扫地才子的学习笔记

——实分析

扫地才子

2023 年 3 月 15 日

前言

实变函数是我学的比较不好的一门课

这个笔记真是精简至极, 只有定理与定理的简单理解, 几乎是没有任何证明

感觉起来是对的, 这就行了,ok 了.

附上孙七七的主页.`home.ustc.edu.cn/~tysun/`

高

2023 年 3 月 15 日

目录

第一章　一些简单的集合论

1.1　集合的表示

集合：朴素的讲，就是将某些个体聚在一起形成的总体，这些个体称为元素，这个总体称为集合。

集合的表示：

- 列举法：$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- 描述法：{x:x 是自然数}

指标集：以描述法为例，x 是自然数就称为指标

注 1.1.1. 所有集合的整体不是集合

证明：
假设：所有集合的整体是集合，记为 S
$S_1 = \{A \in S : A \notin S\} \subset S$
高某人吐槽：这本身就是一个很矛盾的集合
若 S_1 是 S 的元素，则与 S_1 的定义矛盾
若 S_1 不是 S 的元素，则与 S 的定义矛盾
证毕

定理 1.1.1. $A = B$ 的充要条件是 $A \subset B$ 且 $B \subset A$

定理 1.1.2. 如果 $A \subset B, B \subset C$，则 $A \subset C$

集合的运算：

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in A \text{且} x \in B\} \\
A \cap B &= \{x : x \in A \text{或} x \in B\} \\
A - B &= \{x : x \in A \text{但} x \notin B\} \\
A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\}
\end{aligned}
$$

特别的，当 $B \subset A, B^c$ 代表 $A - B$ 称为 B 的余集

运算律：

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

证明，利用定理 1.1 即可

De Morgan 公式：

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

证明，利用定理 1.1 即可，或者是利用数学归纳法

针对指标集 $\Lambda, \{A_\Lambda\}$ 的

交：$\bigcap\limits_{\Lambda\in\Lambda} = \{x : \forall\lambda \in \Lambda, x \in A_\Lambda\}$

并：$\bigcup\limits_{\Lambda\in\Lambda} = \{x : \exists\lambda \in \Lambda, x \in A_\Lambda\}$

1.2　用集合描述性质的例子

1. f 是定义在 E 上的函数：$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$

2.f^{-1} 是定义在 D 上的反函数：$f^{-1}(D) = \{x : f(X) \in D\}$

3.f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，在 $[a, b]$ 上有上界 M

换句话说 $\forall x \in [a, b], f(x) \leq M$

$[a, b] \subset \{x : f(x) \leq M\}$

4.f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，取定 $x_0 \in \mathbb{R}, \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t. x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{x : |f(x) - f(x_0) < \epsilon|\}$

5.f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，在 $\mathbb{R}$ 上有上界 M

$\mathbb{R} = \{x : f(x) < M\} = \{x : f(x)\ leM + 1\}$

6.f 在 $[a, b]$ 上连续，$f([a, b]) = [m, M]$

其中 $m = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$

$M = max\{f(x) : x \in [a, b]\}$

7.$f(x), g(x)$ 是 E 上的函数，$\forall C \in \mathbb{R}$ 有 $\{x : f(x) > c\} \cup \{x : g(x) > c\}$

8.$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一列函数，$\forall c \in \mathbb{R}$

(1)$\{x : sup f_n(x) \leq c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} x : f_n(x) \leq c$

(2)$\{x : sup f_n(x) > c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} x : f_n(x) > c$

9. 有限覆盖原理：$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 则存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, s.t. [a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_{\lambda_i}$

10.(闭区间套原理)$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一 $\alpha \in \mathbb{R}, s.t. \aleph \in [a_n, b_n]$ 对所有的 n 都成立

$\{\alpha\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

11.$(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

12.f 是 E 上的函数 $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$

命题中的存在和任意，用集合来写应当这么写

$\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : 存在\lambda \in \Lambda, 使x \in A_\lambda\}$

$\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : 任意\lambda \in \Lambda, 有x \in A_\lambda\}$

例子：$f_n(x)$ 定义在 E 上的函数列，若 $x \in E, \{f_n x\}$ 有界

即存在 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M$

$\bigcup\limits_{M \in \mathbb{R}^+} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) \leq M\}$

同理使得 $\{f_n(x)\}$ 无界的点：

$(\bigcup\limits_{M \in \mathbb{R}^+} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) \leq M\})^c$

由 De Moegan 得到：

$\bigcap\limits_{M \in \mathbb{R}^+} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) > M\}$

例子：$(\epsilon - \delta$ 语言)

$\{f_n(x)\}$ 为 E 上的函数列,x 使 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 0 的点。

即：$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, 有, |f_n(x)| < \epsilon$

$\bigcap\limits_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n \geq N} |f_n(x)| < \epsilon$

1.3 集合列的上下极限

这个有两种理解方式，一种是周民强的实变函数中写到的从单调集合引出的一般集合上下极限的定义。

另一种是现在老师们讲的从数列的上下极限类比的推理到集合列的上下极限。

都是很好的思路，这个坑等我抽出一长段时间再来开。

1.4　基数

基数是用来度量集合大小的。

一个有趣的例子：如果我有三个苹果，我是如何知道这是“三”个苹果的？

掰着手指头去数，一个苹果对应一个手指头。

按数学的语言来讲，就是将苹果与手指头建立一个一一映射。

定义 1.4.1. *对等: 如何存在从 A 到 B 的一一映射，我们就称 A 与 B 对等，认为 $A\sim B$。当然，规定 $\varnothing \sim \varnothing$*

对等关系是等价关系。根据拓扑学的知识，这是显然的。

也就是说：“数量”相等的元素的集合都对等。

但是元素个数在有限个的时候可以说可数，如果元素个数为无穷的话，数量似乎就不太合理了。

定义 1.4.2. *有限集：与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等的集合称为有限集。当然，规定 $\varnothing$ 为有限集。*

定义 1.4.3. *无限集：不是有限集的都为无限集。*

值得注意的是，一个集合的子集是可以和该集合本身对等的，在无限集当中，总会出现一些有限的时候觉得匪夷所思的现象。

无限集中存在一个真子集与它本身对等。

例 1.4.4. *$(0, 1) \sim \mathbb{R}$, 事实上可以找到一个映射使之一一对应 $x \mapsto tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$, 再做推广，每个区间都可以和 $\mathbb{R}$ 对等。*

定义 1.4.5. *基数：*

1. *$A \sim B$, 则称 A 与 B 有相同的基数，记为 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$*

对于基数的关系, 可以有大于等于小于的关系.

定理 1.4.6. *Cantor Bernstein* 定理 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}} \leq \bar{\bar{A}}$, 则 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$

解释:A 与 B 的一个子集有双射,B 与 A 的一个子集也有双射

应用: 其实想建立集合之间的双射, 有的时候确实是个挺难的事情.

比如建立 (0,1) 和 (0,1] 之间的双射

建立 $(0,1) \mapsto (0,1) \subset (0,1], (0,1] \mapsto (0, \frac{1}{2}] \subset (0,1)$

得到两区间对等

事实上,A 与 B 的一个子集有双射,B 与 A 的一个子集也有双射这句话就相当于 A 到 B 有一个单射,B 到 A 有一个单射.

当然事实上也可以改成,A 到 B 有一个单射,A 到 B 有一个满射.

定义 1.4.7. 可数集合 与正整数对等的集合被称为可数集合

定理 1.4.8. 可数集合是无限集合

定理 1.4.9. 任何无限集合里都至少包含一个可数子集 *(*事实上, 可数集是”最小”的无限集*)*

可用数学归纳法进行证明, 设 M 为无限集.

可从中取出一个元素 e_1

假设可以取到互不相同的元素 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$

由于 M 是无限集, 故 $M - \{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 非空, 如果是空集, 那么 M 就与 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 相等, 这与无限集矛盾

于是可以任取一个元素 e_n

显然 $e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n$ 均不相同, 按此方式可取出

$e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n, \cdots$

综上可以取出 M 的一个可数子集.

定理 1.4.10. 可数集的任何无限子集仍是可数集, 可数集的有限子集是有限集.

思路: 在可数集中取出一个无限集, 在无限集中取出一个可数集, 利用 bernstein 定理, 得到两个可数集和一个无限集都对等, 因此得到该无限集也是可数集.

定义 1.4.11. 至多可数集 有限集合可数集统称为至多可数集, 也就是说, 与正整数集合的子集对等的集合是至多可数集.

定理 1.4.12. 至多可数个至多可数集的并仍是至多可数集

以最难的可数个可数集的并能使至多可数集为例

$$\begin{array}{cccc} A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ A_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

按斜对角线去排列

推论 1.4.13. $\mathbb{Q}$ 是可数集合

同上

定理 1.4.14. 有限个至多可数集的直积是至多可数集

不证明了, 数学归纳法.

定义 1.4.15. 不可数集 不是可数集的无限集称作不可数集合.

事实:$\mathbb{R}$ 与 $2^{\mathbb{N}}$ 对等

定理 1.4.16. $\mathbb{R}$ 是不可数集合

能用的工具太少了, 还是用反证法吧.
已知 $\mathbb{R}$ 与 $(0,1)$ 对等
假设 (0,1) 可数

$$
\begin{aligned}
a^{(1)} &= 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots \\
a^{(2)} &= 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots \\
&\vdots \\
a^{(n)} &= 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

想构造一个小数, 使得这个小数和这些小数都不一样.

第一位和 $a^{(1)}$ 不一样

第二位和 $a^{(2)}$ 不一样

依次类推, 就能得到一个不一样的小数.

$$
a_n = \begin{cases} 2, & a_n^{(n)} = 1 \\ 1, & a_n^{(n)} \neq 1 \end{cases}
$$

之后 $a = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 与所有的列出来的小数都不一样

因此推得矛盾

我们一般用 c 表示 $\mathbb{R}$ 的基数, 称为连续基数

用 $\aleph$ 或者 $\aleph$ 代表 $\mathbb{Z}^+$ 的基数

显然 $c > \aleph$

定理 1.4.17. $\{A_n\} : n \in \mathbb{Z}$ 互不相交,$\bar{\bar{A}}_n = c, n = 1, 2, 3\cdots$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} = c$

思路 $\{A_n\} \sim [n, n+1)$

定理 1.4.18. $\{A_n\} : n \in \mathbb{Z}, \bar{\bar{A}}_n = c, n = 1, 2, 3\cdots$, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} = c$

不证明了

推论 1.4.19. $\{B_n : n \in \mathbb{Z}\}, B_n = \{0, 1\}, n = 1, 2, 3\cdots, \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n = c$

定理 1.4.20. $\mathbb{R}^n$ 的基数为 c

推论 1.4.21. $\mathbb{C}$ 的基数为 c

推论 1.4.22. c 个基数为 c 的集合的并的基数为 c

事实上, 可以用可数个集合运算来代替不可数个集合列.

第二章　欧式空间

2.1　度量空间

一般的拓扑空间, 即定义一个在某空间上的拓扑即可.

并没有距离的概念.

如果我们加上距离的概念, 就变成了度量空间.

事实上, 距离, 也被称为度量是有很多种的.

我们常见的就是欧氏度量

定义 2.1.1. *度量空间 X 是一个集合,$d : X \times X \to \mathbb{R}$, 满足*

1. *非负性 $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$*
2. *对称性 $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$*
3. *三角不等式,$\forall x, y, z \in X, d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$*

则称 (X, d) 为度量空间

定义 2.1.2. *欧式空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 其中 $d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^n}$*

啊, 抱歉我实在是写不下去了, 这个基本上就是把我在拓扑里学的再列一遍.

2.2　聚点, 内点, 边界点

定义 2.2.1. 内点 $\exists P_0$ 的一个 $\delta-$ 邻域 $U(P_0,\delta), s.t., U(P_0,\delta)\subset E$

定义 2.2.2. 外点 $\exists P_0$ 的一个 $\delta-$ 邻域 $U(P_0,\delta), s.t., U(P_0,\delta)\subset E^c$

定义 2.2.3. 边界点 $\forall P_0$ 的一个 $\delta-$ 邻域 $U(P_n,\delta), U(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing, U(P_0,\delta)\cap E^c\neq\varnothing$

注 2.2.1. P_0 是 E 的外点 $\Leftrightarrow$ P_0 是 E^c 的外点

定义 2.2.4. 开核 E 中全体内点的集合称为 E 的开核, 记为 $\mathring{E}$,

但是我怎么觉得我学的是叫做 E 的内部呢?

定义 2.2.5. 边界点 E 中全体边界点的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E

定义 2.2.6. 聚点 P_0 的任何一个邻域中至少有一个属于 E 而异于 P_0 的点

定义 2.2.7. 孤立点 存在 P_0 的某个邻域, 其中只有一个 E 中的点且为 P_0

注 2.2.2. E 的边界点包括聚点和孤立点

定义 2.2.8. 导集 聚点组成的集合, 记为 E'

定义 2.2.9. 闭包 记为 $\bar{E}=E\cup E'$

定理 2.2.10. 聚点的等价定义

- P_0 是 E 的聚点
- P_0 的任一邻域内含有无穷多个属于 E 的点
- 存在 E 中互异的点所成的点列 $\{P_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=P_0$

证明就算了, 太长了.

定理 2.2.11.
- $(\mathring{E})^c=\bar{E}^c$

- $(\bar{E})^c = (\mathring{E^c})$
- $(A \cup B)' = A' \cup B'$
- $E \neq \varnothing, E \neq \mathbb{R}^n$, 则 $\partial E \neq \varnothing$
- $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界无限集合, 则 E 至少有一个聚点

2.3 开集与闭集

定义 2.3.1. 开集 $\forall x \in E, x$ 是内点, 则称 E 是开集

定义 2.3.2. 闭集 x 是 E 的聚点,$x \in E$, 则称 E 是闭集

在 $\mathbb{R}^n$ 中,$\mathbb{R}^n$ 和 $\varnothing$ 既是开集又是闭集

定理 2.3.3.
- E 是开集 $\Leftrightarrow E = \mathring{E}$, 特别地,$\mathring{E}$ 是开集
- E 是闭集 $\Leftrightarrow E = \bar{E}$, 特别地,$\bar{E}$ 是闭集

注 2.3.1.
- $\mathring{E} \subset E, \mathring{E}$ 是开集
- $\mathring{E} = \bigcup G, G$ 为 E 中开集, 也就是说 $\mathring{E}$ 是包含与 E 的最大开集, 自然 $\bar{E}$ 是包含 E 的最小闭集
-

定理 2.3.4. E 是开 *(闭)* 集 $\Rightarrow E^c$ 是闭 *(开)* 集

也就是说, 定义了开集也就可以定义闭集.

定理 2.3.5.
- 任意多个开集的并仍是开集
- 有限多个开集的交仍是开集
- 任意多个闭集的交仍是闭集

- 有限多个闭集的并仍是闭集

定理 2.3.6. 分离闭集 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集,$F_1 \cap F_2 = \varnothing$ 则存在 $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$

定义 2.3.7. 紧集 如果 $M \subset \mathbb{R}^n$ 的任一开覆盖 (开集覆盖) 总有有限子覆盖, 则称 M 为紧集.

定理 2.3.8. 在 $\mathbb{R}$ 中,F 是有界闭集, 则 F 是紧集

引理 2.3.9. 紧集的闭子集仍是紧集.

定义 2.3.10.
- 若 $E \subset E'$, 则称 E 是自密集, 即 E 没有孤立点.
- 若 $E = E'$, 则称 E 是完备集

2.4　直线上开集闭集完备集的构造

以下在一维实直线上讨论

开区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ 是开集

任意个开区间的并仍是开集, 有限个开区间的交仍是开集

引理 2.4.1. 直线上不相交的区间的集合是至多可数个的.

定义 2.4.2. 构成开集 设 G 是直线上的构成开集, 如果 $(\alpha, \beta) \subset G$, 而且端点 α, β 不属于 G, 则称 (α, β) 是 G 的构成区间

定理 2.4.3. 开集构造定理 直线上的任一一个非空开集可以表示成至多可数个互不相交的构成开集的并.

实不相瞒! 高某人第一次看到这个定理的时候, 就觉得它很直观!

定义 2.4.4. 余区间 设 A 是 $\mathbb{R}^1$ 上的闭集, 称 A 的余集构成的区间为 A 的余区间或者临接区间

定理 2.4.5. 直线上的闭集, 或者是全直线, 或者是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间.

2.5 Cantor 三分集

构造过程:[0,1] 闭区间三等分, 将中间的开区间挖掉, 对另外两段重复这个过程, 即可得到 Cantor 三分集

性质 2.5.1.
- *Cantor 三分集是完备集, 因为是闭集 (挖去的至多可数个互不相交的开区间), 并且是自密的, 尽管看上去并不是.*
- *Cantor 三分集没有内点, 即它是无处稠密的, 即它是疏朗集*
- *Cantor 三分集是有具有连续基数的*
- *Cantor 三分集的"长度"为 0*

第三章　测度理论

3.1　集合的" 长度"

对于如何度量集合的长度, 直观上来看有的集合似乎是很容易的, 比如一维直线的区间.

但我们需要有一个统一的概念.

如同其他良好定义一样, 我们希望长度具有以下良好的性质:

1. 非负性
2. 有限可加性 (无穷可加性)
3. 正则性

如何测量?

如同我们测量一个人的身高一样, 如果没有精确的测量工具, 比如我现在只有一个 10cm 的尺子. 那么度量我的身高, 就会是 17 个尺子多一点.

之后我又拿过来一个 9cm 的尺子, 那么我就会是 19 个尺子多一点.

之后我逐渐拿越来越短的尺子来量我自己, 那么最后的长度会和我的身高越来越接近.

这种 (17 个多一点,19 个多一点) 的度量方式称为不足

这种 (18 个少一点,20 个少一点) 的度量方式称为有余

前者引申出的为内测度, 后者引申为外测度

当内测度等于外测度的时候, 就得到了一个良好的测度概念.

定义 3.1.1. 外测度 $E \subset \mathbb{R}^m, E$ 的外测度 $m*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E\}$

例 3.1.2. $m*(\varnothing) = 0$

例 3.1.3. $\mathbb{R}$ 中的一个点 P,$m*(\{P\}) = 0$

思路: 取这个点周围一个 ϵ 邻域

例 3.1.4. $\mathbb{R}$ 中的有限个点 $P_1, P_2, \cdots, P_k, m^*(\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}) = 0$

思路: 取每个点周围一个 $\frac{\epsilon}{k}$ 邻域

例 3.1.5. $\mathbb{R}$ 中的可数个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots, m^*(\{P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots\}) = 0$

思路: 取每个点周围一个 $\frac{\epsilon}{2^i}$ 邻域

这些似乎都是常见的取法

3.2 外测度的基本性质

定理 3.2.1. *1.* $m^*(E) \geq 0, m^*(\varnothing) = 0$

2. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为可数个集合,$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

3. $A \subset B$ 则,$m^*(A) \leq m^*(B)$

定理 3.2.2. I 是区间 *(*开, 闭, 半开半闭*)*,$m^*(I) = |I|$

3.3 可测集的定义

直观的来看, 外测度等于内测度的时候, 该集合就是可测的.

定理 3.3.1. $\mathbb{R}^n$ 中,E 有界, 可测等价于任取 $\mathbb{R}^n$ 中的开区间 I,$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$

当然这个实际上并不好用, 因为开区间是很局限的概念, 实际上, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 上述定理与下面定理是等价的.

定理 3.3.2. 任取集合 T, 使得 $m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$

这就很舒服了

当然, 与如下定理也是等价的

定理 3.3.3. 任取 $A \subset E$, 任取 $B \subset E^c$

$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

定义 3.3.4. 卡氏条件 $E \subset \mathbb{R}^n$, 称 E 是勒贝格可测的, 如果任取集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ 都有

$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$

此时,E 的外测度称为 E 的测度, 记为 $m(E)$

3.4 可测集的运算

定理 3.4.1. S 可测 $\Leftrightarrow$ S^c 可测

定理 3.4.2. S_1, S_2 可测,$S_1 \cup S_2$ 可测

定理 3.4.3. S_1, S_2 是不相交的可测集, 任取集合 T

$$m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2)$$

推论 3.4.4. S_1, S_2 是不相交的可测集,$m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2)$

推论 3.4.5.

1. 有限个可测集之并仍是可测集.
2. 有限个可测集之交仍是可测集
3. S_1, S_2 可测, 则 $S_1 - S_2$ 可测

定理 3.4.6. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 互不相交的可测集, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集.

定理 3.4.7. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可测, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 可测.

推论 3.4.8. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可测, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 可测.

定理 3.4.9. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是递增可测集, 则 $m(\lim\limits_{i\to\infty} S_i) = \lim\limits_{i\to\infty} m(S_i)$

定理 3.4.10. $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是递减可测集, 则 $\lim\limits_{i\to\infty} S_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 可测 $m(\lim\limits_{i\to\infty} S_i) = \lim\limits_{i\to\infty} m(S_i)$

定义 3.4.11. σ 代数 Ω 是 X 的某些子集所构成的集合类, 满足:

1. X 在其中
2. 可数并下封闭
3. 取余集下封闭

则称 Ω 为 X 上的一个 σ 代数

定理 3.4.12. 可测集类是 $\mathbb{R}^n$ 上的 σ 代数

定义 3.4.13. $\mathbb{R}^n$ 上所有的开集生成的 σ 代数称为 *Borel*σ 代数, 其中的集合称为 *Borel* 集

事实上, 区间, 开集, 闭集都是 Borel 集.

对开集做可数交可以得到 G_δ 型集

对闭集做可数并可以得到 F_σ 型集

3.5　可测集类

如果区间是可测的

开集可以写成可数个区间的并, 故开集也是可测的

开集做可数并和余集的运算有限次, 开集生成的 σ 代数包含所有开集的 σ 代数中" 最小" 的.

开集做一次取余运算得到闭集, 闭集也是可测的

F_σ 集是可数个闭集之并是 Borel 集

G_δ 集是可数个开集之交是 Borel 集

所以只需要证明开集可测, 那么就可以得到一系列可测集合.

定理 3.5.1. *$\mathbb{R}^n$ 中的区间 (开, 闭, 半开半闭) 可测*

定理 3.5.2. *Borel 集都是可测集*

定理 3.5.3. *1. 零测集是可测集*

2. 零测集的任何子集都还是零测集

3. 至多可数个零测集的并仍然是零测集

定理 3.5.4. *如果 E 是可测集, 则有*

$m(E) = \inf\{m(G) : E \subset G, G\text{开集}\} = \sup\{m(K) : E \subset K, K\text{紧集}\}$

反过来, 当 E 时有界集时, 如果:

$m(E) = \inf\{m(G) : E \subset G, G\text{开集}\} = \sup\{m(K) : E \subset K, K\text{紧集}\}$

则 E 是可测集

引理 3.5.5. *E 是可测集*

1. $\forall \epsilon > 0, \exists$ 开集 $G, E \subset G$ 使得 $m(E - F) < \epsilon$

2. $\forall \epsilon > 0, \exists$ 闭集 $F, E \supset G$ 使得 $m(E - F) < \epsilon$

3.6 不可测集

在 $\mathbb{R}$ 中构造.

哎, 这残缺不全的知识真令我恼火, 这段减掉

第四章　可测函数

4.1　可测函数的定义

定义 4.1.1. 广义实值函数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

广义实值函数中感觉正确的运算都是允许的, 在此不再罗列.

定义 4.1.2. 可测函数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 可测, 如果 $\{x \in E : f(x) > a\} \triangleq E[f > a]$ 这是 $a \in \mathbb{R}$

定理 4.1.3. f 可测的充要条件

- $E[f \leq a]$ 可测
- $E[f \geq a]$ 可测
- $E[f < a]$ 可测

定理 4.1.4. 若 f 有限,$E[a \leq f < b]$ 可测,$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \Leftrightarrow f$ 可测

推论 4.1.5. $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 可测,$E[f = a]$ 可测

4.2　可测函数运算

定理 4.2.1. 若 $f, g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, 可测, 那么 $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ 可测

推论 4.2.2. f,g 都是 E 上的可测函数, 则 $E[f>g]$ 是可测集

定理 4.2.3. f 是 E 上的可测函数 $|f|$ 也是可测的

定理 4.2.4. $\{f_n(x)\}$ 是 E 上至多可数个可测函数,$\mu(x)=\inf f_n(x), \lambda(x)=\sup f_n(x)$ 仍在 E 上可测

连续函数无此性质, 可测是比连续更广的概念.

定义 4.2.5. $\underline{\lim} f_n(x)=\sup(\inf_{k\geq n} f_k(x))$

$\overline{\lim} f_n(x)=\inf(\sup_{k\geq n} f_k(x))$

定理 4.2.6. $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列可测函数, 则 $\underline{\lim} f_n(x), \overline{\lim} f_n(x)$ 仍可测, 特别地,$\lim f_n(x)$ 存在则可测

定义 4.2.7. 函数的正部和负部

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

$$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}=\begin{cases} -f(x) & f(x)\leq 0 \\ 0 & f(x)>0 \end{cases}$$

如果 f 在 E 上可测, 则 f^+, f^- 都可测

$f(x)=f^+(x)-f^-(x), |f(x)=f^+(x)+f^-(x)|$

4.3 简单函数

例 4.3.1. $\mathbb{R}^n$ 中可测集上常值函数是可测函数

例 4.3.2. $\mathbb{R}^n$ 中可测集 E 上的连续函数是可测函数

例 4.3.3. $[a,b]$ 上的单调函数是可测函数

例 4.3.4. $\mathbb{R}^n$ 中可测集 E 分成有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_s(E = \bigcup_{i=1}^s E_i, E_i, E_j$ 互不相交)

$f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

在 E_i 上都是常值函数

此时 f 称为简单函数

简单函数是可测函数

引理 4.3.5. *1. f 是可测集 E 上的可测函数,E_1 是 E 的可测子集,$f|_{E_1}$ 是 E_1 上的可测函数*

2. f 是可测集 $E_1, \cdots, E_s$ 的并集 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{s} E_i$ 上的函数,f 在 $E_i(i = 1, cdots, s)$ 上都可测则 f 在 E 上也可测

例 4.3.6 (0,1)**.** 上的 *Dirichlet* 函数是简单函数

定义 4.3.7. 非负简单函数 非负简单函数 $f(x) = c_i, x \in E_i, i = 1, \cdots, s$

$\int_E f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i m(E_i)$

定义 4.3.8. 一般可测函数 $f = f^+ - f^-$

定理 4.3.9. *1. $f(x)$ 在 E 上是非负可测, 则存在非负简单函数 $\{\phi_k(x), \forall x \in E, \phi_k(x) \leq \phi_{k+1}(x)\}, \lim\limits_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x)$*

2. $f(x)$ 在 E 上可测, 则有简单函数 $\{\phi_k(x)\}, \forall x \in E, \lim\limits_{k\to+\infty} \phi_k(x) = f(x)$, 特别的, 当 $f(x)$ 有界时, 则可以是一致收敛

4.4　可测函数列的收敛

定义 4.4.1. 函数列的逐点收敛 $\{f_k\}, f$ 是定义在 E 上的函数,$\forall x \in E, f_k(x) \to f(x), k \to \infty$ 则称 $\{f_k\}$ 是逐点收敛于 f

换成 $\epsilon - \delta$ 语言

$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |f_k(x) - f(x)| < \epsilon$

定义 4.4.2. 函数列的一致收敛 f_k, f 定义在 E 上的函数,$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall k \geq N, |f_k(x) - f(x)| < \epsilon$

一个等价条件 $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$

定义 4.4.3. 几乎处处 如果某个性质在去掉一个零测集之后成立, 我们就说它几乎处处成立

定理 4.4.4. *Egorov* 定理 $\{f_k\}, f$ 定义在 E 上的可测函数, 且几乎处处有限,$m(E) < \infty$, 若 $f_k(x) \to f(x), k \to \infty$ 在 E 上几乎处处成立.

$\forall \delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E, m(E_\delta) \leq \delta$, 使得 $\{f_k\}$ 在 $E - E_\delta$ 上一致收敛于 f

定义 4.4.5. 依测度收敛 $f, \{f_n\}$ 定义在 E 上的几乎处处有限的可测函数, 如果 $\forall \sigma > 0, \lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f - f_n|] \geq 0) = 0$ 则称 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 记为 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$

定理 4.4.6. $f_n(x) \Rightarrow f(x), f_n(x) \Rightarrow g(x)$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 E 上几乎处处成立

定理 4.4.7. 如果满足叶果罗夫定理条件, 即:

1. $\{f_n\}_{n\geq 1}, f$ 几乎处处有限的可测函数
2. $f_n \to f, n \to \infty$ 几乎处处于 E
3. $m(E) < \infty$

则 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$

定理 4.4.8. *Riesz* 定理 设在 E 上 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 则存在子列 $\{f_{n_s}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f

4.5　可测函数与连续函数

定理 4.5.1. *Luzin* 定理 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 几乎处处有限,$\forall \delta > 0$ 存在闭集 $F_\delta \subset E, s.t. m(E - F_\delta) < \delta$, *f(x)* 在 F_δ 上连续

第五章　勒贝格积分

5.1　非负简单函数勒贝格积分的性质

定义 5.1.1. 特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

那么简单函数就可以表示为:$f(x) = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \chi_{E_i}(x), c_i \geq 0$

可定义 f 在 E 上的勒贝格积分

$\int_E f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i m(E_i)$

$A \subset E$ 为可测子集

$f|_A(x) = c_i, \forall x \in A \cap E_i$

$\int_A f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \cdot m(A \cap E_i)$

例 5.1.2. A,B 是 E 的不相交的可测子集，则 $\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

例 5.1.3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 的一列可测子集,$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

则 $\int_E f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)dx$

例 5.1.4. 积分的线性 非负实数 α, β,

$\int_E(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$

定义 5.1.5. *f(x)* 是 E 上的非负可测函数,*f(x)* 在 E 上的勒贝格积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \sup\{\int_E \phi(x)dx, \phi(x)\text{是}E\text{上的非负简单函数}, \phi(x) \le f(x)\}$$

定理 5.1.6. $\phi(x), \psi(x)$ 是 E 上的非负简单函数,$\phi(x) \le \psi(x)$, 则 $\int_E \phi(x)dx \le \int_E \psi(x)dx$

5.2　非负可测函数勒贝格积分的性质

推论 5.2.1. *f(x),g(x)* 是在 E 上的非负可测函数,$f(x) \le g(x)$, 则 $\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$

定义 5.2.2. 如果 $\int_E f(x)dx < +\infty$, 则称 *f(x)* 在 E 上是勒贝格可积的.(*L*-可积)

定理 5.2.3. 如果 f 在 E 上勒贝格可测, 则 f 在 E 上是几乎处处有限的, 即 $m(E[f = +\infty]) = 0$

例 5.2.4. f 是非负简单函数,*A*,*B* 是 E 的不相交的可测子集

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$$

例 5.2.5. *f(x),g(x)* 是 E 上的非负可测函数,α, β 是非负实数, 则:

$$\int_E(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$$

引理 5.2.6. *Levi* 定理 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列非负可测函数, 当 $x \in E$, 对任一 n,$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

引理 5.2.7. *Faton* 引理 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的可测函数列,$\int_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$

值得注意的是该等号不总成立

性质 5.2.1. E 是零测集,f 是 E 上非负可测函数, 则 $\int_E f(x)dx = 0$

性质 5.2.2. f, g 是 E 上非负可测函数, 满足 $f \leq g$ 几乎处处于 E, 则 $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$

推论 5.2.8. f, g 是 E 上非负可测函数, 满足 $f = g$ 几乎处处于 E, 则 $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$

性质 5.2.3. f 是 E 上非负可测函数, 满足 $\int_E f(x)dx = 0$, 则 $f(x) = 0$ 几乎处处于 E

5.3　可测函数勒贝格积分的性质

定义 5.3.1. f 是可测集 E 上的可测函数, 当 $\int_E f^+(x)dx$ 与 $\int_E f^-(x)dx$ 至少有一个是有限时, 则称 f 在 E 上积分确定, 称 $\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$ 为 f 在 E 上的勒贝格积分, 记为 $\int_E f(x)dx$

当 $\int_E f^+(x)dx$ 与 $\int_E f^-(x)dx$ 都有限 *(即:*$\int_E f(x)dx$ 有限时*)*, 称 f 在 E 上是勒贝格可积的

定理 5.3.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集.

1. $E \neq \varnothing, m(E) = 0$ 则 E 上任意实函数 f 在 E 上 L 可积, 且 $\int_E f(x)dx = 0$
2. 若 f 是 E 上 L 可积的函数, 则 f 在 E 上几乎处处有限 $m(E(E[|f| = +\infty]) = 0)$
3. 设 f 在 E 上积分确定, 则 f 在 E 上任一可测子集 A 上也积分确定. 又若 $E = A \cup B, A, B$ 是不相交可测子集, 则 $\int_E f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

定理 5.3.3. 积分的可数可加性 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n, \{E_n\}$ 是不相交的可测子集, 设 f 在 E 上积分确定, 则:$\int_E f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx$

定理 5.3.4. $f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E)$

定理 5.3.5. 积分的绝对连续性 $f \in L(E)$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当可测子集 $A \subset E$ 满足 $m(A) < \delta$, 则 $|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx < \epsilon$

例 5.3.6. *f(x),g(x)* 是 E 上的可测函数,α, β 是非负实数, 则*:*

$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$

定理 5.3.7. 勒贝格控制收敛定理 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数,$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 几乎处处于 E

如果存在 E 上的非负勒贝格可积函数 F, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq F(x)$ 几乎处处于 E, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$

定理 5.3.8. $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列 L 可积函数, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)|dx$ 收敛则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 且 $\int_E (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx$