高某人的代数拓扑随笔

Infty

二〇二三年九月十七日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于送了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

1 基本群

定义 1.1: 同伦

$\sigma, \tau : I \to X$ 是空间 X 的道路, 且拥有相同的起点和终点,$\sigma(0) = \tau(0) = x_0, \sigma(1) = \tau(1) = x_1$
我们称 σ 和 τ 是同伦的.(记为 $\sigma \simeq \tau \quad rel\{0,1\}$) 当且仅当如果有一个连续映射满足

$$F : I \times I \to X s.t. F(s,0) = \sigma(s), F(s,1) = \tau(s), \forall s \in I$$

$$F(0,t) = x_0, F(1,t) = x_1, \forall t \in I$$

F 被称作一个从 σ 到 τ 的同伦. 对于每个 $t, s \to F(s,t)$ 是一个从 x_0 到 x_1 的道路 F_t, 并且 $F_0 = \sigma, F_1 = \tau$ 我们也写做 $F_t : \sigma \simeq \tau \quad rel\{0,1\}$

定义 1.2: 零伦

尤其的, 如果 σ 是一个环路 $(\sigma(0) = \sigma(1) = x_0)$, 而且 c_{x_0} 是一个连续的环 (实际上是退化成一个点) 对于所有的 $s \in I$ 都有 $c_{x_0}(s) = x_0$, 我们称 σ 是同伦平凡或零伦

注意 c_{x_0} 不是一个映射, 而是一个退化的道路 (一个点)

命题 1.1

道路的定端同伦 $\simeq \quad rel\{0,1\}$ 是一种等价关系

1. 对于任意的道路 $\sigma, \sigma \simeq \quad rel\{0,1\}$
2. $\sigma \simeq \tau \; rel\{0,1\} \Rightarrow \tau \simeq \sigma \; rel\{0,1\}$
3. $\sigma \simeq \tau \; rel\{0,1\}, \tau \simeq \rho \; rel\{0,1\} \Rightarrow \sigma \simeq \rho \; rel\{0,1\}$

说来想要证明这些, 最核心的部分就是找到这个存在的 F 映射就好.
(1). 自反性的证明是显然的
$\sigma \overset{F}{\simeq} \sigma, F : I \times I \to X, F(s,t) = \sigma(s), \forall (s,t) \in I \times I$
(2). 互反性的证明也并不难, 道路正着走一遍, 反着走一遍就好了.
$\sigma \overset{F}{\simeq} \tau \; \{0,1\}, G(s,t) = F(s, 1-t)$
(3). 传递性构造 F 似乎要稍微复杂一点.

$$H : I \times I \to X, H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

因为 $F(s,1) = \tau(s) = G(s,0)$, 根据粘接引理,$H$ 是连续的, 验证之后得到 H 满足顶端同伦的条件, 传递性证明完毕.

我们一直是为了构造一个群, 因此定义良好的乘积运算是必须的.

定义 1.3: 道路乘积

σ 是一个从 x_0 到 x_1 的道路,τ 是一个从 x_1 到 x_2 的道路, 定义两个道路的乘法为:

$$\sigma * \tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

此时 $\sigma * \tau(0) = \sigma(0), \sigma * \tau(1) = \tau(1)$

这个相当于把两条道路拼接起来.

命题 1.2

假设 $\sigma \overset{F}{\simeq} \sigma' \ rel\{0,1\}, \tau \overset{G}{\simeq} \tau' \ rel\{0,1\}$, 有

$$\sigma * \tau \overset{H}{\simeq} \sigma' * \tau' \ rel\{0,1\}, where\ H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

粘接引理 H 是连续的.

展开说明一下为什么在这个映射下同伦.

$F(s,0) = \sigma, F(s,1) = \sigma', F(0,t) = x_0, F(1,t) = x_1$

$G(s,0) = \tau, G(s,1) = \tau', G(0,t) = x_1, G(1,t) = x_2$

$H(s,0) = \sigma * \tau$, 这个在前半段 $0 \le s \le \frac{1}{2}$ 是 σ, 后半段是 τ

$H(s,1) = \sigma' * \tau'$

$H(0,t) = F(0,t) = x_0$

$H(1,t) = G(1,t) = x_2$

故同伦.

这个乘法的定义是良好的, 因为有 $[\sigma][\tau] = [\sigma * \tau]$

定理 1.1: 基本群

假设 $\pi_1(X, x_0) = \{[\sigma] | \sigma是环路\}$ 是一个在 x_0 点的同伦类. 乘积定义如上, 单位元的定义为 $[c_{x_0}]$, 逆元的定义为

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t), 0 \le t \le 1$$

那么, 这是一个群

验证群的话, 需要验证三条性质, 结合律, 单位元, 逆元.

首先是结合律

$\forall\ [\sigma], [\tau], [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$, 则需要证明 $([\sigma][\tau])[\omega] = [\sigma]([\tau][\omega])$ 也就是说证明 $[\sigma * \tau][\omega] = [\sigma][\tau * \omega]$

而如果我记作 $A = \sigma * \tau \simeq \omega \ rel\{0,1\}, B = \tau * \omega \simeq \sigma \ rel\{0,1\}$, 那么就相当于证明 $A * \omega \simeq \sigma * B \ rel\{0,1\}$, 而这在验证乘法良好定义的时候已经证明过了.

单位元也是同样的道理:$[\sigma][c_{x_0}] = [\sigma] = [c_{x_0}][\sigma]$, 这很容易验证.

逆元也是一样的,$[\sigma][\sigma^{-1}]=[c_{x_0}]=[\sigma^{-1}][\sigma]$, 这个相当于证明 $\sigma*\sigma^{-1}\simeq c_{x_0}\simeq\sigma^{-1}\ rel\{0,1\}$, 看成是证明 $\sigma*\sigma^{-1}\simeq c_{x_0}c_{x_0}\simeq\sigma^{-1}\ rel\{0,1\}$ 就和上面是一样的了

为什么基本群都是环路类, 因为如果不是环路类, 那么乘法的定义会不好, 也就是可能两条道路拼接不上. 那么如果我只把能拼接上的纳入群, 也会导致单位元找不到, 因此基本群总是环路类.

命题 1.3

α 是一个从 x_0 到 x_1 的道路, 这个映射 $[\sigma]\to[\alpha^{-1}*\sigma*\alpha]$ 是一个同构, 记为 $\alpha_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$

这个证明是容易的, 首先证明这个映射的定义是良好的.

$\forall[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$, 如果有 $[\sigma]=[\sigma']\Leftrightarrow\sigma\simeq\sigma'\ rel\{0,1\}$, 我们有 $\alpha^{-1}*\sigma*\alpha\simeq\alpha^{-1}*\sigma'*\alpha\ rel\{0,1\}\Leftrightarrow\alpha_\#[\sigma]=\alpha_\#[\sigma']$. 这个用乘法定义良好去证明就好了, 像脱式运算一样脱.

之后证明

$$\alpha_\#([\sigma_1][\sigma_2])=\alpha_\#([\sigma_1*\sigma_2])=[\alpha^{-1}*\sigma_1*\sigma_2*\alpha]=[\alpha^{-1}*\sigma_1*\alpha*\alpha^{-1}*\sigma_2*\alpha]=[\alpha^{-1}*\sigma_1*\alpha][\alpha^{-1}*\sigma_2*\alpha]=\alpha_\#([\sigma_1])\alpha_\#([\sigma_2])$$

所以这是个同态映射.

可以证明:

1. $(c_{x_0})_\#=1_{\pi_1}(X,x_0):\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$
2. 如果 β 是从 x_1 到 x_2 的道路, 那么 $(\alpha*\beta)_\#=\beta_\#\alpha_\#$
3. 如果 $\alpha\simeq\alpha'\ rel\{0,1\}$, 那么 $\alpha_\#=\alpha'_\#$

显然会有 $(\alpha^{-1})_\#$ 是 $\alpha_\#$ 的逆映射, 因此 $\alpha_\#$ 是同构

推论 1.1

如果 X 是道路连通的，那么群 $\pi_1(X,x_0)$ 在同构意义下独立于点 x_0。在这种情况下，我们通常简单地用 $\pi_1(X)$ 来代替 $\pi_1(X,x_0)$，并称其为 X 的基本群。