高某人的泛函分析随笔 plus 版

Infty

二〇二三年九月二十六日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于送了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

1 基础知识

1.1 拓扑空间

定义 1.1: 拓扑空间

设 X 集合, 子集族 τ, 称 (X,τ) 成为拓扑空间, 若以下三条成立:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $\forall \cup_\alpha x_\alpha \in \tau$
3. $\forall \cap_{i=1}^m X_i \in \tau$

τ 中元素称为开集, 其补集称为闭集.

定义 1.2: 邻域

$\forall x \in X, \exists U \subset \tau, s.t. x \in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

定义 1.3: 邻域基

$\forall x \in X$, 有一个 x 的邻域集 $\mathcal{U}$, 若对 $\forall x$ 的邻域 V,$\exists U \in \mathcal{U}, s.t. x \in U \subset V$

定义 1.4: 收敛

$x_n \to x_0$ 在 $(x,\tau) \Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 邻域 $U, x_0 \in U, \exists N > 0, s.t. n > N$ 时 $x_n \in U$

定义 1.5: 连续映射

$f : f(X,\tau) \to (Y,\sigma)$:
整体上:Y 中开集 V 在 x 中的原像 $f^{-1}(V)$ 也是开集
局部上: 对 $x \in X, f(x) \in Y, \forall V_{f(x)}$, 总 $\exists u_x, s.t. f(u_x) \subset V_{f(x)}$

整体 $\Rightarrow$ 局部:$V_{f(x)} \subset Y, f^{-1}(V_{f(x)}) \triangleq U_x \subset X$ 且 $f(U_x) = V_{f(x)}$

局部 $\Rightarrow$ 整体: 要证 $f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集,$\forall V \subset Y$, 对 $\forall x \in f^{-1}(V), f(x) \in V \subset Y$, 对 $V_{f(x)}, \exists U_x s.t. f(U_x) \subset V_{f(x)}$, 所以 $U_x \subset f^{-1}(V)$

因此 $f^{-1}(V) \supset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 因为 x 为 $f^{-1}(V)$ 中每个点, 则显然有 $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$

因此 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 而因为开集的并集还是开集, 则证明成立.

1.2 距离空间

定义 1.6: 距离空间

(X,ρ) 满足

1. $\rho(x,y)\geq 0, \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

定义 1.7: 邻域

$B(x_0,\epsilon)=\{x\in X:\rho(x,x_0)<\epsilon\}, x_0\subset \rho(x_0,r)\subset V$

定义 1.8: 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \rho(x_n,x_0)\to 0$

定义 1.9: 连续映射

$f: X\to Y$ 指当 $x\to x_0\in X$ 时, 都有 $f(x_n)\to f(x_0)\in Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $x_n\in B(x_0,\delta)$ 时, 都有 $f(x_n)\in B(f(x_0),\epsilon)$

1.3 线性距离空间

引入线性结构和拓扑结构 (距离 ρ) 的空间称为距离线性空间, 其线性运算关于 ρ 是连续的.
加法关于 ρ 是连续的, 若 $\rho(x_,x)\to 0, \rho(y_n,y)\to 0$, 则 $\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0$
距离平移不变性可以推出加法连续, 而加法连续未必推出距离不变性
数乘关于 ρ 连续. 若 $\rho(x_n,x_0)\to 0\Rightarrow \rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0$ 且 $\alpha_n\to\alpha, \forall\alpha_n\in k\Rightarrow \rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$

1.4 F^* 空间 (赋准范数线性空间)

定义 1.10: F^* 空间

在线性空间 X 上定义准范数 $\|\cdot\|, X\to\mathbb{R}$ 满足

1. $\|x\|\geq 0$, 等号成立当且仅当 $x=0$
2. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$
3. $\|-x\|=\|x\|$
4. 若 $\alpha_n\to 0, x_n\to 0$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha_n x\|=0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0$

由准范数 $\|\cdot\|$ 定义距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$, 保证了距离性质的三条, 以及加法数乘关于 ρ 连续
F^* 空间是一类特殊的距离线性空间
反之, 定义 $\|x\|=\rho(x,0)+$ 平移不变性 + 数乘对 ρ 连续 $\Rightarrow (X,\|\cdot\|)$ 为 F^* 空间
准范数是连续的.
证明思路为:

$$|\|x_n\|-\|x_0\||\leq\|x_n-x_0\|\to 0$$

1.5 B^* 空间 (赋范线性空间)

定义 1.11: B^* 空间

线性空间 X 上定义范数 $\|\cdot\|$:

1. $\|x\|\geq 0$
2. $\|x+y\|\leq\|x+z\|+\|z+y\|$
3. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

B^* 空间 $\subset F^*$ 空间 $\approx$ 距离线性空间
距离 + 齐次性 + 平移不变性 $\Leftrightarrow$ 范数
半范数: $\|x\|\geq 0$, 没有强制规定 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$, 也就是满足半正定.

1.6 内积空间

定义 1.12: 内积空间

在复线性空间 X 上定义一个内积 $<\cdot,\cdot>$: $X\times X\to\mathbb{R}$, 也就是一个共轭的双线性泛函.

1. $<x,x>\geq 0$ 且 $<x,x>=0$ 时当且仅当 $x=0$
2. $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

可以用内积定义范数 $\|x\|^2=<x,x>$
而范数 + 极化恒等式才能定义内积
内积是连续的,$|<x_n,y_n>-<x,y>|\to 0$, 关于双变元都是连续的
内积关于双变元连续的证明思路为:

$$|<x_n,y_n>-<x,y>|=|<x_n-x_0,y_n>+<x_0,y_n-y_0>|\leq\|x_n-x_0\|\,\|y_n\|+\|x_0\|\,\|y_n-y_0\|\to 0$$

1.7 完备的距离空间

定义 1.13: Cauchy 列

设 (X,ρ) 为距离空间,$\rho(x_m,x_n)\to 0(n,m\to\infty)\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists N,n,m>0,$ 都有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$

注:

1. 收敛列一定是柯西列, 但柯西列 + 存在收敛子列才能说明是收敛列.
2. F^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ F 空间, 具有平移不变性距离所诱导的拓扑线性空间,B^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ $Banach$ 空间, 内积空间 + 完备 $\Rightarrow$ Hilbert 空间
3. 每一个距离空间都有完备化空间:$(X,\rho)\longrightarrow(X_1,\rho_1):\begin{cases}\rho_1\mid_{X\times X}=\rho\\ X\text{在}X_1\text{中稠密}\end{cases}$

关于第 3 点的详细证明比较复杂, 这里只介绍了思路
首先定义一个等价关系 $\{x_n\}\sim\{y_n\}\in X\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$
$X_1:[\{x_n\}]$ 并且在等价类中定义距离 $\rho_1\xi,\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$
之后再证明稠密, 再证明完备就好了.

例 1.1: 例子

$C[0,1],\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$ 是完备的, 但是如果定义的距离为 $\rho(x,y)=\int_0^1\|x(t)-y(t)\|\,dt$, 那么空间就不是完备的, 但是可以完备化为 $L^1[0,1]$

1.8 Banach 代数

定义 1.14: Banach 代数

$$B\text{代数}=\begin{cases}\mathcal{A}\text{是复数上的代数:}\mathbb{C}\text{上的线性空间 + 乘法运算}\begin{cases}\text{半群 (乘法结合律)}\\ \text{对加法分配律}\\ \text{对数乘结合律}\end{cases}\\ \\ \mathcal{A}\text{有范数 }\|\cdot\|\text{ 且 A 为 Banach 空间}\\ \|ab\|\le\|a\|\,\|b\|\,\text{,保证乘法对范数连续}\end{cases}$$

证明一下保证乘法对范数连续:

$$\begin{aligned}\|a_nb_n-ab\|=\|a_n(b_n-b)+(a_n-a)b\|&\le\|a_n(b_n-b)\|+\|(a_n-a)b\|\\&\le\|a_n\|\,\|b_n-b\|+\|a_n-a\|\,\|b\|\to 0\end{aligned}$$

1.9 C^* 代数

定义 1.15: C^* 代数

$$C^*\text{代数} = \begin{cases} \text{具有对合 * 运算, 即两次运算之后取消}(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*, (xy)^* = y^* x^*, x^{**} = x \\ \text{有幺元的 Banach 代数} \\ \|x^* x\| = \|x\|^2 \text{ 注 } \|x^*\| = \|x\| \end{cases}$$

证明:

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\|$$

2 常见的空间的例子

例 2.1

连续函数空间 $C(\bar{\Omega})$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连通的开区域

1. 距离空间:$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)-y(t)|$

2. Banach 空间:$\|x\|=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)|$

3. Banach 代数:$(f\cdot g)(t)=f(t)g(t)$

4. C^* 代数:$f^*(x)=f(\bar{x})$

例 2.2: $C^k(\bar{\Omega}):k$ 阶 (偏) 导连续

$$\|x\|=\max_{|\alpha|\leq k}\max_{t\in\bar{\Omega}}|\partial^\alpha x(t)|$$

$\alpha\in(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ $\partial^\alpha x(t)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$

例 2.3

P 次可积函数空间 $L^p(\Omega,\mu),0<P<\infty(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

1. $L^P(\Omega,\mu)$: 线性空间 + $\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$,$\|f\|^p=\int_\Omega|f|^P du\to\rho(x,y)=\|x-y\|_p^p$ 准范数空间

2. 若 $\Omega=\mathbb{R}^n,du=dv,L^p(\mathbb{R}^\kappa)$, 若 $\Omega=\mathbb{Z}_+,u(\{n\})=1,(P(X_1,\cdots,X_n,\cdots)),\|x\|_p=(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

例 2.4: 本性有界函数空间 $L^\infty(\Omega,\mu),(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

$L^\infty(\Omega,\mu)$: 线性空间

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty=esssup_{x\in\Omega}|f(x)|&=\inf\{a\geq 0:|f(x)|\leq a,a.e.\}\\&=\inf\{a\geq 0,|f(x)|>a\text{是零测集}\}\\&=\inf_{\mu(E_0)=0,E_0\subset\Omega}\{a\geq 0,|f(x)|>a\text{零测集}\}\end{aligned}$$

关于特殊的还有 $L^\infty(\mathbb{R}^n),l^\infty:\|x\|_\alpha=\sup_{n\geq 1}|x_n|$

例 2.5: 序列空间

$\delta, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$

1. S: 线性空间 $+\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 准范数 $\Rightarrow \mathcal{F}$ 空间
2. S 中按距离收敛等价于依坐标收敛, 即 $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)\to X=(X_1,\cdots,X_n,\cdots)$ 当 $m\to\infty \Leftrightarrow \forall n, \{x_n^{(m)}\}\to x_n$

$\Rightarrow$: $\left\|x^{(m)}-0\right\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}<\epsilon$

$\Leftarrow$: 事实上有 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}<\epsilon$

则 $\left\|x^{(n)}-0\right\|\le\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\left\|x_n^{(m)}\right\|+\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\epsilon$

例 2.6: $C(\mathbb{R}^n)$

线性空间 $+\|x\|=\sum\limits_{R=1}^{\infty}\frac{1}{2^R}\frac{\max\limits_{|t|\le n}|x(t)|}{1+\max\limits_{|t|\le n}|x(t)|}$ 为 $\mathcal{F}$ 空间,$t\in\mathbb{R}^n, |t|=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|t_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3 空间的等同性

等同性指的是: 集合一样, 结构一样
等同性有以下的几类:

1. 拓扑空间 —- 同胚 (拓扑同构) 双射 + 保持开集对应
2. 距离空间 —- 等距同构: 满射 + 保距 $(\rho(x,y)=\rho_1(Tx,Ty))$
3. 线性空间 —- 线性同构: 双射 + 保群运算 $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$
4. B^* 空间 —- 线性同构 + 在拓扑上同胚
5. 内积空间 —- 线性同构 + 保内积运算 $<Tx,Ty>=<x,y>$

定义 3.1

同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1\le\|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强: 当 $\|x_n\|_2\to 0\Rightarrow\|x_n\|_1\to 0$, 当 $n\to\infty$

这个定义等价于 $\exists$ 常数 $c>0, s.t. \|x\|_1\le c\|x\|_2$

证明一下这个等价, 从后往前, 显然成立.
若从前往后: 对 $\forall c=\frac{1}{n}>0, \exists x_n\in X, s.t. \|x_n\|_1>\frac{1}{n}\|x_n\|_2$
$y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则 $\|y_n\|_2=\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\le\frac{1}{n}\to 0$

$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|x\|_1} = 1 \nrightarrow 0$

定义 3.2

在同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 等价: 当 $\|x_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \to 0$, 当 $n \to \infty$

或者说:$C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$

定义 3.3

设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_2)$ 为 B^* 空间

$$\text{在拓扑上同胚:} \begin{cases} \exists X \to Y \text{满射} \\ \exists C_1 \text{和} C_2 > 0, s.t. c_1 \|x\|_1 \leq \|\phi(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \end{cases}$$

注: 若拓扑 T_1 比强拓扑 T_2 要粗, 粗 $T_1 \subset$ 细 T_2, 细拓扑开集更多

例 3.1

设 X 为 n 维 B^* 空间,$\rho_1, \cdots, \rho_n$ 一组基,$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in X, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$, 则定义 $T : X \to \mathbb{K}^n, |\xi|_1 = \left(\sum\limits_{i=1} \|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n, |\xi| \xrightarrow{T} \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, 保证满射和保群运算

下证:$\|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| \leq \sum\limits_{i=1}^n \|\xi_i\| \|e_i\| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^n |e_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

即 $\|x\| \leq c|\xi| = c\|Tx\|$

令 $P(\xi) = \|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$

一致连续:$\forall \xi, \eta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |\rho(\xi) - \rho(\eta)| &= \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i - \sum_{i=1}^n \eta_i e_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i\right\| \\ &\leq |\xi - \eta| \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故 $\rho(\xi)$ 在紧单位球面 $\{\xi \in \mathbb{K}^n, |\xi| = 1\} \triangleq S$ 上有最小值 C_1, 即 $\rho(\xi) \geq C_1 > 0$

则 $\forall \xi \in \mathbb{K}^n, \rho(\frac{\xi}{|\xi|}) \geq C_1$

即 $\frac{1}{|\xi|}\rho(\xi) \Rightarrow C_1 |\xi|$

注:

1. B^* 空间任意 n 维子空间代数上同构, 拓扑上同胚.

2. 有限维的 B^* 空间都是完备的 (Banach 空间)
3. B^* 空间任有限维子空间都是闭的

4 最佳逼近问题

引: 对 $\forall$ 三角多项式 $T_n(x), \int_0^{2\pi} |f(x)-S_n(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} |f(x)-T_n(x)|^2\,dx$
问题: 在 B^* 空间中给定一个 $x \in X$ 及真闭子空间 M, 且 $x \notin M$
定义 $d(x,m) = \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$
则问是否 $\exists y_0 \in M, s.t. d(x,M) = d(x,y_0) \Leftrightarrow \|x-y_0\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$

4.1 B^* 空间中有限维真闭子空间的最佳逼近

设 X 为 B^* 空间,$M = span\{e_1,\cdots,e_n\}$. 给定 $x \in X, \exists$ 向量 $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$(即 $\exists y_0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in M, s.t. \left\|x - \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| = \min\limits_{a\in\mathbb{K}^n}\left\|x - \sum\limits_{i=1}^n a_i e_i\right\|$)

Pf: 不妨设 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关, 令 $F(a) = \left\|x - \sum\limits_{i=1}^n a_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, 则 $F \in C(\mathbb{K}^n)$, 关键看 $|a| \to \infty$ 时

$$F(a) \ge \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\| - \|x\| = \rho(a) - \|x\| \ge c_1|a| - \|x\| \to +\infty$$

注: 最佳逼近元的唯一性要求:$e_1,\cdots,e_n$ 线性无关,$(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的.
凸集:$\forall\lambda \in (0,1), x,y \in A, \lambda x + (1-\lambda)y \in A$, 该概念可以推广到线性空间

定义 4.1: 严格凸的线性空间

$\forall x \ne y \in X$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则对 $\forall \alpha+\beta = 1, \|\alpha x + \beta y\| < 1$, 称其为严格凸的.

现在证明一下最佳逼近元的唯一性:
若 $d = 0$, 且 y 是最佳逼近元, 则 $d = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| = 0 = \|x-y\| \Rightarrow y = x$
若 $d = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| > 0$, 若设 y 和 z 都是最佳逼近元.
$\|x-y\| = \|x-z\| = d$

$$\frac{1}{d}\|x-\alpha y-\beta z\| = \frac{1}{d}\|\alpha x+\beta x-\alpha y-\beta z\| = \left\|\alpha\frac{x-z}{d} + \beta\frac{x-z}{d}\right\| < 1$$

因为是严格凸的, 所以上式小于 1
$\Rightarrow, \|x-\alpha y-\beta z\| < d$ 矛盾 (d 是下确界)
常见 B^* 空间的严格凸性:
内积空间:$\|\alpha x+\beta y\| < 1 \Rightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 < 1$

$$\begin{aligned}&<\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y>\\=&\alpha^2\|x\|^2+2\alpha\beta Re<x,y>+\beta^2\|y\|^2\\<&(\alpha+\beta)^2=1(x\neq y)\end{aligned}$$

$L^P(P>1)$ 空间:$\|\alpha x+\beta y\|<\alpha\|x\|+\beta\|y\|=1$, 严格凸 (根据闵可夫斯基不等式可知)
反例:
$L^1[0,1],x=1,y=2t$ 但 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1$, 不严格凸
$C[0,1],x=1,y=t$, 但 $\left\|\frac{1+t}{2}\right\|=1$, 不严格凸

4.2 无穷维 B^* 空间上最佳逼近问题

在无穷维空间中, 最佳逼近元未必是存在的, 但是会有一个很好的引理, 这个引理说明了, 尽管未必找得到最佳逼近元, 但是能找到差不多的.

命题 4.1: Riesz 引理

设 M 为 B^* 空间 X 的一个真闭子空间, 则对 $\forall 0<\epsilon<1,\exists x\in X,s.t.\|x\|=1$ 且 $\|x-y\|\geq 1-\epsilon,\forall y\in M$

$\forall x_0\in X\backslash M$, 由 M 是闭的,$d=\inf\limits_{y\in M}\|x_0-y\|>0$
(否则若 $d=0,\forall\frac{1}{n},\exists y_n\in M,s.t.\|x_0-y_n\|<0+\frac{1}{n}\Rightarrow y_n\to x_0+M$, 矛盾)
则对 $\forall\eta>0,\exists y_0\in M,s.t.d\leq\|x_0-y_0\|<d+\eta$
取 $x=\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$, 则 $\|x\|=1$
且 $\forall y\in M,\|x-y\|=\left\|\frac{x_0-[y_0+y\|x_0-y_0\|]}{\|x_0-y_0\|}\right\|=\frac{\|x_0-y'\|}{\|x_0-y_0\|}\geq\frac{d}{d+\eta}\triangleq 1-\epsilon$
注:
如果令 $M=span\{x_1\},\|x_1\|=1$, 对 $\epsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow\exists\|x_2\|=1$, 但 $\|x_2-x_1\|\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$M=span\{x_1,x_2\},\exists x_3,\|x_3\|=1$, 但 $\|x_3-x_2\|\geq\frac{1}{2},\|x_3-x_1\|\geq\frac{1}{2}$
$\vdots$
$M=span\{x_n\},\exists x_n,\|x_n\|=1$, 但 $\|x_n-x_m\|\geq\frac{1}{2}$
$\Rightarrow\mathcal{O}_n\triangleq\{x\in X:\|x-x_n\|<\frac{1}{4}\},\{x_n\}\Rightarrow\mathcal{O}_n\subseteq B(0,2)$, 这句话的意思是说, 找不到一个满足平移不变性的勒贝格测度
$\Rightarrow$ 无穷维 B^* 空间中存在无穷多个两两不交且有相同半径的球
$\Rightarrow$ 无穷维空间中不存在像”体积”一样具有平移不变性的测度.
设 M 为无穷维 B^* 空间的紧子集, 则最佳逼近元一定存在
$d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$, 对 $\epsilon=\frac{1}{n},\exists y_n\in M,s.t.d\leq\|x-y_n\|\leq d+\frac{1}{n},y_{n_k}\to y_0\in M$, 这是由紧性可以推出的 $d\leq\|x-y_0\|\leq d$
Hilbert 空间上的最佳逼近 (即上述结论对闭凸子集也成立, 因为 Hilbert 空间最近接欧氏空间)

定理 4.1: 极小向量定理

设 X 为 Hilbert 空间,M 为其非空闭凸子集, 对 $\forall x \in X$,$\exists$ 唯一的 $y \in M$ 使得 $\|x-y_0\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| = d$

1. $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列

$$\|y_n-y_m\|^2 = \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 \overset{v_n=y_n-x}{=} \|v_n-v_m\|^2$$
$$\overset{\text{平行四边形法则}}{=} 2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2) - 4\left\|\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \le 2((d+\frac{1}{n})^2+(d+\frac{1}{m})^2) - 4d^2 \to 0$$

2. y_0 存在性: 因 X 完备, 则 $y_n \to y_0, \overset{M\text{为闭}}{\Rightarrow} y_0 \in M, d \le \|x-y_0\| \le d$
3. 唯一性, 设 y_1 也是最佳逼近元

$$\begin{aligned}&\|y_1-x\| = d \quad 0 \le \|y_0-y_1\|^2 = \|y_0-X-(y_1-X)\|^2\\ =&2\left(\|y_0-x\|^2+\|y_1-x\|^2-4\left\|\frac{y_0-y_1-2x}{2}\right\|^2\right)\\ \le&4d^2-4d^2=0\end{aligned}$$

注:
1. 设 y_0 为闭凸子集 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow Re < x-y_0, y_0-y >\ge 0, \forall y \in M$
对 $\forall y \in M$, 令

$$\begin{aligned}\phi_y(t) &= \|x-ty-(1-t)y_0\|^2 \quad t\in[0,1] \quad \phi_y(t) \ge \phi_y(0)\\ &= \|(x-y_0)+t(y_0-y)\|^2\\ &= \|x-y_0\|^2 + 2tRe < x-y_0, y_0-y > + t^2\|y_0-y\|\end{aligned}$$

2. 设 y_0 为闭子空间 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow x-y_0 \perp M$
证明: 令 $w = y_0-y_1$, 则 $Re < x-y_0, w >\ge 0, Re < x-y_0, -w > \forall\omega \in M$ 可以推出

$$\begin{cases} Re < x-y_0, \omega >= 0\\ Re < x-y_0, i\omega >= 0\end{cases}$$

进而推出 $< x-y_0, \omega >= 0$
3. $\forall x \in$Hilbert 空间,M 为闭子空间, 则 $x = y+z, y \in M, z \in M^\perp$, 且该分解唯一
$z = x-y \perp M$

$$\begin{cases} x = y_1+z_1\\ x = y+z\end{cases}$$

$0 = y_1-y \in M = z-z_1 \in M^\perp \in M \cap M^\perp$