西安交通大學

数理统计作业

姓名：唐靖凯

班级：5102 班

学号：3115370067

邮箱：jingkaitang@qq.com

2015 年 12 月

目　录

第一章　数理统计的基本概念

1.1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，...，X_n 为总体 X 的一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值，如要

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$$

则样本容量 n 应取多大？

解: 由**定理 1.2.4** 得 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，所以 $\frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$，又由条件 $P\{|\bar{X}-\mu| < 1\} = 0.95$ 可得，$P\{|\frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{X}-\mu)}{\sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\} = 0.95$，有

$$\begin{aligned}\alpha &= (1-0.95) \div 2 \\ &= 0.025 \\ \mu_{\alpha=0.025} &= 1.96 \\ 1.96 &< \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\ n &= \lceil (1.96\cdot\sigma)^2 \rceil\end{aligned}$$

1.2 设电子元件的寿命（小时）$X \sim Exp(0.0015)$，独立测试 6 个元件并记下它们的失效时间，试求：

(1) 至 800 小时，没有一个元件失效的概率；

(2) 至 3000 小时，所有元件都失效的概率.

解: (1) 由题意知 $F(x) = e^{-0.0015\cdot x}$，则

$$\begin{aligned}P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X \geq 800\} &= (F(800))^6 \\ &= (e^{-0.0015\times 800})^6 \\ &= e^{-7.2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X < 3000\} &= (1-F(3000))^6 \\ &= (1-e^{-0.0015\times 3000})^6 \\ &= (1-e^{-4.5})^6\end{aligned}$$

1.4 设总体 X 服从对数正态分布，即 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, ..., X_n$ 为总体 X 的一个样本，试写出 $X_1, ..., X_n$ 的联合概率密度.

解:

$$\begin{aligned}x > 0,\quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n} x_i}\end{aligned}$$

则：

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i}, & 0<x<\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1.6 证明下列等式

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$.

解：(1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})+(\bar{X}-\mu)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2+2(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+2(\bar{X}-\mu)\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})X_i-(X_i-\bar{X})\bar{X}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[X_i^2-\bar{X}\cdot X_i-(X_i-\bar{X})\bar{X}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\end{aligned}$$