高某人的泛函分析随笔 plus 版

Infty

二〇二三年十月十一日

文章导航

前言

开坑时间:2023.9.17

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于送了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦忧。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

1 基础知识

1.1 拓扑空间

定义 1.1: 拓扑空间

设 X 集合, 子集族 τ, 称 (X,τ) 成为拓扑空间, 若以下三条成立:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $\forall \cup_\alpha x_\alpha \in \tau$
3. $\forall \cap_{i=1}^m X_i \in \tau$

τ 中元素称为开集, 其补集称为闭集.

定义 1.2: 邻域

$\forall x \in X, \exists U \subset \tau, s.t. x \in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

定义 1.3: 邻域基

$\forall x \in X$, 有一个 x 的邻域集 $\mathcal{U}$, 若对 $\forall x$ 的邻域 V,$\exists U \in \mathcal{U}, s.t. x \in U \subset V$

定义 1.4: 收敛

$x_n \to x_0$ 在 $(x,\tau) \Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 邻域 $U, x_0 \in U, \exists N > 0, s.t. n > N$ 时 $x_n \in U$

定义 1.5: 连续映射

$f: f(X,\tau) \to (Y,\sigma)$:
整体上:Y 中开集 V 在 x 中的原像 $f^{-1}(V)$ 也是开集
局部上: 对 $x \in X, f(x) \in Y, \forall V_{f(x)}$, 总 $\exists u_x, s.t. f(u_x) \subset V_{f(x)}$

整体 $\Rightarrow$ 局部:$V_{f(x)} \subset Y, f^{-1}(V_{f(x)}) \triangleq U_x \subset X$ 且 $f(U_x) = V_{f(x)}$

局部 $\Rightarrow$ 整体: 要证 $f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集,$\forall V \subset Y$, 对 $\forall x \in f^{-1}(V), f(x) \in V \subset Y$, 对 $V_{f(x)}, \exists U_x s.t. f(U_x) \subset V_{f(x)}$, 所以 $U_x \subset f^{-1}(V)$

因此 $f^{-1}(V) \supset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 因为 x 为 $f^{-1}(V)$ 中每个点, 则显然有 $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$

因此 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} U_x$, 而因为开集的并集还是开集, 则证明成立.

1.2 距离空间

定义 1.6: 距离空间

(X, ρ) 满足

1. $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

定义 1.7: 邻域

$B(x_0, \epsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \epsilon\}, x_0 \subset \rho(x_0, r) \subset V$

定义 1.8: 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0$

定义 1.9: 连续映射

$f : X \to Y$ 指当 $x \to x_0 \in X$ 时, 都有 $f(x_n) \to f(x_0) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $x_n \in B(x_0, \delta)$ 时, 都有 $f(x_n) \in B(f(x_0), \epsilon)$

1.3 线性距离空间

引入线性结构和拓扑结构 (距离 ρ) 的空间称为距离线性空间, 其线性运算关于 ρ 是连续的.
加法关于 ρ 是连续的, 若 $\rho(x_,x) \to 0, \rho(y_n, y) \to 0$, 则 $\rho(x_n + y_n, x + y) \to 0$
距离平移不变性可以推出加法连续, 而加法连续未必推出距离不变性
数乘关于 ρ 连续. 若 $\rho(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0$ 且 $\alpha_n \to \alpha, \forall \alpha_n \in k \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0$

1.4 F^* 空间 (赋准范数线性空间)

定义 1.10: F^* 空间

在线性空间 X 上定义准范数 $\|\cdot\|, X \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\|x\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|-x\| = \|x\|$
4. 若 $\alpha_n \to 0, x_n \to 0$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n x\| = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$

由准范数 $\|\cdot\|$ 定义距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$, 保证了距离性质的三条, 以及加法数乘关于 ρ 连续
F^* 空间是一类特殊的距离线性空间
反之, 定义 $\|x\|=\rho(x,0)+$ 平移不变性 + 数乘对 ρ 连续 $\Rightarrow (X,\|\cdot\|)$ 为 F^* 空间
准范数是连续的.
证明思路为:

$$|\|x_n\|-\|x_0\||\leq\|x_n-x_0\|\to 0$$

1.5 B^* 空间 (赋范线性空间)

定义 1.11: B^* 空间

线性空间 X 上定义范数 $\|\cdot\|$:

1. $\|x\|\geq 0$
2. $\|x+y\|\leq\|x+z\|+\|z+y\|$
3. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

B^* 空间 $\subset F^*$ 空间 $\approx$ 距离线性空间
距离 + 齐次性 + 平移不变性 $\Leftrightarrow$ 范数
半范数: $\|x\|\geq 0$, 没有强制规定 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$, 也就是满足半正定.

1.6 内积空间

定义 1.12: 内积空间

在复线性空间 X 上定义一个内积 $<\cdot,\cdot>: X\times X\to\mathbb{R}$, 也就是一个共轭的双线性泛函.

1. $<x,x>\geq 0$ 且 $<x,x>=0$ 时当且仅当 $x=0$
2. $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

可以用内积定义范数 $\|x\|^2=<x,x>$
而范数 + 极化恒等式才能定义内积
内积是连续的,$|<x_n,y_n>-<x,y>|\to 0$, 关于双变元都是连续的
内积关于双变元连续的证明思路为:

$$|<x_n,y_n>-<x,y>|=|<x_n-x_0,y_n>+<x_0,y_n-y_0>|\leq\|x_n-x_0\|\,\|y_n\|+\|x_0\|\,\|y_n-y_0\|\to 0$$

1.7 完备的距离空间

定义 1.13: Cauchy 列

设 (X,ρ) 为距离空间,$\rho(x_m,x_n)\to 0(n,m\to\infty)\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists N,n,m>0$, 都有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$

注:

1. 收敛列一定是柯西列, 但柯西列 + 存在收敛子列才能说明是收敛列.
2. F^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ F 空间, 具有平移不变性距离所诱导的拓扑线性空间,B^* 空间 + 完备 $\Rightarrow$ $Banach$ 空间, 内积空间 + 完备 $\Rightarrow$ Hilbert 空间
3. 每一个距离空间都有完备化空间:$(X,\rho)\longrightarrow(X_1,\rho_1):\begin{cases}\rho_1\mid_{X\times X}=\rho\\ X\text{在}X_1\text{中稠密}\end{cases}$

关于第 3 点的详细证明比较复杂, 这里只介绍了思路
首先定义一个等价关系 $\{x_n\}\sim\{y_n\}\in X\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$
$X_1:[\{x_n\}]$ 并且在等价类中定义距离 $\rho_1\xi,\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$
之后再证明稠密, 再证明完备就好了.

例 1.1: 例子

$C[0,1],\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$ 是完备的, 但是如果定义的距离为 $\rho(x,y)=\int_0^1\|x(t)-y(t)\|\,dt$, 那么空间就不是完备的, 但是可以完备化为 $L^1[0,1]$

1.8 Banach 代数

定义 1.14: Banach 代数

$$B\text{代数}=\begin{cases}\mathcal{A}\text{是复数上的代数:}\mathbb{C}\text{上的线性空间 + 乘法运算}\begin{cases}\text{半群 (乘法结合律)}\\ \text{对加法分配律}\\ \text{对数乘结合律}\end{cases}\\ \\ \mathcal{A}\text{有范数 }\|\cdot\|\text{ 且 A 为 Banach 空间}\\ \|ab\|\le\|a\|\,\|b\|\text{, 保证乘法对范数连续}\end{cases}$$

证明一下保证乘法对范数连续:

$$\begin{aligned}\|a_nb_n-ab\|=\|a_n(b_n-b)+(a_n-a)b\|&\le\|a_n(b_n-b)\|+\|(a_n-a)b\|\\ &\le\|a_n\|\,\|b_n-b\|+\|a_n-a\|\,\|b\|\to 0\end{aligned}$$

1.9 C^* 代数

定义 1.15: C^* 代数

$$C^*\text{代数} = \begin{cases} \text{具有对合 * 运算, 即两次运算之后取消}(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*, (xy)^* = y^* x^*, x^{**} = x \\ \text{有幺元的 Banach 代数} \\ \|x^* x\| = \|x\|^2 \text{ 注 } \|x^*\| = \|x\| \end{cases}$$

证明:

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\|$$

2 常见的空间的例子

例 2.1

连续函数空间 $C(\bar{\Omega})$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连通的开区域

1. 距离空间:$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)-y(t)|$

2. Banach 空间:$\|x\|=\max\limits_{t\in\bar{\Omega}}|x(t)|$

3. Banach 代数:$(f\cdot g)(t)=f(t)g(t)$

4. C^* 代数:$f^*(x)=f(\bar{x})$

例 2.2: $C^k(\bar{\Omega}):k$ 阶 (偏) 导连续

$$\|x\|=\max_{|\alpha|\le k}\max_{t\in\bar{\Omega}}|\partial^\alpha x(t)|$$

$\alpha\in(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ $\partial^\alpha x(t)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$

例 2.3

P 次可积函数空间 $L^p(\Omega,\mu),0<P<\infty(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

1. $L^P(\Omega,\mu)$: 线性空间 + $\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$,$\|f\|^p=\int_\Omega|f|^P du\to\rho(x,y)=\|x-y\|_p^p$ 准范数空间

2. 若 $\Omega=\mathbb{R}^n,du=dv,L^p(\mathbb{R}^\kappa)$, 若 $\Omega=\mathbb{Z}_+,u(\{n\})=1,(P(X_1,\cdots,X_n,\cdots)),\|x\|_p=(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

例 2.4: 本性有界函数空间 $L^\infty(\Omega,\mu),(\Omega,\sigma,\mu)$ 测度空间

$L^\infty(\Omega,\mu)$: 线性空间

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty=esssup_{x\in\Omega}|f(x)|&=\inf\{a\ge 0:|f(x)|\le a,a.e.\}\\&=\inf\{a\ge 0,|f(x)|>a\text{是零测集}\}\\&=\inf_{\mu(E_0)=0,E_0\subset\Omega}\{a\ge 0,|f(x)|>a\text{零测集}\}\end{aligned}$$

关于特殊的还有 $L^\infty(\mathbb{R}^n),l^\infty:\|x\|_\alpha=\sup_{n\ge 1}|x_n|$

例 2.5: 序列空间

$\delta, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$

1. S: 线性空间 $+\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 准范数 $\Rightarrow \mathcal{F}$ 空间
2. S 中按距离收敛等价于依坐标收敛, 即 $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)\to X=(X_1,\cdots,X_n,\cdots)$ 当 $m\to\infty \Leftrightarrow \forall n, \{x_n^{(m)}\}\to x_n$

$\Rightarrow$: $\left\|x^{(m)}-0\right\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}<\epsilon$

$\Leftarrow$: 事实上有 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}<\epsilon$

则 $\left\|x^{(n)}-0\right\|\le\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\left\|x_n^{(m)}\right\|+\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\epsilon$

例 2.6: $C(\mathbb{R}^n)$

线性空间 $+\|x\|=\sum\limits_{R=1}^{\infty}\frac{1}{2^R}\frac{\max\limits_{|t|\le n}|x(t)|}{1+\max\limits_{|t|\le n}|x(t)|}$ 为 $\mathcal{F}$ 空间,$t\in\mathbb{R}^n, |t|=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|t_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3 空间的等同性

等同性指的是: 集合一样, 结构一样
等同性有以下的几类:

1. 拓扑空间 —- 同胚 (拓扑同构) 双射 + 保持开集对应
2. 距离空间 —- 等距同构: 满射 + 保距 $(\rho(x,y)=\rho_1(Tx,Ty))$
3. 线性空间 —- 线性同构: 双射 + 保群运算 $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$
4. B^* 空间 —- 线性同构 + 在拓扑上同胚
5. 内积空间 —- 线性同构 + 保内积运算 $<Tx,Ty>=<x,y>$

定义 3.1

同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1\le\|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强: 当 $\|x_n\|_2\to0\Rightarrow\|x_n\|_1\to0$, 当 $n\to\infty$

这个定义等价于 $\exists$ 常数 $c>0, s.t. \|x\|_1\le c\|x\|_2$

证明一下这个等价, 从后往前, 显然成立.
若从前往后: 对 $\forall c=\frac{1}{n}>0, \exists x_n\in X, s.t. \|x_n\|_1>\frac{1}{n}\|x_n\|_2$
$y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则 $\|y_n\|_2=\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\le\frac{1}{n}\to0$

$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|x\|_1} = 1 \nrightarrow 0$

定义 3.2

在同一个线性空间上, 给定两个范数 $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, 称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 等价: 当 $\|x_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \to 0$, 当 $n \to \infty$

或者说:$C\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1$

定义 3.3

设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_2)$ 为 B^* 空间

$$\text{在拓扑上同胚:}\begin{cases} \exists X \to Y\text{满射} \\ \exists C_1\text{和}C_2 > 0, s.t. c_1\|x\|_1 \le \|\phi(x)\|_2 \le c_2\|x\|_1 \end{cases}$$

注: 若拓扑 T_1 比强拓扑 T_2 要粗, 粗 $T_1 \subset$ 细 T_2, 细拓扑开集更多

例 3.1

设 X 为 n 维 B^* 空间,$\rho_1, \cdots, \rho_n$ 一组基,$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in X, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$, 则定义 $T: X \to \mathbb{K}^n, |\xi|_1 = \left(\sum\limits_{i=1} \|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n, |\xi| \xrightarrow{T} \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, 保证满射和保群运算

下证:$\|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| \le \sum\limits_{i=1}^n \|\xi_i\| \|e_i\| \le \left(\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^n |e_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
即 $\|x\| \le c|\xi| = c\|Tx\|$
令 $P(\xi) = \|x\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n \xi_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$
一致连续:$\forall \xi, \eta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |\rho(\xi) - \rho(\eta)| &= \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i - \sum_{i=1}^n \eta_i e_i\right\| \\ &\le \left\|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i\right\| \\ &\le |\xi - \eta| \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故 $\rho(\xi)$ 在紧单位球面 $\{\xi \in \mathbb{K}^n, |\xi| = 1\} \triangleq S$ 上有最小值 C_1, 即 $\rho(\xi) \ge C_1 > 0$
则 $\forall \xi \in \mathbb{K}^n, \rho(\frac{\xi}{|\xi|}) \ge C_1$
即 $\frac{1}{|\xi|}\rho(\xi) \Rightarrow C_1|\xi|$
注:

1. B^* 空间任意 n 维子空间代数上同构, 拓扑上同胚.

2. 有限维的 B^* 空间都是完备的 (Banach 空间)

3. B^* 空间任有限维子空间都是闭的

4 最佳逼近问题

引: 对 $\forall$ 三角多项式 $T_n(x), \int_0^{2\pi} |f(x)-S_n(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} |f(x)-T_n(x)|^2\,dx$
问题: 在 B^* 空间中给定一个 $x \in X$ 及真闭子空间 M, 且 $x \notin M$
定义 $d(x,m) = \inf\limits_{y \in M} \|x-y\|$
则问是否 $\exists y_0 \in M, s.t. d(x,M) = d(x,y_0) \Leftrightarrow \|x-y_0\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$

4.1 B^* 空间中有限维真闭子空间的最佳逼近

设 X 为 B^* 空间,$M = span\{e_1,\cdots,e_n\}$. 给定 $x \in X, \exists$ 向量 $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$(即 $\exists y_0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in M, s.t. \left\|x - \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| = \min\limits_{a\in\mathbb{K}^n}\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n a_i e_i\right\|$)

Pf: 不妨设 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关, 令 $F(a) = \left\|x - \sum\limits_{i=1}^n a_i e_i\right\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, 则 $F \in C(\mathbb{K}^n)$, 关键看 $|a| \to \infty$ 时

$$F(a) \ge \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\| - \|x\| = \rho(a) - \|x\| \ge c_1|a| - \|x\| \to +\infty$$

注: 最佳逼近元的唯一性要求:$e_1,\cdots,e_n$ 线性无关,$(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的.
凸集:$\forall\lambda \in (0,1), x,y \in A, \lambda x + (1-\lambda)y \in A$, 该概念可以推广到线性空间

定义 4.1: 严格凸的线性空间

$\forall x \ne y \in X$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则对 $\forall \alpha+\beta = 1, \|\alpha x + \beta y\| < 1$, 称其为严格凸的.

现在证明一下最佳逼近元的唯一性:
若 $d = 0$, 且 y 是最佳逼近元, 则 $d = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| = 0 = \|x-y\| \Rightarrow y = x$
若 $d = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| > 0$, 若设 y 和 z 都是最佳逼近元.
$\|x-y\| = \|x-z\| = d$

$$\frac{1}{d}\|x-\alpha y-\beta z\| = \frac{1}{d}\|\alpha x+\beta x-\alpha y-\beta z\| = \left\|\alpha\frac{x-z}{d}+\beta\frac{x-z}{d}\right\| < 1$$

因为是严格凸的, 所以上式小于 1
$\Rightarrow, \|x-\alpha y-\beta z\| < d$ 矛盾 (d 是下确界)
常见 B^* 空间的严格凸性:
内积空间:$\|\alpha x+\beta y\| < 1 \Rightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 < 1$

$$
\begin{aligned}
&< \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y > \\
=&\alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta Re < x,y > +\beta^2 \|y\|^2 \\
<&(\alpha+\beta)^2 = 1 (x \neq y)
\end{aligned}
$$

$L^P(P>1)$ 空间:$\|\alpha x+\beta y\| < \alpha\|x\|+\beta\|y\| = 1$, 严格凸 (根据闵可夫斯基不等式可知)

反例:

$L^1[0,1], x=1, y=2t$ 但 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, 不严格凸

$C[0,1], x=1, y=t$, 但 $\left\|\frac{1+t}{2}\right\| = 1$, 不严格凸

4.2 无穷维 B^* 空间上最佳逼近问题

在无穷维空间中, 最佳逼近元未必是存在的, 但是会有一个很好的引理, 这个引理说明了, 尽管未必找得到最佳逼近元, 但是能找到差不多的.

命题 4.1: Riesz 引理

设 M 为 B^* 空间 X 的一个真闭子空间, 则对 $\forall 0<\epsilon<1, \exists x \in X, s.t. \|x\| = 1$ 且 $\|x-y\| \geq 1-\epsilon, \forall y \in M$

$\forall x_0 \in X \backslash M$, 由 M 是闭的,$d = \inf\limits_{y\in M} \|x_0 - y\| > 0$

(否则若 $d=0, \forall \frac{1}{n}, \exists y_n \in M, s.t. \|x_0-y_n\| < 0+\frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to x_0 + M$, 矛盾)

则对 $\forall \eta > 0, \exists y_0 \in M, s.t. d \leq \|x_0-y_0\| < d+\eta$

取 $x = \frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$, 则 $\|x\|=1$

且 $\forall y \in M, \|x-y\| = \left\|\frac{x_0-[y_0+y\|x_0-y_0\|]}{\|x_0-y_0\|}\right\| = \frac{\|x_0-y'\|}{\|x_0-y_0\|} \geq \frac{d}{d+\eta} \triangleq 1-\epsilon$

注:

如果令 $M = span\{x_1\}, \|x_1\|=1$, 对 $\epsilon=\frac{1}{2} \Rightarrow \exists \|x_2\|=1$, 但 $\|x_2-x_1\| \geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$M = span\{x_1,x_2\}, \exists x_3, \|x_3\|=1$, 但 $\|x_3-x_2\| \geq \frac{1}{2}, \|x_3-x_1\| \geq \frac{1}{2}$

$\vdots$

$M = span\{x_n\}, \exists x_n, \|x_n\|=1$, 但 $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{O}_n \triangleq \{x\in X: \|x-x_n\| < \frac{1}{4}\}, \{x_n\} \Rightarrow \mathcal{O}_n \subseteq B(0,2)$, 这句话的意思是说, 找不到一个满足平移不变性的勒贝格测度

$\Rightarrow$ 无穷维 B^* 空间中存在无穷多个两两不交且有相同半径的球

$\Rightarrow$ 无穷维空间中不存在像" 体积" 一样具有平移不变性的测度.

设 M 为无穷维 B^* 空间的紧子集, 则最佳逼近元一定存在

$d = \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$, 对 $\epsilon=\frac{1}{n}, \exists y_n \in M, s.t. d \leq \|x-y_n\| \leq d+\frac{1}{n}, y_{n_k} \to y_0 \in M$, 这是由紧性可以推出的 $d \leq \|x-y_0\| \leq d$

Hilbert 空间上的最佳逼近 (即上述结论对闭凸子集也成立, 因为 Hilbert 空间最近接欧氏空间)

定理 4.1: 极小向量定理

设 X 为 Hilbert 空间,M 为其非空闭凸子集, 对 $\forall x \in X$,$\exists$ 唯一的 $y \in M$ 使得 $\|x-y_0\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\| = d$

1. $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列

$$\begin{aligned}&\|y_n-y_m\|^2 = \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 \overset{v_n=y_n-x}{=} \|v_n-v_m\|^2\\ &\overset{\text{平行四边形法则}}{=} 2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2) - 4\left\|\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \le 2((d+\frac{1}{n})^2+(d+\frac{1}{m})^2) - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

2. y_0 存在性: 因 X 完备, 则 $y_n \to y_0, \overset{M\text{为闭}}{\Rightarrow} y_0 \in M, d \le \|x-y_0\| \le d$
3. 唯一性, 设 y_1 也是最佳逼近元

$$\begin{aligned}&\|y_1-x\| = d \quad 0 \le \|y_0-y_1\|^2 = \|y_0-X-(y_1-X)\|^2\\ =&2\left(\|y_0-x\|^2+\|y_1-x\|^2 - 4\left\|\frac{y_0-y_1-2x}{2}\right\|^2\right)\\ \le&4d^2-4d^2=0\end{aligned}$$

注:
1. 设 y_0 为闭凸子集 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow Re < x-y_0, y_0-y > \ge 0, \forall y \in M$
对 $\forall y \in M$, 令

$$\begin{aligned}\phi_y(t) &= \|x-ty-(1-t)y_0\|^2 \quad t\in[0,1] \quad \phi_y(t) \ge \phi_y(0)\\ &= \|(x-y_0)+t(y_0-y)\|^2\\ &= \|x-y_0\|^2 + 2tRe < x-y_0, y_0-y > + t^2\|y_0-y\|\end{aligned}$$

2. 设 y_0 为闭子空间 M 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow x-y_0 \perp M$
证明: 令 $w = y_0-y_1$, 则 $Re < x-y_0, w > \ge 0, Re < x-y_0, -w > \forall\omega \in M$ 可以推出

$$\begin{cases} Re < x-y_0, \omega > = 0\\ Re < x-y_0, i\omega > = 0\end{cases}$$

进而推出 $< x-y_0, \omega > = 0$
3. $\forall x \in$Hilbert 空间,M 为闭子空间, 则 $x = y+z, y \in M, z \in M^\perp$, 且该分解唯一
$z = x-y \perp M$

$$\begin{cases} x = y_1+z_1\\ x = y+z\end{cases}$$

$0 = y_1-y \in M = z-z_1 \in M^\perp \in M\cap M^\perp$

5 Minkowski 泛函: 线性空间上的" 半范数"

线性空间中没有距离, 因此定义距离就会用向量之比来定义

设 X 时一个线性空间,C 是包含原点的凸子集, 定义与 C 对应的一个泛函

$$\rho(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}, \forall x \in X$$

称 $\rho(x)$ 为 C 的 Minkowski 泛函

注:

1. $\rho(x) \in [0, +\infty]$
2. $\rho(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha > 0$
3. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

证明 (2):

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in C\} &= \inf\{\alpha\frac{\lambda}{\alpha} > 0 : \frac{x}{\frac{\lambda}{\alpha}} \in C\} \\ &= \alpha \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}\end{aligned}$$

证明 (3)

当 $\rho(x), \rho(y) = +\infty$ 时显然成立

不妨设 $\rho(x), \rho(y) < +\infty, \forall \epsilon > 0$

$\lambda_1 = \rho(x) + \frac{\epsilon}{2}, \lambda_2 = \rho(y) + \frac{\epsilon}{2}$ 则 $\frac{x}{\lambda} \in C, \frac{y}{\lambda_2} \in C$

$$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{y}{\lambda_2} \in C$$

则 $\rho(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = \rho(x) + \rho(y) + \epsilon$, 由 ϵ 任意性,$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

很可惜,Minkowski 泛函距离真正的半范数还有一些距离, 因为首先在线性空间我们要保证吸收性的成立, 另一方面, 对于齐次性,Minkowski 泛函只满足了 $\alpha > 0$ 时是成立的.

对于吸收性, 我们可以通过定义凸子集的方式去解决.

$\rho(x) \Leftarrow$ 吸收的:$\forall x \in X, \exists \lambda, s.t. \frac{x}{\lambda} \in C$

关于齐次 $\rho(x) < \infty \Leftarrow \begin{cases} \text{实: 对称的: 对}\forall x \in C, -x \in C \\ \text{复: 均衡的:}\forall x \in C,\text{则对,}\forall \beta \in C,\text{且}|\beta| = 1,\text{都有}\beta x \in C \end{cases}$

证明:

$\rho(-x) = \{\lambda : y = -\frac{-x}{\lambda} \in C\}$ 由对称推出 $y' = \frac{x}{\lambda} \in C$, 所以 $\rho(-x) = \rho(x)$

$$\begin{aligned}\rho(\beta x) &= \inf\{\lambda > 0, \frac{\beta x}{\lambda} \in C\}, y = \frac{\beta x}{\lambda}, \text{保持}\lambda\text{不变} \\ &= \inf\{\lambda > 0, \frac{\beta' x}{\lambda} \in C\}, y' = \frac{\beta' x}{\lambda}, |\beta'| = |\beta| \\ &= \inf\{|\beta| \frac{\lambda}{|\beta|} > 0 : \frac{x}{\frac{\lambda}{|\beta|}} \in C\} \\ &= |\beta|\rho(x)\end{aligned}$$

线性空间中吸收的, 对称的 (均衡的) 含原点的凸子集 $C \Leftrightarrow \rho(x) = \|x\|$: 半范数

5.1 赋范线性空间中凸子集的 Minkowski 泛函

定理 5.1

设 X 为 B^* 空间,C 为 X 中包含 O 的凸子集,$\rho(x)$ 为 C 的 Minkowski 泛函, 则

1. 若 C 为闭集, 则 $\rho(x)$ 为下半连续, 则 $C = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$
2. 若 C 为有界的, 则 $\exists C_1 > 0, s.t. \rho(x) \geq C_1 \|x\|, \forall x \in X$, 从而 $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. 若以 O 为内点, 则 C 一定是吸收的, 且 $\exists C_2 > 0, p(x) \leq C_2 \|x\|, \forall x \in X$,, 则 $\rho(x)$ 一致连续的

证明 (1):
$\subseteq$: $\forall x \in \alpha C \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \in C \Rightarrow \rho(x) \leq \alpha \Rightarrow x \in C$
$\supseteq$: 若 $\rho(x) \leq \alpha$, 有 $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{n}} \in C, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \frac{x}{\alpha + \frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{闭}} \frac{x}{\alpha} \in C \Rightarrow x \in \alpha C$
证明 (2):
因 C 为有界,$\exists r > 0, s.t. C \subset \text{开}B(O, r), \forall x \in X, \frac{rx}{\|x\|} \in S(O, r), \frac{x}{\frac{\|x\|}{r}} \notin C \Rightarrow \rho(x) \geq \frac{\|x\|}{r}$
取 $C_1 = \frac{1}{r}$
证明 (3):
O 为 C 的内点 $\Rightarrow$ 则 $\exists$ 开 $B(O, r) \subset C, \frac{rx}{2\|x\|} \in B(O, r) \subset C, \forall x \neq 0, x \in X$ 则 $\rho(x) \leq \frac{2\|x\|}{r}$ 取 $C_2 = \frac{2}{r}$
$\forall x, y \in X$
1. 若 $rho(x) > \rho(y), |\rho(x) - \rho(y)| = \rho(x) - \rho(y) = \rho(x - y + y) - \rho(y) \leq \rho(x - y)$
2. 若 $\rho(x) \leq \rho(y)$

$$|\rho(y) - \rho(x)| = \rho(y) - \rho(x) = \rho(y - x + x) - \rho(x) \leq p(y - x)$$

所以 $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \max\{\rho(x - y), \rho(y - x)\} \leq C_2 \|x - y\|$ 所以一致连续

推论 5.1

设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸子集且紧 (有界闭), 则 $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ 且 $m \leq n, s.t. C$ 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中闭单位球 (注: 无以 O 为圆心的条件)

1. 平移 C 某个向量,$s.t. O \in C$

事实上, 考虑包含 C 的最小的闭线性流形 E:i.e. 线性子空间 E_0 平移了某个向量

设 $dim\ E = m, (m \leq n), \overset{\text{最小}}{\Rightarrow} \exists m+1$ 向量 $e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1} \in C$ s.t.$\{e_i - e_{m+1}, i = 1, \cdots, m\}$ 为 m 哥线性无关向量

令 $e_0 = \frac{1}{m+1} \sum\limits_{i=1}^{m+1} e_i \in c_0\{e_1, \cdots, e_{m+1}\} \in C$(凸集的凸组合还属于凸集)

故 $E_0 = E - \{e_0\}$

$\forall y \in E, y = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(e_i - e_0) + e_0$

$\forall Z \in E_0, \|Z\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \|\mu_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

2. O 为 $C - \{e_0\}$ 的内点, 下证当 $\|Z\|$ 充分小时,$y \in C$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i + (1 - \sum_{j=1}^{m} \mu_j) e_0$$

3.

$$C_1 \|x\| \leq \rho(x) \leq C_2 \|x\|$$

$\varphi(x) : (X^m, \|\cdot\|) \to C\rho(x)$

6 距离空间上紧集 M 及其上的连续函数空间

定理 6.1: Bolzano-Weierstress 致密性定理

任意有界数列必有收敛子列

定义 6.1: 列紧集和自列紧集

列紧: 若有空间 $(X, \rho), A \subset X, A$ 中任何点列都在 X 中有收敛的子列.
自列紧: 若有空间 $(X, \rho), A \subset X, A$ 中任何点列都在 A 中有收敛的子列.

注:

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 列紧 $\Leftrightarrow, A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 有界集, 自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭集

2. 称 X 为列紧空间, 若 X 是列紧的, 比如 $X = [0, 1]$, 列紧空间 $\begin{cases} \text{子集} \Rightarrow \text{列紧} \\ \text{闭子集} \Rightarrow \text{自列紧} \end{cases}$

3. 列紧空间必是完备的:$\forall \{x_n\} \subset X$ 为 Cauchy 列 $\overset{\text{列紧}}{\Rightarrow} \{x_{n_k}\}$ 收敛 $\Rightarrow x_n$ 收敛

4. 一般单距离空间中有非列紧集 $\begin{cases} \text{无穷维} B^* \text{空间} B(x_n, r), \|x_n - x_m\| \geq r \\ \text{可分的 Hilbert 空间} \{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \|e_n - e_m\| = 2 \\ C[0,1], x_n(t) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ 1 - nt & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases} \to x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

现在, 我们有了有限维的 B^* 空间 $\Rightarrow$ 任意有界集必是列紧的.

定理 6.2

B^* 空间 X 是有限维的 $\Leftrightarrow$ X 的单位球面是列紧的

$\Rightarrow$ 这个方向是显然的
$\Leftarrow$ 若 X 是无穷维的,$\forall$线性无关组$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$, 令 $M=span\{x_1,\cdots,x_n\}$
对 $\forall x\notin M_n,\exists y_n\in M_n, s.t.\ \|x-y_n\|=d=\inf_{y\in M_n}\|x-y\|$. 令 $x_{n+1}=\frac{x-y_n}{d}\in S$

$$\|x_{n+1}-x_i\|=\left\|\frac{x-y_n}{d}-x_i\right\|=\frac{1}{d}\|x-(y_n+dx_i)\|\geq\frac{1}{d}\cdot d=1$$

令 $M_{n+1}=\{x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\},\{x_n\}\subset S$ 且 $\|x_n-x_m\|\geq 1$

定义 6.2: 完全有界

设 M 为 (X,ρ) 的子集,$\forall\epsilon>0m\exists$ 有限个以 M 中元 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为中心的球,$B(y_i,\epsilon)(i=1,\cdots,n)$ 可以覆盖 M(M 有有穷的 ϵ 网), 则称 M 为完全有界的.

1. 完全有界 $\Rightarrow$ 有界.$M\subset\Cup_{i=1}^{n}B(y_i,\epsilon)$
2. 有界不一定完全有界. 例: 有无穷有点的离散度量空间 $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$ 事实上 $d(x,y)=r>1$ 有界, 对 $0<\epsilon_0<1$ 时,$\rho(x,y)<\epsilon\Rightarrow x=y$, 因此不完全有界.

定理 6.3

在距离空间 (X,ρ) 中,$M\subset X$, 则

1. 若 M 是列紧 $\Rightarrow$ M 完全有界
2. 若 M 完全有界,X 完备 $\Rightarrow$ M 列紧

(1).
反证: 若 M 不完全有界, 则 $\exists\epsilon_0>0,s.t.M$ 没有有穷的 ϵ_0 网
对 $\forall x_1\in M$, 则 $B(x_1,\epsilon_0)$ 不能完全覆盖 M,$\exists x_2\in M/B(x_1,\epsilon_0)$
对 $\forall x_1,x_2\in M$, 则 $B(x_1,\epsilon_0)\cup B(x_2,\epsilon_0)$ 不能完全覆盖 M,$\exists x_3\in M/B(x_1,\epsilon_0)\cup B(x_2,\epsilon_0)$
$\vdots$
一直到 $\|x_n-x_m\|\geq\epsilon_0$ 矛盾于 M 列紧
$\Rightarrow$ 设 M 完全有界, 且 X 完备, 对 $\forall\{x_n\}\subset M$, 找 $\{x_{n_k}\}$ 收敛
对 $\epsilon=1$ 网, 则 M 有有穷 $\epsilon=1$ 网,$\exists y_1\in M,s.t.\{x_n\}$ 子列 $\{x_n^{(1)}\}\subset B(y,1)$
对 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 网, 则 $\exists y_2\in M,s.t.\{x_n^{(1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(2)}\}\subset B(y,\frac{1}{2})$
$\vdots$
对 $\epsilon=\frac{1}{n}$ 网, 则 $\exists y_n\in M,s.t.\{x_n^{(n-1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(n)}\}\subset B(y,\frac{1}{n})$

抽出对角线子列 $\{x_k^{(k)}\}$

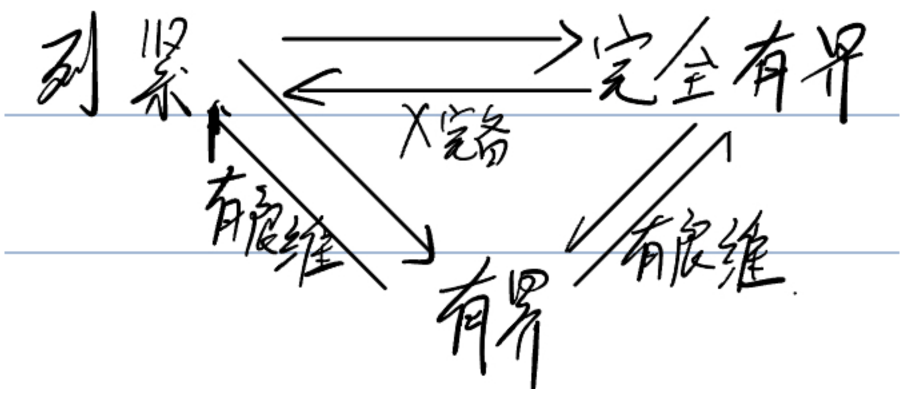
$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \le \rho(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + \rho(y_n, x_n^{(n)}) \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \epsilon$$

取 $N = \frac{2}{\epsilon}$

$$\left.\begin{array}{r} Cauchy\text{列} \\ X\text{完备} \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_k^{(k)}\}\text{收敛}$$

注:

1. 完全有界 $\Leftrightarrow M$ 中任数列都有子序列为 Cauchy 列
2. 完全有界并不一定列紧, 如取 $X = Q$, 令 $M = \mathbb{Q} \cap [0,1], \forall \epsilon > \frac{1}{n}$ 取 $y_i = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$, 故 M 完全有界 $\{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\} \to \frac{e}{3} \notin \mathbb{Q}$



3.
4. 完全有界距离空间必可分 (存在稠密子集)

7 距离空间上的紧集为其上的连续函数空间

1. 列紧集
2. 紧集

$\mathbb{R}$中闭区间$\begin{cases}\text{聚点定理, 每个点列都有子列收敛于该区间的点}\\ \text{有限覆盖定理, 每个开覆盖都有有限子覆盖}\end{cases}$

$\downarrow\uparrow$

$\mathbb{R}^n$中有有限闭区域 (可推广到有限维B^*空间, 有界 + 闭)

$\downarrow\uparrow$ (有界集)

一般的距离空间, 自列紧集 (等价于 T2 拓扑空间的紧集) $\Rightarrow \begin{cases}\text{列紧} \Rightarrow \text{有界}\\ \text{闭}\end{cases}$

$\downarrow\uparrow$

T2 拓扑空间, 紧集任意的开集族有有限开覆盖 (可以推出相对紧)($\bar{M}$紧) $\Rightarrow$ 有界 $+ T_2 \Rightarrow$ 闭

注:

1. 列紧集 (分析刻画)$\Leftrightarrow$ 完全有界 + X 完备 (几何刻画) $\Leftrightarrow$ 相对紧 (拓扑刻画)

2. $f \in [a,b] \Rightarrow R_f = [m, M]$

推广 (距离空间): 紧集 M 上的连续函数为 K 上的紧集

证:

$f(M)$ 为紧, 对 $\forall y_n \in f(M)$, 则 $y_n = f(x_n)$, 其中 $x_n \in M \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_0 \in M$

f 连续 $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(M)$

3. 紧集上的连续函数空间

定义 7.1

设 M 为 (X,ρ) 紧集,$C(M)$ 为从 M 到 K 上所有连续函数全体.$\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in M}|f(x)|$: $f(M)$ 为 K 上紧集

定理 7.1

设 M 为 (X,ρ) 紧集, 则 $C(M)$ 是完备的 $\longrightarrow$Banach 空间

1. 找极限

设 $\{f_n\}$ 为 $C(M)$Cauchy 列,$\forall\epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时,$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon, \forall x \in M$$

即 $\{f_n(x)\}$ 为 K 上 Cauchy 列

故 $f_n(x) \to f(x), \forall x \in M$

2. 下设 $f \in C(M)$, 对 $\forall x_0 \in M$

$$|f(x) - f(x_0)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f_N(x)| + \lim_{n\to\infty}|f_N(x) - f_N(x_0)| + \lim_{n\to\infty}|f_N(x_0) - f_n(x_0)| < 3\epsilon$$

故 $f \in C(M)$
3. 收敛性 $\|f_n - f\|_\infty \to 0$
因 $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$
注:

1. 距离空间 (X, ρ) 中紧集 $M \to T_2$ 紧拓扑空间, 仍有 $C(M)$
2. $C(M)$ 的重要性 $\begin{cases} \text{只要有拓扑结构就有} C(M) \\ \text{可积空间, 可用连续函数} \\ L^\infty \text{经常用} C(M) \text{替代} \\ C(M) \text{典型的可交换的 B 代数} \end{cases}$

$C(M)$ 中函数族 $\mathcal{F} \subset C(M)$ 称有界集:$\|f\|_\infty \le M, \forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow |f(x)| \le M, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in M$(一致有界)

定义 7.2: 等度连续

$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall |x_1 - x_2| < \delta$ 时,$\forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \sup\limits_{y \in U(x_0,\delta)} |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x \in M$

连续 (一个函数一个点)$\Rightarrow$ 一致连续 (一个函数所有点)$\Rightarrow$ 等度连续 (所有函数所有点)

定理 7.2

设 M 为 (X, ρ) 紧集,$\mathcal{F} \in C(M)$ 列紧 (等价于完全有界)$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 一致有界 + 等度连续 (等价于完全有界)

$\Leftarrow, \forall x \in M$
等度连续 $\Rightarrow \forall \epsilon \exists \delta > 0$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}$
M 紧 $\Rightarrow M$ 完全有界 $\Rightarrow M$ 有有穷 δ 网, 记为 $N_m(\delta) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M$
2. 作映射 $T : \mathcal{F} \overset{C(M)}{\to} \mathbb{R}^n, \forall \varphi \in \mathcal{F} \to T\varphi = (\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n))\, |\varphi(x_i)| \le M$
$|T\varphi| = \left(\sum\limits_{r=1}^{n} |\varphi(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M \cdots \sqrt{n}$ 为 $\mathbb{R}$ 中有界 $\to$ 列紧
3. 找有穷 ϵ 网,$\forall \varphi \in \mathcal{F}, \forall x \in M \Rightarrow \{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 为 $\mathcal{F}\epsilon$ 网

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \\
=&|\varphi(x) - \varphi(x_r) + \varphi(x_r) - \varphi_i(x_r) + \varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)| \\
\le&|\varphi(x) - \varphi(x_r)|\,(\text{等度连续}) + |\varphi(x_r) - \varphi_i(x_r)|\,(= |(T\varphi)_r - (T\varphi_i)_r| < |T\varphi - T\varphi_i|) + |\varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)|\,(\text{等度连续}) \\
\le&\epsilon
\end{aligned}$$

8 线性算子与线性泛函

引: 数分 $C(\mathbb{R}^*) f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 高代:$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x\to Ax$
求导:$C^1(M)\to C(M)$
求积分:$C(M)\to C^1(M)$

定义 8.1

设 X, Y 为两个线性空间 D 为 X 的线性子空间

$$T: D\subset X\to Y\text{称线性的}$$
$$\alpha x+\beta y\in D\to T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

特别的,$Y=K$, 则称 T 为线性泛函

$$\text{有界连续线性算子}\begin{cases}\text{可逆性: 开映射, 正则算子, 闭值域算子}\\ \text{泛函:}T^*\text{共轭算子}\\ \text{收敛性: 紧算子,Fredlom 算子}\\ \text{内积性: 对称算子, 自伴算子, 正常算子}\end{cases}$$