

DOI:10.13196/j.cims.2022.04.003

考虑误差校正点的无人机航迹规划模型与算法

李珍萍¹, 刘 嵘¹, 陈星艺¹, 徐 冉¹, 邢立宁²

(1.北京物资学院 信息学院, 北京 101149;

2.中南林业科技大学 物流与交通学院, 湖南 长沙 410018)

摘 要:针对飞行区域内有若干个水平和垂直误差校正点的无人机航迹规划问题,在满足累积误差阈值约束的前提下,以总航迹最短为目标,建立了混合整数规划模型。考虑到每个误差校正点只能校正一个方向的累积误差,且校正前后的累积误差不满足线性关系,为了快速求出问题的精确最优解,基于多维标号算法和脉冲算法设计了两阶段算法。首先利用多维标号算法求出初始可行解,并将其作为最优解的上界;然后利用模型的约束条件和目标函数值上界,构造 3 种子路径扩展判断准则,并基于 3 种准则设计了改进的脉冲算法,求出全局最优解。通过模拟计算,验证了两阶段算法求解无人机航迹规划问题的快速有效性,为解决无人机航迹规划问题提供了理论依据。

关键词:无人机;航迹规划;误差校正;混合整数规划;多维标号法;脉冲算法

中图分类号:TP39

文献标识码:A

Model and algorithm of unmanned aerial vehicle path planning considering error correction points

LI Zhenping¹, LIU Rong¹, CHEN Xingyi¹, XU Ran¹, XING Lining²

(1.School of Information, Beijing Wuzi University, Beijing 101149, China;

2.School of Logistics and Transportation, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410018, China)

Abstract:Path planning problem of Unmanned Aerial Vehicle (UAV) with multiple horizontal and vertical error correction points in the navigation area was studied. Under the threshold constraint of cumulative error, a mixed integer programming model of UAV path planning problem was established to minimize the total path distance. Considering that each error correction point could only revise the accumulated error of one specific direction, and the accumulated error before and after correction did not meet the linear relationship, based on the multi-dimensional labeling algorithm and the pulse algorithm, a two-stage exact algorithm was designed to solve the model. An initial feasible solution was obtained by multi-dimensional labeling algorithm, and the objective function value was taken as the upper bound of the optimal value. Based on the constraints of the model and the upper bound, three judge rules for path extension were given, and the improved pulse algorithm was designed to obtain the global optimal solution. The efficiency of the algorithm was verified by simulation on some instances, which provided a theoretical basis for solving UAV path planning problem in reality.

Keywords:unmanned aerial vehicle; path planning; error correction; mixed integer programming; multi-dimensional label algorithm; pulse algorithm

收稿日期:2020-06-03;修订日期:2020-09-01。Received 03 June 2020; accepted 01 Sep. 2020.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71771028);北京市自然科学基金资助项目(9212004,Z180005);北京市属高校高水平科研创新团队建设资助项目(IDHT20180510);北京市智能物流协同创新中心开放资助项目(BILSCIC-2019KF-25);北京市科技创新服务能力建设—高精尖学科建设资助项目。**Foundation items:**Project supported by the National Natural Science Foundation, China (No. 71771028), the Beijing Municipal Natural Science Foundation, China (No. 9212004, Z180005), the Beijing Municipal University's High-Level Innovation Team Construction Program, China (No. IDHT20180510), the Open Fund of Beijing Municipal Intelligent Logistics Collaborative Innovation Center, China (No. BILSCIC-2019KF-25), and the Beijing Municipal Science and Technology Innovation Service Capacity Building-High-Grade, Precision and Advanced Subject Construction Program, China.

0 引言

随着航天技术的日益进步,无人飞行器(简称无人机)技术发展迅速。由于无人机具有使用成本低、机动性强、安全风险小等特点,已被大量用于执行高危险、高强度或大范围的巡检、搜救等任务^[1]。无人机能够顺利到达目标点是成功执行任务的必要前提。无人机航迹规划是指在给定的工作环境中,寻找满足无人机性能及飞行条件约束的,从起始点到目标点的最优飞行轨迹,使无人机的飞行代价尽可能小,无人机航迹规划问题已成为该领域的研究焦点。

由于不同场景下的无人机航迹规划问题需要考虑的目标和约束不同,对应的问题难度会有很大的差别。近年来,国内外学者针对不同场景下的无人机航迹规划问题开展了研究。现有研究考虑的主要目标包括:总飞行距离(或完成任务的时间)最短^[1-2]、总服务效率最大^[3]、保密效能最好^[4],或总飞行成本最低或能耗最小^[5]等;现有研究中考虑的约束条件包括无人机飞行时间限制^[3]、能耗限制^[4]、飞行平衡约束^[6]、避开障碍物^[7-8]或无人机之间的协同约束^[9]等。其中很多问题可以归结为带约束的最短路问题,由于大部分带约束的最短路问题都属于 NP-hard 问题,精确求解需要的运行时间较长,现有研究主要集中在设计求解问题的快速有效算法方面^[10-11]。

引导无人机沿着规划的航线飞行,离不开导航系统,目前应用最广泛的是捷联惯性导航(strap-down inertial navigation)系统,该系统将陀螺仪和加速度计等设备安装在无人机上,将这些仪器测量的信号直接变换为导航参数进行导航。由于捷联惯性导航系统的核心组件陀螺仪和加速度计存在漂移误差,而且部分误差会随着飞行距离增加而不断累积^[12],当累积误差超出允许的范围时会导致导航失败。为确保无人机沿着正确的航迹飞行,必须结合其他系统信息对捷联惯导系统产生的累积误差进行校正^[13]。通常可以使用 GPS(global positioning system)的信息进行校正,使无人机能够沿着正确的航迹前进^[14]。

利用 GPS 系统信息对捷联惯导系统累积误差进行校正的方法是:在无人机飞行区域内,预先设置一系列误差校正点,当无人机经过这些误差校正点(或其附近小范围的区域)时,捷联惯导系统的累积

误差就可以被误差校正点成功校正为 0。由于每个误差校正点通常只能校正一个方向(水平方向或垂直方向)的累积误差,且每个误差校正点的覆盖范围有限,只有当无人机进入误差校正点覆盖区域(即水平方向和垂直方向的累积误差不超过误差校正点要求的阈值)时,其相应方向累积误差才能被校正。若无人机没有到达指定误差校正点对应的水平方向或垂直方向累积误差超过了规定的阈值,则其相应方向的累积误差不能及时得到校正,这将直接导致其飞行轨迹偏离航线,无法到达目标点。因此,在对无人机进行航迹规划的时候,必须确保飞行过程中各个方向的累积误差及时得到校正,这是无人机顺利到达终点的必要条件。现有的关于无人机航迹规划问题的研究,很少考虑累积误差校正约束。基于以上分析,本文拟在考虑水平方向和垂直方向误差校正点的前提下,研究无人机航迹规划问题,该问题属于一类新的带约束最短路问题。

带约束的最短路问题可以描述为在一个有向或无向图中,寻找一条从起点到终点长度最短的路径,且该路径必须满足给定的约束条件,如带容量约束^[15-17]、带时间窗约束^[18-21]、带必经点约束^[22]、顾客满意度约束^[23]、时变网络约束^[24]等。带约束的最短路问题是无约束最短路问题的推广,无约束最短路问题属于 P 问题,当所有边权均为非负数时,可以利用标号法(即 Dijkstra 算法)求解,其时间复杂度为 $O(n^2)$ ^[25],当图中含有负的边权时,可以利用 Floyd 算法求解,其时间复杂度为 $O(n^3)$ ^[25]。

带约束的最短路问题大部分是 NP-hard 问题^[26],即使图中所有边权均为正数,也很难求解。现有文献中对于带约束最短路问题的求解方法大体可以分为精确算法和混合启发式算法。其中精确算法有:整数规划方法^[18]、双向标记算法^[27-28]、拉格朗日松弛法^[29]、动态规划算法^[30]、列生成算法^[31-32]等。针对精确算法求解过程中由于搜索空间太大导致求解时间太长等问题,部分学者提出将多种策略相结合的混合启发式算法,如粒子群算法和变邻域搜索相结合^[16]、标号法和禁忌搜索相结合^[17]、基于 k-opt 移动、候选路径搜索、冲突节点提升和连接松弛等多种策略的元启发式算法^[22]、超启发式遗传算法^[20]、回溯优化算法^[33]等。

通常情况下,精确算法可以得到问题的全局最优解,但需要较长的运行时间;混合启发式算法的运行时间大大缩短,但很多混合启发式算法无法保证

得到全局最优解。

Lozano 等^[34]于 2013 年提出了求解带约束最短路径问题的脉冲算法,其本质是一种分支切割算法,是求解带约束最短路径问题的精确算法。该算法将标号法与分支切割法巧妙地结合在一起,通过引入 3 种判断准则,有效地缩小了搜索空间,提高了求解效率。该算法在求解带约束的最短路径问题上取得了很好的效果。

GPS 与捷联惯导系统相结合背景下的无人机航迹规划问题中,为了确保无人机能够顺利到达终点,必须满足无人机飞行途中经过每个误差校正点时,其水平方向和垂直方向的累积误差不超过给定的阈值。该约束条件与现有文献中考虑的约束条件均不相同,因此无法用文献中的方法直接求解带误差校正点约束的无人机航迹规划问题。

本文针对该问题开展研究,在给定的导航区域内,考虑水平方向和垂直方向的误差校正点,建立使总飞行距离最短的无人机航迹规划问题数学模型,基于多维标号算法和脉冲算法设计求解模型的快速精确算法,为无人机航迹规划提供理论依据。

1 问题描述与分析

捷联惯性导航系统和辅助误差校正系统联合应用场景下,同时考虑水平误差和垂直误差校正点的无人机航迹规划问题可以描述如下:已知无人机的飞行起点、终点和飞行区域内预先设置的若干个水平误差和垂直误差校正点。假设无人机在飞行过程中,惯性导航系统在水平方向和垂直方向均会产生累积误差,且两个方向产生的累积误差都与飞行距离成正比例。为了对惯性导航系统产生的累积误差进行校正,辅助误差校正系统(如 GPS)在飞行区域内的特定位置预先设置了若干个水平误差校正点和垂直误差校正点。当无人机到达某个水平(垂直)误差校正点时,若其水平方向和垂直方向的误差不超过给定的阈值,则其水平(垂直)方向的误差可以被校正为 0,垂直(水平)方向的误差不变;若无人机到达某个水平(或垂直)误差校正点时,其水平误差或垂直误差超过了给定的阈值,则误差校正失败,无人机将偏离规划航迹,无法到达终点,此次飞行任务失败。为保证无人机顺利到达终点,在进行航迹规划时,可以包含一定数量的误差校正点,问题是如何规划从起点出发,依次经过若干个误差校正点并成功

到达终点的航迹,才能使无人机的总飞行距离最短。

假设无人机在任意两点之间均可以沿直线飞行,且在误差校正点可以变换飞行方向。在以上假设下,一条可行的飞行航迹指由起点出发,依次通过若干个误差校正点,最后到达终点的序列,且满足下列两个条件:

(1)无人机到达每个误差校正点时,其水平误差和垂直误差均不超过给定的阈值(误差校正成功的条件)。

(2)无人机到达终点时水平误差和垂直误差不超过给定的阈值(顺利到达终点的条件)。

基于以上分析,无人机航迹规划问题可以表示为带误差校正约束的最短路径问题,即求一条满足多个约束条件的总飞行里程最短的航迹。该问题的约束条件包括:①无人机到达路径中的每个中间点(误差校正点)时,必须满足该点对应的误差校正条件;②无人机到达终点时,水平误差和垂直误差必须满足条件。

图 1 描述了一条经过 10 个误差校正点的可行飞行路径。路径中包含了 5 个水平误差校正点和 5 个垂直误差校正点。

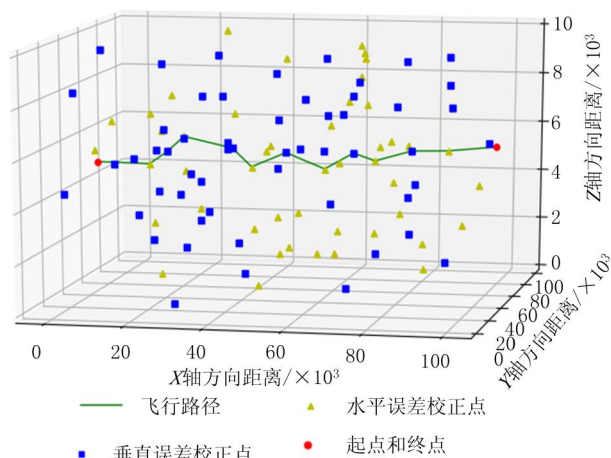


图1 无人机航迹规划区域和一条可行路径示意图

2 无人机航迹规划问题的混合整数规划模型

2.1 符号说明

为了建立无人机航迹规划问题的数学模型,首先定义如下符号:

垂直误差校正点的抵达条件:垂直误差不超过 α , 水平误差不超过 α ;

水平误差校正点的抵达条件:垂直误差不超过 β , 水平误差不超过 β ;

δ 为无人机每飞行单位距离,水平误差和垂直误差各增加 δ ;

θ 为无人机抵达终点时,水平误差和垂直误差均不大于 θ ,才能保证安全降落;

1为起点序号;

n 为终点序号;

$V=V_1 \cup V_2=\{2,3,\dots,n-1\}$,为误差校正点集合,其中: V_1 表示水平误差校正点集合, V_2 表示垂直误差校正点集合;

i,j,k 为点的索引($i,j,k \in \{1,2,\dots,n\}$);

d_{ij} 为点 i 到点 j 的直线距离。

2.2 决策变量

定义如下决策变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{边}(i,j)\text{在最优路径上;} \\ 0 & \text{否则} \end{cases};$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{点 } j \text{ 在最优路径上;} \\ 0 & \text{否则} \end{cases};$$

l_j 为无人机沿最优路径飞行,到达点 j 时的累计飞行距离;

g_j 为无人机沿最优路径飞行,到达点 j 时的水平误差;

h_j 为无人机沿最优路径飞行,到达点 j 时的垂直误差;

S_j 为无人机沿最优路径飞行,离开点 j 时的水平误差;

T_j 为无人机沿最优路径飞行,离开点 j 时的垂直误差。

2.3 模型建立

考虑水平误差和垂直误差校正点的无人机航迹规划问题可以表示成如下混合整数规划模型:

$$\min l_n. \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=2}^n x_{1j} = 1; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{in} = 1; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{ij} = y_j, j \in V \cup \{n\}; \quad (4)$$

$$\sum_{k=2}^n x_{jk} = y_j, j \in \{1\} \cup V; \quad (5)$$

$$l_j \geq l_i + d_{ij} \cdot x_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}), \\ i \in \{1\} \cup V, j \in V \cup \{n\}; \quad (6)$$

$$g_j \geq S_i + \delta \cdot d_{ij} \cdot x_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}), \\ i \in \{1\} \cup V, j \in V \cup \{n\}; \quad (7)$$

$$h_j \geq T_i + \delta \cdot d_{ij} \cdot x_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}),$$

$$i \in \{1\} \cup V, j \in V \cup \{n\}; \quad (8)$$

$$g_j \leq \alpha + M \cdot (1 - y_j), j \in V_2; \quad (9)$$

$$h_j \leq \alpha + M \cdot (1 - y_j), j \in V_2; \quad (10)$$

$$S_j = g_j, j \in V_2; \quad (11)$$

$$T_j = h_j(1 - y_j), j \in V_2; \quad (12)$$

$$g_j \leq \beta + M \cdot (1 - y_j), j \in V_1; \quad (13)$$

$$h_j \leq \beta + M \cdot (1 - y_j), j \in V_1; \quad (14)$$

$$S_j = g_j(1 - y_j), j \in V_1; \quad (15)$$

$$T_j = h_j, j \in V_1; \quad (16)$$

$$g_n \leq \theta; \quad (17)$$

$$h_n \leq \theta; \quad (18)$$

$$S_1 = 0; \quad (19)$$

$$T_1 = 0; \quad (20)$$

$$l_1 = 0; \quad (21)$$

$$l_j \geq 0, g_j \geq 0, h_j \geq 0, S_j \geq 0, T_j \geq 0,$$

$$j \in V \cup \{n\}; \quad (22)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} i \in \{1\} \cup V, j \in V \cup \{n\}; \quad (23)$$

$$y_j \in \{0,1\}, j \in V \cup \{1\} \cup \{n\}. \quad (24)$$

目标函数(1)表示无人机到达终点时总飞行路径长度最短。约束条件(2)表示最优路径的起点为1;约束条件(3)表示最优路径的终点为 n ;约束条件(4)和(5)表示最优路径经过的每一个中间点只有一条边进入,一条边离开;约束条件(6)表示无人机从起点出发沿着最优路径到达相邻两点的飞行距离之间的关系;约束条件(7)和(8)分别表示无人机沿着最优路径到达相邻两点的水平误差和垂直误差之间的关系;约束条件(9)和(10)表示无人机沿着最优路径到达垂直误差校正点时,其水平误差和垂直误差分别不能超过给定的阈值(垂直误差校正点约束);约束条件(11)和(12)分别表示无人机离开垂直误差校正点时,其水平误差和垂直误差的取值,其中水平误差不变,垂直误差校正为零;约束条件(13)~(16)的含义与约束条件(9)~(12)类似,分别表示无人机到达和离开水平误差校正点时的水平和垂直误差取值;约束条件(17)和(18)表示无人机到达终点时水平误差和垂直误差不超过给定的阈值(成功到达终点的约束);约束条件(19)~(21)表示无人机从起点出发时,其飞行距离、水平误差、垂直误差均为0;约束条件(22)~(24)表示变量取值约束。

无人机航迹规划问题可以表示为混合整数规划模型,对于小规模问题,可以直接用求解器(如Gu-robi等)进行求解;对于大规模问题,由于模型的约

束条件和变量较多,求解器很难在可接受的时间内得到问题的全局最优解。

由于一方面实际问题的规模都较大,另一方面实际中往往需要在短时间内对无人机的航迹作出规划,设计求解模型的快速有效算法是解决这类问题的关键。接下来将结合带误差校正点约束的无人机航迹规划问题混合整数规划模型结构,设计求解模型的两阶段算法。

3 两阶段算法设计与分析

无人机航迹规划问题可以归结为带误差校正点约束的最短路问题。求解无约束最短路问题常用的标号算法本质上属于动态规划算法,由于无约束最短路问题的最优解满足最优性条件,即最优路径中的部分路径也一定是最优的。基于最优性原理设计的求解无约束最短路问题的标号法为多项式时间算法。本文研究的无人机航迹规划问题中,由于存在误差校正点,无人机飞行中的累积误差在经过校正点前后的取值不满足线性关系,由此导致带误差校正约束的最短路问题的最优解不满足最优性条件,即从起点到终点满足误差校正约束的最短路径中的部分路径不一定是连接两点且满足误差校正约束的最短路径。下面用一个二维空间中的示例加以说明。

例1 已知无人机飞行区域内的5个点,如图2所示,1为出发点,5为目标点,2、4为水平误差校正点,3为垂直误差校正点。两点之间的连边表示无人机可以飞行的航线,边权表示飞行距离。假设无人机从1点出发时水平误差和垂直误差均为0,无人机飞行单位距离在水平方向和垂直方向产生的累积误差均为0.1。当无人机经过某个水平(或垂直)误差校正点时,若其水平误差和垂直误差均不超过0.3,则其水平(或垂直)误差将被校正为0,垂直(或水平)误差不变。无人机成功到达目标点的条件是水平误差和垂直误差均不超过0.3。如何规划无人机的航迹,才能使总飞行距离最短?

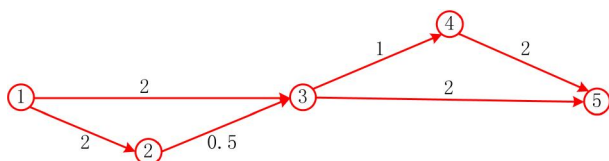


图2 不满足最优性条件的例子

由于该问题规模很小,直接利用 Gurobi 8.0 编

程求解混合整数规划模型可以得到无人机的最优航迹为 1-2-3-5,对应的最短飞行距离为 4.5,到达目标点 5 时水平方向累积误差为 0.25,垂直方向累积误差为 0.2。

容易验证,无人机最优飞行航迹中的部分路径 1-2-3 并不是从 1 到 3 的最优路径。实际上,从 1 到 3 的最优路径为 1-3,沿着该路径到达 3 时,总飞行距离为 2,水平误差和垂直误差均为 0.2。如果无人机沿着最优航迹 1-2-3-5 中的部分路径 1-2-3 飞行,到达 3 点的总飞行距离为 2.5,水平误差为 0.05,垂直误差为 0.25。显然,最优路径中的子路径 1-2-3 对应的飞行距离大于路径 1-3 对应的距离,这说明带误差校正点约束的最短路问题不满足最优性条件。因此,经典的标号算法无法直接用来求解带误差校正约束的最短路问题。

为了求出带误差校正约束的无人机航迹规划问题全局最优解,需要将起点到中间点的所有可行子路径信息保存下来。由于求解无约束最短路问题的 Dijkstra 标号算法只保留了从起点到中间点的最优路径,因此,经典标号算法可能会漏掉那些本来应该出现在最优解中的非最优子路径(如例 1 中的子路径 1-2-3),从而导致无法找到问题的最优解。为了避免漏掉可能包含在最优解中的非最优子路径,一种可行的方法是,保留从起点到每个中间点的所有可行子路径,这样做会使搜索空间变大,求解时间延长。如果能够借助一定的策略提前识别出那些不可能包含在最优解中的可行子路径,则可以通过剪枝缩小搜索空间,有效降低计算复杂度,提高求解效率。因此,提高算法性能的关键是快速准确地识别出哪些是不可能包含在最优解中的可行子路径,哪些是可能扩展成最优解的可行子路径^[36]。

脉冲算法将分支定界思想和动态规划方法相结合,在求解带约束的最短路问题中取得了较好的效果。脉冲算法在求解带约束最短路问题时,以当前最好的可行解对应的路径总长度作为最优目标函数值的上界,对于每一个待扩展的路径点,利用目标函数值上界判断从起点到该点的可行子路径有没有可能扩展为从起点到终点的最优路径。对于一条可行子路径,若能够证明由该子路径扩展得到的从起点到终点的可行路径长度的下界大于目前已知的上界,则说明该可行子路径一定不会出现在最优路径中,此时可以停止这一条可行子路径的扩展。利用该策略可以有效缩小搜索空间,提高求解效率,缩

短求解时间。

基于以上分析,本章将利用改进的多维标号算法(或改进的Dijkstra算法)和脉冲算法设计求解无人机航迹规划问题的两阶段算法:

第一阶段:利用改进的多维标号算法求一条从起点到终点的可行路径(初始可行解);

第二阶段:利用脉冲算法求最优路径(全局最优解)。

3.1 第一阶段:利用改进的多维标号算法求初始可行解

为每个点 i 定义一个多维标号, $Lebali = [length_i, horizon_i, vertical_i, father_i]$, 其中4个分量分别表示无人机从起点到点 i 的可行路径长度、累积水平误差、累积垂直误差、点 i 的前续节点序号。

首先给每个节点标注临时标号,然后从起点 S 开始,依次检查各个点的临时标号,当找到一条从起到当前点的可行路径时,将当前点的临时标号修改为永久标号,直到终点 T 得到永久标号。

步骤1 给起点 S 标注临时标号 $[0, 0, 0, -1]$, 其余各点赋予临时标号 $[\infty, 0, 0, -1]$ 。

步骤2 从所有临时标号点中寻找对应路径长度最短的标号点,记为 $Node_i$, 将该点的临时标号改为永久标号,根据节点 $Node_i$ 对应的误差校正类型计算飞行器离开节点 i 时的水平和垂直误差;

(1)如果节点 i 为水平误差校正点($i \in V_1$),则

$$\begin{aligned} horizon_i^{out} &= 0, \\ vertical_i^{out} &= vertical_i. \end{aligned}$$

(2)如果节点 i 为垂直误差校正点($i \in V_2$),则

$$\begin{aligned} horizon_i^{out} &= horizon_i, \\ vertical_i^{out} &= 0. \end{aligned}$$

步骤3 判断与 $Node_i$ 相邻的每个节点 $Node_j$ 的临时标号是否满足下列更新条件,对满足条件的节点更新临时标号:

(1)如果节点 $Node_j$ 为水平误差校正点($j \in V_1$),且满足

$$\begin{aligned} length_i + d_{ij} &< length_j, \\ horizon_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \alpha, \\ vertical_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \lambda \cdot \alpha, 0.5 \leq \lambda \leq 1, \end{aligned}$$

则更新节点 $Node_j$ 的临时标号。

(2)如果节点 $Node_j$ 为垂直误差校正点($j \in V_2$),且满足

$$length_i + d_{ij} < length_j,$$

$$\begin{aligned} horizon_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \beta, \\ vertical_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \lambda \cdot \beta, 0.5 \leq \lambda \leq 1, \end{aligned}$$

则更新节点 $Node_j$ 的临时标号。

(3)如果节点 $Node_j$ 为终点($j = T$),且满足

$$\begin{aligned} length_i + d_{ij} &< length_j, \\ horizon_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \theta, \\ vertical_i^{out} + d_{ij} \delta &\leq \theta, \end{aligned}$$

则更新节点 $Node_j$ 的临时标号。

更新以后节点 $Node_j$ 的临时标号为:

$$\begin{aligned} length_j &\leftarrow length_i + d_{ij}, \\ horizon_j &\leftarrow horizon_i^{out} + d_{ij} \cdot \delta, \\ vertical_j &\leftarrow vertical_i^{out} + d_{ij} \cdot \delta, \\ father_j &\leftarrow Node_i. \end{aligned}$$

步骤4 检查终点 T 是否被赋予永久标号,若是,则算法结束,按照终点 T 的永久标号倒向追踪找出完整的可行路径。否则,返回步骤2。

显然,根据以上算法找到的从起点到终点的路径一定满足模型的所有约束条件,因此是无人机航迹规划问题的可行解。由于无人机飞行过程中,水平方向和垂直方向均会产生累积误差,而每个误差校正点只能校正一个方向的累积误差,为避免另一方向的累积误差过大,导致路径无法延伸至终点,算法中引入了比例系数 λ ,对非校正方向的累积误差阈值进行修正(λ 可以取 $0.5 \sim 1$ 之间的数),即当无人机经过水平误差校正点时,其垂直误差不能超过给定阈值的 λ 倍,当无人机经过垂直误差校正点时,其水平方向的累积误差不能超过误差阈值的 λ 倍。这样做可以避免改进的多维标号法求解过程中出现路径走偏,无法到达终点的情况。

由于带误差校正点约束的无人机航迹规划问题不满足最优性条件,改进的多维标号算法结束时得到的可行解不一定是问题全局最优解。

3.2 第二阶段:利用脉冲算法求出全局最优解

将第一阶段标号算法得到的初始可行解作为当前的最好解,其目标函数值作为最优目标函数值的上界,借助于该上界,设计脉冲算法求出问题的全局最优解。

脉冲算法的基本思想是:通过深度优先搜索遍历所有可能的路径,从中选出最短的一条,即为最优路径。本文采用3种判断准则识别不可能出现在最优解中的子路径,并提前进行剪枝处理,从而减少计算量。

3种判断准则分别是可行性判断、支配性判断、

界的判断。下面分别举例说明在路径扩充过程中,如何使用 3 种准则。

如图 3 所示,已知 S 是起点, T 是终点, r, g 是任意两个中间点(误差校正点)。假设 $S \rightarrow r$ 的可行子路径已探明(即该子路径有可能出现在最优路径中),现在需要判断子路径 $S \rightarrow r$ 扩展到 g 点形成的子路径 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 是否满足约束条件,以及是否可能出现在最优路径中。

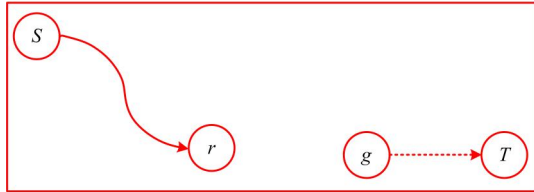


图3 路径扩充示意图

(1) 可行性判断

根据问题的约束条件来判断点 g 能否加入到可行子路径中。若无人机从点 r 到点 g 时产生的累计误差超出了点 g 要求的累积误差范围,则点 g 无法加入到子路径中,即子路径 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 不满足约束条件,因此子路径 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 不可能出现在最优路径中,可以直接在搜索树中对其进行剪枝。从深度优先搜索的角度来讲,这一部分子树无需再继续向后搜索。

可行性判断的算法流程如 Function *feasible_check*:

```
Function feasible_check
input: 当前已探明子路径 path, 下一个拟加入路径的点 node
if: 加入 node 后的水平误差和垂直误差都不超过给定的阈值
then: return False
else: return True
End if
```

其中, False 表示加入新点之后形成的子路径满足可行性约束, True 表示不满足可行性约束。

(2) 支配性判断

支配性准则用于判断某个中间点对应的两个不同标号的优劣(即从起点到中间点的两条可行路径的优劣)。由于使用多维标号,每个标号中同时包含距离、水平误差、垂直误差等信息。如果标号 A 对应的三个指标均小于标号 B 的同类指标,则标号 A 严格优于标号 B 。此时标号 B 对应的子路径不可能出现在最优子路径中,因此标号 B 可以舍去。

支配性判断的算法流程如 Function *dominate_check*:

```
Function dominate_check
input: 当前已探明子路径 path, 下一个拟加入路径的点 node
计算在 path 后面接入 node 之后的路径长度, 记为 length_new;
计算在 path 后面接入 node 之后的累积水平误差, 记为 horizon_new;
计算在 path 后面接入 node 之后的累积垂直误差, 记为 vertical_new;
if: node 本身的 length 标号不大于 length_new, 并且 node 本身的 horizon 标号不大于 horizon_new, 并且 node 本身的 vertical 标号不大于 vertical_new
then: return True
else: return False
End if
```

其中 True 表示加入 $node$ 点形成的可行路径不如 $node$ 点原标号对应的可行路径, 即该子路径不可能出现在最优路径中。

(3) 界的判断

界的判断用于识别那些不可能出现在最优解中的可行子路径, 以便提前剪枝。

如图 3 所示, 假设点 g 加入路径 $S \rightarrow r$ 之后形成可行子路径 $S \rightarrow r \rightarrow g$, 要判断该子路径有没有可能出现在最优路径中, 只需要计算包含 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 的完整路径长度的下界, 并与当前最好可行解的目标函数值(最优值的上界)进行对比, 即可得出结论。若包含 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 的完整路径长度下界大于当前可行解的目标函数值, 则可行子路径 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 不可能扩展成最优路径, 因此可以直接舍去(剪枝)。

本文采用直观方式计算包含 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 的完整路径长度下界。该下界等于 $S \rightarrow r \rightarrow g$ 的长度加上 $g \rightarrow T$ 的直线距离。由于 $g \rightarrow T$ 的完整可行路径必须满足各种约束条件, 任意一条 $g \rightarrow T$ 的可行路径长度都不可能小于 $g \rightarrow T$ 的最短距离。

界的判断算法流程如 Function *bound_check*:

```
Function bound_check
input: 当前已探明子路径 path, 下一个拟加入路径的点 node, 点 node 到终点 T 的无约束最短路径长度 D_node, 当前最好解对应的路径长度 primal_bound
if: path 的长度 + D_node ≥ primal_bound
then: return True
else: return False
End if
```

其中 True 表示加入 $node$ 点之后的子路径不可能出现在最优路径中。

采用上述 3 种准则, 可以识别出不可行子路径和不可能出现在最优解中的子路径, 以便提前剪枝, 从而缩小搜索空间, 降低计算量。

基于以上 3 种准则设计的脉冲算法,本质上可以遍历所有可行路径,因此当算法停止时,得到的必然是全局最优解。

脉冲算法的主程序如 Function *pulse*:

```
Function pulse
input :当前已探明的子路径 path (每一条子路径对应一个永久标号),下一个拟加入路径的点的集合 NodetoAdd (所有临时标号的集合)
for node in NodetoAdd
    if :feasible_check (path,node) == False 或 dominate_check (path,node) == False 或 bound_check (path,node) == False
    then :path' = {path,node}, 给 node 标注一个永久标号;
        更新 NodetoAdd 为 node 的后继节点集合,记为 NodetoAdd';
        执行 pulse (path',NodetoAdd');
    End if
End for
```

4 模拟计算与结果分析

为了验证模型的正确性和算法的有效性,本章在 $[0,100\ 000] \times [0,100\ 000] \times [0,100\ 000]$ 范围内随机生成 12 个不同规模的算例进行模拟计算,各个算例的参数如表 1 所示。其中第 1 列为算例编号,第 2 列为飞行区域内设置的总点数(包括起点、终点和两类误差校正点),第 3、4 列分别为水平误差校正点和垂直误差校正点的个数,第 5~10 列为模型中的各个参数的取值。

表 1 算例参数

算例 编号	点 总数	水平误差 校正点数	垂直误差 校正点数	α	α	β	β	θ	δ
1	15	6	7	50	50	50	50	50	0.001
2	20	12	6	45	50	45	50	45	0.001
3	21	12	7	50	50	50	50	45	0.001
4	25	12	9	45	45	45	50	45	0.001
5	31	13	16	45	45	45	50	45	0.001
6	38	20	16	45	45	45	45	45	0.001
7	327	167	158	20	10	15	20	20	0.001
8	327	167	158	25	15	20	25	30	0.001
9	327	167	158	50	50	50	50	50	0.001
10	613	306	305	20	10	15	20	20	0.001
11	613	306	305	25	15	20	25	30	0.001
12	613	306	305	50	50	50	50	50	0.001

表 1 中算例 1~6 是小规模算例,主要用于验证模型的正确性。对每一个小规模算例,通过直接求解

混合整数规划模型得到问题的精确最优解,并使用两阶段算法求解,对比两种方法的求解结果,验证模型的正确性,同时分析两阶段算法的求解时间优势。

算例 7~12 是较大规模算例,用于验证两阶段算法的快速有效性。6 个较大规模算例可以分为两组,其中算例 7~9 使用一组相同的节点坐标,误差校正参数分别设置为较紧、适中、较松 3 种;算例 10~12 使用另一组相同的节点坐标,误差校正参数分别设置为较紧、适中、较松 3 种。对于每个大规模算例,分别使用两阶段算法与文献中常用的方法如脉冲算法、动态规划方法^[37]进行求解,通过对比分析,展示两阶段算法的求解速度优势。

本章所有模拟计算均在一台 Intel Core i7-6700HQ 2.6 GHz 的 PC 上进行,为了验证模型正确性,直接使用 Gurobi 8.0 编写程序求解混合整数规划模型;对于两阶段算法和动态规划算法则使用 Python 3.6.8 编程实现。

表 2 列出了分别利用两种方法求解小规模算例的结果。其中第 2、3 列为利用 Gurobi 求解整数规划模型的运算时间和得到的最优值,第 4、5 列为利用两阶段算法求解的运算时间和得到的目标函数值,最后一列分析了两阶段方法是否找到问题的最优解。通过表 2 可以看出,对于每一个小规模算例,利用 Gurobi 求解混合整数规划模型均可得到最优解,因此本文建立的混合整数规划模型是正确的;利用两阶段算法求解得到的结果与求解整数规划模型得到的最优解完全相同,这说明本文设计的两阶段算法在各个算例上均找到了精确最优解。通过对比两种方法的求解时间可以发现,对于每个算例,两阶段算法的求解时间均不超过 0.1 s,而 Gurobi 求解整数规划模型的运算时间均超过了两阶段算法的运算时间。随着问题规模的增大,两阶段算法的求解速度优势越来越明显。对于包含 38 个点的算例 6,利用 Gurobi 求解整数规划模型的运算时间为 439.59 s,而两阶段算法的运行时间只有 0.084 s。

表 2 小规模算例的模拟计算结果

算例 编号	利用 Gurobi 求解		两阶段算法		
	整数规划				
	CPU 时间/s	最优值	CPU 时间/s	目标函数值	是否 最优解
1	0.34	154 094	0.012 1	154 094	是
2	1.15	101 260	0.015 0	101 260	是

续表 2

3	0.09	136 411	0.007 2	136 411	是
4	0.66	124 505	0.012 0	124 505	是
5	10.52	128 416	0.030 0	128 416	是
6	439.59	135 068	0.084 0	135 068	是

对于包含 327 个点的中等规模算例 7, 利用 Gurobi 求解混合整数规划模型的运算时间已经超过 2 小时, 因此中等规模以上的算例无法直接利用 Gurobi 求解混合整数规划模型得到最优解。对于中大规模的带约束最短路径问题, 文献中常用的精确算法有脉冲算法和动态规划算法。由于本文研究的带误差校正点约束的最短路问题与文献中考虑的约束条件不同, 本章结合误差校正点约束条件的特点, 基于求解一般约束最短路径问题的动态规划算法^[37]设计了求解无人机航迹规划问题的动态规划算法, 算法的伪代码如 DP Algorithm 所示。

DP Algorithm

```

 $\Gamma_s \leftarrow \{(0, \dots, s], 0, 0, 0, 0)\}$ 
for all  $i \in V \setminus \{s\}$  do
     $\Gamma_i \leftarrow \emptyset$ 
end for
 $E \leftarrow \{s\}$ 
repeat
    Select  $i \in E$ 
    for all  $l_i \in \bar{\Gamma}_i$  do
        for all  $j \in \Delta_i^+$  such that  $j$  not in  $[0, \dots, i]$  do
             $l_j \leftarrow \text{Extend}(l_i, j)$ 
             $\Gamma_j \leftarrow \text{EFF}(\Gamma_j, l_j)$ 
            if  $\bar{\Gamma}_j \neq \emptyset$  then
                 $E \leftarrow E \cup \{j\}$ 
            end if
        end for
    end for
     $E \leftarrow E \setminus \{i\}$ 
until  $E = \emptyset$ 

```

为了分析本文设计的两阶段算法求解效果, 并与文献中使用的脉冲算法和动态规划算法进行对比。对于表 1 中的中、大规模算例, 分别使用两阶段算法、脉冲算法和动态规划算法进行求解, 记录各种算法的求解结果和运算时间。结果显示, 3 种算法均可以得到精确最优解, 但 3 种算法的运算时间有显著差异, 表 3 列出了 3 种算法求解各个算例的运算时间, 其中包括两阶段算法第一阶段的运算时间 (T_1)、第二阶段运算时间 (T_2) 的和总运算时间 (T)。

表 3 利用 3 种算法求解中、大规模算例的运算时间

算例 编号	两阶段算法			脉冲 算法	动态 规划
	T_1	T_2	T		
7	0.71	0.22	0.94	3.76	4.59
8	1.24	0.31	1.55	15.68	17.60
9	2.4	1.79	4.19	542.18	726.76
10	0.24	0.06	0.30	0.60	0.64
11	0.38	0.07	0.45	1.75	2.06
12	0.65	0.15	0.80	32.62	55.06

从表 3 可以看出, 对于每个算例, 两阶段算法的运算时间均远远小于脉冲算法和动态规划算法。3 种算法的求解效率由高到低排列顺序为: 两阶段算法 > 脉冲算法 > 动态规划。需要特别说明的是, 不论是两阶段算法还是脉冲算法, 本质上都使用了动态规划的思想, 可以看成是动态规划算法和分支定界算法的结合。由于两阶段算法第一阶段找到的可行解具有更小的上界, 因此使用两阶段算法比直接使用脉冲算法求解效率更高。从表 3 中还可以看出, 对于点坐标完全相同的算例, 误差约束越紧求解时间越短, 误差约束越松求解时间越长, 这一点从两组算例 7~9 和 10~12 的组内对比可以看出。如算例 7~9 使用的点坐标一样, 随着误差约束的逐步放松, 求解时长逐步增大。这是因为当放松误差约束时, 可行解个数增多, 两阶段算法第二阶段的搜索空间变大, 因此需要的搜索时间变长。

通过模拟计算还发现, 对于误差约束较紧的算例, 第一阶段多维标号算法中的比例系数 λ 取 0.5~1 之间的任意值均可以得到可行解; 当误差约束放松时, 第一阶段多维标号算法中的比例系数 λ 的取值应该适当减小。如表 1 中的算例 9 和算例 12, 当 λ 取 1 时, 第一阶段多维标号算法没有找到可行解; 当 λ 取 0.5 时, 所有算例均可以找到可行解。实际计算时, 为了保证第一阶段找到可行解, 可以直接取 $\lambda=0.5$ 。

通过观察两阶段算法第一阶段和第二阶段的运行时间可以发现, 对所有的算例, 第一阶段找初始可行解的运算时间均不超过 2 s; 基于第一阶段初始可行解提供的上界, 算法第二阶段的求解时间均不超过 2 s。且总求解时间均小于 4.2 s。

由以上分析可以看出, 两阶段算法在求解带误差校正点约束的无人机航迹规划问题上表现出

非常优越的性能,随着问题规模的增大,其求解速度的优势越来越明显。因此,两阶段算法可以作为无人机实时路径规划系统的核心算法。

6 结束语

无人机航迹规划问题是导航系统设计中的关键问题,本文针对同时考虑水平误差和垂直误差校正的无人机航迹规划问题开展研究,将该问题转化为带误差校正点约束的最短路径问题,建立了混合整数规划模型,并设计了求解模型的两阶段算法。第一阶段利用改进的多维标号法求得问题的初始可行解,并将初始可行解的目标函数值作为最优值的上界;第二阶段,利用第一阶段得到的目标函数值上界,基于3种准则设计改进的脉冲算法,求得问题的全局最优解。最后,分别利用小规模和大规模算例,验证了整数规划模型的正确性和两阶段算法的快速有效性。

本文的主要贡献包括:

(1)将考虑误差校正点的无人机航迹规划问题转化为带误差校正约束的最短路径问题,建立了混合整数规划模型,扩展了带约束最短路径问题的应用范围。

(2)在分析了问题困难性的基础上,将改进多维标号法与改进的脉冲算法相结合设计了求解模型的两阶段精确算法。一方面,利用脉冲算法通过深度优先搜索潜在遍历了所有可行解,保证最终求得全局最优解;另一方面,利用改进多维标号算法得到的高质量初始可行解作为最优值的上界,大大缩小了脉冲算法的搜索空间,提高了求解效率。

本文设计的两阶段算法,比单独使用动态规划或脉冲算法求最优解的速度更快,综合性能具有明显优势。该算法思想可以推广到其他类型的带约束最短路径问题中,具有良好的扩展性。

本文研究无人机航迹规划问题时,假设无人机到达某个误差校正点后,其相应方向的误差均可以得到成功校正,没有考虑误差校正失败的情况。实际中,由于信号传输中断或GPS系统的误差等原因,可能导致在某些校正点误差校正失败的情况。后续研究中,笔者将针对可能存在误差校正失败的情况,研究无人机航迹规划问题,建立数学模型并设计求解模型的算法,为实际中无人机等飞行器的导航系统设计提供理论依据和算法支持。

参考文献:

- [1] QIN Z, LI A, DONG C, et al. Completion time minimization for multi-uav information collection via trajectory planning [J]. *Sensors*, 2019, 19(18):4032. DOI:10.3390/s19184032.
- [2] KIM D, XUE L, LI D, et al. On theoretical trajectory planning of multiple drones to minimize latency in search-and-reconnaissance operations [J]. *IEEE transactions on mobile computing*, 2017, 16(11):3156-3166.
- [3] SAMIR M, SHARAFEDDINE S, ASSI C M, et al. UAV trajectory planning for data collection from time-constrained IoT devices [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2019, 19(1):34-46.
- [4] WANG Q, CHEN Z, LI H. Energy-efficient trajectory planning for UAV-aided secure communication [J]. *China Communications*, 2018, 15(5):61-70.
- [5] JEONG S, SIMEONE O, KANG J. Mobile edge computing via a UAV-mounted cloudlet: Optimization of bit allocation and path planning [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, 67(3):2049-2063.
- [6] XIAN B, WANG S, YANG S. An online trajectory planning approach for a quadrotor UAV with a slung payload [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(8):6669-6678.
- [7] LIN Y, SARIPALLI S. Sampling-based path planning for UAV collision avoidance [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2017, 18(11):3179-3192.
- [8] GAO Sheng, AI Jianliang, WANG Zhihao. Mixed population RRT algorithm for UAV path planning [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020, 42(1):101-107 (in Chinese). [高升, 艾剑良, 王之豪. 混合种群 RRT 无人机航迹规划方法 [J]. *系统工程与电子技术*, 2020, 42(1):101-107.]
- [9] SHI W, LI J, CHENG N, et al. Multi-drone 3D trajectory planning and scheduling in drone assisted radio access networks [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(8):1-12.
- [10] ZHANG Q, WANG R, YANG J, et al. Modified collective decision optimization algorithm with application in trajectory planning of UAV [J]. *Applied Intelligence*, 2018, 48(8):2328-2354.
- [11] WANG Qiong, LIU Meiwan, REN Weijian, et al. Overview of common algorithms for UAV path planning [J]. *Journal of Jilin University: Information Science*, 2019, 39(1):58-67 (in Chinese). [王琼, 刘美万, 任伟建, 等. 无人机航迹规划常用算法综述 [J]. *吉林大学学报: 信息科学版*, 2019, 39(1):58-67.]
- [12] GUO Weilin, XIAN Yong. Application of intelligent method in error parameter identification of INS [J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2019, 6(3):11-20 (in Chinese). [郭玮林, 鲜勇. 智能方法在惯性系统误差参数辨识中的应用 [J]. *导航定位与授时*, 2019, 6(3):11-20.]
- [13] SONG Dunbo. Research on emergent decision-making simulation system for rocket flight based on GIS [J]. *Computer Measurement and Control*, 2010, 18(3):623-625 (in Chinese). [宋敦波. 基于GIS的火箭飞行应急决策仿真系统研究 [J]. *计算机测量与控制*, 2010, 18(3):623-625.]
- [14] XU Zifeng, LU Yane, PANG Chunlei. Research on error emendation of strap-down inertial navigation system based on GPS [J]. *Computer Measurement and Control*, 2013, 21(9):

- 2518-2521(in Chinese). [徐梓峰, 卢艳娥, 庞春雷. 基于 GPS 的捷联惯导系统误差校正研究[J]. 计算机测量与控制, 2013, 21(9):2518-2521.]
- [15] MARINAKIS Y, MIGDALAS A, SIFALERAS A. A hybrid particle swarm optimization-variable neighborhood search algorithm for constrained shortest path problems[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 261(3):819-834.
- [16] SPLIET R, DABIA S, VAN WOENSEL T. The time window assignment vehicle routing problem with time-dependent travel times [J]. Transportation Science, 2018, 52(2): 261-276.
- [17] CAO Gaoli, HU Rong, QIAN Bin, et al. Effective hybrid quantum evolutionary algorithm for capacitated vehicle problem[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2015, 21(4):1101-1113(in Chinese). [曹高立, 胡蓉, 钱斌, 等. 一种有效混合量子进化算法求解带容量约束的车辆路径优化问题[J]. 计算机集成制造系统, 2015, 21(4):1101-1113.]
- [18] DA J R, ZHENG L B, TANG X. A polyhedral study of the elementary shortest path problem with resource constraints [C]//Proceedings of the International Conference on Computational Logistics. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2017.
- [19] YANG Z, VAN OSTA J P, VAN VEEN B, et al. Dynamic vehicle routing with time windows in theory and practice[J]. Natural Computing, 2017, 16(1):119-134.
- [20] HAN Yajuan, PENG Yunfang, WEI Hang, et al. Hyperheuristic genetic algorithm for vehicle routing problem with soft time windows [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2019, 25(10):2571-2579(in Chinese). [韩亚娟, 彭运芳, 魏航, 等. 超启发式遗传算法求解带软时间窗的车辆路径问题[J]. 计算机集成制造系统, 2019, 25(10):2571-2579.]
- [21] QIU Hanguang, LI Hainan, SONG Han. Reception box location-vehicle routing problems in urban distribution considering demand depending on last-mile delivery and time slots [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2018, 24(10):2612-2621(in Chinese). [邱晗光, 李海南, 宋寒. 需求依赖末端交付与时间窗的城市配送自提柜选址—路径问题[J]. 计算机集成制造系统, 2018, 24(10):2612-2621.]
- [22] SU Z, ZHANG J, LYU Z P. A multi-stage metaheuristic algorithm for shortest simple path problem with must-pass nodes[J]. IEEE Access, 2019, 7:52142-52154.
- [23] REN Teng, CHEN Yue, XIANG Yingchun, et al. Optimization of low-carbon cold vehicle path considering customer satisfaction[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2020, 26(4):1108-1117(in Chinese). [任腾, 陈玥, 向迎春, 等. 考虑客户满意度的低碳冷链车辆路径优化[J]. 计算机集成制造系统, 2020, 26(4):1108-1117.]
- [24] LI Shunyang, DAN Bin, GE Xianlong. Optimization model and algorithm of low carbon vehicle routing problem under multi-graph time-varying network [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2019, 25(2):455-468(in Chinese). [李顺勇, 但斌, 葛显龙. 多通路时变网络下低碳车辆路径优化模型与算法[J]. 计算机集成制造系统, 2019, 25(2):455-468.]
- [25] CORMEN T H, LEISERSON C E, RIVEST R L, et al. Introduction to algorithms [M]. 3rd ed. Cambridge, Mass., USA: The MIT Press, 2009.
- [26] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-Completeness [EB/OL]. [2020-05-12]. <http://www.gbv.de/dms/ilmenau/toc/59999438X.PDF>.
- [27] THOMAS B W, CALOGIURI T, HEWITT M. An exact bidirectional A* approach for solving resource-constrained shortest path problems[J]. Networks, 2019, 73:187-205.
- [28] RIGHINI G, SALANI M. New dynamic programming algorithm for the resource constrained elementary shortest path problem[J]. Networks, 2008, 51(3):155-170.
- [29] CARLYLE W M, ROYSET J O, WOOD R K. Lagrangian relaxation and enumeration for solving constrained shortest-path problems[J]. Networks, 2008, 52(4):256-270.
- [30] DESROCHERS M, DESROSIERS J, SOLOMON M. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows[J]. Informatics, 1992, 40(2):342-354.
- [31] ROUSSEAU L M, GENDREAU M, PESANT G, et al. Solving VRPTWs with constraint programming based column generation[J]. Annals of Operations Research, 2004, 130(1-4):199-216.
- [32] ZHU X, WILHELM W E. A three-stage approach for the resource-constrained shortest path as a sub-problem in column generation [J]. Computers & Operations Research, 2012, 39:164-178.
- [33] WANG Chao, GAO Yang, LIU Chao. Vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup problem solving by backtracking search optimization algorithm [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2019, 25(9):2237-2247(in Chinese). [王超, 高扬, 刘超, 等. 基于回溯搜索优化算法求解带时间窗和同时送取货的车辆路径问题[J]. 计算机集成制造系统, 2019, 25(9):2237-2247.]
- [34] LOZANO L, DUQUE D, MEDAGLIA A L. On an exact method for the constrained shortest path problem [J]. Computers & Operations Research, 2013, 40(1):378-384.
- [35] LOZANO L, DUQUE D, MEDAGLIA A L. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints [J]. Transportation Science, 2016, 50(1):348-357.
- [36] IRNICH S, DESAULNIERS G. Shortest path problems with resource constraints [M]//Column Generation. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2006.
- [37] RIGHINI G, SALANI M. Symmetry helps: Bounded bi-directional dynamic programming for the elementary shortest path problem with resource constraints [J]. Discrete Optimization, 2006, 3(1):255-273.

作者简介:

李珍萍(1966—),女,山东平度人,教授,博士生导师,研究方向:物流系统优化、智能算法等, E-mail: lizhenping66@163.com;

刘嵘(1993—),男,河南信阳人,硕士研究生,研究方向:优化理论与方法, E-mail: buptrong@163.com;

陈星艺(1995—),女,山西太原人,硕士研究生,研究方向:智能物流系统, E-mail: 46198228@qq.com;

徐冉(1995—),女,江苏徐州人,硕士研究生,研究方向:智能物流系统、合作博弈, E-mail: 1506917905@163.com;

邢立宁(1980—),男,陕西西安人,教授,博士,研究方向:智能优化方法、管理理论与管理决策技术, E-mail: xing2999@qq.com.