ต้นไม้เอวีแอล

(AVL Tree)

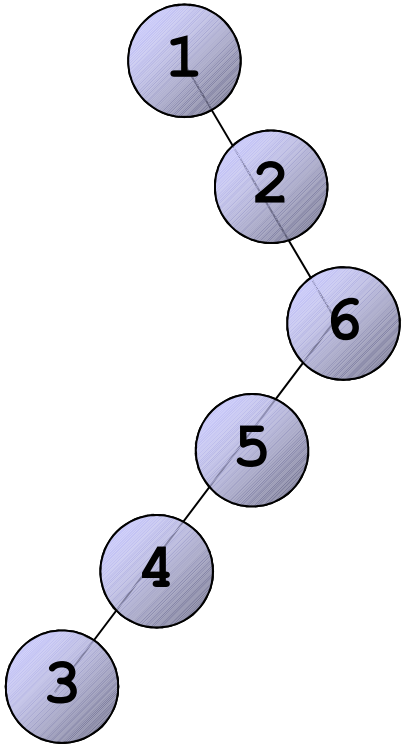
สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล

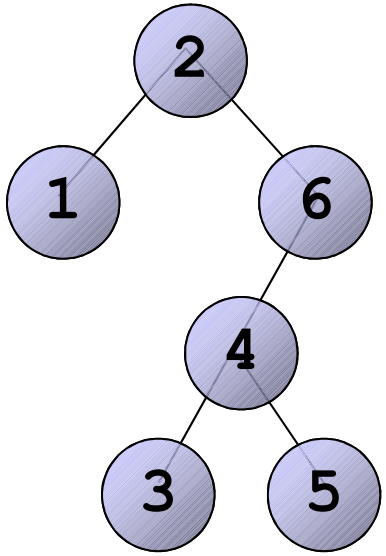
หัวข้อ

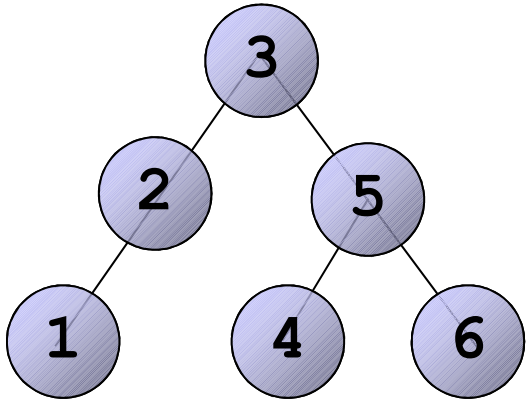
- นิยามต้นไม้เอวีแอล
- การวิเคราะห์ความสูงของต้นไม้เอวีแอล
- การปรับต้นไม้เอวีแอลให้สูงสมดุล
- กระบวนการหมุนปม

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค

- เวลาการทำงานเป็น $O(h)$
- $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h \leq n-1$
- โชคดีทำงานเร็ว $O(\log n)$, โชคร้ายทำงานช้า $O(n)$

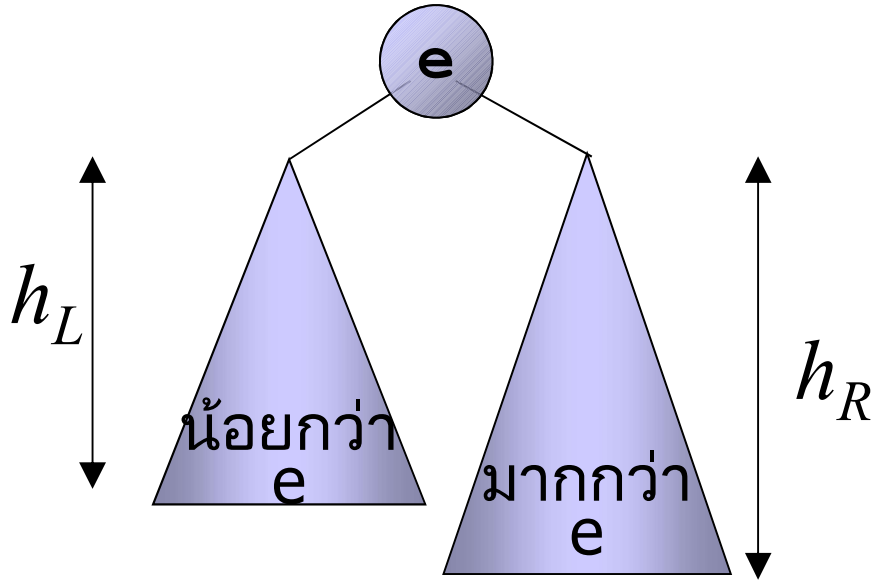






ต้นไม้เอวีแอล

- AVL = Binary Search Tress + กฎความสูงสมดุล

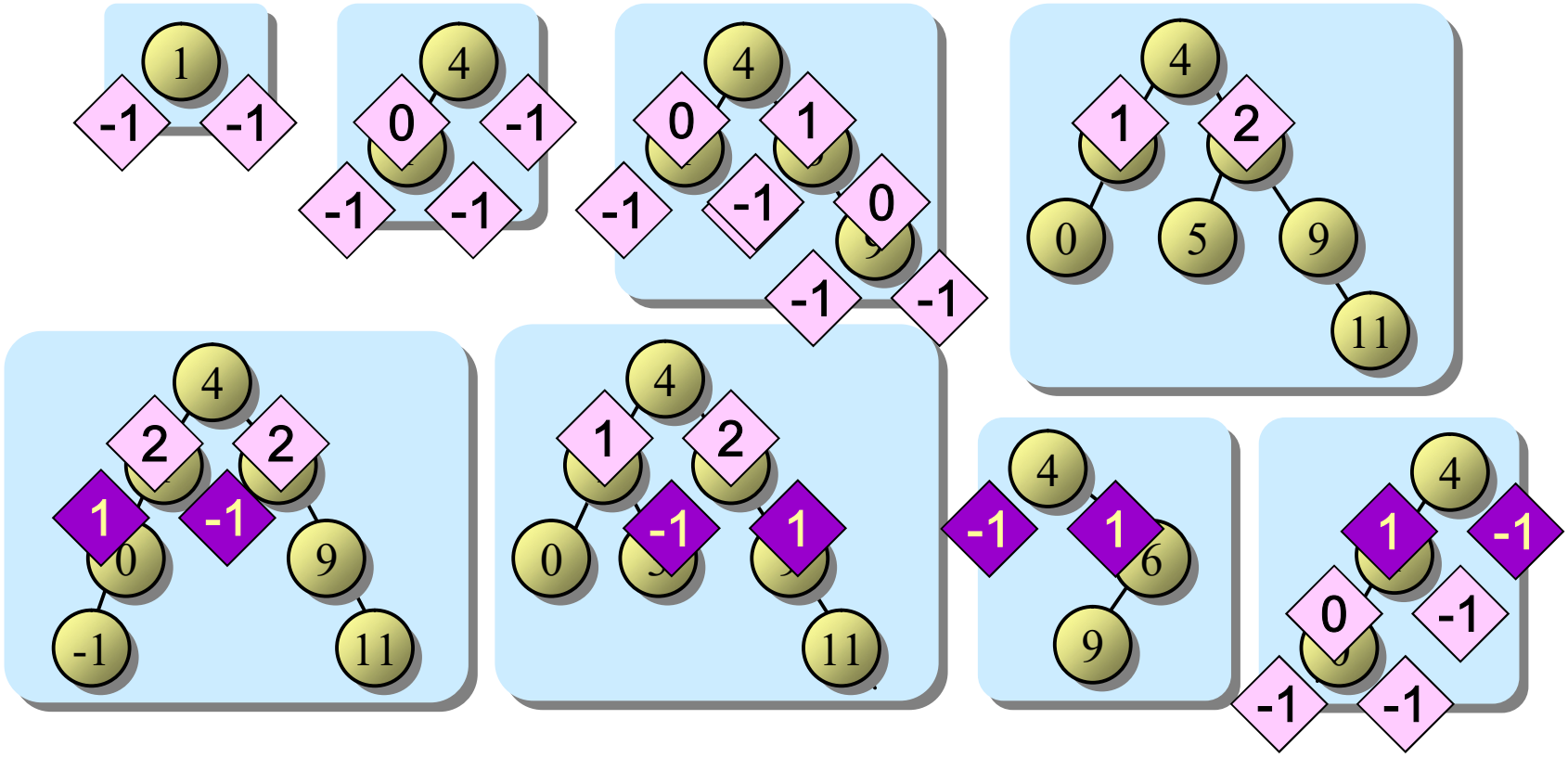


$$\left|h_L - h_R\right| \leq 1$$

ต้นไม้ย่อยทุกต้นต้องเป็นไปตามกฎ

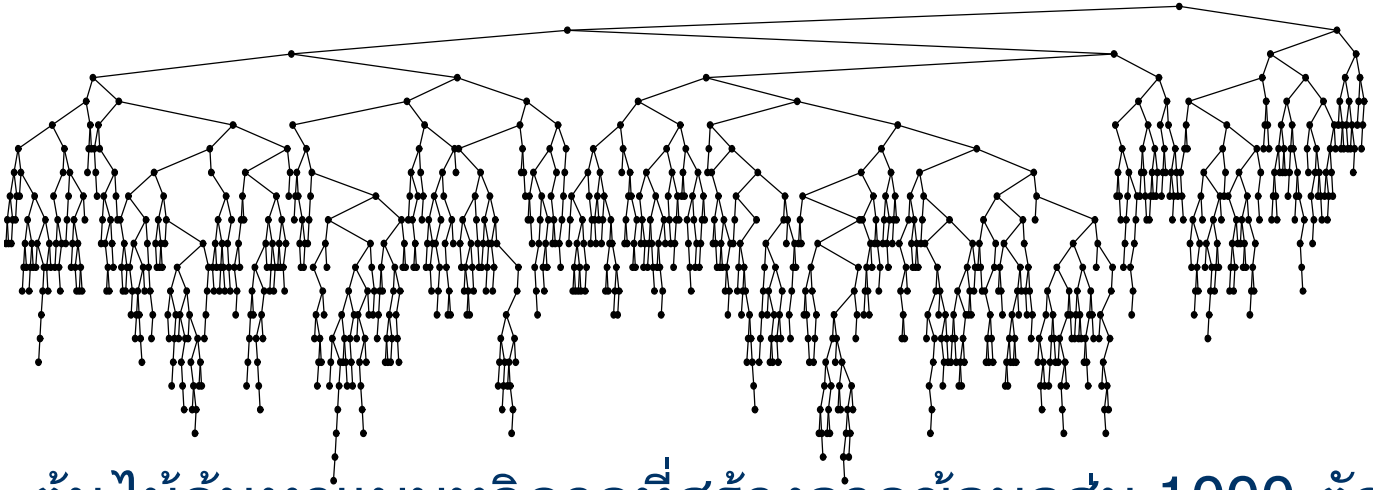
AVL : Adelson-Velskii and Landis

ตัวอย่างต้นไม้เอวีแอล

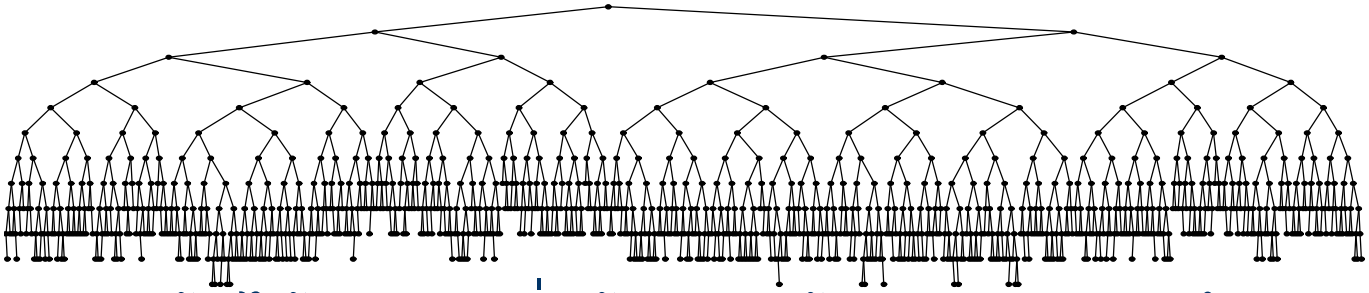


ต้นไม้ว่าง (null) สูง -1

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคกับเอวีแอล



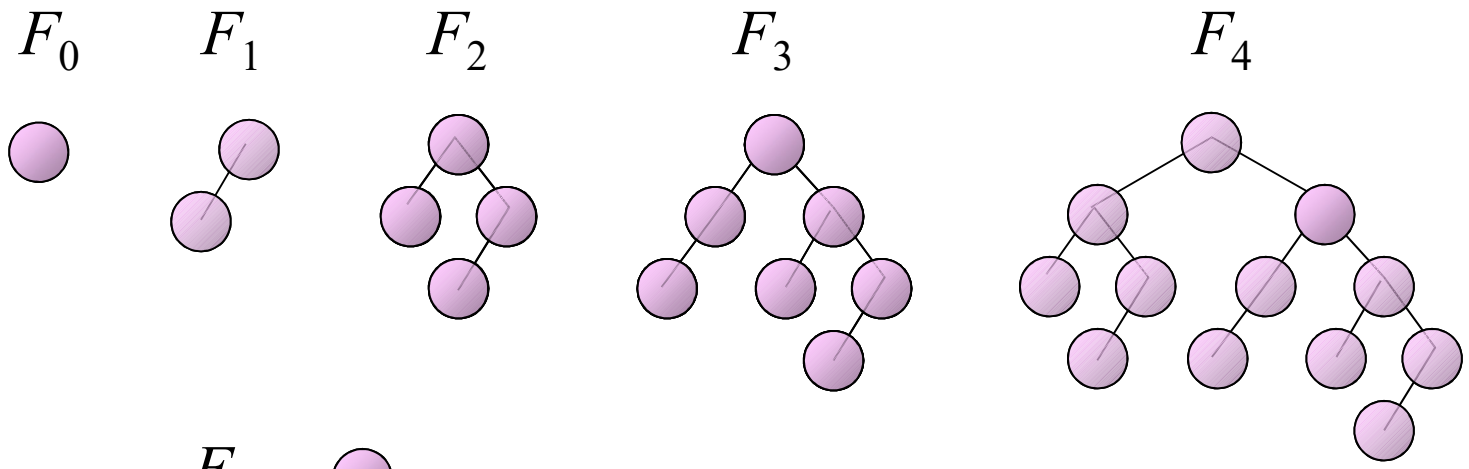
ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคที่สร้างจากข้อมูลสุ่ม 1000 ตัว

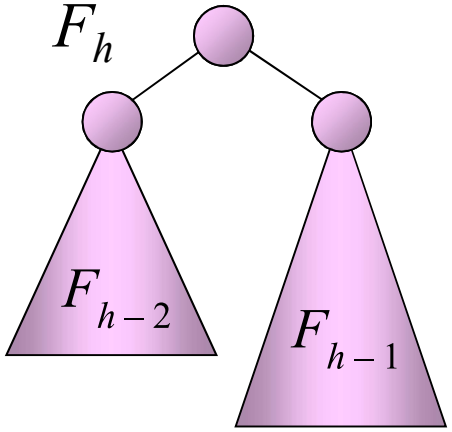


ต้นไม้เอวีแอลที่สร้างจากข้อมูลสุ่ม 1000 ตัว

ต้นไม้เอวีแอลสูงเท่าใด ?

- ให้ F_h คือต้นไม้เอวีแอลซึ่งสูง h ที่มีจำนวนปมน้อยสุด





$$|F_h| = 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}|$$

Fibonacci Tree

ความสูงของต้นไม้ฟิโบนักชี

$$|F_h| = 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}|$$

$$n_h = 1 + n_{h-1} + n_{h-2} \quad h \geq 2,\ n_0 = 1, n_1 = 2$$

$$n_h = \alpha_1 \phi^h + \alpha_2 \hat{\phi}^h - 1,\ \phi = 1.618..., \hat{\phi} = -0.618$$

$$n_h \approx \alpha_1 \phi^h$$

$$h \approx \frac{1}{\log_2 \phi}(\log_2 n_h)$$

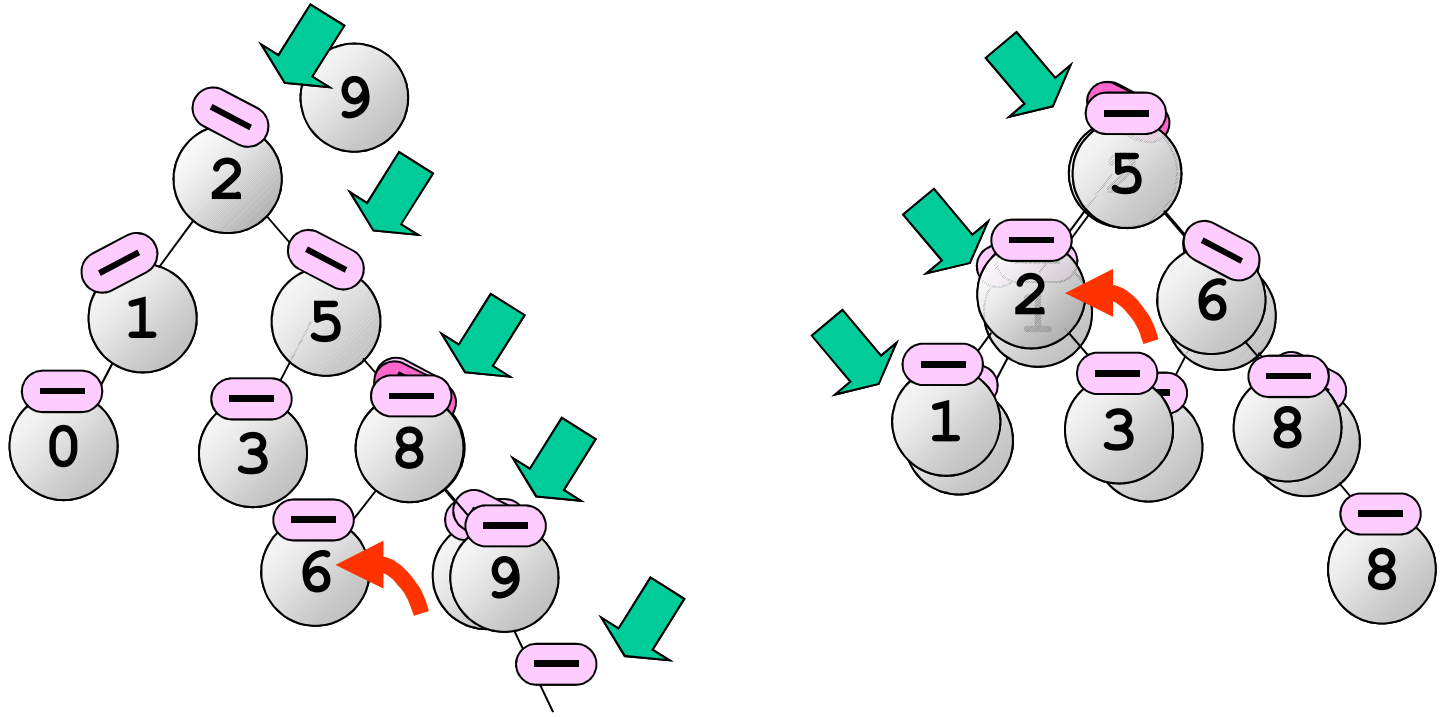
$$h \approx 1.44(\log_2 n_h)$$

สรุป :
ต้นไม้เอวีแอลที่มี n ปม
สูงไม่เกิน 1.44 $\log_2 n$

$$\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h_{AVL} \leq 1.44 \log_2 n$$

ทำอย่างไรให้เป็นไปตามกฎของ AVL

- การเพิ่ม/ลบข้อมูลทำเหมือน BSTree
- แต่หลังการเพิ่ม/ลบ อาจทำให้ผิดกฎสูงสมดุล
- ถ้าผิดกฎ ต้องปรับต้นไม้



map_avl

```
template <typename KeyT,
          typename MappedT,
          typename CompareT = std::less<KeyT> >
class map_avl {
protected:

  class node {
    friend class map_bst;
    ...
  };

  class tree_iterator {
    ...
  };

public:
  ...

};
```

เหมือน map_bst

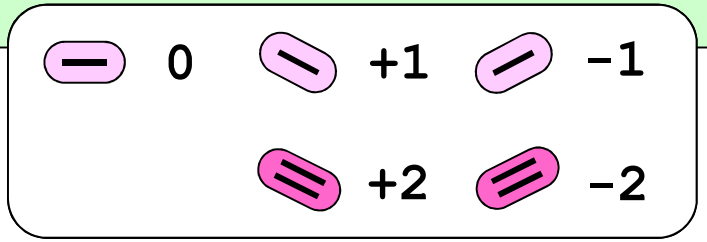
node

```
class node {
  friend class map_avl;
  protected:
    ValueT data;
    node  *left;
    node  *right;
    node  *parent;
    int    height;

    node() :
     data( ValueT() ), left( NULL ), right( NULL ),
     parent( NULL ), height(0) { }

    node(const ValueT& data, node* left,
         node* right, node* parent) : data(data),
         left(left), right(right), parent(parent) {
      set_height();
    }
```

แต่ละปมมีความสูงกำกับ

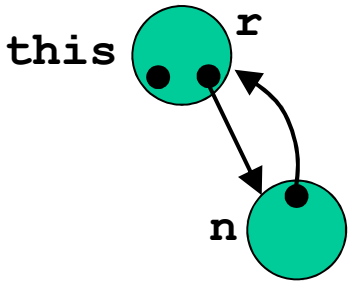
node

```
class node {
  friend class map_avl;
  protected:
    ...
    int get_height(node *n) { // ไม่ OO ?
      return (n == NULL ? -1 : n->height);
    }
    void set_height() {
      int hL = get_height(this->left);
      int hR = get_height(this->right);
      height = 1 + (hL > hR ? hL : hR);
    }
    int balance_value() {
      return get_height(this->right) -
             get_height(this->left);
    }
```

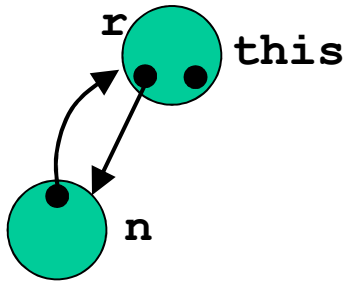


node

```
class node {
  friend class map_avl;
  protected:
    ...
    void set_left(node *n) {
      this->left = n;
      if (n != NULL) this->left->parent = this;
    }
    void set_right(node *n) {
      this->right = n;
      if (n != NULL) this->right->parent = this;
    }
};
```



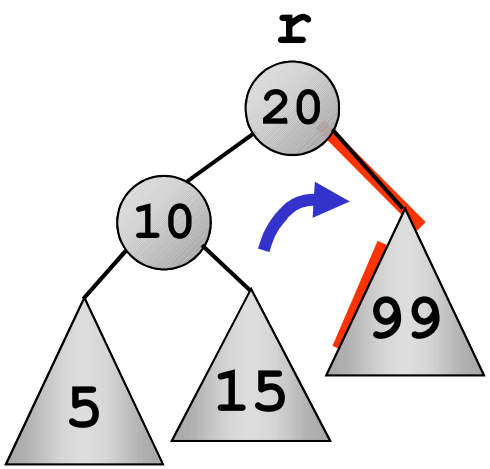
r->set_right(n);



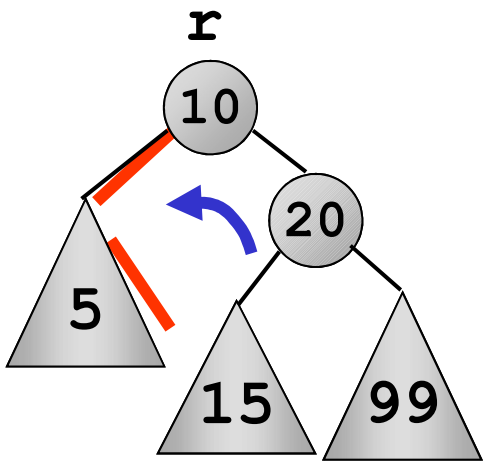
r->set_left(n);

การหมุนปม

- การปรับต้นไม้อาศัยการหมุน (rotation)
- การหมุนปมยังคงรักษาความเป็นต้นไม้ค้นหา



`rotate_left_child(r)`

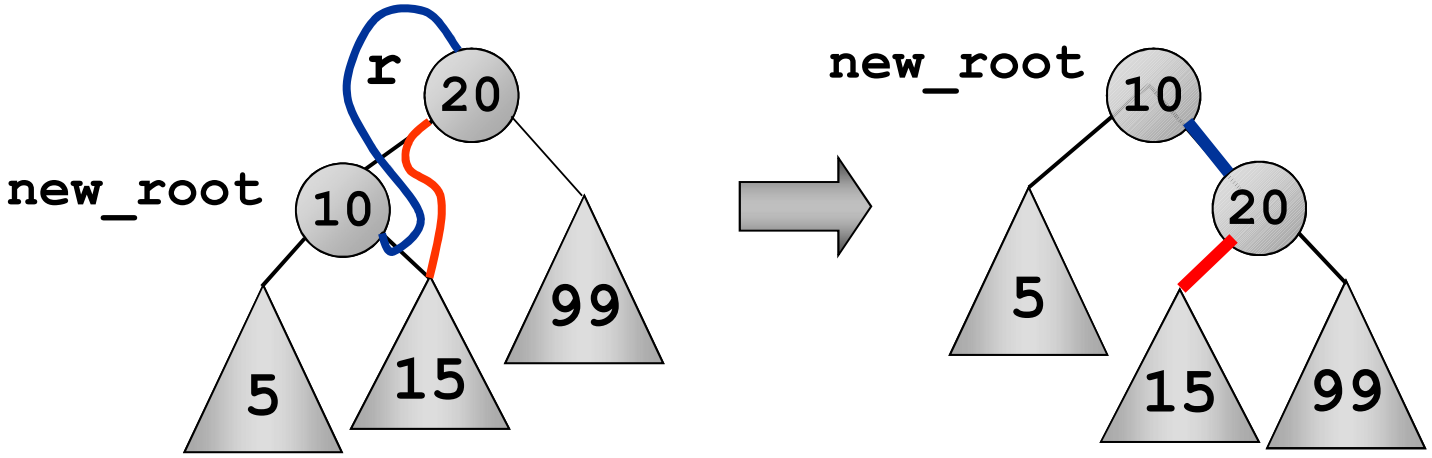


`rotate_right_child(r)`

rotate_left_child(r)

```
node *rotate_left_child(node *r) {
  node *new_root = r->left;
  r->set_left(new_root->right);
  new_root->set_right(r);

  new_root->right->set_height();
  new_root->set_height();
  return new_root;
}
```

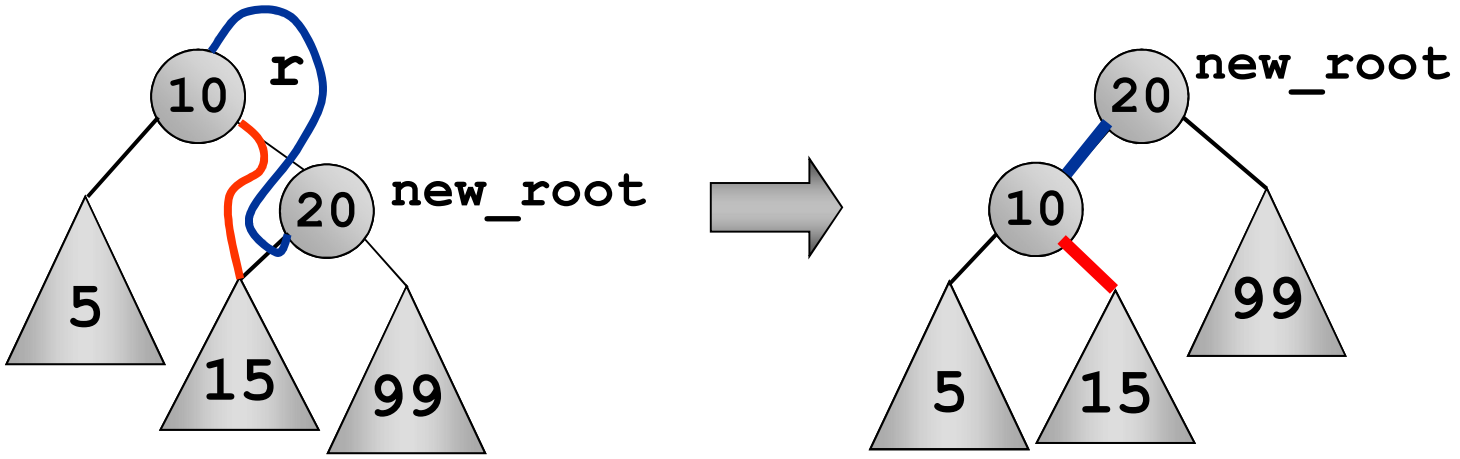
$\Theta(1)$



rotate_right_child(r)

```
node *rotate_right_child(node * r) {
  node * new_root = r->right;
  r->set_right(new_root->left);
  new_root->set_left(r);

  new_root->left->set_height();
  new_root->set_height();
  return new_root;
}
```

$\Theta(1)$



insert และ erase ใช้ rebalance

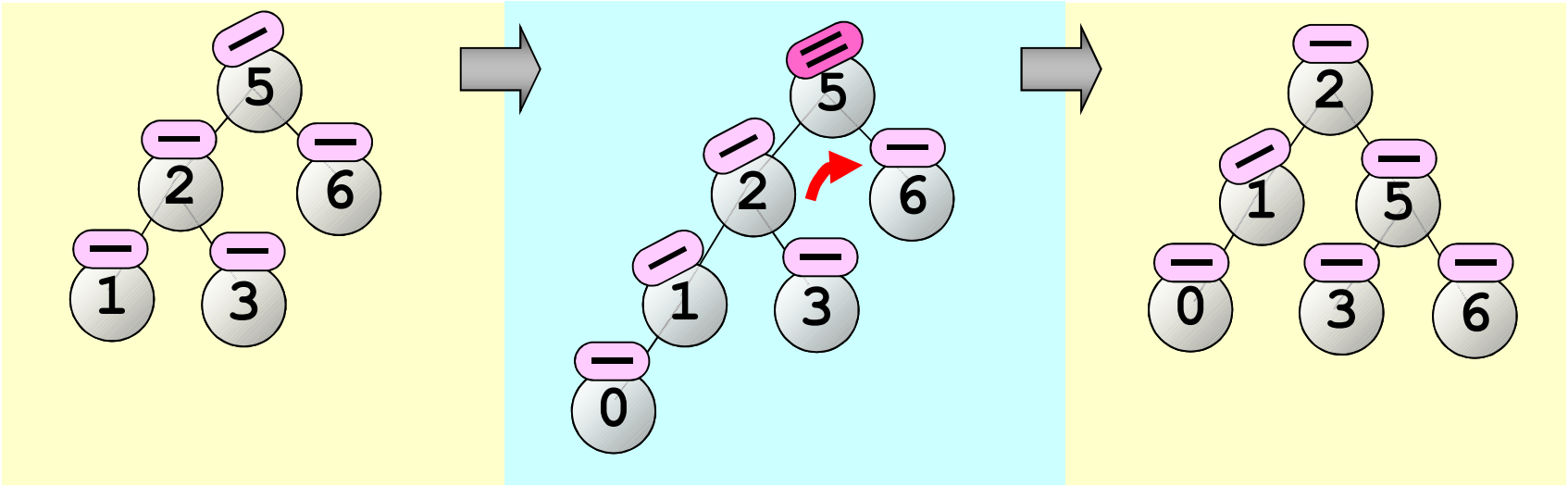
```
node* insert(const ValueT& val, node *r, node * &ptr) {
    ... // same as insert in map_bst

    r = rebalance(r);
    return r;
}

node *erase(const KeyT &key, node *r) {
    ... // same as erase in map_bst

    r = rebalance(r);
    return r;
}
```

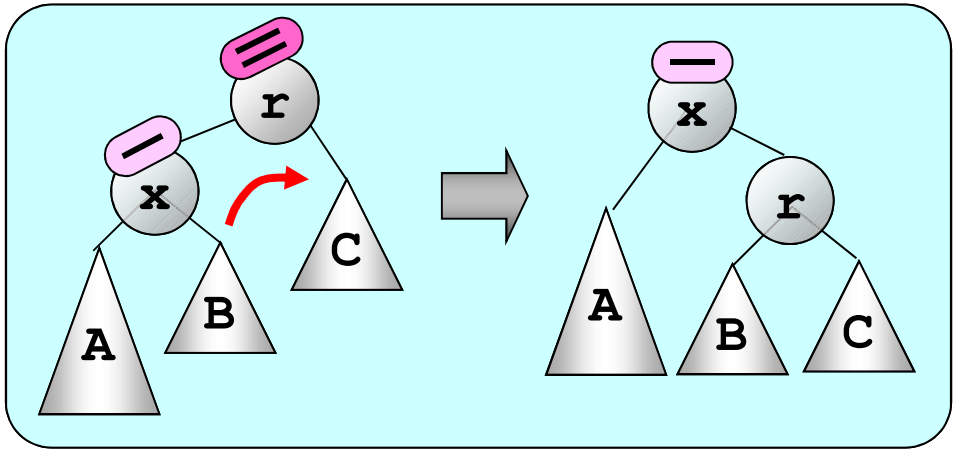
เพิ่มตามปกติ แล้วค่อยปรับ

ลบตามปกติ แล้วค่อยปรับ

rebalance มี 4 กรณี

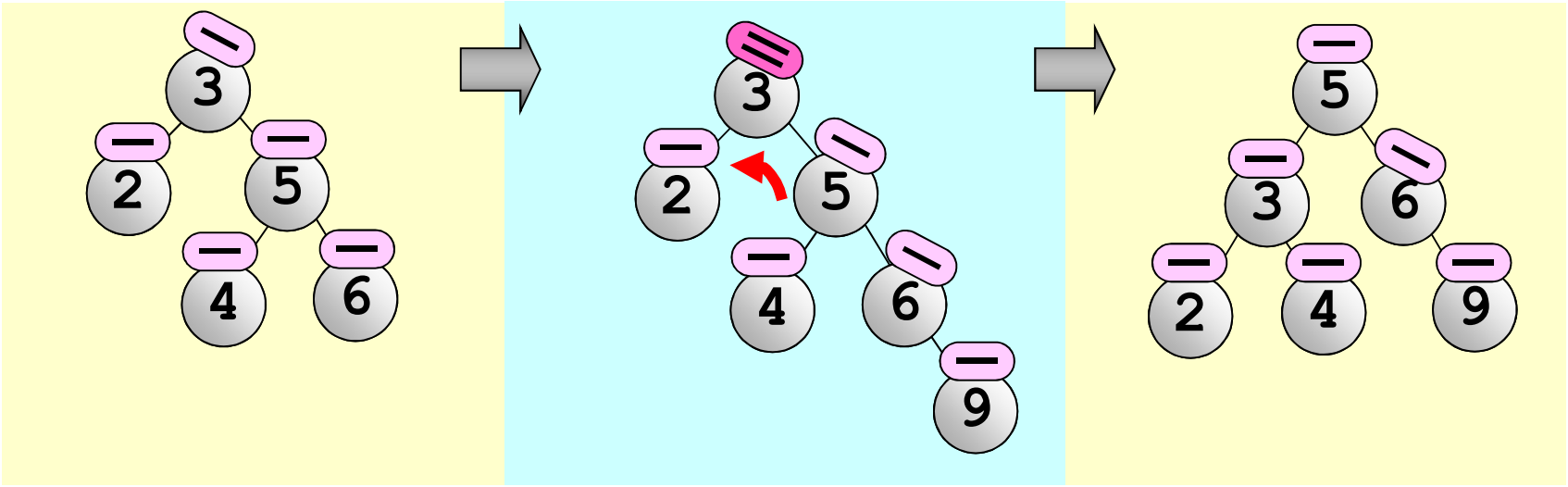
rebalance : กรณีที่ 1

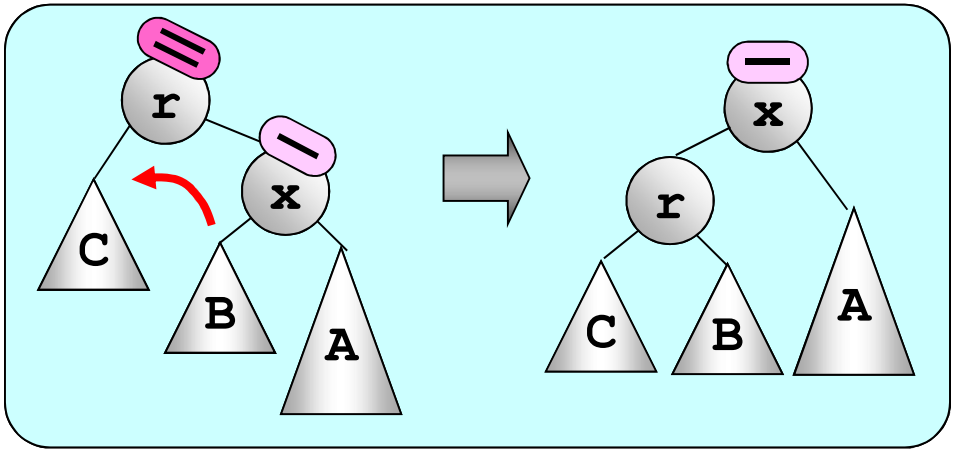




`rotate_left_child(r)`

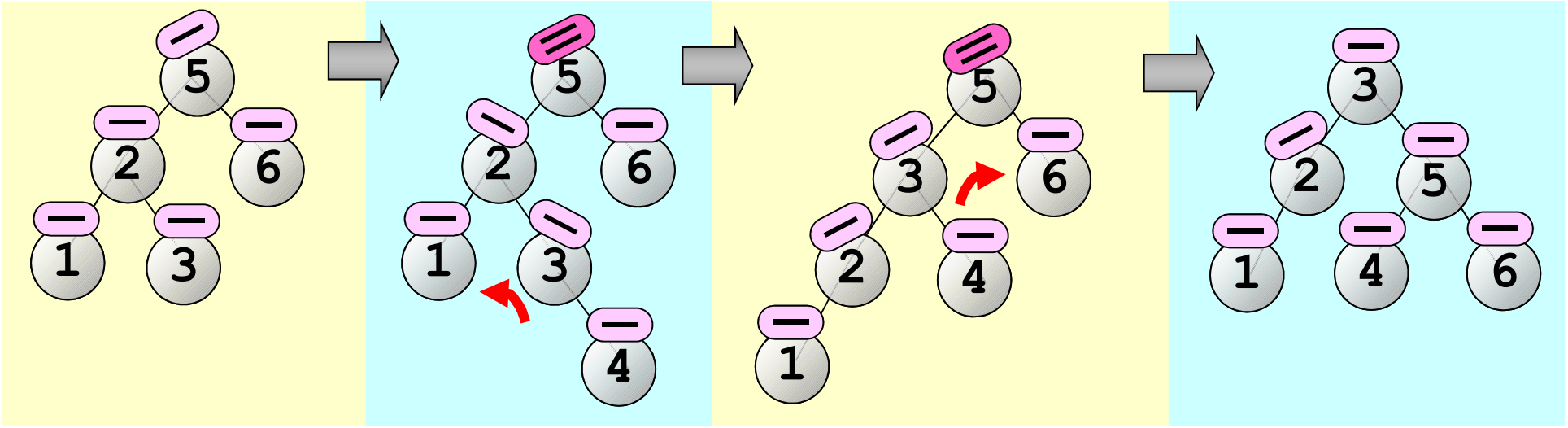
rebalance : กรณีที่ 2

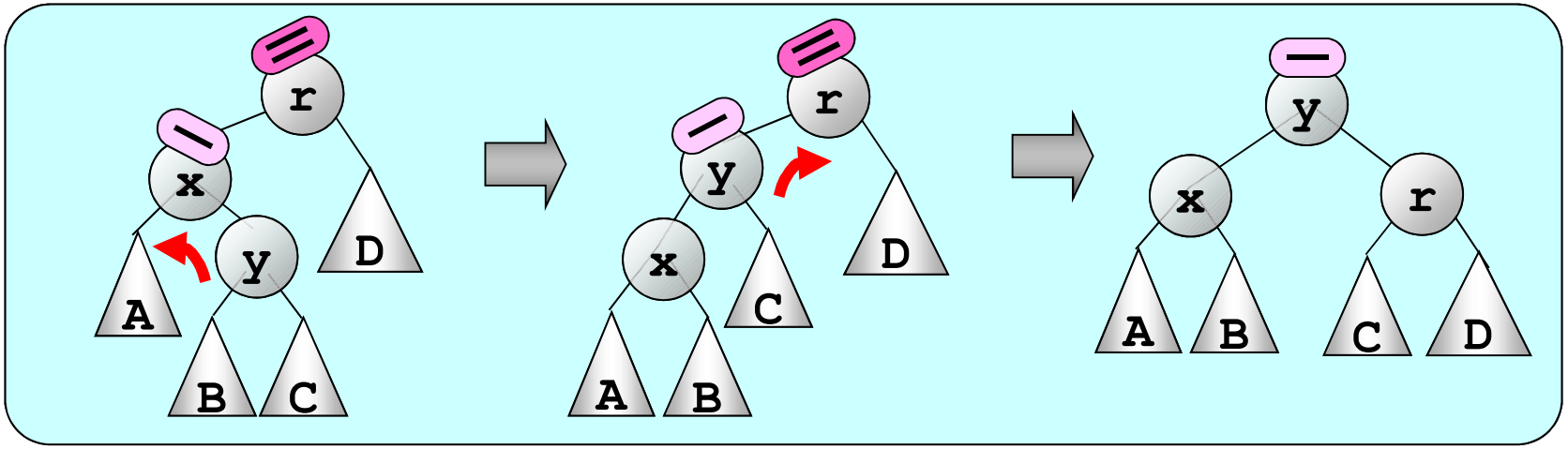




`rotate_right_child(r)`

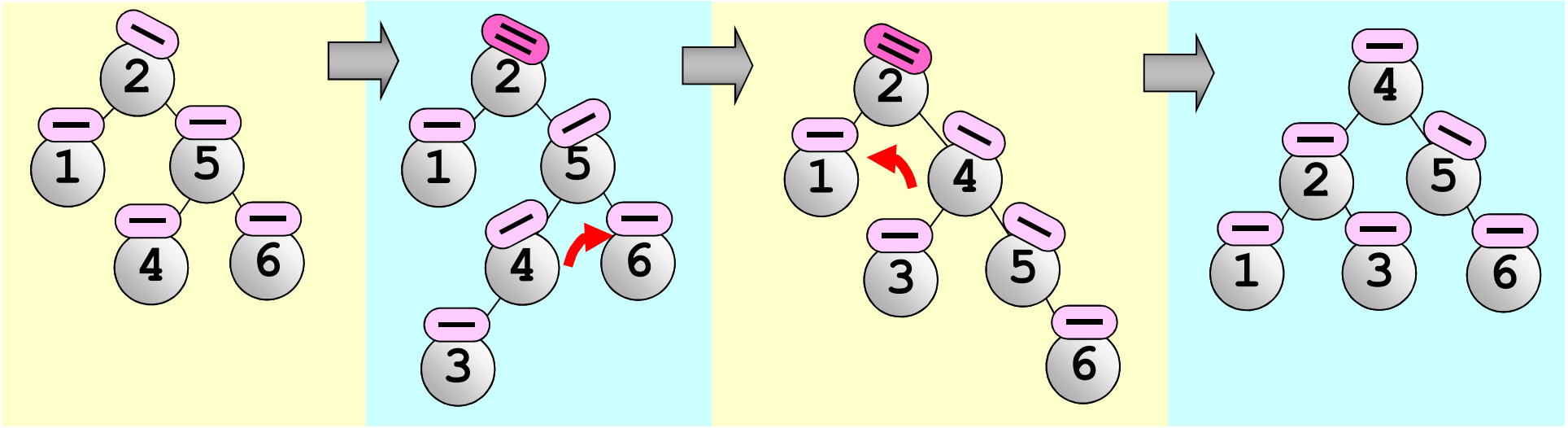
rebalance : กรณีที่ 3

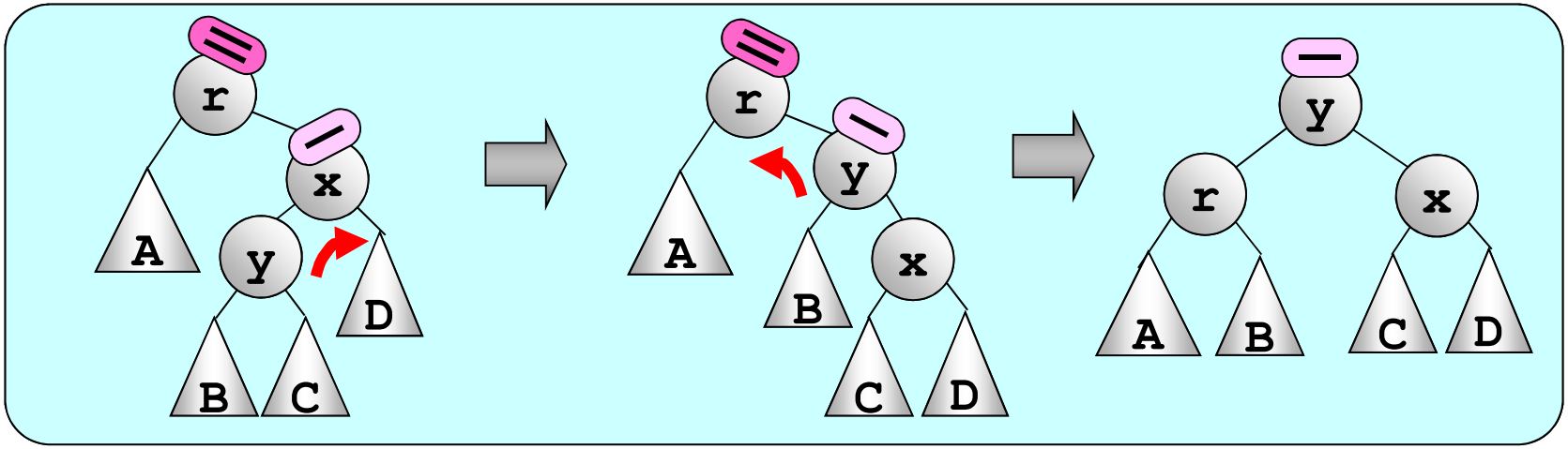




`rotate_right_child(r->left)` `rotate_left_child(r)`

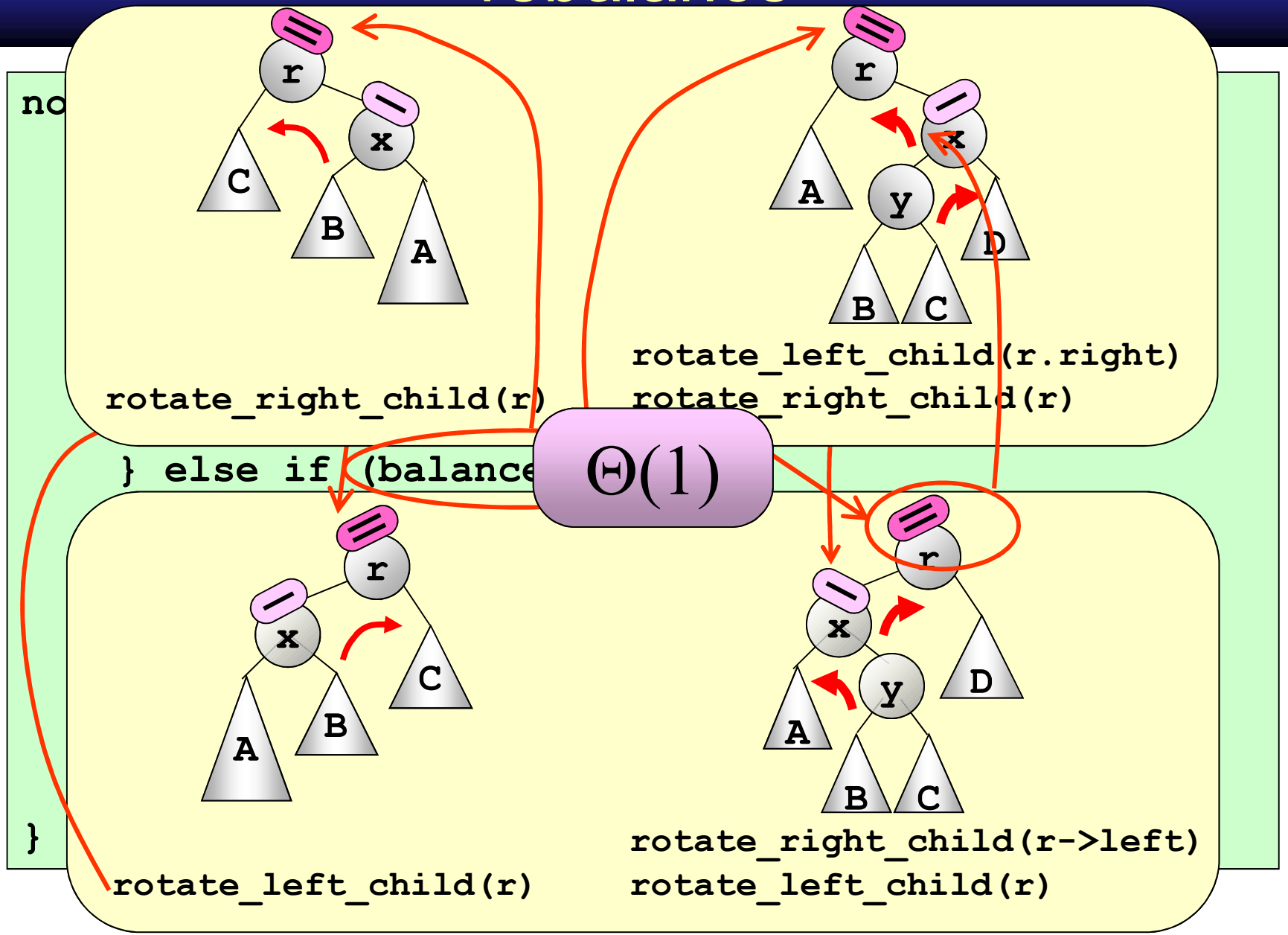
rebalance : กรณีที่ 4





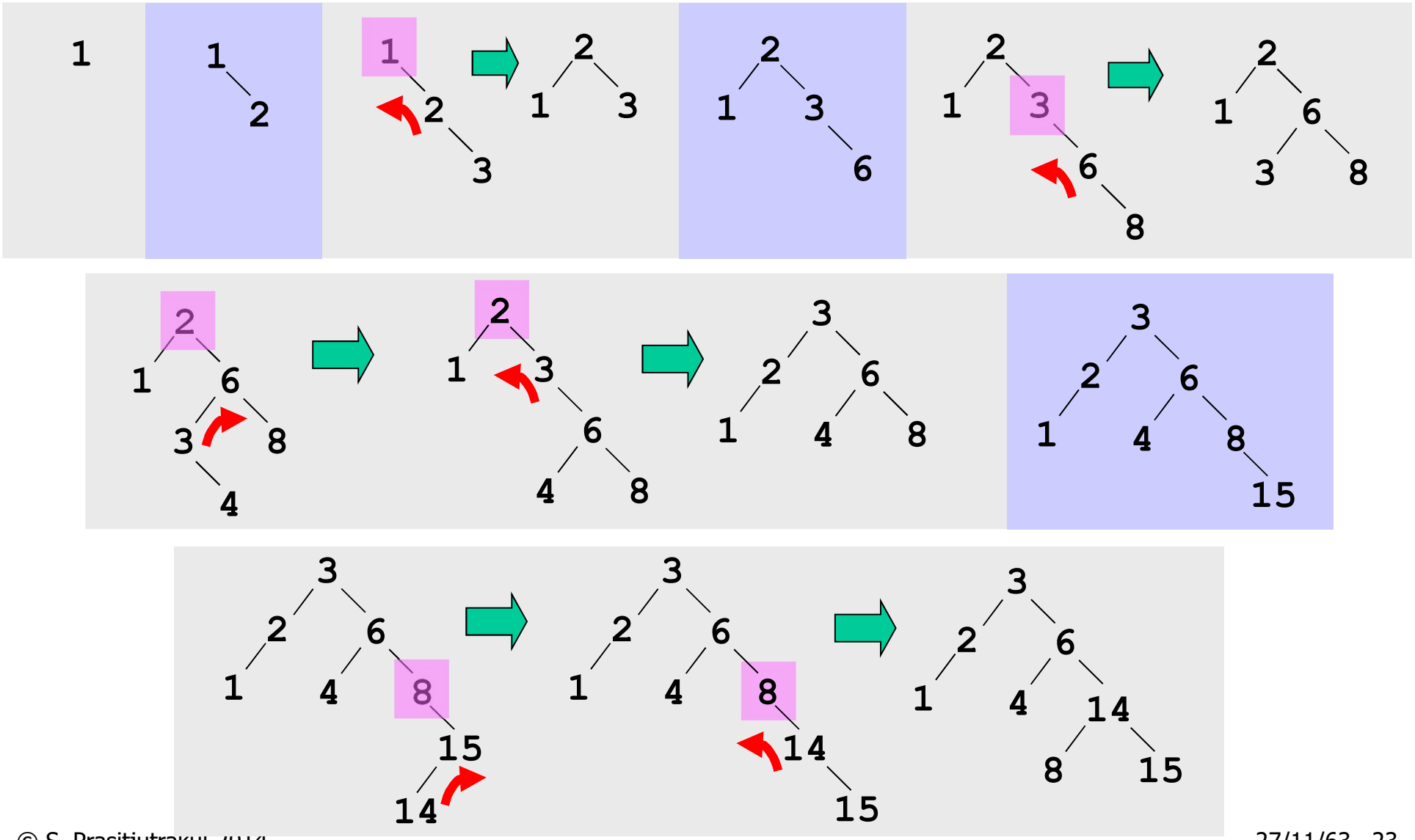
`rotate_left_child(r->right)` `rotate_right_child(r)`

rebalance


no
r
x
C
B
A
rotate_right_child(r)
r
x
A
y
D
B
C
rotate_left_child(r.right)
rotate_right_child(r)
Θ(1)
} else if (balance
r
x
C
A
B
rotate_left_child(r)
}
r
x
y
D
A
B
C
rotate_right_child(r->left)
rotate_left_child(r)

ตัวอย่าง

1, 2, 3, 6, 8, 4, 15, 14



สรุป

- ต้นไม้เอวีแอลคือต้นไม้ค้นหาที่ถูกควบคุมความสูง
- ผลต่างความสูงของลูกสองข้างห้ามเกินหนึ่ง
- พิสูจน์ได้ว่า $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h < 1.44 \log_2 n$
- แต่ละปมเก็บความสูงไว้ตรวจสอบ
- ถ้าหลังเพิ่ม/ลบข้อมูลแล้วผิดกฎ, ให้ปรับต้นไม้
- การปรับต้นไม้อาศัยการหมุนปม
- เวลาการทำงานของการเพิ่ม ลบ และค้นเป็น $O(\log n)$

ความสูงของต้นไม้ AVL

```
class node {
  friend class map_avl;
  protected:
    ValueT data;
    node  *left;
    node  *right;
    node  *parent;
    int    height;
```

```
class node {
  friend class map_avl;
  protected:
    ValueT data;
    node  *left;
    node  *right;
    node  *parent;
    unsigned char  height;
```