. حل این معادله دیفرانسیل نشان می دهد که پروفیل اولیه تابع پله ای میدان مغناطیسی، به تدریج با گذشت زمان پخش شده و کم رنگ می شود.

این مثال نمونه ای از اهمیت اثرات انتشاری در سیستم های پلاسمایی مانند تاج خورشید را نشان می دهد، جایی که مقیاس طولی کوچک برای فرآیندهای سریع رهاسازی انرژی مغناطیسی نیاز است اما در طول زمان های بلند، انتشار باعث از بین رفتن ساختارهای ریز میدان مغناطیسی می شود.

۸ تعادل فشار هیدروستاتیکی

در فیزیک، تعادل فشار هیدروستاتیکی وقتی رخ می دهد که فشار در یک سیال در حالت تعادل با نیروی گرانشی است. این مفهوم در بسیاری از زمینه ها از جمله متورولوژی، اقیانوس شناسی، زمین شناسی و ستاره شناسی کاربرد دارد.

در مغناطوهیدرودینامیک، ما با سیالات برقی باردار مانند پلاسما سروکار داریم که در آنها نیروهای مغناطیسی و الکتریکی نقش مهمی ایفا می کنند. در این حالت، معادله تعادل فشار هیدروستاتیکی به شکل زیر است:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla P$$

که در آن $\vec{j}$ چگالی جریان الکتریکی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی و P فشار سیال است. این معادله نشان می دهد که نیروی لورنتز (که برابر است با $\vec{j} \times \vec{B}$) باید با گرادیان فشار متعادل شود تا سیال در حالت تعادل باقی بماند.

پارامتر بتای پلاسما:

پارامتر بتای پلاسما، که با β نشان داده می شود، نسبت فشار پلاسما به فشار مغناطیسی است و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\beta = \frac{2\mu_0 P}{B^2}$$

که در آن μ_0 نفوذپذیری مغناطیسی خلا است. این پارامتر بیانگر اهمیت نسبی فشار پلاسما نسبت به فشار مغناطیسی است. برای $\beta \gg 1$، فشار پلاسما غالب است و برعکس، برای $\beta \ll 1$، فشار مغناطیسی غالب است.
حل معادله تعادل با استفاده از پارامتر بتا:
با استفاده از پارامتر بتا، می توان معادله تعادل فشار هیدروستاتیکی را حل کرد. در این حالت، معادلات گرادیان فشار بر حسب β و توان های r بیان می شوند. این به ما اجازه می دهد تا توزیع فشار در سیال را بر حسب متغیرهای مغناطیسی و هیدرودینامیکی بیان کنیم.
حال با استفاده از پارامتر بی بعد بتای پلاسما $\beta = 2\mu_0 p/B^2$، می توان این معادله را حل کرد:

$$\frac{1}{\mu_0 p}\nabla p = \frac{1}{B^2}\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{B^2}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

با استفاده از $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$، خواهیم داشت:

$$\nabla(\frac{B^2}{2\mu_0} + p) = \vec{B} \cdot \nabla(\frac{\vec{B}}{\mu_0})$$

این معادله برای حالت ساده یک بعدی در مختصات استوانه ای حل می شود:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B^2}{\mu_0 r}(1 - \beta)$$

برای $\beta = 1$ (فشار پلاسما = فشار مغناطیسی)، گرادیان فشار صفر است که نشان از تعادل کامل می دهد.

۹ تعادل دمایی هیدروستاتیکی

معادله انتقال حرارت با هدایت برای یک گاز یونیزه شده:

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T\right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + Q_{visc} + Q_{ohm} + Q_{rad}$$

که در آن: ρ – چگالی، c_v گرمای ویژه در حجم ثابت – k ضریب هدایت گرمایی – Q_{visc} تولید گرما توسط اصطکاک گرانروی – Q_{ohm} تولید گرما با اثر اهمی (تلفات اهمی) – Q_{rad} تولید یا از دست دادن گرما از طریق تابش
سپس برای حالت پایدار ($\partial T/\partial t = 0$)، شرایط تعادل حرارتی برقرار است:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = -Q_{visc} - Q_{ohm} - Q_{rad}$$

برای حالتی که میدان مغناطیسی و گرادیان چگالی صفر باشند، فرم ساده شده معادله به صورت زیر است:

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{k}\left(\frac{\eta j^2}{\sigma} + Q_{rad}\right)$$

که در آن σ رسانایی الکتریکی و η لزجت گرانروانی مغناطیسی است.

این معادله لاپلاسی نشان می دهد که گرادیان دما بستگی به تولید گرمای اهمی و تابش در پلاسما دارد.

برای حل این معادله، شرایط مرزی برای گرادیان دما یا مقادیر دما مشخص می شوند. سپس با استفاده از روش های عددی یا تحلیلی، پروفایل دما در پلاسما محاسبه می گردد تا تعادل حرارتی برقرار شود.

۱۰ میدان های پتانسیل

میدان پتانسیلی از رابطه $\vec{B} = -\nabla\phi$ تعریف می شود که در آن ϕ تابع پتانسیل اسکالر است. برای چنین میدانی شرط لاپلاس زیر برقرار است:

$$\nabla^2\phi = 0$$

خطوط میدان مغناطیسی در این حالت خطوط مماس بر $\vec{B}$ هستند که همان سطوح تراز پتانسیل $= \phi$ ثابت را مشخص می کنند.

۱۱ میدان های بدون نیرو

میدان مغناطیسی بدون نیرو یک حالت ویژه از میدان های مغناطیسی است که در آن نیروی لورنتز $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ است. به عبارت دیگر، جریان الکتریکی $\vec{j}$ در همان راستای میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد:

$$\vec{j} = \alpha\vec{B}$$

که در آن α یک ثابت اسکالر است. با جایگذاری این رابطه در قانون آمپر-ماکسول، خواهیم داشت:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\alpha\vec{B}$$

که معادله وکتوری میدان بدون نیرو را نشان می دهد:

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha\vec{B}$$

همچنین با در نظر گرفتن شرایط $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و استفاده از هویگنز، $\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{B} = 0$، می توان نشان داد که $\vec{B} \cdot \nabla\alpha = 0$. به عبارت دیگر α یا صفر است یا تنها تابعی از سطوح اسکالر متناظر با سطوح $= \vec{B}$ ثابت است.

این معادله های بدون نیرو دارای حل های متمایز مارپیچی (برای $\alpha \neq 0$) و پتانسیلی (برای $\alpha = 0$) هستند که به ترتیب معادلات زیر را ارضا می کنند:

$$\nabla^2 \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0 \qquad (\alpha \neq 0)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = 0 \qquad (\alpha = 0)$$

حل های مارپیچی به صورت حلقه ها یا رشته های مارپیچی هستند، در حالی که حل های پتانسیلی خطوط میدان مستقیم را نشان می دهند.

میدان های بدون نیرو در بسیاری از کاربردهای پلاسما از جمله طراحی ماشین های گداخت هسته ای، ستاره شناسی و غیره استفاده می شوند. مدل های هسته پیچشی ستاره و اسفروید به عنوان مثال هایی از حل های بدون نیرو برای خطوط میدان نشان داده شده اند.

خطوط میدان مغناطیسی در این حالت بر روی سطوح $\vec{B} =$ ثابت و $\alpha =$ ثابت قرار می گیرند که در محاسبات باید شرط انتگرال پذیری برقرار باشد:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

همچنین رابطه کلی برای محاسبه α از روی جریانی که از یک سطح باز می گذرد به صورت زیر بیان شده است:

$$\alpha = \frac{\mu_0 I_{enc}}{\Phi_B} = \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\iint \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

۱۲ نتایج

این درس مقاله خلاصه ای از فایل ذکر شده در منبع است که مفاهیم پایه‌ای درباره‌ی مغناطیس‌هیدرودینامیک (MHD) را پوشش می‌دهد. در این فایل، میدان‌های مغناطیسی و جریان‌های الکتریکی، میدان‌های بدون نیرو، خطوط میدان مغناطیسی و مدل‌های مربوط به آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین، معادلات میدان بدون نیرو و روش‌های حل آن‌ها نیز توضیح داده شده‌اند.

مراجع

[۱] Click here