西安交通大學

数理统计作业

姓名：唐靖凯

班级：5102 班

学号：3115370067

邮箱：jingkaitang@qq.com

2016 年 1 月

目　录

第一章　数理统计的基本概念

1.1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，...，X_n 为总体 X 的一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值，如要

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$$

则样本容量 n 应取多大？

解: 由**定理 1.2.4** 得 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，所以 $\frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$，又由条件 $P\{|\bar{X}-\mu| < 1\} = 0.95$ 可得，$P\{|\frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{X}-\mu)}{\sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\} = 0.95$，有

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1 - 0.95) \div 2 \\
&= 0.025 \\
\mu_{\alpha=0.025} &= 1.96 \\
1.96 &< \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
n &= \lceil (1.96 \cdot \sigma)^2 \rceil
\end{aligned}$$

1.2 设电子元件的寿命（小时）$X \sim Exp(0.0015)$，独立测试 6 个元件并记下它们的失效时间，试求：

(1) 至 800 小时，没有一个元件失效的概率；

(2) 至 3000 小时，所有元件都失效的概率.

解: (1) 由题意知 $F(x) = e^{-0.0015\cdot x}$，则

$$\begin{aligned}
P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X \geq 800\} &= (F(800))^6 \\
&= (e^{-0.0015\times 800})^6 \\
&= e^{-7.2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X < 3000\} &= (1 - F(3000))^6 \\
&= (1 - e^{-0.0015\times 3000})^6 \\
&= (1 - e^{-4.5})^6
\end{aligned}$$

1.4 设总体 X 服从对数正态分布，即 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, ..., X_n$ 为总体 X 的一个样本，试写出 $X_1, ..., X_n$ 的联合概率密度.

解:

$$\begin{aligned}
x > 0, \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}$$

则：

$$f(x_1,...,x_n)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i}, & 0<x<\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1.6 证明下列等式

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$.

解：(1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})+(\bar{X}-\mu)]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2+2(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2]\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+2(\bar{X}-\mu)\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})\\&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})X_i-(X_i-\bar{X})\bar{X}]\\&=\sum_{i=1}^{n}[X_i^2-\bar{X}\cdot X_i-(X_i-\bar{X})\bar{X}]\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\end{aligned}$$

1.7 设 $\bar{X}_n$ 和 S_n^2 分别为样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的样本均值和样本方差，再抽出一个样品 X_{n+1}，记样本 $X_1,X_2,\ldots,X_{n+1}$ 的样本均值和样本方差为分别 $\bar{X}_{n+1}$ 和 S_{n+1}^2，求证：

$$\begin{aligned}\bar{X}_{n+1}&=\bar{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)\\S_{n+1}^2&=\frac{n}{n+1}[S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)^2]\end{aligned}$$

解：(1)

$$\begin{aligned}\bar{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\\&=\frac{(n+1)\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+nX_{n+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n(n+1)}\\&=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+nX_{n+1}}{n(n+1)}\\&=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}X_i}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i\\&=\bar{X}_{n+1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}S_n^2&=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n))^2\\&=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}_n^2)\end{aligned}$$

$$S_{n+1}^2=\frac{1}{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2)$$

$$\begin{aligned}\text{左边-右边}&=S_{n+1}^2-\frac{n}{n+1}[S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)^2]\\&=\frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2]-\frac{n}{n+1}[\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}_n^2)+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)^2]\\&=\frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2-\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\bar{X}_n^2-\frac{n}{n+1}(X_{n+1}^2-2X_{n+1}\bar{X}_n+\bar{X}_n^2)]\\&=\frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}X_{n+1}^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2+\frac{n^2}{n+1}\bar{X}_n^2+\frac{2n}{n+1}X_{n+1}\bar{X}_n]\\&=\frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}(X_{n+1}^2+2nX_{n+1}\bar{X}_n+n\bar{X}_n^2)-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2]\\&=\frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}(X_{n+1}+n\bar{X}_n)^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2]\\&=\frac{1}{n+1}[(n+1)\bar{X}_{n+1}^2-(n+1)\bar{X}_{n+1}^2]\\&=0\end{aligned}$$

1.14 设总体 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为总体的一个样本，试求样本均值 $\bar{X}$ 的概率密度。

解：

$$
\begin{aligned}
&X_1,X_2,\dots,X_n \sim \Gamma(n\alpha,\lambda)\\
&f(x)=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}x^{n\alpha-1}e^{-\lambda x},\quad x>0\\
&\text{令} t=\frac{x}{n},\\
f_{\bar{x}}(t)&=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}(nt)^{n\alpha-!}e^{-\lambda nt}|(nt)'|\\
&=\frac{(\lambda n)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}t^{n\alpha-1}e^{-(\lambda n)t},\quad t>0
\end{aligned}
$$

则：

$$
f_{\bar{X}}(x)=\begin{cases}\frac{(\lambda n)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}x^{n\alpha-1}e^{-(\lambda n)x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
$$

1.17 证明：若 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $Y=\frac{X}{k}\sim\Gamma(\alpha,k\lambda)$，其中 $k>0$。

解：

$$
\begin{aligned}
&f(x)=\frac{\lambda^{alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-lambdax},\quad x>0\\
&\text{令} t=\frac{x}{k},\\
&f_{\frac{X}{k}}(t)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(kt)^{\alpha-1}e^{-\lambda kx}|(kt)'|\\
=&\frac{(k\lambda)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-k\lambda x}\\
&\frac{X}{k}\sim\Gamma(\alpha,k\lambda)
\end{aligned}
$$

1.18 证明：若 $X\sim\beta(a,b)$，则 $E(X)=\frac{a}{a+b}, D(X)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$。

解：

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}\\
E(X)&=\int_0^1 x\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx\\
&=\frac{\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx\\
&=\frac{\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}\\
&=\frac{\frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}\\
&=\frac{a}{a+b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \frac{x^{a-1}(1-x)^(b-1)}{B(a,b)}dx \\
&= \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - (\frac{a}{a+b})^2 \\
&= \frac{a(a+1)(a+b) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}
$$

1.19 证明：若 $X \sim F(n,m)$，则 $Y = \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \sim \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$。

解：

$$
X \sim F(n,m), f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{n}{m}(\frac{n}{m}x)^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{n}{m}x)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad x > 0
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \\
f_Y(y) &= \frac{(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}(\frac{m}{n}\frac{y}{1-y})^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{y}{1-y})^{-\frac{n+m}{2}}\frac{m}{n}\frac{1}{(1-y)^2} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{m}{2}-1} \\
&= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{m}{2}-1}}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}
\end{aligned}
$$

$$
Y = \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \sim \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})
$$

1.20 已知 $X \sim t(n)$，求证：$X^2 \sim F(1,n)$。

解：

$$
X \sim t(n), f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}
$$

令$t=x^2$,

$$f_{X^2}(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{t}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{n}(\frac{x}{n})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$X^2\sim F(1,n)$$

1.24 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，试求统计量

$$Y=\frac{X_{n+1}-X_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的抽样分布。

解：

$$X_{n+1}-\bar{X}_n\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$$
$$\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim N(0,1)$$
$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$
$$Y=\frac{X_{n+1}-X_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}/(n-1)}}\sim t(n-1)$$

1.25 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 分别为正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的两个独立样本，试证：

$$\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

解：

$$\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1),\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1})^2\sim\chi^2(n_1),\sum_{i=1}^{n_2}(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2\sim\chi^2(n_2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1})^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2/n_2}\sim F(n_1,n_2)$$