第24卷 增刊2 工 程 数 学 学 报 Vol. 24 Supp.2
2007年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0110-05

"乘公交，看奥运"参考解答

方沛辰[1]， 吴孟达[2]

(1- 吉林大学数学学院，长春 130012； 2- 国防科技大学理学院，长沙 410073)

摘 要： 本文对2007高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题给出了一个比较详细的解答与说明。

分类号: AMS(2000) 90C11 **中图分类号:** O221 **文献标识码:** A

1 问题分析

本题根据公交线路查询系统研制的实际需求简化改编而成。问题容易理解，相关参考文献也较多，但涉及到公汽与地铁线路的联系，以及换乘时间等细节的处理，加上需要处理的数据量较大，问题并不十分简单。这是一个多目标优化问题，换乘次数最少、费用最省、时间最短显然是乘客在选择乘车线路时最关心的几个目标，从该问题的实际背景来看，采取加权合成将问题转化为单目标优化问题的解题思路不太合适。比较适当的方法是对每个目标寻求最佳线路，然后让乘客按照自己的需求进行选择。

2 直达矩阵建立

不考虑地铁：首先建立直达矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，

$$a_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i=j,\\ \infty, & i\text{ 到 }j\text{ 无直达车},\\ l_{ij}, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 n 为公汽站点个数，在本题中 $n=3957$，l_{ij} 表示由 i 站点直达 j 站点付出的代价，可以为时间或费用，根据 l_{ij} 的意义不同，可分别称 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵或直达费用矩阵。注意 $A^{(0)}$ 不是对称矩阵。

考虑地铁：与上类似建立"直达"矩阵 $A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$，其中 n 为公汽站点个数+地铁站点个数，在本题中 $n=3957+39=3996$。当 i 站点与 j 站点同为公汽站点或同为地铁站点时，$a_{ij}^{(0)}$ 之定义与上面定义相同；当 i 站点与 j 站点中一个为公汽站点、另一个为地铁站点时，分为以下情形：

1) i 站点是公汽站点，j 站点为地铁站点：

1.1) 若 j 站点不是 i 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，则令 $a_{ij}^{(0)}=\infty$。

1.2) 若 j 站点是 i 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，设 t站点为公汽线路 L 与地铁线的公汽换乘站点

若 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{it}^{(0)}+t$ 站点与 j 站点间的步行时间；

若 $A^{(0)}$ 为直达费用矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{it}^{(0)}$。

2) j 站点为公汽站点，i 站点为地铁站点：

2.1) i 站点不是 j 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，则令 $a_{ij}^{(0)}=\infty$。

2.2) i 站点是 j 站点所在公汽线路 L 与地铁线的地铁换乘站点，设 t 站点为公汽线路 L 与地铁线的公汽换乘站点。

若 $A^{(0)}$ 为直达时间矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{tj}^{(0)}+i$ 站点与 t 站点间的步行时间；

若 $A^{(0)}$ 为直达费用矩阵，则令 $a_{ij}^{(0)}=a_{tj}^{(0)}$。

经过如此处理后，除换乘时间不同，在以下建模与求解过程中，就不必区分站点类型了。

图论描述：用图论语言描述，以上步骤相当于建立了一个带权有向图，图中的点表示站点，图中的弧表示前一站点能够直达后一站点，弧上的权表示前一站点直达后一站点所需付出的代价（时间或费用）。

3 优化目标考虑

从乘客角度考虑，优化目标应是以下三个目标之一：换乘次数最少，费用最省，时间最短。分别考虑对此三个目标的优化，按照第一目标最优，第二、三目标在第一目标最优前提下最优或次优来求解。

4 矩阵算子"⊙"的定义

定义矩阵算子"⊙"如下：设A、B均为 n 阶方阵，

$$C=A\odot B, \tag{1}$$

其中

$$c_{ij}=\min\{a_{ik}+b_{kj}+\delta_{i,j,k}|k=1,2,\cdots,n\}, \tag{2}$$

其中 $\delta_{i,j,k}$ 之定义如下：

当考虑费用矩阵之间运算时，$\delta_{i,j,k}=0$；

当考虑时间矩阵之间运算时，$\delta_{i,j,k}$ 表示换乘时间，具体来说：当 $i=j$ 或 $k=i,j$ 时，$\delta_{i,j,k}=0$；

以下设 $i\neq j$，$k\neq i$，j，当 i，j 为公汽站点而 k 为地铁站点，或者 i，j 为地铁站点而 k 为公汽站点时，令 $\delta_{i,j,k}=\infty$；其它形式有

$$\delta_{i,j,k}=\begin{cases}5, & \text{若公汽换乘公汽,}\\ 4, & \text{若地铁换乘地铁,}\\ 3, & \text{若地铁换乘公汽,}\\ 2, & \text{若公汽换乘地铁.}\end{cases}$$

8 已知所有站点间步行时间的优化模型

同一公交线的往返路线视为两条单行线，记共有 m 条单行公交线，构造一个 $m+2$ 个点构成的完全图。其中 a 为起点（出发点），b 为终点（目的地），此外每条公交线也视为一个点，边表示两点之间有步行关系。步行时间为边权，针对不同的边可分为上车前、下车后和换车时步行时间，构成步行时间矩阵 $(s_{ij}) = S_{(m+1)\times(m+1)}$。行依次表示的是 m 条公交线与起点，列依次表示的是 m 条公交线与终点。

每个公交线点还有三个信息为点权：

1). 公交线名称及上行或下行；

2). 类型 $E = \begin{cases} L, & 公汽 \\ T, & 地铁 \end{cases}$ 及票价方式；

3). 乘车站数表矩阵 $G^i = (g^i_{cd})_{(m+1)\times(m+1)}$，$i = 1,\cdots,m$，其中 g^i_{cd} 表示从 c 到 d 经过 i 号公交线时需要乘车的站数，c 到 d 利用不上 i 时 g^i_{cd} 取无穷大。这个矩阵的行列表示同 S。

于是原问题转化为在这个图上求 a 到 b 的最短路，最短的概念可以是经过的点数最少，乘车的总站数最少，总的步行时间最少，总车费最少这样几个目标的各种组合方式。

先进行一些预备的计算。

8.1) 上车前步行时间，即起点到各公交线及终点的步行时间（共 $m+1$ 个）

从 a 到第 c 条公交线的第 k 站的步行时间记为 t_k, $k = 1,2,\cdots,l_c$，则

$$s_{m+1c} = \min\{t_k, k = 1,\cdots,l_c\}$$

且对应站号 $k^* = k^c_a$, $c = 1,\cdots,m+1$.

8.2) 换车步行时间，即两条公交线间步行时间（不一定为零共 $m\,(m-1)$ 个），

对第 c 条公交线与第 d 条公交线的任何两站之间的步行时间取最小，得

$$s_{cd} = \begin{cases} \min\{s_{ij}, i = 1,\cdots,l_c, j = 1,\cdots,l_d\}, & c \neq d, \\ 0, & c = d, \end{cases} \quad c,\ d = 1,\cdots,m.$$

同时得到两条公交线上的分别两个站号即为换乘的两个站

$$(i^*, j^*) = (i_c, j_d), \quad 1 \le c, \quad d \le m.$$

8.3) 下车后步行时间与上车前步行时间计算类似，可得到 s_{dm+1}, $k^* = k^d_b$, $d = 1,\cdots,m$。至此步行时间矩阵 S 全部算出。

8.4) 利用上面关于 K^c_a (i_c, i_d) K^d_b 的结果，计算全部

$$G^i = (g^i_{cd})_{(m+1)\times(m+1)}.$$

可以用0-1整数规划解决这个问题，方法是分出恰乘一次公交车，恰乘两次公交车，恰乘三次公交车，恰乘四次公交车四种情况分别求出最优解然后比较得出最优解。

恰乘一次公交车的模型如下：变量全部是0-1变量，共有 $3m$ 个

$x_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择去第 i 条公交线的路；

$y_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择乘第 i 线公交车；

$z_i, i = 1,2,\cdots,m$ 表示选不选择从第 i 条公交车下车后走到目的地的路。

它们都是取1表示选择而取0表示不选择。约束共 $2m+1$ 个：

$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1$ 含义是只选择一条公交线，

$y_i \le x_i,\ y_i \le z_i,\ i=1,\cdots,m$，含义是要乘第 i 条公交线就要走相应的两条路。

不同的人会有不同的需求，比如退休的人出行时主要考虑怎样能更节省路费；出差到外地的人主要考虑怎样能更节省时间；带东西多的人不怕运行的站数多，就怕总换车和步行的距离长等，但有一些属公共的要求比如希望少换车、花钱少、总的时间少、尽量有座和不能走太远的路等，需具体情况具体分析。

目标函数据用户选择的情况用点权和边权构造，共同点都是取最小值。例如：

步行时间最少时目标函数可取为

$$\min \sum_{c=1}^{m} S_{m+1,c}x_c + \sum_{d=1}^{m} S_{d,m+1}z_d,$$

总时间最少时目标函数可取为

$$\min\left\{\sum_{c=1}^{m} S_{m+1,c}x_c + \sum_{d=1}^{m} S_{d,m+1}z_d + \sum_{i=1}^{m} y_i g^i_{m+1,m+1} v^i_E + \sum_{i=1}^{m} y_i w^i_E\right\},$$

其中

$$v^i_E = \begin{cases} 3, & E=L, \\ 2.5, & E=T, \end{cases} \qquad w^i_E = \begin{cases} 3, & E=L, \\ 2, & E=T, \end{cases}$$

车费最小时目标函数可取为

$$\min F = \begin{cases} 3, & E=T, \\ 1, & E=L,\ \text{单一}, \\ \left\lceil \dfrac{\sum_{i=1}^{m} y_i g^i_{m+1,m+1}}{20} \right\rceil, & E=L,\ \text{分段}. \end{cases}$$

恰乘两次公交车的模型类似上面，区别是有三条路和两线公交车，所以变量和约束都多一些而已。恰乘三次以上依次类推。

概括起来这个核心算法是建立图论模型，针对不同的目标函数用求解0-1规划的方法多层次解决。

"Public Transportation Routes Selection" Reference Explanation

FANG Pei-chen[1], WU Meng-da[2]

(1- School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012;
2- School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract: This paper provides a comparatively detailed answer and explanation about "Gao Jiao She" Cup Nation's Undergraduate Mathematical Modeling Contest question B in 2007.