西安交通大学

数理统计作业

姓名：_____唐靖凯_____

班级：_____5102 班_____

学号：_____3115370067_____

邮箱：__jingkaitang@qq.com__

2016 年 1 月

目　录

第一章 数理统计的基本概念

1.1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，...，X_n 为总体 X 的一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值，如要

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$$

则样本容量 n 应取多大？

解： 由**定理 1.2.4** 得 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，所以 $\frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$，又由条件 $P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = 0.95$ 可得，$P\{|\frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\} = 0.95$，有

$$\alpha = (1 - 0.95) \div 2$$
$$= 0.025$$
$$\mu_{\alpha=0.025} = 1.96$$
$$1.96 < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$
$$n = \lceil (1.96 \cdot \sigma)^2 \rceil$$

1.2 设电子元件的寿命（小时）$X \sim Exp(0.0015)$，独立测试 6 个元件并记下它们的失效时间，试求：

(1) 至 800 小时，没有一个元件失效的概率；

(2) 至 3000 小时，所有元件都失效的概率.

解： (1) 由题意知 $F(x) = e^{-0.0015 \cdot x}$，则

$$\begin{aligned} P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X \geq 800\} &= (F(800))^6 \\ &= (e^{-0.0015 \times 800})^6 \\ &= e^{-7.2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6; X < 3000\} &= (1 - F(3000))^6 \\ &= (1 - e^{-0.0015 \times 3000})^6 \\ &= (1 - e^{-4.5})^6 \end{aligned}$$

1.4 设总体 X 服从对数正态分布，即 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, ..., X_n$ 为总体 X 的一个样本，试写出 $X_1, ..., X_n$ 的联合概率密度.

解：

$$\begin{aligned} x > 0, \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i \sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

则：

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln x_i - \mu)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1.6 证明下列等式

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$.

解： (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n} [(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(X_i - \bar{X})^2 + 2(X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X} + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(X_i - \bar{X})X_i - (X_i - \bar{X})\bar{X}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [X_i^2 - \bar{X} \cdot X_i - (X_i - \bar{X})\bar{X}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2
\end{aligned}$$

1.7 设 $\bar{X}_n$ 和 S_n^2 分别为样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的样本均值和样本方差，再抽出一个样品 X_{n+1}，记样本 $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ 的样本均值和样本方差为分别 $\bar{X}_{n+1}$ 和 S_{n+1}^2，求证：

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)$$

$$S_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}[S_n^2 + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2]$$

解：(1)

$$\bar{X}_n + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{(n+1)\sum_{i=1}^{n} X_i + nX_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} X_i}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i + nX_{n+1}}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} X_i$$

$$= \bar{X}_{n+1}$$

(2)

$$S_n^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n))^2$$

$$= \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}_n^2)$$

$$S_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2)$$

左边-右边 $= S_{n+1}^2 - \frac{n}{n+1}[S_n^2 + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2]$

$$= \frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2] - \frac{n}{n+1}[\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}_n^2) + \frac{1}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2]$$

$$= \frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + n\bar{X}_n^2 - \frac{n}{n+1}(X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}\bar{X}_n + \bar{X}_n^2)]$$

$$= \frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}X_{n+1}^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2 + \frac{n^2}{n+1}\bar{X}_n^2 + \frac{2n}{n+1}X_{n+1}\bar{X}_n]$$

$$= \frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}(X_{n+1}^2 + 2nX_{n+1}\bar{X}_n + n\bar{X}_n^2) - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2]$$

$$= \frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}(X_{n+1} + n\bar{X}_n)^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2]$$

$$= \frac{1}{n+1}[(n+1)\bar{X}_{n+1}^2 - (n+1)\bar{X}_{n+1}^2]$$

$$= 0$$

1.14 设总体 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的一个样本，试求样本均值 $\bar{X}$ 的概率密度。

解：

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \Gamma(n\alpha, \lambda)$$

$$f(x) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$令 t = \frac{x}{n},$$

$$f_{\bar{x}}(t) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} (nt)^{n\alpha-!} e^{-\lambda nt} |(nt)'|$$

$$= \frac{(\lambda n)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} t^{n\alpha-1} e^{-(\lambda n)t}, \quad t > 0$$

则：

$$f_{\bar{X}}(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda n)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-(\lambda n)x}, & x > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

1.17 证明：若 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则 $Y = \frac{X}{k} \sim \Gamma(\alpha, k\lambda)$，其中 $k > 0$。

解：

$$f(x) = \frac{\lambda^{alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-lambda x}, \quad x > 0$$

$$令 t = \frac{x}{k},$$

$$f_{\frac{X}{k}}(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (kt)^{\alpha-1} e^{-\lambda kx} |(kt)'|$$

$$= \frac{(k\lambda)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-k\lambda x}$$

$$\frac{X}{k} \sim \Gamma(\alpha, k\lambda)$$

1.18 证明：若 $X \sim \beta(a, b)$，则 $E(X) = \frac{a}{a+b}, D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$。

解：

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} dx$$

$$= \frac{\int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}}{B(a,b)} dx$$

$$= \frac{\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

$$= \frac{\frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \frac{x^{a-1}(1-x)^{(b-1)}}{B(a,b)} dx$$
$$= \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)}$$
$$= \frac{\frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$
$$= \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - (\frac{a}{a+b})^2$$
$$= \frac{a(a+1)(a+b) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$
$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

1.19 证明：若 $X \sim F(n,m)$，则 $Y = \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \sim \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$。

解：
$$X \sim F(n,m), f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{n}{m}(\frac{n}{m}x)^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{n}{m}x)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad x > 0$$

$$Y = \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X}$$
$$f_Y(y) = \frac{(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}(\frac{m}{n}\frac{y}{1-y})^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{y}{1-y})^{-\frac{n+m}{2}}\frac{m}{n}\frac{1}{(1-y)^2}$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{m}{2}-1}$$
$$= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{m}{2}-1}}{B(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})}$$

$$Y = \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \sim \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$$

1.20 已知 $X \sim t(n)$，求证：$X^2 \sim F(1,n)$。

解：
$$X \sim t(n), f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$令 t = x^2,$$

$$f_{X^2}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} t^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{t}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{n}(\frac{x}{n})^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{x}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$X^2 \sim F(1, n)$$

1.24 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试求统计量

$$Y = \frac{X_{n+1} - X_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的抽样分布。

解：

$$X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$$

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$Y = \frac{X_{n+1} - X_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}/(n-1)}} \sim t(n-1)$$

1.25 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 分别为正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的两个独立样本，试证：

$$\frac{n_2\sigma_2^2\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$$

解：

$$\frac{X_i - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1), \frac{Y_i - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i - \mu_1}{\sigma_1})^2 \sim \chi^2(n_1), \sum_{i=1}^{n_2}(\frac{Y_i - \mu_2}{\sigma_2})^2 \sim \chi^2(n_2)$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1})^2/n_1}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

$$\frac{n_2\sigma_2^2\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$$

第二章 参数估计

2.1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，试求下列总体分布中未知参数的矩估计量，

(1) 总体 $X \sim Exp(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$ 未知；

(2) 总体 $X \sim U(a, b)$，其中 $a < b, a, b$ 未知；

(3) 总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知；

(4) 总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e - \beta x, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

其中 k 是已知正整数，$\beta > 0$ 为未知参数；

(5) 总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, & x > a \\ 0, & x \le a \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$，λ, a 是未知参数；

(6) 总体 $X \sim B(m, p)$，其中 m 已知，$0 < p < 1$，p 为未知参数；

解：(1)
$$a_1 = \mu = \frac{1}{\lambda}, \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

(2)
$$a_1 = \mu = \frac{a+b}{2}, a_2 = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + (\frac{a+b}{2})^2$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}S \\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}S \end{cases}$$

(3)
$$a_1 = \mu = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

(4)
$$a_1 = \mu = \int_0^{+\infty} x \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x} dx$$

$$\hat{beta} = \frac{k}{\bar{x}}$$

(5)

$$a_1 = \mu = \int_a^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx$$

$$a_2 = \sigma^2 + \mu^2 = \int_a^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx$$

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1}{S} \\ \hat{a} = \bar{X} - S \end{cases}$$

(6)

$$a_1 = \mu = mp$$

$$m\hat{p} = a_1 = \bar{X}$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$$