概率与测度

Infty

二〇二四年一月一日

文章导航

前言

还不知道怎么写

1 集合论基础

定义 1.1

一个给定的集合, 是指具有某种性质的事务的全体. 组成集合的每个事物称为该集合的元素

1. 集合 $\{a, b, c\}$.
2. 集合 $\{x \in \mathbb{R} : 0 < \sin x \leq \sqrt{2}/2\} =: D$. 显然，$\pi/6 \in D$.

定义 1.2

设 A, B 两个集合。

1. 集合 A 包含集合 B，记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$，是指任意的 $x \in B$ 必有 $x \in A$.
2. 集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$，指的是 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

例题 1.1

设 A, B, C 为三个集合。关系“$\subset$”具有

1. 自反性：$A \subset A$;
2. 传递性：若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$;
3. 反对称性：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A = B$.

(1)，(2)，(3) 条件下，集合关系“$\subset$”成为一个偏序集.

定义 1.3

设 A, B 为给定的两个集合

1. $A \cup B := \{x : x \in A \text{或} x \in B\}$，表示 A 和 B 的并集;
2. $A \cap B := \{x : x \in A \text{且} x \in B\}$，表示 A 和 B 的交集;
3. $A \setminus B := \{x : x \in A \text{且} x \notin B\}$，表示 A 中但不在 B 中的元素，称为 A 相对 B 的差集. 特别的, 当 $B \subset A$ 时,$A \backslash B$ 也称为 B 对 A 的余集. 若只考虑某个固定集合 Ω 的子集时,$\Omega \backslash B = \{x \in \Omega : x \notin B\}$ 称为 B 的余集, 记为 B^c
4. $A \Delta B := \{x : x \in A \text{或} x \in B, \text{但} x \notin A \cap B\}$，表示 A 和 B 的对称差。等价上，$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。

对于任何一族集合，定义

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha := \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{使} x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha := \{x : \forall\alpha\in\Lambda, x\in A_\alpha\}$$

例 1.1

设 $A_k = (0, 1+\frac{1}{k}), B_k = (0, 1-\frac{1}{k}), k\in\mathbb{N}$（自然数集合），则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = (0,1], \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = (0,1).$$

定理 1.1: (容斥原理, 交换律, 结合律, 分配律)

1. $A\cup A = A, A\cap A = A$;
2. $A\cup B = B\cup A, A\cap B = B\cap A$;
3. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;
4. $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$.

证明：练习!

定理 1.2: (集合的运算的性质 Exercise!)

1. $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C)$;
2. $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$;
3. 若 $A, B\subseteq C$, 则 $A\setminus B = A\cap B^C$;
4. 对 Ω 的任意子集 A，有 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的一族子集，则

$$\Omega\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(\Omega\setminus A_\alpha), \quad \Omega\setminus\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(\Omega\setminus A_\alpha).$$

性质 4 称为 de Morgan 律.

例题 1.2

1. 对任意一族序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2,$$

则 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 两两不交，即

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k = \bigcup_{k=1}^{m} B_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

（提示：使用归纳法）

2. 对任意 A, B, N 的集合，满足 $N \subset B$，则

$$A \cup N = (A \setminus B)\Delta(B \cap (A \cup N)),$$

$$A\Delta N = (A \setminus B) \cup (B \cap (A \cap N)).$$

定义 1.4: 集合列的极限

设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为一族集合。定义

$$\lim_{k\to\infty} A_k := \{x : x \in A_k, 对于所有k \in \mathbb{N}, 存在n \geq k使x \in A_n\}$$

即为集合序列的上极限。同样地，

$$\liminf_{k\to\infty} A_k := \{x : x \notin A_k, 对于所有k \in \mathbb{N}, 存在n \geq k使x \notin A_n\}$$

即为集合序列的下极限。

对于集合序列 $\{A_k\}$ 的上极限与下极限有

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} A_m,$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} A_m,$$

若

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k,$$

则称 $\{A_k\}$ 的极限存在，并把上式中的共同集合称为此集序列的极限，记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

如果 $A_k \subseteq A_{k+1}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$, 即 $\{A_k\}$ 是单调递增的, 则 $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; 如果 $A_k \supseteq A_{k+1}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$，即 $\{A_k\}$ 是单调递减的，则 $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

定理 1.3: (极限的性质)

设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为一族集合，则有性质：

1. $\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$,$\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$，显然,$\cap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k\subset\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k\subset\cup_{n=1}^{\infty}A_n$
2. 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 单调, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$ 存在, 且

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\begin{cases}\cup_{k=1}^{\infty}A_k, 若 A_k\uparrow\\ \cap_{k=1}^{\infty}A_k, 若 A_k\downarrow\end{cases}$$

例 1.2

设当 k 是偶数时，$A_k=B$，设当 k 是奇数时,$A_k=C$，则

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=B\cup C,$$

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=B\cap C.$$

定义 1.5

设 Ω 是一给定的非空集合，$A\subset\Omega$，则 A 的特征函数 $\mathbb{I}_A(x)$ 定义为

$$\mathbb{I}_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

为 A 的示性函数。

定理 1.4

给定非空集 Ω. 设下述出现的集合都是 Ω 的子集

1. $A=\Omega\Leftrightarrow\mathbb{I}_A(x)=1x\in\Omega$； $A=\emptyset\Leftrightarrow\mathbb{I}_A(x)=0x\in\Omega$；
2. $A\subset B\Leftrightarrow\mathbb{I}_A(x)\le\mathbb{I}_B(x)x\in\Omega$
3. 对于任意 $x\in\Omega$，有 $\mathbb{I}_{A\cap B}(x)=\mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B(x)$ 以及 $\mathbb{I}_{A\cup B}(x)=\mathbb{I}_A(x)+\mathbb{I}_B(x)-\mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B(x)$。
4. $\mathbb{I}_{\bigcup_\alpha A_\alpha}=\max_\alpha\mathbb{I}_{A_\alpha}$， $\mathbb{I}_{\bigcap_\alpha A_\alpha}=\min_\alpha\mathbb{I}_{A_\alpha}$；
5. $\mathbb{I}_{\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{I}_{A_n}$， $\mathbb{I}_{\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{I}_{A_n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{I}_{A_n}$ 存在, 并且当极限存在时, 有 $\mathbb{I}_{\limsup_{n\to\infty}A_n}=\lim_{n\to\infty}\mathbb{I}_{A_n}$

例题 1.3

设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列两两不交的集合, 证明:

$$\mathbb{I}_{\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}_{A_n}$$

定义 1.6

设 A，B,C 是三个非空集合.

A 到 B 的映射指的是一个对应法则，记为 $f:A\to B$ 或 $f:A\xrightarrow{f}B$，在此法则下，任意的 $x\in A$，存在唯一的 $y\in B$，使 $f(x)=y$. 称 A 为 f 的定义域，$f(A)$ 为 f 的值域.

对 $U\subset A$，称 $f(U)=\{y\in B:\exists x\in U使f(x)=y\}$ 为 U 在 f 下的像.

若 $f(A)=0$，则称 f 为满射；若 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称 f 是单射；若 f 既是单射又是满射，则称 f 是 A 到 B 上的一一映射（或双射）.

若 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射、则称 $g\circ f$ 为 A 到 C 的映射、称为 g 与 f 的复合映射.

若 f 是 A 到 B 的映射，则对任意的 $V\subset B$，定义 $f^{-1}(V)=\{x\in A:f(x)\in V\}$ 并称 $f^{-1}(V)$ 为 V 在 f 下的逆像.

定理 1.5

设 Λ 是一个指标集,$f:A\to B$ 为一映射,A_1,A_2 为 A 的子集,$B_\alpha,\alpha\in\Lambda$, 为 B 的子集. 以下结论成立

1. $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$.
2. $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$.
3. $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha)$.
5. $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha)$.
6. $f^{-1}(f(E))\supset E$, 其中 $E\subset A$.
7. $f(f^{-1}(F))\subset F$, 其中 $F\subset B$.

练习：证明:(6) 中等号成立 $\Leftrightarrow f$ 为单射,(7) 中等号成立 $\Leftrightarrow f$ 为满射, 并分别举例说明 (6),(7) 中的包含关系可以是严格的

定义 1.7

设 $f:A\to B$ 为单射, 则可以定义 $f(A)$ 到 A 的逆映射 f^{-1}, 对任意 $y\in f(A)$, 有 $f(x)=y$, 则定义 $f^{-1}(y)=x$.

定理 1.6

设 $f:A\to B$ 为单射, 则对任意 $V\subset B$, $f^{-1}(V)$ 有两个含义:

1. V 在映射 f 下的逆像 $f^{-1}(V)=\{x\in A: f(x)\in V\}$,
2. V 在映射 f^{-1} 下的像 $f^{-1}(V)=\{f^{-1}(V)\in A: y\in V\}$.

若 $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, 则 (1),(2) 两个含义是一致的

定义 1.8: 笛卡尔积

设 $n\in\mathbb{N}$ 以及集合 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 定义

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n): a_k\in A_k, k=1,2,\ldots,n\}.$$

特别地，$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$; 通常，我们记 $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, 其中 $m,n\in\mathbb{N}$.

一般地，若 T 是指标集，$A_t, t\in T$ 是给定的集合, 则定义:

$$\prod_{t\in T}A_t=\{\{x_t: t\in T\}: x_t\in A_t, t\in T\}.$$

事实上，

$$\prod_{t\in T}A_t=\{x: x: T\to\bigcup_{t\in T}A_t, \text{满足} x(t)\in A_t, t\in T\}.$$

特别地，若 $A_t=A$, $t\in T$，则通常记 $\prod_{t\in T}A_t=A^T$，即 T 到 A 全体映射所组成的集合.

定义 1.9

设 A,B 是非空集合。若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 对等，记为 $A\sim B$. 若 A,B 均为空集, 则约定 $A\sim B$

例 1.3

自然数集与其偶数子集等势：

$$\mathbb{N} \sim 8\mathbb{N} := \{8n : n \in \mathbb{N}\}.$$

对等关系 $\sim$ 具有

1. 自反性：对任意集合 A，$A \sim A$;
2. 传递性：对任意集合 A, B, C, 若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$;
3. 对称性：对任意集合 A, B, 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$。

因此，对等关系是一个等价关系

定义 1.10

若两个集合对等，则称它们具有相同的势。集合 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$

任一有限集是可数集。若 A 是有限集，则 $\overline{\overline{A}} = \#(A)$，其中，$\#(A)$ 表示集合 A 中元素个数.'

例 1.4

区间 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$ 构造函数 $f(x) = \frac{1}{1-x^2} x \in (-1, 1)$
$(-1, 1) \sim [-1, 1]$

定理 1.7: (Cantor–Bernstein 定理)

设 A, B 两个集合。若存在集合 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ 使得 $A_1 \sim B$ 且 $A \sim B_1$，则 $A \sim B$。

推论 1.1

设 A, B, C 是三个集合。若 $A \subset B \subset C$ 且 $A \sim C$，则 $A \sim B \sim C$。

例 1.5

$\mathbb{R}$ 中的任何非空有限区间及无限区间都与 $\mathbb{R}$ 对等, 即 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$, 有

$$(x, y) \sim (x, y] \sim [x, y] \sim (-\infty, y] \sim (x, \infty) \sim \mathbb{R}.$$

定义 1.11

设 A 为一个集合, 若 $A \sim \mathbb{N}$，则称 A 为可数集 (或可列集)。可数集的势记为 $\aleph_0$。
例如，$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 都是可数集。

定理 1.8

任何无限集合必包含一个可数集。

定理 1.9

1. 可数集的子集至多是可数集。
2. 若 A 是可数集，B 是有限集，则 $A \cup B$ 是可数集。

定理 1.10

设 A_i, $i = 1, 2, \ldots$, 都是可数集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$, $n \in \mathbb{N}$ 及 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ 都是可数集。

定理 1.11

若 $A_i, i = 1, 2, \ldots$, 是可数集，则对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

是可数集。当 $A_1 = \cdots = A_n = A$ 时，记 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 为 A^n.

例 1.6

全体整系数多项式组成的集合为可数集.

例 1.7

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是单调函数，则它的全体间断点组成的集合至多可数.

命题 1.1

$\mathbb{R}$ 中的每一个开集都是可数多个互不交的开区间之并.

定理 1.12

区间 $[0, 1]$ 是不可数集。($[0, 1]$ 的势记作 $\aleph$)

定理 1.13

全体实数列作成的集合 (记为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) 的势为 $\aleph$

定理 1.14

全体无限二进制小数组成的集合是 $(0,1]$. 因此, 集合

$$X := \{(x_1, x_2, \ldots) : x_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}\}$$

的势为 $\aleph$

任给 $x \in \mathbb{R}$，规定 $-\infty < x < +\infty$ 且 $\pm\infty$ 与 x 的运算规则如下：

1. $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$，对任意 $x \in \mathbb{R}$；
2. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x$ 定义为
$$\begin{cases} +\infty, & \text{如果} x > 0, \\ 0, & \text{如果} x = 0, \\ -\infty, & \text{如果} x < 0; \end{cases}$$
3. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$；
4. $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$，$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$，对任意 $x \in \mathbb{R}$，$\frac{x}{\pm\infty} = 0$；
5. 以下运算无意义:$(\pm\infty) + (\mp\infty)$，$\frac{\pm\infty}{0}$，$x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$，不做定义。

定义

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

并称其为广义实数集

$\overline{\mathbb{R}}$ 中的每一子集 A 既有最小上界，即上确界并记为 $\sup A$，也有最大下界，即下确界并记为 $\inf A$.$\mathbb{R}$ 中的每一序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 既有上极限也有下极限，即

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} (\sup_{n\geq k} x_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\inf_{n\geq k} x_n)$$

类似地, 我们可以定义函数 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ 的上下极限, 即 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} (\sup_{0<|x-x_0|<\delta} f(x))$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} (\inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x))$$

练习: 回忆上下极限的基本性质

2 半集代数, 集代数,σ 代数

给定非空集合 Ω, 令 $\mathcal{P}(\Omega)$ 为 Ω 的所有子集组成的集类 (或集族)

定义 2.1: 半集代数

设 $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. 若

(a) $\Omega \in \mathcal{S}, \emptyset \in \mathcal{S}$,

(b) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$, （有限交运算封闭）

(c) $A, A_1 \in \mathcal{S}, A_1 \subset A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ 且 $\exists\{A_2, \ldots, A_n\} \subset S$, 使 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两不交, 且 $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,

则 $\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数.

注: (1) 显然, $\mathcal{P}(\Omega)$ 是 Ω 的半集代数。故 Ω 的半集代数总存在 (2) 若 $A \in \mathcal{S}$, 则由 $\emptyset \subset \mathcal{S}$ 及 $\emptyset \subset A$ 知, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 及 $\mathcal{S}$ 中两两不交的集合 $A_1, \ldots, A_m$, 使 $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$。

引理 2.1

设 $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. $\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数,$\Leftrightarrow$ (a), (b) 及以下 (c') 成立。$(c')A \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ 及 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ 两两不交, 使 $A^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

注意, 当 $A \in \mathcal{S}$ 时, 未必有 $A^c \in \mathcal{S}$

例 2.1

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. 若设 $F_{k,l} = \{n \in \mathbb{N} : k \leq n < l\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 且 $k \leq l$, 则

$$\mathcal{S} := \{F_{k,l} : k \leq l, k \in N, l \in N \cup \{\infty\}\}$$

为 $\mathbb{N}$ 的半集代数.

例 2.2

若令

$$\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{S}_3 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

则 $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \{\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个半集代数.

例 2.3

设 $n \in \mathbb{N}$. 若令

$$\mathcal{S}^n = \{(a,b] \subset \mathbb{R}^n : a = (a_1,\ldots,a_n), b = (b_1,\ldots,b_n), -\infty \le a_k \le b_k \le \infty, k = 1,\ldots,n\},$$

则 $\mathcal{S}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个半集代数.

例题 2.1

1. (i) 设 $\mathcal{S} \subset \Omega$ 的半集代数。证明：$\forall A \in \mathcal{S}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 且存在两两不交的集合 $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{S}$, 使 $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

   (ii) 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, 满足：(a) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{C}$; (b) $\forall A, B \in \mathcal{C}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{C}$; (c) $\forall A \in \mathcal{C}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 且存在两两不交的集合 $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{C}$, 使 $A = \bigcup_{k=1}^n B_k$。请问 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的半集代数吗?

2. 令 $n \in \mathbb{N}$. 设 Ω 是含有 n 个元素的集合。不妨设

$$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

令

$$\mathcal{S} = \{\{x_k\} : k = 1,2,\ldots,n\} \cup \{\Omega, \emptyset\}.$$

证明：$\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数.

定义 2.2: 集代数

设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$。若

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$, （有限交、并运算封闭）
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, （余运算封闭）

则称 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的集代数

易知,

- $\mathcal{P}(\Omega)$ 是 Ω 的集代数 (故 Ω 的集代数总存在)
- $\{\Omega, \emptyset\}$ 是 Ω 的集代数;
- 对于 $A \subset \Omega$, 则 $\{\Omega, \emptyset, A, \Omega \backslash A\}$ 是 Ω 的集代数。

引理 2.2

设 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的一个子集族。$\mathcal{A}$ 是 Ω 的集代数当且仅当下列条件 (i), (ii), (iii) 之一成立。

(i) 定义中的 (1), (3), 及 (2'): $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

(ii) 定义中的 (1), (3), 及 (2"): $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

(iii) 定义中的 (1), 及 (3'): $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. (差运算封闭)

例 2.4

设 Ω 是任一非空集合. 若令

$$\mathcal{A} := \{B \subset \Omega : B \text{ 或} B^c \text{ 是有限集}\},$$

则 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的集代数.

注意: 此例中, 当 Ω 是无限集时, $\mathcal{A}$ 不是 Ω 的 σ 代数

例题 2.2

(Exercise!) 请出集合 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ 的所有集代数.

引理 2.3

设 $\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数。若令

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \text{ 且两两不交}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

则 $\mathcal{A}$ 也是 $\mathcal{S}$ 的最小集代数, 即任一包含 $\mathcal{S}$ 的集代数必包含 $\mathcal{A}$. 称此 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{S}$ 生成的集代数, 通常记为 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, 且

$$\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

例 2.5

设 $\Omega = [0, \infty)$, $\mathcal{S} = \{[x, y) : 0 \le x \le y \le \infty\}$. 易知, $\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数且 $\mathcal{S}$ 不是 Ω 的集代数。若令

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k) : 0 \le x_1 \le y_1 \le x_2 \le y_2 \le \ldots \le x_n \le y_n, n \in \mathbb{N} \right\},$$

则 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的集代数, 且 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$。(Hint: 利用引理 3.)

例题 2.3

1. 除例 5 外，你能给出其它半集代数但非集代数的例子吗?
2. (前面引理 3 中生成集代数的构造可看作是“由外向内”的. 能否”由内向外”来构造生成集代数呢?)
   设 $\mathcal{C}$ 是集合 Ω 的子集类. 若令

$$\mathcal{C}_1 := \{A : A \in C\text{或}A^c \in \mathcal{C}\},$$

$$\mathcal{C}_2 := \left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : A_k \in \mathcal{C}_1, k = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\mathcal{C}' := \left\{\bigcup_{k=1}^{m} B_k : B_k \in \mathcal{C}_2, k = 1, \ldots, m, \text{两两不交}m \in \mathbb{N}\right\},$$

   则 $\tilde{C} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, 即 $\tilde{\mathcal{C}}$ 是由 $\mathcal{C}$ 生成的集代数.

定义 2.3

设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一个子集族。若

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, （余运算封闭）
3. $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, （可数并运算封闭）

则 F 是 Ω 的 σ 代数.

例 2.6

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ 是 Ω 的 σ 代数, 从而 Ω 的 σ 代数总存在, 并且 $\mathcal{P}(\Omega)$ 包含任何 Ω 的 σ 代数
2. $\{\Omega, \emptyset\}$ 是 Ω 的 σ 代数
3. 若 $A \subset \Omega$, 则 $\{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ 是 Ω 的 σ 代数
4. 若 $A \subseteq \Omega$ 且 $A \neq \emptyset$, 则 $\{\Omega, \emptyset, A\}$ 不是 Ω 的 σ 代数

引理 2.4

设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一个子集族. $\mathcal{F}$ 是 Ω 的 σ 代数的充要条件是

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, （可数交运算封闭）

引理 2.5

任意一族 Ω 的 σ 代数的交集，即

$$\bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}\text{且}\mathcal{F}\text{是}\Omega\text{的}\sigma\text{代数}} \mathcal{E}$$

也是 Ω 的 σ 代数

引理 2.6

设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集族. 存在唯一的 Ω 的 $\sigma-$ 代数 $\sigma(\mathcal{C})$，满足 $\sigma(\mathcal{C})\supset\mathcal{C}$ 且包含 $\mathcal{C}$ 的任一 σ 代数也包含 $\sigma(\mathcal{C})$. 称 $\sigma(\mathcal{C})$ 为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数或包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数

例 2.7

设 $E\subseteq\Omega$. 若 $C=\{E\}$, 则 $\sigma(\mathcal{C})=\{\emptyset,\Omega,E,E^c\}$.

注: 下面的结论是显然的。

1. 若 $\mathcal{C}$ 是一个集族, 则 $\mathcal{C}\subset\sigma(C)$.
2. 若 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 都是集族, 且 $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_2$, 则 $\sigma(\mathcal{C}_1)\subset\sigma(\mathcal{C}_2)$.
3. 若 $\mathcal{C}$ 是一个集族, 则 $\mathcal{C}$ 是其上最小的 -集族 $\Rightarrow\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{C}$.

例 2.8

设 Ω 是任一非空集合。若 $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega : A \text{ 或} A^c \text{ 是可数集}\}$, 则$\mathcal{F}$ 是 Ω 的 σ 代数.

例题 2.4

(Exercise!) 请写出集合 $\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$ 所生成的 σ 代数

例 2.9

设 $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}^n$ 由例 3 定义, 即

$$S^n:=\{(a,b]\subset\mathbb{R}^n : a=(a_1,\dots,a_n), b=(b_1,\dots,b_n), -\infty\le a_k\le b_k\le\infty, k=1,\dots,n\}.$$

称 $\sigma(\mathcal{S}^n)$ 为 n 维 Borel σ 代数, 记作 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathcal{B}^n$(当 $n=1$ 时, 记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 或 $\mathcal{B}$). 易知,$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{S}^n))$.(但 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$)

由于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 包含 $\mathbb{R}^n$ 的一切开集的类 $\mathcal{O}^n$ 和一切闭集的类 $\mathcal{C}^n$, 所以

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{O}^n)=\sigma(\mathcal{C}^n).$$

(Hint: $\mathbb{R}^n$ 中的任一开集均可表示成 S^n 中至多可数个两两不交元素的并)

例题 2.5

事实上, 若令

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ 是紧集}\},\\
E_2 &= \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^n, a < b\},\\
E_3 &= \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^n, a < b\},\\
E_4 &= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}^n, a < b\},\\
E_5 &= \{[a,b] : a,b \in \mathbb{Q}^n, a < b\},\\
E_6 &= \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{Q}^n\},\\
E_7 &= \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{Q}^n\},\\
E_8 &= \{(a,\infty) : a \in \mathbb{Q}^n\},\\
E_9 &= \{[a,\infty) : a \in \mathbb{Q}^n\},
\end{aligned}
$$

则 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_j), j = 1,\ldots,9$.

注意，$\mathcal{E}_j, j = 2,\ldots,9$ 都是可数集族，但都不是半集代数.

例 2.10

设 $\mathbb{C}$ 的全体复数构成的集合，$i = \sqrt{-1}$。令

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{A : A = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in (a,b], a,b \in \mathbb{R}\}\}.$$

则 $\sigma(\tilde{\mathcal{S}})$ 称为复 Borel σ 代数，并记为 $\mathcal{B}(\mathbb{C})$。类似地，对 $n \in \mathbb{N}$ 可定义 n 维复 Borelσ 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$

例 2.11

设 (M,τ) 是一个拓扑空间。称 $\mathcal{B}(M,\tau) := \mathcal{B}(M,\tau) := \sigma(\tau)$ 是 M 的 Borel σ 代数，$\mathcal{B}(M)$ 中的元素称为 Borel(可测) 集。($\sigma(\tau)$ 未必是拓扑)

设 M 是一个集合，$\tau \subset \mathcal{P}(M)$ 若（1）$\emptyset, M \in \tau$ （2）τ 中有限多个元素的交仍在 τ 中，（3）τ 中任意多个元素的并仍在 τ 中，则称 τ 为 M 的一个拓扑.(M,τ) 称为拓扑空间.T 中的元素称为这个拓扑空间的开集.

例如，度量空间 (M,d)。设 $p \in M$, $r > 0$, 称 (M,d) 的子集 $B(p,r) := \{x \in M : d(p,x) < r\}$ 为以 p 为心, r 为半径的开球，若令

$$\tau_d = \{U : U \text{ 是}M\text{中若干个开球的并}\},$$

则 τ_d 是 M 上的一个拓扑。

设 M 为一集合, 若映射 $d : M \times M \to [0,\infty)$ 满足:$\forall x,y,z \in M$,(a)$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$(正定性),(b)$d(x,y) = d(y,x)$(对称性),(c)$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$(三角不等式), 则称 d 是 M 上的度量 (或距离), 并称 (M,d) 为度量 (或距离) 空间.

例如，n 维欧几里得空间，即 $\mathbb{R}^n$ 并赋予了标准欧氏度量 $|\cdot - \cdot|$ 其中,

$$|x-y| := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

例 2.12

$\forall x \in \mathbb{R}$, 规定 $-\infty < x < +\infty$ 且 $\pm\infty$ 与 x 的运算规则如下:

1. $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\infty, & x < 0; \end{cases}$
3. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$;
4. $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$, $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$, $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
5. 以下运算无意义$(\pm\infty) + (\mp\infty), (\pm\infty) - (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\frac{x}{0}$, $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

1 令 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, 即广义实数集. 定义 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的度量 ρ 如下

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{|x-y|}{1+|x|+|y|}, & x, y \in \mathbb{R}, \\ \frac{|x|}{1+|x|} + 1, & x \in \mathbb{R}, y = \infty, \\ \frac{|x|}{1+|x|} + 1, & x \in \mathbb{R}, y = -\infty, \\ 2, & x = \infty, y = -\infty. \end{cases}$$

设 $n \in \mathbb{N}$。若令 $\overline{\mathbb{R}}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}$, 且

$$\rho_n(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k)^2 \right)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

则 $\mathbb{R}^n$ 是度量空间。若令 $S^n = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$, 其中当 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^n$ 且$a \geq b$ 时, $(a, b] := \emptyset$, 则$\mathcal{S}^n$ 不是 $\overline{\mathbb{R}}^n$ 的半集代数, 但

$$B(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma(\overline{\mathcal{S}}^n) = \sigma(\tau_{\rho_n}),$$

且 $B(\overline{\mathbb{R}}^n) \cap \mathbb{R}^n = B(\mathbb{R}^n)$, 其中 τ_{ρ_n} 是由 ρ_n 诱导的 $\overline{\mathbb{R}}^n$ 上的拓扑.

这里及以后, 若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega), A \subset \Omega$ 则定义

$$A \cap \mathcal{C} := \{B \cap A : B \in \mathcal{C}\} =: \mathcal{C} \cap A$$

例题 2.6

(Exercise!) 若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subset \Omega$ 且 $A \neq \emptyset$, 则

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma(\mathcal{C} \cap A).$$

例题 2.7

1. 设 $\Omega_1 = \{1\}$, $\Omega_2 = \{1,2\}$, $\Omega_3 = \{1,2,3\}$, $\Omega_4 = \{1,2,3,4\}$. 请分别找出 Ω_j 的所有 σ 代数，$j = 1,2,3,4$.

2. 设 $\mathcal{F}_n, \Omega_n$ 都是 Ω 的 σ 代数，并满足 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, 举例说明或证明:$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ 不是 Ω 的 σ 代数

3. 给定非空集合 Ω 及指标集 I. 设 $\{B_k\}_{k\in I}$ 是 Ω 的一个分割，即 $\forall k \in I$, $B_k \subset \Omega, \forall j,k \in I$ 且 $j \neq k, B_j \cap B_k = \emptyset, \bigcup_{k\in I} B_k = \Omega$ 若令

$$F = \{\bigcup_{k\in J} B_k : J \subseteq I\},$$

4. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的 σ 非空集族。试证: $\forall A \in \sigma(\mathcal{C})$, 存在集列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 使得 $A \in \sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\})$.

定义 2.4

设 $II \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 和 $\forall\Lambda \subset \mathcal{P}(\Omega)$. 若 Π 对交封闭, 则称 II 是 Ω 的 π 系. 若 (i) $\Omega \in \Lambda$, (ii) $\forall A, B \in \Lambda, A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \Lambda$, （真差封闭）(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda, A_n \uparrow \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda$, （单增集列之并封闭）则称 Λ 是 Ω 的 λ 系 (或 Dynkin 类)

命题 2.1: λ 系的等价定义

设 $\Lambda \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Λ 是 λ 系当且仅当: (i) $\Omega \in \Lambda$, (ii') $A \in \Lambda \Rightarrow A^c \in \Lambda$, (iii') $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ 且两两不交 $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Lambda$. 此命题的证明留作习题.

例 2.13

(1) 例 2 中的

$$S_1 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},$$

$$S_2 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$S_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$

都是 $\mathbb{R}$ 的 π 系

(2) 易知,σ 代数既是 π 系又是 λ 系, 反之, 见以下引理

引理 2.7

对于 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 且 $\mathcal{C}$ 既是 λ 系又是 π 系，则 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的 σ 代数.

定理 2.1

设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 且 $\mathcal{C}$ 为 π 系，则

$$\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

因此，任何包含 π 系 $\mathcal{C}$ 的 λ 系都包含 $\sigma(\mathcal{C})$

注 1:（a）包含任何子集类 $\mathcal{C}$ 的最小 λ 系 $\lambda(\mathcal{C})$ 的存在唯一性的证明与前面相同.（b）第二个结论由第一个结论立刻得到.

注 2：此定理有其它等价形式. 例如，若 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的集代数,$\mathcal{M}$ 为 Ω 的单调类（即如果 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ 且是单调的，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$），则

$$m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

其中，$m(\mathcal{A})$ 表示包含 $\mathcal{A}$ 的最小的单调类.

例题 2.8

易知，若 Λ 是 λ 系，则 Λ 是单调类.（Exercise!）

单调类定理的用法:

通常已知 Ω 的集类 $\mathcal{C}$ 中元素具有性质 P，要证 $\sigma(\mathcal{C})$ 中元素也具有性质 P. 为此，令

$$\mathcal{E} = \{A \subset \Omega : A\text{具有性质}P\}$$

于是，$\mathcal{E} \supset \mathcal{C}$ 再证明 $\mathcal{C}$ 是 λ 系，然后证明 $\mathcal{E}$ 是 λ 系，由单调类定理知，$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 即 $\sigma(\mathcal{C})$ 中的元素都具有性质 P. 这种方法称为 λ 系方法. 这是一种采用“整体”的思想来考虑问题的方法

集族间的关系

(1)

$$\sigma\text{代数}\begin{cases}\Rightarrow \text{集代数} \Rightarrow \text{半集代数} \Rightarrow \pi\text{系}\\ \Rightarrow \lambda\text{系}\end{cases}$$

(2)

$$\sigma\text{代数} \Leftrightarrow \pi\text{系} + \lambda\text{系}$$

$$\sigma\text{代数} \Leftrightarrow \text{集代数} + \text{单调系}$$

(3) 集合 Ω 的衣裳集族, 除 π 系外, 其余都含有 Ω 和 φ.π 系可能不含 $\emptyset$.

例题 2.9

1. 设 $A, B \subset \Omega$. 请问 $\lambda(\{A, B\})$ 与 $\sigma(\{A, B\})$ 相等吗? 若不相等, 请给出使 $\lambda(\{A, B\}) = \sigma(\{A, B\})$ 成立的条件.
2. 令 $\mathcal{C} := \{\{n, n+1, \ldots\} : n \in \mathbb{N}\}$. 试证: (a) $\mathcal{C}$ 是 π 系; (b) $\sigma(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
3. . 试列举一个集族，使其是 λ 系但不是 σ 代数
4. 设 $E \subset \Omega, \Lambda$ 是 Ω 的 λ 系。试问：$E \cap \Lambda$ 还是 λ 系吗? 若不是，请举例说明；若是，请证明
5. 严刘习题 3.1 中第 14 题
6. 思考：怎样“由内到外”构造生成 σ 代数和生成 λ 系呢?

定义 2.5

给定非空集合 Ω. 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$，$\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ 为一映射，且至少存在 $E \in \mathcal{C}$，使 $\mu(E) < \infty$

1. 若 $\forall A, B \in \mathcal{C}$ 满足 $A \cup B \in \mathcal{C}$，$A \cap B = \emptyset$，有
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$
则称 μ 在 $\mathcal{C}$ 上的可加测度 (显然, 若还有 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 则 $\mu(\emptyset) = 0$)

2. 若 $\forall n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ 两两不交且 $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$，有
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k),$$
则称 μ 在 $\mathcal{C}$ 上的有限可加性.(显然, 有限可加测度是可加测度)

3. 对于 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$，两两不交，且 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{C}$，有
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n),$$
则称 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 σ 可加 (或可数可加) 测度, 简称为测度.

4. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$，$\mu(A) \in [0, \infty)$，则称满足 (1), (2), (3) 的 μ 为有限的.

5. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的 σ 代数. 称二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, 并称 $\mathcal{F}$ 中的元素为 $\mathcal{F}$ 可测集; 若 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, 则称三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 若 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度且 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度, 并称三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为概率空间.

若 $\forall \mathcal{C}, \exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 使 $\cup_{n=1}^\infty A_n = A$ 且 $\mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$, 则称满足 (1),(2),(3) 的 μ 为 σ 有限的.

若 $\mathcal{C}$ 为集代数, 则 $\mathcal{C}$ 上的可加测度一定是有限可加测度.

设 Ω 是一无限集, 并令 $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$. 定义映射 $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ 如下:$\forall A \subset \Omega$, 若 A 是有限集, 则 $\mu(A) = 0$, 若 A 是无限集, 则 $\mu(A) = \infty$. 易知,μ 是 $\mathcal{C}$ 上的有限可加测度, 但 μ 不是 $\mathcal{C}$ 上的测度.

当 $\mathcal{C}$ 为 Ω 的集代数或 σ 代数且 μ 是 $\mathcal{C}$ 上的测度时, 若 $\exists \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 使 $\cup_{n=1}^\infty B_n = \Omega$, 且 $\mu(B_n) <$

$\infty, n \in \mathbb{N}$, 则 μ 是 $\mathcal{C}$ 上的 σ 有限测度.

通常, 我们可以把关于 σ 有限测度的问题转化成关于有限测度或概率测度的问题

例题 2.10

设 μ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ 有限测度, 且存在 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, 两两不交, 使 $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, 且 $\mu(B_n) \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}$. 若令

$$v(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap B_n)}{2^n \mu(B_n)}, A \in \mathcal{F}$$

则 (i)v 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度,(ii)$\forall A \in \mathcal{F}, v(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$,(iii)$\forall A \in \mathcal{F}$, 有 $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n v(A \cap B_n)\mu(B_n)$

例 2.14

设 Ω 是非空集合。

1. 设 $x \in \Omega$。$\mathcal{P}(\Omega)$ 上最简单的概率测度是 Dirac 测度 δ_x:

$$\delta_x(B) := \mathbb{I}_B(x), \quad B \in \mathcal{P}(\Omega)$$

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是测度空间，其中，$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : A\text{或}A^c\text{是可数集}\}$，若 $\mu : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ 满足:$\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{如果}A\text{是可数的}, \\ 1, & \text{否则}, \end{cases}$$

   则 μ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度。

3. 设 Y 是 Ω 的有限或可数子集，$a : Y \to [0,\infty]$. 若定义

$$\mu(B) = \sum_{x \in B \cap Y} a(x) = \sum_{x \in Y} a(x)\delta_x(B), \quad B \in \mathcal{P}(Y),$$

   则 μ 是 $\mathcal{P}(Y)$ 上的测度，并称其为 $\mathcal{P}(Y)$ 上的离散测度.

   易知,μ 是有限的 $\Leftrightarrow \sum\limits_{x \in Y} a(x) < \infty, \mu$ 是 σ 有限的 $\Leftrightarrow a(x) \in [0,\infty), x \in Y, \mu$ 是概率测度 $\Leftrightarrow \sum\limits_{x \in Y} a(x) = 1$

   若 $a(x) = 1, x \in Y$, 则称 μ 为 $\mathcal{P}(Y)$ 上的计数测度.

4. 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{S} = \{(a,b] \in \mathbb{R} : -\infty < a \le b \le \infty\}$ 生成的集代数，$f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 为紧支撑连续函数. 任意的 $A \in \mathcal{A}$，若

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k),$$

   其中，$(a_k, b_k] \in \mathcal{S}$，$k = 1, \ldots, n$，且 $\{a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \ldots < a_n \le b_n\}$ 则定义

$$\mu_f(A) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

   易知,μ_f 是 $\mathcal{A}$ 上的有限的有限可加测度.

5. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是测度空间. 若对 $\forall A \in \mathcal{F}$, 定义

$$\mu(A) = 0, v(A) = \begin{cases} 0, A = \emptyset \\ \infty, A \neq \emptyset \end{cases}$$

   则 μ, v 都是 $\mathcal{F}$ 上的测度, 且 μ 是有限的,v 不是 σ 有限的.

6. (古典概率) 设 Ω 是一有限集, 且 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, 其中,$n \in \mathbb{N}$. 若令

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}, A \subset \Omega$$

   则 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{P}(\Omega)$ 上的概率测度, 其中 $\#(A)$ 表示集合 A 中元素个数.

命题 2.2

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间。以下性质成立:

1. $\forall A \in \mathcal{F}$，$\mu(A) \in [0, \infty]$，且至少存在 $B \in \mathcal{F}$ 使得 $\mu(B) < \infty$。
2. 若 $\forall A_n \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbb{N}$，两两不交，则
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$
特别地,$\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$, 有
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$
3. $\mu(\emptyset) = 0$
4. 设 $A, B \in \mathcal{F}$，$A \subset B$, 从而
$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ \mu(A) &\leq \mu(B).\text{单调性} \end{aligned}$$
特别地, 若 $\mu(A) < \infty$，则
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad (\text{可减性}).$$
若 μ 概率测度，则 $\mu(A) \in [0, 1]$，且 $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$。
5. 若 $A_n \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbb{N}$，则
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{次}\sigma\text{可加性}$$
6. 若 $A, B \in \mathcal{F}$，则 $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
特别地, 若 $A, B \in \mathcal{F}, \mu(A) < \infty$ 或 $\mu(B) < \infty$, 则
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$
一般地，若 $A_k \in \mathcal{F}, \mu(A_k) < \infty, k = 1, \ldots, n$，则
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k});$$
$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}).$$

注：1 与 2⇔2 与 3。

注意, 单调性与次 σ 可加性依赖测度的非负性.

定义 2.6

设 $\mathcal{C}$ 是一族集合，且 μ 是 $\mathcal{C}$ 上的测度。

1. 对于 $A \in \mathcal{C}$ 且对 $\mathcal{C}$ 中任何满足条件 $A_n \uparrow A$ 的集序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 均有
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A),$$
则称 μ 在 A 处下连续. 若对任意的 $A \in \mathcal{C}, \mu$ 在 A 处下连续, 则称 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是下连续的.
2. 若 $A \in \mathcal{C}$ 且对 $\mathcal{C}$ 中任何满足条件 $\{A_n\} \downarrow A$ 及 $\exists m \in \mathbb{N}$ 使 $\mu(A_m) < \infty$ 的集序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 均有
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A),$$
则称 μ 在 A 处上连续。若对任意的 $A \in \mathcal{C}$，μ 在 A 处上连续, 则称 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是上连续的.
3. 若 $A \in \mathcal{C}$, 且 μ 在 A 处既是上连续的, 又是下连续的, 则称 μ 在 A 处连续. 若对任意的 $A \in \mathcal{C}$，μ 在 A 处连续, 则称 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是连续的.

定理 2.2

若 μ 是 Ω 的集代数 $\mathcal{A}$ 上的测度，则 μ 在 $\mathcal{A}$ 上是连续的。

例题 2.11

举例说明，若在上一定义（2）中去掉假设条件 $\exists m \in \mathbb{N}$ 使 $\mu(A_m) < \infty$”则此定理中的 μ 在 $\mathcal{A}$ 上可能不是上连续的.

Q: 若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度，则 μ 在 $\mathcal{S}$ 上是连续的吗?

定理 2.3

设 μ 是 Ω 的集代数 $\mathcal{A}$ 上的可加测度，若 μ 还满足下面的 (1) 或 (2)，则 μ 是 $\mathcal{A}$ 上的测度.

1. μ 下连续
2. $\mu(\Omega) < \infty$，且 μ 在 $\emptyset$ 处上连续.

定理 2.4

设 μ 是 Ω 的集代数 $\mathcal{A}$ 上的一个可加测度, 若考虑以下论断:

1. μ 是 σ 可加的,
2. μ 是次 σ 可加的，即 $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ 且 $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$，有
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$
3. μ 下连续;
4. μ 上连续
5. μ 在 $\emptyset$ 处上连续.

则 $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$，若 μ 还是有限的, 则 $(e) \Rightarrow (a)$。

例题 2.12

1. 考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 上的集函数
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{如果} A = \emptyset, \\ 1, & \text{如果} A \neq \emptyset. \end{cases}$$
试给出 $\mathbb{R}$ 上的一个 σ-代数 $\mathcal{F}$, 使 μ 成为 $\mathcal{F}$ 上的测度
2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，$\mu_k, k \in \mathbb{N}$，都是 $\mathcal{F}$ 上的测度，$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是非负数列. 令
$$\nu(A) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$
试证明 ν 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度。
3. 设 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一列有限测度，且 $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(B) \le \mu_{n+1}(B), B \in \mathcal{F}$。若对 $\forall A \in \mathcal{F}$，极限
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) =: \mu(A)$$
存在且有限, 则 μ 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度。(注：这个结论是 Vitali–Hahn–Saks 定理的特殊情况，其中后者无需" 单增性" 假设条件)

定义 2.7: 测度扩张定理

设 $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu_i : \mathcal{C}_i \to [0, \infty]$, $i = 1, 2$, 且 $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$。若

$$\mu_1(A) = \mu_2(A), \quad A \in \mathcal{C}_1,$$

则称 μ_2 是 μ_1 在 $\mathcal{C}_1$ 上的扩张，也称 μ_1 是 μ_2 在 $\mathcal{C}_1$ 上的限制。

定理 2.5: (Carathéodory–Fréchet)

若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度，则 μ 在 $\mathcal{S}$ 生成的 σ 代数 $\sigma(\mathcal{S})$ 上存在一个扩展。进一步，若 μ 在 $\sigma(S)$ 上的扩张唯一，即若 μ_1, μ_2 都是 μ 在 $\sigma(\mathcal{S})$ 上的扩张, 则

$$\mu_1(A) = \mu_2(A), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}).$$

引理 2.8

若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度 (或有限可加测度), 则 μ 在 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 上存在唯一的扩张.

引理 2.9

设 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的有限可加性测度，$n \in \mathbb{N}$，$A \in \mathcal{S}$。若 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$，两两不交，使得 $A \supset \cup_{k=1}^n A_k$(未必属于 $\mathcal{S}$), 则

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

特别地，若有 $B \in \mathcal{S}$ 使得 $A \supset B$，则 $\mu(A) \geq \mu(B)$。

引理 2.10

设 $\mathcal{S}$ 是 Ω 的半集代数,$A \in \mathcal{S}$。

(a) 若 μ 在 $\mathcal{S}$ 上的有限可加测度，$\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$，则 $\forall A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$,

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \quad \text{(次可加性)}$$

(b) 若 μ 是 $\mathcal{S}$ 上的测度，$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$，则 $\forall A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$，

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad \text{(次}\sigma\text{可加性)}$$

定义 2.8: 外测度

若 μ^*： $\mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$，满足

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ （单调性），
3. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow$
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \quad \text{（次}\sigma\text{可加性）}$$

则称 μ^* 是 Ω 的一个外测度.

Q: 定义中的条件 (2) 起到什么样的本质作用?

引理 2.11

设 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度。若 $\forall A \subset \Omega$，令
$$\mathcal{C}_A(\mathcal{S}) = \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A\},$$
并定义
$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A(\mathcal{S})\right\},$$
则 μ^* 为 Ω 的一个外测度，并称之为由 μ 诱导的外测度，且 μ^* 与 μ 在 $\mathcal{S}$ 上一致，即
$$\mu^*(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{S};$$
特别地，μ^* 是 $\mathcal{S}$ 上的测度。

注：设 $A \subset \mathbb{R}$。若 $a_* := \inf A \in \mathbb{R}$, 则 a_* 是 A 的最大下界, 即 $\forall a \in A$，有 $a \geq a_*$，且 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$ 使 $a_\varepsilon \leq a_* + \varepsilon$。

定义 2.9: μ^* 可测集

定义 μ^* 为 Ω 的外测度，$A \subset \Omega$。若 $\forall D \subset \Omega$，有
$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D),$$
则称 A 为 μ^* 可测集.

易知，若 A 是 μ^* 可测集，则 A^c 也是 μ^* 可测集.

若 $A, B \subset \Omega$,$A \cap B = \emptyset$，且 A 或 B 是 μ^* 可测集，则
$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

(Hint: 只需令定义中的 $D = A \cup B$)

引理 2.12

设 μ^* 是 Ω 的外测度，$A \subset \Omega$。A 为 μ^* 可测集当且仅当

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D), \quad D \subset \Omega.$$

定理 2.6

设 μ^* 为 Ω 的一个外测度. 令

$$\mathcal{F}_{\mu^*} := \mathcal{F}_{\mu^*}(\Omega) := \{A \subset \Omega : A\text{为}\mu^*\text{可测集}\}.$$

以下论断成立

(a) $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 为 Ω 的一个 σ 代数;

(b) 设 $A_n \in \mathcal{F}_{\mu^*}, n \in \mathbb{N}$，两两不交，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则

$$\mu^*(A \cap D) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap D), \quad D \subset \Omega;$$

(c) μ^* 在 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 的限制 (仍记作 μ^*) 是 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的测度.

至此，我们得到了一个测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*)$。但还无法保证半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度 μ 的扩张就是 $\mu^* : \mathcal{F}_{\mu^*} \to [0, \infty]$. 还需建立 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 之间的联系，若 $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$, 则 $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$, 则 $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$, 于是,$\mu^*$ 在 $\sigma(\mathcal{S})$ 上的限制就是 μ 的一个扩张.

定理 2.7

若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度，则 μ 在 $\mathcal{S}$ 生成的 σ 代数 $\sigma(\mathcal{S})$ 上存在一个扩张。进一步，若 μ 在 $\mathcal{S}$ 上还是 σ 有限的，则 μ 在 $\sigma(\mathcal{S})$ 上的扩张唯一, 即若 μ_1, μ_2 都是 μ 在 $\sigma(\mathcal{S})$ 上的扩张，则

$$\mu_1(A) = \mu_2(A), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}),$$

且此扩张也是 σ 有限的.

测度扩张定理的注记

1. 由测度扩张定理可以立即得到以下推论

推论 2.1

若 $\mathbb{P}$ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的概率测度, 则存在唯一的概率空间 $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}), \mathbb{P}^*)$, 使得

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{A}, A \in \mathcal{S}$$

2. 若将测度扩张定理中的“σ 有限”去掉，则扩张未必唯一；见严刘习题 3.2 中第 20 题.
3. 由上证明过程可知，我们易知以下 σ 代数间的关系

$$\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_{\mu^*} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

一般地, 以上包含关系均是严格的. 例如, 取 $\Omega = \mathbb{R}$, 及

$$\mathcal{S} = \{(a, b] \subset \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\},$$

则 $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 并由后文知,$\mathcal{F}_{\mu^*}(\mathbb{R})$ 为 Lebegue 可测集全体且

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{F}_{\mu^*}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

其中,μ^* 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度.

例题 2.13

1. 设 μ, ν 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个测度，$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 满足：1) $\mathcal{C}$ 是 π 系; 2) $\exists (D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 使 $D_n \uparrow \Omega$;3)$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$。若 μ, ν 在 $\mathcal{C}$ 上一致且在 $D_n, n \in \mathbb{N}$ 上都是有限的，则 μ, ν 在 $\mathcal{F}$ 上一致, 进一步, 若只将以上条件 2) 换成 2)’:$\exists (D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 使 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \Omega$, 则同样的结论还保持吗

2. 证明：若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度，则 μ 在 $\mathcal{S}$ 上是连续的.

3. 设 $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{C} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$. 令

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\{a\}) = \mu_1(\{d\}) = \mu_2(\{b\}) = \mu_2(\{c\}) = 1 \\
&\mu_1(\{b\}) = \mu_1(\{c\}) = \mu_2(\{a\}) = \mu_2(\{d\}) = 2 \\
&\mu_k(\{x, y\}) = \mu_k(\{x\}) + \mu_k(\{y\}), \quad k = 1, 2, \{x, y\} \in \mathcal{C} \\
&\mu_k(\emptyset) = 0, \mu_k(\Omega) = 6, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

试证：$\mathcal{C}$ 不是 Ω 的半集代数,μ_1, μ_2 在 $\mathcal{C}$ 上一致且都是 σ 可加的，但在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上 $\mu_1 \neq \mu_2$。这个例子说明了什么问题?

4. 若将测度扩张定理中的“σ 有限”去掉，则扩张的唯一性未必成立，如 $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{S} = \{(a, b] \subset \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}, \mu(A) = \#(A), A \subset \mathcal{S}, \nu = 2\mu$，其中，$\#(A)$ 表示集合 A 中的元素个数。试证：μ, ν 都是 $\mathcal{S}$ 上的测度，都不是 σ 有限的，在 $\mathcal{S}$ 上有 $\mu = \nu$，在 $\sigma(S) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上有 $\mu \neq \nu$。

定义 2.10

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一测度空间，若 $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ 满足，$\exists A \in \mathcal{F}$, 使 $A \supset N$ 且 $\mu(A) = 0$, 则称 N 为 μ 零 (测) 集.(N 未必属于 $\mathcal{F}$). 若 $\mathcal{P}$ 中的每个 μ 零集都属于 $\mathcal{F}$，则称 μ 是 ($\mathcal{F}$ 上的) 完全的测度, 称 $\mathcal{F}$ 是 (关于)μ 完全化的, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 称为完备的测度空间。

显然，完全的测度空间首先是一测度空间. 易知，
(1) $\emptyset$ 是 μ 零集.

(2) μ 零集的子集也是 μ 零集;

(3) 若 $N_n \in \mathcal{P}(\Omega), n \in \mathbb{N}$, 都是 μ 零集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ 也是 μ 零集。

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 不是完全的测度空间，则 μ 零集可能不属于 $\mathcal{F}$.

例 2.15

设 $\Omega = \{1,2,3\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$。例如，$\mathcal{F}$ 是 Ω 的 σ 代数。定义映射 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ 如下:

$$\mu(\emptyset) = 0 = \mu(\{2,3\}), \quad \mu(\{1\}) = 1 = \mu(\Omega).$$

易知，μ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度。显然，$\{3\}$ 是 μ 零集，但 $\{3\} \notin \mathcal{F}$。因此，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 不是完全的测度空间。

例 2.16

设 λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。由后文知,$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 不是完全的测度空间，其中的 λ 零集可能不属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$。

定义 2.11

给定测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$。若存在完全的测度空间 $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$，使得 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ 且 μ, ν 在 $\mathcal{F}$ 上一致，则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ 是 $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ 的一个完全化扩张。若 $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的一个完全化扩张，使得 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的任何完全化扩张 $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$ 都满足 $\mathcal{E} \supset \tilde{\mathcal{F}}$ 且 ν 与 $\tilde{\mu}$ 在 $\tilde{\mathcal{F}}$ 上一致，则称 $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的完全化.

易知，对于任何测度空间，若其完全化是存在的，则也是唯一的. 能否将任一测度空间完全化呢? 下面的定理给出了肯定的回答.

定理 2.8: 1

若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，则存在测度空间 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$，使得 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的完全化.

Q: $\overline{F}$ 应怎样构造呢?$\overline{\mu}$ 又怎么定义

例题 2.14

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，$x \in \Omega, \mu = \delta_x$。试分别在条件 (1) 和 (2) 下求出 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的完全化，其中,

1. $\{x\} \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

定理 2.9: 2

若 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的 σ 有限测度，μ^* 是由 μ 诱导的外测度，$\mathcal{F}_{\mu^*}$ 是一切 μ^* 可测集组成的 σ 代数，则 $(\Omega, \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*)$ 是 $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}), \mu)$ 的完全化. 从而 μ 在 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的扩张是唯一的.（此处，将 μ 在 $\sigma(\mathcal{S})$ 上的扩张仍记作了 μ，而 μ^* 在 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的限制仍记作了 μ^*）

引理 2.13

设 μ 是 Ω 的半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度,μ^* 是由 μ 诱导的外测度. 若 $A \subset \Omega, \mu^*(A) < \infty$, 则 $\exists B \in \sigma(\mathcal{S})$, 使得

(a) $A \subset B$,

(b) $\mu^*(A) = \mu^*(B)$,

(c) $\forall C \subset B \backslash A$，且 $C \in \sigma(\Omega)$, 有 $\mu^*(C) = 0$。

称 B 是 A 的可测覆盖.

定理 2.10: 3

设 μ 是半集代数 $\mathcal{S}$ 上的测度,$\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{S}$ 生成的集代数, μ^* 是由诱导的外测度. 若 $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*(A) < \infty$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $A_\epsilon \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, 且

$$\mu^*(A \Delta A_e) < \varepsilon.$$

引理 2.14

设 $A \subset \mathbb{R}^n$. 若令

$$\lambda_n^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, (I_k)_k \text{为} \mathbb{R}^n \text{中开方体序列} \right\},$$

其中，$|I_k|$ 表示 I_k 的体积，则 λ_n^* 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个外测度, 并称之为 n 维 Lebesgue 外测度。

若 $I_k = (a, b) \subset \mathbb{R}^n, a, b \in \mathbb{R}^n$ 且 $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$，则 $|I_k| := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$。为了方便，记 λ_1^* 为 λ^*。

定理 2.11: 4

令 $\mathcal{S}^n=\{(a,b]\subset\mathbb{R}^n:a\le b,a,b\in\overline{\mathbb{R}}^n\}$，$\forall(a,b]\in S^n$ 且 $a=(a_1,\ldots,a_n),b=(b_1,\ldots,b_n)$ 若定义

$$\lambda_n([a,b])=\begin{cases}\prod_{k=1}^n(b_k-a_k), & a,b\in\mathbb{R}^n,\\ \lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^n[b_k\wedge N-a_k\vee(-N)], & \exists k\text{使}a_k=-\infty\text{或者}b_k=\infty,\end{cases}$$

其中,$\forall n,m\in\overline{\mathbb{R}}$，$n\vee m:=\max\{n,m\}$, $n\wedge m:=\min\{n,m\}$，则 λ_n 是 $\mathcal{S}^n$ 上的 σ 有限测度（称之为 $\mathcal{S}^n$ 上的体积测度），并且 λ_n 可以唯一的扩展张成 $\mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ 上的 σ 有限测度. $\mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ 中的元素称为 n 维 Lebesgue 可测集，$\mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ 上的测度 λ_n^* 称为 n 维 Lebesgue 测度，λ_n^* 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{S}^n)$ 上的限制称为 n 维 Borel 测度 (仍记为 λ_n)

此定理表明，1）在半集代数上构造测度是容易的，2）$(\mathbb{R}^n,\mathcal{A}_{\lambda_n^*},\lambda_n^*)$ 是 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\lambda_n)$ 的完全化

以后记 $\mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ 为 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, 记 λ_n 在 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 上的扩张仍为 λ_n, 并且不加区分地称 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 测度和 Lebesgue 测度称为 Lebesgue 测度.

命题 2.3

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Lebesgue 可测集，

$$\begin{aligned}\lambda_n(A)&=\inf\{\lambda_n(G):A\subset G,G\subset\mathbb{R}^n\text{是开集}\}\\&=\sup\{\lambda_n(K):A\supset K,K\subset\mathbb{R}^n\text{是紧集}\}.\end{aligned}$$

因此，若 $\lambda_n(A)<\infty$, 则 $\forall\varepsilon>0$，存在开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ 及紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 使得 $K\subset A\subset G$，且

$$\lambda_n(G)-\varepsilon\le\lambda_n(A)\le\lambda_n(K)+\varepsilon.$$

例题 2.15

1. 设 M 是度量空间，μ 是 $(M,\mathcal{B}(M))$ 上的有限测度. 试证：$\forall B\in\mathcal{B}(M)$，有

$$\begin{aligned}\mu(B)&=\inf\{\mu(G):B\subset G,G\subset M\text{是开集}\}\\&=\sup\{\mu(F'):B\supset F,F\subset M\text{是闭集}\}.\end{aligned}$$

(Hint: 令 $\mathcal{E}=\{B\in\mathcal{B}(M):B\text{满足以上两个等式}\}$. 试证 $\mathcal{E}$ 是包含 M 的所有开集的 σ 代数)

例题 2.16

设 M 是 Polish 空间,μ 是 $(M, \mathcal{B}(M))$ 上的有限测度. 试证:$\forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset M$, 使 $\mu(M \backslash K) < \epsilon$

注:

1. 设 (M, τ) 是拓扑空间。若存在 M 上的度量 d，使 (M, d) 是完备可分的度量空间且 d 诱导的拓扑与 τ 一致，则称 M 是 Polish 空间。
2. Polish 空间与完备可分的度量空间是有区别的. 例如，开区间 $(0,1)$ 在欧氏度量下不是完备的度量空间, 但 $(0,1)$ 在欧氏拓扑下是 Polish 空间.

命题 2.4

若 μ 是 $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度，并满足

1. (有界 Borel 集取值有限) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 有限，$\mu(A) < \infty$;
2. (平移不变性)$\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu(A) = \mu(A + x)$，其中，$A + x := \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + x, a \in A\}$,

则存在非负常数 c，使 $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu(A) = c\lambda_n(A)$.

(1),(2) 是 Lebesgue 测度的本质特征.

命题 2.5

设 $A \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集，$\lambda(A) > 0$. 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $(-\delta, \delta) \subset \{x - y : x, y \in A\}$.

命题 2.6

$\mathbb{R}$ 中存在不是 Lebesgue 可测的子集。

例题 2.17

严刘习题 3.3 中 5,6,7 题, 及前一页的三个命题.

定义 2.12

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。若 F 满足以下 (1)(2) 条件，则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的分布函数。若 F 满足以下 (1)(2)(3)(4)，则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界分布函数。若 F 满足以下 (1)(2)(3)(5)，则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的概率分布函数。

1. $\forall a,b\in\mathbb{R}^n, a=(a_1,\ldots,a_n), b=(b_1,\ldots,b_n)$, 且 $a_k\le b_k, k=1,\ldots,n$, 有

$$\Delta_{a,b}F:=\Delta^{(n)}_{b_n,a_n}[\Delta^{(n-1)}_{b_{n-1},a_{n-1}}\cdots\Delta^{(1)}_{b_1,a_1}]F\ge 0,$$

   其中，$\forall k\in\{1,\ldots,n\}$ 及 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，

$$\Delta^{(k)}_{b_k,a_k}F(x):=F(x_1,\ldots,x_k-1,b_k,x_{k+1},\ldots,x_n)-F(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_n).$$

2. F 关于自变量的每个分量右连续.
3. $\forall m\in\{1,\ldots,n\}$ 及 $k_1,\ldots,k_m\in\{1,\ldots,n\}$ 有

$$F(\ldots,x_{k_1-1},-\infty,x_{k_1+1},\ldots,x_{k_m-1},-\infty,x_{k_m+1},\ldots)=0.$$

4. $F(\infty,\ldots,\infty)<\infty$.
5. $F(\infty,\ldots,\infty)=1$.

注记

1. 注意以上记号 $\Delta_{b,a}F$ 与教材中类似记号的区别。事实上，
当 $n=1$ 时，$\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b$，有 $\Delta_{b,a}F=F(b)-F(a)$；
当 $n=2$ 时，$\forall a,b\in\mathbb{R}^2,(a_1,a_2)\le(b_1,b_2)$，有

$$\Delta_{b,a}F=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2).$$

2. 当 $n=1$ 时，上个定义简化为以下形式

定义 2.13

设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。若 F 是右连续且单调增的，则称 F 是 $\mathbb{R}$ 上的分布函数。进一步，若 F 还满足:

$$F(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty):=\lim_{x\to\infty}F(x)<\infty,$$

则称 F 是 $\mathbb{R}$ 上的有界分布函数；特别地，若 $F(\infty)=1$，则称 F 是 $\mathbb{R}$ 上的概率分布函数。

例如，$F(x)=x^{2k+1},k\in\mathbb{N}\cup\{0\},x\in\mathbb{R}$，是 $\mathbb{R}$ 上的分布函数且是连续的。

定理 2.12

1. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是分布函数，则在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上存在唯一的在有界区间取值有限的测度 (故 σ 有限)$\mu:=\mu_F$ 满足
$$\mu((a,b])=\Delta_{b,a}F,\quad a,b\in\mathbb{R}^n, a\le b.$$
称 μ 为由 F 决定（或诱导）的 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Borel–Stieltjes 测度. 称由 μ 所唯一决定的 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的测度为 Lebesgue–Stieltjes 测度，简称 L-S 测度。
2. 反之，若 μ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的 L-S 测度，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一族分布函数 $\{F+c:c\in\mathbb{R}\}$，使得 (4) 成立。(若将相差一个常数的分布函数视为同一个，则这样的分布函数还是唯一的.)

注：当 $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$ 时,L-S 测度即为为 Lebesgue 测度. 通常我们不加区分地称 Borel-Stieltjes 测度和 Lebesgue-Stieltjes 测度为 L-S 测度.

事实上，若 $(a,b]=\bigcup_{k=1}^n(a_k,b_k]\in\mathcal{S}$，且 $(a_k,b_k]\in\mathcal{S},k=1,\dots,n$，两两不交，$n\in\mathbb{N}$，则不妨设 $(a_k,b_k]\neq\emptyset,k=1,\cdots,n$, 且
$$a=a_1<b_1\le a_2<b_2\le\cdots\le b_{n-1}\le a_n<b_n=b.$$

从而
$$\begin{aligned}\mu((a,b])&=F(b)-F(a)=F(b_n)-F(a_1)\\&=\sum_{k=1}^n[F(b_k)-F(a_k)]=\sum_{k=1}^n\mu((a_k,b_k]).\end{aligned}$$

推论 2.2

记 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的概率测度全体, 记 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的概率分布函数全体，对任意的 $\mathbb{P}\in\mathcal{B}$ 及 $F\in\mathcal{F}$, 若令
$$F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$
则上式建立了 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{F}$ 之间的双射.

增函数及其性质

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一函数。若 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2$，有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称 f 为增函数（或不降函数）。

(1) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为增函数。$\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{t\uparrow x}f(t)=:f(x-0)\quad \text{和}\quad \lim_{t\downarrow x}f(t)=:f(x+0)$$
存在且有限, 且
$$f(x-0)\le f(x)\le f(x+0);$$
还有
$$f(-\infty):=\lim_{t\downarrow-\infty}f(t),\quad f(\infty):=\lim_{t\uparrow\infty}f(t)$$

存在，但前者可能是 $-\infty$，后者可能是 ∞。

(2) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一增函数,$\forall x\in\mathbb{R}$

$$f \text{ 在} x \text{ 处连续} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x-0)=f(x+0).$$

(3) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一函数（未必是增函数）。若 $(x-0)$ 和 $(x+0)$ 存在但不相等，则称 f 在 x 处有一个跳跃；此时，称 x 为 f 的一个跳跃点，并称 $|f(x-0)-f(x+0)|$ 为 f 在 x 处的一个跃度

- 增函数的不连续点都是跳跃点，且其不连续点最多有可数个
- 增函数的跳跃点集可能有有限个聚点，但聚点不一定是跳跃点；换句话说，跳跃点集未必是闭集. 见下例.

例 2.17

设 $x_0\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$。定义

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le x_0-1,\\ 1-\frac{1}{n}, & x_0-\frac{1}{n}\le x<x_0-\frac{1}{n+1},\\ 1, & x\ge x_0.\end{cases}$$

易知 f 是增函数。从图像知，x_0 在 f 的跳跃点集 $\{x_0-\frac{1}{n}\}_{n\ge 2}$ 的一个聚点，但 f 在 x_0 处连续

例 2.18

设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ 和 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ 是元素互不相同的数列, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$。定义

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mathbf{I}_{(a_n,\infty)}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

易证,f 是增函数，其跳跃点是 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 且 f 在 a_n 的跃度为 b_n。若 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的可数稠密集，则此例说明，增函数的跳跃点集可在 $\mathbb{R}$ 上稠密，但由前面性质（3）知跳跃点集至多可数.

（4）$\mathbb{R}$ 上的增函数除某些跳跃点的函数值外，由此函数在一稠密集上的值确定，确切地说，设 f,g 是 $\mathbb{R}$ 上的两个增函数，D 在 $\mathbb{R}$ 稠密，且 $f(x)=g(x),\forall x\in D$，则 f,g 具有相同的跳跃点，在同一跳跃点上的跃度相同，且除了某些跳跃点外，f 与 g 的取值相等

(5) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个增函数。定义

$$\tilde{f}(x)=f(x+0),\quad \tilde{g}(x)=f(x-0),\quad x\in\mathbb{R};$$

于是 $\tilde{f},\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是处处右连续的增函数,$\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是处处左连续的增函数

(6) 设 D 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，$f:D\to\mathbb{R}$ 是增函数。定义

$$\tilde{f}(x)=\inf\{f(t):t\in D,t>x\},\quad x\in\mathbb{R}.$$

于是 $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是处处右连续的增函数。

3 Lebesgue 测度

定义 3.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个测度空间. 若 $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ 满足，$\exists A \in \mathcal{F}$，使得 $A \supset N$ 且 $\mu(A) = 0$，则称 N 为 μ 零测集 (N 未必属于 $\mathcal{F}$)。若 $\mathcal{P}(\Omega)$ 中的每个 μ 零测集都属于 $\mathcal{F}$，则称 μ 是 $\mathcal{F}$ 上的完全的测度，称 $\mathcal{F}$ 是 (关于)μ 完全的，称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是完全的测度空间.

显然, 完备的测度空间首先是一测度空间, 易知,

(1) Φ 是 μ-零测集;

(2) μ-零测集的子集也是 μ-零测集;

(3) 若 $N_n = \mathcal{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ 都是 μ 零集, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ 也是 μ-零测集.

定义 3.2

测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$。若存在完全的测度空间 $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$，使得 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ 且 μ 与 v 在 $\mathcal{F}$ 上一致, 则称 $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的一个完全化扩张. 若 $(\Omega, \tilde{F}, \tilde{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的一个完全化扩张, 使得 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的任何完全化扩张 $(\Omega, \mathcal{E}, \nu)$ 都满足 $\mathcal{E} \supset \tilde{\mathcal{F}}$ 且 ν 与 $\tilde{\mu}$ 在 $\tilde{\mathcal{F}}$ 上一致, 则称 $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

显然，对于任何测度空间，若其完备化是存在的，则必定是唯一的。

能否将任一测度空间完备化？下面的定理给出了肯定的回答。

定理 3.1

若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，那么存在测度空间 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, 使得 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的完全化

Q: $\mathcal{F}$ 是否能拓展？可以怎么拓展?

例题 3.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，$x \in \Omega$，且 $\mu = \delta_x$。分别在条件 (1) 和 (2) 下求出 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的完全化

1. $\{x\} \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$。

定理 3.2

对于 μ 定义在 Ω 上的外测度，μ^* 是由测度空间 μ 诱导出的外测度，$\mathcal{F}_{\mu^*}$ 是一切 μ^* 可测集组成的 σ-代数. 则 $(\Omega, \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*)$ 是 $(\Omega, \sigma(S), \mu)$ 的完全化. 从而 μ 在 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的扩张是唯一的.(此处，将 μ 在 $\sigma(S)$ 上的扩张仍记作了 μ, 而 μ^* 在 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ 上的限制仍记作了 μ^*)

定理 3.3

设 μ 是半集代数 S 上的测度, $A(S)$ 是 S 生成的集代数, 若 μ^* 是 μ 诱导的外测度. 若 $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*(A) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 并存在 $A_\epsilon \in A(S)$ 且:

$$\mu^*(A \Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

定义 3.3

设 $A \subset \mathbb{R}^n$，定义

$$\lambda_n^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ (I_k)_{k\in\mathbb{N}}\text{为}\mathbb{R}^n\text{中开方体序列}\right\},$$

其中，$|I_k|$ 表示 I_k 的体积，$\lambda_n^* \in \mathbb{R}^n$ 是一个外测度, 并称之为 n 维 Lebesgue 外测度.

定理 3.4

令 $S^n = \{(a,b) \subset \mathbb{R}^n : a < b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}^n\}$

$\forall (a,b] \in S^n$，且 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$, 若定义

$$\lambda_n((a,b]) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (b_k - a_k), & a, b \in \mathbb{R}^n \\ \lim\limits_{N\to\infty} \prod_{k=1}^n \left[b_k \wedge N - a_k \vee (-N)\right], \exists k\text{使得}a_k = -\infty, b_k = \infty. \end{cases}$$

其中 $\forall n, m \in \mathbb{R}, n \vee m := \max\{n, m\}, n \wedge m := \min\{n, m\}$，则 λ_n 是 S^n 上的 σ 有限测度,(称之为 S^n 上的体积测度)，并且 λ_n 可以唯一地扩张成 $A_{\lambda_n^*}$ 上的 σ 有限测度。$A_{\lambda_n^*}$ 中的元素称为 n 维 Lebesgue 可测集,λ_n^* 在 $B(\mathbb{R}^n) = \sigma(S^n)$ 上的限制称为 n 维 Borel 测度 (仍记为 λ_n)。

命题 3.1

对于 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Lebesgue 测度记为

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &= \inf\{\lambda_n(G) : A \subset G, G \subset \mathbb{R}^n \text{ 是开集}\} \\ &= \sup\{\lambda_n(K) : A \supset K, K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ 是紧集}\}. \end{aligned}$$

因此,$\lambda_n(A) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$，存在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 和紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $K \subset A \subset G$, 且

$$\lambda_n(G) - \varepsilon \le \lambda_n(A) \le \lambda_n(K) + \varepsilon.$$

例题 3.2

设 M 是度量空间,μ 是 $(M, B(M))$ 上的有限测度, 试证:

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \inf\{\mu(G) : B \subset G, G \subset G\text{是开集}\} \\ &= \sup\{\mu(F) : B \supset F, F \subset M\text{是闭集}\}.\end{aligned}$$

(**提示**: 令 $\mathcal{E} = \{B \in B(M) : B$ 满足上述两个等式$\}$，证明 $\mathcal{E}$ 是包含 M 的所有开集的 σ-代数.)

例题 3.3

设 M 是 Polish 空间,μ 是 $(M, B(M))$ 上的有限测度, 试证:$\forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset M$, 使 $\mu(M \backslash K) < \epsilon$

注:

1. 设 (M, τ) 是拓扑空间，若存在 M 上度量 d，使 (M, d) 是完备可分的度量空间且诱导的拓扑与 τ 一致，则称 M 称为 Polish 空间。
2. Polish 空间与完备可分的度量空间是有区别的. 例如，开区间 $(0, 1)$ 在欧氏度量不是完备的度量空间，但 $(0, 1)$ 在欧氏拓扑下是 Polish 空间。

命题 3.2

若 μ 是 $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ 上的测度，并满足:

1. (有界 Borel 集取值有限)$\forall A \in B(\mathbb{R}^n)$ 有界，$\mu(A) < \infty$;
2. (平移不变性)$\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in B(\mathbb{R}^n), \mu(A) = \mu(A + x)$，其中 $A + x := \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + x, a \in A\}$，同时对于某常数 c 和每一个 $A \in B(\mathbb{R}^n)$，$\mu(A) = c\lambda(A)$。

则存在非负常数 c, 使 $\forall A \in B(\mathbb{R}^n), \mu(A) = c\lambda_n(A)$

命题 3.3

如果 $A \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测的，则 $\lambda(A) > 0$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $(-\delta, \delta) \subset \{x - y : x, y \in A\}$。

命题 3.4

$\mathbb{R}$ 中存在不是 Lebesgue 可测的子集。

定义 3.4

考虑函数 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。若 F 满足以下 (1)(2)，则称 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的分布函数. 若 F 满足以下 (1)(2)(3)(4)，则称 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界分布函数。若 F 满足以下 (1)(2)(3)(5)，则称 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的概率分布函数。

1. $\forall, a, b\in\mathbb{R}^n$，其中 $a=(a_1,\ldots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\ldots,b_n)$，且 $a_k\leq b_k$，对于 $k=1,\ldots,n$，有:

$$\Delta_{b,a}F:=\Delta^{(n)}_{b_n,a_n}\left[\Delta^{(n-1)}_{b_{n-1},a_{n-1}}\ldots\Delta^{(1)}_{b_1,a_1}F\right]\geq 0,$$

其中，对于所有 $\forall k\in\{1,\ldots,n\}$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\Delta^{(k)}_{b_k,a_k}F(x)=F(x_1,\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_n)-F(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_n).$$

2. F 关于自变量的每个分量右连续

3. 对于 $\forall m\in\{1,\ldots,n\}$ 及 $\forall k_1,\ldots,k_m\in\{1,\ldots,n\}$，有:

$$F(\ldots,x_{k_1-1},-\infty,x_{k_1+1},\ldots,x_{k_m-1},-\infty,x_{k_m+1},\ldots)=0.$$

4. $F(\infty,\ldots,\infty)<\infty$.

5. $F(\infty,\ldots,\infty)=1$.

1. 当考虑上述定义中的 $\Delta_{b,a}F$ 与教材中的类似记号的区别. 事实上:

- 当 $n=1$ 时，对于 $\forall a,b\in\mathbb{R}, a\leq b$，有:

$$\Delta_{b,a}F=F(b)-F(a);$$

- 当 $n=2$ 时，对于 $\forall a,b\in\mathbb{R}^2$，其中 $a=(a_1,a_2)\leq b=(b_1,b_2)$，有:

$$\Delta_{b,a}F=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2).$$

2. 当 $n=1$ 时，上面定义的有界差分函数也是有界的。

定义 3.5

设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。若 F 是右连续且单调递增的，则称 F 为 $\mathbb{R}$ 上的分布函数. 进一步, 若 F 还满足:

$$F(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$

$$F(\infty):=\lim_{x\to\infty}F(x)<\infty,$$

则称 F 是 $\mathbb{R}$ 上的有界分布函数，特别地，当 $F(\infty)=1$ 时，则称 F 为 $\mathbb{R}$ 上的概率分布函数

例如，$F(x)=x^{2k+1}$，其中 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$x\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}$，是 $\mathbb{R}$ 上的分布函数是连续的.

定理 3.5

(1) 若 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是分布函数，则在 $B(\mathbb{R}^n)$ 上存在唯一的在有界区间取值有限的测度, 故 σ 有限 $\mu:=\mu_F$ 满足

$$\mu((a,b])=\Delta_{b,a}F,\quad a,b\in\mathbb{R}^n,\ a\le b.$$

称 μ 为由 F 决定 (或诱导) 的 $B(\mathbb{R}^n)$ 上的 Borel–Stieltjes 测度. 称由 μ 称由 μ 所唯一决定的 F_{μ^*} 上的测度为 Lebesgue–Stieltjes 测度，简称 L-S 测度。

(2) 反之, 若 $\mu\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的 L-S 测, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一族分布函数

$$\{F+c:c\in\mathbb{R}\}$$

使得上式成立 (若将相差一个常数的分布函数视为同一个, 则这样的分布函数还是唯一的)。

注：当 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2\ldots x_n$ 时, L-S 测度就是由 Lebesgue 测度. 通过我们不加区分地称 Borel–Stieltjes 测度得到的 Lebesgue–Stieltjes 测度为 $L-S$ 测度。

推论 3.1

记 B 是 $\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的概率测度全体, 记 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的概率分布函数全体，对任意的 $\mathbb{P}\in\mathcal{B}$ 以及 $F\in\mathcal{F}$. 若令

$$F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

则上式建立了 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{F}$ 之间的双射。

定义 3.6

设 $(\Omega,\mathcal{F})$，$(E,\mathcal{E})$ 是两个可测空间 (Measurable spaces)，函数 $f:\Omega\to E$ 是

$$f^{-1}(B)\in\mathcal{F},\quad B\in\mathcal{E},$$

则称函数 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的可测函数，特别地，当 Ω,E 是拓扑空间，且 $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\Omega)$, $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$ 时，称函数 f 为从 Ω 到 E 的 Borel 可测映射.

在以上定义中，1) $f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:f(\omega)\in B\}$，即 B 在 F 下的逆像, 也简记为 $\{f\in B\}$ 2) $f(\Omega)\subset E$, 但未必有 $f(\Omega)\in\mathcal{E}$。

注意，若无特别说明，可测空间未必是完全的.

定义 3.7

设 Λ 是任意一个指标集，$(\Omega,\mathcal{F}),(E_\alpha,\mathcal{E}_\alpha),\alpha\in\Lambda$ 是可测空间。对于 $\alpha\in\Lambda$，$f_\alpha:\Omega\to E_\alpha$ 是可测映射，则

$$\sigma(\{f_\alpha:\alpha\in\Lambda\}):=\sigma\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda\sigma}(f_\alpha)\right)=\sigma\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha)\right)$$

为 $\{f_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 生成的 σ-代数。

易知，$\sigma(\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$ 是使得每一个 $f_\alpha, \alpha \in \Lambda$ 都是可测的最小的 σ-代数。

定义 3.8

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个可测空间，$f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ 是一个映射。若

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}),$$

则称 f 为定义在 Ω 上的 $\mathcal{F}$ 可测函数 (简称为可测函数并简记为 $f \in \mathcal{F}$), 特别地 (1) 若 f 取值于 $\mathbb{R}$, 则称 f 为 Ω 上的实值可测函数;(2) 若 Ω 是拓扑空间且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, 则称 f 为 Ω 上的 Borel 可测函数

令 $n \in \mathbb{N}$. 若 $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, 则称 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 可测函数为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数, 其中,$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测集的全体.

同样可以定义 Ω 上的复值可测函数, 即定义在 Ω 上, 取值于 $\mathbb{C}$ 的函数, 且其实部和虚部都是 $\mathbb{R}$ 值可测函数.

显然，若 $\Omega = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$，$f$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 可测函数，则 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数.

注：(1) 关于以上定义, 除 Lebesgue 可测函数外, 可测映射的定义不依赖测度 (2) 可测函数取值可为 $\pm\infty$, 实值可测函数取值于 $\mathbb{R}$

例题 3.4

1. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，则恒同映射 $id : \Omega \to \Omega, x \mapsto id(x) = x$，是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到自身的可测映射。

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(E, \mathcal{E})$ 两个可测空间，$E \neq \emptyset$，$\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$，则任何映射 $f : \Omega \to E$ 都是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射。

3. 若 Ω 是一个集合，$(E, \mathcal{E})$ 是一可测空间，则任何映射 $f : \Omega \to E$ 都是从 $(\Omega, P(\Omega))$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射。

Exercise! 设 f 是从可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射，且 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$。试证：$f$ 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, E \cap f(\Omega))$ 的可测映射，且 $E \cap f(\Omega) = \{\emptyset, f(\Omega)\}$。(*Hint: 后一结论的证明可采用反证法.*)

例题 3.5

根据 3.1 节的例 11 来看，考虑 $\bar{S}=\{[a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}\}$，则 $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})=\sigma(\bar{S})$。事实上，类似 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 若令 $\mathbb{F}:=\mathbb{R}$或$\mathbb{Q}$, 且

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{E}}_1 &:= \{(-\infty,a]:a\in\mathbb{F}\},\\
\bar{\mathcal{E}}_2 &:= \{(-\infty,a):a\in\mathbb{F}\},\\
\bar{\mathcal{E}}_3 &:= \{[a,\infty):a\in\mathbb{F}\},\\
\bar{\mathcal{E}}_4 &:= \{(a,\infty):a\in\mathbb{F}\},\\
\bar{\mathcal{E}}_5 &:= \mathcal{B}(\mathbb{R})\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\},
\end{aligned}$$

有 $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\bar{\mathcal{E}}_j)$，其中 $j=1,2,3,4,5$。

关于逆映射的一些性质，我们首先提出以下的引理，其中，引理 1 的证明略作省略。

设 $f:\Omega\to\mathcal{E}$ 是映射. 以下等式成立:

1. $f^{-1}(E)=\Omega, f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$;
2. $f^{-1}(B^C)=(f^{-1}(B))^C$;
3. $f^{-1}(\bigcup_\gamma B_\gamma)=\bigcup_\gamma f^{-1}(B_\gamma)$;
4. $f^{-1}(\bigcap_\gamma B_\gamma)=\bigcap_\gamma f^{-1}(B_\gamma)$;
5. $f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)$，其中 $B_i\subset E, i=1,2$.

若把取逆像看做运算, 则它与集合的交并差运算可交换

设 $f:\Omega\to\mathcal{E}$ 是映射. 若 $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$，则

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))=\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

若把 σ 看成运算，则 $f^{-1}\circ\sigma=\sigma\circ f^{-1}$.

定理 3.6

设 $(\Omega,\mathcal{F}),(E,\mathcal{E})$ 都是测度空间. $f:(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{E})$ 是可测映射当且仅当, 存在 E 的子集族 $\mathcal{C}$ 满足

1. $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{E}$,
2. $\forall A\in\mathcal{C}, f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

定理 3.7

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间, $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ 为一映射, 则 f 是可测函数当且仅当,

$$f^{-1}((-\infty,a])=\{\omega\in\Omega:-\infty\le f(\omega)\le a\}\in\mathcal{F},\quad a\in\mathbb{R}.$$

推论 3.2: Exercise

设 f 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}$. 令 $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}$. 以下论述等价.

1. f 是 $\mathcal{F}$ 可测函数;
2. $\forall a \in \mathcal{F}, f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{F}$;
3. $\forall a \in \mathcal{F}, f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}$;
4. $\forall a \in \mathcal{F}, f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$;
5. $\forall a \in \mathcal{F}, f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{F}$;
6. $\{f = -\infty\} \in \mathcal{F}, \{f = \infty\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

(7) 有关 $\overline{\mathbb{R}}$ 上定义和不等式.

$$d(\xi, \eta) := |\arctan(\xi) - \arctan(\eta)|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

其中, $\arctan(\infty) := \frac{\pi}{2}, \arctan(-\infty) := -\frac{\pi}{2}$, 则 (1) 也等价于,f 是从 (Ω, F) 到 $(\overline{\mathbb{R}}, \sigma(\mathcal{T}_d))$ 的可测映射. (Hint: 若 $B \subset \mathbb{R}$, 则 B 关于欧式度量是闭集当且仅当 B 关于度量 d 是闭集)

例题 3.6

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $c \in \bar{\mathbb{R}}$. 则广义常值函数 $f = c$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的.
2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $A \subset \Omega$. 则 A 的示性函数 $\mathbf{1}_A$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的当且仅当 $A \in \mathcal{F}$.

定理 3.8

设 $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间. 对于 $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $f_k : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ 是一映射. 令 $f = (f_1, \dots, f_n)$. f 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\bar{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$ 的可测映射当且仅当，对于 $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, f_k 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ 的可测映射.

定理 3.9

设 $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$, $(A, \mathcal{A})$ 都是可测空间。若 $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ 是可测映射, $g : (E, \mathcal{E}) \to (A, \mathcal{A})$ 是可测映射, 则复合映射 $g \circ f$ 从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(A, \mathcal{A})$ 的可测映射。

定理 3.10

给定度量空间 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y)。若 $f : X \to Y$ 是连续映射，则 f 从 $(X, \mathcal{B}(X))$ 到 $(Y, \mathcal{B}(Y))$ 的可测映射。

推论 3.3

其中 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty), i$ 是虚数单位设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间。若 $f:\bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ 是连续函数，$g:\Omega \to \bar{\mathbb{R}}^n$ 是可测函数，则 $f\circ g$ 是可测函数。

特别的，若 ξ,η 都是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数，则

$$\begin{aligned} \xi^n(n\in\mathbb{N}), |\xi|^r\,(r\in\mathbb{R}_+, \text{并约定} 0^0 := 1) \\ e^{-\lambda\in\mathbb{R}}, e^{it\xi}(t\in\mathbb{R}) \\ \xi\vee\eta, \xi\wedge\eta \end{aligned}$$

都是可测函数。此外，有

$$\xi+\eta,\quad \xi-\eta,\quad \xi\eta,\quad \frac{\xi}{\eta},$$

均有意义, 则它们也都是可测函数

命题 3.5

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，$f,g:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ 都是 $\mathcal{F}$ 可测的，$E\in\mathcal{F}$，则

$$\{x\in E: f(x)<g(x)\},\quad \{x\in E: f(x)\le g(x)\},\quad \{x\in E: f(x)=g(x)\}$$

都属于 $\mathcal{F}$.

定义 3.9

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 Ω 上的 $\bar{\mathbb{R}}$ 值函数序列。$\forall\omega\in\Omega$，定义

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) &:= \sup\{f_n(\omega): n\in\mathbb{N}\}, \\ \inf\nolimits_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) &:= \inf\{f_n(\omega): n\in\mathbb{N}\}, \\ \lim\ \sup\nolimits_{n\to\infty} f_n(\omega) &:= \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\nolimits_{k\ge n} f_k(\omega)\right), \\ \lim\ \inf\nolimits_{n\to\infty} f_n(\omega) &:= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\nolimits_{k\ge n} f_k(\omega)\right). \end{aligned}$$

则 $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$，$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$，$\lim\ \sup_{n\to\infty} f_n$，$\lim\ \inf_{n\to\infty} f_n$ 分别称为可测函数序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的上确界、下确界、上极限、下极限。

对于定义在 Ω 上的 $\bar{\mathbb{R}}$ 值函数序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\forall x\in\Omega$，若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在（可能为 $\pm\infty$）当且仅当 $\lim\ \inf_{n\to\infty} f_n = \lim\ \sup_{n\to\infty} f_n$. 令

$$\Delta := \{x\in\Omega: \lim\ \inf\nolimits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\ \sup\nolimits_{n\to\infty} f_n(x)\}.$$

定义 $\lim_{n\to\infty} f_n : \Delta\to\bar{\mathbb{R}}$ 满足

$$\left(\lim\nolimits_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim\nolimits_{n\to\infty} f_n(x),\quad x\in\Delta.$$

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，$D\in\mathcal{F}$，$f:D\to\bar{\mathbb{R}}$ 是测度函数。对于 $\forall a\in\mathbb{R}$，

$$\{x\in D:-\infty\le f(x)\le a\}\in\mathcal{F}$$

则称 f 在 D 上为可测函数。

定理 3.11

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数序列，则

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n,\inf_{n\in\mathbb{N}}f_n,\limsup_{n\to\infty}f_n,\liminf_{n\to\infty}f_n$$

都是定义在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数。并且 $\Delta\in\mathcal{F}$，$\lim_{n\to\infty}f_n$ 上 Δ 上的 $\mathcal{F}$ 可测函数。（请与连续函数序列的相关性质比较。）

在概率论中, 可测函数有以下叫法

定义 3.10

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间, $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, $f:(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{E})$ 是可测函数。称 f 为从 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的随机元. 特别地, 若 $(E,\mathcal{E})=(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, 则称 f 为 Ω 上的广义实值函数. 若 $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 则称 f 为 Ω 上的实值随机变量，简称为随机变量，有时简记为 r.v..

同样，可以定义从 Ω 上的复值随机变量, 即取值于 $\mathbb{C}$ 的函数, 且其实部和虚部都是有限实值随机变量.

由于随机变量是特殊的可测函数, 所以前文关于可测函数的结论也适用于随机变量。例如, 若 X 为 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 是连续函数, 则 $f(X)$ 是 r.v.. 特别地，若 X,Y 是 r.v.，则 X^n $(n\in\mathbb{N})$, $|X|^r$ $(r\in\mathbb{R}^+)$, $e^{-\lambda X}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, e^{itX} $(t\in\mathbb{R})$, $X\wedge Y$, $X\vee Y$, $X+Y$, $X-Y$, XY, X/Y $(Y(\omega)\neq 0,\omega\in\Omega)$ 都是 r.v..

定理 3.12

设 $(\Omega,\mathcal{F})$, $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, $f:(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{E})$ 是可测映射, μ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度. 令

$$\mu_f(B):=f_{\#\mu}(B)=\mu(f^{-1}(B)),\quad B\in\mathcal{E}.$$

则 μ_f 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 并将之为 μ 在可测映射 f 下的像测度 (或推移测度)。此外, 若 μ 是概率测度，则 μ_f 也是概率测度。

例题 3.7

设 μ 是 $\mathbb{Z}^2$ 上的测度，$\xi:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ 为一映射且满足 $\xi(n,m)=n-m$, $n,m\in\mathbb{Z}$, 则 μ 在 ξ 下的像测度 μ_ξ 即是

$$\begin{aligned}\mu_\xi(\{n\})&=\mu(\xi^{-1}(\{n\}))=\mu(\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2:\xi(i,j)=i-j=n\})\\&=\mu(\{(j+n,j):j\in\mathbb{Z}\})=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu(\{(n+j,j)\}),\quad n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例题 3.8

若 $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为投影映射, 即 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \pi_1(x, y) = x$. 则 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$(\pi_1)_{\#}\lambda_2(B) = \begin{cases} 0, & 若\lambda(B) = 0, \\ \infty, & 若\lambda(B) > 0. \end{cases}$$

(同前文, λ 和 λ_2 为 $\mathbb{R}^2$ 上的二维 Lebesgue 测度.)

1. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是单调函数. 证明: $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是可测的.
2. 参考习题 4.1-4.
3. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性双射,λ_n 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度, 试证:
$$T_{\#}\lambda_n = \frac{1}{\det(T)}\lambda_n.$$
4. 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, $\bar{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的完全化, 则 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\bar{\mathcal{F}}$ 可测的, 当且仅当如果存在 $\mathcal{F}$ 的可测函数 $h : \Omega \to \mathbb{R}$, 使得 $f \neq h$ 是 μ 零集.
5. 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的可测函数序列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 存在, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 是 $\mathcal{F}$ 可测函数

定义 3.11

设 X 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量

(a) 随机测度 $\mathbb{P}_X := X_{\#}\mathbb{P}$ 称为 (随机变量)X 的概率分布测度 (若随机变量 X 具有概率分布测度 μ, 则简记为 $X \sim \mu$)

(b) 映射 $F_X : x \in \mathbb{R} \to \mathbb{P}(\{X \leq x\})$ 称为 X 的概率分布函数.

(c) 设 $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族随机变量. 若 $\mathbb{P}_{X_\alpha} = \mathbb{P}_{X_\beta}, \alpha, \beta \in \Lambda$, 则称 $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是同分布的.(若 $\mathbb{P}_{X_\alpha} \sim \mathbb{P}_{X_\beta}$, 即记为 $X_\alpha \overset{\text{Law}}{=} Y_\beta$.)

(b) 中概率分布函数的定义与之前的定义相容, 事实上, 易知 (b) 中的 $x \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$ 是单调增, 右连续的, 且
$$F_X(-\infty) = 0, F_X(\infty) = 1$$

定理 3.13

若 F 是 $\mathbb{R}$ 上的概率分布函数, 则存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的随机变量 X, 使得 $F_X = F$. 更一般的, 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的概率分布函数, 则存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的 n 维随机变量 $X := (X_1, \ldots, X_n)$, 使得 $F_X = F$.

例题 3.9

设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一概率分布函数. 令

$$F^{-1}(t):=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)\geq t\},t\in(0,1)$$

以下结论亦成立.

1. $F^{-1}(t)=\min\{x\in\mathbb{R}:F(x)\geq t\},t\in(0,1)$.
2. F^{-1} 是单调增且左连续的.
3. $\forall t\in(0,1),\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $F^{-1}(t)\leq x \iff t\leq F(x)$.
4. $\forall t\in(0,1)$ 有 $F(F^{-1}(t))\geq t$, 且等号成立当且仅当 $\exists y\in\mathbb{R}$ 使 $t=F(y)$.
5. 若 F 是连续的, 则 $F(F^{-1}(t))=t,t\in(0,1)$.
6. $F^{-1}(F(x))\leq x,x\in\mathbb{R}$.
7. 若 $x\in\mathbb{R}$ 则 $F^{-1}(F(x))<x \iff \exists y\in(-\infty,x)$ 使 $F(y)=F(x)$.
8. F 是连续的当且仅当 F^{-1} 是严格单调增的

例题 3.10

设 $(\Omega,F,\mathbb{P})$ 是概率空间, $X:\Omega\to\mathbb{N}$ 是随机变量并满足 $\mathbb{P}(X=k)=2^{-k},k\in\mathbb{N}$. 求 X 的概率分布函数的广义逆.

例题 3.11

给定分布列

$$\begin{pmatrix}x_1,x_2,\ldots\\p_1,p_2,\ldots\end{pmatrix}$$

其中 $p_k\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$, 可以构造离散型 r.v. 如下令 $\Omega:=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}:=\{A:A\subset\Omega\}$,

$$P(A):=\sum_{x_n\in A}p_n,\quad A\subset\Omega,$$

$$X(x_n):=x_n,\quad x_n\in\Omega.$$

从而, X 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上根据分布列的离散型 r.v..

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间

1. 若 $p\in[0,1]$, $X:\Omega\to\{0,1\}$, $\mathbb{P}_X=(1-p)\delta_0+p\delta_1$, 则 X 是服从参数为 p 的 Bernoulli 的 r.v., 其概率分

布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

2. 令 $n \in \mathbb{N}$, 若 $p \in [0,1]$, $X : \Omega \to \{0,1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

其中, $C_k^n := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0,1,\dots,n$, 则 X 是服从参数为 n,p 的二项随机分布 r.v.

3. 令 $\lambda \in [0,\infty)$, 若 $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$P_X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$$

则 X 是服从参数为 λ 的 Poisson 分布的 r.v.

例 3.1

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 为可测函数, 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. 可以如下构造连续型 r.v., 令 $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(A) := \int_A f(x)dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(这里的积分为 Lebesgue 积分),$\mathbb{P}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度. 令

$$X(x) := x, \quad x \in \Omega,$$

则 X 是以 f 为概率密度函数的 r.v..

连续随机变量的例子:

(1) 定义:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0 或 x > 1, \end{cases}$$

则 X 为服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布的 r.v..

(2) 对于 $a \in \mathbb{R}, b > 0$. 若

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

则 X 为服从正态分布 $N(a,b^2)$ 的 r.v..

(3) 对于 $\theta > 0$. 若

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \in [0,\infty),$$

则 X 服从参数为 θ 的指数分布的 r.v..

(4) 令 $\theta, r > 0$. 若

$$f(x) = \frac{\theta^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\theta x}, \quad x \in [0, \infty),$$

其中，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数，即

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx,$$

则 X 为服从参数为 θ, r 的 Gamma 分布的 r.v..

(5) 对于 $a, b > 0$. 若:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in [0, 1],$$

则 X 为服从参数为 a, b 的 Beta 分布的 r.v..

(6) 若

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

则 X 为服从 Cauchy 分布的 r.v..

设 X 是一个 n 维实值随机变量,μ_X 是它的概率分布测度,$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 Borel 可测函数. 则 $f(X)$ 的概率分布测度 (函数) 可如下表示:

$$\mu_{f(X)}(B) = \mu_X(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m);$$
$$F_{f(X)}(x) = \mu_X(f^{-1}((-\infty, x])), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

例题 3.12

设一维随机变量 X 的概率分布函数为 F. 求 $sinX$ 的概率分布函数.

解：对于所有 $x \in [-1, 1]$，定义 $a_n = (2n-1)\pi - \arcsin x, b_n = 2n\pi + \arcsin x, n \in \mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned} F_{\sin X}(x) &= \mu_X(\arcsin([-1, x])) = \mu_X\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [a_n, b_n]\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_X([a_n, b_n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_X((-\infty, b_n] \backslash (-\infty, a_n)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mu_X((-\infty, b_n]) - \mu_X((-\infty, a_n))] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n - 0)]. \end{aligned}$$

其中，$F_{\sin X}(x) = 0, x < -1; F_{\sin X}(x) = 1, x > 1$.

定义 3.12

设函数 $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. 分别称 $f^+ := f \vee 0, f^- := (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$ 为 f 的正部和负部.

函数的正部和负部有以下性质:

1. $\forall x \in \Omega$, 若 $f^+(x) \neq 0$, 则 $f^-(x) = 0$; 若 $f^-(x) \neq 0$, 则 $f^+(x) = 0$.

2. $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$.

3. $f \leq g \Leftrightarrow f^+ \leq g^+$且$f^- \geq g^-$.

4. 若 f 取值于 $\mathbb{R}$, $f^+ = \frac{|f|+f}{2}, f^- = \frac{|f|-f}{2}$.

定理 3.14

可测函数的正部和负部都是可测函数

定义 3.13

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一可测空间，设 $n \in \mathbb{N}$，有 $\forall A_k \in \mathcal{F}$，其中 $k = 1, \ldots, n$，两两不交,$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ 且 $a_k \in \bar{\mathbb{R}}(\mathbb{C}), k = 1, 2, \cdots, n$, 则称函数

$$f := \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$$

为定义在 Ω 上的简单函数

定义 3.14

$(\Omega, \mathcal{F})$ 是一可测空间, 若 $A_k \in \mathcal{F}$，其中 $k \in \mathbb{N}$，两两不交, 满足 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ 且 $a_k \in \bar{\mathbb{R}}$ (或 $\mathbb{C}$)，$k \in \mathbb{N}$, 则称函数

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{A_k}$$

为定义在 Ω 上的初等函数

若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，则 $\mathcal{F}$ 简单函数和 $\mathcal{F}$ 初等函数都是 $\mathcal{F}$ 可测函数

例题 3.13

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，其中 $A_n \in \mathcal{F}$ 且 $n \in \mathbb{N}$ 两两不交, 满足 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$。当 $\omega \in A_n$ 时，有 $X(\omega) = x_n \in \mathbb{R}$, 即

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbf{1}_{A_n}$$

从而,X 为一离散型 r.v. 取值于 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 且 X 的概率分布测度为

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{x_n}$$

其中，

$$p_n := \mathbb{P}(\{X = x_n\}) = P(A_n)$$

命题 3.6

若 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间,f,g 为 $\mathcal{F}$ 简单函数 ($\mathcal{F}$ 初等函数)，则:

1. 如果 f,g 均属于 $\mathbb{R}$，$f+ig$ 为 $\mathbb{F}$ 简单函数 ($\mathcal{F}$ 初等函数);
2. $f+g$ 有意义时,(即除去 $(\pm\infty)+(\mp\infty),(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 的情形),$f+g$ 也是 $\mathcal{F}$ 简单函数 ($\mathcal{F}$ 初等函数)。

定理 3.15

若 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，则:

1. 任一非负 $\mathcal{F}$ 可测函数是非负不降 $\mathcal{F}$ 简单函数序列的极限
2. 任一 $\mathcal{F}$ 可测函数是 $\mathcal{F}$ 简单函数序列的极限
3. 任一有界 $\mathcal{F}$ 可测函数是 $\mathcal{F}$ 简单函数序列的一致极限。

定理 3.16

若 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，则:

1. 任一 $\mathcal{F}$ 可测函数是 $\mathcal{F}$ 初等函数序列的一致极限;
2. 任一非负 $\mathcal{F}$ 可测函数是非负不降 $\mathcal{F}$ 初等函数序列的一致极限。

根据定理 9，要证明关于可测函数的结论成立，我们有时可以采用以下思路，即先证明此结论对示性函数成立，再证明此结论对非负简单函数成立，然后证明此结论对非负可测函数成立，最后证明此结论对可测函数成立（可测函数可表示成两个非负可测函数，即正部和负部之差）.

本节以下内容只考虑取值于 $\bar{R}$ 中的函数情形

给定集合 Ω. 令 $\mathcal{F}=\{f:f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}\}$。

定义 3.15

1. 若 $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ 并满足: $\forall f\in\mathcal{L},f^+,f^-\in\mathcal{L}$, 则称 $\mathcal{H}$ 为 Ω 的加减系 2. 若 $L\subset\mathcal{F}$(可能是 $L=H$) 满足:

(a) $\mathbb{I}\in L$;

(b) L 中有限个元素的线性组合 (如果有意义) 属于 L(特别的, 对任意的 $f,g\in L$, $c_1,c_2\in\bar{\mathbb{R}}$, 若 c_1f+c_2g 有意义, 则 $c_1f+c_2g\in L$);

(c) 若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L, 0\le f_n\uparrow f$, 且 f 有界或 $f\in\mathcal{L}$, 则 $f\in L$

则称 L 为 Ω 的 $\mathcal{L}$ 系 (注意, 加减系和 $\mathcal{L}$ 系都是函数类)

例题 3.14

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个测度空间。若令 $H=\{f:f\text{是}\mathcal{F}\text{可测的}\}$,H 是 Ω 的加减系。
另外, 若 L 是 Ω 的 $\mathcal{L}$ 系, 则集类 $A\subset\Omega:\mathbb{I}_A\in L$ 是 Ω 的一个 λ 系

定理 3.17

设 $\mathcal{H}$ 是 Ω 的加减系. 若 Ω 的 $\mathcal{L}$ 包含 Ω 的 π 系 $\mathcal{C}$ 中任一集合的示性函数, 则 L 包含一切属于 $\mathcal{L}$ 的 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测函数.

注：给定加减系 $\mathcal{H},\pi\text{系}\mathcal{C},\text{及}\mathcal{L}\text{系}L$ 若 $\{\mathbb{I}_A:A\in\mathcal{C}\}$, 则

$$\{f\in H:f\in\sigma(C)\}\subset L$$

定理的典型用法是：要证明某个函数类 $\mathcal{H}$ 具有某种性质 P_0，为此引入一个加法系 $\mathcal{L}$, 并使

$$L:=\{f:f\text{具有性质}P_0\}$$

为一 $\mathcal{L}$ 系；再引入一个 π 系 $\mathcal{C}$，使 $\mathcal{L}$ 中关于 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测的函数类包含 $\mathcal{H}$ 于是，由定理知，只要证明了 $\mathcal{C}$ 中集合的示性函数都属于 L，那么 $\mathcal{H}$ 中元素就具有性质 P_0. 这个方法通常称为 $\mathcal{L}$ 系方法

定理 3.18

给定集合 Ω, 可测空间 $(E,\mathcal{E})$，及二映射 $f:\Omega\to E$ 和 $\varphi:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$。$\varphi$ 是 $\sigma(f)$ 可测函数的充要条件是, 存在 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数 g，使得 $\varphi=g\circ f$。在此情形，若 φ 有限 (有界), 则可取 g 有限 (有界)

推论 3.4

若 $f=(f_1,\ldots,f_n)\in\Omega$ 上 n 维可测函数, 则 $\psi\in\sigma(f)=f^{-1}(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}^n}))\Leftrightarrow$ 存在 $(\bar{\mathbb{R}^n},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}^n}))$ 上的可测函数 G, 使得 $\psi=G\circ f=G(f_1,\cdots,f_n)$

定理 3.19

设 (E,d) 是度量空间, $\mathcal{L}=\{h:h:E\to\mathbb{R}\}$. 若 L 是包含 E 上一切有界连续函数的 $\mathcal{L}$ 系, 则 L 包含 $\mathcal{L}$ 中一切 $\mathcal{B}(E)$ 可测函数.

例题 3.15

1. 给定可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 及函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$. 若 $|f|$ 是可测的, 则能否得到到 f 也是可测的

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, μ 是有限的, 且 $f : \Omega \to [0, \infty)$ 是可测函数. 证明: 如果 $\{a \geq 0, \mu(f = a) \neq 0\}$ 是至多可数的.

3. 设 M 是拓扑空间. 函数 $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ 称为在一点 $a \in M$ (resp. 上) 半连续的, 如果对任意的 $\delta \in (-\infty, f(a))$ (resp. $\delta \in (f(a), \infty)$), 存在 a 的领域 U 使得

$$f(x) > \delta \text{ (resp. } f(x) < \delta), \quad x \in U.$$

若 f 在 M 的每一点都是下 (resp. 上) 半连续的，则称 f 在 M 上是下 (resp. 上) 半连续的.

设 (E, d) 是度量空间, $\phi : E \to [0, \infty)$ 是下半连续的, 且 ϕ 不恒等于 ∞. $\forall \lambda > 0$, 令

$$\phi_\lambda(x) = \inf_{y \in E} [\phi(y) + \lambda d(x, y)], \quad x \in E.$$

试证:

1. $|\phi_\lambda(x) - \phi_\lambda(y)| \leq \lambda d(x, y), x, y \in E$;
2. $\forall x \in E$, 当 $\lambda \uparrow \infty$ 时 $\phi_\lambda(x)$ 单调上升到 $\phi(x)$

4. 设定非空集合 Ω. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的 π 系, $\mathcal{H}$ 是 Ω 上的有界实值函数组成的线性空间, 并满足

1. $\nVdash \in \mathcal{H}$, 且$\forall B \in \mathcal{C}, \nVdash_B \in \mathcal{H}$,
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中一列单调增的有界序列, 则 $\lim_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{H}$.

证明: $\mathcal{H}$ 包含所有 Ω 的有界的 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测函数.

5. 设 $\alpha \in J, X_\alpha$ 是从可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到可测空间 $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$ 的可测映射, $\mathcal{H}$ 是 Ω 上的有界实值函数组成的线性空间, 并满足

1. $\forall I \in J$, 及$A_i \in \mathcal{E}_i, i \in I, i \in I$, 有 $\prod_{i \in I} \nVdash_{A_i} \circ X_i \in \mathcal{H}$
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中一类单调递增的有界序列, 则 $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{H}$.

证明: $\mathcal{H}$ 包含所有 Ω 上的有界实值函数 $\sigma(X_\alpha : \alpha \in J)$ 可测函数

4 Lebesgue 积分的性质

定义 4.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一个测度空间，f 是非负 $\mathcal{F}$ 简单函数．不妨设存在 $m \in \mathbb{N}$, $(x_k)_{k=1}^m \subset [0, \infty]$, 及 $\{A_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{F}$ 两两不交并满足 $\bigcup_{k=1}^m A_k = \Omega$, 使得

$$f = \sum_{k=1}^m x_k \mathbb{I}_{A_k}.$$

(1) 在 X 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{k=1}^m x_k \mu(A_k).$$

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则定义 f 在 A 上对 μ 的积分为

$$\int_A f d\mu := \int_A f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega f \mathbb{I}_A d\mu.$$

1. 设 f 是 $\mathcal{F}$ 简单函数 (未必非负), 不妨记 $f = \sum_{k=1}^m x_k \mathbb{I}_{A_k}$, 其中 $m \in \mathbb{N}$, $(x_k)_{k=1}^m \subset \bar{\mathbb{R}}$, 且 $\{A_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{F}$ 是两两不交, 并满足 $\bigcup_{k=1}^m A_k = \Omega$. 若仿照定义 i 定义

$$\int_\Omega f d\mu := \sum_{k=1}^m x_k \mu(A_k),$$

则此式右端可能无意义.

2. 由定义知, 在测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上, 任意非负 $\mathcal{F}$ 简单函数的积分一定存在, 但可能取值为 ∞. 由于任一简单函数的表达式不唯一, 所以此定义合理吗? 以下引理给出了肯定的回答.

定理 4.1: 引理 2

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个测度空间, f, g 是其上两个非负 $\mathcal{F}$ 简单函数.

1. 若 $f \le g$, 则 $\int_\Omega f d\mu \le \int_\Omega g d\mu$;
2. 若 $c \ge 0$, 则 $\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu$;
3. 若令 $\varphi(A) := \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{F}$, 则 φ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个测度.

定义 4.2

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一个测度空间, f 是非负可测函数. 定义 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega) := \sup_\Omega \left\{ \int_\Omega h d\mu : 0 \le h \le f, h \text{ 为 } \mathcal{F} \text{ 简单函数} \right\} \quad (\bigstar)$$

若 $A \in \mathcal{F}$, 则定义 f 在 A 上对 μ 的积分为:

$$\int_A f d\mu := \int_A f(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega f\mathbb{I}_A d\mu.$$

对于一切非负可测函数, $(\bigstar)$ 所定义的积分是存在的, 确定的. 由引理 2 得知, 非负 $\mathcal{F}$ 简单函数的积分也满足 $(\bigstar)$ 因此, 此定义是上一个定义的推广。

定理 4.2

设 f,g 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的非负可测函数. 若 $f \le g$, 则

$$\int_\Omega f d\mu \le \int_\Omega g d\mu.$$

特别地, 若 $A,B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$, 则

$$\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu.$$

定理 4.3

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的非负可测函数列. 若 $f_n \uparrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

注: 结论中的极限也可换成上确界

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, $\{f_n\},\{g_n\}$ 是两个非负可测函数序列, 满足 $f_n \uparrow h$, $g_n \uparrow h$. 由单调收敛定理知:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu.$$

而任意非负可测函数可由单调增的非负简单函数序列逼近. 于是, 我们得出如下定义.

定义 4.3: ii'

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, f 是非负可测函数, $\{f_n\}$ 是非负简单函数序列, 满足 $f_n \uparrow f$. 定义 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

定义 4.4: iii

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，f 是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数，f^+ 和 f^- 分别是 f 的正部和负部. 若 $\int_\Omega f^+ d\mu$和 $\int_\Omega f^- d\mu$ 有限, 则定义 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

并称 f 在 Ω 上对 μ 的积分存在, 特别的, 若 $\int_\Omega f(\omega)d\mu$ 有限, 则称 f 在 Ω 上对 μ 可积, 若 $\int_\Omega f^+ d\mu$ 和 $\int_\Omega f^- d\mu$ 都是 ∞, 则称 f 在 Ω 上对 μ 的积分不存在

若 $A \in \mathcal{F}$，则定义 f 在 A 上对 μ 的积分为

$$\int_A f d\mu := \int_A f(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega f\mathbb{I}_A d\mu.$$

定义 4.5: iv

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，f 是 $\mathbb{C}$ 值可测函数，且 $f = f_1 + if_2$，其中 f_1, f_2 都是 $\mathbb{R}$ 值可测函数. 若 f_1, f_2 都在 Ω 上对 μ 可积, 则定义 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega f_1 d\mu + i\int_\Omega f_2 d\mu.$$

并称 f 在 Ω 上对 μ 可积

若 $A \in \mathcal{F}$，则定义 f 在 A 上对 μ 的积分为

$$\int_A f d\mu := \int_A f(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega f\mathbb{I}_A d\mu.$$

注 1: 根据定义, 对 $\mathbb{C}$ 值可测函数而言, 积分存在和可积是等价的

注 2: 符号 $\int_A f(\omega)d\mu(\omega)$ 有时写为 $\int_A f(\omega)\mu(d\omega)$ 或 $\mu(f\mathbb{I}_A)$, 特别的, 符号 $\int_\Omega f d\mu$ 有时写成 $\mu(f)$

定义 4.6

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是概率空间，f 是 $\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 值可测函数。称 f 在 Ω 上对 μ 的积分为 f 在 Ω 上对 μ 的数学期望，当 f 在 Ω 上对 μ 有积分存在时, 称 (数学) 期望存在, 当 f 在 Ω 上对 μ 可积时, 称 (数学) 期望有限

当 μ 是概率测度时，为了方便, 时常把符号 $\int_\Omega f d\mu, \int_A f d\mu$ 分别写为 $\mathbb{E}_\mu f$ 或 $\mathbb{E}f$,$\mathbb{E}_\mu(f\mathbb{I}_A)$ 或 $\mathbb{E}(f\mathbb{I}_A)$

例题 4.1

设概率空间为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的离散型 (r.v.), 取值为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, 且 $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n \in (0,1), n \in \mathbb{N}$. 若 X 的数学期望存在, 则

$$\mathbb{E}X = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n p_n$$

事实上，令 $A_n=\{X=x_n\},n\in\mathbb{N}$。从而,$X=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\mathbf{1}_{A_n}$，且 $P(A_n)=p_n,n\in\mathbb{N}$, 由定义及单调收敛定理得,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X&=\int_\Omega Xd\mathbb{P}=\int_\Omega X^+d\mathbb{P}-\int_\Omega X^-d\mathbb{P}\\&=\int_\Omega\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\mathbf{1}_{A_n}d\mathbb{P}-\int_\Omega\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x_n)\mathbf{1}_{A_n}d\mathbb{P}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\int_\Omega\mathbf{1}_{A_n}d\mathbb{P}-\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\int_\Omega\mathbf{1}_{A_n}d\mathbb{P}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_np_n-\sum_{n\in\mathbb{N}}x_np_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_np_n.\end{aligned}$$

定义 4.7

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，$P:=\{P(\omega):\omega\in\Omega\}$ 是一个与 $\omega\in\Omega$ 有关的性质。若 $\{\omega\in\Omega:P(\omega)\text{不成立的}\}$ 是 μ 零集，则称 P 关于 μ 对几乎一切 $\omega\in\Omega$ 成立, 简记 P 成立,μ a.e. 当 μ 是概率测度时，常称“几乎处处”为“几乎必然”, 简记为 $a.s.$

例题 4.2

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，g,f 都是 Ω 到 $\bar{\mathbb{R}}$ 的函数。

1. 若 $\omega\in\Omega:f(\omega)\neq g(\omega)$ 为一 μ 零集，则称 f 与 g 关于 μ 几乎处处相等, 简记为 $f=g,\mu$a.e.
2. 若 $\omega\in\Omega:f(\omega)\geq g(\omega)$ 为一 μ 零集，则称 f 关于 μ 几乎处处小于 g, 简记为 $f<g,\mu$a.e.
3. 若 $\omega\in\Omega:f(\omega)\in\{-\infty,+\infty\}$ 为一 μ 零集，则称 f 关于 μ 是几乎处处有限的, 简记为 f μa.e. 有限, 或 $|f|<\infty$ μa.e.
4. 若 $E\subset\Omega,h:E\to\mathbb{R}$ 为一映射, 且 E^c 为一 μ 零集, 则称 h 关于 μ 几乎处处有定义, 简记为 h μ $a.e.$ 有定义

定理 4.4: 引理

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，f,g 都是 Ω 上的 $\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 值 $\mathcal{F}$ 可测函数。若 $f=g,\mu$ a.e.，则 $\int_\Omega fd\mu=\int_\Omega gd\mu$.

定义 4.8

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，$f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$. 若存在可测函数 $\tilde{f}$ 使 $f=\tilde{f}$ μ a.e.，则称 f 关于 μ 几乎处处可测，记为 f μ a.e. 可测若 f μ a.e. 可测，g 是可测函数满足 $f=g$ μ a.e.，且 $\int_\Omega gd\mu$ 存在，则定义 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_\Omega fd\mu:=\int_\Omega gd\mu.$$

由引理知, 以上 $\int_\Omega f d\mu$ 是确定的, 即不因 g 的不同选择而改变

备注 1：若将本节中的所有可测函数都改为 μ a.e. 可测，则前文中关于积分的结论都正确. 在以后得讨论中, 当出现的函数是 a.e. 可测时, 所有关于积分的结论都正确.

备注 2：令 $\Theta = \{f | f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 可测函数 $\}$. $\forall f, g \in \Theta$，若 $f = g\mu$ a.e.，则记作 $f \overset{\mu}{\sim} g$. 易知，$\overset{\mu}{\sim}$ 是 Θ 上的一个等价关系。

1. 当遇到“几乎处处”时，我们需要小心. 例如,“函数 f 几乎处处连续”与“函数 f 几乎处处等于一个连续函数”的含义是大不相同的. 请分别取 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ 和 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ 来理解以上两句话的不同之处，其中，$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间,$f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{F}$ 可测函数. 设 $g : \Omega \to \bar{R}$ 满足 $g = f$ μa.e. 请问 g 一定是 $\mathcal{F}$ 可测的吗?

定理 4.5: 引理

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，f, g 为 $\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 可测函数。

(1) 若 $\int_\Omega f d\mu, \int_\Omega g d\mu$ 存在，且 $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ 有意义，则 $f + g$ 由 μa.e 有定义的且是 μa.e. 可测的,$\int_\Omega (f + g) d\mu$ 存在, 且

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega (f + g) d\mu. \quad (L)$$

特别地，若 f, g 都可积，那么 $f + g$ 可积且等式 (L) 成立.

(2) 若 $\int_\Omega f d\mu$ 存在，则 $\forall A \in \mathcal{F}, \int_A f d\mu$ 存在，并且 $\forall A, B \in \mathcal{F}$，当 $A \cap B = \emptyset$，

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

(3)

1) 若 $c \in \mathbb{C}$, f 在 Ω 上对 μ 可积，则

$$\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu.$$

2) 若 $c \in \mathbb{R}$, f 为 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数, 且 f 在 Ω 上对 μ 的积分存在，则

$$\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu.$$

(4) 若用 $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭，则

$$\int_\Omega \bar{f} d\mu = \overline{\int_\Omega f d\mu}$$

推论 4.1

给定测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 及 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 可测函数 f, g. 若 $\int_\Omega f d\mu, \int_\Omega g d\mu$ 存在, $a, b \in \mathbb{C}$, 若 $a \int f d\mu + b g d\mu$ 有意义，则 $\int_\Omega (af + bg) d\mu$ 存在,

$$\int_\Omega (af + bg) d\mu = a \int_\Omega f d\mu + b \int_\Omega g d\mu.$$

定理 4.6: 引理

设 f,g 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 $\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbf{C}$ 值可测函数
(a) 若 f,g 是 $\mathbf{R}$ 值的. 若 $\int_\Omega f d\mu$ 和 $\int_\Omega g d\mu$ 存在, 且 $g \leq f$ μa.e., 则

$$\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

反之, 若 μ 是 σ 有限测度, 则逆命题成立
(因此, 若 μ 是 σ 有限测度且 $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_A g d\mu, A \in \mathcal{F}$, 则 $f = g$ μa.e.)
改为只考虑 $g = 0$ 的情况,$g \neq 0$ 的情况由积分的线性性可得
(b) 若 $f \geq 0$a.e., 且 $\int_\Omega f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μa.e.。
(c) 若 $N \in \mathcal{F}$ 且 $\mu(N) = 0$, 则 $\int_N f d\mu = 0$ (尽管 $\forall x \in N$ 可能有 $|f(x)| = \infty$). 改为 (b) 的注记?
(d) 若 f 对 μ 的积分存在, 则

$$\left|\int_\Omega f d\mu\right| \leq \int_\Omega |f| d\mu.$$

定理 4.7: 引理

设 f,g 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 $\bar{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 可测函数。
(a) f 对 μ 可积 $\Leftrightarrow \int_\Omega |f| d\mu < \infty \Rightarrow f$ 是 μa.e. 有限的,(但 f 是 μa.e. 有限的不一定有 f 对 μ 可积)。
(b) 若 g 是 $\bar{\mathbb{R}}$ 的可积函数, $|f| \leq g$, 则 f 是可积的.
(c) 若 f,g 负部, 则 $f+g$ 负部。
(d) $\left(\int_\Omega |f| d\mu\right)^2 \leq \int_\Omega f^2 d\mu \int_\Omega g^2 d\mu$ (Cauchy–Schwarz 不等式)。

推论 4.2

若 f 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的非负可测函数, 则 $\forall \delta > 0$ 有

$$\mu(\{f \geq \delta\} \cap A) \leq \frac{1}{\delta} \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

例题 4.3

" 若 g,h 都是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的非负可测函数, 且满足

$$\int_A g d\mu = \int_A h d\mu, A \in \mathcal{F}$$

则 $g = h, \mu$a.e." 此论断成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请举反例说明

例题 4.4

”若 g, h 都是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 且满足

$$\int_A g d\mu = \int_A h d\mu, A \in \mathcal{F}$$

则 $g = h, \mu$a.e.” 此论断成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请举反例说明

5 独立性及 L-S 积分表示

给定概率空间为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. 在概率论中, $\mathcal{F}$ 的元素称为 (随机) 事件, Ω 上的 $\mathbb{R}$ 值函数称为随机变量. 事件或随机变量之间的一种重要的关系, 即" 独立性", 是概率论中最重要的概念之一

定义 5.1

概率空间为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. 设 A,B 是 $\mathcal{F}$ 中的二事件. 若

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

则称 A, B 是独立的, 一般的, 设 T 是一个任意的指标集, $\{A_t\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一族事件, 若 $\forall j \Subset T$ (J 是 T 的有限子集), 有

$$P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

对于 $\{A_t\} \in T$ 是 (相互) 是独立的.

注: 当 $n \geq 2$. 若 $A_1, \cdots, A_n$ (相互) 独立, 则必有 $A_1, \cdots, A_n$ 两两独立, 即 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ 且 $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, 反之不一定成立, 如下面的例子.

例题 5.1

考虑抛两次硬币的试验, 并设这些试验的结果是等可能的. 于是, 概率空间为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 其中, $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,$\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ 且

$$\mathbf{P}(B) := \frac{\#B}{\#\Omega}, \quad B \subset \Omega$$

设 $A_1 = \{(0,0), (0,1)\}$, $A_2 = \{(0,0), (1,0)\}$, $A_3 = \{(0,1), (1,0)\}$. 于是, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ 且.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

.

从而, A_1, A_2 是独立的, A_2, A_3 是独立的, A_1, A_3 是独立的. 但是,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

.

因此, A_1, A_2, A_3 不是独立的.

若事件 A, B 是独立的, 则由

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = [1 - \mathbb{P}(A)]\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$$

知, A^c 与 B 是独立的.

一般地, 以下结论成立. 这里及以后, 给定任意两个集合 E, T

$$E^T := \{f | f : T \to E\text{为映射}\}$$

命题 5.1: Exercise!

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 及任意一个指标集 T, 设 $\{A_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{F}$. 令

$$B_t^0 = A_t, \quad B_t^1 = A_t^c, \quad t \in T.$$

以下论断等价:
(1) $\{A_t\}_{t\in T}$ 是独立的.
(2) $\exists \alpha \in \{0,1\}^T, \{B_t^{\alpha_t}\}_{t\in T}$ 是独立的.
(3) $\forall \alpha \in \{0,1\}^T, \{B_t^{\alpha_t}\}_{t\in T}$ 是独立的.

例题 5.2

Riemann zeta 函数 ζ 由 Dirichlet 级数生成, 即

$$\zeta(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-t}, \quad t \in (1, \infty).$$

由 Euler 素数公式知, ζ 可以表示成无穷乘积的形式, 即

$$\zeta(t) = \prod_{p\in\mathcal{B}} (1 - p^{-t})^{-1},$$

其中, $\mathcal{B} = \{p \in \mathbb{N} : p\text{是素数}\}$.

定理 5.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. 令 $A^* = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k$.
(1) 若 $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$, 则 $\mu(A^*) = 0$.
(2) 若 μ 是概率测度, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是独立的, 且 $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \infty$, 则 $\mu(A^*) = 1$.

注 1: (1) 给出了一个事件序列不能有无穷多个发生的充分条件.

注 2: (2) 回答了如以下问题: 若掷一枚色子无穷多次, 则 6 点出现无穷多次的概率是 1; 见下例, 但 (2) 中独立性假设一般不能去掉. 试举例说明 (Exercise!).

注 3: (Borel 0-1 律) 若 μ 是概率测度且 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是独立的, 则 $\mu(A^*) \in \{0, 1\}$.

例题 5.3

考虑掷一枚色子无穷多次的实验. 设 $\Omega_i = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$, $\mathbb{P}_i = \sum_{x\in\Omega_i} \delta_x/6, \quad i \in \mathbb{N}$. 易知对于 $\forall i \in \mathbb{N}$, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ 是概率空间. 考虑乘积概率空间

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i\right).$$

设 $A_k = \{\omega \in \Omega : \omega_k = 6\}$, 即第 k 次掷骰子出现 6 点的事件, $k \in \mathbb{N}$. 从而, $A^* := \limsup_{n\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 即是 6 点出现无穷多次的事件. 易知

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\text{是独立的事件列}, \quad \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{6}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

于是, $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$. 由此, 由 Borel–Cantelli 引理知

$$P(A^*) = 1.$$

例题 5.4

对于任意的 $\delta > 0$，若令

$$E_\delta = \left\{x \in \mathbb{R} : \text{存在无穷多个} p, q \in \mathbb{N}, \text{使得} \left|\frac{x-p}{q}\right| \le q^{-(2+\delta)}\right\},$$

则 E_δ 是 Lebesgue 零测集。

定义 5.2

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及任意一个指标集 T. 设 $\forall t \in T$, $\mathcal{C}_t \in \mathcal{F}$. 若 $\forall t \in T$ 及 $\forall A_t \in \mathcal{C}_t$, $\{A_j\}_{t\in T}$ 是独立的, 即 $\forall J \Subset T$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

则称 $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ 是独立的。

下面结论由定义容易证明

1. $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ 是独立的 $\Leftrightarrow \forall J \Subset T, \{\mathcal{C}_j\}_{t\in J}$ 是独立的。
2. 设 Λ 是任意一个指标集, $(J_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是 T 的一族互不相交的子集. 若 $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ 是独立的, 则 $\{\bigcup_{t\in J_\alpha} \mathcal{C}_t\}_{\alpha\in\Lambda}$ 也是独立的
3. 若 T 是有限集, 且 $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{F}$ 且 $\Omega \in \mathcal{C}_t, t \in T$, 则 $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ 是独立的 $\Leftrightarrow$ (1) 对于 $J = T$ 成立。(*Hint*: "$\Rightarrow$" 显然, "$\Rightarrow$"$\forall I \subset T, \forall k \in T\backslash I$, 取 $A_k = \Omega$).

定理 5.2

给定 $n \in \mathbb{N}$ 和概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. 若 $\forall k = 1, \ldots, n$, $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{F}$ 是 π 系且对 $\forall A_k \in \mathcal{C}_k$. 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

则对一切 $A_k \in \sigma(\mathcal{C}_k), k = 1, \ldots, n$ 上式成立.

推论 5.1

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及指标集 T. 设 $\forall t \in T$, $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{C}_t$ 是 π 系, 若 $\{\mathcal{C}\}_{t \in T}$ 是独立的, 则 $\{\sigma(\mathcal{C}_t)\}_{t \in T}$ 也是独立的.

(Hint: 只需对任意的 $J \Subset T$ 利用独立事件类扩张定理)

定义 5.3

给定指标集 T 和概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 及一族可测空间 $\{(E_t, \mathcal{E}_t)\}_{t \in T}$.$\forall t \in T$, 设 X_t 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E_t, \mathcal{E}_t)$ 的随机元. 若 $\{\sigma(X_t)\}_{t \in T}$ 是独立的, 则称 $\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立的, 且 $\forall s, t \in T$, $\mathbb{P}_{X_s} = \mathbb{P}_{X_t}$, 则称 $\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立同分布的 (简记为 i.i.d.)

注 1: i.i.d. = independent and identically distributed

注 2: 易知,$\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立的当且仅当, 对 $\forall J \Subset T$ 及 $\forall B_j \in \mathcal{E}_j, j \in J$, 有 $\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J}\{X_j \in B_j\}) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$。(Hint: $\sigma(X_t) = X_t^{-1}(\mathcal{E}_t)$)。

注 3: 设 $\forall t \in T$, $F_t \subset \mathcal{F}$ 是 σ 代数, 且 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ 是独立的. 若 $\forall t \in T, X_t$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $(E_t, \mathcal{E}_t)$ 的随机元, 则 $\{X_t\}_{t \in T}$ 独立.(Hint:$\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t, t \in T$)

注 4: 设 $\{(G_t, \mathcal{G}_t)\}_{t \in T}$ 是另一族可测空间, 且 $\forall t \in T$, f_t 是从 $(E_t, \mathcal{E}_t)$ 到 $(G_t, \mathcal{G}_t)$ 的可测映射. 若 $\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立的, 则 $\{f_t(X_t)\}_{t \in T}$ 是独立的. (Hint:$f_t(X_t)$ 是从 $(\Omega, \sigma(X_t))$ 到 $(G, \mathcal{G}_t))$ 的随机元且 $\sigma(f_t(X_t)) \subset \sigma(X_t)$, 并由注 3 可得

定理 5.3

给定指标集 T, 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 及一族可测空间 $\{(E_t, \mathcal{E}_t)\}_{t \in T}$.$\forall t \in T$, 设 X_t 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E_t, \mathcal{E}_t)$ 的随机元, $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{E}_t, \mathcal{C}_t$ 是 π 系, 且 $\sigma(\mathcal{C}_t) = \mathcal{E}_t$. 若 $\{X_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\}_{t \in T}$ 是独立的, 则 $\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立的.

例题 5.5

给定任意一个指标集 T, 概率空间为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及可数集 E, 若 $\forall t \in T, X_t$ 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{P}(E))$ 的随机元, 则 $\{X_t\}_{t \in T}$ 是独立的当且仅当, 对 $\forall J \Subset T$ 及 $\forall x_j \in E, j \in J$ 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J}\{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\{X_j = x_j\}.$$

定义 5.4

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及任意一个指标集 T。设 $(X_t)_{t\in T}$ 和 $(Y_t)_{t\in T}$ 是两族随机变量. 若 $J \Subset T\{\sigma(X_i)_{i\in J}\}_{i\in J}$ 与 $\{\sigma(Y_j)\}_{j\in J}$，则称 $(X_t)_{t\in T}$ 和 $(Y_t)_{t\in T}$ 是独立的。

事实上，$(X_t)_{t\in T}$ 和 $(Y_t)_{t\in T}$ 可看作两个随机过程 (如布朗运动)。在后续的课程中，我们会遇到诸如“两个独立的布朗运动”等提法.

定理 5.4

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$\{X_t\}_{t\in T}$ 是其上一族随机变量. 若 $\{X_t\}$ 是独立的当且仅当，对 $\forall J \Subset T$ 及 $\forall x_j \in \mathbb{R}, j \in J$，有

$$P(\cap_{j\in J}\{X_j \le x_j\}) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(\{X_j \le x_j\})$$

定理 5.5

令 $n \in \mathbb{N}$。对 $k = 1, \dots, n$，设 $m_k \in \mathbb{N}$ 且 X_k 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^{m_k}$ 值随机变量. 若令 $X = (X_1, \dots, X_n)$，则 $X_1, \dots, X_n$ 是独立的当且仅当，$\forall k = 1, \dots, n$，存在函数 $G_k : \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$，使得

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} G_k(x_k) \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$$

定理 5.6

设 $n \in \mathbb{N}$，$X_1, \dots, X_n$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的独立的 $\mathbb{R}$ 值或 $\mathbb{C}$ 值随机变量. 若对任意的 $k = 1, \dots, n, X_k$ 非负或 $\mathbb{E}X_k$ 有限, 则

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k.$$

定义 5.5

设 $n \in \mathbb{N}$，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间。

1. 设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 值 r.v. n 元函数

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n t_k X_k} =: \varphi(t_1, \ldots, t_n), (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

为 X 的特征函数

2. 设 X 是 $\mathbb{R}$ 值或 $\mathbb{C}$ 值 r.v.，EX 存在。称 $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2$ 为 X 的方差，记为 $DX = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2$

3. 设 X 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 值 r.v.$r > 0$，称 $\mathbb{E}|X|^r$ 为 X 的 r 阶矩. 当 $\mathbb{E}X$ 存在时, 称 $\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}X|^r$ 为 X 的 r 阶中心矩.

4. 设 X, Y 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathcal{C}$ 值 r.v.,$\mathbb{E}X$ 和 $\mathbb{E}Y$ 有限, 且

$$b_{X,Y} := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(\overline{Y - \mathbb{E}Y})]$$

存在, 称 $b_{X,Y}$ 为 X 与 Y 的协方差. 若 $DXDY \neq 0$ 且有限, 则称

$$r_{X,Y} := \frac{b_{X,Y}}{\sqrt{DXDY}}$$

称为 X, Y 的相关系数。

5. 设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是 n 维 r.v.. 令 $\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$。若 $b_{ij} := b_{X_i, X_j}$ 存在, $i, j = 1, \ldots, n$. 则称

$$B(X) := \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

为 X 的协方差矩阵, 若 $rij := r_{X_i X_j}$ 存在, 则称

$$R(X) := \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

为 X 的相关矩阵

命题 5.2

(1) $\mathbb{R}$ 值随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 独立当且进度

$$\varphi_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)\cdot\Phi_{X_n}(t_n),\quad (t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$$

(2) 若随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 两两独立，且 $\mathbb{E}X_k$ 有限,$k=1,\cdots,n$, 则

$$DX_k=E|X_k|^2-|EX_k|^2,\quad k=1,\dots,n;$$
$$D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n DX_k.$$

特别地，若 $X_1,\dots,X_n$ 的方差都有限, 则 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的方差也有限。

(3) 若随机变量 X,Y 独立且期望都存在，那么 $b_{X,Y}=0,r_{X,Y}=0$.

(4) 设 $X=(X_1,\dots,X_n)$ 是 n 维 r.v., 使得 $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ 有定义，则 $\mathbf{B}(\mathbf{X})\geq 0$, 即 $\mathbf{B}(X)$ 非负定

(5) 设 $r>0,X$ 是 r.v.. 若 $\mathbb{E}|X^r|<\infty$, 则 $\forall s\in(0,r),\mathbb{E}|X|^s<\infty$

定理 5.7

若 f 是从可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 的可测映射, μ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度, g 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数, 则 g 在 E 上对 μ_f 的积分存在当且仅当 $g\circ f$ 在 Ω 上对 μ 的积分存在, 且在此情形,

$$\int_{f^{-1}(B)} g\circ f d\mu=\int_B g d\mu_f,\quad B\in\mathcal{E}.$$

例题 5.6

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的且 $f'(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $h:f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是连续的。于是, 对于 $\forall(a,b)\subset f(\mathbb{R})$, 由 Riemann 积分的积分换元公式得

$$\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} h(f(x))\,dx=\int_a^b \frac{h(y)}{f'(f^{-1}(y))}\,dy.$$

此外, 由积分变换定理知,

$$\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} h(f(x))\,dx=\int_{f^{-1}((a,b))} h\circ f\,d\lambda=\int_{(a,b)} h(y)\,d\lambda_f(y),$$

其中, λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, λ_f 是 λ 在 f 下的像测度. 令 $h=\mathbb{I}$, 由于 (a,b) 是任意的, 所以比较以上两式得,

$$\lambda_f=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}\lambda.$$

定义 5.6

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是分布函数, μ 是由 F 诱导的 $B(\mathbb{R}^n)$ 或 $B_\mu(\mathbb{R}^n)$ 上的 L-S 测度, g 是 $B(\mathbb{R}^n)$ 或 $B_\mu(\mathbb{R}^n)$ 可测函数, 其中, $B_\mu(\mathbb{R}^n)$ 是 $B(\mathbb{R}^n)$ 关于 μ 的完全化. 称 g 在 $\mathbb{R}^n$ 上对 μ 或 F 的积分为 Lebesgue–Stieltjes 积分, 简称为 L-S 积分, 并记为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu &= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_n)\,d\mu(x_1,\dots,x_n)\\&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_n)\,\mu(dx_1,\dots,dx_n)\\&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_n)\,dF(x_1,\dots,x_n)\\&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_n)\,F(dx_1,\dots,dx_n)\\&= \int_{\mathbb{R}^n} g\,dF.\end{aligned}$$

g 在 $B_\mu(\mathbb{R}^n)$ 中集合 B 上对 μ 或 F 的积分记为

$$\begin{aligned}\int_B g\,d\mu &= \int_B g(x_1,\dots,x_n)\,d\mu(x_1,\dots,x_n)\\&= \int_B g(x_1,\dots,x_n)\,\mu(dx_1,\dots,dx_n)\\&= \int_B g(x_1,\dots,x_n)\,dF(x_1,\dots,x_n)\\&= \int_B g(x_1,\dots,x_n)\,F(dx_1,\dots,dx_n)\\&= \int_B g\,dF.\end{aligned}$$

g 在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}^n$ 上对于 μ 或 F 的积分也记为

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} g(x_1,\dots,x_n)\,d\mu(x_1,\dots,x_n) = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} g(x_1,\dots,x_n)\,dF(x_1,\dots,x_n),$$

其中, $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$.

特别地，若 $\mu=\lambda_n$(n 维 Lebesgue 测度), 则称 g 对 μ 的积分为 Lebesgue 积分, 简称 L 积分。g 分别在 $\mathbb{R}^n$，$B\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$，$(a,b]\subset\mathbb{R}^n$ 上对 μ 的积分依次记为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,\\&\int_B g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,\\&\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,\end{aligned}$$

其中, $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$.

定理 5.8

令 $n\in\mathbb{N}$。设 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 是在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值 r.v.，F_X 是它的概率分布函数。则

(a) $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$P(\{X\in B\})=\int_B dF_X=\int_B d\mathbb{P}_X.$$

(b) 若 $m\in\mathbb{N}$，$g_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 可测函数，并令 $Y_k:=g_k(X)$，$k=1,\ldots,m$。则 $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ 的 (概率) 分布函数是

$$F_Y(y)=\int_{G_y} d\mathbb{P}_X=\int_{G_y} dF_X=\mathbb{P}(\{Y\in G_y\}),\quad y\in\mathbb{R}^m,$$

其中，$G_y:=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: g_k(x_1,\ldots,x_n)\le y_k, k=1,\ldots,m\}$.

定理 5.9

对于每一个 $n\in\mathbb{N}$，设 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值 r.v.，F_X 是它的概率分布函数，g 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}$ 值可测函数。

(a)

$$\mathbb{E}g(X)=\int_\Omega g\circ X d\mathbb{P}=\int_{\mathbb{R}^n} gd\mathbb{P}_X=\int_{\mathbb{R}^n} gdF_X.$$

(b) 若 $f_X(t)$ 是 X 的特征函数（即 $f_X(t)=Ee^{i\langle t,X\rangle}$，其中 $t\in\mathbb{R}$）则

$$f_X(t)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{k=1}^n t_k x_k}dF_X(x_1,\ldots,x_n)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}dF_X(x),$$

其中 $t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n, <\cdot,\cdot>$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的内积

定理 5.10

设 $n\in\mathbb{N}$，$X_1,\ldots,X_n$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的独立的 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 值随机变量。若对任意的 $k=1,\ldots,n$,X_k 非负或 $\mathbb{E}X_k$ 有限，则

$$E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right)=\prod_{k=1}^n \mathbb{E}X_k.$$

例题 5.7

1. 若 X 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上期望存在的离散型随机变量 r.v.，取值为 $\mathbb{R}$ 的数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，且 $\mathbb{P}(\{X=x_n\})=p_n,\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1$。则 X 的概率分布测度为 $\mathbb{P}(A)=\sum_{x_n\in A}p_n, A\subset\mathbb{R}$，且 X 的期望为:

$$EX=\int_{\mathbb{R}}xd\mathbb{P}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n.$$

(注：易知,$\mathbb{E}X$ 存在当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n$ 存在)

2. 若 X 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上期望存在的连续型 r.v., 密度函数为 p，则 X 的概率分布测度为 $\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(\{X\in A\})=\int_A p(x)dx, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，且 X 的期望值为:

$$\mathbb{E}X=\int_{\mathbb{R}}xd\mathbb{P}(x)=\int_{\mathbb{R}}xp(x)dx.$$

(注：易知, $\mathbb{E}X$ 存在当且仅当 $x\mapsto xp(x)$ 的 Lebesgue 积分存在)

定理 5.11

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间,g 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可积函数,$f_n,n\in\mathbb{N}$, 都是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数. 若 $g\le f_n\uparrow f,\mu,a.e.$, 则 $\int_\Omega fd\mu$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_nd\mu=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}f_nd\mu=\int_\Omega fd\mu$$

定理 5.12

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间,g,h 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可积函数,$f_n,n\in\mathbb{N}$, 都是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数.

1. (Fatou 引理) 若 $\forall n\in\mathbb{N},f_n\ge g\ \mu\ a.e.$, 则

$$\int_\Omega\liminf_{n\to\infty}f_nd\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_nd\mu$$

2. (反向 Fatou 引理) 若 $\forall n\in\mathbb{N},f_n\le h\ \mu\ a.e.$, 则

$$\int_\Omega\limsup_{n\to\infty}f_nd\mu\ge\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_nd\mu$$

例 5.1

Fatou 引理的不等号可以是严格的。

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{F}$ 满足 $0<\mu(E)<\mu(\Omega)$。若令

$$f_n=\begin{cases}1_E, & n\text{是偶数},\\ 1-1_E, & n\text{是奇数},\end{cases}$$

则 $\liminf_{n\to\infty} f_n=0$。于是,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu=0<\min\{\mu(E),\mu(\Omega\setminus E)\}=\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu.$$

定理 5.13

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，g,h 是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数。

(i) 若 $f_n, n\in\mathbb{N}$, 都是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数，$g\le f_n\le h$ μ a.e.，$\forall n\in\mathbb{N}$，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu=\int_\Omega f d\mu.$$

(ii) 若 $f_n, n\in\mathbb{N}$, 都是 $\bar{\mathbb{R}}$ 值可测函数，$|f_n|\le h$ μ a.e.，$\forall n\in\mathbb{N}$，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\,d\mu=0$$

特别的, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu=\int_\Omega f d\mu$

定义 5.7: (依测度收敛)

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, $f_n:\Omega\to M, n\in\mathbb{N}$, $f:\Omega\to M$ 都是可测映射. 若 $\forall\varepsilon>0$,

$$\mu(\{\omega\in\Omega: d(f_n(\omega),f(\omega))>\varepsilon\})\to 0,\quad n\to\infty,$$

则称 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛 f, 记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

定理 5.14

$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, g 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 是可积函数. 若 $f, f_n\in\mathbb{N}$, 都是 $\overline{\mathbb{R}}$ (或 $\mathbb{C}$) 值可测函数, $|f_n|\le g$ μa.e., $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|d\mu=0;$$

特别地, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu=\int_\Omega f d\mu$.

例题 5.8

考虑测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. 令

$$f_n = n\mathbb{I}_{[0,1/n]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

从而, 当 $n \to \infty$ 时, $f_n \to 0\mathbb{I}_{\{0\}} =: f$. 因此,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

推论 5.2: (有界收敛定理)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间且 μ 是有限的. 若 $f_n, n \in \mathbb{N}$, 都是 $\overline{\mathbb{R}}$ (或 $\mathbb{C}$) 值可测函数, 存在常数 $C > 0$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq C$ μa.e., $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

1. 控制收敛定理 (包括其改进形式) 中, 控制函数" 可积" 这一条件通常不能去掉, 如考虑测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, 并令 $f_n = n\mathbb{I}_{[0,1/n]}, n \in \mathbb{N}$, 易知, 当 $n \to \infty$ 时,$f_n \to \infty\mathbb{I}_{\{0\}} =: f$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, n \in \mathbb{N}$$

2. 控制收敛定理 (包括其改进形式) 中, 控制函数" 可积" 这一条件不是必要的. 如考虑测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, 并令 $f_n = n\mathbb{I}_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}, n \in \mathbb{N}$. 易知, 当 $n \to \infty$ 时,$f_n \to 0$ 且 $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \to 0$, 但不存在 $\mathbb{R}$ 上的可积函数 g, 使得 $|f_n| \leq g$ λa.e.$n \in \mathbb{N}$

3. 由控制收敛定理易推出以下结论

推论 5.3: (有界收敛定理)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间且 μ 是有限的. 若 $f_n, n \in \mathbb{N}$, 都是 $\overline{\mathbb{R}}$ (或 $\mathbb{C}$) 值可测函数, 存在常数 $C > 0$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq C$ μa.e., $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

有界收敛定理 $\Longrightarrow$ Fatou 引理 $\Longrightarrow$ 控制收敛定理 $\Longrightarrow$ 有界收敛定理

推论 5.4: (a)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值 (或 $\mathbb{C}$ 值) 可测函数系列. 若 f_n 非负,$n \in \mathbb{N}$, 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega}|f_n|d\mu < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 的积分存在, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega}\sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

推论 5.5

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, f 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值或 $\mathbb{C}$ 值可测函数且积分存在, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中 $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, 两两不交, 则

$$\int_A f d\mu = \int_{A_n}\sum_{n=1}^{\infty} f\mathbb{I}_{A_n} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_A f\mathbb{I}_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f d\mu$$

我们知道，若 f 是 $\mathbb{R}$ 中有界区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则定义如下的函数 F, 即

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b],$$

称为 f 的一个不定积分。自然地我们有以下定义

定义 5.8

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, h 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 值可测函数且积分存在, 若令

$$\phi(A) := \int_A h d\mu, \quad A \in \mathcal{F},$$

则称 ϕ 为 h 关于 μ 在 $\mathcal{F}$ 上的不定积分.

由推论 (b) 知, 以上定义的 $\phi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$(或 $\mathbb{C}$) 是 σ 可加集函数.

推论 5.6: (c)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, f 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 值可积函数, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $A \in \mathcal{F}$ 满足 $\mu(A) < \delta$ 时,$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$.

由推论 (b) 知, 给定测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 及可测函数 f, 若 $\mu(f)$ 存在, 则

$$A \mapsto \phi(A) := \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}$$

是 $\mathcal{F}$ 上的 σ 可加集函数, 并且 $\forall A \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \phi(A) = 0.$$

定理 5.15: 引理

设 (T,d) 是一个度量空间，$a\in\overline{\mathbb{R}}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}, a_t, t\in T\subset\overline{\mathbb{R}}$, 则 $\forall t_0\in T$，

$$\lim_{T\ni t\to t_0} a_t = a,$$

当且仅当 $\forall t_{n n\in\mathbb{N}}\subset T, t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t_0$

$$\lim_{n\to\infty} a_{t_n} = a.$$

因此，前文介绍的控制收敛定理,Fatou 引理，控制收敛定理，(包括其改进形式) 中的参数 $n\to\infty$，都可以换成任意 $T\subset\mathbb{R}$ 内取值的参数 $t\to t_0(t_0\in\overline{\mathbb{R}})$, 即由离散参数换成连续参数 ($Exercise$!)

推论 5.7

设测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\delta>0$ 及 $t_0\in\mathbb{R}$. 若设 $f_t, t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$, 均为可测函数，g 为可积函数，满足 $\forall t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$, $|f_t|\le g$ μ a.e., 且 $\lim\limits_{t\to t_0} f_t = f_{t_0}$ μ a.e.(或 $f_t \xrightarrow{\mu} f_{t_0}$), 则

$$\lim_{t\to t_0}\int_\Omega |f_t - f_{t_0}| d\mu = 0;$$

特别地, $\lim_{t\to t_0}\int_\Omega f_t d\mu = \int_\Omega f_{t_0} d\mu$.

推论 5.8

设测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\delta>0$ 及 $t_0\in\mathbb{R}$, 令 $I=(t_0-\delta,t_0+\delta)\subset\mathbb{R}$. 若 $f: I\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ 为一函数, 满足

(i) $\forall t\in I$, $\omega\mapsto f_t(\omega)$ 在 Ω 上对 μ 可积

(ii) $\left.\frac{df_t(\omega)}{dt}\right|_{t=t_0}$ 对 μa.e.$\omega\in\Omega$ 存在

(iii) $\exists\Omega$ 对 μ 可积的函数 g, 使得

$$\left|\frac{f_t(\omega)-f_{t_0}(\omega)}{t-t_0}\right| \le g(\omega), \quad t\in I\setminus\{t_0\}, \mu \ \text{ a.e. } \omega\in\Omega,$$

则

$$\left[\frac{d}{dt}\int_\Omega f_t(\omega)\mu(d\omega)\right]|_{t=t_0} = \int_\Omega \left.\frac{df_t(\omega)}{dt}\right|_{t=t_0}\mu(d\omega)$$

推论 5.9

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间。设 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 为有界区间, $f:(a,b)\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ 为一函数, 若对 $\forall t\in(a,b)$,

(i) $\omega\mapsto f_t(\omega)$ 在 Ω 上对 μ 可积

(ii) $\frac{df_t(\omega)}{dt}$ 对 μa.e.$\omega\in\Omega$ 存在

(iii) $\exists\Omega$ 对 μ 可积的函数 g, 使得 $\left|\frac{df_t(\omega)}{dt}\right|\le g(\omega)\mu$a.e.$\omega\in\Omega$, 则当 $t\in(a,b)$ 时

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f_t d\mu=\int_\Omega\frac{d}{dt}f_t d\mu$$

推论 5.10

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间。

(i) 设 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 为有界区间, $\forall t\in(a,b)$, $\omega\mapsto f_t(\omega)$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数, $\forall\omega\in\Omega$, $t\mapsto f_t(\omega)$ 在 (a,b) 上连续, 若存在 Ω 上对 μ 可积的函数 g 使 $t\in(a,b)$, $|f_t|\le g$ μa.e., 则

$$\int_a^b\left(\int_\Omega f_t d\mu\right)dt=\int_\Omega\left(\int_a^b f_t dt\right)d\mu$$

(ii) 设在 $\mathbb{R}$ 中有界区间 (a,b) 上, 上式成立, 且存在 Ω 对 μ 可积的函数 h, 使得 $\int_{-\infty}^{\infty}|f_t|dt\le h$ μa.e., 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_\Omega f_t d\mu\right)dt=\int_\Omega\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_t dt\right)d\mu.$$

积分与积分换序问题也会在后面利用 Fubini 定理来讨论, 且 Fubini 定理需要的条件较弱

定义 5.9

设 Ω 是一非空集合。$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, 定义

$$\nu(A)=\begin{cases}\#(A), & 若A是非空有限集或空集,\\ \infty, & 若A其他情形,\end{cases}$$

其中, 当 A 是非空有限集时,$\#(A)$ 表示 A 中元素个数, 且当 A 是空集时, $\#(A)=0$. 称 ν 是 Ω 上的计数测度.

设 ν 是 $\mathbb{N}$ 上的计数测度。易知, $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu)$ 是一个 σ 有限的测度空间. 在 $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu)$ 上定义的任一函数 f 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 可测的, 且是一个序列 $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 若 f 在 $\mathbb{N}$ 上对 ν 的积分存在, 则

$$\int_{\mathbb{N}}fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

易知, $\int_{\mathbb{N}}fd\nu\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f^+(n)\wedge\sum_{n=1}^{\infty}f^-(n)<\infty f$ 在 $\mathbb{N}$ 上对 ν 可积 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f^+(n)\vee\sum_{n=1}^{\infty}f^-(n)<\infty\Leftrightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 绝对收敛。

推论 5.11

考虑数列 $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和非负数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) 若 $a_{nm} \geq 0$（或 $\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| \leq b_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$），且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$.

(b) 若 $\forall n \in \mathbb{N}$, 当 $m \to \infty$ 时，$0 \leq a_{nm} \uparrow a_n$（或 $|a_{nm}| \leq b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$，且 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm} = a_n$），则 $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$.

(c) 若 $a_{nm} \geq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{nm} \leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$.

例题 5.9

设 $p \in [1,\infty)$, X 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量且其 p 阶矩存在. 证明:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mathbb{P}(\{n \leq |X| < n+1\}) \leq \mathbb{E}(|X|^p) \\ \leq &1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p \mathbb{P}(\{|X| \geq n\}) \end{aligned}$$

6 σ 可加集函数

定义 6.1

$\mathcal{C} \subset P(\Omega)$. 定义在 $\mathcal{C}$ 上, 取值于 $(-\infty, \infty]$, 但不恒为 ∞ 的函数 Φ, 称为 $\mathcal{C}$ 上的一个集函数.

显然，若 Φ 是 $\mathcal{C}$ 上的测度，则 Φ 是 $\mathcal{C}$ 上的集函数.

注:（1）为避免出现 $\infty - \infty$ 的情形，我们不允许集函数的值域同时含有 $-\infty$ 和 ∞. 于是，集函数的值域可为 $(-\infty, \infty]$ 和 $[-\infty, \infty)$ 两种情形. 通过在集函数前添加负号，后一情形就回到了前一情形.（2）为使集函数可以进行运算，我们还需要约定：集函数至少在定义域中的一个集合上取值有限

设 Φ 是集合 $\mathcal{C}$ 上的集函数. 通常我们需要 Φ 具有下面的一些性质.

(a)（可加性）若 $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cup B \in \mathcal{C}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B),$$

则称 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上的可加集函数.

(b)（有限可加性）若 $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$, 两两不交 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{C} n \in \mathbb{N}$，则

$$\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(A_k),$$

则称 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上的有限可加集函数

(c)（σ-可加性）若 $\forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, 两两不交, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k),$$

则称 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上的 σ 可加集函数或符号测度

注：若 $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$ 未必在 $\overline{\mathbb{R}}$, 因此, 此等式要求 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中存在且等于 $\Phi(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$

(d)（有限性）若 $\forall A \in \mathcal{C}, \Phi(A) \in \mathbb{R}$, 则称 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上的有限集函数 (e)（σ-有限性）若 $\forall A \in \mathcal{C}, \exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ 使得$\Phi(A_n) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, 且$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则称 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上的 σ 有限集函数.

例题 6.1

设 μ_1, μ_2 都是给定的可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度且至少有一个是有限的. 若令

$$\Phi(A) := \mu_1(A) - \mu_2(A), A \in \mathcal{F}$$

则 Φ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数.

命题 6.1

设 Φ 是集类 $\mathcal{C}$ 上的集函数. 以下论断都成立.

1. Φ 有限可加 $\Rightarrow$ Φ 可加.
2. $\emptyset \in \mathcal{C}$ 且 Φ 可加 $\Rightarrow \Phi(\emptyset) = 0$.
3. $\emptyset \in \mathcal{C}$ 且 Φ 可加 $\Rightarrow$ Φ 有限可加.
4. 若 $\mathcal{C}$ 是集代数, 则 Φ 可加 $\Leftrightarrow$ Φ 有限可加.

类似测度, 集类的性质越好, 其上定义的集函数的性质也越丰富

命题 6.2

(i)（可减性）设 Φ 是集代数 $\mathcal{A}$ 上的可加集函数, $A, B \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \subset B$, 则 $\Phi(B) = \Phi(A) + \Phi(B \setminus A)$. 进一步的, 若 $\Phi(A) < \infty$, 则 $\Phi(B \setminus A) = \Phi(B) - \Phi(A)$.

(ii)（有限性）设 Φ 是半集代数 $\mathcal{S}$ 上的有限可加集函数, $A, B \in \mathcal{S}, A \subset B$. 若 $\Phi(B) < \infty$, 则 $\Phi(A) < \infty$. 特别地, 若 $\Phi(\Omega) < \infty$, 则 Φ 是有限集函数.

(iii)（σ-有限性）设 Φ 是半集代数 $\mathcal{S}$ 上的有限可加集函数. 若存在 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, 使得$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \Phi(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$, 则对 $\forall A \in \mathcal{S}, \exists (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ 两两不交, 使得 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(B_n) < \infty$.

连续函数的连续性

定义 6.2

设 Φ 是集族 $\mathcal{C}$ 上的集函数。

(a) 若 $A \in \mathcal{C}, A_n \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}$, 且 $A_n \uparrow A$, 满足 $\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = \Phi(A)$, 则称 Φ 在 A 处下连续。

(b) 若 $A \in \mathcal{C}, A_n \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}, A_n \downarrow A$, 且 $\exists m \in \mathbb{N}$ 使得$\Phi(A_m) < \infty$, 满足 $\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = \Phi(A)$, 则称 Φ 在 A 处上连续。

(c) 若 $A \in \mathcal{C}$ 且 Φ 在 A 上既上连续又下连续, 则称 Φ 在 A 处连续。若 Φ 在 $\mathcal{C}$ 上处处连续, 则称 Φ 为 C 上连续的集函数。

定理 6.1

Φ 是集函数 $\mathcal{A}$ 上的 σ-可加集函数，则 Φ 在 $\mathcal{A}$ 上连续。

定理 6.2

设 Φ 是集代数 $\mathcal{A}$ 上的可加 (等价于有限可加) 集函数, 若 Φ 满足以下条件之一:

(a) Φ 下连续;

(b) Φ 是有限的且在 ϕ 处上连续;

则 Φ 是 σ 可加的.

注: 此定理说明，当集代数上的集函数 Φ 具有可加性时，由 Φ 的"较弱的连续性"可以推出 Φ 是 σ 可加的. 从而，结合上一定理，粗略地说，集函数的连续性和 σ 可加性可以作为等价性质来使用.

例题 6.2

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个可测空间。若 $\Phi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足

   (a) $\Phi(\emptyset) = 0$,

   (b) 对任意两两不交的集列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, 有

   $$\Phi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n),$$

   则对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 有 $\Phi(B) \in (-\infty, \infty]$ 或 $\Phi(B) \in [-\infty, +\infty)$

2. 设 Φ 是一个可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数。若 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, 两两不交, 则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)\right| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi(A_n)| < \infty.$$

设 f 是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的积分存在的 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数。考虑不定积分 $\phi(\cdot) = \int f\, d\mu$. 对 $\forall A \in \mathcal{F}$, 令

$$\phi^+(A) = \int_A f^+\, d\mu, \quad \phi^-(A) = \int_A f^-\, d\mu.$$

于是, ϕ^+ 和 ϕ^- 都是 $\mathcal{F}$ 上的测度, 并且 $\phi = \phi^+ - \phi^-$。

Q: 一般的 σ 可加集函数有类似的分解吗?

以上不定积分 ϕ 的分解可以如下来看, 令

$$C = \{f > 0\}, \quad D = \{f \le 0\}.$$

从而, $C, D \in \mathcal{F}, C \cap D = \emptyset, C \cup D = \Omega, \forall A \in \mathcal{F}$, 有

$$\phi^+(A) = \int_A f^+ 1_C\, d\mu = \phi(A \cap C), \quad \phi^-(A) = \int_A -f^- 1_D\, d\mu = -\phi(A \cap D).$$

因此, 对于一般的 σ 可加集函数 $\Phi : \mathcal{F} \to (-\infty, \infty]$, 若能找到 $D \in \mathcal{F}$,使得$\Phi(D) = \inf_{A\in\mathcal{F}} \Phi(A)$ 则对 ,$\forall A \in \mathcal{F}$,令$\Phi^+(A) = \Phi(A \cap D^c)$, 则 $\Phi^-(A) = -\Phi(A \cap D)$. 从而, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$.

定理 6.3: (a)

若 Φ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ-可加集函数 Φ，则 Φ 在 $\mathcal{F}$ 上达到其上界和下界, 即 $\exists C, D \in \mathcal{F}$, 分别使得

$$\Phi(C) = \sup_{B \in \mathcal{F}} \Phi(B), \quad \Phi(D) = \inf_{B \in \mathcal{F}} \Phi(B).$$

定理 6.4: (b)

若 Φ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数，则 $\exists D \in \mathcal{F} \forall A \in \mathcal{F}$, 有

$$\Phi(A \cap D) = \inf\{\Phi(B) \leq 0, B \subseteq A, B \in \mathcal{F}\} \quad \Phi(A \cap D^c) = \sup\{\Phi(B) \geq 0, B \subseteq A, B \in \mathcal{F}\}$$

由此给出 Ω 的分解，即 $\Omega = D \cup D^c$，称为 Ω 关于 Φ 的 Hahn 分解.

注意，Hahn 分解不一定唯一。一般 $\Omega = D \cup D^c$ 是 Ω 关于 Φ 的 Hahn 分解。若存在 $N \subset D^c$ 且 $N \in \mathcal{F}$, 使得 $\Phi(N) = 0$, 则 $\Omega = (D \cup N) \cup (D^c \setminus N)$ 也是 Ω 关于 Φ 的 Hahn 分解。(Exercise!)

例题 6.3

考虑可测空间 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 及

$$\Phi(A) := \lambda([0,1/3] \cap A) - \lambda((1/3,1] \cap A), \quad A \in \mathcal{B}([0,1]).$$

易知,$\Phi([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上的 σ 可加集函数，并且 $[0,1]$ 关于 Φ 的一个 Hahn 分解 $[0,1/3], (1/3,1]$。

定理 6.5: (b')

设 Φ 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数,$D \in \mathcal{F}$, 满足

$$\Phi(D) = \inf_{B \in \mathcal{F}} \Phi(B).$$

若令

$$\Phi^+(A) := \Phi(A \cap D^c), \quad \Phi^-(A) := -\Phi(A \cap D), \quad A \in \mathcal{F},$$

则 Φ^+, Φ^- 都是 $\mathcal{F}$ 上的测度且至少有一个有限, 并有 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$。

易知，Φ 和 Φ^- 的定义与 D 的选择无关。定理说明，σ 代数上的 σ 可加集函数可以表示成两个测度之差. 以上 Φ 的分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ 称为 Φ 的 Jordan 分解. 可以证明，Jordan 分解是唯一的（Exercise!）.

注：由 Jordan 分解知，关于。可加集函数的问题就可以转化为关于测度的问题来考虑了.

定义 6.3

设 Φ 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数, 令

$$|\Phi| := \Phi^+ + \Phi^-.$$

Φ^+, Φ^- 和 $|\Phi|$ 分别称为 Φ 的上变差, 下变差和全变差.

显然,$|\Phi|$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度。易知，$|\Phi(A)| \le |\Phi|(A)$, 但等号可能不成立。例如，设 $\Omega=[0,1], \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$，考虑 $\Phi(\cdot)=\int f\,d\lambda$，其中 $f(x)=1, x\in[0,\frac{1}{2}]; f(x)=-1, x\in(\frac{1}{2},1]$。易知，$|\Phi|(\Omega)=1$。但 $|\Phi(\Omega)|=0$。

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间, Φ 是其上的 σ 可加集函数, $A\in\mathcal{F}$. 设 Φ^+,Φ^- 分别是 Φ 的上变差和下变差.

1. 若 f 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数,$\int_A f d\Phi^+ - \int_A f d\Phi^-$ 都存在且至少有一个有限, 则称 f 在 A 上对 Φ 的积分存在, 并定义
$$\int_A f d\Phi = \int_A f d\Phi^+ - \int_A f d\Phi^-.$$
若 $\int_A f d\Phi^+$ 和 $\int_A f d\Phi^-$ 存在且有限, 则称 f 在集合 A 上对 Φ 可积.
2. 若 f 是 $\mathbb{C}$ 值可测函数, 则可定义 f 在 A 上对 Φ 的积分为 $Exercise!$.

例题 6.4

设 Φ 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数, 试证 $\forall A\in\mathcal{F}$,

$$|\Phi|(A)=\sup\left\{\sum_{k=1}^n|\Phi(A_k)| : A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}, \text{两两不交}, A=\bigcup_{k=1}^n A_k, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

(对偶表示) 进一步地, 若 Φ 还是有限的, 则

$$|\Phi(\Omega)|=\sup\left\{\int_\Omega f d\Phi : f\in B_1(\Omega)\right\},$$

其中, $B_1(\Omega)=\{f\in\mathcal{F} : ||f||_\infty\le 1\}$, 且 $||f||_\infty := \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$.

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间. 记 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 为 Ω 上所有有限的可加测度 (measure) 所构成的集合.

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测函数, 令 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上所有有限的 σ 可加集函数所组成的集合.

定理 6.6: Exercise!

若令
$$\|\Phi\|_{TV}=\sup\{\Phi(A)-\Phi(A^C) : A\in\mathcal{F}\}, \Phi\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F}),$$
则 $\|\cdot\|_{TV}$ 在 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一个范数, 并称之为全变差范数.

$\forall\Phi\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 若令 $\Phi^+-\Phi^-$ 为 Φ 的 Jordan 分解, $\Omega=D\cup D^C$ 为 Ω 关于 Φ 的一个 Hahn 分解, 则
$$\|\Phi\|_{TV}=\Phi(D^C)-\Phi(D)=\Phi^+(\Omega)+\Phi^-(\Omega)=|\Phi(\Omega)|.$$

(Hint: 这里 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 且 $\|\cdot\|_{TV}$ 是其上的范数.)

事实上,$(\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F}),\|\cdot\|_{TV})$ 是一个 Banach 空间

推论 6.1: (不定积分的绝对连续性)

设 f 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数, 且 $\int_\Omega f^- d\mu<\infty$. 若 ϕ 是 f 关于 μ 的不定积分, 则

$$\phi^+(A)=\int_A f^+ d\mu,\quad \phi^-(A)=\int_A f^- d\mu,\quad A\in\mathcal{F}.$$

因而, $|\phi(A)|=\int_A |f|d\mu, A\in\mathcal{F}$.

命题 6.3: Exercise

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, f 是其上的 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数且 $\int_\Omega f^- d\mu<\infty$, 则不定积分

$$\Phi(\cdot)=\int_\cdot f d\mu$$

有意义, 且以下性质成立:

1. $\forall A\in\mathcal{F}$, 若 $\mu(A)=0$, 则 $\phi(A)=0$;
2. ϕ 是 $\mathcal{F}$ 上的 σ 可加集函数.
3. 若 f 是 μa.e. 有限的且 μ 是 σ 有限的, 则 ϕ 是 σ 有限的, 特别的, 当 f 在 Ω 上对 μ 可积时,ϕ 是有限的.

定义 6.4

设 Φ 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 σ 可加集函数.

1. 若 $\forall A\in\mathcal{F}$, $\mu(A)=0$, 有 $\Phi(A)=0$, 则称 Φ 关于 μ 绝对连续的, 记作 $\Phi\ll\mu$. （例如, 1 若 Φ 是关于 μ 的不定积分, 则 $\Phi\ll\mu$ 2 特别的, 若 μ 是标准正态分布测度,λ 是 Lebesgue 测度, 则 $\mu\ll\lambda$
2. 若 $\forall N\in\mathcal{F}$, 使得 $\mu(N)=0$, 而 $|\Phi|(N^C)=0$, 则称 Φ 与 μ 的相互奇异, 记为 $\Phi\perp\mu$. （例如, 1 若 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$ 是 Φ 的 Jordan 分解, 则 $\Phi^+\perp\Phi^-$ 2 若 μ 是标准正态分布测度,ν 是 Poisson 分布测度, 则 $\nu\perp\mu$.）

容易由定义得出, 若 $\Phi\equiv 0$, 则 $\Phi\ll\mu$ 且 $\Phi\perp\mu$. 反之对吗? (对)

由”绝对连续”易联想到绝对连续函数. 设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是有界区间,F 是 $[a,b]$ 上的函数. 若 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间,$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)|<\epsilon$$

则称 F 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 事实上, 我们有以下命题成立

命题 6.4: Exercise!

设 Φ 是 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限的 σ 可加集函数. 若令

$$F_\Phi(x)=\Phi((-\infty,x]),\quad x\in\mathbb{R},$$

则 F_Φ 是绝对连续的 $\Leftrightarrow \Phi\ll\lambda$，其中 λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。

令 $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 同前 $BV_0(\mathbb{R}):=\{F\in BV(\mathbb{R}):\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,F$ 是右连续 $\}$, 其中,$BV(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有限变差实值函数全体，由上式定义的映射 $\Phi\mapsto F_\Phi$ 给出了 $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 与 $BV_0(\mathbb{R})$ 之间的一个双射 (见教材定理 7.1.10)。

命题 6.5

若 Φ 是测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 σ 可加集函数，则 $\Phi\perp\mu$ 当且仅当, 存在 $N\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(N)=0$，使得

$$\Phi(A\cap N^C)=0,\quad A\in\mathcal{F}.$$

定理 6.7: c

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是一个有限的测度空间，Φ 是其上的 σ 可加集函数。若 $\Phi\ll\mu$，则 Φ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的某个有限可测函数 f 对 μ 的不定积分，且 f 是由 Φ μa.e. 唯一确定 (即若还存在有限可测函数 g 使 $\Phi(\cdot)=\int_A g\,d\mu$，则 $g=f$ μ-a.e).

事实上, 可以证明更一般的结论, 即推广的 Radon-Nikodym 定理.

定理 6.8: c'

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限的测度空间，Φ 是其上的 σ 可加的集函数. 若 $\Phi\ll\mu$，则 Φ 是 $\Omega,\mathcal{F}$ 上的某个可测函数 f(不一定 μ a.e. 有限) 对 μ 的不定积分. 且 f 由 Φ μa.e. 唯一确定.

定理 6.9: d

若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限的测度空间，Φ 是其上的 σ 有限的 σ 可加集函数，则

$$\Phi=\Phi_c+\Phi_s,$$

其中，$\Phi_c\in\mathcal{F}$ 上某个有限的可测函数关于 μ 的不定积分 (因而 Φ_c 是 σ 可加的集函数且 $\Phi_c\ll\mu$)，Φ_s 也是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数且 $\Phi_s\perp\mu$，还有这样的分解是唯一的.

例题 6.5

设 Ω 是单点集，$\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$。令

$$\mu(A):=\begin{cases}0, & A=\emptyset,\\ \infty, & A=\Omega;\end{cases}$$

$$\Phi(A):=\begin{cases}0, & A=\emptyset,\\ 1, & A=\Omega.\end{cases}$$

于是，μ,Φ 都是 $\mathcal{F}$ 上的测度，且 $\Phi\ll\mu$. 但是, 不存在 (可测) 函数 $f:\Omega\to[0,\infty]$ 使得

$$\Phi(\Omega)=\int_\Omega f d\mu.$$

此例子说明,Radon-Nikodym 定理中可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度 μ 是 σ 有限的假设条件一般不能去掉

定义 6.5

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限的测度空间，Φ 是 $\mathcal{F}$ 上关于 μ 绝对连续的 σ 可加集函数, 则存在 μa.e. 可测函数 f 使得 $\Phi(\cdot)=\int f d\mu$. 称 f 为 Φ 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数，并记此 f 为 $\frac{d\Phi}{d\mu}$。

推论 6.2

设 ν 和 μ 是可测函数 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度，$\nu\ll\mu$ 且 μ 是 σ 有限的，若 h 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数, 则 $\int_\Omega h d\nu$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\int_\Omega h\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$ 存在, 当积分存在时, 有

$$\int_A h d\nu=\int_A h\frac{d\nu}{d\mu}d\mu, A\in\mathcal{F}$$

(Hint: 请参考相关 Radon-Nikodym 定理的教材 ch5-part3 中最后一个命题。)

例题 6.6

$\mathbb{R}^n$ 上任一有界的分布函数 F 都可以分解为三个分布函数之和, 即

$$F=F_c+F_d+F_s,$$

其中，F_c 诱导的 $L-S$ 关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 L 测度绝对连续，F_d 诱导的 L-S 测度支撑在一个至多可数集上，F_s 诱导的 L-S 测度与 $\mathbb{R}^n$ 上的 L 测度相互奇异且在任何单形上取值为零. 这样的分解在差分意义下是唯一的，即若还有分解 $F=\tilde{F}_c+\tilde{F}_d+\tilde{F}_s$，则 $\tilde{F}_c-F_c,\tilde{F}_d-F_d,\tilde{F}_s-F_s$ 各自的差分为零, 即

$$\Delta_{x,y}(F_j'-F_j)=0,\quad x,y\in\mathbb{R}^n,\quad j\in\{c,d,s\}.$$

F_c, F_d, F_s 分别称为 F 的绝对连续部分，离散部分，奇异部分。

若 F_c, F_d 都不恒为零，则将其归一化后得到的概率分布函数分别对应连续型和离散型随机变量. 同样地，如果 $F_s(\infty,\cdots,\infty)\neq 0$，那么 $F_s/F_s(\infty,\cdots,\infty)$ 也是某一随机变量的概率分布函数. 此随机变量取几乎所有值的概率都是 0，只在 Lebesgue 零测集中取值才不为 0（因为 $\mu_s\perp\lambda_n$），且在单点集上取值为 0. 此类随机变量在实际中比较少见. 这就是连续型和离散型随机变量是基本类型的随机变量的原因

定义 6.6

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间. 若映射 $\Phi:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ 满足:

- $\Phi(\emptyset)=0$;
- 对于 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ 两两不交, 则 $\Phi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\Phi(A_n)$,

则称 Φ 是 $\mathcal{F}$ 上的 $\mathbb{C}$ 值 σ 可加集函数.

定理 6.10: (Lebesgue–Radon–Nikodym)

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限的测度空间, Φ 是其上的 $\mathbb{C}$ 值 σ 可加集函数，则

$$\Phi=f\mu+\Phi_s,$$

其中, f 是 $\Omega,\mathcal{F}$ 上的 $\mathbb{C}$ 值可测函数,Φ_s 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的 σ 可加集函数且 $\Phi_s\perp\mu$。若还存在 $\tilde{f}$ 及 $\tilde{\Phi}_s$ 满足 $\Phi=\tilde{f}\mu+\tilde{\Phi}_s$, 则 $\Phi_s=\tilde{\Phi}_s$ 且 $f=\tilde{f}$ μa.e.

此外, 若 $\Phi=f\mu$, 则 Ψ 理解成 f 关于 μ 的不定积分

例题 6.7

教材习题 7.2-3

例题 6.8

设 X 是完备可分的度量空间,μ_1,μ_2,μ_3 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限的 σ 可加集函数，并满足

$$\lambda^2\mu_1+2\lambda\mu_2+\mu_3\geq 0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

试证:

1. μ_1,μ_3 是非负的且 $|\mu_2|\leq\sqrt{\mu_1\mu_3}$，其中，对任意的 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度 ν 使 $\mu_1\ll\nu,\mu_3\ll\nu$,

$$\sqrt{\mu_1\mu_3}:=\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\nu}\frac{d\mu_3}{d\nu}}\nu.$$

（注意，此定义不依赖 ν 的选取，因此是合理的。）

2. $\mu_2\ll\mu_1,\mu_2\ll\mu_3$, 且 $\|\mu_2\|_{TV}\leq\sqrt{\|\mu_1\|_{TV}\|\mu_3\|_{TV}}$

7 乘积测度空间

定义 7.1

设 Ω_1,Ω_2 为二集合 (不一定相同),$A_1\subset\Omega_1, A_2\subset\Omega_2$. 令

$$A_1\times A_2 := \{(\omega_1,\omega_2):\omega_k\in A_k, k=1,2\}.$$

称 $A_1\times A_2$ 为 A_1,A_2 的乘积集。特别地，称 $\Omega_1\times\Omega_2$ 为 Ω_1,Ω_2 的乘积空间.

时常, 直观地称以上乘积集 $A_1\times A_2$ 为以 A_1 和 A_2 为边的矩形

定理 7.1: Lemma(Exercise)

1. $A_1\times A_2=\emptyset \iff A_1=\emptyset$ 或 $A_2=\emptyset$.
2. 若 $A_1\times A_2\neq\emptyset$，则

(1) $A_1\times A_2\subseteq B_1\times B_2 \iff A_k\subseteq B_k, k=1,2;$

(2) $A_1\times A_2= B_1\times B_2 \iff A_k= B_k, k=1,2.$

3. $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_{1\alpha}\times A_{2\alpha})=(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_{1\alpha})\times(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_{2\alpha})$.
4. $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_{1\alpha}\times A_{2\alpha})=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_{1\alpha})\times A_2$ 或 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_1\times A_{2\alpha})=A_1\times(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_{2\alpha})$.
5. $(A_1\times A_2)\setminus(B_1\times B_2)=(A_1\setminus B_1)\times(A_2\setminus B_2)+(A_1\setminus B_1)\times(A_2\cap B_2)+(A_1\cap B_1)\times(A_2\setminus B_2)$.

易知, $(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2)=(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)$ 不一定成立。

定义 7.2

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,2$, 是两个可测空间. 称包含集类

$$C:=\{A_1\times A_2: A_k\in\mathcal{F}_k, k=1,2\}$$

的最小 σ-代数，即 $\sigma(\mathcal{C})$, 为 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的乘积 σ 代数, 并记为 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$。

易知, $\mathcal{C}$ 是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 的半集代数. 但 $\mathcal{C}$ 不一定是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 的 σ 代数 (因为由上一引理的性质 5 知、$\mathcal{C}$ 对余运算可能不封闭)、通常称 $\mathcal{C}$ 中的素为可测矩形. 但与通常的矩形不同, $\mathcal{C}$ 中的元素更复杂; 如当 $\Omega_1=\Omega_2=[0,1]$ 且 $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\mathcal{B}([0,1])$ 时,

$$\left([0,\frac{1}{5}]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right)\times\left([\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\cup\left[\frac{10}{12},\frac{11}{12}\right]\right)\in\mathcal{C}$$

例题 7.1

考虑 $\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 则 $\Omega_1\times\Omega_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2=\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$。(若 $\Omega_1=\Omega_2=\overline{\mathbb{R}}$, 则类似.)

注意，对于一般的拓扑空间 X，可能只有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)\subsetneq\mathcal{B}(X\times X)$。但是，当 X 是具有可数基的 Hausdorff 空间 (或可分的度量空间) 时，有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X\times X)$; 如见严的书

例题 7.2

设 $\Omega_1 = \{1,2\}, \mathcal{F}_1 := \mathcal{P}(\Omega_1) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}, \Omega_2 = \{3,4\}, \mathcal{F}_2 := \mathcal{P}(\Omega_2) = \{\emptyset,\{3\},\{4\},\{3,4\}\}$. 从而

$$\begin{aligned}C :=&\{A_1\times A_2 : A_k\in\mathcal{F}_k, k=1,2\}\\ =&\{\emptyset,\{(1,3)\},\{(1,4)\},\{(2,3)\},\{(2,4)\},\\ &\{(1,3),(1,4)\},\{(2,3),(2,4)\},\{(1,3),(2,3)\},\{(1,4),(2,4)\},\\ &\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\}\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2=\sigma(C)\supseteq C\cup\{E,F\}$, 其中,

$$E=\{(1,3),(2,4)\}, F=\{(1,4),(2,3)\}.$$

注意，E,F 都不是可测矩形

定义 7.3

(1) 设 $A_1,\dots,A_n$ 是 n 个集合。称

$$\prod_{k=1}^{n}A_k := A_1\times\cdots\times A_n := \{(\omega_1,\dots,\omega_n):\omega_k\in A_k, k=1,\dots,n\}$$

为 $A_1,\dots,A_n$ 的笛卡尔积。

(2) 设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,\dots,n$ 都是可测空间. 称包含集类

$$\mathcal{C} := \{A_1\times\cdots\times A_n : A_k\in\mathcal{F}_k, k=1,\dots,n\}$$

的最小 σ-代数，即 $\sigma(\mathcal{C})$, 为 $\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_n$ 的乘积 σ 代数, 并记为 $\prod\limits_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ 或 $\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_n$

定义 7.4

设 $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$。给定 $\omega_1 \in \Omega_1$，称

$$A_{\omega_1} := A(\omega_1) := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

为 A 在 ω_1 处的截集。给定 $\omega_2 \in \Omega_2$, 称

$$A_{\omega_2} := A(\omega_2) := \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

为 A 在 ω_2 处的截集。

定理 7.2: Lemma(Exercise)

设 $A, B, A^{(\alpha)}, \alpha \in \Lambda$, 均是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上的子集，$\omega_k \in \Omega_k, k = 1, 2$，则以下性质成立：$\forall k = 1, 2$，

1. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap B)_{\omega_k} = \emptyset$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow A_{\omega_k} \subseteq B_{\omega_k}$;
3. $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A^{(\alpha)} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A^{(\alpha)}_{\omega_k})$;
4. $(A \backslash B)_{\omega_k} = A_{\omega_k} \backslash B_{\omega_k}$;
5. 对于 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 中的一个单调集列，则

$$\lim_{n \to \infty} A_n(\omega_k) = (\lim_{n \to \infty} A_n)_{\omega_k}, \quad k = 1, 2.$$

设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$, 是两个 σ 有限的测度空间。我们讨论乘积测度空间 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上的积分, 设 $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$,$f$ 是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上对测度 $\mu_1 \times \mu_2$ 积分存在的函数. 我们的目的是证明

$$\int_A f d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{A_{\omega_1}} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1).$$

我们自然会问以下基本问题.

1. $\Omega_1 \times \Omega_2$ 是什么? $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 又是什么? $\mu_1 \times \mu_2$ 是什么?
2. 已经知道，若 $\omega_1 \in \Omega_1$, 则截集 $A_{\omega_1} \subset \Omega_2$. A_{ω_1} 是 $\mathcal{F}_2$ 可测的吗?
3. 括号内的积分要有意义, 对给定的 $\omega_1, f(\omega_1, \cdot)$ 是 $\mathcal{F}_2$ 可测的吗?
4. 等号右边对 μ_1 的积分要有意义,$\omega_1 \mapsto \int_{A_{\omega_1}} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)$ 是 $\mathcal{F}_1$ 可测的吗?
5. ...

定理 7.3

设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2$, 是两个可测空间。若 $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, 则 $\forall \omega_1 \in \Omega_1, A_{\omega_1} \in \mathcal{F}_2$, 且 $\forall \omega_2 \in \Omega_2, A_{\omega_2} \in \mathcal{F}_1$.

定义 7.5

$f=f(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的函数. $\forall\omega_1\in\Omega_1$, Ω_2 上的函数 $f_{\omega_1}(\cdot):=f(\omega_1,\cdot)$ 称为 f 在 ω_1 上的截函数. 同样地, $\forall\omega_2\in\Omega_2$, Ω_1 上的函数 $f_{\omega_2}(\cdot):=f(\cdot,\omega_2)$ 称为 f 在 ω_2 的截函数.

例题 7.3

设 $A\subset\Omega_1\times\Omega_2$, 则 $\forall x\in\Omega_1$, $(\mathbb{I}_A)_x(\cdot)=\mathbb{I}_{A_x}(\cdot)$;$\forall y\in\Omega_2$, $(\mathbb{I}_A)_y(\cdot)=\mathbb{I}_{A_y}(\cdot)$. 特别地, 若 $A_k\in\Omega_k, k=1,2$, 则 $\forall x\in\Omega_1$, $(\mathbb{I}_{A_1\times A_2})_x(\cdot)=\mathbb{I}_{A_1}(x)\mathbb{I}_{A_2}(\cdot)$; $\quad\forall y\in\Omega_2$, $(\mathbb{I}_{A_1\times A_2})_y(\cdot)=\mathbb{I}_{A_1}(\cdot)\mathbb{I}_{A_2}(y)$.

定理 7.4

设 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 是两个可测空间. 若 f 是 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测函数, 则给定 $\omega_1\in\Omega_1$, $\omega_2\mapsto f_{\omega_1}(\omega_2)$ 是 $\mathcal{F}_2$ 是 $\mathcal{F}_2$ 可测函数, 且给定 $\omega_2\in\Omega_2$, $\omega_1\mapsto f_{\omega_2}(\omega_1)$ 是 $\mathcal{F}_1$ 可测函数.

例题 7.4

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,2$, 是两个可测空间, f 是定义在 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的一个函数且满足:$\forall x\in\Omega$, f_x 是 $\mathcal{F}_2$ 是可测的. $\forall y\in\Omega_2$, f_y 是 $\mathcal{F}_1$ 可测的, 请问 f 一定是 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测的吗?

定理 7.5

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\mu_k)$, $k=1,2$, 是 σ 有限的测度空间.

(a) 若 f 是非负 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测函数, 则 $\int_{\Omega_1}|f(\omega_1,\cdot)|d\mu_1(\omega_1)$ 是非负 $\mathcal{F}_2$ 可测的, 且 $\int_{\Omega_2}f(\cdot,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)$ 是非负 $\mathcal{F}_1$ 可测的.

(b) $\forall A\in\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$, 若令

$$\mu(A):=\int_{\Omega_1}\mu_2(A_{\omega_1})d\mu_1(\omega_1),\quad \text{或}\quad \mu(A):=\int_{\Omega_2}\mu_1(A_{\omega_2})d\mu_2(\omega_2),$$

则 μ 是 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 唯一满足

$$\mu(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2),\quad A_k\in\mathcal{F}_k,\ k=1,2$$

的 σ 有限测度. 称此测度 μ 为 μ_1 和 μ_2 的乘积测度, 记为 $\mu_1\times\mu_2$ 并称 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2,\mu_1\times\mu_2)$ 为 $\mu_1\times\mu_2$ 为 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$ 的乘积测度空间.

定理 7.6

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\mu_k)$, $k=1,2$, 均是 σ 有限测度空间. 若 f 是 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测函数且 $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d\mu_1\times\mu_2$ 存在, 则

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d\mu_1\times\mu_2 &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)\right)d\mu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_1(\omega_1)\right)d\mu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

例 7.1

设 $\Omega_1=\Omega_2=[0,1]$, $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\mathcal{B}([0,1])$, $\mu_1=\lambda|_{[0,1]}$. 令 $\mu_2(A)=\#(A)$, $A\in\mathcal{B}([0,1])$.

易知, μ_1 是有限的, 但 μ_2 不是 σ 有限的. 考虑集合

$$E=\{(x,x):x\in[0,1]\}.$$

易知,$E\in\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$. 从而

$$\int_{[0,1]}\mu_2(E_x)d\mu_1(x)=1\neq 0=\int_{[0,1]}\mu_1(E_y)d\mu_2(y).$$

例 7.2

在 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限测度空间,$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是非负可测函数列, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega f_n d\mu=\int_\Omega\sum_{n=1}^{\infty}f_n d\mu.$$

例 7.3

设 $p\in(0,\infty)$, $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是 σ 有限的测度空间, 且 f 是其上的可测函数. 若 $\mu(|f|^p)<\infty$, 则

$$\int_\Omega |f|^p d\mu=p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{|f|\geq t\})dt.$$

推论 7.1

给定 $\mathbb{R}$ 中的有限区间 $[a,b]$,σ 有限的测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 及函数 $f:[a,b]\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ 若 $\forall t\in[a,b]$, $f_t(\cdot)$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的,$\forall\omega\in\Omega, f(\omega)$ 是右连续的, 且 $\forall(t,\omega)\in[a,b]\times\Omega$, 存在 Ω 上对 μ 可积的函数 g, 使得 $|f_t(\omega)|\leq g(\omega)$, 则 $\forall t\in[a,b]$,

$$\int_a^t\left(\int_\Omega f_s(\omega)d\mu(\omega)\right)ds=\int_\Omega\left(\int_a^t f_s(\omega)ds\right)d\mu(\omega).$$

例题 7.5: 卷积

习题 6.1-3

例题 7.6

习题 6.2-4

推论 7.2: Exercise

(a) 设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$, 是两个 σ 有限测度空间, $D \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. 若 f 是 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 可测函数且 $\int_D f d\mu_1 \times \mu_2$ 存在，则

$$\begin{aligned}\int_D f d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{D_{\omega_1}} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) \\ &== \int_{\Omega_2} \left(\int_{D_{\omega_2}} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

(b) 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k = 1, \ldots, n$, 是 n 个 σ 有限测度空间. 若 $\mathcal{F}_1 \times \ldots \times \mathcal{F}_n$ 可测函数且对 $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ 积分存在，则

$$\int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} f d\mu_1 \times \ldots \times \mu_n = \int_{\Omega_{i_1}} \left(\ldots \left(\int_{\Omega_{i_n}} f(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) d\mu_{i_n}(\omega_{i_n}) \right) \ldots \right) d\mu_{i_1}(\omega_{i_1}),$$

其中 $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$ 的任意一个排列。此等式的意思是，等号右边的每一重积分都存在，且 n 次累次积分与等号左边的 n 重积分相等

例题 7.7

习题 6.1-4

例题 7.8

设 $a > 0$. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

例题 7.9

设 $n \in \mathbb{N}, r > 0, \mathbb{B}_r$ 为 $\mathbb{R}^n$ 半径为 r 且中心在原点的球, 即

$$\mathbb{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

记 $V_n(r)$ 为 $\mathbb{B}_r$ 的体积, Γ 为 Gamma 函数, 并令 $V_0(r) := 1$. 证明:

$$V_n(r) = 2rV_{n-1}(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) < \infty$; 特别的, $\lim_{n\to\infty} V_n(r) = 0$.

定义 7.6

设 $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in T}$ 是一族可测空间, $T_N \Subset T$. 令

$$\Omega_{T\setminus T_N} := \prod_{t\in T\setminus T_N} \Omega_t, \quad \mathcal{F}_{T_N} := \prod_{t\in T_N} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{t_N}.$$

若 $B_{T_N} \in \mathcal{F}_{T_N}$, 则把形如

$$B_{T_N} \times \Omega_{T\setminus T_N}$$

的集合称为 Ω_t 的可测柱集, 称 B_{T_N} 为此柱集的 (可测) 底, 令

$$\mathcal{C}_T := \{B_{T_N} \times \Omega_{T\setminus T_N} : T_N \Subset T, B_{T_N} \in \mathcal{F}_{T_N}\}.$$

称 $\sigma(\mathcal{C}_T)$ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 的乘积 σ 代数, 记为 $\mathcal{F}_T$ 或 $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$。

易知, 底不唯一, 并且 $\mathcal{C}_T$ 是 $\Omega_T := \prod\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t$

定理 7.7

若 $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T}$ 是一族概率空间族，则在 $(\Omega_T, \mathcal{F}_T)$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbb{P}_T$，满足

$$\mathbb{P}_T(B_{T_N} \times \Omega_{T\setminus T_N}) = \left(\prod_{t\in T_N} \mathbb{P}_t\right)(B_{T_N}), \quad T_N \Subset T, B_{T_N} \in \mathcal{F}_{T_N}$$

其中，$T_N = \{t_1, \ldots, t_N\} \subset T$ 时, $\prod\limits_{t\in T_N} \mathbb{P}_T = \mathbb{P}_{t_1} \times \mathbb{P}_{t_2} \times \cdots \times \mathbb{P}_{t_N}$ 称 $\mathbb{P}_t$ 为 $(\mathbb{P}_t)_{t\in T}$ 的独立乘积概率测度, 且也记 $\mathbb{P}_T$ 为 $\prod\limits_{t\in T} \mathbb{P}_t$ 称

$$(\Omega_T, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}_T) = \left(\prod_{t\in T} \Omega_t, \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t, \prod_{t\in T} \mathbb{P}_t\right)$$

为概率空间族 $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T}$ 的独立乘积概率空间

特别地，若 $B_{T_N}=B_1\times\ldots\times B_N$, $B_{t_k}\in\mathcal{F}_{t_k}$, $k=1,\ldots,N$, 则

$$\mathbb{P}_T(B_1\times\ldots\times B_N\times\prod_{t\in T\setminus\{t_1,\ldots,t_N\}}\Omega_t)(B_{T_N})=\prod_{k=1}^{N}\mathbb{P}_{t_k}(B_k).$$

定理 7.8

若 $\{F_t\}_{t\in T}$ 是一族 $\mathbb{R}$ 上的概率分布函数，则存在一族独立的随机变量 $\{X_t\}_{t\in T}$，使得 X_t 的概率分布函数是 F_t，$t\in T$。

若 $E_n\subset\Omega, n\in\mathbb{N}$, 两两不交, 且 $\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\Omega$, 则称 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω(可数) 分割

定义 7.7

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,2$, 是可测空间，若 $\gamma:\Omega_1\times\mathcal{F}_2\to[0,\infty]$ 满足

(1) $\forall A\in\mathcal{F}_2$, $\gamma(\cdot,A)$ 是 $\mathcal{F}_1$ 可测函数，

(2) $\forall\omega_1\in\Omega_1$, $\gamma(\omega_1,\cdot)$ 是 $\mathcal{F}_2$ 上的测度。

则称 γ 为从 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 的一个转移测度, 简称 γ 为 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的转移测度. 此外

若存在 Ω_2 的分割 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}_2$, 使得

$$\gamma(\omega_1,B_n)<\infty,\quad\omega_1\in\Omega_1,\,n\in\mathbb{N},$$

则称转移测度 γ 为 σ 有限的.

若存在 Ω_1 的分割 $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}_1$ 且存在 Ω_2 的分割 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}_2$，使得

$$\sup_{\omega_1\in A_m}\gamma(\omega_1,B_n)<\infty,\quad m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N},$$

则称转移测度 γ 为一致 σ 有限的

- $\forall\omega_1\in\Omega_1$, $\gamma(\omega_1,\cdot)$ 是 $\mathcal{F}_2$ 上的有限测度，则称转移测度 γ 为有限的
- $\forall\omega_1\in\Omega_1$, $\gamma(\omega_1,\cdot)$ 是 $\mathcal{F}_2$ 上的概率测度，则称转移测度 γ 为转移概率

例 7.4

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,2$, 是可测空间, μ 是 $\mathcal{F}_2$ 上的测度, 则

$$\lambda(\omega,B):=\mu(B),\quad\omega\in\Omega_1,B\in\mathcal{F}_2,$$

定义了一个从 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的转移测度. 进一步, λ 是 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的转移概率当且仅当 μ 是概率测度.

例 7.5

设 X 和 Y 都是可数集. 设 $\{p(x,y)\}_{x\in X, y\in Y}$ 是一个（无穷维）矩阵, 满足 $p(x,y)\geq 0$, $x\in X$, $y\in Y$. 对 $\forall x\in X, y\in Y$, 对 $\forall B\subset Y$, 定义

$$P(x,B)=\sum_{y\in B}p(x,y).$$

从而, P 的 $x\times\mathcal{P}(Y)$ 上的一个转移测度. 进一步, P 为 $X\times\mathcal{P}(Y)$ 上的转移概率当且仅当

$$\sum_{y\in Y}p(x,y)=1,\quad x\in X.$$

例 7.6

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k)$, $k=1,2$, 是可测空间, 令 μ 是 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 上的一个 σ 有限测度, 且 $q:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}_+$ 是 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ 可测函数. 对 $\forall x\in\Omega_1$, $\forall B\in\mathcal{F}_2$, 定义

$$Q(x,B)=\int_B q(x,y)d\mu(y).$$

从而, Q 是 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的一个转移测度. 进一步, Q 是 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的转移概率当且仅当

$$\int_{\Omega_2}q(x,y)d\mu(y)=1,\quad x\in\Omega_1.$$

定理 7.9: 4

设 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k), k=1,2$, 是可测空间. 若 γ 是 $\Omega_1\times\mathcal{F}_2$ 上的 σ 有限的转移测度,f 是非负 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测函数, 则 $\omega_1\mapsto\int_{\Omega_2}f(\omega_1,\omega_2)\gamma(\omega_1,d\omega_2)$ 是 $\mathcal{F}_1$ 可测的.

定理 7.10: 5

令 $n\in\mathbb{N}$, 设 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j), j=1,\ldots,n$, 是 n 个可测空间. 令

$$\Omega^{(k)}:=\prod_{j=1}^k\Omega_j,\quad \mathcal{F}^{(k)}:=\prod_{j=1}^k\mathcal{F}_j,\quad k=1,\ldots,n.$$

设 γ_1 是 $\mathcal{F}_1$ 上的 σ 有限测度, γ_k 是 $\Omega^{(k-1)}\times\mathcal{F}_k$ 上的 σ 有限转移测度,$k=2,\ldots,n$. 若对 $\forall B\in\mathcal{F}^{(n)}$, 令

$$\gamma^{(n)}(B):=\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n}\mathbb{I}_B(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\gamma_n(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},d\omega_n)\ldots\gamma_2(\omega_1,d\omega_2)\gamma_1(d\omega_1),$$

则 $\gamma^{(n)}$ 是 $\mathcal{F}^{(n)}$ 上的一个测度, 此外, 若对 $\forall k=2,\ldots,n,\gamma_k$ 还是一致 σ 有限的, 则 $\gamma^{(n)}$ 是 σ 有限的.

定理 7.11: 6

令 $n \in \mathbb{N}$. 设 $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)_{j=1}^n$ 是 n 个可测空间. 令

$$\Omega^{(k)} := \prod_{j=1}^k \Omega_j, \quad \mathcal{F}^{(k)} := \prod_{j=1}^k \mathcal{F}_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

设 γ_1 是 $\mathcal{F}_1$ 上的 σ 有限测度, γ_k 是 $\Omega^{(k-1)} \times \mathcal{F}_k$ 上的 σ 有限转移测度,$k = 2, \ldots, n$. 若对 $\forall B \in \mathcal{F}^{(n)}$, 令

$$\gamma^{(n)}(B) := \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n} {}_B(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\gamma_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n)\ldots\gamma_2(\omega_1, d\omega_2)\gamma_1(d\omega_1),$$

若 f 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值 $\mathcal{F}^{(n)}$ 可测函数, 则 f 关于 $\gamma^{(n)}$ 的积分存在当且仅当

$$I(f^+) := \int_{\Omega_1}\ldots\int_{\Omega_n} f^+(\omega_1, \ldots, \omega_n)\gamma_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n)\ldots\gamma_1(d\omega_1)$$

中至少有一个有限, 并且当积分存在时, 有

$$\int_{\Omega^{(n)}} f d\gamma^{(n)} = \int_{\Omega_1}\ldots\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_n)\gamma_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n)\ldots\gamma_1(d\omega_1)$$

定理 7.12: Tulcea

设 $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 是可测空间, $(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)})$ 同前文定义, 令

$$\Omega^\infty := \prod_{k=1}^\infty \Omega_k, \quad \mathcal{F}^\infty := \prod_{k=1}^\infty \mathcal{F}_k.$$

(后者即为 $\Omega(\infty)$ 的全体可测柱集生成的 σ 代数.) 若 $\mathbb{P}_1$ 是 $\mathcal{F}_1$ 上的概率测度,$\mathbb{P}_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n)$ 是 $\Omega^{(n-1)} \times \mathcal{F}_n$ 上的转移测度, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 则在 $\mathcal{F}^\infty$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbb{P}^\infty$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 对 $\forall B^{(n)} \in \mathcal{F}^{(n)}$, 有

$$\mathbb{P}^\infty\left(B^{(n)} \times \prod_{k=n+1}^\infty \Omega_k\right) = \mathbb{P}^{(n)}\left(B^{(n)}\right),$$

其中 $\mathbb{P}^{(n)}$ 是定义在 $\mathcal{F}^{(n)}$ 上的如下概率测度

$$\mathbb{P}^{(n)}(B^{(n)}) = \int_{\Omega_1}\ldots\int_{\Omega_n} 1_{B^{(n)}}(\omega_1, \ldots, \omega_n)P_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n)\ldots P_1(d\omega_1).$$

例题 7.10

设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k), k = 1, 2,$ 是可测空间，γ 是 $\Omega_1 \times \mathcal{F}_2$ 上的有限转移测度，μ 是 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 上的有限测度，f 是有界 $\mathcal{F}_2$ 可测函数. 令

$$\nu(B) := \int_{\Omega_1} \gamma(x, B)\mu(dx), \quad B \in \mathcal{F}_2.$$

证明:

(i) $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(y)\gamma(x, dy)$ 是有界 $\mathcal{F}_1$ 可测函数;

(ii) $\int_{\Omega_2} f(y)\nu(dy) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(y)\gamma(x, dy) \right) \mu(dx)$.

8 条件数学期望与条件概率

定义 8.1: a

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $B \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(B) > 0$. $\forall A \in \mathcal{F}$, 若令

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

则称 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ 为给定事件 B 下的条件概率. 若有 $B \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(B) = 0$, 则 $\mathbb{P}(A|B) = 0$.

注: (1) 易知, 在 $\mathbb{P}(B) > 0$ 的情形, $\mathbb{P}(\cdot|B)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的概率测度; (2) $\mathbb{P}(B) = 0$ 的情况不重要, 此时可定义 $\mathbb{P}(A|B)$ 为任意一个 $[0, 1]$ 中的数.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间,$B \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(B) > 0$, 令

$$\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B)$$

由于 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_B)$ 是一个概率空间, 所以可以考虑随机变量在此概率空间上的积分.

定义 8.2: b

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $B \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(B) > 0$. 若 X 是随机变量且 $\int_\Omega X d\mathbb{P}_B$ 存在, 则称 $\int_\Omega X d\mathbb{P}_B$ 为 X 在给定事件 B 下的条件数学期望, 记作 $\mathbb{E}(X|B)$, 若 $B \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(B) = 0$, 则令 $\mathbb{E}(X|B) = 0$

例题 8.1

设概率空间为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. (乘法公式) 若 $A, B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$, 则

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

一般的, 若 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}) > 0$, $k = 2, \ldots, n$, 则

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

2. (全概率公式) 若 $A \in \mathcal{F}$, $\{B_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中至多可数个两两不交且有正概率的事件, $A \subset \bigcup_n B_n$, 则

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).$$

3. (Bayes 公式) 若 $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0$, $\{B_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中至多可数个两两不交且有正概率的事件,$A \subset \cup_n B_n$, 则对每个 B_k, 有

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}.$$

命题 8.1

设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量, 且 $\mathbb{E}X$ 存在 (但不一定有限)，$\mathbb{P}(B)>0$，则 $\mathbb{E}(X|B)$ 存在且

$$\mathbb{E}(X|B)=\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\int_B Xd\mathbb{P};$$

特别地，对于任意的 $A\in\mathcal{F},\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{E}(1_A|B)$.

注：$\mathbb{E}(X|B)$ 可看作 X 在 B 上的"平均值"。此命题将定义 (b) 与定义 (a) 联系了起来.

1. 随机变量 X 在给定事件 B 下的条件期望是 X 在集合 B 上的平均值.

2. 如同定义 (b), 若 $\mathbb{P}(B^c)>0$, 则同样有给定事件 B^c 下的条件概率 $\mathbb{P}(\cdot|B^c)$ 和条件期望 $\mathbb{E}(\cdot|B^c)$. 于是, 可按如下方式定义期望存在的随机变量 X 在 σ 代数 $\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega,B,B^c\}$ 下的条件期望:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}):=\begin{cases}\mathbb{E}(X|B), & \mathbb{P}(B)>0\ (\text{即 } B \text{ 发生}),\\ \mathbb{E}(X|B^c), & \mathbb{P}(B^c)>0\ (\text{即 } B^c \text{ 发生}).\end{cases}$$

因此,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=\mathbb{E}(X|B)\mathbb{I}_B+\mathbb{E}(X|B^c)\mathbb{I}_{B^c},$$

为一定意义下的条件期望. 显然,$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 是 Ω 上的函数且是 $\mathcal{G}$ 可测的.

定义 8.3

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω 的分割. 令

$$\mathcal{G}=\sigma(\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}).$$

若 X 是期望存在的 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量, 则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n},$$

为 X 在给定 σ 代数 $\mathcal{G}$ 下关于 $\mathbb{P}$ 的条件期望，并记之为 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

注：由此定义看出，$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 可测函数, 且在每个 B_n 上,$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 取 X 在 B_n 上的平均值 $\mathbb{E}(X|B_n)$.

命题 8.2

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω 的分割，令 $\mathcal{G}=\sigma(\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}})$。若 X 是期望存在的 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量, 则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 关于 $\mathcal{G}$ 可测, 且

$$\int_B\mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P}=\int_B Xd\mathbb{P},\quad \forall B\in\mathcal{G}$$

令 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}=\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$. 若 h 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值 $\mathcal{G}$ 可测函数, 使 $\forall B\in\mathcal{G},\mathbb{E}(X\mathbb{I}_B)=\mathbb{E}(h\mathbb{I}_B)$, 则

$$h=\mathbb{E}(X|\mathcal{G}),\mathbb{P}_{\mathcal{G}}a.s.$$

例题 8.2

给定非空集合 Ω 设 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω 的一个划分, 若令

$$\mathcal{F}=\left\{\bigcup_{n\in J}B_n : J\subset\mathbb{N}\right\},$$

则 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的 σ 代数，且 $\mathcal{F}=\sigma(\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}})$。

定义 8.4: (d)

给定概论空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 以及其上期望存在的随机变量 X, 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 (即 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 且 $\mathcal{G}$ 是 Ω 的 σ 代数).X 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的条件期望, 记作 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, 定义为满足 (3) 式的 Ω 上的 $\mathcal{G}$ 可测函数 h 的等价类中的任意一个, 其中,

$$\int_B h d\mathbb{P}=\int_B X d\mathbb{P},\quad \forall B\in\mathcal{G}.\quad (3)$$

其中 h 是 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$，也是 $\mathcal{G}$ 可测的随机变量。

注 1：一般地，满足 (3) 式的 $\mathcal{G}$ 可测函数有许多, 但其中任意两个均是 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}a.s.$ 相等的, 即若 $f_1,f_2\in\mathcal{F}_X$, 其中

$$\mathcal{F}_X=\{f: f\text{是}\Omega\text{上的}\mathcal{G}\text{可测函数且对}\forall B\in\mathcal{G},\text{有}\int_B f d\mathbb{P}=\int_B X d\mathbb{P}\},$$

则 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\{f_1=f_2\})=1$。因此，以上定义的 X 的条件期望 (若存在) 是 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}a.s.$ 唯一的.

注 2: 通常把任一满足 (3) 式的 $\mathcal{G}$ 可测函数叫做 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 的一个版本.

定理 8.1

设概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 以及其子 σ-代数 $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$，则随机变量 X 对于 $\mathcal{G}$ 的条件期望值 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 存在，且是 $\mathcal{G}$ 上的唯一的 $\mathbb{P}$-几乎处处 (a.s.) 定义的函数。

1. 定义要求 X 是随机变量且 $\mathbb{E}X$ 存在；从而 $\phi(\cdot)=\int_{\cdot} X d\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}$ 上是 σ 有限的，但 ϕ 在子 σ 代数 $\mathcal{G}$ 上不一定是 σ 有限的. 例如，若取 $\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$，则可能 $\phi(\Omega)=\mathbb{E}X=\infty$. 由于当 $EX=\infty$ 时，$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 不一定是几乎处处有限的，所以即使 X 是随机变量,$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 也未必是随机变量.

2. 若定义中的 X 是任意积分存在的 $\mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$）值可测函数，则满足（3）式，即

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P}=\int_B X d\mathbb{P},\quad B\in\mathcal{G},$$

的 G 可测函数仍然存在且 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s. 唯一确定，因此，条件期望的定义可以推广到任意积分存在的可测函数。这在今后会用到，比如，当考虑 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 在另一个 σ 代数 $\tilde{G}$ 下的条件期望 $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\tilde{G}\}$ 时，由注记 1 知,$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 就不一定是随机变量. 但是，今后我们还是来用同样的语言和记号. 此外，条件期望的性质一般都可以推广到积分存在的可测函数情形.

3. 在讨论条件期望或条件概率时，都是指关于一个给定的概率测度 $\mathbb{P}$ 而言的. 但是在不引起混淆的情形，常常省略“关于 $\mathbb{P}$”

4. 因为只有对期望存在的可测函数定义其条件期望才有意义，所以今后假定，凡是出现在条件期望符号中的可测函数，其期望都存在.

5. 在讨论 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 的几乎处处成立的性质 P 时，例外集都是指 $\mathcal{G}$ 可测集，即 $\exists N\in\mathcal{G}$，满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得当 $\omega\in N^c$ 时，P 成立.

6. 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间,$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数, 令

$$\mathcal{L}:=\{[[f]]:[[f]]\text{是}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{期望存在的}\overline{\mathbb{R}}\text{值可测函数}f\text{的等价类}\}$$
$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}:=\{[[f]]:[[f]]\text{是}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{\mathcal{G}})\text{上的}\overline{\mathbb{R}}\text{值可测函数}f\text{的等价类}\}$$

从而，可把 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})$ 看成是从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ 的映射. 也可以把 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})(\cdot)$ 看成是从 $\mathcal{L}\times\Omega$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数。但是，对给定的 $f\in\mathcal{L},\mathbb{E}(f|\mathcal{G})(\cdot)$ 是 $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$a.s. 唯一确定的

命题 8.3

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 及其上期望存在的随机变量 X, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 以下论断成立

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 存在, 且 $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})]=\mathbb{E}X$
2. 若 $\mathcal{G}=\mathcal{F}$ 或 X 为 $\mathcal{G}$ 可测的，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=X$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.;
3. 若 X 是 $\mathbb{C}$ 值随机变量且 $X=X_1+iX_2$，其中 X_1,X_2 为 $\mathbb{R}$ 值随机变量，则

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G})+i\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}),\quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}a.s.$$

定义 8.5

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，$A\in\mathcal{F}$。令

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G})=\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathcal{G}),$$

并称 $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ 为 A 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的条件概率。

命题 8.4

(1') $\forall A\in\mathcal{F},\mathbb{E}[\mathbb{P}(A|\mathcal{G})]=\mathbb{P}(A)$。
(2') $\forall A\in\mathcal{G}$，则 $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})=\mathbb{I}_A$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.

定理 8.2

设 $a, b \in \mathbb{R}$，随机变量 X, Y 的期望存在

1. $X = a\mathbb{P}$a.s.$\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = a$ ($\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-a.s.)。
2. $a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$ 存在 $\Rightarrow \mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.(从而,$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ 是线性映射)
3. $X \le Y\mathbb{P}$a.s. $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \le \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-a.s.，则 $|\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})| \le \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$a.s.
4. (非负收敛定理) 若 $0 \le X_n \uparrow X$, $\mathbb{P}$a.s.，则
$$0 \le \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{-a.s.}.$$
5. （Fatou 引理）设 Y 可积, 若 $\forall n \in \mathbb{N}, Y \le X_n$, $\mathbb{P}$a.s.，则
$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{a.s.}.$$
6. (反向 Fatou 引理) 设 Z 可积. 若 $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \le Z\mathbb{P}$a.s.，则
$$\mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{a.s.}.$$
7. (控制收敛定理) 设 Y, Z 可积, 若 $Y \le X_n \uparrow X, \mathbb{P}$a.s.，或 $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y \le X_n \le Z$ 且 $X_n \to X$, $\mathbb{P}$a.s.，则
$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{a.s.}.$$

定理 8.3: Exercise

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为子 σ 代数.
(1') $\mathbb{P}(\Omega|\mathcal{G}) = 1$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.；$\mathbb{P}(\emptyset|\mathcal{G}) = 0$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.。
(2') 对 $\forall A \in \mathcal{F}$ 有,$0 \le \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \le 1$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.
(3') 若 $B_n \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbb{N}$，且两两不交，则
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{a.s.}.$$

注意，(2')（或（3'））中的零概率集是与给定的 A（或 B_n,）有关的. 因此，(2")（或（3'））中 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s. 的确切意思是，给定 A（或 B_n），存在与 A（或 B_n）有关的零概率集 N 且 $N \in \mathcal{G}$，使得（2'）（或（3'））在 N^c 上逐点成立，这样的零概率集通常会随 A（或 B_n）的不同而变化. 而无限不可数多个零概率集之并不一定是零概率集. 准确理解此定理的含义，对理解后文中的正则条件概率很有意义.

给定 σ 代数下的条件期望在一定意义下具有期望取平均值的效果. 设 $\mathcal{C}$ 为一 σ 代数，$B \in \mathcal{C}$. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$ 且 $A \subset B$，有 $A = B$ 或 $A = \emptyset$，则称 B 是 C 的一个原子（即原子除它本身外不包含其它非空可测子集）

定理 8.4

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上期望存在的随机变量 X，及 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{G}$。若 B 为 $\mathcal{G}$ 的非空原子，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 在 B 上是常数，并且 $\mathbb{P}(B) > 0$ 时,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}, \quad \omega \in B,$$

并记之为 $\mathbb{E}(X|B)$。

注：此定理说明，$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 在 $\mathcal{G}$ 的原子（而不一定是下的原子）B 上的值，恰好是 X 在 B 上关于 $\mathbb{P}$ 的平均值. 因此，在这个意义下,$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ 是 X 的一个 $\mathcal{G}$ 平滑函数.

推论 8.1: Exercise

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 期望存在的随机变量 X 及 $A \in \mathcal{F}$。设 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ 是 Ω 的分割. 若 $\mathcal{G} = \sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\})$，则

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X|B_n)\mathbb{I}_{B_n},$$

其中, 当 $\mathbb{P}(B_n) > 0$ 时，$\mathbb{E}(X|B_n) = \frac{1}{\mathbb{P}(B_n)} \int_{B_n} X d\mathbb{P}$；当 $\mathbb{P}(B_n) = 0$，$\mathbb{E}(X|B_n) = 0$。特别地，(1) 若 $B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) > 0$，且 $\mathcal{G} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$，则

$$\mathbb{E}(X|B) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}, \quad \omega \in B,$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathcal{F};$$

(2) 若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$。

定理 8.5

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数 $\mathcal{G}$。设 X 是 $\mathcal{G}$ 可测随机变量,Y 是 $\mathcal{F}$ 可测并使 $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}Y$ 存在的随机变量, 则

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{a.s..}$$

定理 8.6

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上期望存在的随机变量 X, 设 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ 都是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数

(1) 若 $\mathcal{G}$ 与 $\sigma(X)$ 独立, 则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.

(2) 若 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$，则 $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}')|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$a.s.。

定理 8.7

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为子 σ 代数，X,Y 是随机变量，ϕ 是非负的或满足 $\mathbb{E}|\phi(X,Y)|<\infty$ 的可测函数，若 X 是 $\mathcal{G}$ 可测的, 且 $\sigma(Y)$ 与 $\mathcal{G}$ 独立, 则

$$\mathbb{E}[\phi(X,Y)|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[\phi(x,Y)]|_{x=X}$$

定理 8.8

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间，$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是其上的概率测度且 $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数。令 $\xi:=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$，$\eta:=\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]:=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\xi|\mathcal{G})$. 若 X 是 $\mathbb{Q}$ 可积的随机变量, 则 $\eta>0,\mathbb{Q}$a.s., 且

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{G}]=\frac{1}{\eta}\mathbb{E}[\xi X|\mathcal{G}],\quad \mathbb{Q}\text{-a.s.}.$$

例题 8.3

设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量，且满足 $\mathbb{E}|X|<\infty,\mathcal{G},\mathcal{H}$ 都是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数。若 $\mathcal{H}$ 与 $\sigma(\sigma(X)\cup\mathcal{G})$ 独立, 则

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})]=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}],\quad \mathbb{P}\ a.s.$$

特别地，若 $\mathcal{H}$ 与 $\sigma(X)$ 独立，则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]=\mathbb{E}X,\mathbb{P}\ a.s.$.

(Hint: 考虑集类

$$\mathcal{C}=\{\mathcal{G}\cap\mathcal{H}:G\in\mathcal{G},H\in\mathcal{H}\},$$

并证明 $\mathbb{E}[X|\mathbb{I}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathbb{I}],A\in\mathcal{C}$. 注意到 $\sigma(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$, 再用单调类定理)

设 X,Y 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}$ 值随机变量，$\mathbb{E}X$ 存在，显然 $\sigma(Y)$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 易知,$\forall y\in\mathbb{R},\{Y=y\}$ 是 $\sigma(Y)$ 的原子. (why)。从而，在 $Y=y$ 上，$\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ 是常数函数。于是，$\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ 可看成是 Y 的函数，即存在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的可测函数 g，使得 $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]=g(Y)$.

定理 8.9

若 X 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}$ 值或 $\mathbb{C}$ 值随机变量,$\mathbb{E}X$ 存在，f 是从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的可测映射，则 X 在 $\sigma(f)$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的条件期望满足

$$\mathbb{E}[X|\sigma(f)]=g\circ f,\quad \mathbb{P}_{\sigma(f)}\ a.s.,$$

其中，映射 $g:E\to\overline{\mathbb{R}}$(或 $\mathbb{C}$) 是满足

$$\int_A gd\mathbb{P}=\int_{f^{-1}(A)}Xd\mathbb{P},\quad A\in\mathcal{E},$$

且由 $\mathbb{E}(X|\sigma(f))\mathbb{P}_{\sigma(f)}\ a.s.$ 唯一确定的 $\mathcal{E}$ 可测函数.

记号同前一定理, 设 $y\in E$，由于 $\mathbb{E}[X|\sigma(f)]$ 在 $\{f=y\}$ 上是常数，所以时常用 $\mathbb{E}(X|f)$ 表示 $\mathbb{E}(X|\sigma(f))$.

又因为当 $\omega \in \{f = y\}$ 时,

$$\mathbb{E}[X|f](\omega) = g \circ f(\omega) = g(y),$$

且在 $\sigma(f)$ 中的一个零概率集之外，对一切 $\omega \in \Omega$ 成立，所以我们也可以认为，X 在给定 f 之下的条件数学期望是定理中的 g, 并记

$$\mathbb{E}(X|f = y) = g(y), \quad y \in E.$$

在上一定理中令 $X = \mathbb{I}_B$, $B \in \mathcal{F}$，立即得到以下推论

推论 8.2

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间。若 $B \in \mathcal{F}$，$f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ 是可测映射，则 B 在 $\sigma(f)$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的条件概率

$$\mathbb{P}(B|\sigma(f)) = h \circ f, \quad \mathbb{P}_{\sigma(f)}\ a.s.,$$

其中，$h : E \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{E}$ 可测的，满足

$$\int_A h d\mathbb{P}_f = \mathbb{P}(B \cap f^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{E},$$

且由 $\mathbb{P}(B|\sigma(f))$ $\mathbb{P}_{\sigma(f)}$ $a.s.$ 唯一确定.

例题 8.4

习题 7.3-1,4

习题 7.4-3,4

定义 8.6

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间,$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 若映射 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}} : \Omega \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ 满足

1. 对 $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\cdot, A)$ 是 $\mathcal{G}$ 可测函数, 并对 $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega, \cdot)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的概率测度
2. 对 $\forall A \in \mathcal{F}, \exists N \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N) = 0$, 使得

$$\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega, A) = \mathbb{P}(A|\mathcal{G})(\omega), \omega \in N^c$$

则称 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}$ 为在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件概率

注 1: 由定义的条件 (1) 知,$\mathbb{P}^{\mathcal{G}}$ 是从可测空间 $(\Omega, \mathcal{G})$ 到可测空间 $(\Omega, \mathcal{G})$ 的转移概率.

注 2: 由定义的条件 (2) 知, 对任给的 $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\cdot, A)$ 是 A 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的条件概率, 即

$$\int_B \mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega, A)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(A \cap B), B \in \mathcal{G}$$

定理 8.10

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，$\mathbb{P}^{\mathcal{G}}$ 为在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件概率。若 X 是 $\mathbb{E}X := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}X$ 存在的 $\mathcal{F}$ 可测随机变量，则 $\exists N \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得对 $\forall\omega \in N^C, X$ 关于 $\mathbb{P}^{G}(\omega,\cdot)$ 的积分存在，且

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} X(\omega')\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega, d\omega'), \quad \omega \in N^C.$$

注: 定理中的 N 通常与 X 有关。

定理 8.11

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G},\mathcal{G}'$ 都是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数且 $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}'$，$\mathbb{P}^{\mathcal{G}},\mathbb{P}^{\mathcal{G}'}$ 分别是在 $\mathcal{G},\mathcal{G}'$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件概率。若 X 是 $\mathcal{F}$ 可测随机变量,X' 是 $\mathcal{G}'$ 可测随机变量，且 $\mathbb{E}[XX'] := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(XX')$ 和 $\mathbb{E}X := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}X$ 都存在. （若 X, X' 是 $\mathbb{C}$ 值的，则设 XX'，X 是关于 $\mathbb{P}$ 可积的），则存在 $N \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得对 $\forall\omega\in N^C$，有

$$\int_{\Omega} X'(\omega')X(\omega')\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega,d\omega') = \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} X'(\omega'')\mathbb{P}^{\mathcal{G}'}(\omega',d\omega'')\right)X'(\omega'')\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega,d\omega'').$$

定义 8.7

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$X_T := \{X_t : t\in T\}$ 是其上的一族随机变量，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 若映射 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}} : \Omega\times\sigma(X_T)\to[0,1]$ 满足:

(a) 对 $\forall A\in\sigma(X_T)$, $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\cdot,A)$ 是 $\mathcal{G}$ 可测函数，且对 $\forall\omega\in\Omega$, $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega,\cdot)$ 是 $\sigma(X_T)$ 上的概率测度;

(b) 对 $\forall A\in\sigma(X_T)$, $\exists N\in\mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得

$$\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega,A) = \mathbb{P}(A|\mathcal{G})(\omega), \quad \omega\in N^c,$$

则称 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}$ 为 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件分布.

注意，定义中的 $\sigma(X_T)$ 和 $\mathcal{G}$ 一般没有包含关系. 当 $\mathcal{G}\subset\sigma(X_T)$ 时，正则条件分布 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}$ 是概率空间 $(\Omega,\sigma(X_T),\mathbb{P})$ 中，在 $\mathcal{G}$ 下关于 $\mathbb{P}$ 的正则条件概率.（虽然二者符号相同，但是含义是有区别的.）

例题 8.5

易知，类似前面正则条件概率的性质（一）和（二），我们可以建立关于正则条件分布相应的性质.（Exercise!）

令 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \prod\limits_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R}_t)$, 其中 $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}, t\in T$

定义 8.8

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$X_T:=\{X_t:t\in T\}$ 是其上的一族 $\mathbb{R}$ 值随机变量，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数。若映射 $P_{X_T}^{\mathcal{G}}:\Omega\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\to[0,1]$ 满足：

(a) 对 $\forall, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $\mathbb{P}_{X_T}^{\mathcal{G}}(\cdot,A)$ 是 $\mathcal{G}$ 可测的，且对 $\forall\omega\in\Omega$, $\mathbb{P}_{X_T}^{\mathcal{G}}(\omega,\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ 上的概率测度；

(b) 对 $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $\exists N\in\mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得

$$\mathbb{P}_{X_T}^{\mathcal{G}}(\omega,A)=\mathbb{P}(\{X_T\in A\}|\mathcal{G})(\omega),\quad \omega\in N^C,$$

则称 $\mathbb{P}_{X_T}^{\mathcal{G}}$ 为 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的混合条件分布.

定理 8.12

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$X_T:=\{X_t:t\in T\}$ 是其上的一族 $\mathbb{R}$ 值随机变量，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，$g:\mathbb{R}^T\to\mathbb{R}$ 是 Borel 可测函数且 $\mathbb{E}|g(X_T)|$ 存在。若 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下的正则条件分布 (或混合条件分布) 存在, 则 $\exists N\in\mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{P}(N)=0$，使得 $\forall\omega\in N^C$，

$$\mathbb{E}(g(X_T)|\mathcal{G})(\omega)=\int_\Omega g(X_T(\omega'))\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(\omega,d\omega')=\left(\int_{\mathbb{R}^T}g(y)\mathbb{P}_{X_T}^{\mathcal{G}}(\omega,dy)\right)$$

定理 8.13

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$X_T:=\{X_t:t\in T\}$ 是其上的一族 $\mathbb{R}$ 值随机变量，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的子 σ 代数。若 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下的正则条件分布存在, 则 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下的混合条件分布也存在，反之, 若 $X_T(\Omega)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, 且 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下的混合条件分布存在, 则 X_T 在 $\mathcal{G}$ 下的正则条件分布也存在.

定理 8.14

设 $X=(X_1,\dots,X_n)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值随机变量，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ 代数，且 X 在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的混合条件分布 $\mathbb{P}_X^{\mathcal{G}}$ 存在. 此外, 若还有 $X(\Omega)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$，则 X 在 $\mathcal{G}$(关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件分布存在.

定理 8.15

若 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathbb{P})$ 是概率空间且 G 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 的子 σ 代数，则一定存在 $\mathcal{G}$ 下 (关于 $\mathbb{P}$) 的正则条件概率 $\mathbb{P}^{\mathcal{G}}(x,A)$，$(x,A)\in\mathbb{R}^n\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。

定理 8.16

设设 $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ 是 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的概率测度，则存在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_1$ 及 $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的转移概率 $\mathbb{P}_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, dx_k)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, 使得对 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\mathbb{P}(B) = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} 1_B(x_1, \ldots, x_n) \mathbb{P}_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n) \ldots \mathbb{P}_1(dx_1).$$

定义 8.9

设 T 是任意一个指标集，$(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)_{t \in T}$ 都是可测空间,$\forall U \subset T$，令

$$\Omega_U := \prod_{t \in U} \Omega_t, \quad \mathcal{F}_U := \prod_{t \in U} \mathcal{F}_t.$$

对于 $S \Subset T$，存在 $\mathcal{F}_S$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_S$。若 $\forall S, S' \Subset T$ 且 $S \subset S'$，有

$$\mathbb{P}_S(A_S) = \mathbb{P}_{S'}(A_S \times \Omega_{S \setminus S'}), \quad A_S \in \mathcal{F}_S,$$

则称概率空间族 $(\Omega_S, \mathcal{F}_S, \mathbb{P}_S) : S \Subset T$ 是相容的，也称概率测度族 $\{\mathbb{P}_S : S \Subset T\}$ 是相容的。

注：由条件 (8) 可得，对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{s_1, \ldots, s_n\} \subset T$，$\forall A_{s_j} \in \mathcal{F}_{s_j}, j = 1, \ldots, n$，及 $\forall \pi \in \mathcal{S}_n$，有

$$\mathbb{P}_{\{s_1, \ldots, s_n\}}\left(\prod_{j=1}^{n} A_{s_j}\right) = \mathbb{P}_{\{s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)}\}}\left(\prod_{j=1}^{n} A_{s_{\pi(j)}}\right).$$

其中，$\mathcal{S}_n$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有置换组成的群.

定理 8.17

设 T 是任意无穷指标集，$\forall S \Subset T$，$(\mathbb{R}^S, \mathcal{B}(\mathbb{R}_S), \mathbb{P}_S)$ 是一概率空间。若概率测度族 $\{\mathbb{P}_S : S \Subset T\}$ 是相容的，则在 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbb{P}$，使得对 $\forall S \Subset T$，有

$$\mathbb{P}(B_S \times \Omega_{T \setminus S}) = \mathbb{P}_S(B_S), \quad B_S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_S).$$

注意:$\forall S \subset T, \mathbb{R}_S = \prod_{t \in S} \mathbb{R}_t = \mathbb{R}_S$，其中 $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}, t \in S$。

例题 8.6

若 T 是任意不可数集,$\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in T}$ 是一族可测空间, 则

$$\mathcal{F}_T = \bigcup_{T_c \subset T, T_c \text{可数}} \{B_{T_c} \times \Omega_{T \setminus T_c} : B_{T_c} \in \mathcal{F}_{T_c}\}$$

1. 与 Tulcea 定理不同的是，此定理考虑的指标不一定可数，且不假设转移概率的存在而假设概率测度族满足相容性：但 Tulcea 定理对概率空间没有限制.

2. 此定理的证明主要用到定理 7 和 Tulcea 定理.

3. 此定理可以推广到 Borel 空间（如完备可分的度量空间且 g 代数为 Borela 代数，见教材定理 7.5.15）情形.

4. 此定理是随机过程理论的基础之一.

设 $X_T := \{X_t : t \in T\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一族 $\mathbb{R}$ 值随机变量。令

$$\mathbb{P}_{X_T}(B_T) := \mathbb{P}(\{X_T \in B_T\}), \quad B_T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T),$$

即 $\mathbb{P}_{X_T} = \mathbb{P} \circ X_T^{-1}$。于是，$\mathbb{P}_{X_T}$ 是 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ 上的概率测度，即 X_T 的概率分布测度.

若令 $\{\mathbb{P}_{X_S} : S \Subset T\}$ 是 X_T 的有限维边缘分布族（或称边缘概率测度），即 $\forall S \Subset T, \mathbb{P}_{X_S} = \mathbb{P} \circ X_S^{-1}$，则 $\{\mathbb{P}_{X_S} : S \Subset T\}$ 是相容的。因此，由 Kolmogorov 相容性定理知，$\mathbb{P}_{X_T}$ 由 $\{\mathbb{P}_{X_s} : S \Subset T\}$ 唯一决定.

9 可测函数序列的收敛

在这一章约定所有的可测函数都是几乎处处有限的, 度量空间 (M,d) 是可分的.

设 (M,d) 是度量空间. 若 $A\subset M$, 则称包含 A 的最小闭集为 A 的闭包, 并记为 $\bar{A}$. 若 $A\subset B\subset M$, $\bar{A}\supset B$, 则称 A 是在 B 中稠密的. 若 M 有一个可数稠密子集, 则称 M 是可分的.

引理 9.1: (练习)

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是可测空间, (M,d) 是可分的度量空间, f,g 都是从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(M,\mathcal{B}(M))$ 的可测映射. 若令

$$H(\omega):=d(f(\omega),g(\omega)),\quad \omega\in\Omega,$$

则 H 是非负 $\mathcal{F}$ 可测函数

Hint: 由 (M,d) 是可分的度量空间知, $\mathcal{B}(M)\times\mathcal{B}(M)=\mathcal{B}(M\times M)$.

以下称 (M,d) 是可分的度量空间.

定义 9.1

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:\Omega\to M$, $f:\Omega\to M$ 都是可测映射. 若存在 μ 零集 $N\in\mathcal{F}$, 使得 $\forall\omega\in N^c$

1. 当 $n\to\infty$ 时, $d(f_n(\omega),f(\omega))\to 0$, 则称 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mu$-几乎处处收敛到 f, 记为 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\to f\mu$ a.e.;
2. 当 $n,m\to\infty$ 时, $d(f_n(\omega),f_m(\omega))\to 0$, 则称 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mu$-几乎处处相互收敛, 记为 $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.}0$ 或 $d(f_n,f_m)\to 0$ μa.e.

特别地, 若 μ 是概率测度时, 通常记 $\overset{a.e.}{\to}$ 为 $\overset{a.s.}{\to}$, 并相应于 1 和 2 分别称为几乎必然收敛和几乎必然相互收敛.

- $f_n\xrightarrow{a.e.}f \iff \mu(\{\omega\in\Omega:\overline{\lim}_{n\to\infty}d(f_n(\omega),f(\omega))\neq 0\}^c)=0.$
- $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.}0 \iff \mu(\{\omega\in\Omega:\{f_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$不是$M$中的基本列$\})=0.$

1. $f_n\xrightarrow{a.e.}f$. 若 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 满足当 $k\to\infty$ 时 $n_k\uparrow\infty$, 则当 $k\to\infty$ 时, $f_{n_k}\to f$ μa.e., 即几乎处处收敛序列的任意子序列也几乎处处收敛
2. $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 且 $f_n\xrightarrow{a.e.}g$, 则 $f=g$ μa.e., 即几乎处处收敛的极限是几乎处处唯一确定的.
3. 设 $N\in\mathbb{N}, f_n^{(k)}:\Omega\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}, k=1,\dots,N$, 是可测函数. 若 $f_n^{(k)}\xrightarrow{a.e.}f^{(k)}, k=1,2,\cdots,N$, $G:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 则
$$G(f_n^{(1)},\dots,f_n^{(N)})\xrightarrow{a.e.}G(f^{(1)},\dots,f^{(N)}).$$

特别地, 若 c 为常数,$p>0, f_n, g_n:\Omega\to\mathbb{R}$ 都是可测函数, $n\in\mathbb{N}, f_n\xrightarrow{a.e.} f$, $g_n\xrightarrow{a.e.} g$, 则

$$\begin{aligned} f_n+g_n &\xrightarrow{a.e.} f+g,\\ f_ng_n &\xrightarrow{a.e.} fg,\\ cf_n \xrightarrow{a.e.} cf|f_n|^p &\xrightarrow{a.e.} |f|^p; \end{aligned}$$

若当 n 充分大时, 还有 $\{g_n=0\}$ 与 $\{g=0\}$ 都是 μ 零集, 则

$$\frac{f_n}{g_n}\xrightarrow{a.e.}\frac{f}{g}\quad \mu\ a.e.$$

4. $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.} 0$, $n,m\to\infty \iff d(f_{n+m},f_n)\xrightarrow{a.e.} 0$, $n\to\infty$, 对 $m\in\mathbb{N}$ 一致成立.
5. $f_n\xrightarrow{a.e.} f\ \mu\ a.e.$, 若 $\forall n\in\mathbb{N}, g_n=f_n\ \mu\ a.e.$ 且 $g=f$ μ-a.e., 则 $g_n\xrightarrow{a.e.} g$ μ-a.e..
6. $f_n\xrightarrow{a.e.} f$, 则 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎处处相互收敛, 若 (M,d) 是完备的度量空间, 则反之也成立.

设 (M,d) 是度量空间, $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:\Omega\to M, f:\Omega\to M$ 都是映射.

$$\begin{aligned} f_n(\omega)\xrightarrow{n\to\infty} f(\omega) &\iff \forall\varepsilon>0,\exists N=N_\varepsilon\geq 1,\text{使得}\forall n\geq N\text{时, 有}d(f_n(\omega),f(\omega))<\varepsilon\\ \iff \text{对于任意当}\varepsilon>0\text{时收敛于 0 的正数列}\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}&,\forall k\in\mathbb{N},\exists N=N_k\geq 1,\text{使得当}k\geq N\text{时, 有}d(f_n(\omega),f(\omega))<\varepsilon_k \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \{f_n\xrightarrow{n\to\infty} f\}=\{d(f_n,f)\xrightarrow{n\to\infty}0\} &= \cap_{\epsilon>0}\cup_{N=1}^\infty\cap_{n=N}^\infty\{d(f_n,f)<\epsilon\}\\ &=\cap_{k=1}^\infty\cup_{N=1}^\infty\cap_{n=N}^\infty\{d(f_n,f)<\epsilon_k\}\\ &=\cap_{k=1}^\infty\cup_{N=1}^\infty\cap_{n=1}^\infty\{d(f_{n+N},f)<\epsilon_k\} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \{f_n\xrightarrow{n\to\infty} f\}=\{d(f_n,f)\xrightarrow{n\to\infty}0\}^c &= \cup_{\epsilon>0}\cap_{N=1}^\infty\cup_{n=N}^\infty\{d(f_n,f)\geq\epsilon\}\\ &=\cup_{k=1}^\infty\cap_{N=1}^\infty\cup_{n=N}^\infty\{d(f_n,f)\geq\epsilon_k\}\\ &=\cup_{k=1}^\infty\cap_{N=1}^\infty\cup_{n=1}^\infty\{d(f_{n+N},f)\geq\epsilon_k\} \end{aligned}$$

类似地, 若 ϵ 和 $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 同上, 则

$$\begin{aligned} \{d(f_m,f_n)\xrightarrow{m,n\to\infty}0\} &= \cap_{\epsilon>0}\cup_{n=1}^\infty\cap_{m=1}^\infty\{d(f_{n+m},f)<\epsilon\}\\ &=\cap_{k=1}^\infty\cup_{n=1}^\infty\cap_{m=1}^\infty\{d(f_{n+m},f)<\epsilon_k\} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\{d(f_m,f_n)\xrightarrow{m,n\to\infty}0\}^c &= \cup_{\epsilon>0}\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f)\geq\epsilon\}\\ &= \cup_{k=1}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f)\geq\epsilon_k\}\end{aligned}$$

定理 9.1

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:\Omega\to M$, $f:\Omega\to M$ 都是可测映射

(a) $f_n\xrightarrow{a.e.}f \iff \forall\varepsilon>0\mu(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f)\geq\epsilon\})=0$, 特别地, 若 μ 是有限的, 则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f \iff \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f)\geq\varepsilon\}\right)=0$.

(b) $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.}0 \iff \forall\varepsilon>0,\mu(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f_n)\geq\epsilon\})=0$, 特别地, 若 μ 是有限的, 则 $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.}0 \iff \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f_n)\geq\varepsilon\}\right)=0$.

(c) 若 $\forall\epsilon>0,\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f)\geq\varepsilon\}\right)=0$, 则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$

若 $\forall\epsilon>0,\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m},f_n)\geq\varepsilon\}\right)=0$, 则 $d(f_n,f_m)\xrightarrow{a.e.}0$

Borel-Cantelli 引理

引理 9.2

设 (Ω,F,μ) 是测度空间, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset F$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$, 则

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=0.$$

例题 9.1

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ 上的一列可测函数且 $|f_n|<\infty$, λa.e., 其中, λ 是一维 Lebesgue 测度在 $[0,1]$ 上的限制. 试证: 存在一列正整数 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 使得

$$\frac{f_n}{a_n}\to 0,\quad \lambda\text{ a.e..}$$

定理 9.2

设 (Ω, F, μ) 是测度空间, (M, d) 是度量空间, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \Omega \to M$, $f : \Omega \to M$ 都是可测映射

1. 若 $\varepsilon > 0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{d(f_n, f) \geq \varepsilon\}) < \infty$$
则有 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

2. 若 $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是正数列, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, 且
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{d(f_{k+1}, f_k) \geq \delta_k\}) < \infty,$$
则 $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m}, f_n) \geq \varepsilon\}) = 0$; 从而 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mu$a.e. 相互收敛. 此外, 若 (M, d) 还是完备的, 则 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mu$a.e. 收敛.

定义 9.2

设 (Ω, F, μ) 是测度空间, (M, d) 是度量空间, 且 $\{f_n\} : \Omega \to M, n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to M$ 都是可测映射. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathcal{F}$, 使得 $\mu(N) < \varepsilon$ 且 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\Omega\backslash N$ 上一致收敛到 f, 那称 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎一致收敛到 f, 并记为 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

命题 9.1

设 (Ω, F, μ) 是测度空间, (M, d) 是度量空间, 且 $\{f_n\} : \Omega \to M, n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to M$ 都是可测映射. 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, 则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 其 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$

注 2: $f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d(f_{n+m}, f) \geq \varepsilon\}) = 0, \varepsilon > 0$

定理 9.3

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间, (M, d) 是度量空间, 且 $f_n : \Omega \to M, n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to M$ 都是可测映射. 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 且 μ 是有限的, 则 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

注 3: "几乎处处"不能去掉. 事实上, 考虑测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, 其中, λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 令 $f_n(x) = \mathbb{I}_{[n,n+1]}(x), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. 易知,$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 但是, 对任意的 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 满足 $\lambda(A) < \infty$, f_n 在 $\mathbb{R}\backslash A$ 上不一致收敛.

例题 9.2

请举出一个几乎处处收敛但非点点收敛的例子.

定义 9.3: 依测度收敛

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, $f_n:\Omega\to M, n\in\mathbb{N}$, $f:\Omega\to M$ 都是可测映射. 若 $\forall\varepsilon>0$,

1. $\lim_{n\to\infty}\mu(\{\omega\in\Omega:d(f_n(\omega),f(\omega))\geq\varepsilon\})=0$, 则称 $\{f_n\}$ 依测度 μ 收敛到 f, 记为 $f_n\xrightarrow{\mu}f$;
2. $\lim_{n\to\infty}\sup_{m\in\mathbb{N}}\mu(\{\omega\in\Omega:d(f_{n+m},f_n)\geq\varepsilon\})=0$, 则称 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是依测度 μ 相互收敛, 记为 $d(f_{n+m},f_n)\xrightarrow{\mu}0$.

特别地, 当 μ 是概率测度时, 相应地分别称为依概率 μ 收敛进而依概率 μ 相互收敛.

问题: 以上定义中的 ϵ 能否换成 00 呢? 不能. 反例如下. 考虑概率空间 $((0,1],\mathcal{B}((0,1]),\lambda)$, 其中,$\lambda$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度在 $[0,1]$ 上的限制. 令 $n\in\mathbb{N}, f_n(x):=x^n, x\in(0,1]$. 易知 $f_n\xrightarrow{a.e.}0$. 从而 $f_n\xrightarrow{\lambda}0$. 但 $\{x\in(0,1]:|f_n-0|\geq 0\}=(0,1]$. 故 $\lambda(\{x\in(0,1]:|f_n(x)-0|\geq 0\})=1\not\to 0$

1. 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则 $d(f_{n+m},f_n)\xrightarrow{\mu}0$.
2. 令 $m\in\mathbb{N}$, 设 $\forall n\in\mathbb{N}, f_n:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 是可测函数. 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则 f 是 μa.e. 有限的. 也就是说, 有限可测函数序列依测度收敛的极限函数 (如果存在) 是几乎处处有限的.
3. 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 且 $f_n\xrightarrow{\mu}g$, 则 $f=g$ μ-a.e., 即依测度收敛的极限是几乎处处唯一确定的.
4. 设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 若 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 满足当 $k\to\infty$ 时,$n_k\uparrow\infty$, 则 $\{f_{n_k}\}\xrightarrow{\mu}f$
5. 设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 若 $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_n=f_n$ μa.e., $g=f$ μa.e., 则 $f\xrightarrow{\mu}g$
6. 设 $f_n:\Omega\to\mathbb{R}, g_n:\Omega\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, 都是可测函数. 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f, g_n\xrightarrow{\mu}g$, 则 $f_n\pm g_n\xrightarrow{\mu}f+g$(Banach 空间值情形亦成立).

定理 9.4

设 $m\in\mathbb{N}$, $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, $f,f_n:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 可测, $n\in\mathbb{N}$, $f_n\xrightarrow{\mu}f$, $D\subset\mathbb{R}^m$ 满足 $f(\Omega)\subset D$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n(\Omega)\subset D$. 若

(a) $G:D\to\mathbb{R}$ 一致连续或者

(b) μ 是有限的, D 是开集, $G:D\to\mathbb{R}$ 连续

则 $G(f_n)\xrightarrow{\mu}G(f)$.

例题 9.3

教材习题 8.2-1

定理 9.5

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, $f_n:\Omega\to M,n\in\mathbb{N}$, 都是可测映射.

1. 若存在可测映射 $f:\Omega\to M$ 满足 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则存在子列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 满足当 $k\to\infty$ 时,$n_k\uparrow\infty$, 使得 $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f,k\to\infty$
2. 设 (M,d) 是完备的. 若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依测度 μ 相互收敛, 则存在子列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 满足当 $k\to\infty$ 时,$n_k\uparrow\infty$, 并存在可测映射 $f:\Omega\to M$, 使得 $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f$ 且 $f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$
3. 若 μ 是有限测度, 且存在可测映射 $f:\Omega\to M$, 使得 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$, 则 $f_n\to f$

注意,(3) 中 μ 为有限测度的假设一般不可去掉. 例如, 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度,$f_n=\mathbb{I}_{[-n,n]^c},n\in\mathbb{N}$. 于是,$f_n\xrightarrow{a.e.}0$, 但是

$$\mu(|0-f_n|\geq\frac{1}{2})=\infty,n\in\mathbb{N}$$

定理 9.6

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间, (M,d) 是度量空间, 且 $f_n:\Omega\to M,n\in\mathbb{N}$ 都是可测映射. 若存在可测测度 $g:\Omega\to M$, 使得 $f_n\xrightarrow{\mu}g$, 则 $d(f_{n+m},f_n)\xrightarrow{\mu}0$. 反之, 若 $d(f_n,f_m)\xrightarrow{\mu}0$, 则存在可测映射 $f:\Omega\to M$, 使 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

定理 9.7

给定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 设 g 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可积函数, 且 $f,f_n,n\in\mathbb{N}$, 都是 $\overline{\mathbb{R}}$(或 $\mathbb{C}$) 值可测函数. 若 $|f_n|\leq g\mu$a.e.,$n\in\mathbb{N}$, 且 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0.$$

(特别地，$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$)。

例题 9.4

定理 9.8

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $X, X_n, n \in \mathbb{N}$, 都是其上的随机变量. 令

$$\xi(X_n, X) := \int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \, d\mathbb{P}, \eta(X_n, X) := \int_\Omega 1 \wedge |X_n - X| \, d\mathbb{P}.$$

以下论断 (1), (2), (3) 等价.

(1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$,

(2) $\xi(X_n, X) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

(3) $\eta(X_n, X) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

注: 若将 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上 a.s. 相等的随机变量视为同一个, 则 ξ 和 η 都是随机变量空间上的度量.

例题 9.5

请举出一个依测度收敛但非几乎处处收敛的例子.

命题 9.2

若 $a, b \geq 0, \alpha \in (0,1)$，则

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b,$$

且等号成立当且仅当 $a = b$。

命题 9.3

若 $p \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则对于任意可测函数 f, g，有

$$\mu(|fg|) \leq [\mu(|f|^p)]^{1/p} [\mu(|g|^q)]^{1/q}$$

当上式右边有限时，等式成立当且仅当, 存在不全为零的常数 c_1, c_2，使得 $c_1|f|^p = c_2|g|^q$，μa.e.($p = 2$ 时即使 Cauchy - Schwartz 不等式)

推论 9.1

若 $p \geq [1, \infty)$，则对任意的随机变量 $X, \mathbb{E}(|X|)^p \leq \mathbb{E}(|X|^p)$，且等式成立当且仅当 $|X|$a.s. 为常数.

命题 9.4

设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}$ 值随机变量,$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数，即 $\forall \theta \in [0,1], \forall x, y \in \mathbb{R}$，有 $\phi(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta\phi(x) + (1-\theta)\phi(y)$。若 X 是可积的，则 $\mathbb{E}\phi(X)$ 存在且 $\phi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}\phi(X)$

例 9.1

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，f 是非负可积函数。令 $\phi(t)=t\log t, t\geq 0$, 其中,$0\log 0:=0$。易知，$\phi''(t)=1/t>0, t>0$，从而 ϕ 是凸的。由 Jensen 不等式得，

$$\int_\Omega f\log f d\mu=\int_\Omega \phi(f)d\mu\geq\phi\left(\int_\Omega fd\mu\right)=\left(\int_\Omega fd\mu\right)\log\left(\int_\Omega fd\mu\right).$$

此外，若进一步有 $\mu(f)=1$, 则 $\int_\Omega f\log fd\mu\geq 0$ (尽管 $t\mapsto t\log t$ 的符号是变化的)。

命题 9.5: (d)

设 $p\in[1,\infty)$。若 f,g 是可测函数，且 $\mu(|f|^p)+\mu(|g|^p)<\infty$，则

$$[\mu(|f+g|^p)]^{1/p}\leq[\mu(|f|^p)]^{1/p}+[\mu(|g|^p)]^{1/p}. \quad (5)$$

当 $p>1$ 时，(5) 式等号成立当且仅当存在不全为 0 的常数 $a,b\geq 0$，使 $af-bg=0$ μ a.e.; 当 $p=1$ 时，(5) 式等号成立当且仅当 $fg\geq 0$ μ a.e..

命题 9.6

设 $p\in(0,\infty)$。若 $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$，则

$$|a_1+\ldots+a_n|^p\leq n^{(p-1)^+}(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p). \quad (7)$$

当 $p>1$ 时，(7) 式等号成立当且仅当 $a_1=\ldots=a_n$; 当 $p=1$ 时，(7) 式等号成立当且仅当 $a_1,\ldots,a_n$ 同号；当 $p\in(0,1)$ 时，(7) 式等号成立当且仅当 $a_1,\ldots,a_n$ 中至多有一个不是 0。

注：不等式 (7) 不是最优的，比如 $\sqrt{|a-b|^2}\leq|a-b|$, $a,b\geq 0$。

命题 9.7: (e) (C_p 不等式)

$p\in(0,\infty)$。若 $f_1,\ldots,f_n$ 是 $\mathbb{R}$ 值可测函数，$n\in\mathbb{N}$，则

$$\mu(|f_1+\ldots+f_n|^p)\leq n^{(p-1)^+}[\mu(|f_1|^p)+\ldots+\mu(|f_n|^p)]. \quad (8)$$

当 $p>1$ 时，(8) 式等号成立当且仅当 $f_1=\ldots=f_n$ μ a.e.; 当 $p=1$ 时，(8) 式等号成立当且仅当 $f_1,\ldots,f_n$ μ a.e. 同号; 当 $p\in(0,1)$ 时，(8) 式等号成立当且仅当 $\mu(f_1),\ldots,\mu(f_n)$ 中至多有一个不是 0。

设 E 是线性空间。E 上的范数是一个映射 $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}_+$，并满足

(a) $\forall x\in E, \|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(b) $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall x\in E, \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

(c) $\forall x,y\in E, \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

把具有范数的线性空间称为赋范线性空间. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是线性赋范空间. 若令 $d(x,y)=\|x-y\|, x,y\in E$, 则 (E,d) 是度量空间. 此外，若 (E,d) 还是完备的，则称 $(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

定义 9.4

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，$p\in(0,\infty)$。令

$$L^p(\mu):=L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu):=\{f:f:\Omega\to\mathbb{R}\text{ 是}\mathcal{F}\text{可测的且}\mu(|f|^p)<\infty\},$$

并把 $L^p(\mu)$ 中 μa.e. 相等的元素看成同一个。称 $L^p(\mu)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 L^p 空间。

设 $p\in(0,\infty)$。$\forall f,g\in L^p(\mu)$，令 $\|f\|_p:=[\mu(|f|^p)]^{\frac{1}{p}}$(显然此定义不依赖于等价类中代表元的选取), 且

$$d_p(f,g)=\begin{cases}\|f-g\|_p^p, & 0<p<1,\\ \|f-g\|_p, & 1\le p<\infty.\end{cases}$$

定理 9.9

若 $p\in(0,\infty)$，则 $(L^p(\mu),d_p)$ 是一个度量空间；
若 $p\in[1,\infty)$，则 $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ 是一个赋范线性空间。

定义 9.5

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间。令

$$L^\infty(\mu):=L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu):=\{f:f:\Omega\to\mathbb{R}\text{ 是}\mathcal{F}\text{可测的且}\mu\text{a.e. 有界}\},$$

并把 $L^\infty(\mu)$ 中 μ a.e. 相等的元素看成同一个, 称 $L^\infty(\mu)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的 L^∞ 空间。

我们也有以下 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的版本。

定理 9.10: (练习题！)

若 $f\in L^1(\mu)$ 且 $g\in L^\infty(\mu)$，则

$$\|fg\|_1\le\|f\|_1\|g\|_\infty.$$

若 $f,g\in L^\infty(\mu)$，则

$$\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

注: 综合此定理和前一个定理可得, 若 $p\in(0,\infty]$, 则 $(L^p(\mu),d_p)$ 是一个度量空间, 若 $p\in[1,\infty]$, 则 $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ 是一个赋范线性空间

定义 9.6

设 $p\in(0,\infty)$, $f,f_n\in L^p(\mu)$, $n\in\mathbb{N}$, 若当 $n\to\infty$ 时, $\|f_n-f\|_p\to0$, 则称 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}L^p(\mu)$(或 p 次平均) 收敛于 f，并记为 $f_n\xrightarrow{L^p(\mu)}f$

显然,$f_n\xrightarrow{L^p(\mu)}f$ 等价于 $d_p(f_n,f)\xrightarrow{n\to\infty}0$, 即 L^p 收敛等价于依 $L^p(\mu)$ 的度量收敛.

定理 9.11

设 $p \in (0,\infty)$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} L^p$ 收敛于某个 $f \in L^p(\mu)$ 当且仅当 $d_p(f_n, f_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.(因此,$(L^p(\mu), d_p)$ 是一个完备的度量空间, 且当 $p \in [1,\infty]$ 时,$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ 是一个 Banach 空间)

命题 9.8

设 $p \in (0,\infty)$, $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$

1. 若 μ 是有限测度，则 $\forall r \in (0,p)$, $f_n \xrightarrow{L^r(\mu)} f$
2. 当 $n \to \infty$, $\mu(|f_n|^p) \to \mu(|f|^p)$。

令 T 为任意一个指标集

定义 9.7

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，$A \in \mathcal{F}$，$\{f_t\}_{t\in T}$ 是一族 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数

1. 若 $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{I}_A) = 0$，则称 $\{f_t\}_{t\in T}$ 积分一致连续.
2. 若 $\lim_{a\to\infty} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{I}_{\{|f_t|>a\}}) = 0$，则称 $\{f_t\}_{t\in T}$ 一致可积
3. 若 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|) < \infty$，则称 $\{f_t\}_{t\in T}$ 积分一致有界.

注 1: 易知，$\{f_t\}_{t\in T}$ 一致可积等价于,$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\epsilon > 0$，当 $a \geq \delta_\epsilon$ 时,

$$\sup_{t\in T} \int_{\{|f_t|\geq a\}} |f_t| \, d\mu < \epsilon$$

注 2:当 μ 是无穷测度时,一致可积性未必能推出可积性;确切地说,即使可测函数 f 满足 $\lim\limits_{a\to\infty} \mu(|f|\,\mathbb{I}_{\{|f|\geq a\}}) = 0$，也未必有 $\mu(|f|) < \infty$ 例如，考虑 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda|_{\mathbb{R}_+})$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}, x \in \mathbb{R}_+$

例 9.2: exercise

设 $L^1(\mu)$ 是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上可积函数的全体

1. 若 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ 是有限集，则 $\mathcal{H}$ 是一致可积的。

2. 若 $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, $i = 1, 2$，都是一致可积的，则

$$\{f + g : f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2\}$$

是一致可积的。

3. 设 $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, $i = 1, 2$，若 $\mathcal{H}_1$ 是一致可积的，且 $\forall g \in \mathcal{H}_2$, $\exists f \in \mathcal{H}$, 使得 $|g| \leq |f|$, 则 $\mathcal{H}_2$ 是一致可积的.

4. 若 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ 是一致可积的，则

$$\{tf + (1-t)g : t \in [0,1], f, g \in \mathcal{H}\}$$

是一致可积的。

定理 9.12

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，μ 有限，$\{f_t\}_{t \in T}$ 是一族 $\overline{\mathbb{R}}$ 值可测函数。那么 $\{f_t\}_{t \in T}$ 一致可积当且仅当 $\{f_t\}_{t \in T}$ 积分一致连续且积分一致有界.

定理 9.13: (Charles-Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是测度空间，μ 有限，$(f_t)_{t \in T}$ 是一族 $\mathbb{R}$ 值可测函数.$(f_t)_{t \in T}$ 一致可积当且仅当, 存在函数 $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 满足

$$\lim_{x \to \infty} \frac{G(x)}{x} = \infty, \quad \sup_{t \in T} \int_\Omega G \circ |f_t| d\mu < \infty.$$

此外, 当 $\{f_t\}_{t \in T}$ 一致可积时，以上函数 G 可取为单调增且凸的.

注：在应用中常选取 $G(x) = x^p$ $(p \in (1, \infty))$ 或 $G(x) = x(\log x)^+$ 等。例如，若 $p \in (1, \infty)$，$(X_t)_{t \in T}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量，且满足

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty,$$

则 $(X_t)_{t \in T}$ 一致可积。

定理 9.14

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是测度空间，μ 有限，$p\in(0,\infty)$，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p(\mu)$。以下论断都等价.

1. 存在 $f\in L^p(\mu)$，使 $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$。
2. 存在 p 可测函数，使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\{|f_n-f|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ 积分一致连续
3. 存在 p 可测函数，使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ 积分一致连续
4. 存在 p 可测函数，使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。
5. 存在 $f\in L^p(\mu)$，使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\mu(|f_n|^p)\to\mu(|f|^p)$。

注:L^p 收敛的充分条件由控制收敛定理给出, 而这里是充要条件.

定理 9.15

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，X,Y 是随机变量，$G\subset\mathcal{F}$ 为子 σ 代数。

1. (C_p 不等式) 若 $p\in(0,\infty)$，则
$$\mathbb{E}[|X+Y|^p \mid G]\le 2^{(p-1)^+}(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]+\mathbb{E}[|Y|^p|\mathcal{G}])\quad \mathbb{P}_G \text{ a.s.}.$$
2. (Holder 不等式) 若 $p\in(1,\infty)$, $q=p/(p-1)$，则
$$\mathbb{E}[|XY||\mathcal{G}]\le(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{1/q},\quad \mathbb{P}_G \text{ a.s.}.$$
3. (Minkowski 不等式) 若 $p\in[1,\infty)$，则
$$(\mathbb{E}[|X+Y||\mathcal{G}])^{1/p}\le(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p}+(\mathbb{E}[|Y|^p|\mathcal{G}])^{1/p},\quad \mathbb{P}_G \text{ a.s.}.$$
4. 若 $p\in(0,\infty)$，则 $p\to(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p}$ 是 $\mathbb{P}_G$ a.s. 单调增的。

定理 9.16

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为子 σ 代数，X 是可积的随机变量。若 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数，则 $\phi(X)$ 在 $\mathcal{G}$ 下的条件期望存在，且
$$\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\le\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}],\quad \mathbb{P}_G \text{ a.s.}.$$

定理 9.17

设 $r\ge1$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间, $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为子 σ 代数, X,X_n 都是随机变量, $n\in\mathbb{N}$ 若 $X_n\xrightarrow{L^r(\mathbb{P})}X$, 则 $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{L^r(\mathbb{P})}\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$。

定理 9.18: (最佳均方逼近)

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为子 σ 代数。若 $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}|_{\mathcal{G}})$, 且 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ 是 X 在 $L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ 中的最佳均方逼近, 即对 $\forall Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}_{\mathcal{G}})$, 有

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2]\le\mathbb{E}[(X-Y)^2],$$

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}]\le\mathbb{E}[(X-Y)^2|\mathcal{G}],\quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}\text{ a.s.},$$

并且等号成立当且仅当 $Y=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}],\mathbb{P}_{\mathcal{G}},a.s.$

例题 9.6

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间，X 是其上的可积随机变量，$(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ 是一族 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数。令

$$Y_t=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_t],\quad t\in T.$$

试证 $(Y_t)_{t\in T}$ 一致可积。

定义 9.8

设 X,X_n 都是维数相同的随机变量, 且其概率分布函数分别是 F 和 $F_n,n\in\mathbb{N}$. 若对 F 的任何连续点 x_0, 有 $F_n(x_0)\xrightarrow{n\to\infty}F(x_0)$, 则称 X_n 依分布收敛于 X, 并记为 $X_n\xrightarrow{D}X$ 或 $F_n\xrightarrow{w}F$.

注 1: 考虑一维情形. 由 $F,F_n,n\in\mathbb{N}$，都是分布函数知，当 $n\to\infty$ 时，自然有 $F_n(\infty)\to F(\infty)$, $F_n(-\infty)\to F(-\infty)$。

注 2: 考虑一维情形，由 $0\le F\le 1$ 知, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$,

$$J_n:=\{x\in\mathbb{R}:F(x)-F(x-0)>1/n\}$$

至多含 n 个元素。从而，若记 C_F 为 F 的连续点全体，则 $C_F^c=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}J_n$ 是至多可数的.

注 3: 依分布收敛的极限是唯一的，即若 $F_n\xrightarrow{w}F$ 且 $F_n\xrightarrow{w}G$, 则 $F=G$。(Exercise)

定理 9.19: (1)

若 $X_n\xrightarrow{P}X$，则 $X_n\xrightarrow{D}X$。

例题 9.7

给出依分布收敛, 但不依概率收敛的例子

推论 9.2

若 c 为常数，则 $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}c\iff X_n\xrightarrow{D}c$。

定理 9.20: Slutsky

若 $Y_n \xrightarrow{D} Y$，且 $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$，则 $X_n \xrightarrow{D} Y$。

定理 9.21

设 c 是常数。若 $X_n \xrightarrow{D} X$，$Y_n \xrightarrow{D} c$，则 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$。