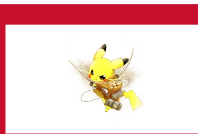

数值分析

1^{th} Edition, 2023 年 3 月 15 日

数值分析

目录

Chapter 1

第一章

1.1 误差

(1) 绝对误差：x 为准确值，x^* 为近似值，$e^* = x - x^*$ 为绝对误差（有正负之分）。

(2) 误差限：$|e^*| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon^*, \varepsilon^*$ 为误差限。

(3) 相对误差：$e_r{}^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$

(4) 相对误差限：$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$

1.2 数值运算的误差估计

A 为函数值，$A = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), A^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$

(1) 误差限：$\varepsilon\left(A^*\right) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \varepsilon\left(x_k^*\right) \ldots$

(2) 相对误差线：$\varepsilon_r{}^* = \varepsilon_r\left(A^*\right) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right)^* \right| \frac{\varepsilon(X_k{}^*)}{|A^*|}$

1.3 稳定性

Definition 1: 数值稳定

一个算法如果输入数据有误差，而在计算中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则称此算法为不稳定的。

即在算法中 $E_n \leqslant E_0$ 则算法稳定。

1.4 习题

Exercice 1: 第 8 页例四

以侧得某场地长 l 的值为 l^*=110m，宽 d 的值为 d^*=80m，已知 $|l-l^*| \leqslant 0.2m$，$|d-d^*| \leqslant 0.1m$。试求面积 s=ld 的绝对误差限与相对误差限。

Solution:

因 s=ld，$\frac{\partial s}{\partial l}=d, \frac{\partial s}{\partial d}=l$

$\varepsilon\left(s^*\right) \approx\left|\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^*\right| \varepsilon\left(l^*\right)+\left|\left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^*\right| \varepsilon\left(d^*\right)$

$\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^*=d^*=80 \mathrm{~m},\left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^*=l^*=110 \mathrm{~m}$

$\varepsilon\left(l^*\right)=0.2 \mathrm{~m}, \quad \varepsilon\left(d^*\right)=0.1 \mathrm{~m}$

绝对误差限$\varepsilon\left(s^*\right) \approx 80 \times(0.2)+110 \times(0.1)=27\left(\mathrm{~m}^2\right)$

相对误差限$\varepsilon_r\left(s^*\right)=\frac{\varepsilon\left(s^*\right)}{\left|s^*\right|}=\frac{\varepsilon\left(s^*\right)}{l^* d^*} \approx \frac{27}{8800}=0.31\%$

Exercice 2: 20 页习题 4

下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，

$x_1^*=1.1021, x_2^*=0.031, x_3^*=385.6, x_4^*=56.430$

利用数值计算的误差估计求下列各近似值的误差限

- $x_1^*+x_2^*+x_4^*$
- $x_1^* x_2^* x_3^*$
- x_2^* / x_4^*

Solution:

(1) $f\left(x_1, x_2, x_4\right)=x_1+x_2+x_4$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_4}=1$

$\varepsilon\left(x_1^*\right)=5 \times 10^{-5} \quad \varepsilon\left(x_2^*\right)=5 \times 10^{-4} \quad \varepsilon\left(x_4^*\right)=5 \times 10^{-4}$

$\varepsilon\left(A^*\right) \approx 1 \times \varepsilon\left(x_1^*\right)+1 \times \varepsilon\left(x_2^*\right)+1 \times \varepsilon\left(x_4^*\right)=1.05 \times 10^{-3}$

(2) $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1 x_2 x_3$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2 x_3, \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1 x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=x_1 x_2$

$\varepsilon\left(x_1^*\right)=5 \times 10^{-5} \quad \varepsilon\left(x_2^*\right)=5 \times 10^* \quad \varepsilon\left(x_3^*\right)=5 \times 10^{-2}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^*=x_2^* x_3^*=11.9536 \quad\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=x_1^* x_3^*=424.96976 \quad\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)=x_1^* x_2^*=0.0341651$

$\varepsilon\left(A^*\right) \approx \sum_{k=1}^3\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right| \varepsilon\left(x_k^*\right) \approx 0.215$

(3) $f\left(x_2, x_4\right)=\frac{x_2}{x_4}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{1}{x_4} \quad \frac{\partial f}{\partial x_4}=-\frac{x_2}{x_*^2}$

$\varepsilon\left(x_2^*\right)=5\times10^{*}\quad \varepsilon\left(x_4^*\right)=5\times10^{-4}$
$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^*\approx0.0177\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^*\approx1\times10^{-5}$
$\varepsilon\left(A^*\right)\approx\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^*\varepsilon\left(x_2^*\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^*\varepsilon\left(x_4^*\right)\le10^{-5}$

Exercice 3: 20 页习题 6

设 Y_0=28，按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783},n=1,2,\cdots$$

计算到 Y_{100}。若取 $\sqrt{783}\approx27.982$(5 位有效数字)，试问计算 Y_100 将有多大误差?

Solution:

$Y=\sqrt{783},Y^*=27.983$
$\delta=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$
$Y_0=28\quad Y_0^*=28\quad \delta_0=|Y_0-Y_0^*|=0$
$|Y_1-Y_1^*|=\left|28-\frac{1}{100}\cdot\sqrt{783}-28+\frac{1}{100}\times27.483\right|=\frac{1}{100}\delta$
$|Y_2-Y_2^*|=\left|(Y_1-Y_1^*)-\frac{1}{100}\sqrt{783}+\frac{1}{100}\times27.983\right|=\frac{2}{100}\delta$
$|Y_n-Y_n^*|=\frac{n}{100}\delta$
$\varepsilon^*=|Y_{100}-Y_{100}^*|=\frac{100}{100}\delta\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$

Exercice 4: 20 页习题 11

序列 y_n 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1,n=1,2,\cdots$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$(3 位有效数字)，计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算稳定吗?

Solution:

$\delta=|y-y_0{}^*|\le\dfrac{1}{2}\times10^{-2}$

$$\begin{aligned}|y_n-y_n{}^*|&=|(10y_{n-1}-1)-(10y_{n-1}{}^*-1)|\\&=10\left|y_{n-1}-y_{n-1}{}^*\right|\\&=10^n\delta>\delta\quad\text{不稳定}\end{aligned}$$

$$|y_{10}-y_{10}{}^*|=10^{10}\delta\leqslant\frac{1}{2}\times10^{8}$$

Exercice 5: 20 页习题 13

$f(x)=ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 f(30) 的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$ln(x-\sqrt{x^2-1})=-ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

计算，求对数时误差有多大?

Solution:

来自高某人的修正:

$$\begin{aligned} u=\sqrt{x^2-1}, f(u)=\ln(x-u) \\ x=30, u=\sqrt{899}, u^*=29.9833 \\ \varepsilon(f(u^*))=|f'(u^*)|\varepsilon(u^*)=|\frac{1}{u^*-30}|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}=3\times10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u=\sqrt{x^2-1}, f(u)=-\ln(x+u) \\ x=30, u=\sqrt{899}, u^*=29.9833 \\ \varepsilon(f(u^*))=|f'(u^*)|\varepsilon(u^*)=|\frac{1}{u^*+30}|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}=8\times10^{-7} \end{aligned}$$

高江江的原稿:

$y=x-\sqrt{x^2-1} \quad f(x)=\ln y=g(y)$

$x=30, \quad y=30-\sqrt{899}, \quad y^*=30-29.9833=0.067$

$\varepsilon^*=|g'(y^*)|\,\varepsilon(y^*)=\frac{|y-y^*|}{|y^*|}\approx 3\times10^{-3}$

若使用等价公式

$y=x+\sqrt{x^2-1} \quad f(x)=-\ln y=g(y)$

$x=30, \quad f=30+\sqrt{899}, \quad y^*=59.9433$

$\varepsilon^*=|g'(y^*)|\,\varepsilon(y^*)=\frac{|y-y^*|}{|y^*|}\approx 8\times10^{-7}$

Chapter 2

第二章

2.1 拉格朗日差值

$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$
差值多项式为 $L_n(x) = \sum l_k(x) y_k$
如果令 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
有 $\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$
$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$

2.2 牛顿差值

$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$
其中 $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{y_k}{w_{n+1}(x_k)}$

2.3 差值余项

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad (\eta \in (a,b)$, 与 x 无关)

2.4 插商

$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$

$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$

$$f[x_0,x_1,\cdots x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$
$$=\sum\frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$

更一般的差商公式:$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$

一条重要的性质:$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega_n(x_k)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Exercice 6: 32 页例 4

见课本, 很简单

2.5 埃尔米特差值

(1) 三点三次（差值条件：3 个点 + 中间点的导数）
$P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$
$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$
差值余项为 $R(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$

(2) 两点三次（差值条件：2 个点 + 他俩的导数）
$H_3=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2y_1+\left(1+2\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2y_2+(x-x_1)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2y_1'+(x-x_2)\left(\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)^2y_2'$
差值余项为$R(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

Exercice 7: 36 页例 6

给定 $f(x)=x^{\frac{3}{2}},x_0=\frac{1}{4},x_1=1,x_2=\frac{9}{4}$, 试求 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},\frac{9}{4}]$ 上的三次埃尔米特插值多项式 $P(x)$, 使它满足 $P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2),P'(x_1)=f'(x_1)$, 并写出余项表达式.

利用三个点的牛顿插值公式:$P=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

x_i	f_i		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		
1	1	$\frac{7}{6}$	
$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{11}{30}$

由 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 可解出 A

2.6 习题

Exercice 8: 49 页 12 题

若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2;\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}$$

Solution:

高某人的修改:

对 $f(x)$ 做代数变换 $f(x)=a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})=a_n\omega_n$

$f'(x_j)=a_n\omega'(x_j)$

$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega_n'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\frac{(x_j^k)^{(n-1)}}{(n-1)!}$

当 $0\le k\le n-2$ 原式子为 0, 当 $k=n-1$ 时, 原式为 $\frac{1}{a_n}$

高江江的原稿:

$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

对 $g(x)=x^k$ 上的 n 个节点差值，插值节点为 $(x_1,x_1^k),(x_2,x_2^k)\cdots(x_n,x_n^k)$

令 $b_i=a_n\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum\limits_{j=1} i\frac{g(x_j)}{\omega'(x_j)}$

有牛顿差值函数 $P_{n-1}(x)=b_1+b_2(x-x_1)+\cdots+b_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$

因多项式差值对多项式函数的差值余项为 0，即 $P_{n-1}(x)=g(x)$

当 $k\leqslant n-2$ 时，$g(x)$ 无 n-1 次项，$P_{n-1}(x)$ 的 n-1 次项系数 $b_n=0$

即 $\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=0$

当 $k=n-1$ 时，$g(x)$ 的 n-1 次项系数为 1，$P_{n-1}(x)$ 的 n-1 次项系数 $b_n=1$

即 $\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}$

Exercice 9: 49 页 13 题

求次数小于等于 3 的多项式 P(x)，使满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),P'(x_0)=f'(x_0),P''(x_0)=f''(x_0),P(x_1)=f(x_1)$$

Solution:

高某人的修改:

由牛顿插值会有:$P=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+A(x-x_0)^3$

再利用 $P(x_1)=f(x_1)$ 得出 A 的取值

Exercice 10: 49 页 14 题

求次数小于等于 3 的多项式 P(x)，使满足条件

$$P(0)=0,P'(0)=1,P(1)=1,P'(1)=2$$

Solution:

直接带公式

Exercice 11: 49 页 16 题

求次数小于等于 4 的多项式 P(x)，使满足条件

$$P(0) = P'(0) = 0, P(1) = P'(1) = 1, P(2) = 1$$

Solution:

满足 $P(0) = P'(0) = 0, P(1) = P'(1) = 1$ 的埃尔米特差值可以直接带公式
$P(x) = H(x) + Ax^2(x-1)^2$ 满足 $P(2) = 1$ 解出 A。

高某人的猜想: 用 $P(0) = 0, P(1) = 1, P'(1) = 1, P(2) = 1$ 的埃尔米特差值也可以求出来.

Chapter 3

第三章

3.1 勒让德多项式

$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$
$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

3.2 最佳平方逼近

逼近函数 $f(x) \in [0,1]$ $d_i = \int_0^1 x^i f(x)dx \quad i = 0,1,2\cdots$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

$D = (d_0, d_1, \cdots, d_n)^\top$
$A = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^\top$
$HA = D$ 解出 A，
逼近多项式为：$S_n^*(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$

Exercice 12: 68 页例 6

设 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 求 [0,1] 上的一次最佳平方逼近多项式

Solution:

$(f(x), \varphi_0(x)) = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1+x^2}dx = 1.147$
$(f(x), \varphi_1(x)) = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}dx = 0.609$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

$S_1^* = 0.934 + 0.426x$

3.3 正交函数族做最佳平方逼近

$f(x) \in [-1,1]$

$S_n^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + \cdots + a_n^* P_n(x)$

$a_n^* = \frac{k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx$

其中 $P(x)$ 为勒让德多项式对于区间不在 [-1,1] 的做变换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

Exercice 13: 71 页例 7

求 $f(x) = e^x$ 在 [-1,1] 上的三次最佳平方逼近多项式

Solution:

$$(f(x), P_0(x)) = \int_0^1 e^x dx = 2.3504$$
$$(f(x), P_1(x)) = \int_0^1 xe^x dx = 2.3504$$
$$(f(x), P_2(x)) = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})e^x dx = 2.3504$$
$$(f(x), P_3(x)) = \int_0^1 (\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)e^x dx = 2.3504$$

解出

$$a_0^* = 1.1752$$
$$a_1^* = 1.1036$$
$$a_2^* = 0.3578$$
$$a_3^* = 0.07046$$

$S_3^*(x) = 0.9963 + 0.9976x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3$

3.4 最小二乘拟合

m 为数据点个数减一，n 为拟合曲线次数。一般 $\varphi_k = x^k, k = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i)$$

$$(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega(x_i)f(x_i)\varphi_k(x_i)=d_k$$

$$A=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^\top,D=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^\top$$

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1)\cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots(\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

$GA=D$ 解出 A，最小二乘多项式为：

$$S^*(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

Exercice 14: 68 页例 6

已知一组实验数据如表 3-1 求它的拟合曲线.(用 $S_1(x)=a_0+a_1x$)

x_i	1	2	3	4	5
f_i	4	4.5	6	8	8.5
ω_i	2	1	3	1	1

Solution:

$$\begin{aligned}(\varphi_0,\varphi_0)&=\sum_{i=0}^{4}\omega_i=8\\ (\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)&=\sum_{i=0}^{4}\omega_ix_i=22\\ (\varphi_1,\varphi_1)&=\sum_{i=0}^{4}\omega_ix_i^2=74\\ (\varphi_0,f)&=\sum_{i=0}^{4}\omega_if_i=47\\ (\varphi_1,f)&=\sum_{i=0}^{4}\omega_ix_if_i=145.5\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}8 & 22\\ 22 & 74\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\ 145.5\end{pmatrix}$$

$S_1^*=2.5648+1.2037x$

3.5 习题

Exercice 15: 94 页习题 12

设 $f(x) = x^3 + 3x + 2, x \in [0,1]$，试求 f(x) 在 [0,1] 上关于 $\rho(x) = 1, \phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式。若取 $\phi = span\{1, x, x^2\}$，那么最佳平方逼近多项式是什么？

Solution:

当 $\phi = span\{1, x\}$ 时，n=1

$d_0 = \int_0^1 x^2 + 3x + 2dx = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{23}{6}$

$d_1 = \int_0^1 x\left(x^2 + 3x + 2\right)dx = \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

$$HA = D \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} a_0 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{23}{6} \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{9}{4} \end{array} \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$S_n = \frac{11}{6} + 4x$

当 $\phi = span\{1, x, x^2\}$ 时，n=2

$d_2 = \int_0^1 x^2\left(x^2 + 3x + 2\right)dx = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{97}{60}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{97}{60} \end{pmatrix}$$

$$HA = D \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S_n = 2 + 3x + x^2 = f(x)$ 从而最佳平方逼近为二次。

Exercice 16: 94 页练习题 13

求 $f(x) = x^3 \in [0,1]$ 上关于 $\rho(x) = 1$ 的最佳平方逼近二次多项式。

Solution:

$d_0 = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$

$d_1 = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}$

$d_2 = \int_0^1 x^5dx = \frac{1}{6}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$HA = D \quad \text{解得} A = \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.6 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$S_2 = 0.05 - 0.6x + 1.5x^2$

Exercice 17: 94 页习题 14

求指数 f(x) 在指定区间上对于 $\phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近：

- $f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3]$
- $f(x) = e^x, [0, 1]$
- $f(x) = cos\pi x, [0, 1]$
- $f(x) = lnx, [1, 2]$

Solution:

参考上题自行解答

Exercice 18: 95 页习题 17

已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

Solution:

$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = x^2, \quad \omega(x) = 1$

$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{4} \omega(x_i) = 5$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \omega(x_i) x_i^2 = 5327$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \omega(x_i) x_i^4 = 7277699$

$(\varphi_0, y) = \sum_{i=0}^{4} y_i = 271.4$

$(\varphi_1, y) = \sum_{i=0}^{4} y_i x_i^2 = 369321.5$

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

$$GA = D \Rightarrow A \approx \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad y = 0.97 + 0.05x^2$$

$$\delta = \sum_{i=0}^{4} (y(x_i) - y_i)^2 \approx 0.1226$$

Chapter 4

第四章

4.1 代数精度

定义：如果求积公式

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \sum A_k f(x_k)$$

对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 m+1 次多项式不准确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。
有 m 阶代数精度满足：

$$\begin{cases} \sum A_k = b-a \\ \sum A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ \cdots \\ \sum A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1}-am+1) \end{cases}$$

代数精度的余项：

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=Kf^{(m+1)(\eta)}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(m+1)!}\left[\int_a^b x^{m+1}dx-\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}\right] \\ &= \frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{1}{m+2}\left(b^{m+2}-a^{m+2}\right)-\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}\right] \end{aligned}$$

Exercice 19: 100 页例 1

给定形如 $\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$ 的求积公式，试确定系数 A_0, A_1, B_0，使得公式有尽可能高的代数精度

Solution: 当 $f(x)=1$ 时, 得:

$$A_0+A_1=\int_0^1 1dx=1$$

当 $f(x)=x$ 时, 得:

$$A_1+B_0=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

当 $f(x)=x^2$ 时, 得:

$$A_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

解得:$A_1=\frac{1}{3},A_0=\frac{2}{3},B_0=\frac{1}{6}$

Exercice 20: 102 页例 2

求例 1 中求积公式的余项

Solution: 代数精度为 2, 故 $R[f]=Kf'''(\eta),f(x)=x^3,f'''(\eta)=3!$

$K=\frac{1}{3!}[\int_0^1 x^3dx-(\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0))]=-\frac{1}{72}$

4.2 复合型求积公式

$T_n=\frac{h}{2}\left[f(x)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_k\right)+f(b)\right]\quad x_n=a+\frac{h}{n}k$

求积余项 $R_n(f)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''\left(\eta_k\right)\right]\quad x_k=a+\frac{h}{n}k$

$S_n=\frac{h}{b}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_k\right)+f(b)\right]$

求积余项 $R_n(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4f^{(4)}(\eta)$

Exercice 21: 109 页例 4

计算积分 $I=\int_0^1 e^xdx$, 若用复合梯形公式, 问区间 [0,1] 应分多少等份才能使误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$, 若改用复合 Simpson 公式, 要达到同样的精度, 区间 [0,1] 应分为多少份?

Solution: 对于梯形公式

$|R[f]|=|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)|\le\frac{1}{12}(\frac{1}{n})^2e\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$

得出 $n=213$

对于 Simpson 公式

$|R_n(f)|=\frac{b-a}{2880}h^4|f^{(4)}(\xi)|\le\frac{1}{2880}(\frac{1}{n})^4e\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$

得出 $n=4$

4.3 高斯型求积公式

求积公式

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

有 2n+1 次代数精度，则称节点 x_k 为高斯点，求积公式成为高斯求积公式。以这些点为零点的多项式

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

与 $\rho(x)$ 正交。
$\omega_{n+1}(x)$ 的零点即为高斯求积公式的节点，系数为

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\frac{\omega_{n+1}^2(x)}{(x-x_k)^2\omega_{n+1}'^2(x_k)}dx$$

Exercice 22: 120 页例 9

确定求积公式 $\int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx = A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$ 的系数 A_0, A_1 及节点 x_0, x_1, 使得它具有最高代数精度

Solution: 求积节点为权函数的正交多项式零点, 设正交多项式为 $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2+bx+c$
该多项式与 1,x 带权正交, 因此得到两个式子:
$\int_0^1 \sqrt{x}\omega(x)dx = 0, \int_0^1 \sqrt{x}x\omega(x)dx = 0$
得到 $\omega(x) = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}$
令 $\omega(x) = 0, x_0 = 0.289949, x_1 = 0.821162$
具有三次精度
当 $f(x) = 1$ 时, 得:

$$A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

当 $f(x) = x$ 时, 得:

$$A_0x_0 + A_1x_1 = \int_0^1 \sqrt{x}xdx = \frac{2}{5}$$

由此解出 $A_0 = 0.277556, A_1 = 0.389111$

4.4 高斯——勒让德求积公式

求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

其中 x_k 为勒让德多项式的零点（见 3.1），A_k 可由代数精度解出。

Exercice 23: 123 页例 10

用 4 点 (n=3) 的高斯-勒让德求积公式计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosxdx$

Exercice 23: 123 页例 10

Solution: 先将区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 化为 $[-1,1], I=\int_{-1}^{1}(\frac{\pi}{4})^3(1+t)^2 cos\frac{\pi}{4}(1+t)dt$

查表可得 $I=\sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k)=0.467402$

4.5 习题

Exercice 24: 135 页习题 1

确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

- $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h);$
- $\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h);$
- $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \left[f(-1)+2f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right)\right]/3;$
- $\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2\left[f'(0)-f'(h)\right].$

Solution:

$$(1)\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{2}{3}h^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{-1}=\frac{h}{3} \\ A_0=\frac{4h}{3} \\ A_1=\frac{h}{3} \end{cases}$$

求积公式有至少 2 次代数精度

$-h^3A_{-1}+h^3A_1=\frac{1}{4}\left(h^4-(-h)^4\right)$

$h^4A_{-1}+h^4A_1\neq\frac{1}{5}\left(h^5-(-h)^5\right)$

从而求积公式有 3 次代数精度

$$(2)\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=4h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{16}{3}h^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{-1}=\frac{8h}{3} \\ A_0=-\frac{4h}{3} \\ A_1=\frac{8h}{3} \end{cases}$$

求积公式有至少 2 次代数精度

$-h^3A_{-1}+h^3A_1=\frac{1}{4}\left((2h)^4-(-2h)^4\right)$

$h^4A_{-1}+h^4A_1\neq\frac{1}{5}\left((2h)^5-(-2h)^5\right)$

从而求积公式有 3 次代数精度

$$(3)\begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=2 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_1+x_2=0 \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_1^2+x_2^2=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{6}+1}{5} \\ x_2=-\frac{2\sqrt{6}}{15}+\frac{1}{5} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2=\frac{2\sqrt{6}}{15}+\frac{1}{5} \end{cases}$$

$2x_1+3x_2=1$

$2x_1^2+3x_2^2=1$

$H_0x_0^3+A_1x_1^3+A_2x_2^3\neq\frac{1}{4}\left(a^2-b^2\right)$

从而求积公式有 2 次代数精度

(4) 用代数精度的定义

令 $f(x)=1,x,x^2$

$$\begin{cases} \int_0^h 1dx = \frac{h}{2}(1+1)+0 = h. \\ \int_0^h xdx = \frac{h}{2}(0+h)+ah^2(1-1)=\frac{h^2}{2} \qquad \Rightarrow a=\frac{1}{12} \\ \int_0^h x^2dx = \frac{h}{2}\left(0+h^2\right)+ah^2(0-2h)=\frac{h^3}{3} \end{cases}$$

将 $f(x)=x^3,x^4$ 代入求积公式

$\int_0^h x^3dx = \frac{h}{2}\left(0+h^3\right)+\frac{h^2}{12}\left(0-3h^2\right)$

$\int_0^h x^4dx \neq \frac{h}{2}\left(0+h^4\right)+\frac{h^2}{12}\left(0-4h^3\right)$

从而求积公式有 3 次代数精度

Exercice 25: 136 页习题 10

试构造高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx \approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

Solution:

$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2+bx+c$

$$\begin{cases} \int_0^1 \rho(x)\omega(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\omega(x)dx = 0 \\ \int_0^1 x\rho(x)\omega(x)dx = \int_0^1 x\sqrt{x}\omega(x)dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}+\frac{2}{3}b+2c=0 \\ \frac{2}{7}+\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}c=0 \end{cases} = \begin{cases} b=-\frac{6}{7} \\ c=\frac{3}{35} \end{cases}$$

得 $\omega(x)=x^2-\frac{6}{1}x+\frac{3}{35}$

零点为 $\begin{cases} x_0=-\frac{2\sqrt{30}}{35}+\frac{3}{7}\approx 0.115587 \\ x_1=\frac{2\sqrt{30}}{35}+\frac{3}{7}\approx 0.741556 \end{cases}$

根据代数精度的定义，当 $f(x)=1$ 时 $\quad A_0+A_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$

当 $f(x)=x$ 时 $\quad A_0x_0+A_1x_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot xdx=\frac{2}{3}$

得 $\begin{cases} A_0=1.30429 \\ A_1=0.69571 \end{cases}$

Exercice 26

用 n=2,3 的高斯-勒让德公式计算积分

$$\int_1^3 e^x sinxdx$$

Solution:

$x=\frac{3-1}{2}t+\frac{1+3}{2}=t+2$

$\int_1^3 e^x\sin xdx=\int_{-1}^1 e^{t+2}\sin(t+2)dt$

当 $n=2$ 时

$$\int_{-1}^1 e^{t+2}\sin(t+2)dt \approx \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$
$$\approx 10.948402566$$

当 $n=2$ 时

$$\int_{-1}^{1} e^{t+2}\sin(t+2)dt$$

$$\approx 0.347654\times[f(0.8611363)+f(-0.8611363)]+0.6521452\times[f(0.339981)+f(-0.3399810)]$$

$$=10.9501401$$

Chapter 5

第七章

5.1 不动点迭代

将 $f(x)=0$ 改写成 $x=\varphi(x)$ 的形式，求 $f(x)$ 的零点即求 $\varphi(x)$ 的不动点。选择一个初始近似值 x_0，令 $x_1=\varphi(x_0)$
迭代公式为 $x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad k=0,1,2\cdots$

5.2 不动点迭代的收敛性

（1）设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则不动点迭代公式收敛。（x^*）为根的准确值。
（2）如果

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

$$\varphi^{(p)}\neq 0$$

则此迭代是 p 阶收敛的。
p=1 又叫线性收敛，p=2 又叫平方收敛，p>1 又叫超线性收敛。

迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

Exercice 27: 218 页例 4

见课本, 很简单

5.3 牛顿迭代

求 $f(x)=0$，给定初值 x_0
迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿迭代是二阶收敛的
其中 $\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$ $\quad \lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

5.4 牛顿迭代对重根的改进

（1）知道根的重数 m

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (\text{二阶收敛})$$

（2）不知道根的重数

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

Exercice 28: 227 页例 9

见课本, 很简单

5.5 习题

Exercice 29: 238 页习题 2

为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成一下等价形式，并建立相应的迭代公式。

- $x=1+1/x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2$
- $x^3=1+x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$
- $x^2=\frac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根。

Solution:
(1)$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}$ $\quad |\varphi'(x_0)|=\left|\frac{-2}{x_0^3}\right|<1$
而 $\varphi'(x)\neq 0$，故迭代是一阶收敛。

(2)$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\quad |\varphi'(x_0)|=\left|\frac{2}{3}x_0\left(1+x_0^2\right)^{-\frac{2}{3}}\right|\approx\frac{1}{2.19}<1$
而 $x^*\neq 0$，故 $\varphi'(x^*)\neq 0$ 故迭代是一阶收敛。
(3)$\varphi(x)=(x-1)^{-\frac{1}{2}}\quad |\varphi'(x)|=\left|-\frac{1}{2}\left(x_0-1\right)^{-\frac{3}{2}}\right|\approx 0.79<1$
而 $\varphi'(x)\neq 0$，故迭代是一阶收敛。

Exercice 30：239 页习题 9

研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}),x_0>0$$

证明对一切 $k=1,2,\cdots,x_k\geqslant\sqrt{a}$ 且序列 $x_1,x_2,\cdots$ 是递减的。

Solution:
因 $x_0>0$，由基本不等式得 $x_k+\frac{a}{x_k}\geqslant 2\sqrt{\left(x_k\cdot\frac{a}{x_k}\right)}=2\sqrt{a}$
$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)\geqslant\sqrt{a}$
再证$x_{k+1}<x_k$
$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)}{x_k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_k^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a}\right)=1$
故$x_{k+1}<x_k$

Exercice 31：239 页习题 12

应用牛顿法于方程 x^3-a，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性。

Solution:
$f(x)=x^3-a,\quad f'(x)=3x^2$
$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3-a}{3x_k^2}$
当 $a\neq 0$ 时，$\sqrt[3]{a}$ 为 $f(x)$ 的单根，二阶收敛
当 $a=0$ 时 $x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k\quad \lim_{k\to\infty}x_k=0$ 收敛

Exercice 32：239 页习题 14

应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$，分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性。并求

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$$

Solution:
$f(x)=x^n-a,\quad f'(x)=nx^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$
迭代公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{(n-1)x_k^n+a}{nx_k^{n-1}}$
$\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2=-\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=-\frac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$

$f=1-\frac{a}{x^n},\quad f'(x)=\frac{an}{x^{n+1}},\quad f''(x)=-\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$
迭代公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{(an+a)x_k-x_k^{n+1}}{an}$
$\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2=-\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$

Exercice 33: 239 页习题 15

证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法。假定初值 x_0 充分靠近根 x^*，求

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{a}-x_{k+1})/(\sqrt{a}-x_k)^3$$

Solution:

迭代公式 $x=\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$，其中 $\sqrt{a}$ 为不动点。

证此迭代为 3 阶的，即证 $\varphi'(\sqrt{a})=\varphi''(\sqrt{a})=0, \varphi'''(\sqrt{a})\neq 0$

$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{a}-x_{k+1})/(\sqrt{a}-x_k)^3=\frac{\varphi^{(3)}(x^*)}{3!}$

Chapter 6

第九章

Definition 2: 局部截断误差

$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} =$

6.1 习题

Exercice 34

证明对任意参数 t，下列龙格-库塔公式是二阶的：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

Solution: