全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

唐渊 (XuanYuan)

2018 年 10 月 21 日

目录

1 第九届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、填空题（总分 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$，则 $f(x)=$ $\underline{\quad\sin x+\cos x\quad}$ 。

Solution: Set $x=0$, we obtain $f(0)=1$. Take the derivative of the equation, $f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1$, $f'(x)+\tan x\cdot f(x)=\sec x$, which is non-homogeneous linear differential equation. $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln\cos x$, $f(x)=e^{-(-\ln\cos x)}\left(\int e^{-\ln\cos x}\sec x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\sec^2 x\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{d}x=\cos x\tan x+C\cos x=\sin x+C\cos x$. Since $f(0)=1$, we obtain $C=1$. Thus $f(x)=\sin x+\cos x$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ $\underline{\qquad 1\qquad}$ 。

Solution: We use the periodicity of the sine function. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy$，$v=x+cy$，其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$ $\underline{\quad 4f_{12}\quad}$ 。

Solution: $w_x=f_1+f_2$, $w_y=f_1\cdot(-c)+f_2\cdot c$, $w_{xx}=f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}$, $w_{yy}=f_{11}\cdot(-c)(-c)+f_{12}\cdot(-c)c+f_{21}\cdot c(-c)+f_{22}\cdot c^2=c^2(f_{11}+f_{22}-f_{12}-f_{21})$. Since f has second order continuous partial derivatives, we obtain $f_{12}=f_{21}$. Thus $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=2f_{12}-(-2f_{12})=4f_{12}$.

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ $\underline{\qquad 3\qquad}$ 。

Solution: Set $f(x)=3x^2$, $f(x)$ satisfies $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$. By substitution, we obtain $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x}{x^4}=3.$

5. 不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C\quad}$ 。

Solution: $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2e^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x\overset{u=\sin x}{=\!=\!=}\int\frac{2e^{-u}u}{(1-u)^2}\mathrm{d}u=-2\int e^{-u}\frac{1-u-1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u=$

$$2\int e^{-u}\left(-\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)\mathrm{d}u=2\int\left(\frac{e^{-u}}{1-u}\right)'\mathrm{d}u=\frac{2e^{-u}}{1-u}+C\overset{u=\sin x}{=\!=\!=}\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C.$$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V，则三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __2π__ 。

Solution: Since the curve is circular cone surface, we use spherical coordinate to solve this first kind volume integration. First we find the intersection of the two curve. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-z^2}$, $z^2=2$, $z=\sqrt{2}(z\geqslant 0)$, $\varphi_{\max}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, then we can write down the parameters' range: $\rho\in[0,2]$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\theta\in[0,2\pi]$. Thus the integration

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=2\pi\frac{2^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi\overset{\gamma=2\varphi}{=\!=\!=}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\gamma\mathrm{d}\gamma=2\pi.$$

二、（本题满分 14 分）

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数,对任何角度 α ,定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$. 若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

Solution: $g'_\alpha(0)=\cos\alpha f_x(0,0)+\sin\alpha f_y(0,0)=(\cos\alpha\ \ \sin\alpha)\begin{pmatrix}f_x(0,0)\\f_y(0,0)\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\begin{pmatrix}f_x(0,0)\\f_y(0,0)\end{pmatrix}=\vec{0}\Longrightarrow$ $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Thus $f(0,0)$ is the standing point of $f(x,y)$.

$g''_\alpha(0)=\cos^2\alpha f_{xx}(0,0)+2\sin\alpha\cos\alpha f_{xy}(0,0)+\sin^2\alpha f_{yy}(0,0)=(\cos\alpha\ \ \sin\alpha)\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}>0\Longrightarrow\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{bmatrix}$ is a positive definite matrix $\Longrightarrow f(0,0)$ is the minimum value of $f(x,y)$.

三、（本题满分 14 分）

设曲线 Γ 为在 $x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$，上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

Solution: $x=1-z$, $(1-z)^2+y^2+z^2=1$, $2z^2-2z+y^2=0$, $2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2},4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+$

$2y^2 = 1$, which is the equation of ellipse. Thus we can let $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$ and $x = 1 - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta$, θ from $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$. Then $I = \int_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\theta + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\theta + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\frac{1}{2}\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{1}{2}$.

四、（本题满分 15 分）

设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$，证明：

$$\forall a, b\ (a < b), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}.$$

Solution: Remove the absolute value symbol. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} e^{-t+x} f(x)\mathrm{d}x + \int_{t}^{+\infty} e^{-x+t} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{x} f(x)\mathrm{d}x + e^{t}\int_{t}^{+\infty} e^{-x} f(x)\mathrm{d}x$. Let $g(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{x} f(x)\mathrm{d}x$, $h(t) = e^{t}\int_{t}^{+\infty} e^{-x} f(x)\mathrm{d}x$, then $0 < g(t)+h(t) \leqslant 1$. $g'(t) = -g(t)+f(t)$, $h'(t) = h(t) - f(t) \Longrightarrow f(x) = \frac{g'(x)-h'(x)+g(x)+h(x)}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{g'(x)-h'(x)}{2} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{g(b)-g(a)+h(a)-h(b)}{2} \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{g(a)+h(a)+g(b)+h(b)}{2} \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{1+1}{2} = \frac{b-a+2}{2}$.

五、（本题满分 15 分）

设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = \lambda$，其中 λ 为常数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

Solution: Consider p different subsets $\{a_{np+i}\}$ of $\{a_n\}$, let $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$, $i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$.

Then $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)} = \lambda$. By average value theorem of limit, we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k^{(i)} \xlongequal{\text{telescoping sum}} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} \xlongequal{a_{p+i}\text{ is a fixed number}} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda.$$

Thus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$. Then p different subsets of $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ converge to the same value $\frac{\lambda}{p}$, which indicates that $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ also converges to $\frac{\lambda}{p}$. That is, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.

2 第八届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、填空题（满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$ $\underline{\quad \exp\left\{\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right\} \quad}$。

Solution: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{n\cdot\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right]\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{n\cdot\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right]\right\}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\dfrac{1}{f(a)}\cdot\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\right]\right\}=\exp\left\{\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right\}$.

2. 若 $f(1)=0,f'(1)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=$ $\underline{\quad \dfrac{3}{2}f'(1) \quad}$。

Solution: $f(t)-f(1)=f'(\xi)(t-1),\xi\to 1$ as $t\to 1$. Thus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=\lim_{x\to 0,\xi\to 1}f'(\xi)\frac{3(x^2-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}f'(1).$$

3. 若 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$。记 $z=f(e^x y^2)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，则 $f(x)$ 在 $x>0$ 范围内的表达式为 $\underline{\quad 2x \quad}$。

Solution: $\dfrac{\partial z}{z}=\partial x,\ \ln z=x+C(y),\ z=C(y)e^x,\ f(1)=2\Longrightarrow z=2y^2e^x,\ f(x)=2x.$

4. 设 $f(x)=e^x\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)=$ $\underline{\quad -24 \quad}$。

Solution: Use Taylor series. $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\right)\cdot\left(2x-\dfrac{(2x)^3}{6}\right)$. The coefficient of x^4 is $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}=-1=\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}$, thus $f^{(4)}(0)=-24$.

5. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程 $\underline{\quad 2x+2y-z-3=0 \quad}$。

Solution: $(x,2y,-1)//(2,2,-1),\ x=2,\ y=1,\ z=3\Longrightarrow 2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$. That is $2x+2y-z-3=0$.

二、（本题满分 14 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1),0<f'(x)<1$。试证：当 $a\in(0,1)$，

$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

Solution: $F(a)=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x,\ F'(a)=2f(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^3(a)=f(a)\left[2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^2(a)\right]$. $G(a)=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^2(a),\ G'(a)=2f(a)-2f(a)f'(a)=2f(a)(1-f'(a))>0$. Then $G(a)>G(0)=0,\ F'(a)=f(a)G(a)>0, F(a)>F(0)=0$. Thus $\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$.

三、（本题满分 14 分）

某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量

$$M=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Solution: Perform coordinate transformation. $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$. Let $u=x-\frac{1}{2},\ v=y-\frac{1}{2}, w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$. $\Omega': u^2+v^2+w^2\leqslant 1,\ J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Thus

$$\begin{aligned}
M&=\iiint_{\Omega'}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\iiint_{\Omega'}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}+\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{6}\iiint_{\Omega'}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{4\pi}{5}\\
&=\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.
\end{aligned}$$

四、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$。证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

Solution: Let $x_k=\frac{k}{n}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]&=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=0}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]\mathrm{d}x\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=0}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}\mathrm{d}x\int_{x_k}^{x}f'(y)\mathrm{d}y\right]
\end{aligned}$$

五、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$。证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，

使得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

Solution:

六、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$。用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

Solution:

3 第七届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、填空题（总分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ ________。

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$。则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。（本小题结果要求不显含 F 及其偏导数）

3. 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ________。

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}3,x\in[-5,0)\\0,x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值为 ________。

5. 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\mathrm{d}t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达形式为 ________。

二、（本题满分 12 分）

设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

三、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β ，使得对于 $\forall x\in(a,b), f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

四、（本题满分 14 分）

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数。

五、（本题满分 16 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$。试证：

（1）$\exists\, x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$，

（2）$\exists\, x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$。

六、（本题满分 16 分）

设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$。若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

4 第六届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、填空题（总分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1. 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是________________。

2. 设有曲面 $S : z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi : 2x + 2y + z = 0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是________________。

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ________________。

4. 设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ________________。

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ ________________。

二、（本题满分 12 分）

设 n 为正整数, 计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| \mathrm{d}x.$

三、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数，且有正的常数 A, B 使得 $|f(x)| \leqslant A, |f''(x)| \leqslant B$。证明：对任意 $x \in [0, 1]$，有 $|f'(x)| \leqslant 2A + \frac{B}{2}$.

四、（本题满分 14 分）

（1）设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\dfrac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$。

（2）设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截得的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

五、（本题满分 15 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

六、（本题满分 15 分）

设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$。

5 第五届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、解答下列各题（总分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$。

2. 证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的。

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

4. 过曲线 $y\ \sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$，求点 A 的坐标。

二、（本题满分 12 分）

计算定积分 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

三、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$。证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

四、（本题满分 10 分）

设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$，证明：$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{m}$.

五、（本题满分 14 分）

设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求出该最小值。

六、（本题满分 14 分）

设 $I_a(r) = \displaystyle\int_C \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

七、（本题满分 14 分）

判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。

6 第四届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、解答下列各题，写出重要步骤（总分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 求通过直线 $L:\left\{\begin{array}{l}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{array}\right.$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)\,e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

4. 设函数 $u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且 $\displaystyle\int_L(x+2y)u\mathrm{d}x+\left(x+u^3\right)u\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

二、（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

三、（本题满分 10 分）

求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0.001.

四、（本题满分 12 分）

设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴的截距。

五、（本题满分 12 分）

求最小实数 C ，使得对满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续的函数 $f(x)$，都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant C.$

六、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 所围起来的部分. 定义三重积分 $F(t) = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$, 求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

七、（本题满分 14 分）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，证明：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) < 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

7　第三届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、解答下列各题，写出重要步骤（总分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

3. 求 $\displaystyle\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

4. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

二、（本题满分 16 分）

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

（2）如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

三、（本题满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

四、（本题满分 15 分）

在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，其线密度为 ρ 。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力。

五、（本题满分 15 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，其中 F 具有连续的二阶偏导数，且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 和 $x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

六、（本题满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2\ y^2\ z^2=1$。记第一型曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$。求证: $I=2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot u\right)\mathrm{d}u.$

8 第二届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、计算下列各题，写出重要步骤（总分 25 分，共 5 小题，每小题 5 分）

1. 设 $x_n = (1+a)\cdot(1+a^2)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

3. 设 $s>0$，求 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cdot x^n \mathrm{d}x,\ (n=1,2,\cdots)$.

4. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

5. 求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离。

二、（本题满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点 x_0 ，使得 $f(x_0)<0$。证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根。

三、（本题满分 15 分）

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\left\{\begin{array}{l} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{array}\right.$ $(t>-1)$ 所确定。且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\displaystyle\int_1^{t^2} e^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切。求函数 $\psi(t)$.

四、（本题满分 15 分）

设 $a_n>0,\ S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$，证明：

（1）当 $\alpha>1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛。

（2）当 $\alpha\leqslant 1$ ，且 $S_n\to\infty\ (n\to\infty)$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散。

五、（本题满分 15 分）

设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$（其中 $0<c<b<a$，密度为 1）绕 l 旋转。

（1）求其转动惯量；

（2）求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值与最小值。

六、（本题满分 15 分）

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上,曲线积分 $\displaystyle\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数。

（1）设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\displaystyle\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

（2）求函数 $\varphi(x)$；

（3）设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\displaystyle\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

9 第一届全国大学生数学竞赛预赛（非数学类）试题

一、填空题（总分 20 分，共 4 小题，每小题 5 分）

1. 计算 $\displaystyle\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________________，其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围的三角形区域。

2. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则 $f(x)=$ ________________。

3. 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ________________。

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________________。

二、（本题满分 5 分）

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数。

三、（本题满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

四、（本题满分 15 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{5}{2}\pi^2$.

五、（本题满分 10 分）

已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

六、（本题满分 10 分）

设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$。又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$。试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

七、（本题满分 15 分）

已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$，$(n=1,2,\cdots)$，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

八、（本题满分 10 分）

求 $x\to 1^-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。