高某人的泛函分析随笔 plus 版

Infty

二〇二三年九月十七日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于送了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

1 基础知识

1.1 拓扑空间

定义 1.1: 拓扑空间

设 X 集合, 子集族 τ, 称 (X,τ) 成为拓扑空间, 若以下三条成立:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $\forall \cup_\alpha x_\alpha \in \tau$
3. $\forall \cap_{i=1}^m X_i \in \tau$

τ 中元素称为开集, 其补集称为闭集.

定义 1.2: 邻域

$\forall x \in X, \exists U \subset \tau, s.t. x \in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

定义 1.3: 邻域基

$\forall x \in X$, 有一个 x 的邻域集 $\mathcal{U}$, 若对 $\forall x$ 的邻域 V,$\exists U \in \mathcal{U}, s.t. x \in U \subset V$

定义 1.4: 收敛

$x_n \to x_0$ 在 $(x,\tau) \Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 邻域 $U, x_0 \in U, \exists N > 0, s.t. n > N$ 时 $x_n \in U$

定义 1.5: 连续映射

$f : f(X,\tau) \to (Y,\sigma)$:
整体上:Y 中开集 V 在 x 中的原像 $f^{-1}(V)$ 也是开集
局部上: 对 $x \in X, f(x) \in Y, \forall V_{f(x)}$, 总 $\exists u_x, s.t. f(u_x) \subset V_{f(x)}$

整体 $\Rightarrow$ 局部:$V_{f(x)} \subset Y, f^{-1}(V_{f(x)}) \triangleq U_x \subset X$ 且 $f(U_x) = V_{f(x)}$

局部 $\Rightarrow$ 整体: 要证 $f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集,$\forall V \subset Y$, 对 $\forall x \in f^{-1}(V), f(x) \in V \subset Y$, 对 $V_{f(x)}, \exists U_x s.t. f(U_x) \subset V_{f(x)}$, 所以 $U_x \subset f^{-1}(V)$

因此 $f^{-1}(V) \supset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 因为 x 为 $f^{-1}(V)$ 中每个点, 则显然有 $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$

因此 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 而因为开集的并集还是开集, 则证明成立.

1.2 距离空间

定义 1.6: 距离空间

(X, ρ) 满足

1. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

定义 1.7: 邻域

$B(x_0, \epsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \epsilon\}, x_0 \subset \rho(x_0, r) \subset V$

定义 1.8: 收敛

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0$

定义 1.9: 连续映射

$f : X \to Y$ 指当 $x \to x_0 \in X$ 时, 都有 $f(x_n) \to f(x_0) \in Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得当 $x_n \in B(x_0, \delta)$ 时, 都有 $f(x_n) \in B(f(x_0), \epsilon)$

1.3 线性距离空间

引入线性结构和拓扑结构 (距离 ρ) 的空间称为距离线性空间, 其线性运算关于 ρ 是连续的.
加法关于 ρ 是连续的, 若 $\rho(x_, x) \to 0, \rho(y_n, y) \to 0$, 则 $\rho(x_n + y_n, x + y) \to 0$
距离平移不变性可以推出加法连续, 而加法连续未必推出距离不变性
数乘关于 ρ 连续. 若 $\rho(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0$ 且 $\alpha_n \to \alpha, \forall\alpha_n \in k \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0$

1.4 F^* 空间 (赋准范数线性空间)

定义 1.10: F^* 空间

在线性空间 X 上定义准范数 $\|\cdot\|, X \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\|x\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|-x\| = \|x\|$
4. $\lim_{n\to\infty} \|alpha_n x\| = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|x\|$, 且 $\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = \alpha \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$

由准范数 $\|\cdot\|$ 定义距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$, 保证了距离性质的三条, 以及加法数乘关于 ρ 连续
F^* 空间是一类特殊的距离线性空间
反之, 定义 $\|x\|=\rho(x,0)+$ 平移不变性 + 数乘对 ρ 连续 $\Rightarrow (X,\|\cdot\|)$ 为 F^* 空间

1.5 B^* 空间 (赋范线性空间)

定义 1.11: B^* 空间

线性空间 X 上定义范数 $\|\cdot\|$:

1. $\|x\|\geq 0$
2. $\|x+y\|\leq\|x+z\|+\|z+y\|$
3. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

B^* 空间 $\subset F^*$ 空间 $\approx$ 距离线性空间
距离 + 齐次性 + 平移不变性 $\Leftrightarrow$ 范数
半范数: $\|x\|\geq 0$, 没有强制规定 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$, 也就是满足半正定.

1.6 内积空间

定义 1.12: 内积空间

在复线性空间 X 上定义一个内积 $<\cdot,\cdot>: X\times X\to\mathbb{R}$, 也就是一个共轭的双线性泛函.

1. $<x,x>\geq 0$ 且 $<x,x>=0$ 时当且仅当 $x=0$
2. $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

可以用内积定义范数 $\|x\|^2=<x,x>$
而范数 + 极化恒等式才能定义内积
内积是连续的,$|<x_n,y_n>-<x,y>|\to 0$, 关于双变元都是连续的