高某人的泛函分析随笔 plus 版

Infty

二〇二三年九月二十三日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于送了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

1 基础知识

1.1 拓扑空间

定义 1.1: 拓扑空间

设 X 集合, 子集族 τ, 称 (X,τ) 成为拓扑空间, 若以下三条成立:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $\forall \cup_{\alpha} x_{\alpha} \in \tau$
3. $\forall \cap_{i=1}^{m} X_i \in \tau$

τ 中元素称为开集, 其补集称为闭集.

定义 1.2: 邻域

$\forall x \in X, \exists U \subset \tau, s.t. x \in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

定义 1.3: 邻域基

$\forall x \in X$, 有一个 x 的邻域集 $\mathcal{U}$, 若对 $\forall x$ 的邻域 V,$\exists U \in \mathcal{U}, s.t. x \in U \subset V$

定义 1.4: 收敛

$x_n \to x_0$ 在 $(x,\tau) \Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 邻域 $U, x_0 \in U, \exists N > 0, s.t. n > N$ 时 $x_n \in U$

定义 1.5: 连续映射

$f: f(X,\tau) \to (Y,\sigma)$:
整体上:Y 中开集 V 在 x 中的原像 $f^{-1}(V)$ 也是开集
局部上: 对 $x \in X, f(x) \in Y, \forall V_{f(x)}$, 总 $\exists u_x, s.t. f(u_x) \subset V_{f(x)}$

整体 $\Rightarrow$ 局部:$V_{f(x)} \subset Y, f^{-1}(V_{f(x)}) \triangleq U_x \subset X$ 且 $f(U_x) = V_{f(x)}$

局部 $\Rightarrow$ 整体: 要证 $f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集,$\forall V \subset Y$, 对 $\forall x \in f^{-1}(V), f(x) \in V \subset Y$, 对 $V_{f(x)}, \exists U_x s.t. f(U_x) \subset V_{f(x)}$, 所以 $U_x \subset f^{-1}(V)$

因此 $f^{-1}(V) \supset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 因为 x 为 $f^{-1}(V)$ 中每个点, 则显然有 $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$

因此 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 而因为开集的并集还是开集, 则证明成立.

1.2 距离空间

定义 1.6: 距离空间

(X,ρ) 满足

1. $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

定义 1.7: 邻域

$B(x_0,\epsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \epsilon\}, x_0 \subset \rho(x_0,r) \subset V$

定义 1.8: 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \rho(x_n,x_0) \to 0$

定义 1.9: 连续映射

$f : X \to Y$ 指当 $x \to x_0 \in X$ 时, 都有 $f(x_n) \to f(x_0) \in Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得当 $x_n \in B(x_0,\delta)$ 时, 都有 $f(x_n) \in B(f(x_0),\epsilon)$

1.3 线性距离空间

引入线性结构和拓扑结构 (距离 ρ) 的空间称为距离线性空间, 其线性运算关于 ρ 是连续的.
加法关于 ρ 是连续的, 若 $\rho(x_,x) \to 0, \rho(y_n,y) \to 0$, 则 $\rho(x_n+y_n,x+y) \to 0$
距离平移不变性可以推出加法连续, 而加法连续未必推出距离不变性
数乘关于 ρ 连续. 若 $\rho(x_n,x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n,\alpha x) \to 0$ 且 $\alpha_n \to \alpha, \forall\alpha_n \in k \Rightarrow \rho(\alpha_n x,\alpha x) \to 0$

1.4 F^* 空间 (赋准范数线性空间)

定义 1.10: F^* 空间

在线性空间 X 上定义准范数 $\|\cdot\|, X \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\|x\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|-x\| = \|x\|$
4. 若 $\alpha_n \to 0, x_n \to 0$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n x\| = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$

由准范数 $\|\cdot\|$ 定义距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$, 保证了距离性质的三条, 以及加法数乘关于 ρ 连续
F^* 空间是一类特殊的距离线性空间
反之, 定义 $\|x\|=\rho(x,0)+$ 平移不变性 + 数乘对 ρ 连续 $\Rightarrow (X,\|\cdot\|)$ 为 F^* 空间
准范数是连续的.
证明思路为:

$$|\|x_n\|-\|x_0\||\leq\|x_n-x_0\|\to 0$$

1.5 B^* 空间 (赋范线性空间)

定义 1.11: B^* 空间

线性空间 X 上定义范数 $\|\cdot\|$:

1. $\|x\|\geq 0$
2. $\|x+y\|\leq\|x+z\|+\|z+y\|$
3. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

B^* 空间 $\subset F^*$ 空间 $\approx$ 距离线性空间
距离 + 齐次性 + 平移不变性 $\Leftrightarrow$ 范数
半范数: $\|x\|\geq 0$, 没有强制规定 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$, 也就是满足半正定.

1.6 内积空间

定义 1.12: 内积空间

在复线性空间 X 上定义一个内积 $<\cdot,\cdot>$: $X\times X\to\mathbb{R}$, 也就是一个共轭的双线性泛函.

1. $<x,x>\geq 0$ 且 $<x,x>=0$ 时当且仅当 $x=0$
2. $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

可以用内积定义范数 $\|x\|^2=<x,x>$
而范数 + 极化恒等式才能定义内积
内积是连续的,$|<x_n,y_n>-<x,y>|\to 0$, 关于双变元都是连续的
内积关于双变元连续的证明思路为:

$$|<x_n,y_n>-<x,y>|=|<x_n-x_0,y_n>+<x_0,y_n-y_0>|\leq\|x_n-x_0\|\,\|y_n\|+\|x_0\|\,\|y_n-y_0\|\to 0$$

1.7 完备的距离空间

定义 1.13: Cauchy 列

设 (X,ρ) 为距离空间,$\rho(x_m,x_n)\to 0(n,m\to\infty)\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists N,n,m>0$, 都有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$

注:

1. 收敛列一定是柯西列, 但柯西列 + 存在收敛子列才能说明是收敛列.
2. F^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ F 空间, 具有平移不变性距离所诱导的拓扑线性空间,B^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ $Banach$ 空间, 内积空间 + 完备 $\Rightarrow$ Hilbert 空间
3. 每一个距离空间都有完备化空间:$(X,\rho)\longrightarrow(X_1,\rho_1):\begin{cases}\rho_1\mid_{X\times X}=\rho\\ X\text{在}X_1\text{中稠密}\end{cases}$

关于第 3 点的详细证明比较复杂, 这里只介绍了思路
首先定义一个等价关系 $\{x_n\}\sim\{y_n\}\in X\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$
$X_1:[\{x_n\}]$ 并且在等价类中定义距离 $\rho_1\xi,\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$
之后再证明稠密, 再证明完备就好了.

例 1.1: 例子

$C[0,1],\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$ 是完备的, 但是如果定义的距离为 $\rho(x,y)=\int_0^1\|x(t)-y(t)\|\,dt$, 那么空间就不是完备的, 但是可以完备化为 $L^1[0,1]$

1.8 Banach 代数

定义 1.14: Banach 代数

$$B\text{代数}=\begin{cases}\mathcal{A}\text{是复数上的代数:}\mathbb{C}\text{上的线性空间 + 乘法运算}\begin{cases}\text{半群 (乘法结合律)}\\ \text{对加法分配律}\\ \text{对数乘结合律}\end{cases}\\ \\ \mathcal{A}\text{有范数 }\|\cdot\|\text{ 且 A 为 Banach 空间}\\ \|ab\|\le\|a\|\,\|b\|\text{, 保证乘法对范数连续}\end{cases}$$

证明一下保证乘法对范数连续:

$$\begin{aligned}\|a_nb_n-ab\|=\|a_n(b_n-b)+(a_n-a)b\|&\le\|a_n(b_n-b)\|+\|(a_n-a)b\|\\ &\le\|a_n\|\,\|b_n-b\|+\|a_n-a\|\,\|b\|\to 0\end{aligned}$$

1.9 C^* 代数

定义 1.15: C^* 代数

$$C^*\text{代数} = \begin{cases} \text{具有对合 * 运算, 即两次运算之后取消}(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*, (xy)^* = y^* x^*, x^{**} = x \\ \text{有幺元的 Banach 代数} \\ \|x^* x\| = \|x\|^2 \text{ 注 } \|x^*\| = \|x\| \end{cases}$$

证明:

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\|$$

2 常见的空间的例子

例 2.1

连续函数空间 $C(\bar{\Omega})$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连通的开区域

1. 距离空间:$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)-y(t)|$
2. Banach 空间:$\|x\|=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)|$
3. Banach 代数:$(f\cdot g)(t)=f(t)g(t)$
4. C^* 代数:$f^*(x)=f\bar{(x)}$

例 2.2: $C^k(\bar{\Omega}):k$ 阶 (偏) 导连续

$$\|x\|=\max_{|\alpha|\le k}\max_{t\in\bar{\Omega}}|\partial^{\alpha}x(t)|$$

$\alpha\in(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ $\partial^{\alpha}x(t)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$

例 2.3

P 次可积函数空间 $L^p(\Omega,\mu),0<P<\infty(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

1. $L^P(\Omega,\mu)$: 线性空间 + $\|f\|_p=\left(\int_{\Omega}|f|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$,$\|f\|^p=\int_{\Omega}|f|^P du\to\rho(x,y)=\|x-y\|_p^p$ 准范数空间
2. 若 $\Omega=\mathbb{R}^n,du=dv,L^p(\mathbb{R}^{\kappa})$, 若 $\Omega=\mathbb{Z}_+,u(\{n\})=1,(P(X_1,\cdots,X_n,\cdots)),\|x\|_p=(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

例 2.4: 本性有界函数空间 $L^{\infty}(\Omega,\mu),(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

$L^{\infty}(\Omega,\mu)$: 线性空间

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty}=esssup_{x\in\Omega}|f(x)|&=\inf\{a\ge 0:|f(x)|\le a,a.e.\}\\&=\inf\{a\ge 0,|f(x)|>a\text{是零测集}\}\\&=\inf_{\mu(E_0)=0,E_0\subset\Omega}\{a\ge 0,|f(x)|>a\text{零测集}\}\end{aligned}$$

关于特殊的还有 $L^{\infty}(\mathbb{R}^n),l^{\infty}:\|x\|_{\alpha}=\sup_{n\ge 1}|x_n|$

例 2.5: 序列空间

$\delta, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$

1. S: 线性空间 $+\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 准范数 $\Rightarrow \mathcal{F}$ 空间
2. S 中按距离收敛等价于依坐标收敛, 即 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}, \cdots) \to X = (X_1, \cdots, X_n, \cdots)$ 当 $m \to \infty \Leftrightarrow \forall n, \{x_n^{(m)}\} \to x_n$

$\Rightarrow$: $\left\|x^{(m)} - 0\right\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$

$\Leftarrow$: 事实上有 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$

则 $\left\|x^{(n)} - 0\right\| \le \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \left\|x_n^{(m)}\right\| + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon$

例 2.6: $C(\mathbb{R}^n)$

线性空间 $+\|x\| = \sum\limits_{R=1}^{\infty} \frac{1}{2^R} \frac{\max\limits_{|t|\le n} |x(t)|}{1+\max\limits_{|t|\le n} |x(t)|}$ 为 $\mathcal{F}$ 空间,$t \in \mathbb{R}^n, |t| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |t_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3 空间的等同性

等同性指的是: 集合一样, 结构一样

等同性有以下的几类:

1. 拓扑空间 —- 同胚 (拓扑同构) 双射 + 保持开集对应
2. 距离空间 —- 等距同构: 满射 + 保距 $(\rho(x,y) = \rho_1(Tx, Ty))$
3. 线性空间 —- 线性同构: 双射 + 保群运算 $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$
4. B^* 空间 —- 线性同构 + 在拓扑上同胚
5. 内积空间 —- 线性同构 + 保内积运算 $< Tx, Ty > = < x, y >$

定义 3.1

同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强: 当 $\|x_n\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_1 \to 0$, 当 $n \to \infty$

这个定义等价于 $\exists$ 常数 $c > 0, s.t. \|x\|_1 \le c\|x\|_2$

证明一下这个等价, 从后往前, 显然成立.

若从前往后: 对 $\forall c = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in X, s.t. \|x_n\|_1 > \frac{1}{n}\|x_n\|_2$

$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则 $\|y_n\|_2 = \frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} \le \frac{1}{n} \to 0$

$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|x\|_1} = 1 \nrightarrow 0$

定义 3.2

在同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 等价: 当 $\|x_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \to 0$, 当 $n \to \infty$

或者说:$C\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$

定义 3.3

设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_2)$ 为 B^* 空间

$$\text{在拓扑上同胚:} \begin{cases} \exists X \to Y\text{满射} \\ \exists C_1\text{和}C_2 > 0, s.t. c_1\|x\|_1 \le \|\phi(x)\|_2 \le c_2\|x\|_1 \end{cases}$$

注: 若拓扑 T_1 比强拓扑 T_2 要粗, 粗 $T_1 \subset$ 细 T_2, 细拓扑开集更多

例 3.1

设 X 为 n 维 B^* 空间,$\rho_1, \cdots, \rho_n$ 一组基,$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in X, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$, 则定义 $T : X \to \mathbb{K}^n, |\xi|_1 = \left(\sum\limits_{i=1} \|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n, |\xi| \xrightarrow{T} \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, 保证满射和保群运算

下证:$\|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| \le \sum\limits_{i=1}^n \|\xi_i\|\|e_i\| \le \left(\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^n |e_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

即 $\|x\| \le c|\xi| = c\|Tx\|$

令 $P(\xi) = \|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$

一致连续:$\forall \xi, \eta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |\rho(\xi) - \rho(\eta)| &= \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i - \sum_{i=1}^n \eta_i e_i\right\| \\ &\le \left\|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i\right\| \\ &\le |\xi - \eta| \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故 $\rho(\xi)$ 在紧单位球面 $\{\xi \in \mathbb{K}^n, |\xi| = 1\} \triangleq S$ 上有最小值 C_1, 即 $\rho(\xi) \ge C_1 > 0$

则 $\forall \xi \in \mathbb{K}^n, \rho(\frac{\xi}{|\xi|}) \ge C_1$

即 $\frac{1}{|\xi|}\rho(\xi) \Rightarrow C_1|\xi|$

注:

1. B^* 空间任意 n 维子空间代数上同构, 拓扑上同胚.

2. 有限维的 B^* 空间都是完备的 (Banach 空间)

3. B^* 空间任有限维子空间都是闭的

4 最佳逼近问题

引: 对 $\forall$ 三角多项式 $T_n(x)$, $\int_0^{2\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,dx$
问题: 在 B^* 空间中给定一个 $x\in X$ 及真闭子空间 M, 且 $x\notin M$
定义 $d(x,m)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$
则问是否 $\exists y_0\in M, s.t. d(x,M)=d(x,y_0)\Leftrightarrow \|x-y_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$

4.1 B^* 空间中有限维真闭子空间的最佳逼近

设 X 为 B^* 空间,$M=span\{e_1,\cdots,e_n\}$. 给定 $x\in X$,$\exists$ 向量 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$(即 $\exists y_0=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n\in M, s.t. \left\|x-\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i\right\|=\min\limits_{a\in\mathbb{K}^n}\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\right\|$)

Pf: 不妨设 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关, 令 $F(a)=\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\right\|:\mathbb{K}^n\to\mathbb{R}_+$, 则 $F\in C(\mathbb{K}^n)$, 关键看 $|a|\to\infty$ 时

$$F(a)\ge\left\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\|-\|x\|=\rho(a)-\|x\|\ge c_1|a|-\|x\|\to+\infty$$