高某人的泛函分析随笔 plus 版

Infty

二〇二四年一月十二日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

”在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于松了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。”

以下是一些额外的资料

孙七七的主页

高某人的主页

第一章　基础知识

1.1　拓扑空间

定义 1.1.1: 拓扑空间

设 X 集合, 子集族 τ, 称 (X,τ) 成为拓扑空间, 若以下三条成立:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $\forall \cup_\alpha X_\alpha \in \tau$
3. $\forall \cap_{i=1}^m X_i \in \tau$

τ 中元素称为开集, 其补集称为闭集.

定义 1.1.2: 邻域

$\forall x \in X, \exists U \subset \tau, s.t. x \in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

定义 1.1.3: 邻域基

$\forall x \in X$, 有一个 x 的邻域集 $\mathcal{U}$, 若对 $\forall x$ 的邻域 $V, \exists U \in \mathcal{U}, s.t. x \in U \subset V$

定义 1.1.4: 收敛

$x_n \to x_0$ 在 $(x,\tau) \Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 邻域 $U, x_0 \in U, \exists N > 0, s.t. n > N$ 时 $x_n \in U$

定义 1.1.5: 连续映射

$f : f(X,\tau) \to (Y,\sigma)$:
整体上:Y 中开集 V 在 x 中的原像 $f^{-1}(V)$ 也是开集
局部上: 对 $x \in X, f(x) \in Y, \forall V_{f(x)}$, 总 $\exists u_x, s.t. f(u_x) \subset V_{f(x)}$

整体 $\Rightarrow$ 局部:$V_{f(x)} \subset Y, f^{-1}(V_{f(x)}) \triangleq U_x \subset X$ 且 $f(U_x) = V_{f(x)}$

局部 $\Rightarrow$ 整体: 要证 $f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集,$\forall V \subset Y$, 对 $\forall x \in f^{-1}(V), f(x) \in V \subset Y$, 对 $V_{f(x)}, \exists U_x s.t. f(U_x) \subset V_{f(x)}$, 所以 $U_x \subset f^{-1}(V)$

因此 $f^{-1}(V) \supset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 因为 x 为 $f^{-1}(V)$ 中每个点, 则显然有 $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$

因此 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 而因为开集的并集还是开集, 则证明成立.

1.2　距离空间

定义 1.2.1: 距离空间

(X,ρ) 满足

1. $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

定义 1.2.2: 邻域

$B(x_0,\epsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \epsilon\}, x_0 \subset \rho(x_0,r) \subset V$

定义 1.2.3: 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \rho(x_n,x_0) \to 0$

定义 1.2.4: 连续映射

$f : X \to Y$ 指当 $x \to x_0 \in X$ 时, 都有 $f(x_n) \to f(x_0) \in Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得当 $x_n \in B(x_0,\delta)$ 时, 都有 $f(x_n) \in B(f(x_0),\epsilon)$

1.3　线性距离空间

引入线性结构和拓扑结构 (距离 ρ) 的空间称为距离线性空间, 其线性运算关于 ρ 是连续的.

加法关于 ρ 是连续的, 若 $\rho(x,x) \to 0, \rho(y_n,y) \to 0$, 则 $\rho(x_n + y_n, x + y) \to 0$

距离平移不变性可以推出加法连续, 而加法连续未必推出距离不变性

数乘关于 ρ 连续. 若 $\rho(x_n,x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0$ 且 $\alpha_n \to \alpha, \forall\alpha_n \in k \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0$

1.4 F^* 空间 (赋准范数线性空间)

定义 1.4.1: F^* 空间

在线性空间 X 上定义准范数 $\|\cdot\|, X \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\|x\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|-x\| = \|x\|$
4. 若 $\alpha_n \to 0, x_n \to 0$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n x\| = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$

由准范数 $\|\cdot\|$ 定义距离 $\rho(x, y) = \|x - y\|$, 保证了距离性质的三条, 以及加法数乘关于 ρ 连续

F^* 空间是一类特殊的距离线性空间

反之, 定义 $\|x\| = \rho(x, 0)+$ 平移不变性 + 数乘对 ρ 连续 $\Rightarrow (X, \|\cdot\|)$ 为 F^* 空间

准范数是连续的.

证明思路为:

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \to 0$$

1.5 B^* 空间 (赋范线性空间)

定义 1.5.1: B^* 空间

线性空间 X 上定义范数 $\|\cdot\|$:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x + z\| + \|z + y\|$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

B^* 空间 $\subset F^*$ 空间 $\approx$ 距离线性空间

距离 + 齐次性 + 平移不变性 $\Leftrightarrow$ 范数

半范数: $\|x\| \geq 0$, 没有强制规定 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 也就是满足半正定.

1.6 内积空间

定义 1.6.1: 内积空间

在复线性空间 X 上定义一个内积 $<\cdot,\cdot>: X\times X\to\mathbb{R}$, 也就是一个共轭的双线性泛函.

1. $<x,x>\geq 0$ 且 $<x,x>=0$ 时当且仅当 $x=0$
2. $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

可以用内积定义范数 $\|x\|^2=<x,x>$
而范数 + 极化恒等式才能定义内积
内积是连续的,$|<x_n,y_n>-<x,y>|\to 0$, 关于双变元都是连续的
内积关于双变元连续的证明思路为:

$$|<x_n,y_n>-<x,y>|=|<x_n-x_0,y_n>+<x_0,y_n-y_0>|\leq\|x_n-x_0\|\,\|y_n\|+\|x_0\|\,\|y_n-y_0\|\to 0$$

1.7 完备的距离空间

定义 1.7.1: Cauchy 列

设 (X,ρ) 为距离空间,$\rho(x_m,x_n)\to 0(n,m\to\infty)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N,n,m>0$, 都有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$

注:

1. 收敛列一定是柯西列, 但柯西列 + 存在收敛子列才能说明是收敛列.
2. F^* 空间 + 完备 $\Rightarrow F$ 空间, 具有平移不变性距离所诱导的拓扑线性空间,B^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ *Banach* 空间, 内积空间 + 完备 $\Rightarrow$ Hilbert 空间
3. 每一个距离空间都有完备化空间:$(X,\rho)\longrightarrow(X_1,\rho_1):\begin{cases}\rho_1\mid_{X\times X}=\rho\\ X\text{在}X_1\text{中稠密}\end{cases}$

关于第 3 点的详细证明比较复杂, 这里只介绍了思路
首先定义一个等价关系 $\{x_n\}\sim\{y_n\}\in X\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$
$X_1:[\{x_n\}]$ 并且在等价类中定义距离 $\rho_1\xi,\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$
之后再证明稠密, 再证明完备就好了.

例题 1.7.1: 例子

$C[0,1],\rho(x,y)=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|$ 是完备的, 但是如果定义的距离为 $\rho(x,y)=\int_0^1\|x(t)-y(t)\|\,dt$, 那么空间就不是完备的, 但是可以完备化为 $L^1[0,1]$

1.8 Banach 代数

定义 1.8.1: Banach 代数

$$B\text{代数} = \begin{cases} \mathcal{A}\text{是复数上的代数:}\mathbb{C}\text{上的线性空间 + 乘法运算} \begin{cases} \text{半群 (乘法结合律)} \\ \text{对加法分配律} \\ \text{对数乘结合律} \end{cases} \\ \mathcal{A}\text{有范数 } \|\cdot\| \text{ 且 A 为 Banach 空间} \\ \|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|\text{, 保证乘法对范数连续} \end{cases}$$

证明一下保证乘法对范数连续:

$$\begin{aligned} \|a_n b_n - ab\| = \|a_n(b_n - b) + (a_n - a)b\| &\leq \|a_n(b_n - b)\| + \|(a_n - a)b\| \\ &\leq \|a_n\|\,\|b_n - b\| + \|a_n - a\|\,\|b\| \to 0 \end{aligned}$$

1.9 C^* 代数

定义 1.9.1: C^* 代数

$$C^*\text{代数} = \begin{cases} \text{具有对合 * 运算, 即两次运算之后取消}(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*, (xy)^* = y^* x^*, x^{**} = x \\ \text{有幺元的 Banach 代数} \\ \|x^* x\| = \|x\|^2 \text{ 注 } \|x^*\| = \|x\| \end{cases}$$

证明:

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\|\,\|x\|$$

1.10 常见的空间的例子

例题 1.10.1

连续函数空间 $C(\bar{\Omega})$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连通的开区域

1. 距离空间:$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)-y(t)|$
2. Banach 空间:$\|x\|=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)|$
3. Banach 代数:$(f\cdot g)(t)=f(t)g(t)$
4. C^* 代数:$f^*(x)=f\bar{(}x)$

例题 1.10.2: $C^k(\bar{\Omega}):k$ 阶（偏）导连续

$$\|x\|=\max_{|\alpha|\le k}\max_{t\in\bar{\Omega}}|\partial^\alpha x(t)|$$

$\alpha\in(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ $\partial^\alpha x(t)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$

例题 1.10.3

P 次可积函数空间 $L^p(\Omega,\mu),0<P<\infty(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

1. $L^P(\Omega,\mu)$: 线性空间 + $\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f|^pdu\right)^{\frac{1}{p}}$,$\|f\|^p=\int_\Omega|f|^Pdu\to\rho(x,y)=\|x-y\|_p^p$ 准范数空间
2. 若 $\Omega=\mathbb{R}^n,du=dv,L^p(\mathbb{R}^\kappa)$, 若 $\Omega=\mathbb{Z}_+,u(\{n\})=1,(P(X_1,\cdots,X_n,\cdots)),\|x\|_p=(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

例题 1.10.4: 本性有界函数空间 $L^\infty(\Omega,\mu),(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

$L^\infty(\Omega,\mu)$: 线性空间

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty=esssup_{x\in\Omega}|f(x)|&=\inf\{a\ge0:|f(x)|\le a,a.e.\}\\&=\inf\{a\ge0,|f(x)|>a\text{是零测集}\}\\&=\inf_{\mu(E_0)=0,E_0\subset\Omega}\{a\ge0,|f(x)|>a\text{零测集}\}\end{aligned}$$

关于特殊的还有 $L^\infty(\mathbb{R}^n),l^\infty:\|x\|_\alpha=\sup_{n\ge1}|x_n|$

例题 1.10.5: 序列空间

$\delta, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$

1. S: 线性空间 $+\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 准范数 $\Rightarrow \mathcal{F}$ 空间
2. S 中按距离收敛等价于依坐标收敛, 即 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}, \cdots) \to X = (X_1, \cdots, X_n, \cdots)$ 当 $m \to \infty \Leftrightarrow \forall n, \{x_n^{(m)}\} \to x_n$

$\Rightarrow$: $\left\|x^{(m)} - 0\right\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$
$\Leftarrow$: 事实上有 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$
则 $\left\|x^{(n)} - 0\right\| \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \left\|x_n^{(m)}\right\| + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon$

例题 1.10.6: $C(\mathbb{R}^n)$

线性空间 $+\|x\| = \sum\limits_{R=1}^{\infty} \frac{1}{2^R} \frac{\max\limits_{|t|\leq n}|x(t)|}{1+\max\limits_{|t|\leq n}|x(t)|}$ 为 $\mathcal{F}$ 空间,$t \in \mathbb{R}^n, |t| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |t_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

1.11 空间的等同性

等同性指的是: 集合一样, 结构一样
等同性有以下的几类:

1. 拓扑空间 —- 同胚 (拓扑同构) 双射 + 保持开集对应
2. 距离空间 —- 等距同构: 满射 + 保距 ($\rho(x, y) = \rho_1(Tx, Ty)$)
3. 线性空间 —- 线性同构: 双射 + 保群运算 $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$
4. B^* 空间 —- 线性同构 + 在拓扑上同胚
5. 内积空间 —- 线性同构 + 保内积运算 $< Tx, Ty > = < x, y >$

定义 1.11.1

同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强: 当 $\|x_n\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_1 \to 0$, 当 $n \to \infty$

这个定义等价于 $\exists$ 常数 $c > 0, s.t. \|x\|_1 \leq c\|x\|_2$

证明一下这个等价, 从后往前, 显然成立.
若从前往后: 对 $\forall c = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in X, s.t. \|x_n\|_1 > \frac{1}{n}\|x_n\|_2$
$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则 $\|y_n\|_2 = \frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} \leq \frac{1}{n} \to 0$
$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|x\|_1} = 1 \nrightarrow 0$

定义 1.11.2

在同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 等价: 当 $\|x_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \to 0$, 当 $n \to \infty$

或者说:$C\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\,\|x\|_1$

定义 1.11.3

设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_2)$ 为 B^* 空间

$$\text{在拓扑上同胚:}\begin{cases} \exists X \to Y\text{满射} \\ \exists C_1\text{和}C_2 > 0, s.t. c_1\,\|x\|_1 \le \|\phi(x)\|_2 \le c_2\,\|x\|_1 \end{cases}$$

注: 若拓扑 T_1 比强拓扑 T_2 要粗, 粗 $T_1 \subset$ 细 T_2, 细拓扑开集更多

例题 1.11.1

设 X 为 n 维 B^* 空间,$\rho_1, \cdots, \rho_n$ 一组基,$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in X, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$, 则定义 $T : X \to \mathbb{K}^n, |\xi|_1 = \left(\sum\limits_{i=1} \|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n, |\xi| \xrightarrow{T} \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, 保证满射和保群运算

下证:$\|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\| \le \sum\limits_{i=1}^{n} \|\xi_i\|\,\|e_i\| \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |e_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

即 $\|x\| \le c\,|\xi| = c\,\|Tx\|$

令 $P(\xi) = \|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$

一致连续:$\forall \xi, \eta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |\rho(\xi) - \rho(\eta)| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right\| \\ &\le \left\|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) e_i\right\| \\ &\le |\xi - \eta| \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故 $\rho(\xi)$ 在紧单位球面 $\{\xi \in \mathbb{K}^n, |\xi| = 1\} \triangleq S$ 上有最小值 C_1, 即 $\rho(\xi) \ge C_1 > 0$

则 $\forall \xi \in \mathbb{K}^n, \rho(\frac{\xi}{|\xi|}) \ge C_1$

即 $\frac{1}{|\xi|}\rho(\xi) \Rightarrow C_1\,|\xi|$

注:

1. B^* 空间任意 n 维子空间代数上同构, 拓扑上同胚.

2. 有限维的 B^* 空间都是完备的 (Banach 空间)

3. B^* 空间任有限维子空间都是闭的

1.12 最佳逼近问题

引: 对 $\forall$ 三角多项式 $T_n(x)$, $\int_0^{2\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,dx$

问题: 在 B^* 空间中给定一个 $x\in X$ 及真闭子空间 M, 且 $x\notin M$

定义 $d(x,m)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$

则问是否 $\exists y_0\in M, s.t. d(x,M)=d(x,y_0)\Leftrightarrow \|x-y_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$

1.12.1 B^* 空间中有限维真闭子空间的最佳逼近

设 X 为 B^* 空间,$M=span\{e_1,\cdots,e_n\}$. 给定 $x\in X$,$\exists$ 向量 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$(即 $\exists y_0=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n\in M, s.t. \left\|x-\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i\right\|=\min\limits_{a\in\mathbb{K}^n}\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\right\|$)

Pf: 不妨设 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关, 令 $F(a)=\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\right\|:\mathbb{K}^n\to\mathbb{R}_+$, 则 $F\in C(\mathbb{K}^n)$, 关键看 $|a|\to\infty$ 时

$$F(a)\ge\left\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\|-\|x\|=\rho(a)-\|x\|\ge c_1|a|-\|x\|\to+\infty$$

注: 最佳逼近元的唯一性要求:$e_1,\cdots,e_n$ 线性无关,$(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的.

凸集:$\forall\lambda\in(0,1), x,y\in A, \lambda x+(1-\lambda)y\in A$, 该概念可以推广到线性空间

定义 1.12.1: 严格凸的线性空间

$\forall x\neq y\in X$ 且 $\|x\|=\|y\|=1$, 则对 $\forall\alpha+\beta=1, \|\alpha x+\beta y\|<1$, 称其为严格凸的.

现在证明一下最佳逼近元的唯一性:

若 $d=0$, 且 y 是最佳逼近元, 则 $d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|=0=\|x-y\|\Rightarrow y=x$

若 $d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|>0$, 若设 y 和 z 都是最佳逼近元.

$\|x-y\|=\|x-z\|=d$

$$\frac{1}{d}\|x-\alpha y-\beta z\|=\frac{1}{d}\|\alpha x+\beta x-\alpha y-\beta z\|=\left\|\alpha\frac{x-z}{d}+\beta\frac{x-z}{d}\right\|<1$$

因为是严格凸的, 所以上式小于 1

$\Rightarrow$, $\|x-\alpha y-\beta z\|<d$ 矛盾 (d 是下确界)

常见 B^* 空间的严格凸性:

内积空间:$\|\alpha x+\beta y\|<1\Rightarrow\|\alpha x+\beta y\|^2<1$

$$\begin{aligned}&<\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y>\\=&\alpha^2\|x\|^2+2\alpha\beta Re<x,y>+\beta^2\|y\|^2\\<&(\alpha+\beta)^2=1(x\neq y)\end{aligned}$$

$L^p(P>1)$ 空间:$\|\alpha x+\beta y\|<\alpha\|x\|+\beta\|y\|=1$, 严格凸 (根据闵可夫斯基不等式可知)

反例:

$L^1[0,1], x=1, y=2t$ 但 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1$, 不严格凸

$C[0,1], x=1, y=t$, 但 $\left\|\frac{1+t}{2}\right\|=1$, 不严格凸

1.12.2 无穷维 B^* 空间上最佳逼近问题

在无穷维空间中, 最佳逼近元未必是存在的, 但是会有一个很好的引理, 这个引理说明了, 尽管未必找得到最佳逼近元, 但是能找到差不多的.

命题 1.12.1: Riesz 引理

设 M 为 B^* 空间 X 的一个真闭子空间, 则对 $\forall 0<\epsilon<1, \exists x\in X, s.t. \|x\|=1$ 且 $\|x-y\|\geq 1-\epsilon, \forall y\in M$

$\forall x_0\in X\backslash M$, 由 M 是闭的,$d=\inf\limits_{y\in M}\|x_0-y\|>0$

(否则若 $d=0, \forall\frac{1}{n}, \exists y_n\in M, s.t. \|x_0-y_n\|<0+\frac{1}{n}\Rightarrow y_n\to x_0+M$, 矛盾)

则对 $\forall\eta>0, \exists y_0\in M, s.t. d\leq\|x_0-y_0\|<d+\eta$

取 $x=\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$, 则 $\|x\|=1$

且 $\forall y\in M, \|x-y\|=\left\|\frac{x_0-[y_0+y\|x_0-y_0\|]}{\|x_0-y_0\|}\right\|=\frac{\|x_0-y'\|}{\|x_0-y_0\|}\geq\frac{d}{d+\eta}\overset{\Delta}{=}1-\epsilon$

注:

如果令 $M=span\{x_1\}, \|x_1\|=1$, 对 $\epsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow\exists\|x_2\|=1$, 但 $\|x_2-x_1\|\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$M=span\{x_1,x_2\}, \exists x_3, \|x_3\|=1$, 但 $\|x_3-x_2\|\geq\frac{1}{2}, \|x_3-x_1\|\geq\frac{1}{2}$

$\vdots$

$M=span\{x_n\}, \exists x_n, \|x_n\|=1$, 但 $\|x_n-x_m\|\geq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow O_n\overset{\Delta}{=}\{x\in X:\|x-x_n\|<\frac{1}{4}\}, \{x_n\}\Rightarrow O_n\subseteq B(0,2)$, 这句话的意思是说, 找不到一个满足平移不变性的勒贝格测度

$\Rightarrow$ 无穷维 B^* 空间中存在无穷多个两两不交且有相同半径的球

$\Rightarrow$ 无穷维空间中不存在像"体积"一样具有平移不变性的测度.

设 M 为无穷维 B^* 空间的紧子集, 则最佳逼近元一定存在

$d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$, 对 $\epsilon=\frac{1}{n}, \exists y_n\in M, s.t. d\leq\|x-y_n\|\leq d+\frac{1}{n}, y_{n_k}\to y_0\in M$, 这是由紧性可以推出的 $d\leq\|x-y_0\|\leq d$

Hilbert 空间上的最佳逼近 (即上述结论对闭凸子集也成立, 因为 Hilbert 空间最近接欧氏空间)

定理 1.12.1: 极小向量定理

设 X 为 Hilbert 空间,M 为其非空闭凸子集, 对 $\forall x\in X, \exists$ 唯一的 $y\in M$ 使得 $\|x-y_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|=d$

1. $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \overset{v_n = y_n - x}{=} \|v_n - v_m\|^2$$
$$\overset{\text{平行四边形法则}}{=} 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) - 4\left\|\frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 \leq 2((d+\frac{1}{n})^2 + (d+\frac{1}{m})^2) - 4d^2 \to 0$$

2. y_0 存在性: 因 X 完备, 则 $y_n \to y_0, \overset{M\text{为闭}}{\Rightarrow} y_0 \in M, d \leq \|x - y_0\| \leq d$

3. 唯一性, 设 y_1 也是最佳逼近元

$$\begin{aligned}&\|y_1 - x\| = d \quad 0 \leq \|y_0 - y_1\|^2 = \|y_0 - X - (y_1 - X)\|^2 \\ =&2\left(\|y_0 - x\|^2 + \|y_1 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_0 - y_1 - 2x}{2}\right\|^2\right) \\ \leq&4d^2 - 4d^2 = 0\end{aligned}$$

注:

1. 设 y_0 为闭凸子集 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow Re < x - y_0, y_0 - y >\geq 0, \forall y \in M$

对 $\forall y \in M$, 令

$$\begin{aligned}\phi_y(t) &= \|x - ty - (1-t)y_0\|^2 \quad t \in [0,1] \quad \phi_y(t) \geq \phi_y(0) \\ &= \|(x - y_0) + t(y_0 - y)\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + 2tRe < x - y_0, y_0 - y > +t^2\|y_0 - y\|\end{aligned}$$

2. 设 y_0 为闭子空间 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow x - y_0 \perp M$

证明: 令 $w = y_0 - y_1$, 则 $Re < x - y_0, w >\geq 0, Re < x - y_0, -w > \forall \omega \in M$ 可以推出

$$\begin{cases} Re < x - y_0, \omega >= 0 \\ Re < x - y_0, i\omega >= 0 \end{cases}$$

进而推出 $< x - y_0, \omega >= 0$

3. $\forall x \in$Hilbert 空间,M 为闭子空间, 则 $x = y + z, y \in M, z \in M^\perp$, 且该分解唯一

$z = x - y \perp M$

$$\begin{cases} x = y_1 + z_1 \\ x = y + z \end{cases}$$

$0 = y_1 - y \in M = z - z_1 \in M^\perp \in M \cap M^\perp$

1.13 Minkowski 泛函: 线性空间上的" 半范数"

线性空间中没有距离, 因此定义距离就会用向量之比来定义

设 X 时一个线性空间,C 是包含原点的凸子集, 定义与 C 对应的一个泛函

$$\rho(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}, \forall x \in X$$

称 $\rho(x)$ 为 C 的 Minkowski 泛函

注:

1. $\rho(x) \in [0, +\infty]$
2. $\rho(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha > 0$
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

证明 (2):

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in C\} &= \inf\{\alpha\frac{\lambda}{\alpha} > 0 : \frac{x}{\frac{\lambda}{\alpha}} \in C\} \\ &= \alpha \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}\end{aligned}$$

证明 (3)

当 $\rho(x), \rho(y) = +\infty$ 时显然成立

不妨设 $\rho(x), \rho(y) < +\infty, \forall \epsilon > 0$

$\lambda_1 = \rho(x) + \frac{\epsilon}{2}, \lambda_2 = \rho(y) + \frac{\epsilon}{2}$ 则 $\frac{x}{\lambda} \in C, \frac{y}{\lambda_2} \in C$

$$\frac{x + y}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{y}{\lambda_2} \in C$$

则 $\rho(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = \rho(x) + \rho(y) + \epsilon$, 由 ϵ 任意性,$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

很可惜,Minkowski 泛函距离真正的半范数还有一些距离, 因为首先在线性空间我们要保证吸收性的成立, 另一方面, 对于齐次性,Minkowski 泛函只满足了 $\alpha > 0$ 时是成立的.

对于吸收性, 我们可以通过定义凸子集的方式去解决.

$\rho(x) \Leftarrow$ 吸收的:$\forall x \in X, \exists \lambda, s.t. \frac{x}{\lambda} \in C$

关于齐次 $\rho(x) < \infty \Leftarrow \begin{cases} \text{实: 对称的: 对}\forall x \in C, -x \in C \\ \text{复: 均衡的:}\forall x \in C,\text{则对,}\forall \beta \in C,\text{且}|\beta| = 1,\text{都有}\beta x \in C \end{cases}$

证明:

$\rho(-x) = \{\lambda : y = -\frac{-x}{\lambda} \in C\}$ 由对称推出 $y' = \frac{x}{\lambda} \in C$, 所以 $\rho(-x) = \rho(x)$

$$\begin{aligned}\rho(\beta x) &= \inf\{\lambda > 0, \frac{\beta x}{\lambda} \in C\}, y = \frac{\beta x}{\lambda}, \text{保持}\lambda\text{不变} \\ &= \inf\{\lambda > 0, \frac{\beta' x}{\lambda} \in C\}, y' = \frac{\beta' x}{\lambda}, |\beta'| = |\beta| \\ &= \inf\{|\beta|\frac{\lambda}{|\beta|} > 0 : \frac{x}{\frac{\lambda}{|\beta|}} \in C\} \\ &= |\beta|\rho(x)\end{aligned}$$

线性空间中吸收的, 对称的 (均衡的) 含原点的凸子集 $C \Leftrightarrow \rho(x) = \|x\|$: 半范数

1.13.1 赋范线性空间中凸子集的 Minkowski 泛函

定理 1.13.1

设 X 为 B^* 空间,C 为 X 中包含 O 的凸子集,$\rho(x)$ 为 C 的 Minkowski 泛函, 则

1. 若 C 为闭集, 则 $\rho(x)$ 为下半连续, 则 $C = \{x \in X : p(x) \le 1\}$
2. 若 C 为有界的, 则 $\exists C_1 > 0, s.t. \rho(x) \ge C_1 \|x\|, \forall x \in X$, 从而 $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. 若以 O 为内点, 则 C 一定是吸收的, 且 $\exists C_2 > 0, p(x) \le C_2 \|x\|, \forall x \in X,$, 则 $\rho(x)$ 一致连续的

证明 (1):
$\subseteq$: $\forall x \in \alpha C \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \in C \Rightarrow \rho(x) \le \alpha \Rightarrow x \in C$
$\supseteq$: 若 $\rho(x) \le \alpha$, 有 $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{n}} \in C, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \frac{x}{\alpha+\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{闭}} \frac{x}{\alpha} \in C \Rightarrow x \in \alpha C$
证明 (2):
因 C 为有界,$\exists r > 0, s.t. C \subset$ 开$B(O, r), \forall x \in X, \frac{rx}{\|x\|} \in S(O, r), \frac{x}{\frac{\|x\|}{r}} \notin C \Rightarrow \rho(x) \ge \frac{\|x\|}{r}$
取 $C_1 = \frac{1}{r}$
证明 (3):
O 为 C 的内点 $\Rightarrow$ 则 $\exists$ 开 $B(O, r) \subset C, \frac{rx}{2\|x\|} \in B(O, r) \subset C, \forall x \ne 0, x \in X$ 则 $\rho(x) \le \frac{2\|x\|}{r}$ 取 $C_2 = \frac{2}{r}$
$\forall x, y \in X$
1. 若 $rho(x) > \rho(y), |\rho(x) - \rho(y)| = \rho(x) - \rho(y) = \rho(x - y + y) - \rho(y) \le \rho(x - y)$
2. 若 $\rho(x) \le \rho(y)$

$$|\rho(y) - \rho(x)| = \rho(y) - \rho(x) = \rho(y - x + x) - \rho(x) \le p(y - x)$$

所以 $|\rho(x) - \rho(y)| \le \max\{\rho(x - y), \rho(y - x)\} \le C_2 \|x - y\|$ 所以一致连续

推论 1.13.1

设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸子集且紧 (有界闭), 则 $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ 且 $m \le n, s.t. C$ 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中闭单位球 (注: 无以 O 为圆心的条件)

1. 平移 C 某个向量,$s.t. O \in C$
事实上, 考虑包含 C 的最小的闭线性流形 E:i.e. 线性子空间 E_0 平移了某个向量
设 $dim\ E = m, (m \le n), \overset{\text{最小}}{\Rightarrow} \exists m + 1$ 向量 $e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1} \in C$ s.t.$\{e_i - e_{m+1}, i = 1, \cdots, m\}$ 为 m 哥线性无关向量
令 $e_0 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} e_i \in c_0\{e_1, \cdots, e_{m+1}\} \in C$(凸集的凸组合还属于凸集)
故 $E_0 = E - \{e_0\}$
$\forall y \in E, y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i (e_i - e_0) + e_0$
$\forall Z \in E_0, \|Z\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \|\mu_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
2. O 为 $C - \{e_0\}$ 的内点, 下证当 $\|Z\|$ 充分小时,$y \in C$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i + (1 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j) e_0$$

3.

$$C_1 \|x\| \le \rho(x) \le C_2 \|x\|$$

$\varphi(x) : (X^m, \|\cdot\|) \to C\rho(x)$

1.14 距离空间上紧集 M 及其上的连续函数空间

定理 1.14.1: Bolzano-Weierstress 致密性定理

任意有界数列必有收敛子列

定义 1.14.1: 列紧集和自列紧集

列紧: 若有空间 $(X,\rho), A \subset X, A$ 中任何点列都在 X 中有收敛的子列.
自列紧: 若有空间 $(X,\rho), A \subset X, A$ 中任何点列都在 A 中有收敛的子列.

注:

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 列紧 $\Leftrightarrow, A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 有界集, 自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭集
2. 称 X 为列紧空间, 若 X 是列紧的, 比如 $X = [0,1]$, 列紧空间 $\begin{cases} \text{子集} \Rightarrow \text{列紧} \\ \text{闭子集} \Rightarrow \text{自列紧} \end{cases}$
3. 列紧空间必是完备的:$\forall \{x_n\} \subset X$ 为 Cauchy 列 $\overset{\text{列紧}}{\Rightarrow} \{x_{n_k}\}$ 收敛 $\Rightarrow x_n$ 收敛
4. 一般单距离空间中有非列紧集 $\begin{cases} \text{无穷维}B^*\text{空间}B(x_n, r), \|x_n - x_m\| \ge r \\ \text{可分的 Hilbert 空间}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \|e_n - e_m\| = 2 \\ C[0,1], x_n(t) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} \le t \le 1 \\ 1 - nt & 0 \le t \le \frac{1}{n} \end{cases} \to x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \ne 0 \end{cases} \end{cases}$

现在, 我们有了有限维的 B^* 空间 $\Rightarrow$ 任意有界集必是列紧的.

定理 1.14.2

B^* 空间 X 是有限维的 $\Leftrightarrow X$ 的单位球面是列紧的

$\Rightarrow$ 这个方向是显然的
$\Leftarrow$ 若 X 是无穷维的,$\forall$线性无关组$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$, 令 $M = span\{x_1, \cdots, x_n\}$
对 $\forall x \notin M_n, \exists y_n \in M_n, s.t. \|x - y_n\| = d = \inf_{y \in M_n} \|x - y\|$. 令 $x_{n+1} = \frac{x - y_n}{d} \in S$

$$\|x_{n+1} - x_i\| = \left\| \frac{x - y_n}{d} - x_i \right\| = \frac{1}{d} \|x - (y_n + dx_i)\| \ge \frac{1}{d} \cdot d = 1$$

令 $M_{n+1}=\{x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\},\{x_n\}\subset S$ 且 $\|x_n-x_m\|\geq 1$

定义 1.14.2: 完全有界

设 M 为 (X,ρ) 的子集,$\forall\epsilon>0m\exists$ 有限个以 M 中元 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为中心的球,$B(y_i,\epsilon)(i=1,\cdots,n)$ 可以覆盖 M(M 有有穷的 ϵ 网), 则称 M 为完全有界的.

1. 完全有界 $\Rightarrow$ 有界.$M\subset\Cup_{i=1}^{n}B(y_i,\epsilon)$
2. 有界不一定完全有界. 例: 有无穷有点的离散度量空间 $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$ 事实上 $d(x,y)=r>1$ 有界, 对 $0<\epsilon_0<1$ 时,$\rho(x,y)<\epsilon\Rightarrow x=y$, 因此不完全有界.

定理 1.14.3

在距离空间 (X,ρ) 中,$M\subset X$, 则

1. 若 M 是列紧 $\Rightarrow M$ 完全有界
2. 若 M 完全有界,X 完备 $\Rightarrow M$ 列紧

(1).
反证: 若 M 不完全有界, 则 $\exists\epsilon_0>0,s.t.M$ 没有有穷的 ϵ_0 网
对 $\forall x_1\in M$, 则 $B(x_1,\epsilon_0)$ 不能完全覆盖 M,$\exists x_2\in M/B(x_1,\epsilon_0)$
对 $\forall x_1,x_2\in M$, 则 $B(x_1,\epsilon_0)\cup B(x_2,\epsilon_0)$ 不能完全覆盖 M,$\exists x_3\in M/B(x_1,\epsilon_0)\cup B(x_2,\epsilon_0)$
$\vdots$
一直到 $\|x_n-x_m\|\geq\epsilon_0$ 矛盾于 M 列紧
$\Rightarrow$ 设 M 完全有界, 且 X 完备, 对 $\forall\{x_n\}\subset M$, 找 $\{x_{n_k}\}$ 收敛
对 $\epsilon=1$ 网, 则 M 有有穷 $\epsilon=1$ 网,$\exists y_1\in M,s.t.\{x_n\}$ 子列 $\{x_n^{(1)}\}\subset B(y,1)$
对 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 网, 则 $\exists y_2\in M,s.t.\{x_n^{(1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(2)}\}\subset B(y,\frac{1}{2})$
$\vdots$
对 $\epsilon=\frac{1}{n}$ 网, 则 $\exists y_n\in M,s.t.\{x_n^{(n-1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(n)}\}\subset B(y,\frac{1}{n})$
抽出对角线子列 $\{x_k^{(k)}\}$

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leq\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(y_n,x_n^{(n)})\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\epsilon$$

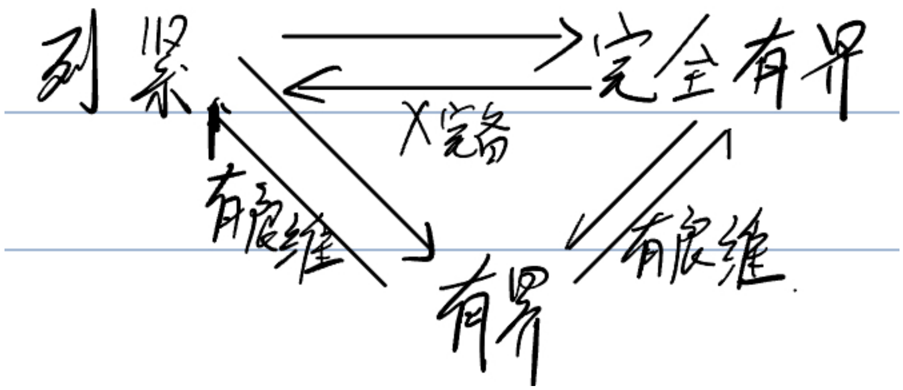
取 $N=\frac{2}{\epsilon}$

$$\left.\begin{array}{r}Cauchy\text{列}\\ X\text{完备}\end{array}\right\}\Rightarrow\{x_k^{(k)}\}\text{收敛}$$

注:

1. 完全有界 $\Leftrightarrow M$ 中任数列都有子序列为 Cauchy 列

2. 完全有界并不一定列紧, 如取 $X = Q$, 令 $M = \mathbb{Q} \cap [0,1], \forall \epsilon > \frac{1}{n}$ 取 $y_i = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$, 故 M 完全有界 $\{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\} \to \frac{e}{3} \notin \mathbb{Q}$



3.

4. 完全有界距离空间必可分 (存在稠密子集)

1.15　距离空间上的紧集为其上的连续函数空间

1. 列紧集
2. 紧集

$\mathbb{R}$中闭区间$\begin{cases} \text{聚点定理, 每个点列都有子列收敛于该区间的点} \\ \text{有限覆盖定理, 每个开覆盖都有有限子覆盖} \end{cases}$

$\downarrow\uparrow$

$\mathbb{R}^n$中有有限闭区域 (可推广到有限维B^*空间, 有界 + 闭)

$\downarrow\uparrow$ (有界集)

一般的距离空间, 自列紧集 (等价于 T2 拓扑空间的紧集) $\Rightarrow \begin{cases} \text{列紧} \Rightarrow \text{有界} \\ \text{闭} \end{cases}$

$\downarrow\uparrow$

T2 拓扑空间, 紧集任意的开集族有有限开覆盖 (可以推出相对紧)($\bar{M}$紧) $\Rightarrow$ 有界 + $T_2 \Rightarrow$ 闭

注:

1. 列紧集 (分析刻画)$\Leftrightarrow$ 完全有界 + X 完备 (几何刻画) $\Leftrightarrow$ 相对紧 (拓扑刻画)

2. $f \in [a,b] \Rightarrow R_f = [m, M]$

推广 (距离空间): 紧集 M 上的连续函数为 K 上的紧集

证:

$f(M)$ 为紧, 对 $\forall y_n \in f(M)$, 则 $y_n = f(x_n)$, 其中 $x_n \in M \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_0 \in M$

f 连续 $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(M)$

3. 紧集上的连续函数空间

定义 1.15.1

设 M 为 (X,ρ) 紧集,$C(M)$ 为从 M 到 K 上所有连续函数全体.$\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in M} |f(x)| : f(M)$ 为 K 上紧集

定理 1.15.1

设 M 为 (X,ρ) 紧集, 则 $C(M)$ 是完备的 $\longrightarrow$Banach 空间

1. 找极限

设 $\{f_n\}$ 为 $C(M)$Cauchy 列,$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时,$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon, \forall x \in M$$

即 $\{f_n(x)\}$ 为 K 上 Cauchy 列

故 $f_n(x) \to f(x), \forall x \in M$

2. 下设 $f \in C(M)$, 对 $\forall x_0 \in M$

$$|f(x) - f(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \le \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_N(x)| + \lim_{n\to\infty} |f_N(x) - f_N(x_0)| + \lim_{n\to\infty} |f_N(x_0) - f_n(x_0)| < 3\epsilon$$

故 $f \in C(M)$

3. 收敛性 $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

因 $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

注:

1. 距离空间 (X,ρ) 中紧集 $M \to T_2$ 紧拓扑空间, 仍有 $C(M)$

2. $C(M)$ 的重要性 $\begin{cases} \text{只要有拓扑结构就有}C(M) \\ \text{可积空间, 可用连续函数} \\ L^\infty\text{经常用}C(M)\text{替代} \\ C(M)\text{典型的可交换的 B 代数} \end{cases}$

$C(M)$ 中函数族 $\mathcal{F} \subset C(M)$ 称有界集:$\|f\|_\infty \le M, \forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow |f(x)| \le M, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in M$(一致有界)

定义 1.15.2: 等度连续

$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall |x_1 - x_2| < \delta$ 时,$\forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \sup\limits_{y\in U(x_0,\delta)} |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x \in M$

连续 (一个函数一个点)$\Rightarrow$ 一致连续 (一个函数所有点)$\Rightarrow$ 等度连续 (所有函数所有点)

定理 1.15.2

设 M 为 (X,ρ) 紧集,$\mathcal{F} \in C(M)$ 列紧 (等价于完全有界)$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 一致有界 + 等度连续 (等价于完全有界)

$\Leftarrow, \forall x \in M$

等度连续 $\Rightarrow \forall \epsilon \exists \delta > 0$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}$

M 紧 $\Rightarrow M$ 完全有界 $\Rightarrow M$ 有有穷 δ 网, 记为 $N_m(\delta) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M$

2. 作映射 $T : \mathcal{F} \overset{C(M)}{\to} \mathbb{R}^n, \forall \varphi \in \mathcal{F} \to T\varphi = (\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n))\, |\varphi(x_i)| \le M$

$|T\varphi| = \left(\sum_{r=1}^{n} |\varphi(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M \cdots \sqrt{n}$ 为 $\mathbb{R}$ 中有界 $\to$ 列紧

3. 找有穷 ϵ 网,$\forall \varphi \in \mathcal{F}, \forall x \in M \Rightarrow \{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 为 $\mathcal{F}\epsilon$ 网

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \\
=&|\varphi(x) - \varphi(x_r) + \varphi(x_r) - \varphi_i(x_r) + \varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)| \\
\le&|\varphi(x) - \varphi(x_r)|\,(\text{等度连续}) + |\varphi(x_r) - \varphi_i(x_r)|\,(= |(T\varphi)_r - (T\varphi_i)_r| < |T\varphi - T\varphi_i|) + |\varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)|\,(\text{等度连续}) \\
\le&\epsilon
\end{aligned}
$$

第二章　线性算子与线性泛函

引: 数分 $C(\mathbb{R}^*)f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 高代:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \to Ax$
求导:$C^1(M) \to C(M)$
求积分:$C(M) \to C^1(M)$

定义 2.0.1

设 X, Y 为两个线性空间 D 为 X 的线性子空间

$$T : D \subset X \to Y\text{称线性的}$$

$$\alpha x + \beta y \in D \to T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$$

特别的,$Y = K$, 则称 T 为线性泛函

$$\text{有界连续线性算子}\begin{cases}\text{可逆性: 开映射, 正则算子, 闭值域算子}\\ \text{泛函:}T^*\text{共轭算子}\\ \text{收敛性: 紧算子,Fredlom 算子}\\ \text{内积性: 对称算子, 自伴算子, 正常算子}\end{cases}$$

2.1　基本概念和性质

定义 2.1.1

设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_2)$ 是两个 B^* 空间.

$$\text{称线性算子}\begin{cases}\text{连续} : \forall x_n \to x_0 \in X \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0) \in Y \Leftrightarrow \text{在}x = 0\text{处连续}\\ \text{有界} : \forall x \in X, \exists M > 0, s.t. \|T x\| \le M \|x\|\end{cases}$$

注:
1. T 连续 $\Leftrightarrow$ 有界
$\Leftarrow$ 显然
$\Rightarrow$ 反证, 若无界
$\forall M = n > 0, \exists x_n \in X, s.t. \|T x_n\| > n \|x_n\|$
$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}, \|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ 当 $n \to \infty$

但 $\|Ty_n\| > 1$ 矛盾

2. 线性泛函 f 有界 ⇔f 的零空间 $kerf = N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ 是闭子空间.

证明:

$\Rightarrow$ 对一般线性算子对 $x_n \to x_0, x_n \in N(T) \Rightarrow T(x_n) = 0 = T(x_0)$

$\Leftarrow$ 对泛函:$f : X \to K(\mathbb{R}^n, C^n)$

反证: 若无界, 即 $\forall M = n, \exists x_n \in X, s.t. \|f(x_n)\| > n\|x_n\|$

令 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = 1, |f(y_n)| > n$

构造 $z_n = \frac{y_n}{f(y_n)} - \frac{y_1}{f(y_1)}$ 则 $f(z_n) = 0, z_n \in N(f)$

$z_n \to -\frac{y_1}{f(y_1)} \in N(f)$ 但 $f(-\frac{y_1}{f(y_1)}) = -1$ 矛盾

3. 范数, 令 $\|T\| = \sup\limits_{x\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{0<\|x\|\leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

则 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \|T\|$ 是最小常数.

4. $(X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y), B^*$ 空间 $\{\mathscr{L}(X, Y)$, 有界线性算子全体$\}$

线性结构:$(\alpha T_1 + \beta T_2)(x) = \alpha T_1 x + \beta T_2 x \in Y$ 线性算子且有界.

即:$\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathscr{L}(X, Y), \forall T \in \mathscr{L}(X, Y), \|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

命题 2.1.1

若 B^* 空间 Y 是完备的, 则 $\mathscr{L}$(X,Y) 是 B 空间

$T_n \subset \mathscr{L}(X, Y)$Cauchy 列,$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|$

$\{T_n(x)\} \subset Y$ 是 Cauchy 列 $\Rightarrow T_n x \to Tx \in Y$

T 线性:$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$

$\|T_n x - Tx\| = \left\|T_n x - \lim\limits_{n\to\infty} T_m x\right\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|T_n x - T_m x\| < \epsilon\|x\| \Rightarrow T_n - T \in \mathscr{L}(X, Y)$

$\Rightarrow T = T_n - (T_n - T) \in \mathscr{L}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \to 0 \in \mathscr{L}(X, Y)$

5. 所有有界线性泛函的全体 $\mathscr{L}(X, K)$(又称为对偶空间记作X^*), $(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

故为 Banach 空间

简记 $\mathscr{L}(X)(\mathscr{L}(X, X))$

6. 稠密定义 (有界延拓定理), 设 $T : D(T) \subset X \to Y$ 为有界线性算子, 且 Y 完备, 则 T 保范延拓到 $D(\bar{T})$, 即 $\tilde{T} : D(\bar{T}) \to Y$ 且 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|, \tilde{T}|_{D(T)} = T$

证明:$\forall x \in D(\bar{T}), \exists x_n \in D(T), s.t. x_n \to x \in X, \|Tx_n - Tx_m\| \leq M\|x_n - x_m\| < \epsilon$

即 $T(x_n)$ 为 Y 中 Cauchy 列,Y 完备,$Tx_n \to y \in Y$, 从而定义 $\tilde{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$

$\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|, n \to \infty$ 时,$\left\|\tilde{T}x\right\| \leq \|T\|\|x\|, \left\|\tilde{T}\right\| \geq \|T\|$, 则 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$

2.2 重要例子

1. 矩阵 $A : K^n \to K^m \to$ 有限维 B^* 空间 $\to$ 有限维 B^* 空间

$$\|Ax\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|f_{ij}\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\right) = \|A\|^2 \, |x|^2 \text{ 其中 } \|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|t_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. $\mathscr{L}^2(\Omega,\mu)$ 其中 $(\Omega,\mathbb{B},\mu)$ 测度空间,$k(x,y)$ 为二元平方可积函数.
定义:$Tf(x) = \int_\Omega k(x,y)\cdot f(y)dy$ 为积分算子, 则 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{L}^2)$
证明:

$$\begin{aligned}\|Tf\| = \int_\Omega |Tf(x)|^2 \, dx &= \int_\Omega \left|\int_\Omega k(x,y)f(y)dy\right|^2 dx \le \int_\Omega \left[\int_\Omega |k(x,y)|^2 \, dy \int_\Omega |f(y)|^2 dy\right] \\ &= \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2 \, dxdy \, \|f\|^2\end{aligned}$$

3. 卷积算子: 设 $K(x)$ 为 $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ 上函数, 定义 $L^p(\mathbb{R}), 1 \le p \le +\infty$

$$\begin{aligned}(K*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^{\frac{1}{q}} \left|k(x-y)^{\frac{1}{p}} f(y)\right| dy &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)| \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)| \, |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|K\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)| \, |f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\|K*f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |K*f(x)|^p \, dx \le \|K\|^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |K(x-y)| \, |f(y)|^p \, dx$$

$$\|K\|^p \cdot \|f\|_p^p \,(\text{Young 不等式} \; \|K*f\|_p \le \|K\| \cdot \|f\|_p \quad 1 < p < \infty)$$

例题 2.2.1

$D : C^1([a,b]) \subset C[a,b] \to C[a,b], \forall f \to D(f(x)) = f'(x)$ 无界线性算子

取:$C[0,1], x_n = t^n \in C^1[0,1], \|t^n\|_\infty = 1, \|Dx_n\|_\infty = \left\|nt^{n-1}\right\|_\infty = n$

例题 2.2.2

$R : C[a,b] \to C[a,b], \forall f \to \int_a^b f(t)dt \le \|f\|_\infty (b-a)$

例题 2.2.3

投影算子: 设 M 为 Hilbert 空间 X 的非空真闭子空间

$\forall x \in \mathcal{H}, \exists$ 唯一的 $x = y + z, y \in M, z \in M^\perp$ 令 $P_M x = Px = y$, 即 $x = Px + z$
$\|Px\| \le \|x\| \Rightarrow \|P\| \le 1$ 且当 $x \in M \neq \|Px\| = \|x\| \Rightarrow \|P\| = 1$

2.3 Hilbert 空间上有界线性泛函

在 $\mathbb{R}^n, f_y(x) =< x, y >\Rightarrow \left\|f_y(x)\right\| \le |x|\,|y|$ 有界线性泛函

$\exists y \in \mathbb{R}^n, s.t. f(x) =< x, y >$ 反过来会不会有 $\Leftarrow \forall f \in (\mathbb{R}^n)^*$

证明:$\{e_n\}, \forall x \in \mathbb{R}^n, x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) =< x, y >, y = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$

Hilbert 空间 H 中,$\forall y \in H, f_y(x) =< x, y >\Rightarrow \left|f_y(x)\right| \le \|x\|\,\|y\| \Rightarrow \left|f_y\right| = |y| \Rightarrow f_y \in H^*$

Hilbert 空间 H 中,$\forall y \in H, f_y(x) =< x, y >\Rightarrow \left|f_y(x)\right| \le |x|\,|y| \Rightarrow \left|f_y\right| = |y| \Rightarrow f_y \in H^*$, 反之 $\Rightarrow$ 也是对的

定理 2.3.1: Riesz 表示定理

设 H 为 Hilbert,$f \in H^*$, 则存在唯一的 y_f 使得 $f(x) =< x, H >, \forall x \in H$

令 $N(f) = \{x \in H, f(x) = 0\}$, 若 $f \equiv 0$, 则显然成立.

若 $f \not\equiv 0$, 则 $N(f)$ 为 H 的非空真闭子空间

$\forall x \in H, x = y + \alpha x_0, y \in N(f), \alpha x_0 \in (N(f))^\perp$ 且 $|x_0| = 1$ 其中 $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$

$$\begin{matrix} \alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)} \\ < x, x_0 >=< y + \alpha x_0, x_0 >= \alpha \end{matrix} \quad \Rightarrow f(x) = \alpha f(x_0) =< x, x_0 > f(x_0) =< x, f(\bar{x_0}) x_0 >, y_f = f(\bar{x_0}) x_0$$

唯一性: 若 $f(x) =< x, y_f^{(1)} >=< x, y_f^{(2)} >$

$\Rightarrow \forall x \in H, < x, y_f^{(1)} - y_f^{(2)} >= 0$

$\Rightarrow y_f^{(1)} = y_f^{(2)}$

注:1. $H^* \simeq H$

$J : f_y \leftarrow \forall y \in H, \forall f \to \exists y$ 使得 $f(x) =< x, y >$

2. 几何意义

3. 有界的共轭双线性函数 $\alpha(x, y) : H \times H \to R$

$\alpha(x, y) \le M \|x\|\,\|y\|$

则 $\exists A \in \mathcal{L}(H)\text{s.t.}\alpha(x, y) =< x, Ay >$ 且 $\|A\| = |\alpha| = \sup\limits_{x,y\in H, x\neq 0, y\neq 0} \frac{|\alpha(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$

证明: 固定 $y \in H, \alpha(x, y) \in H^*$, 则 $\alpha(x, y) =< x, z >$ 其中 $z = z(y)$

$A : y \to z(y), \alpha(x, y) =< x, Ay >$

下说明 A 是线性的 $A(ky_1, ly_2)$

$$\|Ay\| = \sup_{x\in H, x\neq 0} \frac{|\alpha(x, y)|}{\|x\|} \le \|\alpha\|\,\|y\| \quad \|A\| \le \|\alpha\|$$

且 $\|A\| = \|\alpha\| = \sup\limits_{(x,y)\in H\times H, x\neq 0, y\neq 0} \frac{|\alpha(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \le \frac{\|A\|\|x\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = \|A\|$

2.4 Baive 纲定理

引: 无穷维的 B^* 空间中, 不存在”体积”一样平移不变的测度, 如何度量集合”大小”

定义 2.4.1: 疏朗集 (无处稠密集)

设 (X,ρ) 为度量空间, 称 X 的子集是疏朗的. 若 $\bar{E}$ 的内点是空的 $\Leftrightarrow \forall V(x_0,r) \subset X, \exists B(X_1,r_1) \subset B(x_0,r)$s.t.$B(X_1,r_1)\cap\bar{E}=\varphi \Leftrightarrow \bar{E}$ 是疏朗的 $\Leftrightarrow \bar{E}$ 不包含任何的开集 $\Leftrightarrow X\backslash\bar{E}$ 为 X 的稠密开集 $\Leftrightarrow \bar{E}$ 为一个开或闭的边界

1. 闭区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 集是疏朗的
2. B^* 空间的真闭子空间是疏朗的
3. 无穷维 B^* 空间任何紧子集是疏朗的.

反证: 若 $A\supset U$ 开集 $\Rightarrow \bar{U}\subset A=\bar{B}(x_0,r)$ 二小球的闭包不是紧的, 而紧集的闭子集一定是紧的.

4. $\mathbb{R}$ 中, 令 $E=\bigcup\limits_{x_n\in Q} B(x_n,\frac{1}{2^n}), m(E)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$

但 $R\backslash E$ 是疏朗的, 但是 E 在 R 中却是稠密的, 这个例子告诉我们勒贝格测度很大的集合也可能是疏朗的.

定义 2.4.2

设 (X,ρ) 为距离度量空间, 称 $E\subset X$, 则第一纲集的定义是:$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 其中 E_n 是疏朗的, 如果不满足这个条件, 则称该集合是第二纲的.

1. 有理数集 Q 在 R 上是第一纲的.
2. $C[a,b]$ 上, 多项式的全体,$P=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ 为第一纲的.
3. B^* 空间的真闭子空间的可数并.
4. $A:X\to Y$, 紧算子: 有界集 $\to$ 列紧集,$B(0,n), AX$ 在 Y 中是第一纲的

定理 2.4.1: Baire 纲定理

完备的距离空间是第二纲的.

若不是第二纲的, 即 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n, E_n$ 为疏朗的.

1. 对 $\forall B(x_0,r)\subset X \overset{E_1疏}{\Rightarrow} \exists B(x_1,r_1(r_1<1))\subset B(x_0,r)$s.t.$B(x_1,r_1)\cap\bar{E}_1=\varphi$
2. 对 $\forall B(x_1,r_1)\subset X \overset{E_2疏}{\Rightarrow} \exists B(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)$s.t.$B(x_2,r_2)\cap(\bar{E}_1\cup\bar{E}_2)=\varphi$

$\vdots$

n. 对 $\forall B(x_{n-1},r_{n-1})\subset X \overset{E_n疏}{\Rightarrow} \exists B(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})$s.t.$B(x_n,r_n)\cap(\bar{E}_1\cup\bar{E}_2\cdots\cup\bar{E}_n)=\varphi$

$\exists B(x_0,r)\supset B(x_1,r_1)\cdots\supset B(x_{n-1},r_{n-1})\supset B(x_n,r_n)$

且 $\rho(x_{n+p},x_n)<r_n<\frac{1}{n}$ 则 $\{x_n\}$ 为 XCauchy 列 $\overset{完备}{\Rightarrow} \exists x_0\in X$s.t.$x_n\to x\in X$

$x\in B(x_n,r_n)\cap\bar{E}_n\Rightarrow\rho(x,x_n)<r_n$ 矛盾

注:

1. Baire 纲定理是闭区间套定理的提升与发展, 用来刻画空间子集的大小.
2. 等价刻画:

1. 完备距离空间 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n, A_n$ 闭, 则存在 A_ks.t.A_k 包含非空开子集.

2. 完备距离空间 X 的第一纲子集的补集一定是第二纲的.
3. 完备距离空间 X 的第一纲子集不包含非空开子集
4. 完备距离空间 X 可数个稠密开子集的交是稠的第二纲集

Baire 纲定理的应用

1. 没有孤立点的完备距离空间元素个数是不可数的:(例如 R^n)
2. 每个 Banach 空间不能写成可数的真闭子空间的并 R^n
3. 每个无穷维的 Banach 空间的线形基维数 $\geq \chi$
4. 在 Q 处连续, 在 Q^c 处剪短函数不存在
5. 在 Baire 纲意义下, 几乎所有的连续函数处处不可微

2.5　开映射定理

引: 解方程, 给定 $T: X \to Y$ 求 xs.t.$Tx = y \in Y$
若算子 T 存在右逆: 即 $TT_r^{-1} = I$, 则令 $X = T_r^{-1}y$, 可得 x 为解 $\to$ 解的存在性
若算子 T 存在左逆: 即 $T_l^{-1}T = I$, 若 x 为方程的解, 可得 $x = T_l^{-1}y$,x 为解 $\to$ 解的唯一性
$\Rightarrow$ 方程解存在且唯一:$\Leftrightarrow$ 算子存在右逆和左逆 $\Leftrightarrow$ 算子可逆

$$T_l^{-1} = T_l^{-1}(TT_r^{-1}) = (T_l^{-1}T)T_r^{-1} = IT_r^{-1} = T_r^{-1}$$

方程解的稳定性: 即当 $x = T^{-1}y$, 当 y 有微小的变化时, 解也是有很小的变动
上面这段话翻译过来就是
在 T 可逆的前提下,T^{-1} 是连续算子 (有界,$\|x\| = \left\|T^{-1}y\right\| \leq M\|y\|$)
等价于对 X 中任意开集 $W \subset X$, 在算子 T^{-1} 任意开集 $W \subset X$, 在算子 T^{-1} 原像 TW 也是开集
等价于 (开映射 $T: X \to Y, \forall w \mapsto Tw$) 对 X 中任意开集 $W \subset X$, 算子 T 的像 Tw 也是开集

定义 2.5.1

设算子 $T: X \to Y$, 其中 X 和 Y 为距离空间, 称 T 为开映射是指 T 把 X 中所有开集 V 都映为 Y 中开集 TV

注:T 是连续的, 不等价于 T 是开映射, 例如 $f(x) = x^2, x \in (-1, 1), R(f) = [0, 1)$

定理 2.5.1: 开映射定理

设 X 和 Y 为 Banach 空间,$T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 且 T 为满射, 则 T 是开映射

1. $T: X \to Y$ 开映射 $\Rightarrow T: X \to Y$
$\forall w \subset X \to Tw \subset Y$ 开,$B(0, 1) \to TB(0, 1) \overset{\exists\delta>0}{\supset} U(0, \delta)$

$\forall x_0 \in X, B(x_0,r) \to TB(x_0,r) \overset{\exists\delta>0}{\supset} \bigcup(Tx_0, r\delta)$
$\forall y_0 \in Tw, y_0 = Tx_0, x_0 \in W$
W 开,$B(x_0,r) \supset W$ 取 $\epsilon = r\delta$, 则 $\cup(y_0,\epsilon) \subset TB(x_0,r)$
2. $\exists\delta$s.t.$\cup(0,3\delta) \subset \overline{TB(0,1)}$ 取 $\delta = \frac{r}{3n}$
Y 完备,T 满的,X 完备,$Y = TX = T\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(0,n) \Rightarrow n$s.t.$TB(0,n)$ 不是疏朗的,$\exists y_0 s.t. \bigcup(y_0,r) \supset \overline{TB(0,n)}$
$\Rightarrow U(0,1) \subset \overline{TB(0,n)}$
3. $\exists\delta > 0, s.t. \cup(0,\delta) \supset TB(0,1)$
要证: 对 $\forall y_0 \in U(0,\delta) \supset \overline{TB(0,\frac{1}{3})} \Rightarrow x_1 \in B(0,\frac{1}{3})$s.t.$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{3}$
对 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in \bigcup(0,\delta) \subset \overline{TB(0,\frac{1}{3^2})} \Rightarrow \exists x_2 \in B(0,\frac{1}{3^2}) s.t. \|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{3^2}$
$y_2 = y_1 - Tx_2 \in \cup(0,\frac{\delta}{3^2}) \subset \overline{TB(0,\frac{1}{3^3})} \Rightarrow x_3 \in B(0,\frac{1}{3^3})$
$\vdots$
令 $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$$\|y_n\| = \|y_{n-1} - Tx_n\| = \|y_{n-2} - T(x_n + x_{n-1})\| = \|y_0 - T(x_1 + \cdots + x_n)\| \,(\|y_0 - Tx_0\|) \le \frac{\delta}{3^n} \to 0$$

2. $Y = Tx$ 是完备 (即 Baire 纲定理) 必不可少的.
例如:
(I), 积分算子 $T : C[0,1] \to D = \{h \in C'[0,1], h(0) = 0\} \subset C[0,1], f \mapsto Tf = \int_0^t f(x)dx$
则 $T \in \mathcal{L}(C[0,1]), \|Tf\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 1}\left|\int_0^b f(x)dx\right| \le \|f\|_\infty, T^{-1} : D \to C[0,1]$, 且 $T^{-1} = \frac{d}{dt}$ 不是有界.
(II) 积分算子,$T : C[0,1] \to C^1[0,1], f \to Tf = \int_0^t f(x)dx, \|f\| = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}, f \mapsto Tf = \int_0^t f(x)dx$
$T \in \mathcal{L}(C[0,1], C'[0,1]), \|Tf\| \le \|f\|_\infty, T^{-1} = \frac{d}{dx}, \left\|T^{-1}y\right\|_\infty \le \|f\|_\infty \le \|f\|_1$

2.6　Banach 逆算子定理

定理 2.6.1

设 X 和 Y 为 B 空间,$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 双射, 则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$

证明:
法一:$T : X \to Y$ 开映射 $\overset{T^{-1}存在}{\Leftrightarrow}$ T^{-1} 连续, 即 $T^{-1} \in \mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$
法二: 已证明 $U(0,\delta) \subset TB(0,1)$
$\Rightarrow U(0,1) \subset TB(0,\frac{1}{\delta}) \Rightarrow T^{-1}U(0,1) \subset B(0,\frac{1}{\delta})$
$\forall y \in U(0,1) \subset Y$ 都有 $T^{-1}y \subset B(0,\frac{1}{\delta}) \subset X$
对 $y \in Y, \frac{y}{\|y\|(1+\epsilon)} \subset U(0,1) \subset Y \Rightarrow \left\|T^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|(1+\epsilon)}\right)\right\|_X = \frac{1}{\delta}$
$\Rightarrow \left\|T^{-1}y\right\|_x \le \frac{1+\epsilon}{\delta}\|y\|_y, \forall y \in Y$
令 $\epsilon \to 0^+$, 则 $\left\|T^{-1}y\right\|_x \le \frac{1}{\delta}\|y\|_Y$

推论 2.6.1: 范数等价定理

线性空间 X 有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$, 使其成为 B 空间, 且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价

证明:$(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), \forall x \to Ix = x$ 双射

$\|Ix\|_1 = \|x\|_2 \le C\|x\|_1 \Rightarrow I$ 有界

$\|x\|_1 = \left\|I^{-1}x\right\|_2 \le M\|x\|_1 \Rightarrow \|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强

2.7 闭图像定理

引: 开映射定理证明中 $\begin{cases} S_n \to x_0 \\ TS_n \to y_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in X$ 且 $y_0 = Tx_0$

定义 2.7.1: 闭算子

设 X 和 Y 为 B^* 空间, 若 $T: D(T) \subset X \to Y$ 线性算子.$x_n \to x, Tx_n \to y$, 都有 $x \in D(T)$ 且 $y = Tx$, 称为闭线性算子

注: 若 $T: D(T) \subset Y$ 连续 $\Rightarrow \begin{cases} \text{若 D(T) 是闭子空间, 对 Tx 是闭的} \\ \text{D(T) 不是闭的, 延拓到}\overline{D(T)}\text{则}\tilde{T}x\text{是闭的} \end{cases}$

定理 2.7.1

设 X 和 Y 是 B 空间,$T: D(T) \subset X \to Y$ 的闭线性算子, 若 $D(T)$ 是闭的, 则 T 是连续的.

证明:

(1).D(T) 线性子空间 + 闭 $\Rightarrow$ D(T) 完备的 B 空间 $(D(T) \subset X, \|\cdot\|_2)$

(2). 在 D(T) 引入新范数 $\|\cdot\|_G, \|x\|_G = \|x\| + \|Tx\|$

$(D(T), \|\cdot\|_G)$ 完备性:$\|\cdot\|_G = \|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| \to 0$

$\{x_n\} \subset D(T)$ 闭,$x_n \to x^* \in D(T), \|x_n - x^*\|_G = \|x_n - x^*\| + \|Tx_n - Tx^*\| \to 0$

(3). 范数等价定理

$\|x\| \le \|x\|_G, \forall x \in D(T)$

$\Rightarrow \|Tx\| \le \|x\|_G \le M\|x\| \Rightarrow T$ 有界

注:

1. 设 X 和 Y 为 B 空间:$T \to X \to Y$ 为线性算子, 则 T 为闭 $\Leftrightarrow$T 连续

2. 算子图像, 设 X 和 Y 为 B^* 空间,$T: D(T) \subset X \to Y$ 线性算子与线性泛函

在 $X \times Y$ 中集合 $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y, x \in D(T), y = Tx\}$ 称为算子 T 的图像

定义范数, 图模 $\|(x, y)\|_G = \|x\| + \|y\|$ 为 $X \times Y$ 上的范数, 则 T 是闭的 $\Leftrightarrow G(T)$ 在 $X \times X$ 中按图模范数下是闭的

证明:

$\Leftarrow, x_n \to x, Tx_n \to y, (x_n, Tx_n) \subset G(T) \Rightarrow (x, y) \in D(T)$

$\Rightarrow$ 只要证明 $\overline{G(T)} \subset G(T)$, 事实上,$\forall (x, y) \in \overline{G(T)}, (x_n, y_n) \in G(T), \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_G \to 0, x_n \to x, y_n = Tx_n \to Tx, T$ 闭,$x \in D(T)$ 且 $y = Tx \Rightarrow (x, y) \in G(T)$

(3).

若 $T: D(T) \subset X \to Y$ 线性算子, 则 T 连续 +D(T) 闭推出 T 为闭算子, 反过来,T 闭算子 + 完备 +D(T) 闭推出 T 连续

(4). 存在 Banach 空间之间的闭的无界线性算子.

例子: 求导算子:$D = \frac{d}{dt}, C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$, 但其是闭的

法一:$x_n \to x \in C[0,1], Dx_n \to y \in C[0,1]$

则 $x_n(t) \to x(t), \forall t \in [0,1], x_n'(t) \to y(t)$ 且 $t \in [0,1]$

且 $\int_0^t y(t)dt = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x'(t)dt = \lim_{n\to\infty} x_n(t) - x_n(0) = x(t) - x(0)$

$x(t) = x(0) + \int_0^t y(t)dt \in C^1[0,1]$ 且 $x'(t) = y(t)$

法二:(闭图像定理)

证明:$\forall (x_n, y_n) \in G(D)\ (x,y) \overset{X\times Y}{\in} G(D)$

即 $\|(x_n - y_n) - (x - y)\|_G = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

$$\begin{cases} x_n\text{一致连续}x, x \in C^1[0,1] \\ x_n'\text{一致连续, 且}y = Dx \end{cases}$$

2.8 一致有界定理 (共鸣定理)

引: 数学分析 $\{f_n\} \subset C[a,b]$ 若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), f_n$一致有界$f, f \in C[a,b]$

而在泛函分析当中:$\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ 且 $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ 且 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

定理 2.8.1

设 X 是 B 空间,Y 是 B^* 空间,$W \subset \mathcal{L}(X,Y)$ 且 $\sup_{A\in W} \|Ax\| < \infty, \forall x \in X$, 则 $\exists M > 0, s.t. \|A\| \le M, \forall A \in W$

$(X, \|\cdot\|)$ 完备,$(X, \|\cdot\|_\omega), \|x\|_\omega = \|x\| + \sup_{A\in W} \|A_x\|$ 范数

证完备性:$\|x_n - x_m\|_\omega = \|x_n - x_m\| + \sup_{A\in W} \|Ax_n - Ax_m\| \to 0$

$\|x_n - x_m\| \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0 \in X$

$\sup_{A\in W} \|Ax_n - Ax\| < \epsilon, (\|Ax_n - Ax_m\| < \epsilon, \forall A \in W \Rightarrow \|Ax_n - Ax\| < \epsilon, \forall A \subset W)$

$\|x_n - x\|_\omega \to 0$ 完备

又因为 $\|x\| \le \|x\|_\omega \overset{\text{范数等价}}{\Rightarrow} \sup_{A\in W} \|Ax\| \le \|x\|_\omega \le M\|x\|, \forall x \in X \Rightarrow \|A\| \le M$

注:

1. 一致有界定理,$\sup_{A\in W} \|Ax\| < +\infty, \forall x \in X \Leftrightarrow \|Ax\| \le M_x\|x\|$(算子族的逐点有界) $\|A\| < M, \Leftrightarrow \|Ax\| \le M\|x\|$(算子族的一致有界)

2. 共鸣定理 (逆否命题)$\sup_{A\in W} \|A\| = \infty \Rightarrow \exists x_0 \in X, s.t. \sup_{A\in W} \|Ax_0\| = \infty$ 称 x_0 为共鸣点

3. 线性算子极限连续性, 设 X 是 B 空间,Y 为 $B^*, \{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$

设 $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx, \forall x \in X$, 则 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$\sup_{\{T_n\}} \|T_n x\| \le M_x, \forall x \in X$

$\overset{\text{共鸣}}{\Rightarrow} \sup\limits_{\{T_n\}} \|T_n\| < M \Leftrightarrow \|T_n x\| \le M\|x\| \Rightarrow \|Tx\| \le M\|x\| \Rightarrow T \in \mathcal{L}(X,Y)$

4. 算子序列逐点收敛在稠密子空间上定义

定理 2.8.2

设 X 是 B 空间,Y 是 B^* 空间,M 是 X 的稠密子集, 若 $A_n, A \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ 对 $\forall x \in X$ 上成立当且仅当以下两条成立

1. $\|A_n\| \le M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax, \forall x \in M$

$\Rightarrow$ 一致有界定理

$$\begin{aligned}\Leftarrow, \forall x \in X, \|A_n x - Ax\| &= \|A_n x - A_n y + A_n y - Ay + Ay - Ax\| \\ &\le \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ay - Ax\| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

开映射 $\Leftrightarrow$ Banach 逆算子定理 $\Leftrightarrow$ 闭图像定理 $\Leftrightarrow$ 一致有界定理

2.9 Hahn-Banach 定理

引:" 有界线性泛函" 多少的问题:$(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n \to$Hilbert 空间 $H^* = H \to B^*$ 空间 X 的有界线性泛函 X^*

$$\text{不同角度}\begin{cases}\text{求出}X^*, (l')^* = l^\infty \\ \text{与 X 元素作比较, 可分辨 X, 即}\forall x_1 \ne x_2 \in X, \exists f \in X^*, s.t. f(x_1) \ne f(x_2) \\ \text{找出一些线性泛函: 从线性空间} \to B^*\text{空间}\end{cases}$$

1. 线性空间 X, 含有一个均衡的吸收凸集 $C \Rightarrow p(x)$ 半范数

对 $\forall x_0 \ne 0 \in X$ 且 $p(x_0) \ne 0$, 定义:$X_0 = \{\lambda x_0, \lambda \in K\}, f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x) : X_0 \to K$ 为 X_0 上的非零线性泛函且有界:$|f(\lambda x_0)| = |\lambda p(x_0)| = |p(\lambda x_0)| < \infty, \forall \lambda \in K$

2. 设 X 为 B^* 空间,X_0 为线性子空间, 且 f_0 为 X_0 上的有界线性泛函, 令 $\|f_0\|_0 = \sup\limits_{x \in x_0, \|x\| \le 1} f_0(x) \Rightarrow |f_0(x)| \le p(x)$, 其中 $p(x)$ 次线性泛函, 即

1. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha$ 为非负实数

$X_0 \subset X$ 有界线性泛函 $\xrightarrow{\text{延拓问题, 保持原性质}}$ 整个 X 上有界线性泛函

2.9.1 线性空间上 Hahn-Banach 延拓定理

定理 2.9.1

设 X 为实线性空间,X_0 为线性子空间,$p(x)$ 为 X 上的次线性泛函,f_0 是 X_0 上的实线性泛函且 $f_0(x) \leq p(x), \forall x \in X_0$

则 $\exists X$ 上实线性泛函 f 满足以下两条:

1. $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$(受 p 控制)
2. $f(x) = f_0(x), \forall x \in X_0$(延拓)

定理 2.9.2

设 X 为复线性空间,X_0 为线性子空间,$p(x)$ 为 X 上的半范数,f_0 是 X_0 上的复线性泛函且 $|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in X_0$

则 $\exists X$ 上复线性泛函 f 满足以下两条:

1. $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in X$(受 p 控制)
2. $f(x) = f_0(x), \forall x \in X_0$(延拓)

注: 只要 X 上含有一个均衡的吸收的凸子集 C, 则必存在 X 上一个非零线性泛函

2.9.2 B^* 空间的泛函延拓定理

定理 2.9.3: Hahn-Banach 定理

设 X 为 B^* 空间,X_0 是 X 的线性子空间,f_0 是定义在 X_0 上的有界线性泛函,$\|f_0\|_0 = \sup\limits_{x \in x_0, \|x\| \leq 1} |f_0(x)|$, 则在 X 上必存在有界线性泛函, 满足以下两点

1. $f(x) = f_0(x), \forall x \in X_0$(延拓)
2. $\|f\| = \|f_0\|_0$(保范)

令 $p(x) = \|f_0\|_0 \|x\|, \forall x \in X$ 为半范数, 且 $|f_0(x)| \leq \|f_0\|_0 \|x\| = p(x), \forall x \in X_0$

$\exists X$ 上复线性泛函 f 满足以下两条:

1. $f(x) = f_0(x), \forall x \in X_0 \Rightarrow \|f_0\|_0 \leq \|f\|$
2. $|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\|_0 \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|f_0\|_0$

推论 2.9.1

设 X 为 B^* 空间, 则 $\forall x_0 \in X \backslash \{0\}$, 都 $\exists f \in X^*$s.t.$f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| = 1$

令 $X_0 = \{\lambda x_0, \lambda \in K\}$ 令 $f_0(x) = \lambda \|x_0\|, \forall \lambda \in K$ 线性

$f_0(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f_0\|_0 = \|f_0\|_0 = \sup\limits_{x \in x_0, \|x\| \le 1} |f_0(x)| \le 1$

由 Hahn-Banach 定理,$\exists f \in X^*$s.t.$\|f_0\|_0 = 1$

推论 2.9.2

设 X 为 B^* 空间, 则 X^* 是可以分辨 X 的

相当于证明 $\forall x_1 \ne x_2 \in X, \exists f \in X^*$s.t.$f(x_1) \ne f(x_2)$

令 $x_0 = x_1 - x_2 \ne X$, 由上一个推论可得 $\exists f \in X^*$s.t.$f(x_1) - f(x_2) = f(x_0) = \|x_0\| \ne 0$

推论 2.9.3

设 X 是 B^* 空间, 则 $x_0 \in X$ 为 0 元 $\Leftrightarrow f(x_0) = 0, \forall f \in X^*$

$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 若 $x_0 \ne 0, \exists f \in X^*$s.t.$f(x_0) = \|x_0\| \ne 0$

推论 2.9.4

设 X 为 B^* 空间, 则对 $\forall x \in X$, 都有 $\|x\| = \sup\limits_{f \in X^*, \|f\| \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$

$|f(x)| \le \|f\| \|x\|$

则 $\forall f \ne 0, f \in X^*$

$\|x\| \ge \sup\limits_{f \in X^*, \|f\| \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$

下证明:

$\sup\limits_{f \in X^*, \|f\| \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \ge \|x\|$

考虑 $x \ne 0, \exists f \in X^*$s.t.$f(x) = \|x\|$ 且 $\|f\| = 1$, 故 $\sup\limits_{f \in X^*, \|f\| \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \ge \|x\|$

推论 2.9.5

设 X 是 B^* 空间,M 是线性子空间,$\forall x_0 \in X$, 定义 $d = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\| = \rho(x, y) > 0$, 则 $\exists f \in X^*$s.t. 以下三条成立

1. $f(x) = 0, \forall x \in M$
2. $f(x_0) = d$
3. $\|f\| = 1$

令 $X_0 = \{x' + \lambda x_0, x' \in M, \lambda \in K\}$ 且 $f_0(x' + \lambda x_0) = \lambda d$, 则 $f(x') = 0, \forall x' \in M, f(x_0) = d$

$$|f_0(x' + \lambda x_0)| = |\alpha| d = |\alpha| \rho(x_0, M) \le |\alpha| \left\| \frac{x'}{|\alpha|} + x_0 \right\| = \|x' + \alpha x_0\| \Rightarrow \|f_0\| \le 1$$

2.10 共轭空间, 弱收敛, 自反空间

2.10.1 共轭空间表示

引:(线性空间): 代数共轭空间: 线性泛函全体

定义 2.10.1

设 X 是 B^* 空间, 共轭空间 $X^* = \mathcal{L}(X, K), \|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$, B 空间

常见空间的共轭空间

例题 2.10.1

$(L^p(X,\Omega,\mu))^* = L^q(X,\Omega,\mu)$, 其中 (X,Ω,μ) 是测度空间,$1 \leq p < \infty$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$l_f \leftarrow \forall f$$
$$l_f(g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$$

例题 2.10.2

$(l^p)^* = l^q, 1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$l_y \leftarrow \forall y$$
$$l_y(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

例题 2.10.3

$(C_0)^* = l^1$, 其中 $x_n \in C_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$l_y \leftarrow \forall y$$
$$l_y(g) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

例题 2.10.4

$(C_0(x))^* = M(x)$(X 有界正规 *Borel* 集全体),X 为局部紧的 T_2 空间

$$l_u \leftarrow \forall u$$
$$l_u(f) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

特别地,$(C[0,1])^* = BV[0,1]$

第二共轭空间

定义 2.10.2

设 X 是 B^* 空间,(不完备)$X \to X^* \to X^{**}$(第二共轭空间 (完备))

定义 2.10.3

自然 (典范) 映射

$$\Phi : x \in X \longrightarrow \Phi x = X$$
$$\forall f \in X^* \Phi x(f) = X(f) = f(x)$$

则

(1) Φ 线性的

即 $\Phi(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$

(2) 等距嵌入

$\|\Phi x\| = \|x\| = \sup\limits_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|x(f)|}{\|f\|} = \sup\limits_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|$

总结:$\Phi : X \to \Phi x \subset X^{**}$ 为一个等距同构

即 $X \subset X^{**}$

定义 2.10.4

若 $X = X^{**}$, 则称 X 为自反空间

例题 2.10.5

$\mathcal{R}^n, \mathcal{H}, l^p, L^p$ 当 $1 < p < +\infty$ 自反空间

例题 2.10.6

$l^1, l^\infty, C[a,b], C_0$ 不是自反的

2.10.2　共轭算子

起源: 解算子方程

引:(转置矩阵): 算子 $A = (a_{ij})_{n\times m}, \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$\forall y \in \mathbb{R}, < y, Ax >_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j)y_i = \sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}y_i)x_j =< A^*y, x >$

其中 $A^* = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}y_i\right)_{j=1}^{m} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}y_i\right)_{i=1}^{m}$

$A^* = (a_{ji})_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, A^* = A^T$

$< y, Ax >_n =< A^*y, x >_m \Leftrightarrow (A^*y)(x) = y(Ax)$

定义 2.10.5

设 X 和 Y 为 B^* 空间,$T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

定义共轭算子:

$$T^* : Y^* \to X^*$$
$$\forall f \to T^* f$$

其中, 对 $\forall x \in X^*, (T^* f)(x) = f(Tx)$

对偶基, 记号 $< T^* f, X >=< f, Tx >$

则 $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$

(1) 线性:$T^*(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta y)(Tx) = (\alpha T^* f + \beta T^* g)(x)$

(2)$\|T^*\| \leq \|T\|$

$$\|T^* f\| \leq \|f\| \, \|T\| \, \|x\|$$
$$\|T^* f\| \leq \|T\| \, \|f\|$$

注: 1. $*$ 运算:$\mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ 线性等距嵌入

证明:

(1). 线性:$(\alpha_1 T_1 + \beta_2 T_2)^*(f)(x) = f[(\alpha T_1 + \beta T_2)(x)] = (\alpha T_1^* + \beta T_2^*)(f)(X)$

(2). 等距:$\|T\| = \|T^*\|$

前面结论有 $\|T^*\| \leq \|T\|$

$\|T^*\| \geq \|T\|$: 对 $x \neq 0 \in X \Rightarrow Tx = y \neq 0 \in Y, \exists f \in Y^*, s.t. f(Tx) = \|Tx\|$ 且 $\|f\| = 1$

从而 $\|Tx\| = f(T_x) = (T^* f)(x) \leq \|T^*\| \, \|f\| \, \|x\| = \|T^*\| \, \|x\| \Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$

2.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X^* & \longrightarrow & X^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle (T^*f)(x)} & & \downarrow{\scriptstyle (T^*)^*=T^{**}} \\ Tx \in Y & \longrightarrow & Y^* & \longrightarrow & Y^{**} \end{array}$$

则 T^{**} 是 T 在 X^{**} 上的延拓

$$\|T^{**}\| = \|T\|$$

3. $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^*$

$(ST)^* = T^*S^*$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{S} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^* & \xleftarrow[T^*]{} & Y^* & \xleftarrow[S^*]{} & Z^* \end{array}$$

$\forall f \in Z^*, \forall x \in X$

$$(ST)^*(f)(x) = f(ST(x))$$
$$(T^*S^*)(f)(x) = T^*(S^*f)(x) = T^*(S^*f)(x) = S^*f(Tx) = f(ST(x))$$

$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

证明:

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I_x^* = I_x$$
$$(T^{-1})^*T^* = (T^{-1}T)^* = I_y^* = T_y$$

3. 内积空间 $< T^*f, X >=< f, Tx >$

若 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $(T^*)^* = T, \|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

证明:

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$$
$$\|T^*\|\,\|Tx\|\,\|x\| \geq \|T^*Tx\|\,\|x\| \geq < T^*Tx, x >=< Tx, Tx >= \|Tx\|^2$$

例题 2.10.7: 积分算子

设 $k(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$, 其中 (Ω, B, μ) 为测度空间

$$Tf(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y)d\mu(y) \in \mathcal{L}^2(L^2(\Omega, \mu))$$

$< T^*g, f >=< g, Tf >= \int_\Omega \int_\Omega k(x,y)f(y)d\mu(y)g(x)d\mu(x) = \int_\Omega f(y)d\mu(y) \int_\Omega k(x,y)g(x)d\mu(x) = T^*g(y) \Rightarrow T^*g = \int_\Omega k(y,x)g(y)d\mu(y)$

例题 2.10.8

$k(x) \in L(\mathbb{R}), (k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R})), 1 \le p \le +\infty, \|k * f\|_p \le \|k\| \|f\|_p$
$< (k*)^* g, f >=< g, k * f >= \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dydx = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy \int_{\mathbb{R}} k(x-y)g(x)dx =< (k*)^* g(y), f >$
$(k*)^* g(x) = \int_{\mathbb{R}} k(y-x)g(y)dy = (\hat{k}(x))_*, \hat{k}(x) = k(-x)$

2.11 弱收敛和弱 * 收敛

1. 致密性定理: 任意有界集都有收敛子列
2. 有限维 B^* 空间, 任意有界集都是列紧的
3. 无穷维 B^* 空间 X:X^* 中闭单位球都是弱 * 收敛的

2.11.1 空间自身元素序列收敛性

定义 2.11.1

设 X 是 B^* 空间,$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$, 称序列 $\{x_n\}$

1. 强收敛 $(x_n \to 0)$:$\|x_n \to x_0\| \to 0$
2. 弱收敛 $(x_n \rightharpoonup x_0)$:$\forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

注:1. 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\| \|x_n - x_0\| \to 0$$

2. 弱极限存在必唯一
$x_n \rightharpoonup x_n \rightharpoonup y$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(y), \forall f \in X^*$(Hahn-Banach 定理推论 1)
$\Rightarrow x = y$
3. 弱收敛的点列

1. 必有界
2. 对 X^* 中的稠密子集 M 上一切 f, 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$

证明:
$f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in X^*$
$x_n \subset X \subset X^{**}, f(x_n) = \Phi_n(f)$
$\sup\limits_{x_n} |f(x_n)| = \sup\limits_{\Phi_n} |\Phi_n(f)| < +\infty$
$\Rightarrow \|\Phi_n\| \le M$(一致有界定理)
$\|\Phi_n\| = \|x_n\| \le M$

4. 若 B^* 空间,$dim\ X < +\infty$, 若收敛序列 x_n 必强收敛

证明:$\mathbb{R}^n, x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)} e_i\ to x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{(0)} e_i$

$(\mathbb{R})^* = \mathbb{R}, \forall f \in (\mathbb{R})^* f(x_n) \to f(x_0), \xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$, 取 $f_i(e_i) = \delta_{ij} \in (\mathbb{R}^n)^*$

强收敛:$\|x_n - x_0\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}\right|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$(有限个 0 加一起)

5. 对无穷维 B^* 空间, 若收敛序列不一定强收敛

例如:$\{\sin n\pi t\} \subset L^2[0,1], \|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \nrightarrow 0$

$\forall f \in (L^2[0,1])^*, \int_0^1 f(t) \sin n\pi t dt \to 0$

2.11.2 共轭空间泛函序列收敛性

定义 2.11.2

设 X 是 B^* 空间,$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$, 称序列 $\{x_n\}$

1. 强收敛 $(x_n \to x_0)$:$\|x_n \to x_0\| \to 0$
2. 弱收敛 $(x_n \rightharpoonup x_0)$:$\forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

注:1. 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\| \|x_n - x_0\| \to 0$$

2. 弱极限存在必唯一

$x_n \rightharpoonup x_n \rightharpoonup y$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(y), \forall f \in X^*$(Hahn-Banach 定理推论 1)

$\Rightarrow x = y$

3. 弱收敛的点列

1. 必有界
2. 对 X^* 中的稠密子集 M 上一切 f, 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$

证明:

$f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in X^*$

$x_n \subset X \subset X^{**}, f(x_n) = \Phi_n(f)$

$\sup\limits_{x_n} |f(x_n)| = \sup\limits_{\Phi_n} |\Phi_n(f)| < +\infty$

$\Rightarrow \|\Phi_n\| \le M$(一致有界定理)

$\|\Phi_n\| = \|x_n\| \le M$

4. 若 B^* 空间,$dim\ X < +\infty$, 若收敛序列 x_n 必强收敛

证明:$\mathbb{R}^n, x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)} e_i\ to x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{(0)} e_i$

$(\mathbb{R})^* = \mathbb{R}, \forall f \in (\mathbb{R})^* f(x_n) \to f(x_0), \xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$, 取 $f_i(e_i) = \delta_{ij} \in (\mathbb{R}^n)^*$

强收敛:$\|x_n - x_0\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}\right|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$(有限个 0 加一起)

5. 对无穷维 B^* 空间, 若收敛序列不一定强收敛
例如:$\{\sin n\pi t\} \subset L^2[0,1], \|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}0$
$\forall f \in (L^2[0,1])^*, \int_0^1 f(t)\sin n\pi t dt \to 0$

定义 2.11.3

设 X 是 B^* 空间,$\{f_n\} \subset X, f_0 \in X$, 称泛函序列 $\{f_n\}$

1. 强收敛 $(f_n \to f_0)$:$\|f_n \to f_0\| \to 0$
2. 弱收敛 $(f_n \rightharpoonup x_0)$:$\forall x^{**} \in X^{**}, x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$
3. * 弱收敛: 对 $\forall x \in X, f_n(x) \to f_0(x), f_n \overset{*弱}{\to} f_0$

注:1. $X \to X^* \to X^{**}$
$f_n(x) \to f_0(x) \overset{*弱}{\to} \forall\{f_n\} \overset{*弱}{\to} x^{**}(f_n) \to x^{**}(f_0)$
强收敛 $\to$ 弱收敛 $\to$ 弱 * 收敛
2. 弱 * 极限存在必唯一
$\forall x \in X, f_n(x) \to f_0(x), f_n(x) \to g_0(x) \Rightarrow f_0(x) = g_0(x), \forall x \in X \Rightarrow f_0 = g_0$
3. 弱 * 收敛的点列

1. 必有界
2. 对 X 中的稠密子集 M 上一切 x, 都有 $f_n(x) \to f_0(x)$

4. X 为 B 空间,X^*

1. X 中弱拓扑:$O(x_0,\epsilon) = \{x \in X : \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon, \forall f \in X^*\}$,X 中使得所有 $f \in X^*$ 都连续的最弱拓扑
2. X 中弱 * 拓扑:$O(x_0,\epsilon) = \{f \in X^* : \|f(x) - f_0(x)\| < \epsilon, \forall x \in X\}$,X 中使得所有 $x \in X^*$ 都连续的最弱拓扑

2.11.3　算子序列收敛性

定义 2.11.4

设 X, Y 为 B^* 空间,$T_n, T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 称算子序列 $\{T_n\}$

1. 一致收敛:$T_n \rightrightarrows T$, 即 $\|T_n - T\| \to 0$
2. 强收敛:$T_n \to T$, 即 $\|T_n x - Tx\| \to 0, \forall x \in X$
3. 弱收敛:$T_n \rightharpoonup T$, 即 $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0, \forall f \in Y^*, \forall x \in X$
4. (强 * 收敛:$T_n \to T, T_n^* \to T^*$)

注: 一致收敛 $\Rightarrow$ 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛, 反之不一定

例题 2.11.1: 左移算子

$T: l^2 \to l^2, \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots), Tx = (x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}, \cdots), \|Tx\| = \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$

定义 $T_n x = T^n, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), T_n x = (x_{n+1}, x_{n+1}, \cdots, x_{n+2}, \cdots)$

强收敛于 0:$\|T_n x - 0\| \to 0?\ \|T_n x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n+i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 (n \to \infty)$($l^2$ 余项收敛于 0)

但不一致收敛于 0:$\|T_n\| = \sup_{x \in l^2, x \neq 0} \|Tx\| \geq M > 0$ 取 $x = e_{n+1}, \|x\| = 1, \|Tx\| = 1$

例题 2.11.2: 右移算子

$T: l^2 \to l^2, \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots), Tx = (0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \cdots), \|Tx\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$

定义 $S_n x = S^n, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), T_n x = (0, 0, \cdots, x_1, \cdots)$

不强收敛于 0:$\|S_n x - 0\| = \|x\| \to 0?$

弱收敛于 0:$\forall f \in (l^2)^* = l^2, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in l^2 f(S_n x) =< f, S_n x >= \left|\sum_{i=1}^{\infty} y_{n+i} x_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_{n+i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \to 0$

2.12 弱列紧性与 * 弱列紧性

回忆:

$$\begin{cases}\text{列紧集} \\ \text{自列紧集}\end{cases} \overset{\text{距离空间}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\text{相对紧的} \\ \text{紧集}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{弱列紧集: 有界集的弱收敛子列} \\ \text{* 弱列紧集: 有界集有弱 * 收敛子列}\end{cases}$$

$X \overset{*\text{弱}}{\Rightarrow} X^* \overset{\text{弱}}{\Rightarrow} X^{**}$

$\forall x \in X, f_n(x) \overset{\forall x \in X}{\to} f_0(x)\{f_n\}X^{**}(f_n) \to X^{**}(f_0), \forall x^{**} \in X^{**}$

定理 2.12.1

设 X 为可分的 B^* 空间, 则 X^* 上任何有界泛函序列 $\{f_n\}$ 必有 * 弱收敛的子列

X 可分 $\Rightarrow$ X 可数稠密子集 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$

$\{f_n\}$ 有界 $\Rightarrow \|f_n\| \leq C$

对固定 M,$|< f_n, x_m >| \leq C \|x_m\| \leq M_m$

对 $m = 1, \exists$ 子列 $\{f_n^{(1)}\} \subset \{f_n\}$,s.t.$< f_n^{(1)}, x_1 >$ 收敛

对 $m = 2, \exists$ 子列 $\{f_n^{(2)}\} \subset \{f_n^{(1)}\}$,s.t.$< f_n^{(2)}, x_2 >$ 收敛

$\vdots$

对 $m = k, \exists$ 子列 $\{f_n^{(k)}\} \subset \{f_n^{k-1}\}$,s.t.$< f_n^{(k)}, x_k >$ 收敛

对角线法则取 $< f_{n_k}, x_m >$ 对 $\forall$ 固定 $m \in \mathbb{N}$, 其都是收敛的

$\left|< f_{n_k}, x_m >\right| + \left|< f_{n_k}, x_m >\right| \leq C \|x - x_m\| + \epsilon = 2\epsilon$

定理 2.12.2

设 X 是 B^* 空间, 则 X^* 中单位闭球必然是 * 弱紧的

定义 2.12.1

设 $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是一族 Hausdorff 空间, 定义乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$

定义乘积拓扑:$\prod_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ 是连续的 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 中最弱拓扑则

$$\begin{cases} \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha : T_2\text{的} \\ \text{若}X_\alpha\text{是紧的}T_2\text{空间} \Rightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\text{也是紧的} \end{cases}$$

证明:

$\forall x \in X$, 定义 $I_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|x\|\}$ 为 $\mathbb{C}$ 上紧,$\prod\limits_{x\in X} I_x$

$\overline{B} = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\} \subset X^* \to \prod\limits_{x\in X} I_x$

$\tau : \forall f \in \overline{B}, \tau(f) = \prod\limits_{x\in X} < f, x >, |< f, x >| \le \|x\|$

第三章　紧算子与 Fredhom 算子

3.1　紧算子的定义和基本性质

引:

1. 推广: 矩阵 $\Rightarrow$ 紧算子
2. 作用: 积分方程和数学物理
3. 历史:Hilbert(1906) $\rightarrow$Riesz(1917) $\rightarrow$ Schauder(1930)

3.1.1　定义

定义 3.1.1

设 X 和 Y 是 B 空间,$A : X \to Y$ 线性算子, 若 $\overline{A(B_1)}$ 在 Y 中是紧的, 其中 B_1 代表 X 中单位球, 则称 A 为 X 到 Y 的紧算子

$\Leftrightarrow$ 对 X 中任意有界集 B, 都有 $\overline{A(B)}$ 在 Y 中是紧的

$\Leftrightarrow$ 对 X 中任意点列 $\{x_n\}, \{Ax_n\}$ 在 Y 中有收敛的子序列

用 $\mathcal{C}(X, Y)$ 代表 $X \to Y$ 所有紧算子全体

用 $\mathcal{C}(X)$ 代表 $X \to X$ 所有紧算子全体

例题 3.1.1

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$k(x, y) \in C(\Omega \times \Omega)$

$$Tf(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy \quad C(\Omega) \to C(\Omega)$$

即 $T \in \mathcal{C}(C(\Omega))$

$\overline{T(B_1)} \Leftrightarrow T(B_1)$ 是列紧的 $\Leftrightarrow$ 完全有界的

1. 有界:$\|Tf\|_\infty \le \|k\|_\infty |\Omega|$

2. 等度连续:

$$\begin{aligned}\forall f\in B_1\ |Tf(x_1)-Tf(x_2)| &= \left|\int_\Omega [k(x_1,y)-k(x_2,y)]f(y)dy\right| \\ &\le \int_\Omega |[k(x_1,y)-k(x_2,y)]f(y)|\,dy \\ &< \|f\|_\infty\,|\Omega| \le \epsilon\,|\Omega|\end{aligned}$$

3.1.2 基本性质

1. $\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的闭线性子空间

线性:$A,B\in\mathcal{C}(X,Y), k.l\in K$, 证明 $kA+lB\in\mathcal{X},\mathcal{Y}$

A 紧,$\forall\{x_n\}\subset X, Ax_n$ 有收敛子列 kAx_{n_k} 收敛在 Y 中

对 $\{x_{n_k}\}$ 来说,B 紧,$B_{x_{n_k}}$ 有子序列收敛, 不妨设为本身 $lB_{x_{n_k}}$ 收敛在 Y 中

$$(kA+lB)(x_{n_k}) = kAx_{n_k}+lBx_{n_k}\in\mathcal{C}(X,Y)$$

子空间 $\mathcal{C}(X,Y)\subset\mathcal{L}(X,Y)$, 即紧 $\Rightarrow$ 有界

设 $A\in\mathcal{C}(X,Y), \|A\| = \sup\limits_{x\in X,\|x\|\le 1}\|Ax\| = \sup\limits_{y\in A(\overline{B_1})}\|y\| < \infty$(列紧 $\Rightarrow$ 有界)

对 $\forall\{T_n\}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 且 $\|T_n-T\|\to 0$, 下证:

$\forall\epsilon>0, \|T_N-T\|<\frac{\epsilon}{2}, T_N$ 紧 $\Rightarrow T_N(B_1)$ 列紧 $\overset{Y\text{完备}}{\Rightarrow}$ 完全有界

故 $T_N(B_1)$ 有有穷的 $\frac{\epsilon}{2}$ 网 $N_m=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$

即 $T_N(B_1)\subset\cup_{i=1}^m B(y_i,\frac{\epsilon}{2})\Rightarrow T(B_1)\subset\cup_{i=1}^m B(y_i,\epsilon)$ 完全有界

(2) 若 $A\in\mathcal{L}(X,Y), B\in\mathcal{L}(Y,Z)$, 若 A,B 中有 1 个是紧算子, 则 $BA\in\mathcal{C}(X,Z)$

若 B 紧,A 有界, 则 A 把 X 中有界集 M 映为有界集 AM, BAM 列紧 $\Rightarrow BA\in\mathcal{C}(X,Y)$

若 A 有界,B 紧,B 把 X 中有界集映为列紧集,A 把列紧集映为有界集

(3) 设 X_0 是闭线性子空间,$A\in\mathcal{C}(X,Y)$, 则 $A|_{X_0}\in\mathcal{C}(X_0,Y)$

证明:

$X_0\overset{\Phi\text{有界}}{\to}X\overset{A\text{紧}}{\to}Y, A|_{X_0}$ 紧

(4) 设 A 是紧算子, 则 $R(A)$(值域) 为可分的线性子空间.

证明: 设 $X=\cup_{n=1}^\infty B(0,n), AX=\cup_{n=1}^\infty AB(0,n)=\cup_{n=1}^\infty AB(0,1)$

A 紧:$A(B(0,1))$ 列紧的 $\Rightarrow A(B(0,1))$ 完全有界 $\Rightarrow A(B(0,1))$ 是可分的.

补:M 完全有界 $\Rightarrow M$ 可分的 (可数稠密子集)

证明:$\forall\epsilon=\frac{1}{n}.\exists N_n=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$(有穷 ϵ 网)$\subset M$

$\cup_{n=1}^\infty N_n\subset M$

$\forall x\in M$, 对 $\epsilon=\frac{1}{n}, \rho(y_n,x)<\frac{1}{n}$

M 即可数稠密子集

3.2 紧算子的刻画

3.2.1 全连续算子

定义 3.2.1

称 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为全连续的. 若 $\forall x_n \rightharpoonup x$, 都有 $Ax_n \to Ax$

注:(1). 全连续 $\Rightarrow$ 连续

$$x_n \to x \rightharpoonup x \overset{A\text{全连续}}{\Rightarrow} Ax_n \to Ax$$

(2). 注意: 与距离空间中定义不同

1. 紧算子: 把有界集映为列紧 (相对紧) 集
2. 全连续算子: 连续的紧算子 $\overset{B^*\text{空间中}}{\Leftrightarrow}$ $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Ax_n \to Ax$

命题 3.2.1

紧算子一定是全连续算子, 反之, 若 X 是自反的, 则全连续算子必为紧算子

设 A 紧,$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow$ 是否可以推出 $Ax_n \to Ax = y$(反证法)
$\exists \epsilon_0 > 0$ 且 $\exists n_i$s.t.$\left\|Ax_{n_i} - Ax\right\| \geq \epsilon_0$
$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \{x_n\}$ 有界 $\overset{A\text{紧}}{\Rightarrow} \{Ax_n\}$ 列紧, 不妨设 $Ax_{n_i} \to z$
$\forall f \in Y^*, < f, Ax_{n_i} - y >=< A^* f, x_{n_i} - x >= 0 \Rightarrow Ax_{n_i} \rightharpoonup y = Ax \Rightarrow z = Ax$
$Ax_{n_i} \to z = Ax$
设 X 自反,A 全连续
设 $\{x_n\}$ 有界 $\Rightarrow \{x_n\}$ 弱列紧的,$x_{n_i} \rightharpoonup x, A$ 全连续, 可以推出 $Ax_{n_i} \to Ax \Rightarrow A$ 紧

命题 3.2.2

$T \in \mathcal{C}(X, Y) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{C}(Y^*, X^*)$

"$\Rightarrow$" 即证对 $\forall \{y_n^*\} \subset B_1^*(Y^*$ 中单位球)
$\{T^* y_n^*\} \subset X^*$ 有收敛子列
$\Leftrightarrow \left\|T^* y_{n_i}^*\right\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left|(T^* y_{n_i}^*)(x)\right| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left|< y_{n_i}^*, Tx >\right| = f(Tx)$
令 $\varphi_n(y) =< y_n^*, y >, y = Tx, \forall x \in B_1 \subset X \{\varphi_n\} \subset C(\overline{T(B_1)})$

$$\begin{cases} |\varphi_n(y)| \leq \left\|y_n^*\right\| \|y\| \leq \|T\|, \forall y \in T(B_1) \Rightarrow \|\varphi_n\| \leq \|T\| \\ |\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| = \left|< y_n^*, y - z >\right| \leq \|y - z\| \text{等度连续} \end{cases}$$

$\{\varphi_n\}$ 列紧.
"$\leftarrow$",$T^* \in \mathcal{C}(Y^*, X^*)$, 则 $(T^*)^* \in \mathcal{C}(X^{**}, Y^{**}), T = T^{**}|_X \in \mathcal{C}(X, Y)$

3.2.2　有限秩算子

定义 3.2.2: 有限秩算子

设 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. 若 $dim\ R(A) < +\infty$, 则称 A 为有限秩算子全体:$F(X,Y)$

注:1. $F(X,Y) \subset C(X,Y)$

$\forall \{x_n\} \subset X$ 有界,$\{Ax_n\} \subset R(A)$ 有界的 (有限维元素个数有限故有界) $\overset{\text{有限维}}{\Rightarrow}$ $\{Ax_n\}$ 列紧

2. 秩一算子:$f \in X^*, y \in Y$, 定义秩一算子,$y \otimes f : X \to Y, \forall x \in X, (g \otimes f)(x) =< f, x > y$

$$\|y \otimes f(x)\| \le |< f, x >| \, \|y\| \le \|f\| \, \|y\| \, \|x\|$$

为有限秩算子

特别的在 Hilbert 空间:$(\varphi \otimes \psi)(x) =< x, \psi > \varphi$

命题 3.2.3

$T \in F(X,Y) \Leftrightarrow \exists y_i \in Y$ 及 $f_i \in X^*$s.t.$T = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \otimes f_i$

$" \Leftarrow "$ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 $R(T) \subset span\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 故 $dim\ R(T) < +\infty$

$" \Rightarrow "$ $T \in \mathcal{F}(X,Y), dim\ R(T) < +\infty$ 取基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$

则 $\forall x \in X, Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i(x) y_i$ 证明是否等于 $\sum\limits_{i=1}^{n} < f_i, x > y_i$

下证 $l_i \in X^*$

$$\begin{cases} \text{线性} : T(\alpha x + \beta y) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i(\alpha x + \beta y) y_i = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha l_i x + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta l_i y \right] y_i = \alpha T x + \beta T y \\ \text{有界} : (R(T), \|Tx\|), (R(T), \sum\limits_{i=1}^{n} |l_i(x)|) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |l_i(x)| \le C \|Tx\| \le C \|T\| \|x\| \end{cases}$$

命题 3.2.4

$\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = C(X,Y)$ 在 Hilbert 空间是正确的, 在一般的 Banach 空间通常是错误的, 如果加上 Schauder 基则是正确的

证明:$\forall T \in C(X,Y), \overline{T(B_1)}$ 紧算子,$T(B_1)$ 完全有界, 有有穷的 $\frac{\epsilon}{2}$ 网

$\overline{T(B_1)} \subset \cup_{i=1}^{n} B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$

$E_s = span\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

$P_s : X \to E_s$

$$\begin{aligned} \forall x \in B_1, \|Tx - P_s Tx\| \le \|Tx - y_i\| + \|P_s T_x - y_i\| = \|Tx - y_i\| + \|P_s T_x - P_s y_i\| \\ < \frac{\epsilon}{2} + \|P_s\| \, \|Tx - y_i\| \\ < \frac{\epsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

3.3　Kiesz-Fredholm 理论

1. 代数方程组 $X=\mathbb{R}^n$, 线性变换 $T=\left(t_{ij}\right)_{n\times m}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$
$Tx=y\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j=y_i(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}x_jT_j$, 其中 $T_j=(t_{ij})_{i=1}^{n}$
即 y 可由向量 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 来线性表示
$\Leftrightarrow z\perp y$ 当且仅当 $z\perp T_j,i=1,\cdots,n\Leftrightarrow<z,y>=0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^{n}t_{ij}z_i=0,i=1,2,\cdots,n$
结论: 为了 $y\in\mathbb{R}^n$ 使得 $Tx=y$ 有解 $\Leftrightarrow<z,y>=0$, 对 $\forall z\in\mathbb{R}^n$ 满足 $T^*z=0$

1. Fourier 逆变换 (1882)$f(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{ixt}g(t)dt$

2. Volterra 积分方程

3. Fredholm(1903) $k\in C([0,1]\times[0,1])\begin{cases}x(t)=\int_0^1k(t,s)x(s)ds+y(t)\\ \begin{cases}y(t)=0,Fredholm\text{第一积分方程}\\ y(t)\neq0,Fredholm\text{第二积分方程}\end{cases}\\ f(t)=\int_0^1k(s,t)f(s)ds+g(t)\\ f(t)=A^*f(t)+g(t)\end{cases}$

4. Hilbert(1912) 一般紧算子转换为无穷维代数方程组

5. Riesz(1918) 公理化

定理 3.3.1

设 X 为 B 空间,$A\in C(X)$, 令 $T=I-A$, 则

1. $\sigma(T)=\sigma(T^*)$, 对 $\forall T\in\mathcal{L}(X)$
2. $dim\ N(T)=dim\ N(T^*)<+\infty$
3. $R(T)=N(T^*)^{\perp}\quad R(T^*)=^{\perp}N(T)$
4. $Codim\ R(T)\triangleq dim\ X\backslash R(T)=dim\ N(T)<\infty$

对 $\forall T\in\mathcal{L}(X)$ 都成立的结论.

命题 3.3.1

若 $T\in\mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma(T)=\sigma(T^*)$ 即证 T 可逆 $\Leftrightarrow T^*$ 可逆 $(\lambda I-T^*)=(\lambda I-T)^*$

"$\Rightarrow$": 设 T 可逆,$T^{-1}\in\mathcal{L}(X),(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*,(TS)^*=S^*T^*$
"$\Leftarrow$": 设 T^* 可逆,$((T^*)^{-1}\in l(X^*))\quad(T^{**})^{-1}\left((T^*)^{-1}\right)^*\in l(X^{**})$
$T=T^{**}|_X$, 单射.$R(T)$ 闭:T^{**} 可逆,$T^{**}|_X,X\subset X^{**}\to R(T),(T^{**})^{-1}:R(T)\to X$
再证满: 反证. 若 $\exists x_0\neq0\in X\backslash R(T),\exists f\in X^*\text{s.t.}f(x_0)=\|x_0\|\neq0$ 且 $f(R(T))=0.\forall x\in X\Rightarrow T^*f=0\overset{T^*\text{可逆}}{\Rightarrow}f=0$
矛盾

定义 3.3.1

$$\begin{cases} R(T)=T(X) \quad N(T)=\{x\in X, Tx=0\}, \text{闭的, 但} R(T)\text{不一定闭} \\ \text{对} N\subset X, {}^{\perp}N \triangleq \{f\in X^*, <f,x>=0, \forall x\in N\}\subset X^* \text{闭的} \\ \text{对} M\subset X^*, M^{\perp}\triangleq\{x\in X, <f,x>=0, \forall f\in M\}\subset X \text{闭的} \end{cases}$$

命题 3.3.2

设 $T\in\mathcal{L}(X)$, 则 $\overline{R(T)}\subset N(T^*)^{\perp} \quad \overline{R(T^*)}\subset^{\perp} N(T)$

$R(T)\subset N(T^*)^{\perp}$: 对 $\forall Tx, \forall f\in N(T^*)^{\perp}, <f, Tx>=<T^*f, x>=0, T^*f=0$

$R(T^*)\subset^{\perp} N(T), \forall T^*f, f\in X^*, {}^{\perp}N(T)=\{f\in X^*, <f,x>=0, \forall x\in N(T)\}$

$<T^*f, x>=<f, Tx=0>=0$

命题 3.3.3

设 $T\in\mathcal{L}(X)$, 则 $\overline{R(T)}=N(T^*)^{\perp}$

已知,$\overline{R(T)}\subset N(T^*)^{\perp}$, 反证, 若 $\overline{R(T)}\subsetneqq N(T^*)^{\perp}$

取 $x_0\in N(T^*)^{\perp}\backslash\overline{R(T)}$, 则 H-B 定理,$\exists f\in X^*$,s.t.$f\in N(T^*)\Rightarrow <f,x_0>=0 \quad f(x_0)=\|x_0\|$ 矛盾

2. 结论 (3) 的证明

前半部分:

定义 3.3.2

若 $T\in\mathcal{L}(X)$ 满足 $R(T)=\overline{R(T)}$, 则称 T 为闭值域算子.

命题 3.3.4

$N(T)$ 闭子空间,$X/N(T)$ 商空间

$$\begin{aligned} [x]=[y] &\Rightarrow x-y\in N(T) \\ \alpha[x]+[y] &\Rightarrow [\alpha x+y] \\ \|[x]\| &= \inf_{y\in N(T)}\|x-y\| \\ \|Tx_n\| &\le \|T\|\,\|x_n\| \\ \|T[x]\| &\le \|T\|\,\|[x]\| \end{aligned}$$

定义:$\tilde{T}: X/N(T)\to R(T)\subset X, [x]\to\tilde{T}[x]\triangleq Tx$," 良好定义", 线性, 有界 $\left\|\tilde{T}[x]\right\|\le M\,\|[x]\|$

下证 $\tilde{T}^{-1}$ 连续, 反证, 若不连续

$R(T) \to X/N(T) : \exists\{x_n\}$ $\|[x_n]\| = 1$, 但 $\tilde{T}[x_n] \to 0, \|x_n\| < 2, (I - A)x_n \to 0$

A 紧,$\exists x_{n_k} s.t. Ax_{n_k} \to z, Tx_n \to 0$

$x_{n_k} \to z, Tz = 0$

$Tz = 0 \Rightarrow [z] = [0] \Rightarrow \left\|[x_{n_k}]\right\| = \left\|[x_{n_k} - z]\right\| \le \left\|x_{n_k} - z\right\| \to 0$

而 $\left\|[x_{n_k}]\right\| = 1$ 矛盾

后半部分:

$N(T) \subset N(T^**), N(T) \subset N(T^**)$

$dim\ N(T^{**}) = dim\ N(T^*) = dim\ N(T) < \infty$

$\Rightarrow N(T) = N(T^{**})$

证 (2)

$T \in \mathcal{L}(X), T^2, \cdots, T^n$

$$N(T) \subset N(T^2) \subset \cdots \subset N(T^n) \subset \cdots$$

$$R(T) \supset R(T^2) \supset \cdots \subset R(T^n) \supset \cdots$$

命题 3.3.5

设 A 为紧算子,$T = I - A$, 则 $dim\ N(T) < +\infty, dim\ N(T^*) < +\infty$

证明: $T|_{N(T)} = 0, I|_{N(T)} = A|_{N(T)}$: 紧 $\Rightarrow dim\ N(T) < +\infty$

$X_0 = \{x \in N(T) : \|x\| \le 1\}, I : x_0 \to x_0$ 紧 $\Rightarrow dim\ X_0 < +\infty$

命题 3.3.6

设 $A \in C(X), T = I - A$, 若 $N(T) = \{0\}$, 则 $R(T) = X$

证明: 反证, 若 $R(T) \neq X, R(T) \subset X$ 是真闭子空间. 记 $X_k = T(X_{k-1}), X_0 = X$

T 单射:$X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq X_n \supsetneqq \cdots$

Rizse 引理: $\exists y_k \in x_k, \|y_k\| = 1$,s.t.$dist(y_k, x_{k+1}) \ge \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$

$\left\|Ay_n - Ay_{n+p}\right\| = \left\|y_n - Ty_n - y_{n+p} + Ty_{n+p}\right\|| \ge \frac{1}{2}$,$(-Ty_n - y_{n+p} + Ty_{n+p}) \in X_{n+1}$

注: 若 $dim\ N(T) = 0$,T 单射 $\Rightarrow T$ 满,$\exists T^{-1} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow (T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

定理 3.3.2: 引理

设 $N(T)$ 基,$x_1, x_2, \cdots, x_n, N(T^*)$ 基 $f_1, \cdots, f_m$, 则

1. $\exists$ 真闭子空间 X_1,s.t.$X = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \oplus X_1$,($\forall$ 有限维子空间)
2. $y_1, y_2, \cdots, y_m \in X$s.t.$f_j(y_i) = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le m$

证明:

(1). 由 H-B thm 知,$\exists g_1, g_2, \cdots, g_n \in X^*$s.t.$g_j(x_i) = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le n$

令 $X_1 = \cap_{j=1}^{n} N(g_j)$: 闭线性子空间, 证明 $span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \cap x_1 = \{0\}$, 这是自然的, 因为 $x_1 \notin \cap_{i=1}^{n} N(g_j)$

$\forall x \in X, X = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)x_i + (Cx - \sum_{i=1}^{n} C_i(x)x_i) \quad g_j(x) = C_i(x), \quad \delta_{ij} = C_j(x)$

取 $C_j(x) = g_j(x), (x - \sum_{i=1}^{n} C_i(x)x_i) \in X_1$

(2). 令 $V : X \to \mathbb{K}^m$

$\forall x \in X \to V(x) = (< f_1, x >, < f_2, x >, \cdots, < f_m, x >) \in \mathbb{K}^m$

线性, 连续,$|< f_i, x >| \le \|f_i\| \|x\|$

若证:V 是满的, 则取 $\mathbb{K}^m$ 基 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \forall y_i = e_i, f_j(y_i) = \delta_{ij}$

反证: 若 $V(X)$ 是 $\mathbb{K}^m$ 的真子空间.H-B 定理可知

$\exists \alpha \neq 0 =, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \in \exists (K^m)^* = K^m$s.t.$< \alpha, V_x >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < f_j, x >=< \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, x >\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0, f_j$ 基 $\to \alpha_j = 0 \to$ 矛盾

(2) 的证明:

下证:$n = m$, 若 $n < m$, 令 $\hat{T} : span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \oplus X_1 = X \to span\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \oplus R(T)$

$\forall \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + y \xrightarrow{\hat{T}} \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + Ty$

则 $\hat{T}$: 满,$\hat{T}$: 单 $\Rightarrow$ 满

但 $y_m \subset X \notin R(\hat{T})$ 反证, 若 $y_m = \hat{T}y$

$1 = f_m(y_m) = f_m(Ty) = T^* f_m$

$$\begin{cases} dim\ N(T^*) \le dim\ N(T) \\ dim\ N(T^{**}) \le dim\ N(T^*) \\ dim\ N(T) \le dim\ N(T^{**}) \end{cases} \Rightarrow dim\ N(T) = dim\ N(T^*) \quad \begin{matrix} X = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \oplus X_1 \\ X = span\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \oplus R(T) \end{matrix}$$

1. Fredholm 第一积分算子:$x(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt$
2. Fredholm 第二积分算子:$x(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt = y(s)$
3. $L^2[0, 1]$ 共轭积分算子:$x(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt + g(s)$

3.4 线性算子谱理论

引:(矩阵特征值): 矩阵 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, 分解复平面 $\mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} |\lambda I - A| = 0, \lambda \text{特征值} \\ |\lambda I - A| \neq 0, (\lambda I - A)^{-1} \in l(\mathbb{C}) \end{cases}$$

闭线性算子 $A : D(A) \subset D(A) \subset X \to X$, 分解

$$\mathbb{C} \begin{cases} \sigma(A) \\ \rho(A) \end{cases}$$

3.4.1 定义与例子

定义 3.4.1

设 X 是 B 空间,$A : D(A) \subset X \to X$, 闭线性算子

$$\begin{cases} \text{预解集}: \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\} \Leftrightarrow (\lambda I - A)^{-1}\text{存在且}R(\lambda I - A) = X \Leftrightarrow \lambda I - A\text{单且满} \Leftrightarrow \forall y\text{方程有解且唯一} \\ \text{谱集}: \sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A) \begin{cases} \text{点谱}: \lambda \in \sigma_p(A) : (\lambda I - A)^{-1}\text{不存在} \Leftrightarrow \text{对 y 有解但不唯一} \\ \text{连续谱}: \lambda \in \sigma_c(A) : (\lambda I - A)^{-1}\text{存在且}\overline{R(\lambda I - A)} = X, \text{但}R(\Lambda I - A) \neq X \\ \text{剩余谱}: \lambda \in \sigma_r(A) : (\lambda I - A)^{-1}\text{存在但}\overline{R(\lambda I - A)} = X \end{cases} \end{cases}$$

注:1. 方程的解释

2. 当 X 为有限维时, 即 $dim\ X = n$, 则 $dim\ (\lambda I - A) = n - dim\ \mathbb{N}(\lambda I - A)$, 则当 $\lambda I - A$ 为单射时, 则为满射, 从而 $\lambda \in \rho(A)$

3. $T \in \mathcal{L}(X), T$ 可逆 $\Leftrightarrow T$ 单射, 又是满射 $\Leftrightarrow T$ 是单射 + 闭值域 + 稠值域 (T 是单射 + 闭值域 = T 下有界, 即 $\exists C \neq 0, s.t. \|Tx\| \geq c\|x\|$, 闭值域 + 稠值域 = 满射)$\Leftrightarrow T^{-1} : R(T) \to X$ 连续.

"$\Leftarrow$", 单射, 设 $Tx_n \to y \in X, y \in R(T)$, 则 $\{Tx_n\}$Cauchy,$\|Tx_n - Tx_m\| \geq C\|x_n - x_m\|, \|Tx_n - Tx_m\| \to 0$ $\{x_n\}$ Cauchy, 则 $x_n \to x \in X \Rightarrow Tx_n \to Tx \in R(T)$

"$\Rightarrow$",$T : X \to R(T)$ 闭算子,T^{-1} 闭线性算子,$T^{-1} \in l(R(T), X)$

例题 3.4.1: 二阶导算子

设 $X = L^2[0, 1] : A = \frac{d^2}{dx^2} : X$

对 $\forall u \in L^2[0, 1]$, 则 $u(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{i2n\pi t}$(若 $u \in C^2[0, 1]$, 则 $A = -\frac{d^2}{dx^2}$)

$Au(t) =\triangleq -\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (2n\pi)^2 u_n e^{i2n\pi t} : D(A) = \{u \in X, Au \in X\}$

$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{n \in \mathbb{N} : (2\pi n)^2\}$

证明:

$-\frac{d^2}{dx^2}(\sin 2n\pi t) = (2n\pi)^2 \sin 2\pi nt \Rightarrow (2n\pi)^2 \in \sigma_p$

当 $\lambda \neq (2n\pi)^2, (\lambda I - A)u = f(t) \in L^2[0, 1], f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2in\pi t} \Rightarrow u = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{(2n\pi)^2 - \lambda} e^{i2n\pi t}$

$\lambda u_n - (2n\pi)^2 u_n$ 取 $u_n = \frac{c_n}{(2n\pi)^2 - \lambda}$, 则 $\|u\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_n|^2}{|(2n\pi)^2 - \lambda|^2} \leq M \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$

例题 3.4.2: 乘法算子

$X = C[0, 1], M(t)u(t) = t \cdot u(t) \in \mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma(M_z) = \sigma_r(M_z) = [0, 1]$

证明:(i)$\forall \lambda \neq [0, 1], (\lambda I - M_z)u(t) = \lambda u(t) - tu(t) = (\lambda - t)u(t), t \in [0, 1]$

$(\lambda I - M_z)^{-1}u(t) = \frac{1}{\lambda - t}u(t) : \left\|\frac{1}{\lambda - t}u(t)\right\|_\infty \leq M\|u\|_\infty \leq \max\limits_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{\lambda - t}\right|\|u\|_\infty, \lambda \in \rho(M_z)$

(ii) 当 $\lambda = [0, 1] : \lambda I - M_z$ 单射,$(\lambda I - M_z)u(t) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - t)u(t) = 0, t \in [0, 1] \overset{u\in[0,1]}{\Rightarrow} u \equiv 0$

$\overline{R(\lambda I - M_z)} \neq X$, 则 $y(t) \equiv 1 \in C[0, 1]$

若 $v \in R(\lambda I - M_z)$, 则 $v = (\lambda I - M_z)u = (\lambda - t)u(t) \Rightarrow v(\lambda) = 0$

$\lambda \in \sigma_r[0,1)$

例题 3.4.3: 乘法算子

$X = L^2[0,1], M(t)u(t) = t \cdot u(t) \in \mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma(M_z) = \sigma_c(M_z) = [0,1]$

证明:(i)$\forall \lambda \neq [0,1], (\lambda I - M_z)u(t) = \lambda u(t) - tu(t) = (\lambda - t)u(t), t \in [0,1]$

$(\lambda I - M_z)^{-1}u(t) = \frac{1}{\lambda - t}u(t) : \left\|\frac{1}{\lambda-t}u(t)\right\|_2 \leq M\|u\|_2 \leq \max\limits_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{\lambda-t}\right|\|u\|_2, \lambda \in \rho(M_z)$

(ii) 当 $\lambda = [0,1] : \lambda I - M_z$ 单射,$(\lambda I - M_z)u(t) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - t)u(t) = 0, t \in [0,1] \stackrel{u\in[0,1]}{\Rightarrow} u \equiv 0, a.e.$

非满取 $y(t) \equiv 1 \in L[0,1]$, 但 $y(t) \notin R(\lambda I - M_z)$, 否则

取 $\frac{1}{\lambda-t} \notin L^2[0,1]$

$(\lambda I - t)u(t) = 1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{\lambda-t}$

$\overline{R(\lambda I - M_z)} = X, \forall y \in L^2[0,1], y_\epsilon = \begin{cases} y(t) \\ (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon) \end{cases}$

3.4.2 谱集的基本性质

回忆 ($\mathbb{C}^n$ 上的矩阵):$det|\lambda I - A| = 0 \stackrel{\text{代数学基本定理}}{\Rightarrow} \sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i\}, 1 \leq i \leq n \neq \emptyset$

用解析函数的 L 定理推广

有界线性算子的谱 $A, \sigma(A)$ 非空, 闭, 有界

谱集的闭性 ($\Leftrightarrow \rho(A)$ **开集**)

引理 3.4.1

设 $T \in \mathcal{L}(X)$, 且 $\|T\| < 1$, 则 $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$. 且 $\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$

证明:

法一 (压缩映射原理):$S(x) = y + Tx, \forall y \in X, \|S(x') - S(x)\| = \|T\|\|x' - x\| \leq \|x' - x\|$

则存在唯一的 $x, S(x) = x$, 即 $x - Tx = y, \forall y \in X \Rightarrow (I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

$(I-T)x = y \Rightarrow \left\|(I-y)^{-1}y\right\| = \|x\| \leq \frac{\|y\|}{\|I-y\|} \leq \frac{\|y\|}{1-\|T\|} \Rightarrow \left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$

法二 (级数):$S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|y\|^n < +\infty$

$(I-T)S = (I-T)\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n = I, \|S\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$

定义 3.4.2

$\forall \lambda \in \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$

$\lambda \to (\lambda I - A)^{-1} \triangleq R_\lambda(A)$: 算子值函数

命题 3.4.1

$\rho(A)$ 一定是开集,A 是闭算子

证明:$\forall\lambda_0 \in \rho(A)$, 那么是否有 $\lambda \in \rho(A), \lambda \in v(\lambda_0)$
$\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]$
当 $|\lambda - \lambda_0|\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\| < 1$ 时, 即 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|}$, 则 $\lambda I - A$ 可逆.

$\sigma(A)$ 非空性

命题 3.4.2

设 A 为币线性算子,$R_\lambda(A)$ 预解式, 则:

1. $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$
2. $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 是解析的算子值函数

证明:
(1).

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) + R_n(A) \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda\to\lambda_0} -R_{\lambda_0}(A)R_\lambda(A) \\ &= -[R_{\lambda_0}(A)]^2 \end{aligned}$$

命题 3.4.3

设 $A \in \mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma(A) \neq \emptyset$

设 $\sigma(A) = \emptyset$, 则 $\rho(A) = \mathbb{C}$
$\rho(A) = \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$
$\forall\lambda \to R_\lambda(A) \to f(R_\lambda(A)), \forall f \in l^*(X)$
$u_f \triangleq f(R_\lambda(A))$
(1). 有界性: 当 $\lambda > \|A\|, R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \frac{A}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$
且 $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}\frac{1}{|\lambda| - \frac{\|A\|}{\lambda}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \to 0(|\lambda \to \infty|)$
当 $|\lambda| \leq \|A\|$ 时 $\Rightarrow$ 有界

$\left|\mu_f(\lambda)\right| \le \|f\| \|R_\lambda(A)\| \le M \|f\|$

(2). 解析性: $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f(R_\lambda(A))-f(R_{\lambda_0}(A))}{\lambda-\lambda_0} = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f\left(\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}\right)$

$\overset{L定理}{\Rightarrow} \mu_\lambda(f) = f(R_\lambda(A))$ 常值

即 $\mu_\lambda = c_f$(与 λ 无关)$\forall f \in l^*(X)$

$\Rightarrow R_\lambda(A) = C$(与 λ 无关)

矛盾.

注: 若 $A \in \mathcal{L}(X), \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le \|A\|\}, \sigma(A)$ 为有界非空闭集

谱半径

定义 3.4.3

设 $A \in \mathcal{L}(X)$, 则称 $r_\sigma(A) \triangleq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ 为 A 的谱半径

(1) 首先,$r_\sigma(A) \le \|A\|$, 当 $\lambda \ge \|A\|$ 时,$R_\lambda(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$

当 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}}} < 1$ 时, 即当 $|\lambda| > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A\|^n}$ 时,$\|A^n\| \le \|A\|^n \Rightarrow R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(X)$

则 $r_\sigma(A) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \|A\|$

(2)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \le r_\sigma(A) \triangleq a, \forall f \in l^*(X), \mu_f(\lambda) \triangleq f(R_\lambda(A)) : \rho(A) \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \mu_f(\lambda)在 |\lambda| > a \Rightarrow \lambda \in \rho(A)上解析 \\ \mu_f(\lambda)\text{Laurent 展开式}:\mu_f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}, 其中取\lambda = a + \epsilon > a, \forall \epsilon > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{(a+\epsilon)^{n+1}} < +\infty \Rightarrow \frac{|f(A^n)|}{(a+\epsilon)^{n+1}} \le c_f, \forall f \in l^*(X)$

$$\begin{cases} \left\{\frac{A^n}{(a+\epsilon)^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X) \subset l^{**} \\ \left|f\left(\frac{A^n}{(a+\epsilon)^{n+1}}\right)\right| \le c_f, \forall f \in l^* \end{cases}$$

由共鸣定理可知 $\left\|\frac{A^n}{(a+\epsilon)^{n+1}}\right\| \le M \Rightarrow \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \sqrt[n]{(a+\epsilon)^{n+1} M}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A\|^n} \le a + \epsilon$

从而 $r_\sigma(A) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A\|^n}$

(3).$r_\sigma \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \overset{则}{\Rightarrow} r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n}$

引: 若 λ 是矩阵 A 特征值.$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = A(\lambda x) = \lambda^2 x = \cdots = \lambda^n$ 是 A^n 特征值.

推广

下补证: 若 $\lambda^n \in \rho(A)$, 都有 $\lambda \in \rho(A)$

事实上,$\lambda^n \in \rho(A^n)$, 则 $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A) \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} A^{n-j}$

补证: $T = AB$, 若 T 可逆, 且 AB 可交换,$AB = BA$, 则 A 可逆

证明: 设 $TS = ST = I$

$ABS = SAB = I$

$\lambda^n I - A^n$ 可逆 $\Rightarrow (\lambda I - A)$ 可逆

定理 3.4.1: 谱映照定理

$rho(\sigma(A)) = \sigma(\rho(A))$

例题 3.4.4: 右移算子

$A: l^2 \to l^2, A(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \cdots)$

显然:$\|Ax\| = \|x\| \Rightarrow \|A\| = 1 \Rightarrow \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$

$(1)\sigma_p(A) = \emptyset$. 若 $(\lambda I - A)X = 0 \Leftrightarrow \lambda x = Ax \Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n, \cdots) = (0, x_1, \cdots, x_{n-1}, \cdots)$

$\Rightarrow \lambda x_1 = 0, \lambda x_n = x_{n-1}(n \ge 2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{当}\lambda = 0\text{时} \Rightarrow x = 0 \\ \text{当}\lambda = 0\text{时}, x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_n = 0 \end{cases}$$

$(2)\sigma_r(A) = \mathbb{D}, \sigma_c(A) = T$(单位圆周)$\Rightarrow \sigma(A) = \overline{\mathbb{D}}$

$R(\lambda I - A)^{\perp} = \overline{R(\lambda I - A)}^{\perp} = N(\bar{\lambda} I - A^*)$

当 $|\lambda| < 1, X = x_1(1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \bar{\lambda}^3, \cdots, \bar{\lambda}^n, \cdots) \in l^2$ 看书补全

好了, 老师给补全了

$(1).\sigma_p(A) = \emptyset, (2).\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \triangleq \mathbb{D}, (3).\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \triangleq T$

证明 (2),(3): 值域稠密性 $\overset{\text{转化}}{\to}$ 值域 (或闭包) 正交补 $\overset{\text{正交补}}{\to}$ 共轭算子的零空间.

$A^* :< A^*x, y >=< x, Ay >= \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1}y_j \Rightarrow A^*(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, \cdots, x_{n+1}, \cdots)$

$R(\lambda I - A)^{\perp} = \overline{R(\lambda I - A)}^{\perp} = N(\bar{\lambda} I - A^*) :< (\lambda I - A)x, y >= 0 =< x, (\bar{\lambda} I - A^*)y >$

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} I - A^*)X = 0 \Leftrightarrow A^*x = \bar{\lambda}x &\iff (x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}, \cdots) = (\bar{\lambda}x_1, \bar{\lambda}x_2, \cdots, \bar{\lambda}x_n, \cdots) \\ &\iff x_{n+1} = \bar{\lambda}x_n, n \ge 1 \Rightarrow x_{n+1} = \bar{\lambda}^{n+1}x_1 \\ x &= (x_1, \bar{\lambda}x_1, \bar{\lambda}^2x_1, \cdots, \bar{\lambda}^{n+1}x_1, \cdots) = x_1(1, \bar{\lambda}, \cdots, \bar{\lambda}^n, \cdots) \end{aligned}$$

$N(\bar{\lambda} I - A^*) : \{C(1, \bar{\lambda}, \cdots, \bar{\lambda}^n, \cdots) : C \in \mathbb{C}\}$

当 $\lambda \in \sigma(A), |\lambda| \le \|A\| = 1$

当 $|\lambda| < 1$ 时,$(1, \bar{\lambda}, \cdots, \bar{\lambda}^n, \cdots) \in l^2, N(\overline{\lambda I - A^*}) = \{C(1, \bar{\lambda}, \cdots)\} \ne \emptyset \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$

$\lambda \in \sigma(A), \sigma(A)$ 闭,$\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(A) = \overline{\mathbb{D}}$, 当 $|\lambda| = 1, N(\bar{\lambda} I - T^*) = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A)} = l^2, \lambda \in \sigma_c(A)$

3.5 紧算子的谱理论 (Riesz-Schauder 理论)

回忆: 矩阵的特征值 (特征多项式)$\to$ 线性空间的直和分解 (不变子空间) $\to$ Jordan 标准型

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s} \to V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \to$ 基下矩阵

推广到无穷维的 *Banach* 空间

紧算子的谱 $\Rightarrow$ 紧算子的不变子空间 $\Rightarrow$ 紧算子的结构

3.5.1 紧算子的谱

定理 3.5.1

设 $A \in \mathcal{C}(X)$, 则

$$\begin{cases} (1).0 \in \sigma(A)\text{除非} dim\ X < +\infty \\ (2).\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\} \\ (3).\sigma_p(A)\text{至多以 0 为聚点} \end{cases} \overset{\text{三种情况}dim\ \ X=0}{\Rightarrow} \begin{cases} \sigma(A) = \{0\} \\ \sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \\ \sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}\text{其中}\lambda_n \to 0 \end{cases}$$

证明:

(1). 设 $dim\ X = \infty$, 若 $0 \notin \sigma(A)$ 即 $0 \in \rho(A) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow I = AA^{-1} : X \to X$ 紧算子, 矛盾.

(2).$\forall \lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, 若 $\lambda I - A = \lambda(I - \frac{A}{\lambda})$ 单射 $\overset{3.2}{\Rightarrow} \lambda I - A$ 满射 $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ 矛盾

(3). 反证: 若 $\exists\{\lambda_n\} \in \sigma_p(A), \lambda_n \neq \lambda_m, \lambda_n \to \lambda_m, \lambda_n \to \lambda \neq 0(n \to \infty)$

且设 $\{x_n\} \neq 0$s.t.$(\lambda_n I - A)x_n = 0$

下证 (1)$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性无关, 反证若 $x_{n+1} \in N(\lambda_{n+1} I - A)\backslash\{0\}$ 且 $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$\lambda n + 1 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} = Ax_{n+1} = A(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i = 0$

矛盾.

(2) 令 $E_n = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, E_n \subsetneqq E_{n+1} = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$

Riesz 引理,$\exists y_{n+1} \in E_{n+1}$s.t.$\|y_{n+1}\| = 1$ 且 $dist\{y_{n+1}, E_n\} \geq \frac{1}{2}$

$\left\|A(\frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}}) - A(\frac{y_n}{\lambda_n})\right\| = \left\|y_{n+p} - (y_{n+p} - \frac{1}{\lambda_{n+p}}(y_{n+p}) + \frac{1}{\lambda_n}A(y_n))\right\|$.$\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ 有界点列.

$y_n = \sum_{j=1}^{n+p} a_i x_i \in E_{n+p}, Ax_i = \lambda_i x_i, y_{n+p} - \frac{1}{\lambda_{n+p}}(y_{n+p}) \in span\{x_1, x_2, \cdots, x_{n+p-1}\}$ 故 $\in E_{n+p+1}$

$\frac{1}{\lambda_n}A(y_n) \in E_{n+p}$

故上式 $\geq \frac{1}{2}$, 与 A 紧矛盾.

3.5.2 不变子空间

定义 3.5.1

设 $A \in \mathcal{L}(X)$, 称 $M \subset X$ 为 A 的不变子空间是指 $AM \subset M$

1. $\emptyset, X$ 为 A 的平凡的不变子空间.
2. M 是不变子空间, 则 $\overline{M}$ 也是不变子空间.$x_m \in M, x_n \to \forall x \in \overline{M}, Ax_n \subset M \to Ax \subset \overline{M}$
3. 若 $\lambda \in \sigma_p(A), N(\lambda I - A)$ 是 A 闭不变子空间
4. $\forall y \in X, L_y \triangleq \{p(A)y : P\text{是任意一个多项式}\}$

problem(不变子空间问题):$dim\ X = \infty, A \in \mathcal{L}(X)$ 是否存在非平凡的闭不变子空间.

定理 3.5.2

$dim\ X \geq 2. A \in \mathcal{C}(X)$

定义 3.5.2: Fredholm 算子

X, Y 为 B 空间,$T \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{cases} R(T)\text{闭的} \\ dim\ N(T) < \infty \\ codim\ R(T) < +\infty (dim\ N(T^*) < \infty) \end{cases}$$

定义 3.5.3

ind(T) = dim N(T) - codim R(T)

例题 3.5.1: 左移算子

$T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}, \cdots)$

$R(T) = l^2$ 闭,$N(T) = span\{e_1\}, N(T^*)$

$T^*(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \cdots)$

$ind(T) = 1, ind(T^*) = -1$, 若 $(T^n)^* \in \mathcal{F}(l^2)$, 则 $ind(T) = n, ind(T^*) = -n$

第四章 Banach 代数

引言 (发展历史):

1. 经典分析中出现了很多带有乘法运算的函数空间.
2. 20 世纪 30 年代,Banach 空间理论建立 + 近似代数
3. Gelfand(1938). 博士论文中初步建立了 Banach 代数理论 (赋范环论)
4. Gelfand(1943), 开创了 C^* 代数的研究
5. Banach 代数理论发展: 分析, 代数

4.1 代数的基本知识 (环)

定义 4.1.1: 代数

设 $\mathscr{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个代数, 是指:

1. $\mathscr{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 (加法 + 数乘)
2. $\mathscr{A}$ 上定义一个乘法 $\mathscr{A} * \mathscr{A} \to \mathscr{A}$(封闭) 且满足结合律 $(ab)c = a(bc)$(半群)
3. 加法和数乘对乘法满足分配律

$$\begin{cases} (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \\ (\lambda\mu)(ab) = (\lambda a)(\mu b) \end{cases}$$

定义 4.1.2: 可除代数

若代数 $\mathscr{A}$ 中任何一个非零元都可逆, 即 $\forall a \in \mathscr{A}, \exists$ 唯一的 $b \in \mathscr{A}$ s.t. $ab = ba = e$, 此时记 $b = a^{-1}$

定义 4.1.3: 交换代数

乘法满足交换律, 即 $ab = ba$

定义 4.1.4: 同态

设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是两个代数,ϕ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的映射称 ϕ 是同态 (即保群运算):

$$\begin{cases} \phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b) \\ \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \end{cases}$$

称 ϕ 是同构: 单 + 满 + 同态

定义 4.1.5: 子代数

设 $\mathscr{A}$ 是一个代数,$B \subset \mathscr{A}$ 且依 $\mathscr{A}$ 上的加, 数乘, 乘法运算构成一个代数, 则称 B 为 $\mathscr{A}$ 的一个子代数.

注:

命题 4.1.1

设 $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的同态,$\phi(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$ 为一个子代数.
$ker(\phi) \subset \mathscr{A}$ 为一个子代数.

命题 4.1.2

没有单位元的代数总是可以增加单位元 (同构于某个有单位元的代数的子代数)

$$\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \times \mathbb{C} \begin{cases} \alpha(a, \lambda) + \beta(b, \mu) \triangleq (\alpha a + \beta b, \alpha\lambda + \beta\mu) \in \mathscr{A} \times \mathbb{C} \\ (a, \lambda)(b, \mu) \triangleq (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \in \mathscr{A} \times \mathbb{C} \\ \text{分配律也满足} \end{cases}$$

那么幺元为:$(0, 1)$
$a \to \phi(a) = (a, 0)$ 同态

$$\begin{cases} \phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b) \\ \phi(ab) = (ab, 0) = \phi(a) \cdot \phi(b) = (a, 0)(b, 0) \end{cases}$$

定义 4.1.6: 理想

$\mathscr{A}$ 为代数,$J \subset \mathscr{A}$ 子代数, 称 J 为 $\mathscr{A}$ 一个理想

1. $\forall a \in \mathscr{A}, aJ \subset J, Ja \subset J$
2. $J \neq \mathscr{A}$

注:

命题 4.1.3

若 $\mathscr{A}$ 为交换代数,$aJ \subset J, J \neq AJ$ 为理想

命题 4.1.4

若 $\mathscr{A}$ 为有幺元的代数, 若 J 为 $\mathscr{A}$ 的理想, 则 $e \notin J$, 更进一步,$b \in J \Rightarrow b^{-1}$ 一定不存在 (反证, 取 $a = b^{-1}, bb^{-1} = e \in J$), 反之, 若 b^{-1} 不存在, 且 $\mathscr{A}$ 为交换代数,$\exists J = b\mathscr{A}, b \in J$ 为 $\mathscr{A}$ 的理想.

命题 4.1.5

若 $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 为非平凡的同态映射, 则 $ker(\phi)$ 为 $\mathscr{A}$ 的理想.

pf:$ker(\phi)$ 子代数,$\forall a \in \mathscr{A}, a \cdot ker(\phi) \subset ker(\phi), ker(\phi) \cdot a \subset ker\phi$.

取 $b \in ker(\phi), \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 0 \Rightarrow ab \in ker\phi$

定义 4.1.7: 商代数

$\mathscr{A}$ 为代数,J 为 $\mathscr{A}$ 理想,$\mathscr{B} = \mathscr{A}/J, [a] \triangleq \{b \in J : b - a \in J\}$ 构成一个代数

代数运算:

$$\begin{cases} \lambda[a] + \mu[b] \triangleq [\lambda a + \mu b]((\lambda a_1 + \mu b_1) - (\lambda a_2 + \mu b_2) \in J) \\ [a][b] \triangleq [ab](a_1b_1 - a_2b_2 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)b_2) \in J, a_1(b_1 - b_2) \in J, (a_1 - a_2)b_2 \in J \end{cases}$$

定义 4.1.8: 自然映射

$\mathscr{A} \xrightarrow{\phi} \mathscr{A}/J, \forall a \in \mathscr{A} \to \phi(a) = [a]$

1. 非平凡:$\phi(a) = 0 \Leftrightarrow [a] = 0 \Leftrightarrow a \in J \neq \mathscr{A}$
2. $ker(\phi) = J$
3. 同态:$\phi(ab) = [ab], \phi(a)\phi(b) = [a][b]$

命题 4.1.6

对有幺元的代数, 其任一个理想都包含在一个极大理想当中

证明用 zero 引理, 包含作为序

命题 4.1.7

设 $\mathscr{A}$ 为有幺元的交换代数, 则理想 J 极大 $\Leftrightarrow \mathscr{A}/J$ 可除.

pf: "$\Rightarrow$" 反证:$\exists [b] \in \mathscr{B}, [b] \neq 0$,s.t.$[b]^{-1}$ 不存在

$[b] \in J = [b]\mathscr{B}$

$\mathscr{A} \xrightarrow{\phi} A/J = B \xrightarrow{\psi} B/J_1$

$" \Leftarrow "$ 反证,$J \subseteq J_1, a \in J_1/J.[a], ab - e \in J, ab \in J_1, e \in J_1$

4.2 Banach 代数

4.2.1 Banach 代数的定义

赋范环论:Banach 空间 + 代数 + 相容性条件

定义 4.2.1: Banach 代数

$\mathscr{A}$ 称为一个 Banach 代数 (简称 B 代数), 如果:

1. $\mathscr{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个代数
2. $\mathscr{A}$ 上有范数 $\|\cdot\|$, 且在此范数意义下成为一个 Banach 空间
3. $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|, \forall a, b \in \mathscr{A}$

命题 4.2.1

乘法关于范数连续

即:$a_n \to a, b_n \to b$

$$\|a_n b_n - ab\| \leq \|a_n - a\| \|b_n\| + \|a\| \|b_n - b\| \to 0$$

命题 4.2.2

为了使乘法关于每个变量连续, 自然要求 $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$

pf:$\forall a \in \mathscr{A}$, 定义 $L_a : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$\forall b \to L_a b \triangleq ab \overset{\text{关于 b 连续}}{\Rightarrow} L_a$ 为 $\mathscr{A}$ 上有界线性算子

对任意固定 $b \in \mathscr{A}, \sup\{\|L_a b\| : \forall a \in \mathscr{A}, \text{且} \|a\| \leq 1\}$ 是否 $\leq C_b < +\infty$

否则 $\exists a_n \in \mathscr{A}, \|a\| \leq 1$, 但 $\left\|L_{a_n} b\right\| = \|a_n b\| > n$

$\Rightarrow \left\|\frac{a_n}{a} \cdot d\right\| > 1$, 又 $\|a_n\| \leq 1, \left\|\frac{a_n}{n}\right\| \to 0$ 矛盾.

$\overset{\text{一致有界定理}}{\Rightarrow} \sup\{\|L_a\|, \forall a \in \mathscr{A}, \|a\| \leq 1\} \subset M \Rightarrow \|ab\| = \|L_a b\| \leq M \|a\| \|b\|$

命题 4.2.3

若 $\mathscr{A}$ 有幺元 e, 则 $\|e\| = \|e \cdot e\| \leq \|e\| \|e\| \Rightarrow \|e\| \geq 1$, 定义 $\|a\|_1 = \sup\limits_{b \in \mathscr{A}} \frac{\|ab\|}{\|b\|} \Rightarrow \|e\|_1 = 1$, 且 $\frac{\|a\|}{\|e\|} \overset{\text{取 b=e}}{\Rightarrow} \|a\|_1 \leq \|a\| \Rightarrow$ 等价范数. 得到 B 代数幺元的范数为 1.

命题 4.2.4

B 代数有:

1. 算子代数
2. 函数代数
3. 群代数

例题 4.2.1

$\mathcal{L}(X)$, 其中 X 为 B 空间.$X \to X$ 有界线性算子全体.
加法, 数乘, 乘法 $X \xrightarrow{T} X \xrightarrow{S} X, ST \in \mathcal{L}(X)$. $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$
该例子不可交换有幺元

例题 4.2.2

$C(M)$, 其中 M 为紧的 T_2 空间, 复值连续函数空间 f, g

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)| \quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

可交换, 有幺元

例题 4.2.3: 圆盘代数

$\mathscr{A}(\mathbb{D})$, 在 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上解析, 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续的复数域上函数全体

$$fg(z) = f(z)g(z) \quad \|f\|_\infty = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$$

可交换, 有幺元.

例题 4.2.4: Winer 环

$\mathscr{A} = \{u \in C(S^1), u(e^{i\theta}) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty\}$
即绝对收敛的三角级数全体
定义:$u \cdot v(e^{i\theta}) \triangleq \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k})e^{in\theta}, u(e^{i\theta}) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}, v(e^{i\theta}) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}$
$\|u\| \triangleq \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_n|$, 则 $\|u \cdot v\| = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k d_{n-k}\right| \leq \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n| = \|u\|\,\|v\|$
为可交换的有幺元的 B 代数

例题 4.2.5

$L^1(\mathbb{R}^n)$ 加法数乘乘法 $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx, \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

可交换:$g * f(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy \overset{令x-y=u}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)du$

无幺元: 反证, 若 $\exists e s.t. e * f, \forall f \in L^1(\mathbb{R})$

绝对连续性,$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \exists \delta > 0, \int_{-2\delta}^{2\delta} |u(x)|\, dx < 1$

取 $f = x_{[-\delta,\delta]}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} e(x-y)f(y)dy = \int_{-\delta}^{\delta} e(x-y)dy \overset{x-y=u}{=} \int_{x+\delta}^{-x+\delta} e(u)du$

取 $x_0 \in [-\delta, \delta]$

$1 = |f(x_0)| = \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e(u)du\right| \leq \int_{-2\delta}^{2\delta} |e(u)|\, du < 1$ 矛盾.

4.2.2 Banach 代数的极大理想及 Gelfand 表示

可除的 Banach 代数

定理 4.2.1: Gelfand-Mazur 定理

可除的 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 等距同构于复数域 $\mathbb{C}$

pf: 令 $\mathscr{B} \triangleq \{ze : z \in \mathbb{C}\}, c \in \mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ 若证 $\mathbb{B} = \mathscr{A}$

$\mathbb{B} = \mathscr{A} \to \mathbb{C}$

$\forall a \in \mathscr{B}, a = ze \xrightarrow{\phi} \phi(a) = z$ 等距同构

下证 $\mathscr{B} = \mathscr{A} \Leftrightarrow \forall a \in \mathscr{A}, \exists z \in \mathbb{C}, s.t. a = ze$

反证:$\exists a \in \mathscr{A}, s.t.$ 对 $\forall z \in \mathbb{C}$ 都有 $a - ze \neq 0, \mathscr{A}$ 可除 $\Rightarrow (ze-a)^{-1} \triangleq R(z)$ 存在

$R(z) \triangleq (ze-a)^{-1}, \forall z \in \mathbb{C}$

$\forall z \to r(z) \xrightarrow{F} F(z) \triangleq < f, r(z) >, \forall f \in \mathscr{A}^*$

$r(z_1) - r(z_2) = (z_2 - z_1)r(z_1)r(z_2)$

$r(z_1) = (z_1 e - a)^{-1}(z_2 e - a)(z_2 e - a)^{-1}$

$r(z_1) = r(z_2) + (z_2 - z_1)r(z_1)r(z_2)$

命题 4.2.5

$\mathscr{A}$ 为可除 B 代数 $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$
等距同构 $\forall a = ze \to \phi(a) = z$

命题 4.2.6

1. $\mathscr{A}$ 是代数 + J 是理想 $\Rightarrow$ 商代数 $\mathscr{A}\backslash J$
2. 商代数 $\mathscr{A}\backslash J$ + 假设 $\mathscr{A}$ 为有幺元的可交换的 B 代数 $+J$ 极大 $\Rightarrow \mathscr{A}\backslash J$ 可除代数
3. $\mathscr{A}\backslash J$ 可除代数 + $\mathscr{A}$ 为 B 代数 + J 是闭的 $\Rightarrow \mathscr{A}\backslash J$ 可除 B 代数.

引理 4.2.1

设 $\mathscr{A}$ 为有幺元的 B 代数, 则任一极大理想 J 都是闭的, 从而商代数 $\mathscr{A}\backslash J$ 为 B 代数 $[a]=\{x: x-a\in J\}, \lambda[a]+\mu[b]=[\lambda a+\mu b], [a][b]=[ab], \|[a]\|=\inf\limits_{x\in[a]}\|x\|$

$\|[a][b]\|=\|[ab]\|\leq \inf\{\|xy\|, x\in[a], y\in[b]\}\leq\|[a]\|\,\|[b]\|$ 也具有幺元 $[e]$

$\|[e]\|=\inf\limits_{h\in J}\|e-h\|\geq 1$, 否则 $\|e-h\|<1\Rightarrow h$ 可逆, 与 $h\in J$ 矛盾, 取 $h=0, \|e\|=1$

pf:$\overline{J}=J\Rightarrow$ 只需证明 $\overline{J}\subset J\Rightarrow$ 若 $\overline{J}$ 也是理想, 则证毕.

证明 $\overline{J}$ 是理想

1. 子代数: $\overline{J}\times\overline{J}\to\overline{J}$ 显然成立

2. $a\overline{J}\subset\overline{J}:\overline{J}a\subset\overline{J}, b\in\overline{J}, b_n\in J\to b\Rightarrow ab_n\to ab\in\overline{J}$

3. $\overline{J}\neq\mathscr{A}, e\notin J, \forall a\in\mathscr{A}, \|a\|<1, (a-e)^{-1}, a-e\notin J, J\cap B(e,1)=\emptyset$

定理 4.2.2

设 $\mathscr{A}$ 有幺元可交换的 B 代数,J 是 $\mathscr{A}$ 的极大理想, 商代数 $\mathscr{B}=\mathscr{A}\backslash J$ 等距同构于复数 $\mathbb{C}$

注:$\mathscr{A}$ 为有幺元可交换的 B 代数,J 为极大理想

$\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}\backslash J\longrightarrow\mathbb{C}$

$\forall a\longrightarrow[a]\longrightarrow z$

$\phi_J: a\to\phi_J a$

$$\text{则 }\phi_J\begin{cases}\phi_J(\lambda a+\mu b)=\lambda\phi_J(a)+\mu\phi_J(b)\\ \phi_J(ab)=\phi_J(a)\phi_J(b)\\ \phi_J(e)=1, e\to[e]=1[e]\\ |\phi_J(a)|=\|[a]\|\leq\|a\|, \forall a\in\mathscr{A}\end{cases}$$

连续同态映射 (有界线性泛函 $\in\mathscr{A}^*$)

Gelfand 表示

定义 4.2.2

设 $\mathscr{A}$ 有幺元的可交换的 Banach 代数,$\mathscr{M}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的极大理想形成的集合
$\forall a \in \mathscr{A}, \phi_J : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 固定 $J \in \mathscr{M}$
$\forall J \in \mathscr{M}, \hat{a} : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ 固定 $a \in \mathscr{A}$
$\forall J \to \hat{a}(J) = \phi_J(a)$
$\hat{a}$ 称为代数 $\mathscr{A}$ 在 a 点的 Gelfand 表示.

定义 4.2.3

定义从有幺元可交换的代数 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{M}$ 上复值连续函数代数映射

$$\Gamma : \mathscr{A} \to C(\mathscr{M})$$
$$\forall a \xrightarrow{\Gamma} \hat{a}$$
$$(\Gamma a)(J) = \hat{a}(J) = \phi_J(a), \forall J \in \mathscr{M}$$

Γ 为 $\mathscr{A}$ 傻瓜的 Gelfand 表示,

极大理想空间的拓扑

定义 4.2.4: 线性泛函的乘法

称线性泛函的乘法指的是

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

更进一步, 若 ϕ 是非退化 (非零)

$$\begin{cases} \phi(e) = 1 \\ \|\phi\| = 1 \end{cases} \quad \phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e), \phi(e) = 1$$

pf:$\|\phi\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\phi(x)|$ 对 $\|x\| \le 1$, 若 $|\phi(x)| > 1$
$\left\| e - (e - \frac{x}{\phi(x)}) \right\| = \left\| \frac{x}{\phi(x)} \right\| < 1 \Rightarrow e - \frac{x}{\phi(x)}$ 可逆, 但 $\phi(e - \frac{x}{\phi(x)}) = \phi(e) - 1 = 0$ 矛盾.
故 $|\phi(x)| \le 1$, 而在 $x = e$ 处,$\phi(x) = 1$ 故 $\|\phi\| = 1$
故极大理想空间 $\mathscr{M}$ 到 A^* 的同态子集对应
$i : m \to \Delta = \{\phi \in A^*, < \phi, ab >=< \phi a >< \phi b >, < \phi, e >= 1\} \subset A^*$
$Ker\phi = \forall J \xrightarrow{i} \phi_J$
该映射是单的, 若 $J_1 \ne J_2, \phi_{J_1} \ne \phi_{J_2}$(核不一样)
在证明是满射之前先给出一个引理

引理 4.2.2

设 $\mathscr{A}$ 是有幺元可交换的 B 代数,ϕ 为 $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 上非退化的连续同态.
则

$$\begin{cases} \phi(e) = 1(\text{同态可得}\phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e) \Rightarrow \phi(e) = 1) \\ J = Ker\phi\text{是}\mathscr{A}\text{的一个极大理想} \end{cases}$$

(2) 的证明:

J 是 $\mathscr{A}$ 的一个闭理想, 极大 $\Leftrightarrow \mathscr{A}\backslash J$ 是可除

定义映射 $\tilde{\phi} : \mathscr{A}\backslash J \to \mathbb{C}$

$$[a] \to \tilde{\phi}([a]) = \phi(a) \begin{cases} \text{同态} : \tilde{\phi}([a][b]) = \tilde{\phi}([ab]) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \tilde{\phi}([a])\phi(\tilde{[b]}) \\ \text{单的} : \tilde{\phi}([a]) = \phi(a) = 0 \Rightarrow a \in J \Rightarrow [a] = [0] \end{cases}$$

$\forall [a] \neq 0, [a] \in \mathscr{A}\backslash J$

$$\tilde{\phi}[\tilde{\phi}([a])[e]] = \tilde{\phi}([a])\tilde{\phi}([e]) = \tilde{\phi}([a])$$

由于 $(\tilde{[e]}) = \phi(e) = 1$

$\Rightarrow \tilde{\phi}([a])[e] = [a] \Rightarrow [a]^{-1} = \tilde{\phi}([a])^{-1}[e]$

故 i 满射

$A(*\text{弱拓扑}) \longleftarrow A^*(\text{强拓扑}) \longrightarrow A^{**}(\text{弱拓扑})$

$U(\epsilon, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{\phi \in A^* : |< \phi, x_i >| < \epsilon, i = 1, 2, \cdots, n\}$

则 Δ 是 $*$ 弱闭的

$i : m \Leftrightarrow \Delta \subset A^*$

$J_0 \longrightarrow \phi J_0$

$N(J_0, \epsilon, m) \longleftarrow U(\phi J_0, \epsilon, A) = \{\phi \in A^* | < \phi, a >=< \phi_{J_0}, a >, \forall a \in A\}$

$N(J_0, \epsilon, m) = \{J \in \mathscr{M}, \left|\phi_J(a) - \phi_{J_0}(a)\right| < \epsilon, \forall a \in \mathscr{A}\} = \{J \in \mathscr{M}, |\hat{a}(J) - \hat{a}(J_0)| < \epsilon, \forall a \in \mathscr{A}\}$

T_2 性:$\forall \phi, \psi \in A^*, \phi \neq \psi, \exists a \in A s.t. \phi(a) \neq \psi(a)$

对 $\epsilon s.t. 0 < \epsilon < \frac{1}{2}|\phi(a) - \psi(a)|$

取 $(\phi, U(a, \epsilon)) \cap (\psi, U(a, \epsilon)) = \phi$

$\Rightarrow \mathscr{M}$ 是 T_2 紧集合

Γ 同态:$\Gamma(\alpha a + \beta b) = \widehat{\alpha a + \beta b}$

$\alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b) = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b}$

$\widehat{\alpha a + \beta b}(J) = \phi_J(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi_J(a) + \beta\phi_J(b) = (\alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b))(J)$

$\Gamma(ab)(J) = \phi_J(ab)$

$\Gamma(a)\Gamma(b)(J) = \phi_J(a)\phi_J(b) = \phi_J(ab) = \Gamma(ab)(J) = \phi_J(ab)$

$|\hat{a}(J)| = |\phi_J(a)| \leq \|a\|$

定理 4.2.3

设 $\mathscr{A}$ 是有幺元可交换的 B 代数, 则 Gelfand 表示 $\Gamma : \mathscr{A} \to C(\mathscr{M}), \forall a \to \Gamma a = \hat{a}$(其中 $[a(J) = \hat{a}(J) = \phi_J(a)]$) 是一连续同态, 且 $\|\Gamma_a\|_\infty \le \|a\|$

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma_a\|_\infty &= \sup_{J\in\mathscr{M}} |\Gamma_a(J)| \\
&= \sup_{J\in\mathscr{M}} |\hat{a}(J)| \\
&= \sup_{J\in\mathscr{M}} |\phi_a(J)| \\
&\le \sup_{J\in\mathscr{M}} \|\phi_J\|\,\|a\| \le \|a\|
\end{aligned}
$$

且 $\Gamma(e)(J) = \hat{e}(J) = \phi_J(e) = 1$

$\Rightarrow \|\Gamma\| = 1$

Banach **代数的谱理论**

回忆 $A \in L(X), A \to \begin{cases} \phi(A) \\ \sigma(A)\text{非空有界闭集} \end{cases}$

$r_{\sigma(A)} = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

推广:

有幺元的 B 代数

定义 4.2.5

设 $\mathscr{A}$ 为有幺元的 Banach 代数, 设 $G(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中可逆元的全体.

令 $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda e - a \notin G(A)\}, \forall a \in \mathscr{A}$

$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda e - a \in G(A)\} = \mathbb{C}\backslash\sigma(a)$

注:

1. $\sigma(a)$ 是非空, 有界, 闭集

2. Gelfand-Mazur 定理. 用谱非空证明

pf:$\forall a \in \mathscr{A}, \exists \lambda \in \mathbb{C}$,s.t.$\lambda e - a \notin G(A)$,$A$ 可除 $\Rightarrow \lambda e - a = 0, a = \lambda e$

谱半径:$r_\sigma(a) \triangleq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$

定理 4.2.4

设 $\mathscr{A}$ 有幺元, 可交换的 Banach 代数, 则 $\forall a \in \mathscr{A}$, 都有 $\sigma(a) = \{\hat{a}(J) : J \in \mathscr{M}\}$, 从而 $r_\sigma(a) = \|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})}$

pf: $\lambda \in \sigma(a) \iff \lambda e - a \neq G(\mathscr{A}) \overset{\text{交换}}{\iff} \exists J_1 = (\lambda e - a)\mathscr{A} \subset J \in \mathscr{M}$s.t.$\lambda e - a \in J = Ker\phi_J \iff \phi_J(\lambda e) = \phi_J(a) \iff \lambda = \hat{a}(J)$

即 $\sigma(a) = \{\hat{a}(J), J \in \mathscr{M}\}$

$\|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})} = \sup\limits_{J\in\mathscr{M}} |\Gamma_a(J)| = \sup\limits_{J\in\mathscr{M}} |\hat{a}(J)| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\} = \gamma_\sigma(a)$

1. $\sigma(a) = Ran\Gamma a$
2. $\|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})} = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \gamma_\sigma(a) \leq \|a\|$
3. $Ker\Gamma a = \cap\{J : J \in \mathscr{M}\}$

Gelfand **表示更进一步的性质**

1. 单的:$\Gamma a = 0 \Rightarrow \Gamma a(T) = \hat{a}(J) = 0 = \phi_J(a) \Rightarrow a \in ker\phi_J = J\ \forall J \in \mathscr{M} \Rightarrow a \in \cap\{J : J \in \mathscr{M}\} = \{0\}$ 半集代数

   Γ 单 $\iff \mathscr{A}$ 是半单的 (代数刻画)

2. $\Gamma a = 0 \iff \|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$

   Γ 单 $\iff$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ 必能得出 $a = 0$(分析刻画)

(2). 单 + 等距:Γ 是 $\mathscr{A}$ 到 $C(\mathscr{M})$ 内的等距同构 $\iff \left\|a^2\right\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathscr{A}$

pf: "$\Rightarrow$", $\left\|a^2\right\| = \left\|\Gamma(a^2)\right\|_{C(\mathscr{M})} \overset{\text{同态}}{=} \left\|(\Gamma a)^2\right\|_{C(\mathscr{M})} \overset{\text{函数}}{=} \|\Gamma a\|^2_{C(\mathscr{M})} = \|a\|^2$

"$\Leftarrow$", $\|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})} = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{\text{取}n=2k}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \left\|a^{2k}\right\|^{\frac{1}{2k}} = \|a\|$

(3). 单 + 满 + 等距: C^* 代数

4.2.3 例子与应用

例题 4.2.6

连续函数代数 $C(M), \mathscr{M} \cong M$(同胚).$\Gamma : C(M) \to C(\mathscr{M})$

pf: $\tau : \mathscr{M} \leftrightarrow \Delta \overset{\phi_J, J=Ker\phi}{\leftrightarrow} \mathscr{M}$

$\forall x_0 \to \delta_{x_0} \to \{f \in C(M) : f(x_0) = 0\} \triangleq J_{x_0}$

$\forall f \to \hat{f}, \hat{f}(J) = \hat{J}(\delta_{x_0}) = \delta_{x_0}(f) = f(x_0)$

δ_{x_0} 是乘法线性泛函.

1. 单的:$\forall x_0 \neq y_0, \delta_{x_0} \neq \delta_{y_0}$
2. 满的:$\forall J \in \mathscr{M}, \exists x_0 \in M, s.t. J = J_{x_0}$

   反证: 对 $J \in \mathscr{M}$, 则对 $\forall x \in \mathscr{M}, \exists f_x \in C(M)$s.t.$f_x(x) \neq 0 \Rightarrow f_x(y) \neq 0, \forall y \in U_x$

   $M \subset \cup_{x\in M} U_x$ 开覆盖

   $M \subset \cup_{i=1}^n U_{xi}, f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n) \Rightarrow f = \sum\limits_{i=1}^n \overline{f(x_i)} f(x_i), f(x) \neq 0, \forall x \in \mathscr{M}$ 矛盾 (不为 0 连续函数可逆)

3. τ 连续,$x_n \to x_0, \delta_{x_n} = \tau x_n \to \tau x_0 = \delta_{x_0}, \delta_{x_n}(f) \to \delta_{x_0}(f), f(x_n) \to f(x_0)$

例题 4.2.7

Wiener 代数:$W=\{f\in C(S): f(e^{i\theta})=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\theta}\},\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}|c_n|<+\infty$, 则 $\mathscr{M}\cong S^1$

定理 4.2.5: Wiener

$f\in W$, 且 f 在 S^1 上无零点, 则 $\frac{1}{f}\in W$,S: 单位圆周

pf:$f(e^{i\theta})=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\theta}$

$\sigma(f)=\{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n\xi^n,\xi\in S^1\},D\notin\sigma(f)$

$\Rightarrow\frac{1}{f}\in W$

例题 4.2.8: 圆盘代数

$A(\mathbb{D})=\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}:f\in\mathcal{H}(D),f\in C(\overline{\mathbb{D}})\},\mathscr{M}\cong\overline{\mathbb{D}}$,$\mathcal{H}$ 代表解析

定理 4.2.6

设 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in A(\mathbb{D})$, 且 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 无公共零点, 则 $\exists g_1,g_2,\cdots,g_n\in A(\mathbb{D})$,s.t.$f_1g_1+f_2g_2+\cdots+f_ng_n=1$

pf: 反证: 令 $J=\{h_1f_1+h_2f_2+\cdots+h_nf_n:h_1,h_2,\cdots,h_n\in A(\mathbb{D})\}$ 理想,$1\notin J$, 则 $J\subset J_0\in\mathscr{M}\simeq\overline{\mathbb{D}}\Rightarrow J_0=Ker\delta_{x_0},\delta_{x_0}(f_i)=f_i(x_0)=0,\forall i=1,2,\cdots,n$ 矛盾.

4.3 C^* 代数

4.3.1 定义

定义 4.3.1

设 $\mathscr{A}$ 是 B 代数. 定义对合运算 $*:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 映射, 满足: 对 $\forall a,b\in\mathscr{A},\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

1. 共轭线性 $(\lambda a+\mu b)^*=\overline{\lambda}a^*+\overline{\mu}b^*$
2. $(ab)^*=b^*a^*$
3. $(a^*)^*=a$

则 $*$ 为周期为 2 的共轭线性反自同构.

注:$\mathscr{A}$ 是有幺元半单的可交换 B 代数, 则 $*$ 是连续的.$\phi(a)\triangleq\overline{\phi(a^*)},\forall\phi\in\Delta$

定义 4.3.2: C^* 代数

称一个代数为 C^* 代数, 如果:

1. $\mathscr{A}$ 为一个带有对合运算 $*$ 的代数
2. $\mathscr{A}$ 是有幺元的 B 代数
3. $\|a^*a\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathscr{A}$

命题 4.3.1

$\|a^*\| = \|a\|$ 且 $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$

pf:$\|a\|^2 = \|a^* \cdot a\| \leq \|a^*\|\|a\| \to \|a\| \leq \|a^*\|\|a\| \to \|a\| \leq \|a^*\|, \|a^*\| \leq \|(a^*)^*\| = \|a\|$

命题 4.3.2

$e^* = e$

pf:$e^* = ee^*, e = (e^*)^* = (ee^*)^* = (e^*)^*e^* = ee^*$

命题 4.3.3

若 $a \in \mathscr{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow a^*$ 也可逆, 且 $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$

pf:

$$\begin{cases} aa^{-1} = e \Rightarrow (aa^{-1})^* = (a^{-1})^*a^* = e^* = e \\ a^{-1}a = e \Rightarrow (a^{-1}a)^* = a^*(a^{-1})^* = e^* = e \end{cases}$$

$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$

命题 4.3.4

$\forall a \in \mathscr{A}$, 则 $\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(a^*)$

pf:$\lambda e - a \Leftrightarrow (\lambda e - a)^* = \overline{\lambda}e - a^*$

命题 4.3.5

在 Hilbert 空间中定义许多重要特殊算子类均可推广到 C^* 代数

$$\begin{cases} \text{自伴元 (hermite 元)} : a^* = a \\ \text{正规元 (正常元)} : aa^* = a^*a \\ \text{酉元} aa^* = a^*a = e \Leftrightarrow a^* = a^{-1} \end{cases}$$

且:$\forall a\in\mathscr{A}$, 都有自伴算子,$a=\frac{a+a^*}{2}+i\frac{a-a^*}{2i}=u+iv$ 其中 u,v 为 hermite 元.

常见自伴元 e,aa^*,a^*a

若 $a^*=a$, 则 $\|a^2\|=\|a\|^2$

pf:$\|a^2\|=\|a^*a\|=\|a\|^*$

4.3.2 例子

例题 4.3.1

M 是紧 T_2 空间,$C(M)$ 为 C^* 代数,$f^*=\overline{f},\|f^2\|_\infty=\|f\|_\infty^2$

例题 4.3.2

$\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$\mathcal{L}(H)$ 为 C^*,$<T^*x,y>=<x,Ty>$

$$\|T^*T\|=\|T\|^2\begin{cases}\|T^*T\|\le\|T^*\|\|T\|\Rightarrow\|T^*T\|\le\|T\|^2\\ <T^*Tx,x>=<Tx,Tx>=\|Tx\|^2\Rightarrow\|T^2\|\le\|T^*T\|\end{cases}$$

例题 4.3.3

$\mathcal{L}(H)$ 闭子代数

定义 4.3.3: $*$ 等距同构

C^* 代数 $\xrightarrow{\phi}$ C^* 代数, 对合映到对合, 保持 $*$ 运算.

定理 4.3.1: Gelfand-Naimark-Segal 定理

每一个 C^* 代数都 $*$ 等距同构于某算子代数

即 $\exists$Hilbert 空间 H, 其为 $\mathcal{L}(H)$ 的闭子代数.

4.3.3 交换的 C^* 代数的 Gelfand 表示

定理 4.3.2: Gelfand-Naimark

设 $\mathscr{A}$ 是可交换的 C^* 代数, 则 $\mathscr{A}$Gelfand 表示为从 $\mathscr{A}$ 到 $C(\mathscr{M})$ 的 $*$ 等距到上的同构映射.

即 $\begin{cases}(1).*\text{映射}:\Gamma a^*=\overline{\Gamma a}\text{或者说}\hat{a}^*(J)=\bar{\hat{a}}(J),\forall J\in\mathscr{M}\\ (2).\text{等距同构}:\|a^2\|=\|a\|^2,\forall a\in\mathscr{A}(\text{只需证}\ \|\Gamma a\|_{C(\mathscr{M})}=\|a\|)\\ (3).\text{到上的}:\Gamma\mathscr{A}=C(\mathscr{M})\end{cases}$

pf:

(1).$\forall a \in \mathscr{A}$, 则 $a = u + iv$(自伴分解),$a^* = u - iv \overset{\Gamma u\text{实}}{\Rightarrow} \Gamma a^* = \Gamma u - i\Gamma v \overset{\Gamma u\text{实}}{\Rightarrow} \overline{\Gamma u + i\Gamma v} = \overline{\Gamma a}$

引理 4.3.1: Arason 引理

若 $a^* = a$, 则 Γa 实.

pf: 即 $\exists \phi$s.t.$< \phi, a >= \alpha + i\beta$

$$|< \phi, a + ite >| \le \|a + ite\|^2 \overset{C^*\text{代数}}{=} \|(a + ite)^*(a + ite)\| = \|(a^* - ite)(a + ite)\| = \left\|a^2 + t^2 e\right\| \le \left\|a^2\right\| + \left\|t^2\right\|$$

$|< \phi, a + ite >| = |< \phi, a > +it| = |\alpha + i(t + \beta)|$ 取 $t = \lambda\beta$

(2)

$\forall a \in \mathscr{A}$

$$\left\|a^2\right\|^2 = \left\|(a^2)^* a^2\right\| = \left\|(a^*)^2 a^2\right\| = \|a^* a a^* a\| = \|a^* a\|^2 = \|a\|^4 = \|a\|^4 \Rightarrow \left\|a^2\right\| = \|a\|^2$$

(3)

根据 Stone-Weierstrass 定理

1. 闭子代数:A 闭,$\Gamma : A \to \Gamma A$
2. 有幺元:$\Gamma e = \hat{e} = 1, \hat{e}(J) = \phi_J(e) = 1$
3. 对复共轭封闭:$\Gamma a \in C(\mathscr{M}), \overline{\Gamma a} = \Gamma a^* \in C(\mathscr{M})$
4. 分离 $\mathscr{M}$ 中的点:$\forall J_1 \neq J_2 \in \mathscr{M}$, 取 $a \in J_1 \backslash J_2$

$$0 = \Gamma a(J_1) \neq \Gamma a(J_2) \neq 0$$

第五章　广义函数和 Soblev 空间

引: 函数的定义

1837 - Dirichlet 经典函数定义:

20 世纪初单位脉冲函数

电量 $\begin{cases} 0 & t \le t_0 \\ 1 & t \ge t_0 \end{cases}$ 求电流强度 $\delta(t), \delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \ne 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$ 不是函数

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ 为总能量,$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0), \phi$ 连续函数

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\epsilon \delta(t)\phi(t) - \phi(0)dt \right| \\ \le& \delta(t) \left| \delta(t) - \phi(0) \right| dt \\ \le& \|\phi(t) - \phi(0)\| \int_0^\epsilon \delta(t)dt \to 0(\epsilon \to 0) \end{aligned}$$

20 世纪 30 年代 (Soblev) 解方程, 广义导数

20 世纪 30 年代,Fourier 变换,$L^1(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n), p = 1$

广义函数: 性质很好的检验函数空间上的连续线性泛函

5.1　广义函数的概念

5.1.1　基本空间 $\mathcal{D}(\Omega) : C_0^\infty(\Omega)+$ 收敛性

基本记号定义性质

1. 多重指标,$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

(2)$C^k(\overline{\Omega})$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为连通有界开集,$\|u\| = \triangleq \max_{|\alpha| \le k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|$, 称为 B 空间

(3)$C_0^k(\Omega)$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开集: 支集 $supp(u) \triangleq \overline{x \in \Omega, u(x) \ne 0}$ 在 Ω 中紧的,$k = 0, 1, \cdots, \infty$ 全体 $C^k(\Omega)$ 函数的集合

(4)$C_0^\infty(\Omega)$, 支集在 Ω 中紧的具有无穷次可微函数的全体

从而 $C_0^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^{k+1}(\Omega) \subset C_0^k(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^1(\Omega) \subset C_0^0(\Omega)$

例如:$j(x)=\begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$

$j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), c_n=(\int_{|x|\leq 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}dx)^{-1}\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx=1$

(5) 伸缩函数: 设 ϕ 为 $\mathbb{R}^n$ 函数, 定义 $\phi_\delta(x)\triangleq\frac{1}{\delta^n}\phi(\frac{x}{\delta}),\forall\delta>0$, 则称 ϕ_δ 为 ϕ 的伸缩函数, 保持能量,$j_\delta(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

(6) 设 $u(x)$ 可积, 且 $u(x)$ 在紧 $K\subset\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 之外恒为 0(比 $C_0^0(\Omega)$ 弱), 则当 δ 充分小时,$(u*j_\delta)(x)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}u(y)\delta(x-y)dy\in C_0^\infty(\Omega)$

pf: $K_\delta\triangleq\{x\in\Omega, dist(x,K)\leq\delta\},\delta$ 充分小时.

则 $1<\delta<\Omega, y\in K, |x-y|<\delta$ 时 $\Rightarrow x\in k_\delta\Rightarrow$ 当 $x\in\Omega\backslash K_\delta,(u*j_\delta)(x)\equiv 0$

$\Rightarrow supp(u*j_\delta)\subset K_\delta\subset\Omega$

一阶偏导, 取 $\alpha=(1,0,\cdots,0)$

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(u*j_\delta)(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{u*j_\delta(x+he_1)-u*j_\delta(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_\Omega u(y)\frac{[j_\delta(x+he_1-y)-j_\delta(x-y)]}{h})dy\\
&=\lim_{h\to 0}\int_\Omega u(y)\partial^\alpha j_\delta(x+\theta he_1-y)dy\ 0<\theta<1\quad \partial^\alpha j_\delta(x+\theta he_1-y)\leq M_\alpha\\
&=(\text{L-控制})\int_\Omega u(y)\partial^\alpha j_\delta(x-y)dy
\end{aligned}$$

(7)

1. 设 $u\in C_0^k(\Omega)$, 则 $\|u*j_\delta-u\|_{C^k(\overline{\Omega})}\to 0$, 当 $\delta\to 0^+$

2. 设 $u\in L^p(\Omega), p\geq 1, \|u*j_\delta-u\|_{L^p}\to 0$, 当 $\delta\to 0^+$

基本空间 $\mathcal{D}(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ + 收敛性

定义 5.1.1

设 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 开集, 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上定义如下收敛性,$\{\phi_j\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ 称 $\phi_j\to\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega)$, 如果

1. $\exists$ 紧的 $K\subset\Omega$s.t.$supp(\phi_j)\subset K, j=0,1,2,\cdots$

2. $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\max\limits_{x\in K}\left|\partial\phi_j(x)-\partial^\alpha\phi_0(x)\right|\to 0$, 当 $j\to\infty$

称具有这种收敛性质 $C_0^\infty(\Omega)$ 为基本空间 $\mathcal{D}(\Omega)$

命题 5.1.1

$\mathcal{D}(\Omega)$ 中收敛性并不能由 (准) 范数诱导出来

命题 5.1.2

对某个 K 来说,$\|\phi\|_N \triangleq \max\limits_{|\alpha|\le N}\max\limits_{x\in K}|\partial^\alpha\phi|, N=1,2,\cdots$

D_k, 可数范数空间 $B_0^* \Leftrightarrow \|\phi\| \triangleq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|\phi\|_n}{1+\|\phi\|_n}, \mathcal{F}$ 空间

$D=\cup D_k$ 成为一个局部凸的向量空间

$\phi_j \to \phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega) \Leftrightarrow \exists k\subset\Omega$ 紧 s.t.$\left\|\phi_j-\phi_0\right\|_N \to 0$

命题 5.1.3

$\mathcal{D}(\Omega)$ 序列是完备的, 即对 $\mathcal{D}(\Omega)$ 任一基本列,$\{\phi_j\}$

1. $\exists K\subset\Omega$ 紧 s.t.$supp\{\phi_j\}\subset K$
2. $\forall\partial\in\mathbb{N}^n, \max\limits_{x\in K}|\partial^\alpha\phi_m-\partial^\alpha\phi_n|<\epsilon$, 当 $m,n>N$

定义 5.1.2

$B_0^* \xrightarrow{\text{完备}} B_0$ 空间

5.2 广义函数的定义, 例子, 基本性质

定义 5.2.1

称 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函称为广义函数,$f:<f,\phi>$, 即 $f:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C}$
满足

1. 线性:$<f,\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2>=\lambda_1<f,\phi_1>+\lambda_2<f,\phi_2>,\forall\phi_1,\phi_2\in\mathcal{D}(\phi),\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
2. 连续:$\phi_j\to\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega)$, 都有 $<f,\phi_j>\to<f,\phi_0>, j\to\infty$

例题 5.2.1: Dirac(δ 函数)

$\forall x_0\in\Omega, <\delta_{x_0},\phi>\triangleq\phi(x_0), \forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$. 则 $\delta_{x_0}\in\mathcal{D}'(\Omega)$

pf: 线性显然

连续:$\phi_i\to\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$<\delta_x,\phi_j>=\phi_j(x_0)\to\phi_0(x_0)=<\delta_{x_0},\phi_0>$$

例题 5.2.2: 局部可积函数

$f \in L'_{loc}(\Omega)$: $\forall$ 紧 $K \subset \Omega$, 都有 $\int_K |f(x)|\,dx < \infty$

则 $f \xrightarrow{\text{自然对应}} \Lambda = f \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad < f, \phi > \triangleq \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

pf: 线性显然, 连续性:$\forall \phi_j \to \phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, 则 $\exists$ 紧 $K \subset \Omega$,s.t.$supp(\phi_j) \subset K, j = 0, 1, \cdots$

$$\begin{aligned}\left|< f, \phi_j > - < f, \phi_0 >\right| &= \left|\int_K f(x)(\phi_j(x) - \phi_0(x))\right| \\ &\le \int_K |f(x)|\left|\phi_j(x) - \phi_0(x)\right| dx \xrightarrow{L\text{控制}} 0\end{aligned}$$

注:

命题 5.2.1

$L'_{loc}(\Omega) \xrightarrow{\Lambda_f} \mathcal{D}'(\Omega)$ 是一一的非到上的

即:$< \Lambda f, \phi >= \int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f = 0$a.e. 单射

命题 5.2.2

推广: 设 μ 复 Borel 测度或 μ 是正测度且 $\mu(k) < +\infty, \forall k \in \Omega$ 紧, 则 $\Lambda_\mu(f) = \int_\Omega \phi d\mu, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 则 $\Lambda_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$

命题 5.2.3

f 为 Ω 上的连续函数,L 可积函数都是 $L'_{loc}(\Omega)$

定理 5.2.1: 有界性刻画

$f' \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff$ 对 $\forall$ 紧 $K \subset \Omega, \exists$ 常数 C 及 $N \in \mathbb{N}$,s.t.$|< f, \phi >| \le C\,\|\phi\|_N = C \sum\limits_{|\alpha|<\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \phi|$, 其中 $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 且 $supp(\phi) \subset K$.

pf: $\Leftarrow$, 显然

$\Rightarrow$ 反证, 则 $\exists K$ 紧 $\subset \Omega, \exists \phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ 且 $supp(\phi_j) \subset K$, 不妨设 $\left|f, \phi_j\right| = 1$ 且 $\sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \phi| \le \frac{1}{j}$ 对 $|\alpha| \le j \to 0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, 但 $< f, \phi_j >= 1 \not\to 0 =< f, 0 >$ 与连续性矛盾

5.2.1 $\mathcal{D}'(\Omega)$: 线性 + 拓扑

定义 5.2.2

$$\mathcal{D}'(\Omega)\begin{cases}\text{线性结构}:<\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,\phi>\triangleq\lambda_1<f_1,\phi>+\lambda_2<f_2,\phi>,\phi(\mathcal{D}(\Omega)),\forall f_1,f_2\in\mathcal{D}'(\Omega)\\ \text{拓扑结构}:(*\text{弱拓扑})\text{指}f_i\to f\in\mathcal{D}'(\Omega)\Rightarrow<f_j,\phi>\to<f,\phi>,\forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega)\end{cases}$$

例题 5.2.3

$j_\delta(x-x_0)\to\delta_{x_0}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 当 $\delta\to 0-$, 其中 $x_0\in\mathbb{R}^n$

pf:$<j_\delta(x-x_0),\phi>=\int_{\mathbb{R}^n}\int_\delta(x-x_0)\phi(x)dx=(\phi*j_\delta)(x_0)$

$<\delta_{x_0},\phi>=\phi(x_0)$

$\left|<j_\delta(x-x_0),\phi>-<\delta_{x_0},\phi>\right|=|(\phi*j_\delta)(x_0)-\phi(x_0)|\le\|\phi*j_\delta-\phi\|_{C(\overline{K})}\to 0$ 当 $\delta\to 0+$

例题 5.2.4

设 $f_j\in L'_{loc}(\Omega), j=0,1,\cdots,\forall$ 紧 $K\subset\Omega,\left|f_j(x)\right|\le M_k,\forall x\in K, j=0,1,\cdots$, 若 $f_j(x)\to f_0(x)$,a.e.$x\in\Omega$ 且 $f_j\to f_0\in\mathcal{D}'(\Omega)$

pf:$\left|<f_j,\phi>-<f_0,\phi>\right|\le\int_\Omega\left|f_j(x)-f_0(x)\right||\phi(x)|\,dx\xrightarrow{L\text{控制}}0, j\to+\infty$

5.3 广义函数的运算

5.3.1 广义函数上的连续线性算子

定义 5.3.1

$$A\in\mathcal{L}(\mathcal{D}'(\Omega))\begin{cases}\text{线性结构}:A(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)=\lambda_1 A\phi_1+\lambda_2 A\phi_2\in\mathcal{D}(\Omega)\\ \text{连续性}:\phi_j\to\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega),\text{则 }A\phi_j\to A\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega)\end{cases}$$

例题 5.3.1: 微分算子

$\partial^\alpha\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega))$

pf: 线性是显然的.

连续性:$\phi_j\to 0\in\mathcal{D}(\Omega)$

$\left\|\partial^\alpha\phi_j\right\|_N=\sum\limits_{|\beta|\le N}\max\limits_{x\in K}\left|\partial^\beta(\partial^\alpha\phi_j)\right|\le\left\|\phi_j\right\|_{N+|\alpha|}\to 0$

例题 5.3.2: 乘法算子

$M_\psi, \psi \in C^\infty(\Omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega))$
$M_\psi \phi \triangleq \psi\phi$

例题 5.3.3: 位移算子

$\Gamma_{x_0}\phi = \phi(x - x_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$

例题 5.3.4: 反射算子

$\sigma(\phi)(x) = \phi(-x) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$

5.3.2 常见广义函数的运算

定义 5.3.2

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \xrightarrow{A} & \mathcal{D}(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}'(\Omega) & \xleftarrow{A^*} & \mathcal{D}'(\Omega) \end{array}$$

$A^* f \leftarrow \forall f$
$< A^* f, \phi > \triangleq < f, A\phi >$

注:

命题 5.3.1

由 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega)) \Rightarrow A^*$ 连续 in $\mathcal{D}'(\Omega)$

pf: $\forall f_j \to f_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$
那么是否有 $A^* f_j \to A^* f_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$
那么是否有 $< A^* f_j, \phi > \to < A^* f_0, \phi >$
根据定义有 $< f_j, A_\phi > \to < f_0, A\phi >$(函数列收敛), 得证.

例题 5.3.5: 广义微商

$\tilde{\partial}^\alpha \triangleq (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha)^*, \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$
即对 $\forall f \in \mathcal{D}'(\Omega), < \tilde{\partial}^\alpha f, \phi > = (-1)^{i+1} < (\partial^\alpha)^* f.\phi >$
$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) = (-1)^{|\alpha|} < f, \partial^\alpha \phi >$

命题 5.3.2

通常意义下的连续可微函数微商与广义微商一致

比如:$f \in C'(\Omega) \xrightarrow{\text{自然对数}} < f, \phi >= \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$

取 $\alpha = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), < \tilde{\partial} f, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < f, \partial^{\alpha}\phi >= (-1) \int_{\Omega} f(x)\partial^{\alpha}\phi(x)dx$ 根据分部积分公式得 $= \int \partial^{*} f \phi dx =< \partial^{\alpha} f, \phi >$

例题 5.3.6

$$\begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

求 $\tilde{\partial}_x q = \delta_x$

解:

$$\begin{aligned} < \tilde{\partial}_x, \phi > &= - < q, \phi'(x) > \\ &= - \int_0^{+\infty} \phi'(x)dx \overset{\text{牛莱}}{=} \phi(0) \\ &=< \delta_x, \phi > \end{aligned}$$

例题 5.3.7

$\tilde{\partial}^{\alpha}\delta_{x_0}$ 其中 $< \delta_{x_0}^{\alpha}, \phi > \triangleq (-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}\phi(x_0)$

pf:$< \tilde{\partial}^{\alpha}\delta_{x_0}, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < \delta_{x_0}, \partial^{\alpha}\phi >= (-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}\phi(x_0)$

5.4 Soblev 空间

定义 5.4.1: Soblev 空间

$W^{m,p} = \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \tilde{\partial}^{\alpha} f \in \mathcal{L}^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$

$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \left| \tilde{\partial} f \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

$S^{m,p} = \{f \in C^m(\Omega), \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\} \xRightarrow{\text{完备化}} \mathcal{H}^{m,p} \cong W^{m,p}$

5.5 $\Psi'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

引:

1. $\mathcal{F} f(\xi) \triangleq \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

   $\mathcal{F}^{-1} f(\xi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2\pi i x\xi}dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

2. 稠定 $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 酉算子,$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

5.5.1 Schwarz 空间

定义 5.5.1

$$\Psi(\mathbb{R}^n)=\{\phi\in C^{\infty(\mathbb{R}^n)}:\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\partial^\alpha\phi(x)\right|\le M_{k,\alpha}<\infty,k,|\alpha|=0,1,2,\cdots\}$$

注:

命题 5.5.1: 速降函数空间

$\lim\limits_{|x|\to\infty}(1+|x|)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha\phi(x)|\to 0,\forall k,|\alpha|=0,1,\cdots,$ 例如 $e^{-|x|^2}\in\Psi(\mathbb{R}^\varkappa)$

命题 5.5.2: 可数范数空间

$B_0^*:\|\phi\|_m=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le M}\left|(1+|x|^2)\partial^\alpha\phi(x)\right|$(且完备 B_0)

从而 $\phi_j\to\phi_0\in\Psi(\mathbb{R}^n)\iff\left\|\phi_j-\phi_0\right\|_m\to 0\iff\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le M}\left|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\partial^2(\phi_j-\phi_0)(x)\right|\to 0,\forall m=0,1,\cdots,$

5.5.2 Ψ(ℝⁿ) 上的 Fourier 变换

$$\begin{array}{ccc}\Psi(\mathbb{R}^n)&\xrightarrow{\mathcal{F}}&\Psi(\mathbb{R}^n)\\ \downarrow&&\downarrow\\ \Psi'(\mathbb{R}^n)&\xleftarrow{\mathcal{F}}&\Psi'(\mathbb{R}^n)\\ \tilde{F}f&&\forall f\end{array}$$

$<\tilde{\mathcal{F}}f,\phi>\triangleq<f,\mathcal{F}\phi>,\forall\phi\in\Psi(\mathbb{R}^n)$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 稠

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\Psi(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\text{连续嵌入}}L^p(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\text{连续嵌入}}\Psi'(\mathbb{R}^n)$

即 $\forall\phi_i\to\phi_0\in\Psi,\phi_i\to\phi_0\in L^p$

命题 5.5.3

$\Psi(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\text{连续嵌入}}L^p(\mathbb{R}^n)$

pf:

(1)

$$\forall\phi\in\Psi(\mathbb{R}^n),\|\phi\|_{L^p}^p=(\int_{\mathbb{R}^n}\|\phi(x)|^p\,dx|)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}}|\phi(x)|^p}{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}}}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$`\le\|1+|x|^p\phi\|_\infty(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}}})^{\frac{1}{p}}<\infty$$

(2).

$$\forall \phi_j - \phi_0 \in \Psi(\mathbb{R}^n), \left\|\phi_j - \phi_0\right\|_{L^p}^p = (\int_{\mathbb{R}^n} \left|(\phi_j - \phi_0)(x)\right|^p dx|)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}} \left|(\phi_j - \phi_0)(x)\right|^p}{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}}} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$` \le \left\|1+|x|^p(\phi_j - \phi_0)\right\|_\infty (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{np}{2}}})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

命题 5.5.4

与 $\mathcal{F}$ 配合最好的空间是 $\Psi(\mathbb{R}^n)$

$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k} = -\widehat{2\pi i \xi_k} f(\xi)$ 还需要 $x_k f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$
$\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1, \frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_k}(\xi) = 2\pi i \xi_k f(\hat{\xi})(f \to 0,$ 当 $|x| \to \infty$ 还需要$)$
$\forall \phi \in \Psi(\mathbb{R}^n), P(\partial)\hat{f}(\xi) = P\widehat{(2\pi i \xi)} f$
$\widehat{p\partial f}(\xi) = p(2\pi i \xi)\hat{f}$
$\mathcal{F} : \Psi(\mathbb{R}^n) \to \Psi(\mathbb{R})$ 拓扑同构

定义 5.5.2

$\Psi'(\mathbb{R}^n) : \Psi(\mathbb{R}^n)$ 上连续线性泛函: $l_j \to l \in \Psi'(\mathbb{R}^n) \iff < l_j, \phi > \to < l, \phi >, \forall \phi \in \Psi(\mathbb{R})$

注:$\Psi'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'_k(\mathbb{R}^n)$

命题 5.5.5

$L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\Omega), \forall f \to l_f$

$\left|< l_f, \phi >\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\right| \le \|f\|_p \|\phi\|_q$
$\forall \phi \in \Psi(\mathbb{R}^n), f_j \to f \in L^p, \left\|f_j - f\right\|_p \to \|\phi\|_q$
缓增 L^p 空间:$f(x)(1+|x|^2)^{-k} \in L^p$

$$\begin{aligned} \left|l_f, \phi\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{-k} f(x)(1+|x|^2)^k \phi(x)dx, \phi \in \Psi(\mathbb{R}^\ltimes) \end{aligned}$$