

文章编号:1005-3085(2007)08-0103-07

最优公交线路选择

郝晓磊, 李 煜, 兰名荣

指导教师: 贺祖国

(北京邮电大学, 北京 100876)

编者按: 本文在建立了公交网络图的基础上, 分别建立了基于点搜索的多目标优化模型与基于线搜索的双目标优化模型, 前者可由改进的 Dijkstra 算法求解, 而后者为依换乘次数增加的递归算法。接近最优的实例计算结果反映了本文模型的有效性与作者较强的编程能力。节点拆分是本文的一个亮点, 如此处理后便将换乘时间纳入到了一个经典的最短路问题中。另外, 对地铁线路的处理也有其独到之处。对两种模型的长短处的比较不够充分, 是本文最大的缺陷。

摘 要: 针对公交线路选择问题, 考虑到公交系统的两个基本要素—站点与线路, 本文分别建立了基于点搜索的多目标优化模型和基于线搜索的双目标优化模型。前者通过建立有向图, 将站点转化为图中的节点, 将票价、时间、换乘这3种信息转化为节点间的权值, 之后按照省时、省钱、换乘少这三个目标的三种不同优先次序逐点搜索, 分别寻找最佳路径, 给出了三组不同的解答。对于后者, 我们以换乘次数作为约束条件, 将时间与金钱作为目标建立了双目标的优化模型, 第一问分为0, 1, 2次换乘三种情况求解, 第二问分为借助地铁和不借助地铁两种情况求解。

关键词: 点搜索; 线搜索; 双目标优化; 多目标优化

分类号: AMS(2000) 90C29

中图分类号: O221

文献标识码: A

1 问题分析

1.1 问题一

1. 实际问题的抽象:

为了求出起始站点与目的地站点间的最佳路径, 将公汽站点抽象为结点, 将公汽线路抽象为连接线路各站点的有向边, 构造一公交网络有向图, 用边上的权值反映行驶时间、换乘时间和票价等信息, 从而将求解最佳路径问题转化为求解图中起始节点与目的地节点间的最短路径的问题, 建立基于点搜索的多目标优化模型, 运用改进的 Dijkstra 算法^[1]求解。

2. 等价节点的引入:

如果同一个公汽站点有多条线路经过, 则将该站点对应的节点拆分成多个等价节点, 等价节点的数目与通过该站点的线路数目相同。用等价节点之间的权值大小反映换乘时间和票价等信息。如图1所示。

1.2 问题二

地铁线路与公汽线路一样, 可以在图中用节点表示地铁站点, 用节点间的有向边表示地铁线路的方向, 用边上的权值反映行驶时间、换乘时间和票价等信息, 但地铁线路对应的权值与公汽的权值不一样。

又由于给出的数据中地铁线路 T1 和 T2 都经过站点 D12 与 D18, 所以也要把站点 D12 和 D18 分拆成等价节点。

然而第二问相较于第一问最大的不同在于需要考虑公汽与地铁的换乘, 这可以分为以下3种情况:

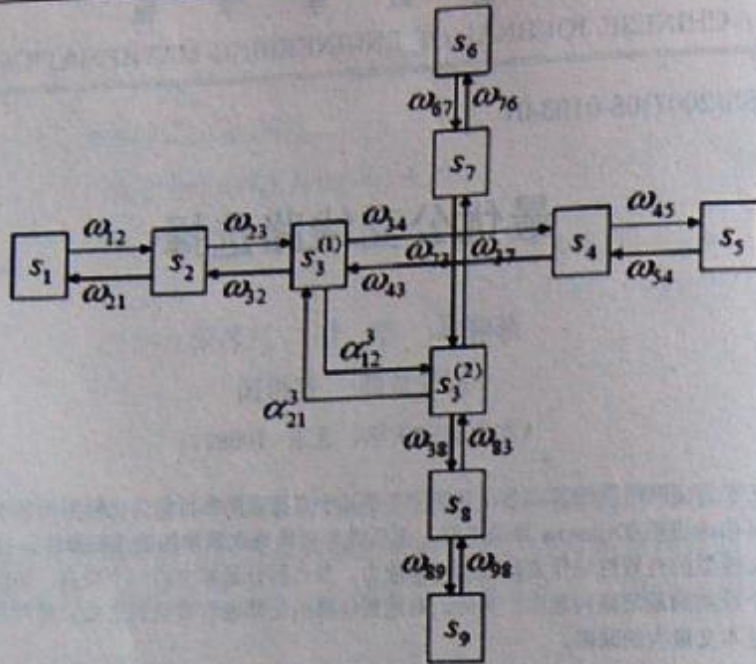


图 1: 同一站点有多条公交线路经过图形

- 1) 从一公汽站点, 经地铁站点(不乘坐地铁), 到达另一个公汽站点, 称此为“穿越”;
- 2) 从一公汽站点到对应换乘的地铁站点, 乘坐地铁, 称此为“进站”;
- 3) 从一地铁站点到对应换乘的公汽站点乘车(刚刚乘坐过地铁), 称此为“出站”。

由于出现了以上3种情况, 需要修改第一问的部分图形结构, 主要是修改公汽与地铁相衔接的节点与权值。

在修改完成后, 问题依然是求解最佳路径, 同样是建立基于点搜索的多目标优化模型, 运用改进的 Dijkstra 算法求解模型。

2 基于点搜索的多目标优化模型

2.1 问题一

2.1.1 符号约定

M, N	分别表示公交线路总数 公汽站点总数
$G(S, E)$	由所给数据抽象而成的有向图
S, E	分别表示有向图中所有节点组成的集合 有向图中所有有向边组成的集合
$A = (a_{ij})_{N \times N}$	有向图 $G(S, E)$ 对应的邻接矩阵
s_i	编号 i 的站点对应的节点。其中 s_A 为起始节点, s_B 为目的地节点
$s_i^{(m)}$	节点 s_i 拆分后, 第 m 个等价节点的符号
ω_{ij}	节点 s_i 指向节点 s_j 的权值, 反映行驶时间和票价等信息
$\alpha_{mn}^{(i)}$	节点 s_i 拆分后, 第 m 个等价节点 $s_i^{(m)}$ 指向第 n 个等价节点 $s_i^{(n)}$ 的权值
T	求出的最佳路径上的点列, $T = \{s_A, s_{i_1}, \dots, s_{i_x}, \dots, s_B\}, s_x \in S$
$L_k = F_k(s_{i1}, s_{i2}, \dots)$	由公汽站点序列到公汽线路的映射, 程序中此映射用链表结构表示

2.1.2 模型建立与求解

1. 模型建立

目标函数:

$$\text{Min} = \sum_{s_{ix} \in T} (\omega_{ixiy} + \alpha_{mn}^x)$$

决策变量:

$$T = \{s_A, s_i, \dots, s_x, \dots, s_B\}, s_x \in S,$$

约束条件:

$$\forall i, j, s_i, s_j \in T \ \& \ i \neq j, s_i \neq s_j,$$

$$\forall i, j, s_i, s_j \in T \ \& \ |i - j| = 1, a_{ij} = 1.$$

2. 模型求解

Dijkstra 算法的改进: 应用传统的 Dijkstra 算法求解, 算法时间长, 时间复杂度为 $O(n^2)$, 当站点数 n 很大时, 运行时间长。针对时间复杂度的改进, 同时要更好的满足多目标优化模型, 我们提出基于优先队列改进的 Dijkstra 算法。在 C++ 程序^[2]中, 我们以二权堆来实现, 进行每次结点扩展时, 根据价格、时间、换乘的优先级进行扩展, 算法时间复杂度为 $O(n \log_2 n)$, 站点数 n 越大, 优越性越明显。

本模型运用改进的 Dijkstra 算法求解, 得到三组解。他们是根据查询者的 3 种不同需求, 即换乘次数尽量少、总计耗时尽量少、总计票价尽量少(按照 3 种需求的优先级递减顺序排列)得出的。

对于“换乘次数尽量少-总计耗时尽量少-总计票价尽量少”的情况, 有:

- 1) 将图中所有节点(等价节点除外)间权值 ω_{ij} 赋值为 0, 将等价节点间权值 $\alpha_{mn}^{(i)}$ 赋值为 1, 运行改进的 Dijkstra 算法;
- 2) 如果待探测的不同节点权值累加相同, 则优先考虑总计耗时较少的节点;
- 3) 如果总计耗时也相同, 则优先考虑总计票价较少的节点;
- 4) 如果总计票价还相同, 则认为最佳路径有多条;
- 5) 由最佳路径的节点序列 T 以及由公汽站点序列到公汽线路的映射 $L_k = F_k(s_{i1}, s_{i2}, \dots)$ 反推最佳路径的乘坐线路和换乘节点。

“总计耗时尽量少-换乘次数尽量少-总计票价尽量少”与“总计票价尽量少-换乘次数尽量少-总计耗时尽量少”的步骤与上类似, 在此不赘述。

2.2 问题二

2.2.1 符号补充

公汽换乘公汽平均耗时, $t_{11} = 5$

地铁换乘地铁平均耗时, $t_{22} = 4$

地铁换乘公汽平均耗时, $t_{21} = 7$

公汽换乘地铁平均耗时, $t_{12} = 6$

公汽换乘公汽其中的步行时间, $t'_{11} = 2$

地铁换乘地铁其中的步行时间, $t'_{22} = 2$

地铁换乘公汽其中的步行时间, $t'_{21} = 4$

公汽换乘地铁其中的步行时间, $t'_{12} = 4$

2.2.2 图形改动

以下举例说明怎样改动图中公汽与地铁相衔接的部分。其中用数字标号的节点表示公汽站点, 用字母标号的节点表示地铁节点; a_1 与 a_2 表示同一个地铁站点分拆之后形成的等价节点; 虚线框范围内表示公汽与地铁相衔接的部分。节点间的权值以所耗时间赋值。

1. 如果衔接部分所包含的节点不是起始节点或目的地节点, 修改之后的图形如图 2:

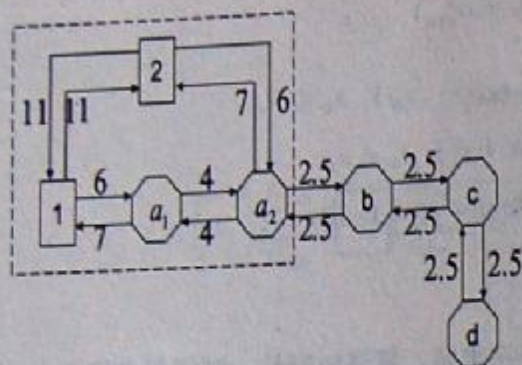


图2: 衔接部分所含节点非起始节点或目的节点图

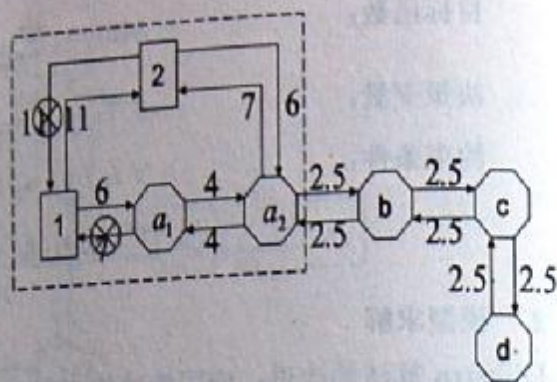


图3: 衔接部分所含节点是起始节点图

1) 穿越: 从公汽节点1经过地铁等价节点 a_1 到达公汽节点2, 之后乘坐公汽, 其间并没有乘坐地铁, 所以权值为 $t_{12} + t_{21} = 11$ 。

2) 进站: 从公汽节点1到地铁等价节点 a_1 , 之后乘坐地铁, 所以权值为 $t_{12} = 6$ 。

3) 出站: 从地铁等价节点 a_1 到公汽节点1, 之后乘坐公汽, 所以权值为 $t_{21} = 7$ 。

4) 其他: 地铁等价节点 a_1 到 a_2 的权值为 $t_{22} = 4$, 地铁不同站点之间时间权值为 2.5

2. 如果衔接部分所包含的节点是起始节点或目的地节点, 修改之后的图形如图3:

1) 穿越: 从公汽节点1经过地铁等价节点 a_1 到达公汽节点2, 之后乘坐公汽, 其间并没有乘坐地铁, 所以权值为 $t_{12} + t_{21} = 11$, 但是由于节点1是起始节点, 所以没有节点2到节点1的边。

2) 出站: 由于节点1是起始节点, 所以没有等价节点 a_1 到节点1的边。

注 衔接部分所含的节点是目的地节点的修改图与此类似, 在此不再赘述。

3 基于线搜索的双目标优化模型

3.1 问题一

3.1.1 模型建立

假设换乘次数不超过两次, 我们可以分别求出换乘一次, 两次和不换乘时的最优解, 再从这三者中取最优解。

第一目标

$$\text{Min } P(A, B) = \begin{cases} Z_{AB}, & k_1 = 0, \\ Z_{AX} + Z_{XB}, & k_1 = 1, \\ Z_{AX} + Z_{XY} + Z_{YB}, & k_1 = 2. \end{cases}$$

第二目标 $\text{Min } Q$

其中 $P(A, B)$ 表示从 A 到 B 的时间, Z_{ij} 表示从 i 直达 j 的最短时间, 而 $Q(A, B)$ 表示从 A 到 B 所支出的交通费用, k_1 表示换乘次数。此外, 下文用到, Z' 表示两站点间最快的公交线路, C_{ls} 表示 s 在线路 l 上的第几站。

3.1.2 模型求解

1. 无须换乘直接给出结果 Z'_{AB} 。

2. 换乘一次

1) 寻找在起点可乘坐的所有线路 L_A , $L_A = \{l | C_{lA} \neq 0\}$ 。

2) 寻找从 A 出发, 乘坐 L_A 各个线路, 能到达的所有车站 S_A , $S_A = \{s | Z'_{As} \neq L_A\}$.

3) 由上可知, 当 $X \in S_A$, $Z'_{XB} \neq 0$ 时, 所有 $A-X-B$ 都为可到达路径。然后, 我们计算所有路径中, $Z_{AX} + Z_{XB}$ 最小者, 即为所求路径。

3. 换乘两次

1) 寻找 L_A , 以及可到达中点的所有车次 L_B , $L_B = \{l | C_{lB} \neq 0\}$.

2) 寻找 S_A , 以及车站集合 $S_B = \{s | Z'_{sB} \in L_B\}$, 从这些车站出发, 乘坐 L_B 可达终点 B 。

3) 由上可知, 当 $X \in S_A$, $Y \in S_B$, $Z'_{XY} \neq 0$ 时, 所有 $A-X-Y-B$ 都为可到达路径。然后, 我们计算所有路径中, $Z_{AX} + Z_{XY} + Z_{YB}$ 最小者, 即为所求路径。

3.2 问题二

我们分别求出借助地铁和不借助地铁时的最优解, 并从这两者中取较优者。

1. 不借助地铁的模型

第一目标

$$\text{Min } P(A, B) = \begin{cases} Z_{AB} & + k_1 \times 3 + k_2 \times 8, & k_1 = 0, \\ Z_{AX} + Z_{XB} & + k_1 \times 3 + k_2 \times 8, & k_1 = 1, \\ Z_{AX} + Z_{XY} + Z_{YB} & + k_1 \times 3 + k_2 \times 8, & k_1 = 2. \end{cases}$$

第二目标 $\text{Min } Q$

其中, k_1 为换乘次数, k_2 为穿越地铁的次数。

2. 借助地铁的模型

$$\text{Min } P(A, B) = \begin{cases} Z_{AB} + T_{XY} + Z_{YB} & + 6 + 7 + k_2 \times 8, & A \notin X \text{ \& } B \notin Y, \\ T_{XY} + Z_{YB} & + 6 + 7 + k_2 \times 8, & A \in X \text{ \& } B \notin Y, \\ Z_{AX} + T_{XY} & + 6 + 4 + k_2 \times 8, & A \notin X \text{ \& } B \in Y, \\ T_{XY} & + 6 + 4 + k_2 \times 8, & A \in X \text{ \& } B \in Y, \end{cases}$$

其中 $B \in Y$ 表示终点是临铁站点, $A \in X$ 表示起点是临铁站点。 T_{XY} 表示乘坐地铁, 经最佳路径从 X 到 Y 所花费的时间。

4 结果

在本文的最后, 我们给出此题的完整解答。以下对表格做一些简单的说明。方案1为“换乘次数尽量少-总计耗时尽量少-总计票价尽量少”; 方案2为“总计耗时尽量少-换乘次数尽量少-总计票价尽量少”; 方案3为“总计票价尽量少-换乘次数尽量少-总计耗时尽量少”。

表1: 问题一的解答

起终点	方案	价格	换乘	时间	线路1	换站1	线路2	换站2	线路3	换站3	线路4	换站4	线路5
S3359 →	1	3	1	101	L436	S1784	L217						
	2	3	2	64	L484	S3727	L485	S1784	L167				
S1828	3	3	1	101	L436	S1784	L217						
S1557 →	1	3	2	106	L084	S1919	L189	S3186	L460				
	2	4	3	99	L084	S1919	L189	S3186	L091	S0903	L460		
S0481	3	3	2	106	L363	S1919	L189	S3186					
S0971 →	1	3	1	128	L013	S2184	L417						
	2	3	2	103	L013	S2517	L290	S2159	L469				
S0485	3	3	1	128	L013	S2184	L417						
S0008 →	1	2	1	83	L463	S2083	L057						
	2	5	4	59	L198	S3766	L476	S2085	L406	S0604	L328	S0525	L103
S0073	3	2	1	83	L463	S2083	L057						
S0148 →	1	3	2	106	L308	S0036	L156	S2210	L417				
	2	4	3	102	L308	S3604	L123	S2361	L156	S3351	L417		
S0485	3	3	2	106	L308	S0036	L156	S3332	L417				
S0087 →	1	2	1	65	L454	S3496	L209						
	2	3	2	46	L206	S0088	L231	S0427	L097				
S3676	3	2	1	65	L454	S3496	L209						

表2: 问题二的解答

起终点	方案	价格	换乘	时间	线路1	换站1	线路2	换站2	线路3	换站3	线路4	换站4	线路5
S3359 →	1	3	1	101	L436	S1784	L217						
	2	7	4	62	L123	S2903	L201	D12	T2	S1961	L428	S1671	L041
S1828	3	3	1	101	L436	S1784	L167						
S1557 →	1	3	2	106	L363	S1919	L189	S3186	L460				
	2	4	3	99	L084	S1919	L189	S3186	L317	S0902	L312		
S0481	3	3	2	106	L363	S1919	L189	S3186	L460				
S0971 →	1	3	1	128	L013	S2184	L417						
	2	6	3	95	L094	D01	T1	S2534	L156	S3351	L417		
S0485	3	3	1	128	L013	S2184	L417						
S0008 →	1	2	1	83	L355	S3917	L345						
	2	5	3	53.5	L200	D15	T1	D12	T2	S0525	L103		
S0073	3	2	1	83	L355	S2303	L345						
S0148 →	1	5	2	87.5	L024	D02	T1	S0466	L051				
	2	6	3	86.5	L024	D02	T1	S2534	L156	S3332	L417		
S0485	3	3	2	106	L308	S0036	L156	S3351	L417				

表2: 问题二的解答 续表

起终点	方案	价格	换乘	时间	线路1	换站1	线路2	换站2	线路3	换站3	线路4	换站4	线路5
S0087 →	1	3	0	30	T2								
	2	3	0	30	T2								
S3676	3	1	0	49	L231								

参考文献:

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003
 [2] 王红梅, 胡明, 王涛. 数据结构(C++版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

Optimal Solutions to the Bus Path Selection

HAO Xiao-lei, LI Yu, LAN Ming-ying

Advisor: HE Zu-guo

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: Considering the fact that the bus path selection problem of the traffic system include two basic elements, stops and lines, we develop the multi-objective optimization model based on spots searching and the double-objective optimization model based on line searching. For the first model, we conclude three groups of solutions, basing on three goals, time saving, money saving and the least transfers, but with different priorities. In task one, we convert the price, the time, and transfers to weighted value in order to establish a graph, and then acquire the optimal path for three goals with different priorities. In task two, we not only add subway weighted values into the graph, but a new concept called the near-subway stop is also introduced for subway analyses. In model two, based on two goals, the time and the price, we set transfers as a restriction. In task one, we find all solutions when people make transfers once, twice or do not, and then get the best of them. In task two, we take two conditions into considerations. One is not by-subway which resemble or even is the same as the situation in the task one. The other is by-subway in which the near-by stop concept is used to solve the problem.

Keywords: spot searching; line searching; double-goal optimization; multi-goal optimization