运筹学随笔

Infty

二〇二二年四月二十四日

文章导航

前言

开坑时间:2021.2.25.

之前学过管科的运筹学了, 现在系统的学一下理科运筹学

Infty

二〇二二年四月二十四日

1 线性规划

1.1 线性规划的三种表示形式

定义 1.1: 线性规划概述

$minz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$s.t. \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & i = 1, 2, \cdots, p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i & i = p+1, p+2, \cdots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \cdots, q \\ x_j\text{无限制} & j = q+1, q+2, \cdots, n \end{cases}$$

$x_j; j = 1, 2, \cdots, n$: 为待定的决策变量
$x_j \geq 0$(非负约束): 非负变量
x_j(无限制): 可正可负或零, 自由变量
$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)'$: 为价值向量
$c_j; j = 1, 2, \cdots, n$: 为价值系数
$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)'$: 为右端向量
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为系数矩阵

定义 1.2: 线性规划一般形式

$minz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$s.t. \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & i = 1, 2, \cdots, p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i & i = p+1, p+2, \cdots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \cdots, q \end{cases}$$

定义 1.3: 线性规划的规范形式

$min = c^Tx$

$$s.t. \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

定义 1.4: 线性规划的标准形式

$min = c^T x$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

关于如果将一般线性规划转换成标准形式.

1. 变量转换

   令自由变量 $x_j = x_j^+ - x_j^-$, 其中 x_j^+, x_j^- 为非负变量

2. 目标转换

   求最大可以等价成求负的最小.$maxc^T \longrightarrow min - c^T x$

   特别的:$a \leq x_1 \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x_2 \leq b - a \\ x_2 = x_1 - a \end{cases}$

3. 等式变不等式

   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

4. 不等式变等式

   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ 变成 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i, s_i \geq 0$ 其中 s_i 称为松弛变量

   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ 变成 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s_i = b_i, s_i \geq 0$ 其中 s_i 称为剩余变量

5. 不等式变不等式

   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ 变成 $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq -b_i$

   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ 变成 $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$

例题 1.1: 第一周第一题

某商业集团公司在 A_1, A_2, A_3 三地设有仓库, 他们分别库存 40,20,40 个单位产品, 而其零售商店分布在地区 $B_i, i = 1, 2, \cdots, 5$, 它们需要的产品分别是 25,10,20,30,15 个单位, 产品从 A_i 到 B_j 的每单位装运费列于下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	55	30	40	50	40
A_2	35	30	100	45	60
A_3	40	60	95	35	30

设 x_{ij} 为从 A_i 到 B_j 的运输量,a_{ij} 为从 A_i 到 B_j 的运输费用 (在题目中已经给出)
$x_{ij} \geq 0$
对于每个仓库, 运输到每个商店的货物和小于等于库存 (等于也是对的, 因为供需是相等的)

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 40$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 20$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 40$$

对于每个商店, 接受每个仓库的货物应该等于需求.

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 25$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 10$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 20$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 30$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 15$$

目标函数为: $min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_{ij}$

例题 1.2: 第一周第二题

$$\begin{cases} \max x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ -1 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$$

对于 $-1 \leq x_2 \leq 6$, 令 $x_2 = x_4 + 1$, 那么有 $0 \leq x_4 \leq 7$, 调整线性规划

$$\begin{cases} \min -x_1 + x_4 - 2x_3 - 1 \\ x_1 - 2x_4 + 3x_3 \geq 8 \\ 2x_1 + x_4 - x_3 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_4 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$x_3 = x_5 - x_6, x_5, x_6 > 0$

$$\begin{cases} \min -x_1 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 - 1 \\ x_1 - 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \geq 8 \\ 2x_1 + x_4 - x_5 + x_6 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_4 \leq 7 \\ x_i \geq 0, i = 1, 4, 5, 6 \end{cases}$$

不等式变等式

$$\begin{cases} \min -x_1 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 - 1 \\ x_1 - 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 - x_7 = 8 \\ 2x_1 + x_4 - x_5 + x_6 + x_8 = 4 \\ x_1 + x_9 = 3 \\ x_4 + x_{10} = 7 \\ x_i \geq 0, i = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

1.2 线性规划的图解法

定义 1.5

$minz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c^Tx$

$$s.t. \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & i = 1, 2, \cdots, p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i & i = p+1, p+2, \cdots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \cdots, q \end{cases}$$

可行解 (或可行点): 满足所有约束条件的向量.

可行集 (或可行域): 所有的可行解的全体 D

最优解: 在可行域中目标函数值最小 (或最大) 的可行解, 最优解的全体称为最优解集合 $O = \{x \in D | c^T \leq c^Ty, \forall y \in D\}$

最优值: 最优解的目标函数值 $v = c^Tx, x \in O$

定义 1.6: 图解法

对于只有两个变量的线性规划问题, 可以用图解法求解:

1. 在直角坐标系中根据约束条件画出可行域 (可行区域是一个凸多边形)
2. 木变函数用一组等值线表示, 画一条穿过可行域的目标函数等值线, 将其沿着增加 (梯度) 或减少 (负梯度) 的方向移动, 与可行域最后的交点就是最优解.

推论 1.1: 可能出现的情况

1. 可行域是空集 (问题无解)
2. 可行域无解无最优解 (问题无界)
3. 最优解存在且唯一, 则一定在顶点上达到
4. 最优解存在且不唯一, 一定存在顶点是最优解

定义 1.7

设 $S \in R^n$ 是 n 维欧氏空间的点集, 若对任意 $x \in S, y \in S$ 和任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

就称 S 是一个凸集

定理 1.1

可行域 $D = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$ 是凸集

定理 1.2

线性规划的可行域 $D = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$ 是凸集

定理 1.3

任意多个凸集的交还是凸集

定义 1.8: 超平面, 半空间, 多面凸集, 多面体

1. 超平面:$H = \{x \in R^n|a^T = b\}$
2. 半空间:$H^+ = \{x \in R^n|a^T \geq b\}, H^- = \{x \in R^n|a^T \leq b\}$
3. 多面凸集:$S = \{x \in R^n|a^T = b; i = 1, 2 \cdots, p, a_i^T x \geq b_i; i = p+1, p+2, \cdots, p+q\}$
4. 多面体: 非空有界的多面凸集

定义 1.9: 顶点

设 S 是凸集,$x \in S$, 如果对任意 $y, z \in S$ 和 $0 < \lambda < 1$, 都有 $x \neq \lambda y + (1-\lambda)z$, 则称 x 为 S 的顶点.

1.3 基本可行解

考虑线性规划的标准形式:
$minc^T x$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x, c \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n}$, 并且假定可行域 $\{x \in R^n|Ax = b, x \geq 0\}$ 不空, 系数矩阵 A 是行满秩的,$r(A) = m$ 否则的话可以去掉多余约束.

定义 1.10

设 B 是秩为 m 的约束矩阵 A 的一个 m 阶满秩字方针, 则称 B 为一个基,B 中 m 个线性无关的列向量称为基向量, 变量 x 中与之对应的 m 个分量称为基变量, 其余的变量称为非基变量, 令所有的非基变量取值为 0, 得到的解 $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为相应于 B 的基本解. 当 $B^{-1}b \leq 0$, 则称基本解为基本可行解, 这时对应的基阵 B 为可行基.

如果 $B^{-1}b > 0$ 则称该基可行解为非退化的, 如果一个线性规划的所有基可行解都是非退化的, 则称该规划为非退化的.

定理 1.4

可行解是基本可行解的充要条件是其为可行域 D 的顶点.

定理 1.5

一个标准的 LP 问题如果有可行解, 则至少有一个基本可行解.

定理 1.6

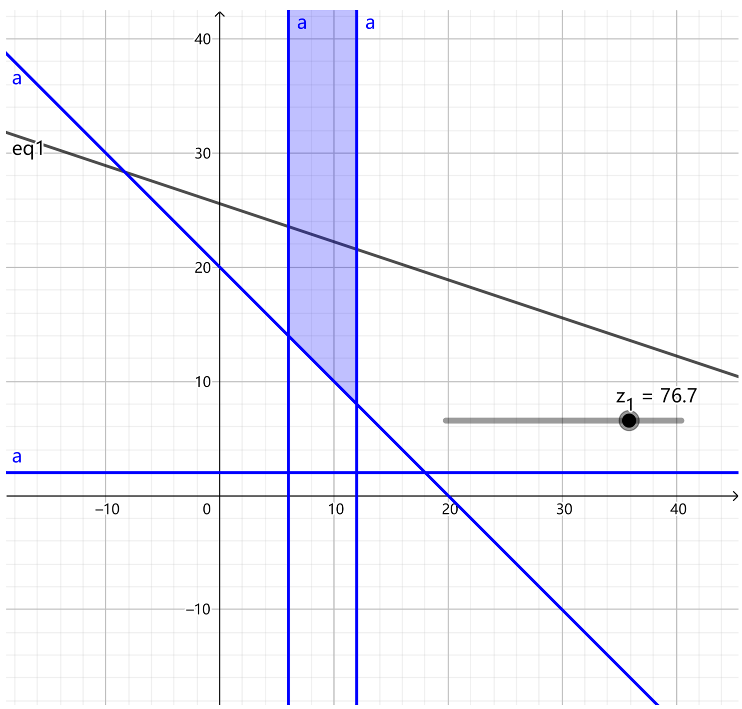
一个标准的 LP 问题如果有有限的最优值, 则一定存在一个基本可行解是最优解.

例题 1.3

$$\begin{cases} \max x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 20 \\ 6 \leq x_1 \leq 12 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

解答:

用图解法作图可得:



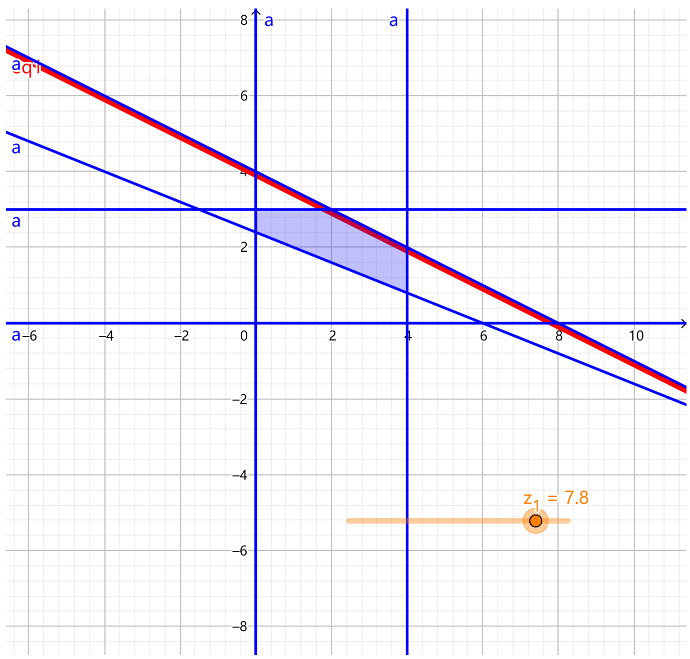
故目标函数没有最大值.

例题 1.4

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$$

解答:

用图解法作图可得:



故目标函数最大值为 8

例题 1.5

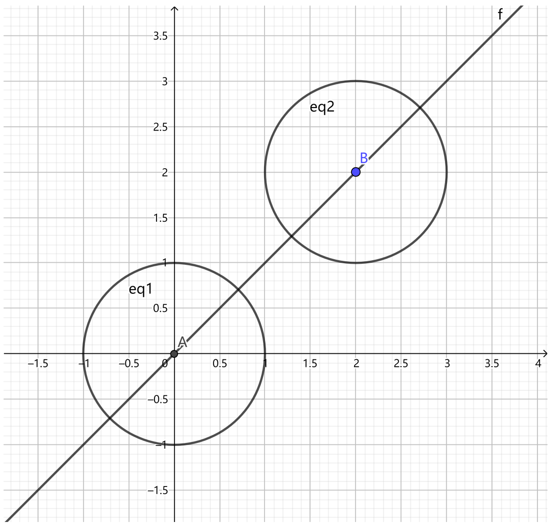
1. 证明任意多个凸集的交集还是凸集
2. 举例说明两个凸集的并集并不一定是凸集.

解答:

(1) 取指标集 $\Lambda, \forall\lambda \in \Lambda, U_\lambda$ 都是凸集.

设 $A = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda, \forall x, y \in A$ 都有 $x, y \in U_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$ 由于 U_λ 是凸集,$sx + (1-s)y \in U_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 故 $sx + (1-s)y \in A$

(2)



例题 1.6

某线性规划问题的约束条件是:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

问变量 x_2, x_4 所对应的列向量 A_2, A_4 是否构成可行基? 若是, 写出 B,N, 并求出 B 所对应的基本可行解.

解答:

系数矩阵 A =

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

故构成可行基

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.4 单纯形法

记号声明:

$Ax = b \Rightarrow (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b$

$\bar{b} = B^{-1}b = (\bar{b_1}, \bar{b_2}, \cdots, \bar{b_m})$

$\bar{A} = B^{-1}A_j = (\bar{A_1},, \bar{A_2}, \cdots, \bar{A_n})^T$

定理 1.7: 最优性准则

如果 $\xi \leq 0$, 则基可行解 $\bar{x}$ 为原问题的最优解.

定理 1.8

如果向量 ξ 的第 k 个分量 $\xi_k > 0(m+1 \leq k \leq n)$, 而向量 $\overline{A_k} = B^{-1}A_k \leq 0$ 则原问题无界

定理 1.9

对于非退化的基本可行解 $\bar{x}$, 如果向量 ξ 有 $\xi_k > 0$, 而相应的向量 $\overline{A_k}$ 至少有一个正分量, 则能找到一个新的基本可行解 $\hat{x}$, 使得 $c^T\bar{x} < c^T\bar{x}$

定理 1.10

对于任何非退化的线性规划问题, 从任何基本可行解开始, 经过有限次迭代, 或得到一个基本可行的最优解, 或作出该线性规划问题无界的判断.

单纯形法的基本思想:

$maxz = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

对于该线性规划问题, 系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然可以选取 x_3, x_4, x_5 作为基变量, 将基变量表示出来

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases}$$

代入目标函数得到 $z = x_1 + 3x_2$

得到一组基本可行解 $X^{(0)} = (0, 0, 8, 16, 12)$

显然这并不是最优解, 因为 x_1, x_2 前的系数大于 0, 显然还有提升的空间, 并且 x_2 前的系数要大一些, 因为提升 x_2 可以使得目标函数有更大的提升.

将 x_2 换入到基变量当中.

对于

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases}$$

x_j 首先是要大于 0 的, 因此如果取 $x_2 = 0, x_3$ 增加到 3 的时候,x_5 先变为 0, 其余变量大于 0, 因此换出 $x_5(x_2 = min\{\frac{8}{2}, \frac{12}{4}\})$

用新的基变量表示约束条件:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

用新的基变量表示目标函数 $z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$

显然目标函数还是有提升空间的, 将 x_1 换入, 将 x_4 换出.
用新的基变量表示约束条件:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_1 = 4 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

用新的基变量表示目标函数 $z = 17 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5$
此时目标函数变量系数全为负, 故此时目标函数取得了最大值.
该流程可以在单纯形表中表示, 因为上述过程就是矩阵运算.

例题 1.7

对于下面的线性规划问题, 以 $B = (A_2, A_3, A_6)$ 为基写出对应的典式.
$\min x_1 - 2x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

236145
解答:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_B = (x_2, x_3, x_6)' x_N = (x_1, x_4, x_5)' b = (7, 12, 10)'$$

$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$
计算可得: $x_B + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{25}{2} & -4 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} x_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -39 \end{pmatrix}$

例题 1.8

用单纯形法求解下面的线性规划问题, 并在平面上画出迭代点走过的路线.

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 60 \\ x_1 + x_2 \le 18 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

首先化成标准型

$$
\begin{cases}
\min z = -2x_1 - x_2 \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\
x_1 + x_2 + x_4 = 18 \\
3x_1 + x_2 + x_5 = 44 \\
x_2 + x_6 = 10 \\
x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, 6
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	2	1	0	0	0	0	0
x_3	2	5	1	0	0	0	60
x_4	1	1	0	1	0	0	18
x_5	3	1	0	0	1	0	44
x_6	0	1	0	0	0	1	10

$\xrightarrow[x_5\text{为出基变量}]{x_1\text{为进基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{88}{3}$
x_3	0	$\frac{13}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{92}{3}$
x_4	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{44}{3}$
x_6	0	1	0	0	0	1	10

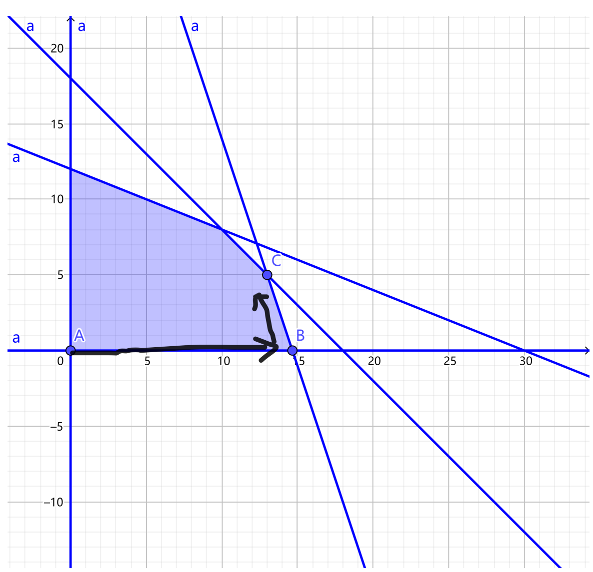
$\xrightarrow[x_4\text{为出基变量}]{x_2\text{为进基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-31
x_3	0	0	1	$-\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	9
x_4	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	5
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	13
x_6	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5

最优解为-31

迭代点为:$(0,0) \to (\frac{44}{3}, 0) \to (13, 5)$

如下图所示:



例题 1.9

用单纯形法求解下列线性规划问题:

$$\begin{cases} \min z = x_1 - x_2 + x_3 + x_5 - x_6 \\ 3x_3 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ -x_1 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	0	1	2	0	0	1	0	6
x_1	0	0	3	0	1	1	0	6
x_4	0	-1	-2	1	0	0	0	-10
x_5	1	0	0	0	0	-1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	1	1	6

$\xrightarrow[x_1\text{为出基变量}]{x_3\text{为进基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	-2	1	0	0	0	1	-2	-6
x_3	-3	0	0	0	1	1	-3	-12
x_4	2	-1	0	1	0	0	2	2
x_5	1	0	1	0	0	0	1	6
x_7	-1	0	1	0	0	1	0	0

该问题无界

1.5 两阶段法

在单纯形法中, 我们可以轻松的找到一组可行基, 即找到一组基本可行解, 如果找不到则可以考虑两阶段法.

定义 1.11: 两阶段法的基本思想

1. 第一阶段: 通过求解辅助问题的最优基可行解得到原问题无解, 或者得到原问题的基本可行解, 确定基
2. 求解原问题的最优解

设原问题为:

$$\min c^T x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

不妨设 $b \geq 0$, 如果某一个元素小于 0, 该方程两边乘以-1 后则可使右端数变成正数. 考虑如下问题

$$\min g = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} Ax + x_a = b \\ x \geq 0, x_a \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x_n = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})$

显然如果原问题有可行解, 则辅助问题的最优值为 0, 反之亦然.

求辅助问题会遇到两种情况

1. $\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} x_i = 0$ 且 x_a 为非基变量, 则此时 x 是原问题的基本可行解, 且基变量不变, 在辅助问题的最优基本可行解的单纯形表里删除 x_a 对应的列, 同时计算出检验数就可以得到原问题的单纯形表
2. $\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} x_i = 0$ 且 x_a 中有部分变量为基变量, 此时 x 是原问题的基本可行解, 不同的是基变量会有些改变, 即要确定基

注: 若辅助问题的最优值维零, 其最优单纯形表下方某行原问题的变量系数均为零, 则删除其在原问题所对应的方程.

1.6 对偶理论

约束变为 w 的约束, 若是 $\geq$ 或 $\leq$ 则依旧是 $\geq$ 或 $\leq$, 若是 $=$ 则 w 无限制

x 的条件变为约束, 若是 $\geq$, 则约束为 $\leq$, 若无限制约束为 $=$

定理 1.11

如果一个线性规划有最优解, 则其对偶规划也有最优解, 且它们的最优解相同.

推论 1.2

若 x 和 ω 分别是原规划和对偶规划的可行解, 则 x 和 ω 分别是原规划和对偶规划的最优解的充分必要条件是 $c^T x = b^T \omega$

推论 1.3

线性规划的对偶规划的对偶规划是原始规划.

定理 1.12

给定一个原规划和对偶规划, 则下面三种情况必有其一:

1. 都有最优解
2. 都无可行解
3. 一个无可行解一个无界

定理 1.13

若 x 和 ω 分别是原规划和对偶规划的可行解, 则它们分别是原规划和对偶规划的最优解的充分必要条件是, 对于一切 $i = 1, 2, \cdots, m$ 和一切 $j = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$u_i = \omega_i(a_i^T x - b_i) = 0, v_j = (c_j - \omega^T A_j)x_j = 0$$

例题 1.10

用两阶段法求解下列问题.

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 0 \\ x_2 \geq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

首先添加松弛变量剩余变量以及人工变量, 变为下表

$$\begin{cases} \min -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - x_7 + x_8 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

辅助问题为 $\min g = x_8$

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & RHS \\
z & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
x_6 & 3 & 6 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{c|ccccccc|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & RHS \\
z & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
x_6 & 3 & 6 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[x_2\text{为进基变量}]{x_6\text{为离基变量}}
\begin{array}{c|ccccccc|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & RHS \\
z & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\
g & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -1 & 0 & 4 \\
x_5 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 30 \\
x_2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
x_8 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -1 & 1 & 4
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[x_4\text{为进基变量}]{x_8\text{为离基变量}}
\begin{array}{c|ccccccc|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & RHS \\
z & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -16 \\
g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
x_5 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 & -4 & 14 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\
x_4 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 & 3 & 12
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[x_7\text{为进基变量}]{x_5\text{为离基变量}}
\begin{array}{cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & RHS \\
z & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -30 \\
x_7 & 5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 8 & 28 \\
x_2 & \frac{5}{8} & 1 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{15}{2} \\
x_4 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{45}{2}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[x_3\text{为进基变量}]{x_7\text{为离基变量}}
\begin{array}{cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & RHS \\
z & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{104}{3} \\
x_3 & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{28}{3} \\
x_2 & \frac{5}{8} & 1 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{15}{2} \\
x_4 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{45}{2}
\end{array}
$$

最大值为 $\frac{104}{3}$

例题 1.11

写出下面线性规划的对偶规划

$$\begin{cases} \min x_1+2x_2+4x_3 \\ 2x_1+3x_2+4x_3\le 2 \\ 2x_1+x_2+6x_3=3 \\ x_1+3x_2+5x_3\le 5 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\text{为自由变量} \end{cases}$$

换成标准形式

$$\begin{cases} \min x_1+2x_2+4x_3 \\ 2x_1+3x_2+4x_3\ge 2 \\ 2x_1+x_2+6x_3=3 \\ -x_1+-3x_2-5x_3\ge -5 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\text{为自由变量} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max 2\omega_1+3\omega_2-5\omega_3 \\ 2\omega_1+2\omega_2-\omega_3\le 1 \\ 3\omega_1+\omega_2-3\omega_3\le 2 \\ 4\omega_1+6\omega_2-5\omega_3=4 \\ \omega_1\ge 0 \quad \omega_2\text{无限制} \quad \omega_3\ge 0 \end{cases}$$

1.7 对偶单纯形算法

应用于价值向量为正, 且约束条件大于 0 的情况.

例题 1.12

把线性规划问题

$$\begin{cases} \min x_1+x_3 \\ x_1+2x_2\le 5 \\ \frac{1}{2}x_2+x_3=3 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

记为 P,

1. 用单纯形算法解 P;
2. 写出 P 的对偶 D
3. 写出 P 的互补松紧条件, 并利用他们解对偶 D, 通过计算 P 和 D 的最优值, 检查你的答案.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	0	-1	0	0
x_4	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_4	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

$\xrightarrow[x_2\text{为进基变量}]{x_4\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

(2)

$$\begin{cases} \max -5w_1 + 3w_2 \\ -w_1 \leq 1 - 2w_1 + \frac{1}{2}w_2 \leq 0 \\ w_2 \leq 1 \\ w_1 \geq 0, w_2\text{无约束} \end{cases}$$

(3)
P 的互补松紧条件为

$$\begin{cases} -2w_1 + \frac{1}{2}w_2 = 0 \\ w_2 = 1 \end{cases}$$

得到最优解 $w^* = (\frac{1}{4}, 1)$
最优值为 $\frac{7}{4}$

例题 1.13

用对偶单纯形法求解下列问题:

$$\begin{cases} \min 2x_1+3x_2+4x_3 \\ x_1+2x_2+x_3 \geq 3 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \geq 4 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	1	2	1	-1	0	3
x_5	2	-1	3	0	-1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	1	2	1	-1	0	3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4

$\xrightarrow[x_2\text{为进基变量}]{x_4\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	-2	1	-3	0	1	-4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{11}{2}$

$\xrightarrow[x_1\text{为进基变量}]{x_5\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	1	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{5}$

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_4	0	1	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_5	1	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{5}$

故最优解为 $\frac{28}{5}$

例题 1.14

考虑第 1 题中的线性规划 P, 在下述每一种情况下, 试利用解问题 P 所得到的最优单纯形表继续求解.

1. c_1 由 1 变为 $-\frac{5}{4}$
2. c_1 由 1 变为 $-\frac{5}{4}$,c_3 由 1 变为 2
3. b 由 $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(1)

$\xi_1' = \xi_1 + (c_1 - c_1') = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

$\xrightarrow[x_1\text{为进基变量}]{x_2\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	-2	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{4}$
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

最优解为 $-\frac{13}{4}$

(2)

$\xi_1' = \xi_1 + (c_1 - c_1') = 1$

$\xi_3' = \xi_3 + (c_3 - c_3') = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

$\xrightarrow[x_1\text{为进基变量}]{x_2\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{4}$
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

最优解为 $-\frac{1}{4}$

(3)

$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$z_0' = \frac{3}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

$\bar{b}_r = \min\{-a, \frac{3}{2}\} = -1 = b_1$

$\bar{a_{1j}} \geq 0$

故没有可行解

例题 1.15

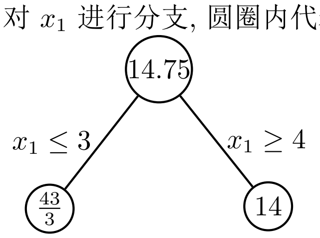
用分支定界法解下述 ILP 问题

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

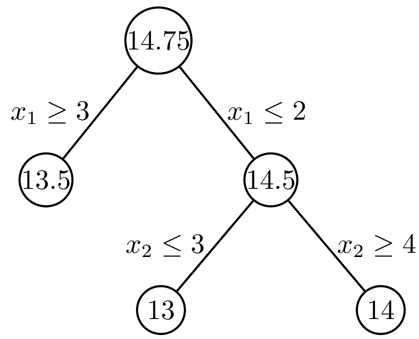
$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优解为 $x_1 = 3.25, x_2 = 2.5, z = 14.75$

对 x_1 进行分支, 圆圈内代表 z



对 x_2 进行分支



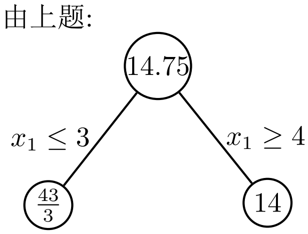
最终得到整数最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 1, z = 14$

例题 1.16

用分支定界法求解下面的混合整数线性规划问题:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1\text{为整数} \end{cases}$$

由上题:



最终得到整数最优解为 $x_1 = 3, x_2 = \frac{8}{3}, z = \frac{43}{3}$

1.8 割平面法

例题 1.17

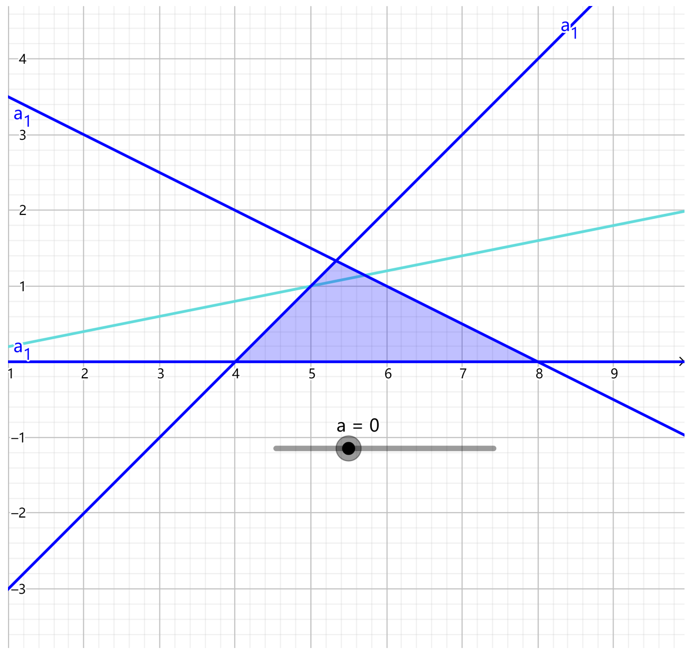
给定 ILP 问题如下:

$$\begin{aligned} &\min z = x_1 - 5x_2 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &x_1 - x_2 \geq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{aligned}$$

1. 用图解法求出该 ILP 问题的所有可行解及最优解与最优值.

2. 用割平面算法求解.

(1).



所有的可行解有:

$$(4,0),(5,0),(6,0),(7,0),(8,0),(5,1),(6,1)$$

最优解为 $(5,1)$, 最优值为 $z=0$

(2).

$$\begin{aligned}
&\min z = x_1 - 5x_2\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 8\\
&x_1 - x_2 - x_4 = 4\\
&x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数}
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	5	0	0	0
x_3	1	2	1	0	8
x_4	1	-1	0	-1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	5	0	0	0
x_3	1	2	1	0	8
x_4	1	-1	0	-1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	4	0	-1	4
x_2	0	3	1	1	4
x_4	1	-1	0	-1	4

$\xrightarrow[x_2\text{为进基变量}]{x_3\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	4	0	-1	4
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_4	1	-1	0	-1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_4	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RHS
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_4	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{16}{3}$
s	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$

$\xrightarrow[x_3\text{为进基变量}]{s\text{为离基变量}}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RHS
	0	0	0	-1	-4	0
x_2	0	1	0	0	1	1
x_4	1	0	0	-1	1	5
s	0	0	1	1	-3	1

最优解为 $x=(5,1)$, 最优值为 $z=0$

例题 1.18

试在同一平面坐标系中画出下列 (MP) 的可行域及目标函数的等值线, 并在图中标出其局部最优解或整体最优解.

(1).

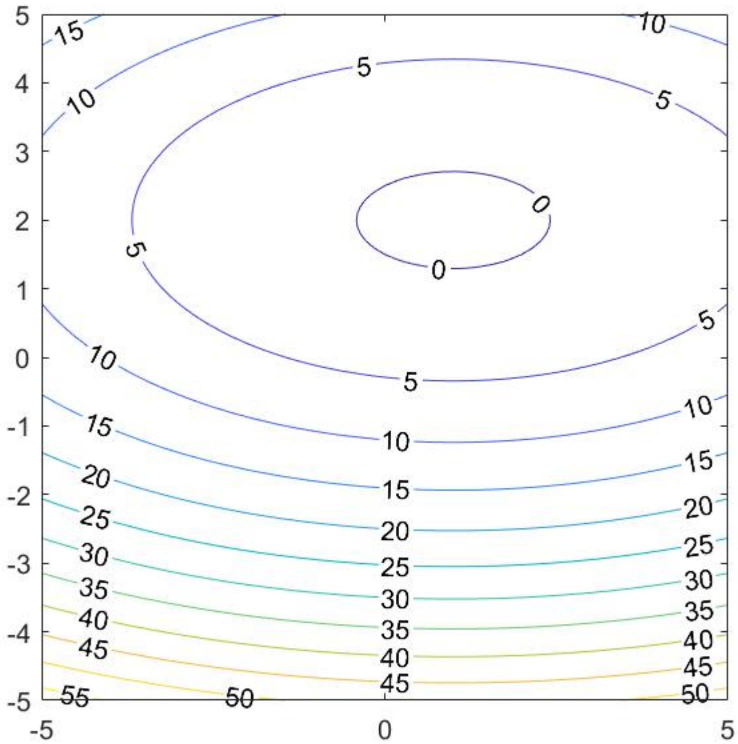
$\min(\frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 + \frac{15}{4})$

(2).

$$\begin{aligned}&\min x_1^2 - x_2\\&x_1^2 + x_2^2 \leq 4\\&x_1 \leq 0\\&x_2 \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

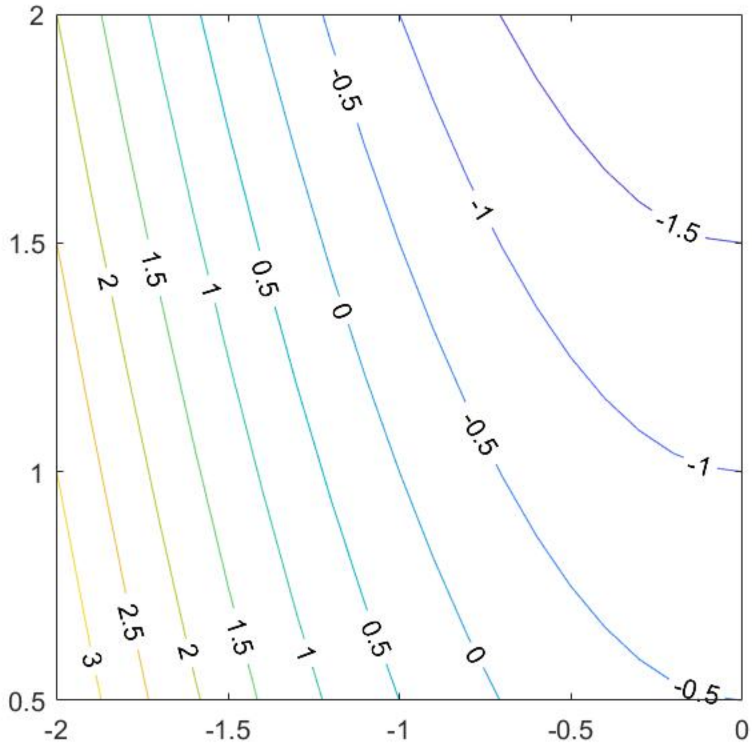
(1).

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 + \frac{15}{4}\\=&\frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1) + x_2^2 - 4x_2 + \frac{15}{4}\\=&\frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 - \frac{1}{4} + (x_2 - 2)^2 - 4 + \frac{15}{4}\\=&\frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$



最优值为 $-\frac{1}{2}$

(2).



最优值为 -2

2 非线性规划

2.1 基本概念

定义 2.1

对于非线性规划 (MP), 若 $x^* \in X$, 并且有

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$$

则称 x^* 是 (MP) 的整体最优解或整体极小点, 称 $f(x^*)$ 是 (MP) 的整体最优值或整体极小值. 如果有

$$f(x^*) < f(x), \forall x \in X, x \neq x^*$$

则称 x^* 是 (MP) 的严格整体最优解或严格整体极小点, 称 $f(x^*)$ 是 (MP) 的严格整体最优值或严格整体极小值.

定义 2.2

对于非线性规划 (MP), 若 $x^* \in X$, 并且存在 x^* 的一个邻域 $N_\delta(x^*) = \{x \in R^n | \|x - x^*\| < \delta\}(\delta > 0, \delta \in R)$, 使得

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in N_\delta(x^*) \cap X$

则称 x^* 是 (MP) 的局部最优解或局部极小点, 称 $f(x^*)$ 是 (MP) 的局部最优值或局部极小值. 如果有

$f(x^*) < f(x), \forall x \in N_\delta(x^*) \cap X, x \neq x^*$

则称 x^* 是 (MP) 的严格局部最优解或严格局部极小点, 称 $f(x^*)$ 是 (MP) 的严格局部最优值或严格局部极小值.

定义 2.3

设 $f: R^n \to R, \bar{x} \in R^n, p \in R^n, p \neq 0$, 若存在 $\delta > 0$, 使得 $f(\bar{x} + tp) < f(\bar{x}), \forall t \in (0, \delta)$

则称向量 p 是函数 f(x) 在点 $\bar{x}$ 处的下降方向

定义 2.4

设 X$\subset R^n, \bar{x} \in X, p \in R^n, p \neq 0$, 若存在 $t > 0$, 使 $\bar{x} + tp \in X$

则称向量 p 是函数 f(x) 在点 $\bar{x}$ 处关于 X 的可行方向

2.2 凸函数及凸规划

定义 2.5

设 $S \subset R^n$ 是非空凸集,$f: S \to R$, 如果对任意的 $\alpha \in (0,1)$ 有 $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2), \forall x^1, x^2 \in S$ 则称 f 是 S 上的凸函数, 或 f 在 S 上是凸的. 如果对于任意的 $\alpha \in (0,1)$ 有 $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) < \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2), x^1 \neq x^2$, 则称 f 是 S 上的严格凸函数, 或 f 在 S 上是严格凸的.

若-f 是 S 上的 (严格) 凸函数, 则称 f 是 S 上的 (严格) 凹函数, 或称 f 在 S 上是 (严格) 凹的.

定理 2.1

设 $S \subset R^n$ 是非空凸集.

1. 若 $f: R^n \to R$ 是 S 上的凸函数,$\alpha \geq 0$, 则 αf 是 S 上的凸函数.
2. 若 $f_1, f_2: R^n \to R$ 都是 S 上的凸函数, 则 $f_1 + f_2$ 是 S 上的凸函数.

定理 2.2

设 $S \subset R^n$ 是非空开凸集,$f: S \to R$ 可微, 则

1. f 是 S 上的凸函数的充分必要条件是

$$\nabla f(x^1)(x^2 - x^1) \leq f(x^2) - f(x^1), \forall x^1, x^2 \in S$$

其中 $\nabla f(x^1) = (\frac{\partial f(x^1)}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f(x^1)}{\partial x^n})^T$ 是函数 f 在点 x^1 处的一阶导数或梯度.

2. f 是 S 上的严格凸函数的充要条件是

$$\nabla f(x^1)^T(x^2 - x^1) < f(x^2) - f(x^1), \forall x^1, x^2 \in S, x^1 \neq x^2$$

定理 2.3

设 $S \subset R^n$ 是非空开凸集,$f: S \to R$ 二阶连续可导, 则 f 是 S 上的凸函数的充要条件是 f 的 Hesse 矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 在 S 上是正定矩阵时, f 是 S 上的严格凸函数.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

定理 2.4

设 $S \subset R^n$ 是非空凸集,$f: S \to R$ 是凸函数,$c \in R$, 则集合 $H_s(f, c) = \{x \in S | f(x) \leq c\}$ 是凸集.

定理 2.5

设 $S \subseteq R^n$ 是非空凸集,$f: S \to R$ 是凸函数,$c \in R$, 则集合 $H_s(f, c) = \{x \in S | f(x) \leq c\}$ 是凸集

定义 2.6

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, p \\ h_j(x) = 0, j = 1, \cdots, q \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} x \in R & g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, p \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \cdots, q \end{cases}$$

如果 (MP) 的约束集 X 是凸集, 目标函数 f 是 X 上的凸函数, 则 (MP) 叫做非线性凸规划或简称为凸规划.

定理 2.6

对于非线性规划 (MP), 若 $g_i(x), i = 1, 2, \cdots, p$ 皆为 R^n 上的凸函数,$h_j(x), j = 1, \cdots, q$ 皆为线性函数, 并且 f 是 X 上的凸函数, 则 (MP) 是凸规划

定理 2.7

凸规划的任一局部最优解都是它的整体最优解

例题 2.1

判别以下函数哪些是凸的, 哪些是凹的, 哪些是非凸非凹的

1. $f(x_1, x_2) = 60 - 10x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$
2. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3$

(1)
写出 f 的 Hesse 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

一阶顺序主子式 $2 > 0$
二阶顺序主子式 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$
故 Hesse 矩阵为正定, 函数 f 为严格凸的.
(2).
写出-f 的 Hesse 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

一阶顺序主子式 $2 > 0$
二阶顺序主子式 $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = 20 - 4 = 16 > 0$
故 Hesse 矩阵为正定, 函数-f 为严格凸的,f 为严格凹的
(3).
写出 f 的 Hesse 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

一阶主子式 $2 > 0$
二阶主子式 $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} > 0$
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} > 0$
$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} > 0$
三阶顺序主子式 $H = 0$
故 Hesse 矩阵为半正定的, 函数为凸函数.

例题 2.2

证明下列规划为凸规划

$$\begin{cases} min & x_1^3+2x_1x_2+2x_2^2 \\ s.t. & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

问该问题是否存在最优解

对于约束函数 $x_1-1\geq 0$ 也就是 $-x_1+1\leq 0$, 显然是凸的.
写出 $f=x_1^3+2x_1x_2+2x_2^2$ 的 Hesse 矩阵.

$$H=\begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

一阶顺序主子式 $6x_1>0$
二阶顺序主子式 $\begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}>0$
故 Hesse 矩阵为正定, 函数 f 为严格凸的.
在区域 $x_1^2+x_2^2\leq 1$
在上述区域中,$x_1\leq 1$, 而由约束条件 $x_1\geq 1$
$x_1=1$
原式变为:$1+2x_2+2x_2^2$, 显然该式子有最小值
故目标函数存在局部最优解, 故存在全局最优解

2.3 无约束规划

例题 2.3

求以下无约束非线性规划问题的最优解

1. $\min f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2-20x_1-16x_2$
2. $\min f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-12x_1^4$

(1).
写出该函数的 Hesse 矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

经验证一阶二阶顺序主子式, 知 H 为正定矩阵, 即 H 是正定的.
由 $\nabla f=0$

$$\begin{cases} 6x_1+2x_2-20=0 \\ 2x_2+x_1-8=0 \end{cases}$$

解得

$x_1 = \frac{12}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$

最小值为:-46.4

(2).

求函数 f 的驻点,$\nabla f = 0$

得到 $(0, 0), (\pm\frac{\sqrt{6}}{12}, 0)$

在 (0,0) 时, 对应 f 的 Hesse 矩阵 H 为正定的.

$$H = \begin{pmatrix} 2 - 144x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

此时,(0,0) 为局部最优解, 局部最优值为 0

分析可知该函数可以取到负无穷, 故没有全局最优解

例题 2.4

当参数 α 取何值时,$x^* = (0, 0, 0)^T$ 是问题

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 e^{x_2} + x_2^2 e^{x_3} + x_3^2 e^{x_1}$$

的局部最优解.

经验证 x^* 为驻点.

f 的 Hesse 矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

若 H 是正定的, 那么 x^* 为局部最优解, 即 $\alpha > 0$

若 $\alpha = 0$, 此时 $f = x_2^2 e^{x_3} + x_3^2 e^{x_1} \geq 0$

此时 (0,0,0) 是全局最优解, 同样是局部最优解

最终 $\alpha \geq 0$

2.4 约束最优化方法

例题 2.5

用 K-T 条件解:

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

解答:

$$L(x,\lambda) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \lambda(1 - x_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2 + \lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ -x_1 \leq -1 \end{cases}$$

K-T 条件为:

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ \lambda(1 - x_1) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

K-T 点为 $(1, -\frac{1}{2})$
故最小值为 $\frac{1}{2}$

例题 2.6

写出下列问题的 K-T 条件, 并求下列问题的 K-T 点

$$\begin{cases} \min -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \\ x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$L(x,\lambda) = -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + \lambda_2(x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2(x_1+1) + 2\lambda_1 x_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2(x_2+1) + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2$$

K-T 条件为:

$$\begin{cases} -2(x_1+1)+2\lambda_1 x_1 = 0 \\ -2(x_2+1)+2\lambda_1 x_2+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1^2+x_2^2-2) = 0 \\ \lambda_2(x_2-1) = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \end{cases}$$

K-T 点为 $(-1,-1),(-1,1),(1,1)$

例题 2.7

用 K-T 条件求下列问题的最优解及相应的 Lagrange 乘子

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = -x_1x_2 \\ x_1+4x_2 \leq 4 \\ 4x_1+x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = -x_1x_2 \\ x_1+4x_2-4 \leq 0 \\ 4x_1+x_2-4 \leq 0 \end{cases}$$

$$L(x,\lambda) = -x_1x_2\lambda_1(x_1+4x_2-4)+\lambda_2(4x_1+x_2-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -x_2+\lambda_1+4\lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1+4\lambda_1+\lambda_2$$

K-T 条件为:

$$\begin{cases} -x_2+\lambda_1+4\lambda_2 = 0 \\ -x_1+4\lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1+4x_2-4) = 0 \\ \lambda_2(4x_1+x_2-4) = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \end{cases}$$

K-T 点为 $(0,0),(\frac{4}{17},\frac{16}{17}),(2,-\frac{1}{2},(\frac{4}{5}),\frac{4}{5})$
故最优解为 $(\frac{4}{5},\frac{4}{5})$

例题 2.8

用罚函数求解问题

$$\begin{cases} \min(x-1)^2 \\ 2-x \leq 0 \end{cases}$$

1. 写出 $c_k = 0, 1, 10$ 时相应的增广目标函数, 并画出它们对应的图形.
2. 取 $c_k = k-1(k=1,2,\cdots)$, 求出近似最优解的迭代点列
3. 利用 (2) 求问题的最优解

解答:

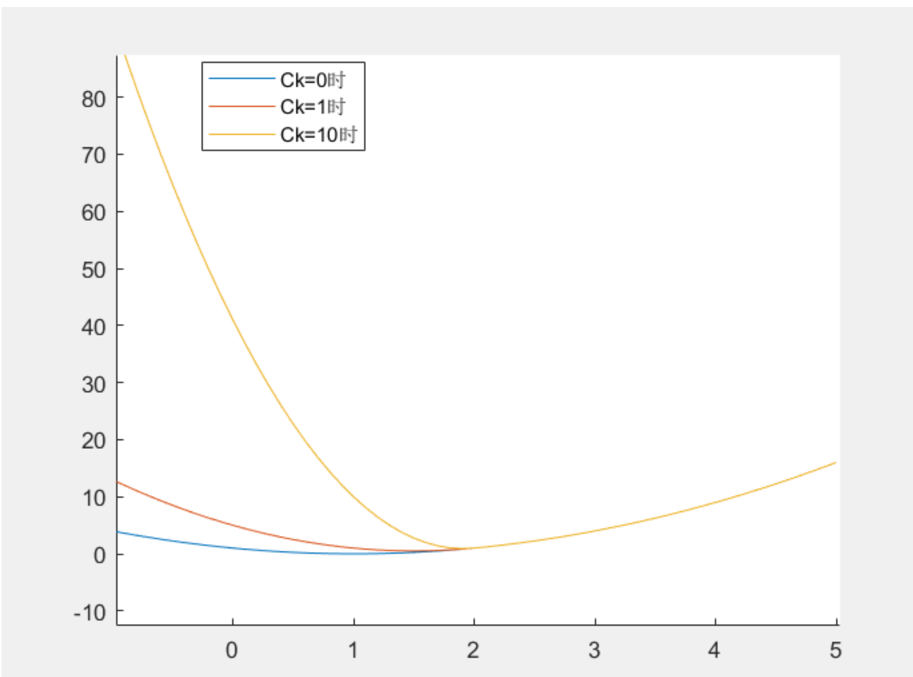
(1).

$$p_{c_k} = c_k[\max(2-x,0)]^2$$

$$c_k = 0, p_{c_k} = 0, F_{c_k}(x) = (x-1)^2$$

$$c_k = 1, p_{c_k} = [\max(2-x,0)]^2, F_{c_k} = (x-1)^2 + [\max(2-x,0)]^2 = \begin{cases} 2x^2 - 6x + 5 & x \le 2 \\ (x-1)^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$c_k = 10, p_{c_k} = 10[\max(2-x,0)]^2, F_{c_k} = (x-1)^2 + 10[\max(2-x,0)]^2 = \begin{cases} 11x^2 - 42x + 41 & x \le 2 \\ (x-1)^2 & x > 2 \end{cases}$$



(2)

$$\frac{F_{c_k}}{dx} = 2(1+k)x - (4k+2) = 0$$

$$x_k = \frac{4k+2}{2(1+k)} = \frac{2k+1}{1+k} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$x^k = 2 - \frac{1}{k+1}$$

(3)
当 k 趋于无穷的是,$x^k = 2$

例题 2.9

用对数形式的障碍函数法求解问题.

$$\begin{cases} \min x_1 + 2x_2 \\ x_1^2 - x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min x_1 + 2x_2 \\ x_1^2 - x_2 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \end{cases}$$

$B(x) = -ln(x_2 - x_1^2) - lnx_1$
$B_{d_k} = -d_k(ln(x_2 - x_1^2)) - lnx_1$
取 $d_k = \frac{1}{k}$
$B_{d_k} = -\frac{1}{k}(ln(x_2 - x_1^2) + lnx_1)$

$$\frac{\partial F_{d_k}}{\partial x_1} = 1 - \frac{1}{k}(\frac{-2x_1}{x_2 - x_1^2} + \frac{1}{x_1}) = 0$$
$$\frac{\partial F_{d_k}}{\partial x_2} = 2 - \frac{1}{k}\frac{1}{x_2 - x_1^2} = 0$$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{16}{k}}}{8}, x_2 = \frac{1+\frac{24}{k}-\sqrt{1+\frac{16}{k}}}{32}$
当 k 趋于无穷的时候,$x = (0, 0)$