

# 基于 Monte Carlo 方法的可转债定价研究

龚锦程/固定收益部/gongjincheng.intern@htffund.com

2023 年 6 月 28 日

## 摘要

本文为 Monte Carlo 方法的介绍与可转债定价的初探，即期基于此方法的可转债数值定价模型备忘录。该方法为含权类债券定价的通用基础方法，可根据具体产品而做进一步更新。本文研究 2023 年 6 月 27 日前上市且未到期的 445 支可转债，在风险中性的环境下，基于几何布朗运动生成 5000 条路径，对每一支债券的每个交易日进行估值。同步考虑每支可转债的转股条款、赎回条款、回售条款以及下修条款，计算各条模拟路径下的期望收益，最终由折现平均得到当日可转债的模型定价。实证研究表明：计算得到 198,816 条模型价格，其与市场价格的平均误差仅为 0.323%。在 95% 的置信水平下，有 49% 的模型价格序列通过了基于市场价格约束的协整检验。通过上述模型构造的可转债定价偏离度因子，能够较好的对转债收益率进行分层，且该因子在回测期内始终保持 IC 值稳定。上述结论说明，本文提出的可转债定价模型对于检测市场价格的偏离程度有一定的参考意义。

## 1 版本信息

版本号	版本特性	作者
1.0 初始版本 2023/06/09	完成文档第 1 节到第 3 节； 阐述转债含权特征与定价一般方案；	龚锦程
1.1 版本 2023/06/15	新增文档第 4 节； 构建基于 MC 方法的可转债定价模型；	龚锦程
1.2 版本 2023/06/21	新增文档第 5 节； 基于全量市场数据的实证研究；	龚锦程
1.3 版本 2023/06/28	修订文档第 4 节到第 5 节； 文档发布版本；	龚锦程

## 2 符号，简写与基础参数赋值

如无特殊说明，文中出现符号和缩写采用以下默认含义。

### 2.1 市场信息

- $S_t$ , 标的资产价格在  $t$  时刻的价格, 叙述中可缩写为 **Und**
- $S_0$ , Und 在估值日的价格, 叙述中可称为 **Spot**
- $X_0$ , 可转债合约中约定的转股价格
- $X_t$ , 可转债触发下修条款后的转股价格
- $\sigma$ , Und 在  $t$  时刻的波动率, 叙述中可称为 **Vol**
- $\rho_{SX}$ , Und 与其他标的的相关性 (如果需要)
- $r$ , 无风险利率
- $t, T$ , 产品估值日和到期日
- $B_t$ , 无风险零息债券

### 2.2 模型相关

- $\Omega$ , 连续状态空间
- $\mathcal{F}$ ,  $\sigma$  代数
- $\mathbb{F}$ , 流域
- $P$ , 实际或客观的概率测度
- $Z_t$ , 标准正态分布
- $\tau$ , 产品持续区间, 一般可以认为  $\tau = T - t$
- $p_{down}$ , 产品下修概率

### 2.3 计算相关（如果需要）

- $PV$ , 现值算符
- $FV$ , 面值算符
- $cs$ , 风险溢价
- $Payoff$ , 各模拟路径损益
- $N$ , 正态分布累积分布函数 (CDF), 取值范围 0 到 1
- $N^{-1}$ , 正态分布累积分布函数的反函数
- $n$ , 正态分布分布密度函数 (PDF), 为  $N$  的一阶导数, 取值为  $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
- $n'$ ,  $n$  的导数, 取值为  $-x\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

## 3 使用 Monte Carlo 方法的动机和背景

### 3.1 可转债的含权特征

可转债为一类具备复杂结构的含权债券，剔除纯债部分的固收特征，其还包括看涨美式期权特征的转股条款 (convert provision)、赎回条款 (redemption provision)、回售条款 (put provision) 以及下修条款 (reset provision) 等期权特征。如何在理论定价模型中考虑其内嵌期权的具体特征，是精准定价此类含权债时需要深入考虑的问题。

#### 3.1.1 转股条款 (convert provision)

可转债的转股条款往往体现在其内嵌的美式期权特征中，即持有者在任意交易时刻可以选择行权转股。在理想状态下，以不分红股票为标的的美式期权持有者不会选择提前行权 Hull (2019)。由于我国转债对应的正股通常不进行分红操作，即便是有分红也会通过调整转股价格做出相应的抵消操作。因此我们认为转债的持有者在转债的生命存续期内不会进行转股操作，故将该条款认定为转债到期时转股。

### 3.1.2 赎回条款 (redemption provision)

可转债的赎回条款，对于每条模拟路径而言，若  $t$  时刻满足赎回条款约定的价格时，持有人会进行转股操作。则在该条路径下，可转债的到期价值即为持有者在  $t$  时刻转股所得到收益的终值。

### 3.1.3 回售条款 (put provision)、下修条款 (reset provision)

对于可转债的回售条款而言，发行人通常为了避免回售（发行可转债的目的是为了融资），常在该条款即将被触发之时，召开股东大会并向下修正转股价。因此，回售条款以及下修条款的触发二者之间互补，且存在较大的不确定性。为了更好的刻画上述两个条款，我们考虑引入 60% 的下修概率。即在触发条款之时，有 60% 的概率发行人会下修转股价。由于需要保证转股价下调幅度，我们考虑将下修幅度认定为表决日前 20 个交易日的平均价格上浮 10%，以使得可转债的价值超过回售价格。

## 3.2 含权类产品价值调整的一般方案

基于对以上各条款的描述，我们可以知道可转债有如下特点：

1. 内嵌美式看涨期权，该转股条款在转债生命存续期内不会被执行；
2. 满足回售条款时，发行人存在一定概率执行下修条款或回售条款；
3. 满足赎回条款时，持有者会进行转股操作。

故在此类含权产品价值调整的一般情况下，我们需要对产品挂钩标的模拟路径进行回溯，以及时判断条款是否被触发。基于上述三个特点，可转债市场的交易撮合报价作为参考值的意义并不大，而与转债发行时约定的条款特征关系较强。因此我们需要使用一种能够**基于条款调整且能够实现路径依赖价格回溯的定价模型**对可转债进行定价，而且这种方法不能过于依赖于历史交易撮合市场数据。

在以上需求满足的情况下，由于模型需求的出发点是基于条款以及路径依赖的价格回溯调整方法，而有限差分以及二叉树方法无法计算路径依赖的期权价格，故本文所介绍的 Monte Carlo 模拟方法体系能比较好的满足上述各条款模拟的需求。

## 4 基于 Monte Carlo 方法的可转债定价模型

### 4.1 市场模型及其离散化处理

假设有截止期为  $T$ ,  $0 < T < \infty$  的 Black-Scholes-Merton 连续市场模型

$$\mathcal{M}^{BSM} = \{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P), T, S, B\} \quad (1)$$

经济体中的不确定性由过滤概率空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P\}$  表达。

基于上述设定, 我们根据随机微分方程来构建  $0 < t < T$  时, 标的资产股价指数  $S_t$  的风险中性变化过程。

$$d(\ln S_t) = rdt + \sigma dZ_t \quad (2)$$

上式  $\sigma$  为股价的波动率, 我们使用标的资产之前 60 个交易日的加权移动平均波动率来作为股价波动率的代理变量, 即

$$\hat{\sigma} = EMA(S_t, 60) \quad (3)$$

该随机过程产生了流域  $\mathbb{F}$ , 即  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(S_{0 < s < t})$ 。无风险零息债券满足的微分方程为:

$$d(\ln B_t) = rdt \quad (4)$$

其在  $T$  期支付一个单位货币的零息债券, 在  $t$  期价值为  $B_t(T) = e^{r(T-t)}$ , 其中  $0 < t < T$ 。

为模拟上述市场模型, 即使用数值方法产生  $S_t$  的值, 我们采用欧拉离散方法对风险中性变化过程进行离散化处理。

为此, 将区间  $[0, T]$  分成等长的子区间  $\Delta t$ , 使得  $t \in 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ 。对于标准正态分布  $z_t$  而言, 连续市场模型的离散版本为:

$$\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t} \quad (5)$$

$$\frac{B_t}{B_{t-\Delta t}} = e^{r\Delta t} \quad (6)$$

## 4.2 无风险利率的引入

由于可转债的股性大于债性，股价的变化对于转债价格的影响大于利率变化对其的影响。为实现模型的简化，假设在可转债存续期内的无风险利率为对应期限的同期中债国债收益率，该利率已知且为常数，并用其进行折现操作。

利率曲线如下图所示：

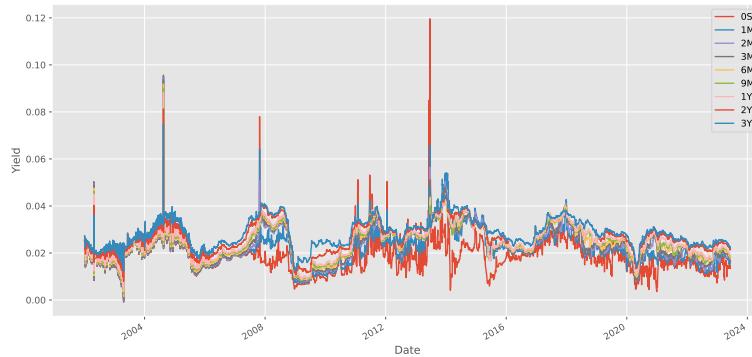


图 1: 各期限无风险利率曲线

## 4.3 信用风险的引入

近年来信用债市场已出现过违约情况，很多可转债不再有对应银行作为担保，违约风险值得被进一步考虑。因此，我们拟使用与该可转债相同信用评级、相同期限的企业债到期收益率与中债国债收益率的差额，作为无风险利率的信用溢价进行加点处理。

由于未知原因，公司未给笔者提供数据库支持，因此截至建模完成日，该部分信用风险的引入仍被搁置。

## 4.4 附加条款的引入

转债中的转股条款往往是美式期权，即持有者可以随时行权执行转股条款。但在标的资产无分红，且其余条件理想的情况下，该类美式期权可被当作欧式期权进行处理。

因此，我们沿用 Zheng-Lin 模型的思路，认为除非达到赎回条款的条件，或转债到期，否则持有者不会执行转股条款。

下修条款作为我国可转债的一大特色，在本模型中被着重考虑。由于转债发行人的首要目的为股权融资，发行方往往希望持有者最终能够将转债转换为股票。所以，当转债的价格即将达到触发回售条款时，发行人会为了避免发生回售，有一定概率向下修正转股价格。

为了更好的描述转债中的下修条款以及回售条款，我们在模型中引入了下修概率  $p_{down}$  的参数，且将其设定为 60% 的常数，意味着在转债价格达到回售条款的情况下，有 60% 的概率发行商会下修转股价格。

触发下修行为后，转股价的下修程度也有较大的不确定性。我们认为在触发下修行为时，发行人会将转股价格调整为表决日前二十个交易日的均价上浮 10% 的价格，以保证下修幅度足够大，即调整转股价为：

$$X = \min(\text{mean}(S_{t-20 < i < t}) \times 1.1, X_0) \quad (7)$$

若不发生回收下修行为，则发生回售，具体损益情况详见下文。若满足赎回条款，则持有者会当即执行该条款，并按照约定价格进行转股，具体损益情况详见下文。

#### 4.5 数值求解方法

本文沿用上述提到的市场模型及其离散化过程进行蒙特卡洛模拟，对于每一支可转债的每个交易日，模拟 5000 条股价变动路径如下所示。

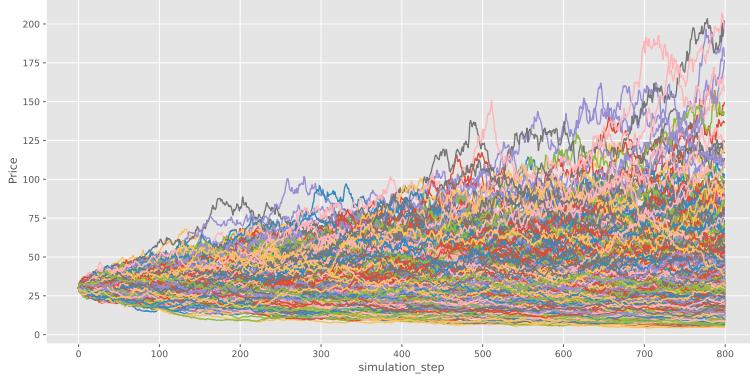


图 2: 模拟的 5000 条股价路径

对于每条模拟路径，我们从可行权时刻后推 30 日开始判断，若满足赎回条款则持有人会进行转股赎回 (redemption provision)。则在该条股价模拟路径下，可转债的价值为转股收益的现值： $PV(S_t/X)$ 。

对于每条模拟路径，若在回溯时间点满足回售条款 (put provision)，则我们生成一个在  $(0, 1)$  区间服从均匀分布的随机变量值  $p$ 。若  $p > p_{down}$ ，则发生回售行为，在该条路径下可转债的价值为回售价格的现值  $PV(X_0)$ ；反之，当  $p < p_{down}$  时，执行下修条款 (reset privision)，则将转股价格下修至  $X$ ，并继续判断下一个交易日的情况，直到到期日前 30 天截至。

最后，在估值日最后一天，若可转债仍未被回售或赎回，则当即触发转股条款 (convert provision) 或被作为债券偿还。最终所得损益为： $\max(FV \times e^{-(r+cs) \times (T-t)}, S_t \times (FV/X) \times e^{-(r+cs) \times (T-t)})$ 。

对于每一条路径，我们按照上述过程计算可转债在估值当日的价值。最后计算 5000 条模拟路径的平均损益，得到模型的估值结果如下式所示。

$$\text{ConvertibleBondPrice} = \frac{\sum_{i=0}^{5000} \text{Payoff}_i}{5000} \quad (8)$$

可转债估值代码，详见笔者 GitHub 主页<sup>1</sup>。

---

<sup>1</sup><https://github.com/Jincheng-Gong/>

## 5 可转债的全量定价实证研究

### 5.1 模型稳定性与定价误差分析

取每个可转债的定价偏离值  $n$  日截面平均，对序列做频率分布图，如下所示。

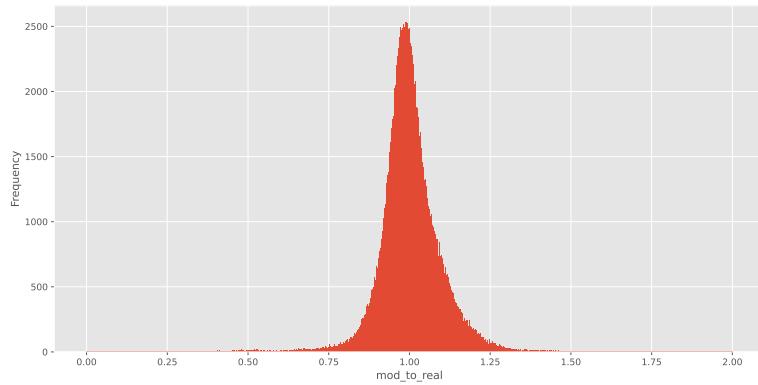


图 3: 定价偏离度频率分布图

由上图，我们能看出该模型得出的定价偏离值覆盖的可转债数量，表明该偏离值适合做截面因子。

其次，我们能看出该因子分布贴近自然正态分布。倘若出现 U 型分布就意味着端的极端因子值多，容易增加换手频率。有些因子值自然是正定的，那就需要在分布上重新做变换成为接近正态来满足 Alpha 的需求。

进一步我们对模型价格序列进行统计性分析与 K-S 检验，结果表明，该模型得出的定价偏离值渐进服从于正态分布，且其与市场价格的平均误差仅为 0.323%。

表 1: Data Description

指标	转债定价偏离度
总量	198816
频率	日频
均值	1.003230
最小值	0.257059
最大值	6.321166
1 <sup>st</sup> 分位数	0.954354
3 <sup>st</sup> 分位数	1.047844
标准差	0.107717
偏度	8.746424
峰度	410.038279

注: 1<sup>st</sup> 分位数和 3<sup>st</sup> 分位数表明, 样本分布呈钟形对称状态, 适合用于构造截面因子。

## 5.2 基于市价序列的协整性分析

进一步我们对模型价格序列与市场价格序列做协整性分析。

结果表明, 在 95% 的置信水平下, 有 49% 的模型价格序列通过了基于市场价格约束的协整检验, 下面展示了五支转债的模型定价与市场定价对比图。

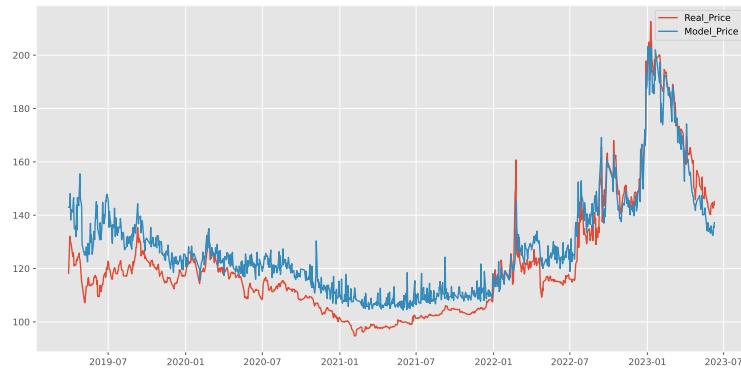


图 4: 贵广转债

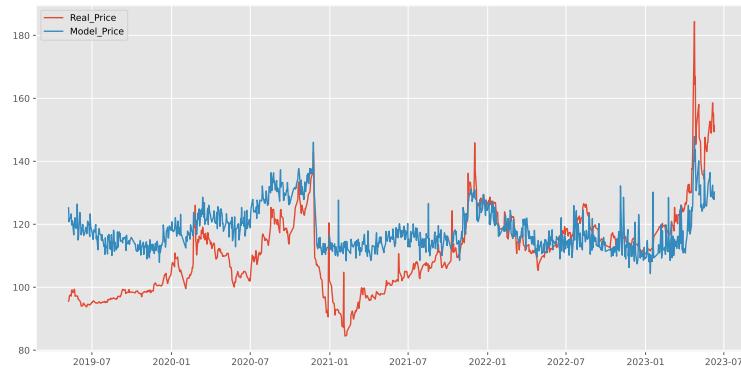


图 5: 永鼎转债

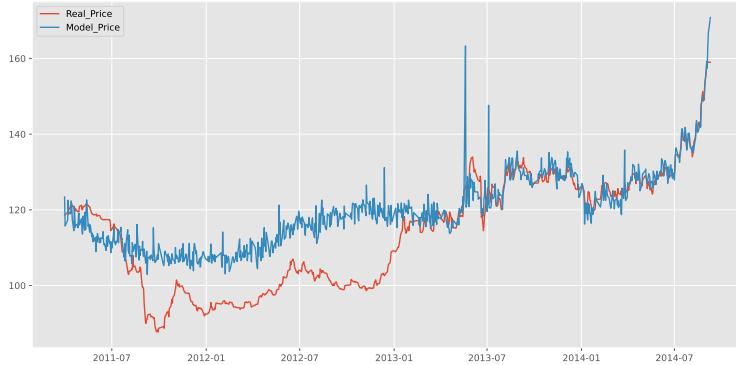


图 6: 川投转债

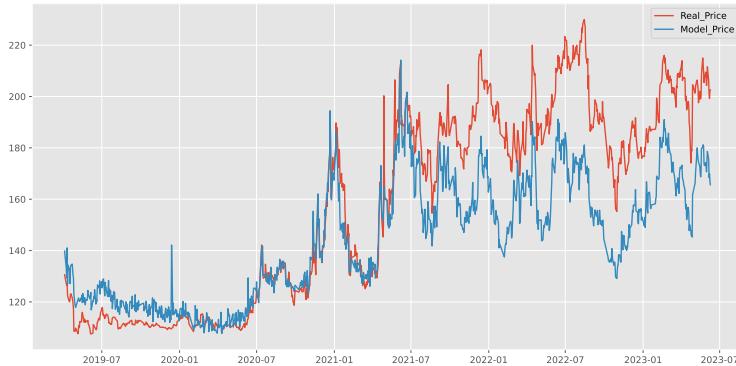


图 7: 伊力转债

### 5.3 定价偏差的单因子回测分析

#### 5.3.1 定价偏差因子构造

$$r_t = \frac{\text{prev\_close}_t}{\text{close}_t} - 1 \quad (9)$$

$$Factor_n = \frac{Model\_Price_n}{Real\_Price_n} - 1 \quad (10)$$

注: n 代表交易日, t 为当日的日线, 回测时间为 2021 年 1 月 1 日 2023 年 6 月 23 日。

### 5.3.2 因子检验

#### 1、因子收益分层（多头空头意义对等）

分层主要考察因子在大样本下的稳定性, 对未来的收益是否有明确的区间划分。通常情况下我们会将因子值按照数值大小做排序划分成五档, 比如 4000 只可转债划分五档, 每一档就有 800 只, 分别观察五档的回测盈利曲线, 得到因子分层图。



图 8: 收益分层曲线

#### 2、首尾层多空收益

将头层的曲线和尾层的做差, 就能得到多空曲线, 多空曲线意味着我们做多最头层的可转债, 做空最尾层的可转债, 最后的收益曲线的情况。



图 9: 首尾多空收益曲线

### 3、Rank\_IC\_Cumsum (IC 的稳定性考察)

Rank\_IC 就是将可转债每一期的因子值和对应未来 n 天的收益率做皮尔逊相关系数，就是在检验因子的预测能力。

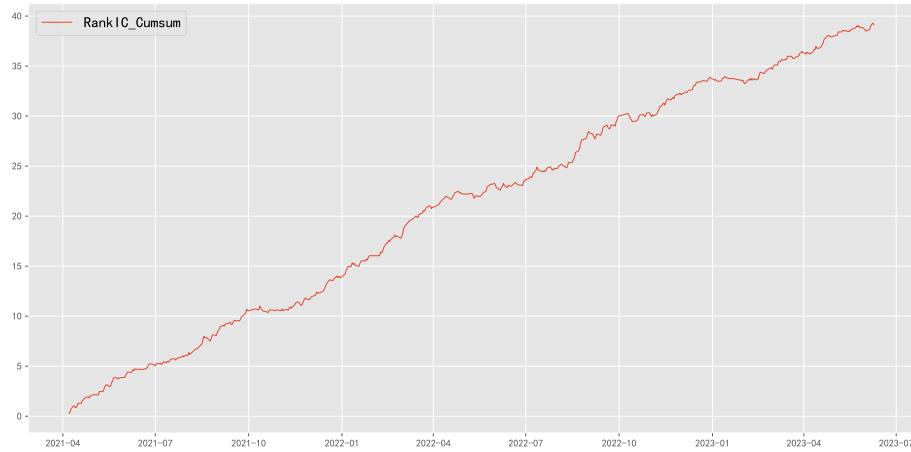


图 10: RankIC 稳定性曲线

### 4、半衰期检验

在我们得到一天的 RankIC 后，我们需要再观察当期的因子值对未来第 n 期的 ret 的相关性系数，图中分别是当期因子值对未来第一日到第十日分别做 RankIC，最后得到一个衰减的曲线，可以看出随着时间拉长，因

子的预测能力越来越低。

半衰期适合之后做组合降换手的优化器准备，基本面的因子一般半衰期较高，而量价因子的半衰期较低，通过得到半衰期曲线，我们能拟合出半衰期的衰减模型，从而构建一个降低组合换手的优化器。

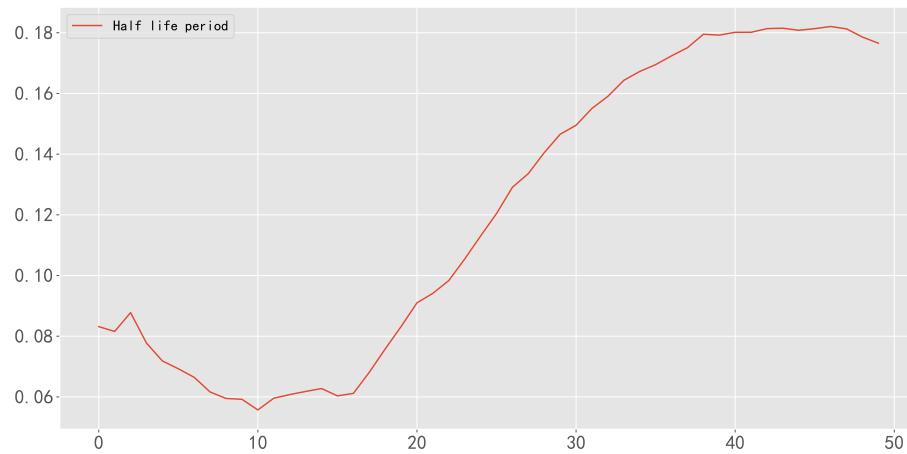


图 11: 半衰期检验