西安交通大學

数理统计作业

| 姓名: | 唐靖凯 |
|-----|--------------------|
| 班级: | 5102 班 |
| 学号: | 3115370067 |
| 邮箱: | jingkaitang@qq.com |

2015年12月

| 目 | 录 | | |
|---|----|-----------|---|
| 第 | 一章 | 数理统计的基本概念 | 1 |

第一章 数理统计的基本概念

1.1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1 , ..., X_n 为总体 X 的一个样本, \bar{X} 为样本均值, 如要

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$$

则样本容量 n 应取多大?

解: 由**定理 1.2.4** 得 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,所以 $\frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$,又由条件 $P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$ 可得, $P\{|\frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\} = 0.95$,有

$$\alpha = (1 - 0.95) \div 2$$

$$= 0.025$$

$$\mu_{\alpha=0.025} = 1.96$$

$$1.96 < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$n = \lceil (1.96 \cdot \sigma)^2 \rceil$$

- **1.2** 设电子元件的寿命(小时) $X \sim Exp(0.0015)$,独立测试 6 个元件并记下它们的失效时间,试求:
 - (1) 至800小时,没有一个元件失效的概率;
 - (2) 至 3000 小时, 所有元件都失效的概率.
 - **解:** (1) 由题意知 $F(x) = e^{-0.0015 \cdot x}$,则

$$P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X \ge 800\} = (F(800))^6$$
$$= (e^{-0.0015 \times 800})^6$$
$$= e^{-7.2}$$

(2)

$$P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X < 3000\} = (1 - F(3000))^6$$
$$= (1 - e^{-0.0015 \times 3000})^6$$
$$= (1 - e^{-4.5})^6$$

1.4 设总体 X 服从对数正态分布,即 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{ 其他} \end{cases}$$

 $X_1,...,X_n$ 为总体 X 的一个样本, 试写出 $X_1,...,X_n$ 的联合概率密度.

解:

$$\begin{split} x > 0, \quad & \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i \sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ & = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln x_i - \mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i} \end{split}$$

则:

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^n x_i}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \sharp \text{th} \end{cases}$$

1.6 证明下列等式

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$$
;

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$
.

解: