

储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。题目要求用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

本文通过了几何学、积分学、数值积分，最小二乘法等，针对三种不同情况建立了如下模型。

模型一：小椭圆油罐无变位情况下油容量 V_1 与油位高度 h_1 的关系。

$$v_1 = abl \left(\frac{h_1 - b}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - b}{b} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{h_1 - b}{b} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

模型二：小椭圆油罐有变位情况下油容量 V_1 与油位高度 h 的关系

$$V_1 = \frac{1}{\tan \alpha} \int_{h_1}^{h_2} S(h) dh$$

模型三：实际油罐有变位情况下油容量 V 与油位高度 h 以及变位参数的关系

$$V = \frac{1}{\tan \alpha} \int_{h_b}^{h_a} S(h) dh + \int_{-r}^{h_a} S(y) dy + \int_{-r}^{h_b} S(y) dy$$

通过对模型一和模型二的比较，可得出在有变位的情况下，相同油位高度下，无变位比有变位含有更多的油。并在附录中给出罐容表标定值。

通过考察模型三，通过最小二乘法求得 $\alpha = 2.1, \beta = 4.6$ （单位：角度），并将变位参数带入模型三中，经过附件 2 中数据进行检验，得出大多数误差在 1L 以内。

关键词：卧式储油罐 体积标定 数值积分 最小二乘法 多重积分

1. 问题提出

1.1 背景

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。图1是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图2是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图3是罐体横向偏转变位的截面示意图。图见附录。

用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

1.2 问题

（1） 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图4的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体，见附录），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.10$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

（2） 对于图1所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。进一步利用附件2中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

2. 条件假设

- 1) 忽略油罐发生纵向位移以及横向位移时引起的油罐结构的变化
- 2) 假设油罐发生变位角不会过大
- 3) 假设油位探针、出油管以及进油管等设备对油罐内容积影响忽略不计

3. 符号说明

a ——小椭圆油罐截面长半轴

b ——小椭圆油罐截面短半轴

α ——油罐纵向倾斜角度

β ——油罐横向倾斜角度

h_1 ——小椭圆油罐油位探针显示高度

h_2 ——实际储油罐油标探针显示高度

4. 问题分析

4.1 问题一分析

问题一要求对小椭圆油罐建立模型研究罐体变位后对罐容表的影响，给出油位高度间隔差为 1cm 的罐容表标定值，并在附录中提供了实验数据。对于问题一，本文对两种情况，即无变位和变位时，分别建立数学模型，对罐体变位后对罐容表的影响进行评估，而附录中提供的数据可以用于检验模型的精确性以及与实际误差。

对于无变位的情况，可以利用几何学和积分学求得油罐中油的体积与油位高度的函数关系。对于变位的情况，类似地也可求得油罐中油的体积与油位高度的函数关系。对这两个函数关系进行考察即可。最后，利用题目附录中提供的数据检验模型，比较两个函数关系即可得出罐体变位后对罐容表的影响。

利用油罐变位后的数学模型即可求得变位后油位高度间隔 1cm 时的罐容表标定值。

4.2 问题二分析

问题二要求对于实际储油罐（如图一所示，见附录），建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，并根据实际检测数据确定变位参数。

首先数学模型即为罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。在这里主要考虑变位参数的影响。由问题一得出纵向倾斜角度 $\alpha=4.1^\circ$ 时油罐内储油量与油位高度的关系。将纵向倾斜角 α 一般化可类似地求得油罐内储油量与纵向倾斜角 α 的关系。由于油罐是圆筒形，所以水平倾斜时只要考虑浮标所测的油位高度变化即可。

5. 模型建立与求解

5.1 问题一的解答

5.1.1 模型建立

模型一：无变位

由下图 5.1.1.1, $v_1 = S(h_1) \cdot l$, 即无变位时, 储油量 v_1 与浮标测定的高度 h_1 的关系, 其中 $S(h_1)$ 是油位高度为 h_1 时, 油罐椭圆截面的面积。

$$S(h_1) = ab \left(\frac{h_1 - b}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - b}{b} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{h_1 - b}{b} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{则 } v_1 = abl \left(\frac{h_1 - b}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - b}{b} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{h_1 - b}{b} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

其中 $a = 0.89m, b = 0.6m, l = 2.45m$

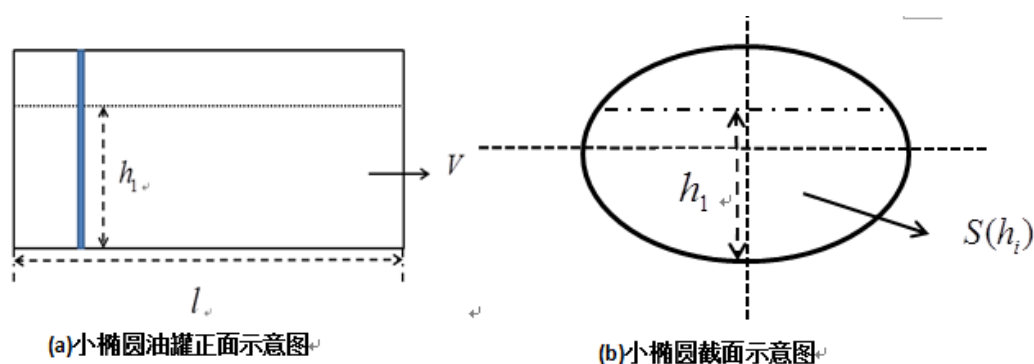


图 5.1.1.1 小椭圆油罐无变位示意图

模型二：有变位[1]

有变位时, 变位角 $\alpha = 4.1^\circ$ 时, 油罐储油量与浮标所测定的高度 h_1 的关系有五种情况, 下面分情况讨论

(1). 如下图 5.1.1.2, 由于有纵向倾角, 但浮标显示是 0 时, 油罐内实际并不为零。经过计算可得:

$$\text{当 } h_1 = 0 \text{ 时, } V_1 \leq 1.6743L;$$

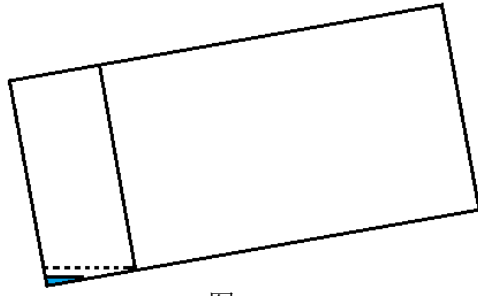


图 5.1.1.2

(2). 如下图 5.1.1.3, 表示油罐内的油量的平面低于所示虚线, 此时油罐的正面示意图是三角形。

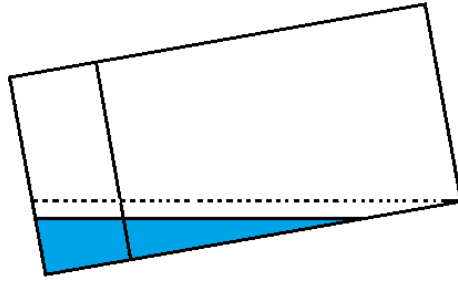


图 5.1.1.3

则有当 $0 < h_1 \leq 2.05 \tan \alpha m$, 即 $0 < h_1 \leq 146.9458 mm$ 时:

$$\begin{aligned}
 V_1(h) &= \int_0^{\frac{h_1}{\tan \alpha} + 0.4} \int_{-b}^{z \tan \alpha - b} \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx dy dz \\
 &= \int_0^{\frac{h_1}{\tan \alpha} + 0.4} 2a \int_{-b}^{z \tan \alpha - b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy dz \\
 &= \int_0^{\frac{h_1}{\tan \alpha} + 0.4} ab \left[\frac{z \tan \alpha - b}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{z \tan \alpha - b}{b} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{z \tan \alpha - b}{b} \right) \right] dz
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \frac{z \tan \alpha - b}{b},$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{ab}{\tan \alpha} \int_{-1}^{\frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b}} \left(u \sqrt{1 - u^2} + \arcsin u + \frac{\pi}{2} \right) du \\
&= \frac{ab}{\tan \alpha} \left(-\frac{b}{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right)^2 \right]^3} \right) + \\
&\quad \frac{ab}{\tan \alpha} \left((h_1 + 0.4 \tan \alpha - b) \arcsin \frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right) + \\
&\quad \frac{ab}{\tan \alpha} b \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right)^2} + \\
&\quad \frac{ab}{\tan \alpha} \left(\frac{\pi}{2} (h_1 + 0.4 \tan \alpha - b) \right)
\end{aligned}$$

(3). 如下图 5.1.1.4, 油罐内油量的液面低于所示虚线, 此时油没有完全覆盖油罐的任意一个底面:

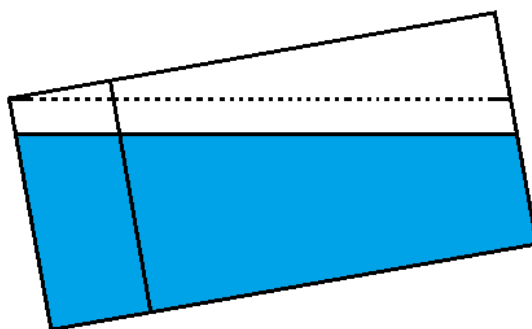


图 5.1.1.4

当 $2.05 \tan \alpha < h_1 \leq 1.2 - 0.4 \tan \alpha$, 即 $146.9458 < h_1 \leq 1171.3276$ 时:

$$V_1(h) = \int_{\frac{1.2}{\tan \alpha}}^{\frac{1.2}{\tan \alpha} - 2.45} \int_{-b}^{z \tan \alpha} \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx dy dz$$

积分方法同上可得

$$\begin{aligned} V_1(h) = & \frac{ab}{\tan \alpha} \left(\frac{b}{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right)^2 \right]^3} \right) - \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left(\frac{b}{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right)^2 \right]^3} \right) + \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left[(h_1 + 0.4 \tan \alpha - b) \arcsin \frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right] + \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left(b \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 + 0.4 \tan \alpha - b}{b} \right)^2} \right) - \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left[(h_1 - 2.05 \tan \alpha - b) \arcsin \frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right] - \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left(b \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right)^2} \right) + \\ & \frac{ab}{\tan \alpha} \left(2.45 \frac{\pi}{2} \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

(4). 如下图 5.1.1.5, 油罐内油完全覆盖油罐的一个底面。

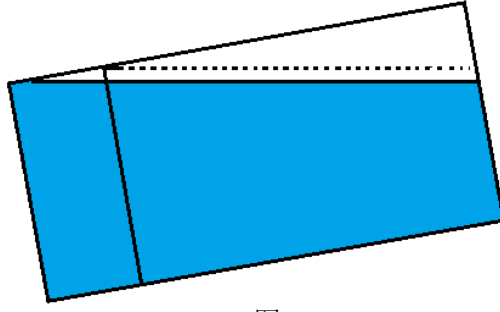


图 5.1.1.5

当 $1.2 - 0.4 \tan \alpha < h_1 \leq 1.2m$, 即 $171.3276mm < h_1 \leq 1.2mm$ 时:

$$V_1(h) = V_a + \int_{\frac{h_1}{\tan \alpha} - 2.05}^{\frac{h_1}{\tan \alpha}} \int_{-b}^{z \tan \alpha - b} \int_{-a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}}^{a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy dz$$

$$\text{其中 } V_a = \pi ab \left(0.4 - \frac{1.2 - h_1}{\tan \alpha} \right),$$

$$\text{原式} = \pi ab \left(0.4 - \frac{1.2 - h_1}{\tan \alpha} \right) +$$

$$\frac{ab}{\tan \alpha} \left(\frac{b}{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right)^2 \right]^3} \right) -$$

$$\frac{ab}{\tan \alpha} \left[(h_1 - 2.05 \tan \alpha - b) \arcsin \frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right] -$$

$$\frac{ab}{\tan \alpha} \left(b \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - 2.05 \tan \alpha - b}{b} \right)^2} \right) +$$

$$\frac{ab}{\tan \alpha} \left[(3b - h_1 + 2.05 \tan \alpha) \frac{\pi}{2} \right]$$

(5). 如下图 5.1.1.6，浮标测得的油位高度显示油罐为满，然而实际上并没有满。

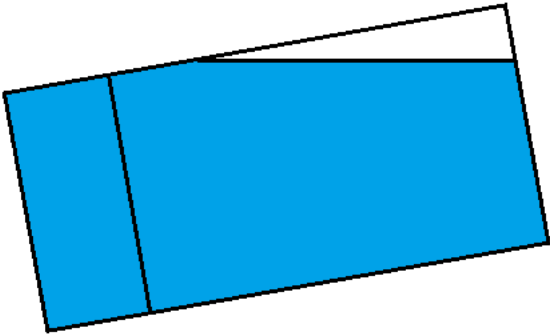


图 5.1.1.6

此时经计算得到：

$$\text{当 } h_1 = 1.2\text{m 时, } 4012.747 \leq V_1 \leq 4110.146\text{L}$$

5.1.2 模型求解及改进

首先对 5.1.1 中建立的模型，用题目附录中的数据进行检验。

对于无变位的模型，将题目附录中的提供的数据中的油位高度带入函数关系式可求得相应的储油罐中的容量，然后与题目附录中的储油量高度进行比对，发现相对误差维持在 3.48% 左右。由于相对误差几乎保持不变，我们可以认为实际测量过程存在系统误差。可以对这个结果加以修正。

模型修正

对无变位的油罐模型进行修正。在这里定义残差 ε 为实际测量值与模型所得值的差，即 $\varepsilon = V - V(h)$ 。（其中 V 表示实验测得的油罐内油容量， $V(h)$ 表示当油位高度为 h 时，由模型求得的油罐内油的容量）。建立关系 $\varepsilon - V(h)$ ， ε 关于油位高度 $V(h)$ 的拟合图像如下。

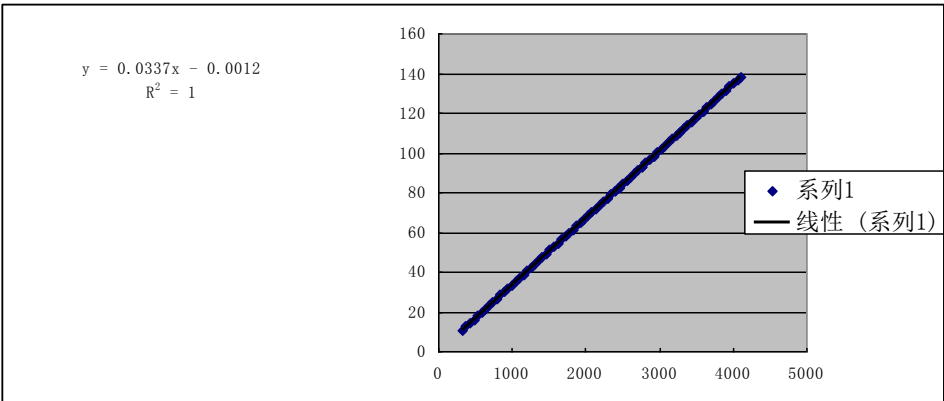


图 5.1.2.1

函数关系为 $\varepsilon = 0.0337V(h) - 0.0012$ ，对原无变位模型进行修正得 $V = v_1 + \varepsilon$ 。此时利用附件中的数据对其进行验证得绝对误差绝对值在 0.01L 以内，相对误差在 10^{-5} 数量级或者更小。具体图表见附录中表 2。

对于油罐变位后的模型，与无变位的检验同理。得到相对误差在 1%~5% 以内。在可容许的范围内，因此我们认为此模型有效。

油罐变位后对罐容表的影响可以通过比较无变位和有变位的数学模型得出。利用 MATLAB[2] 在一定区间内对两个模型作图于同一个坐标系中。程序见附件。图形如下图 5.1.2.1。

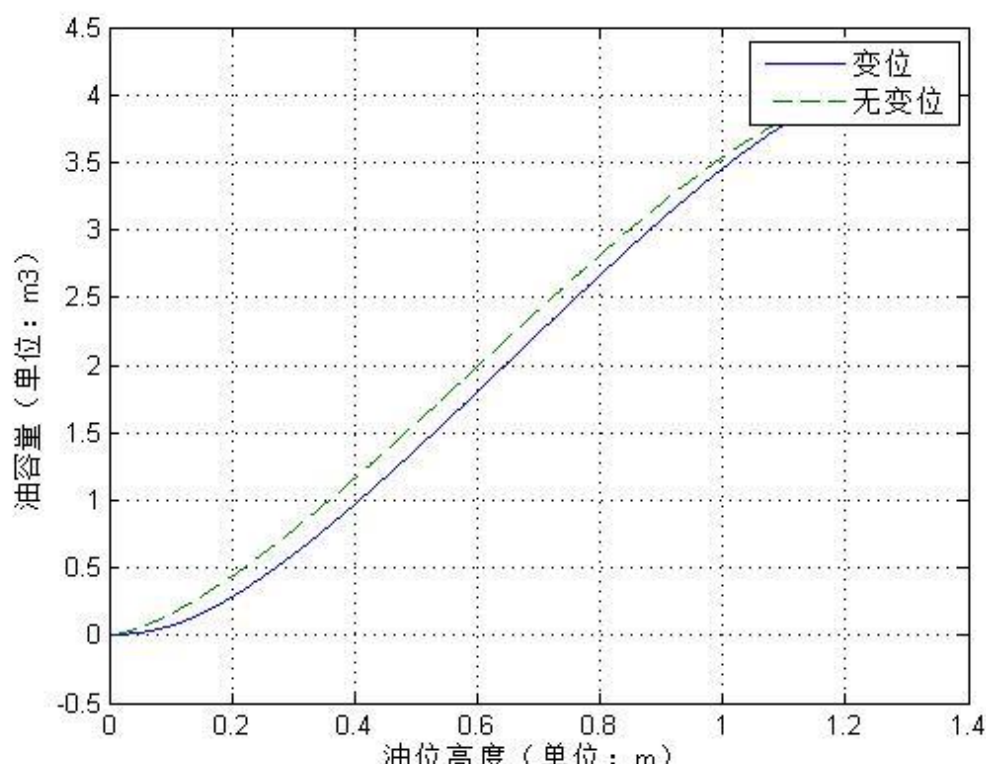


图 5.1.2.2

由图可看出在一定区间内，变位后相同油位高度的情况下实际储油量要比无变位的储油罐在相同油位高度下的储油量要少，且差值保持在一定值左右波动。这一点也可以从题目附录中的数据得到验证。在高度相同的情况下，无变位与变位的油罐模型油量差值保持在 200L 左右。

当然，由 5.1.1.1 的变位模型的第一种情况可知，变位后的油罐在浮标测得高度之前就可能已含有油，即由于倾角的影响，浮标显示油位高度为 0，而变位油罐可能并不是空的。同理知 5.1.1.1 的变位模型第五种，当浮标显示油位高度为满的时候，由于倾角的影响，油罐实际上的储油量可能并不是满的。考虑到在现实情况下，纵向倾角不可能太大，所以变位油罐模型的第一种和第五种情况不做过多讨论。

另外，罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值可以由模型得到，结果如下：

罐体变位后罐容表标定值

高度 0.00mm	$V \leq 1.67L$
高度 10.00mm	$V = 3.53L$
高度 20.00mm	$V = 6.26L$
高度 30.00mm	$V = 9.97L$
高度 40.00mm	$V = 14.76L$
高度 50.00mm	$V = 20.69L$
高度 60.00mm	$V = 27.85L$
高度 70.00mm	$V = 36.32L$
高度 80.00mm	$V = 46.14L$
高度 90.00mm	$V = 57.39L$
高度 100.00mm	$V = 70.13L$
高度 110.00mm	$V = 84.40L$
高度 120.00mm	$V = 100.25L$
高度 130.00mm	$V = 117.75L$
高度 140.00mm	$V = 136.92L$
高度 150.00mm	$V = 157.82L$
高度 160.00mm	$V = 180.26L$
高度 170.00mm	$V = 204.00L$
高度 180.00mm	$V = 228.91L$
高度 190.00mm	$V = 254.88L$
高度 200.00mm	$V = 281.86L$
高度 210.00mm	$V = 309.76L$
高度 220.00mm	$V = 338.54L$
高度 230.00mm	$V = 368.14L$
高度 240.00mm	$V = 398.53L$
高度 250.00mm	$V = 429.66L$
高度 260.00mm	$V = 461.49L$
高度 270.00mm	$V = 494.00L$
高度 280.00mm	$V = 527.14L$
高度 290.00mm	$V = 560.90L$
高度 300.00mm	$V = 595.25L$
高度 310.00mm	$V = 630.15L$
高度 320.00mm	$V = 665.58L$
高度 330.00mm	$V = 701.53L$
高度 340.00mm	$V = 737.96L$
高度 350.00mm	$V = 774.86L$
高度 360.00mm	$V = 812.20L$
高度 370.00mm	$V = 849.97L$
高度 380.00mm	$V = 888.15L$
高度 390.00mm	$V = 926.72L$

高度 400.00mm V = 965.66L
 高度 410.00mm V = 1004.95L
 高度 420.00mm V = 1044.58L
 高度 430.00mm V = 1084.53L
 高度 440.00mm V = 1124.79L
 高度 450.00mm V = 1165.34L
 高度 460.00mm V = 1206.16L
 高度 470.00mm V = 1247.23L
 高度 480.00mm V = 1288.56L
 高度 490.00mm V = 1330.11L
 高度 500.00mm V = 1371.88L
 高度 510.00mm V = 1413.85L
 高度 520.00mm V = 1456.02L
 高度 530.00mm V = 1498.35L
 高度 540.00mm V = 1540.85L
 高度 550.00mm V = 1583.50L
 高度 560.00mm V = 1626.28L
 高度 570.00mm V = 1669.19L
 高度 580.00mm V = 1712.21L
 高度 590.00mm V = 1755.32L
 高度 600.00mm V = 1798.52L
 高度 610.00mm V = 1841.80L
 高度 620.00mm V = 1885.13L
 高度 630.00mm V = 1928.51L
 高度 640.00mm V = 1971.93L
 高度 650.00mm V = 2015.37L
 高度 660.00mm V = 2058.82L
 高度 670.00mm V = 2102.28L
 高度 680.00mm V = 2145.71L
 高度 690.00mm V = 2189.13L
 高度 700.00mm V = 2232.50L
 高度 710.00mm V = 2275.82L
 高度 720.00mm V = 2319.09L
 高度 730.00mm V = 2362.27L
 高度 740.00mm V = 2405.37L
 高度 750.00mm V = 2448.37L
 高度 760.00mm V = 2491.26L
 高度 770.00mm V = 2534.02L
 高度 780.00mm V = 2576.64L
 高度 790.00mm V = 2619.12L
 高度 800.00mm V = 2661.42L
 高度 810.00mm V = 2703.55L
 高度 820.00mm V = 2745.49L
 高度 830.00mm V = 2787.22L

高度 840.00mm $V = 2828.74L$
 高度 850.00mm $V = 2870.02L$
 高度 860.00mm $V = 2911.06L$
 高度 870.00mm $V = 2951.83L$
 高度 880.00mm $V = 2992.33L$
 高度 890.00mm $V = 3032.53L$
 高度 900.00mm $V = 3072.43L$
 高度 910.00mm $V = 3112.00L$
 高度 920.00mm $V = 3151.23L$
 高度 930.00mm $V = 3190.11L$
 高度 940.00mm $V = 3228.61L$
 高度 950.00mm $V = 3266.72L$
 高度 960.00mm $V = 3304.42L$
 高度 970.00mm $V = 3341.69L$
 高度 980.00mm $V = 3378.51L$
 高度 990.00mm $V = 3414.86L$
 高度 1000.00mm $V = 3450.72L$
 高度 1010.00mm $V = 3486.06L$
 高度 1020.00mm $V = 3520.87L$
 高度 1030.00mm $V = 3555.11L$
 高度 1040.00mm $V = 3588.77L$
 高度 1050.00mm $V = 3621.81L$
 高度 1060.00mm $V = 3654.20L$
 高度 1070.00mm $V = 3685.91L$
 高度 1080.00mm $V = 3716.92L$
 高度 1090.00mm $V = 3747.17L$
 高度 1100.00mm $V = 3776.64L$
 高度 1110.00mm $V = 3805.27L$
 高度 1120.00mm $V = 3833.01L$
 高度 1130.00mm $V = 3859.82L$
 高度 1140.00mm $V = 3885.62L$
 高度 1150.00mm $V = 3910.33L$
 高度 1160.00mm $V = 3933.86L$
 高度 1170.00mm $V = 3956.06L$
 高度 1180.00mm $V = 3976.66L$
 高度 1190.00mm $V = 3995.54L$
 高度 1200.00mm $4012.74L \leq V \leq 4110.15L$

5.2 问题二的解答

5.2.1 模型建立

问题二要求建立罐体变位后标定罐容表的数学模型,并根据附件中的实验检

测数据确定变位参数。

首先建立数学模型。油罐的示意图如下，先考虑只有纵向位移

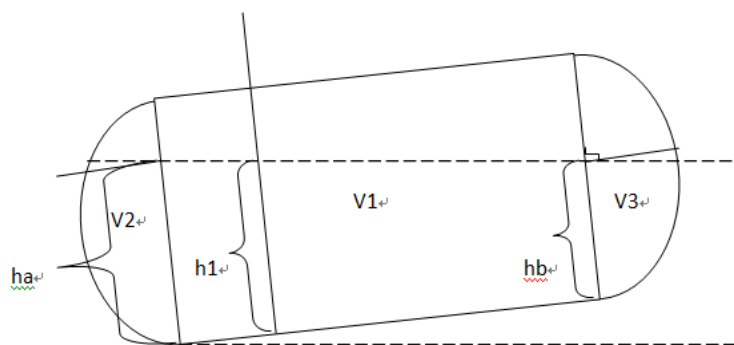


图 5.2.1.1

两条虚线为水平线，倾角为 α ，则油罐内容积为

$$V = V_1 + V_2 + V_3。$$

其中 V_1 为油罐中间部分体积， V_2, V_3 分别为两球冠的体积。

下面分别利用几何学，以及积分分别求解 V_1, V_2, V_3 。

5.2.2 模型求解

5.2.2.1 求解 V_1

V_1 的情况与第一问类似，需要分五种情况进行讨论，由于有些情况比较类似，在这里主要讨论一般情况，如下图所示。

先考虑只存在纵向倾角

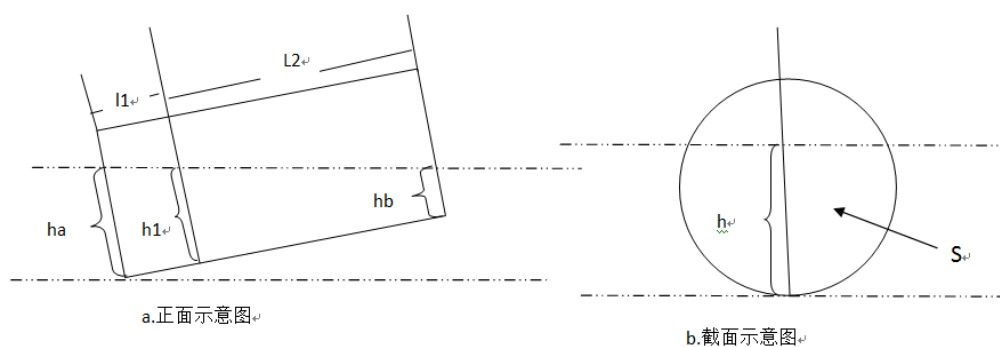


图 5.2.2.1.1 圆筒部分示意图

由三角形的相关性质可得：

$$h_a = h_1 + l_1 \tan \alpha, h_b = h_1 - l_2 \tan \alpha，$$

S 为图 b 所示部分的面积，可推出

$$S = S(h) = r^2 \left(\frac{h-r}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{h-r}{r} \right)^2} + \arcsin \frac{h-r}{r} \right),$$

其中 r 为截面圆的半径，则

$$V_1 = \frac{1}{\tan \alpha} \int_{h_b}^{h_a} S(h) dh$$

$$= \frac{r^2}{\tan \alpha} \left[\frac{r}{3} \sqrt{(1-x_1^2)^3} - \frac{r}{3} \sqrt{(1-x_2^2)^3} + r \left(x_2 \arcsin x_2 + \sqrt{1-x_2^2} - x_1 \arcsin x_1 - \sqrt{1-x_1^2} \right) + (x_2 - x_1) r \frac{\pi}{2} \right]$$

其中 $x_1 = \frac{h-r-6 \tan \alpha}{r}, x_2 = \frac{h-r+2 \tan \alpha}{r}$, h 即为图示中的 h_1 , 即浮标所测定的

的油位高度。

再考虑水平倾角，图示如下

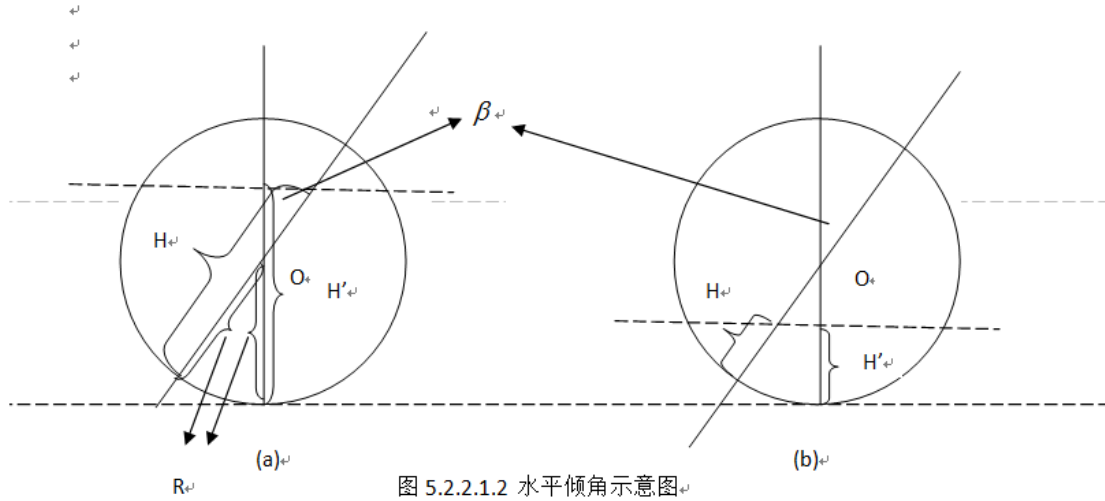


图 5.2.2.1.2 水平倾角示意图

图中 R 表示截面圆的半径， H' 表示没有横向偏转角时浮标所测定的油位高度， H 表示横向偏转角为 β 时的浮标所测定的油位高度。

对于情况 (a)，得 $\cos \beta = \frac{H' - R}{H - R}$

对于情况 (b)，得 $\cos \beta = \frac{R - H'}{R - H}$

所以可以统一形式为 $\cos \beta = \frac{H' - R}{H - R}$ ，易知横向偏转角只对浮标所测定的高度有影响。所以对之前没有横向偏转角时的表达式中 H 进行代换，只需改变 x_1, x_2 即可。

$$x_1 = \frac{h \cos \beta - r \cos \beta - 6 \tan \alpha}{r}, \quad x_2 = \frac{h \cos \beta - r \cos \beta + 2 \tan \alpha}{r}$$

5.2.2.2 求解 V_2, V_3

V_2, V_3 为油罐两端的球冠的体积，考虑到积分的复杂性以及现实中倾角不会太大，这里作了简化，如图 5.2.1.1，过水平面与球冠底面相交线作垂直于球冠底面的平面。取新的平面与原球冠面的所围成的体积近似代替原体积。如下图

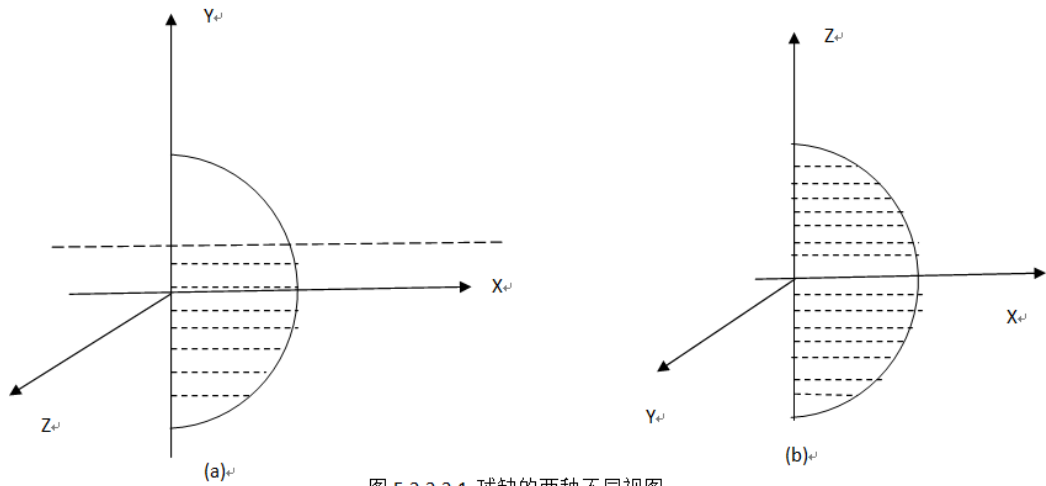


图 5.2.2.2.1 球缺的两种不同视图

(a) 情况为油罐正面视图下球冠体的视图，像图中建立空间直角坐标系。当从 Y 轴正向负看去时，呈现 (b) 情况。设球缺在 XOZ 平面内的面面积为 S。则球冠体体积可以表示为[3]

$$V_2 = \int_{-r}^{h_a} S dy, \quad V_3 = \int_{-r}^{h_b} S dy$$

$$S = (R^2 - y^2) a \cos \left(\frac{R - a}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) - \sqrt{R^2 - y^2 - (R - a)^2} (R - a)$$

其中：R 为球冠半径，a 为球冠体的高

算法设计：（数值积分）[4]

考虑到 S 表达式的复杂性，利用定积分求球冠体积是非常困难的，甚至是不可能的。这时候考虑到数值积分，可以用数值积分编程进行求解，即将积分区间 l 划分为 N 段（N 足够大以至于可以忽略函数 S 在区间长度 $\frac{l}{N}$ 上的变化），这时

结果即为 $\sum_{i=1}^n S_i \cdot \frac{l}{N}$ 。经编程实现了该积分，并将误差降到可以忽略的数量级。程

序代码见附录中程序 1。

由上两部分得到问题二的数学模型，如下：

$$V = \frac{1}{\tan \alpha} \int_{h_b}^{h_a} S(h)dh + \int_{-r}^{h_a} S(y)dy + \int_{-r}^{h_b} S(y)dy$$

5.2.2.3 求解变位参数 α, β

利用附件 2 中的数据求解变位参数。附件 2 提供的数据中显示油高和显示油量容积是基于无变位时的罐容表的。可以利用这两列数据对模型在无变位情况下进行一定的评估。

最小二乘法：

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n] \quad , \text{表示出油量}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_{n+1}] \quad , \text{表示油位高度}$$

$$\text{令 } I = \min \sum_{i=1}^n (V(h_{i+1}) - V(h_i) - x_i)^2$$

求解变位参数可以利用显示油高和进出油量这两行数据来进行确定。在模型中，每一个油位高度对应一个油罐储油量，则两个油位高度间油量的差值则可以通过进出油量来确定，这是可以由附件 2 中 CD 行数据提供的（即进油量与出油量）。

具体方法是取 N 组显示高度的数据，以及相对应的 N-1 组油量差值。（每相邻两个油位高度对应一个油量差值）。将油位高度带入模型求得相应的储油量，由相邻的储油量即产生油量差值，然后将这些数据差值与附件 2 中提供的油量差值相减，并对这些差的平方求和。则每对应一组 α, β 值便存在一个和。求变位参

数即可理解为寻找使和最小的一组的 α, β 值，而这可以通过枚举 α, β 值来确定。

通过编程实现该思想并求得 $\alpha = 2.1, \beta = 4.6$ （单位：角度）。程序见附录二“变位参数求解程序”。

确定变位参数后，将参数带入模型即可求得罐容表标定值，结果如下：

变位罐容表标定值

高度:0.00mm	剩余油量:<=46.21L
高度:100.00mm	剩余油量:355.71L
高度:200.00mm	剩余油量:1068.21L
高度:300.00mm	剩余油量:2226.14L
高度:400.00mm	剩余油量:3705.48L
高度:500.00mm	剩余油量:5435.16L
高度:600.00mm	剩余油量:7373.74L
高度:700.00mm	剩余油量:9490.19L
高度:800.00mm	剩余油量:11759.02L

高度:900.00mm	剩余油量:14158.10L
高度:1000.00mm	剩余油量:16667.53L
高度:1100.00mm	剩余油量:19268.91L
高度:1200.00mm	剩余油量:21944.96L
高度:1300.00mm	剩余油量:24679.18L
高度:1400.00mm	剩余油量:27455.60L
高度:1500.00mm	剩余油量:30258.65L
高度:1600.00mm	剩余油量:33072.97L
高度:1700.00mm	剩余油量:35883.29L
高度:1800.00mm	剩余油量:38674.31L
高度:1900.00mm	剩余油量:41430.58L
高度:2000.00mm	剩余油量:44136.33L
高度:2100.00mm	剩余油量:46775.35L
高度:2200.00mm	剩余油量:49330.73L
高度:2300.00mm	剩余油量:51784.67L
高度:2400.00mm	剩余油量:54118.02L
高度:2500.00mm	剩余油量:56309.82L
高度:2600.00mm	剩余油量:58336.33L
高度:2700.00mm	剩余油量:60169.50L
高度:2800.00mm	剩余油量:61773.73L
高度:2900.00mm	剩余油量:63096.98L
高度:3000.00mm	剩余油量:64029.08L $\leq V \leq 64664.45L$

5.2.3 结果分析与模型检测

结果：问题二中通过对油罐的三个组成部分分别建模，得出了总体的数学模型。并通过数学模型由附件 2 中提供的数据求出变位参数 $\alpha = 2.1, \beta = 4.6$ (单位：角度)。

验证：将变位参数带入数学模型，从题目附件 2 中随机取 60 组数据进行检测，研究误差，发现大多数绝对误差在 1L 范围内,个别数据误差在 2L 左右。表见附录中表 3。在一定程度上验证了模型的合理性，以及结果的正确性与可靠性。

6. 模型评价

6.1 模型优点

- (1). 小椭圆储油罐无变位模型情况比较简单，算法容易设计，根据积分很容易得到其具体表达式且相对来说比较精确。
- (2). 小椭圆储油罐变位模型针对具体情况分类讨论。
- (3). 实际储油罐模型比较实用。在球缺部分的建模过程中，适当的运用了近似算法使复杂情况简单化，易于计算。

6.2 模型缺点

- (1). 小椭圆储油罐无变位模型仅有简单的积分得来，没有将具体情况考虑进去，应用范围狭窄。对于误差修差模型中的线性拟合没有具体意义。
- (2). 小椭圆储油罐变位模型未能很好的模拟出，误差有待进一步改进。
- (3). 实际储油罐模型构造中，关于球冠部分的计算采用了近似方法，使得计算结果与实际结果有一定误差，有待进一步改进。在数值积分中，结果的准确性受到迭代次数的限制。

7. 模型改进

1. 小椭圆储油罐变位模型所得结果与实验测得结果存在一定的误差，需要考虑具体情况对模型进行适当地修正。
2. 实际储油罐模型球冠体部分由于采用了近似的方法，增加了误差的必然性。需要对这种方法进行改进，对模型忽略部分进行精确求解，减小误差。在运用模型求解变位参数时采用了对参数进行枚举的方法，而枚举法在运行时间以及空间上是比较浪费资源，效率不高。可以考虑采取更高效的算法。

8. 参考文献

- [1]《实用积分表》编委会，实用积分表，合肥：中国科学技术大学出版社，2006年1月第1版
- [2] 邓薇，MATLAB 函数速查手册，北京：人民邮电出版社，2010年5月第2版
- [3] 付昶林，倾斜油罐容量计算，黑龙江八一农垦大学，第二期，43——52，1981
- [4] 余永峰 张友春，卧式容器球冠形封头液位与相对应的液体容积计算，中国特种设备安全，第24卷，第11期，24——26

附录

表 1 罐体变位后罐容表标定值

高度 0.00mm	$V \leq 1.67L$
高度 10.00mm	$V = 3.53L$
高度 20.00mm	$V = 6.26L$
高度 30.00mm	$V = 9.97L$
高度 40.00mm	$V = 14.76L$
高度 50.00mm	$V = 20.69L$
高度 60.00mm	$V = 27.85L$
高度 70.00mm	$V = 36.32L$
高度 80.00mm	$V = 46.14L$
高度 90.00mm	$V = 57.39L$
高度 100.00mm	$V = 70.13L$
高度 110.00mm	$V = 84.40L$
高度 120.00mm	$V = 100.25L$
高度 130.00mm	$V = 117.75L$
高度 140.00mm	$V = 136.92L$
高度 150.00mm	$V = 157.82L$
高度 160.00mm	$V = 180.26L$
高度 170.00mm	$V = 204.00L$
高度 180.00mm	$V = 228.91L$
高度 190.00mm	$V = 254.88L$
高度 200.00mm	$V = 281.86L$
高度 210.00mm	$V = 309.76L$
高度 220.00mm	$V = 338.54L$
高度 230.00mm	$V = 368.14L$
高度 240.00mm	$V = 398.53L$
高度 250.00mm	$V = 429.66L$
高度 260.00mm	$V = 461.49L$
高度 270.00mm	$V = 494.00L$
高度 280.00mm	$V = 527.14L$
高度 290.00mm	$V = 560.90L$
高度 300.00mm	$V = 595.25L$
高度 310.00mm	$V = 630.15L$
高度 320.00mm	$V = 665.58L$
高度 330.00mm	$V = 701.53L$
高度 340.00mm	$V = 737.96L$
高度 350.00mm	$V = 774.86L$
高度 360.00mm	$V = 812.20L$

高度 370.00mm V = 849.97L
高度 380.00mm V = 888.15L
高度 390.00mm V = 926.72L
高度 400.00mm V = 965.66L
高度 410.00mm V = 1004.95L
高度 420.00mm V = 1044.58L
高度 430.00mm V = 1084.53L
高度 440.00mm V = 1124.79L
高度 450.00mm V = 1165.34L
高度 460.00mm V = 1206.16L
高度 470.00mm V = 1247.23L
高度 480.00mm V = 1288.56L
高度 490.00mm V = 1330.11L
高度 500.00mm V = 1371.88L
高度 510.00mm V = 1413.85L
高度 520.00mm V = 1456.02L
高度 530.00mm V = 1498.35L
高度 540.00mm V = 1540.85L
高度 550.00mm V = 1583.50L
高度 560.00mm V = 1626.28L
高度 570.00mm V = 1669.19L
高度 580.00mm V = 1712.21L
高度 590.00mm V = 1755.32L
高度 600.00mm V = 1798.52L
高度 610.00mm V = 1841.80L
高度 620.00mm V = 1885.13L
高度 630.00mm V = 1928.51L
高度 640.00mm V = 1971.93L
高度 650.00mm V = 2015.37L
高度 660.00mm V = 2058.82L
高度 670.00mm V = 2102.28L
高度 680.00mm V = 2145.71L
高度 690.00mm V = 2189.13L
高度 700.00mm V = 2232.50L
高度 710.00mm V = 2275.82L
高度 720.00mm V = 2319.09L
高度 730.00mm V = 2362.27L
高度 740.00mm V = 2405.37L
高度 750.00mm V = 2448.37L
高度 760.00mm V = 2491.26L
高度 770.00mm V = 2534.02L
高度 780.00mm V = 2576.64L
高度 790.00mm V = 2619.12L
高度 800.00mm V = 2661.42L

高度 810.00mm V = 2703.55L
 高度 820.00mm V = 2745.49L
 高度 830.00mm V = 2787.22L
 高度 840.00mm V = 2828.74L
 高度 850.00mm V = 2870.02L
 高度 860.00mm V = 2911.06L
 高度 870.00mm V = 2951.83L
 高度 880.00mm V = 2992.33L
 高度 890.00mm V = 3032.53L
 高度 900.00mm V = 3072.43L
 高度 910.00mm V = 3112.00L
 高度 920.00mm V = 3151.23L
 高度 930.00mm V = 3190.11L
 高度 940.00mm V = 3228.61L
 高度 950.00mm V = 3266.72L
 高度 960.00mm V = 3304.42L
 高度 970.00mm V = 3341.69L
 高度 980.00mm V = 3378.51L
 高度 990.00mm V = 3414.86L
 高度 1000.00mm V = 3450.72L
 高度 1010.00mm V = 3486.06L
 高度 1020.00mm V = 3520.87L
 高度 1030.00mm V = 3555.11L
 高度 1040.00mm V = 3588.77L
 高度 1050.00mm V = 3621.81L
 高度 1060.00mm V = 3654.20L
 高度 1070.00mm V = 3685.91L
 高度 1080.00mm V = 3716.92L
 高度 1090.00mm V = 3747.17L
 高度 1100.00mm V = 3776.64L
 高度 1110.00mm V = 3805.27L
 高度 1120.00mm V = 3833.01L
 高度 1130.00mm V = 3859.82L
 高度 1140.00mm V = 3885.62L
 高度 1150.00mm V = 3910.33L
 高度 1160.00mm V = 3933.86L
 高度 1170.00mm V = 3956.06L
 高度 1180.00mm V = 3976.66L
 高度 1190.00mm V = 3995.54L
 高度 1200.00mm 4012.74L <= V <= 4110.15L

表 2 无变位油罐改进模型后结果与实验的比对及误差分析

每次进油量	油位高度	累积油量	模型二求得的量	相对误差	绝对误差
50	159.02	312	312.000213	6.83E-07	0.000213043
100	176.14	362	362.0066668	1.84E-05	0.006666763
150	192.59	412	411.9952111	-1.2E-05	-0.004788881
200	208.50	462	462.0174908	3.79E-05	0.017490804
250	223.93	512	511.9946381	-1E-05	-0.005361912
300	238.97	562	562.0044175	7.86E-06	0.004417465
350	253.66	612	612.0068391	1.12E-05	0.006839102
400	268.04	662	661.9925824	-1.1E-05	-0.007417579
450	282.16	712	712.0137855	1.94E-05	0.013785533
500	296.03	762	762.0013568	1.78E-06	0.001356825
550	309.69	812	812.0085084	1.05E-05	0.008508396
600	323.15	862	861.9925854	-8.6E-06	-0.007414566
650	336.44	912	911.994962	-5.5E-06	-0.005037984
700	349.57	962	961.9912676	-9.1E-06	-0.008732448
750	362.56	1012	1012.001968	1.94E-06	0.00196773
800	375.42	1062	1062.01541	1.45E-05	0.015410246
850	388.16	1112	1112.024629	2.21E-05	0.024629477
900	400.79	1162	1162.026831	2.31E-05	0.026831275
950	413.32	1212	1212.022934	1.89E-05	0.022933643
1000	425.76	1262	1262.017155	1.36E-05	0.01715451
1050	438.12	1312	1312.016639	1.27E-05	0.016639385
1100	450.40	1362	1361.990313	-7.1E-06	-0.009686728
1150	462.62	1412	1411.990576	-6.7E-06	-0.009423514
1200	474.78	1462	1461.990283	-6.6E-06	-0.009717019
1250	486.89	1512	1512.004708	3.11E-06	0.004707629
1300	498.95	1562	1562.009177	5.87E-06	0.009176671
1350	510.97	1612	1612.0215	1.33E-05	0.021500031
1400	522.95	1662	1662.018929	1.14E-05	0.018929235
1450	534.90	1712	1712.021222	1.24E-05	0.021221531
1500	546.82	1762	1762.007068	4.01E-06	0.007068344
1550	558.72	1812	1811.997642	-1.3E-06	-0.002357822
1600	570.61	1862	1862.014723	7.91E-06	0.014722837
1650	582.48	1912	1911.996258	-2E-06	-0.003741922
1700	594.35	1962	1962.006704	3.42E-06	0.00670404
1750	606.22	2012	2012.02647	1.32E-05	0.026469814
1800	618.09	2062	2062.035975	1.74E-05	0.03597545
1850	629.96	2112	2112.015629	7.4E-06	0.015628935
1900	641.85	2162	2162.029879	1.38E-05	0.02987863
1950	653.75	2212	2212.016668	7.54E-06	0.016667725
2000	665.67	2262	2261.997765	-9.9E-07	-0.002235294

2050	677.63	2312	2312.036112	1.56E-05	0.03611247
2053.83	678.54	2315.83	2315.83827	3.57E-06	0.008270146
2103.83	690.53	2365.83	2365.859676	1.25E-05	0.029676423
2105.06	690.82	2367.06	2367.06771	3.26E-06	0.00771047
2155.06	702.85	2417.06	2417.097072	1.53E-05	0.037072425
2205.06	714.91	2467.06	2467.073646	5.53E-06	0.013646104
2255.06	727.03	2517.06	2517.097986	1.51E-05	0.037985932
2305.06	739.19	2567.06	2567.062771	1.08E-06	0.00277133
2355.06	751.42	2617.06	2617.065292	2.02E-06	0.005291636
2404.98	763.70	2666.98	2666.996508	6.19E-06	0.016508176
2406.83	764.16	2668.83	2668.861211	1.17E-05	0.031210545
2456.83	776.53	2718.83	2718.842791	4.7E-06	0.012791034
2506.83	788.99	2768.83	2768.853459	8.47E-06	0.023459184
2556.83	801.54	2818.83	2818.85944	1.04E-05	0.02944039
2606.83	814.19	2868.83	2868.864524	1.2E-05	0.034523511
2656.83	826.95	2918.83	2918.869151	1.34E-05	0.039151253
2706.83	839.83	2968.83	2968.870002	1.35E-05	0.040002382
2756.83	852.84	3018.83	3018.859526	9.78E-06	0.029525805
2806.83	866.00	3068.83	3068.863191	1.08E-05	0.033190507
2856.83	879.32	3118.83	3118.861918	1.02E-05	0.03191776
2906.83	892.82	3168.83	3168.867175	1.17E-05	0.037174962
2906.91	892.84	3168.91	3168.940736	9.7E-06	0.030736466
2956.91	906.53	3218.91	3218.917404	2.3E-06	0.00740361
3006.91	920.45	3268.91	3268.931153	6.47E-06	0.021152907
3056.91	934.61	3318.91	3318.924584	4.39E-06	0.014584094
3106.91	949.05	3368.91	3368.931512	6.39E-06	0.021512365
3156.91	963.80	3418.91	3418.929731	5.77E-06	0.019731105
3206.91	978.91	3468.91	3468.939053	8.38E-06	0.029053039
3256.91	994.43	3518.91	3518.944238	9.73E-06	0.034237755
3306.91	1010.43	3568.91	3568.949049	1.09E-05	0.039049461
3356.91	1026.99	3618.91	3618.925679	4.33E-06	0.015678546
3406.91	1044.25	3668.91	3668.934349	6.64E-06	0.024349074
3456.91	1062.37	3718.91	3718.948593	1.04E-05	0.038593159
3506.91	1081.59	3768.91	3768.941057	8.24E-06	0.031056652
3556.91	1102.33	3818.91	3818.950213	1.05E-05	0.040213436
3606.91	1125.32	3868.91	3868.931781	5.63E-06	0.021781455
3656.91	1152.36	3918.91	3918.93835	7.23E-06	0.028350034
3706.91	1193.49	3968.91	3968.94279	8.26E-06	0.032790218

表 3 第二问模型检测:

44171.907481→43857.494197	误差: -0.146716
43857.494197→43542.723331	误差: -1.259134
43542.723331→43315.507421	误差: 0.925910
43315.507421→43029.520325	误差: 0.087097
43029.520325→42866.800116	误差: -1.029791
42866.800116→42641.560031	误差: 0.550085
42641.560031→42320.069008	误差: -0.198977
42320.069008→42113.739299	误差: 0.639708
42113.739299→41804.885363	误差: -0.806064
41804.885363→41553.817322	误差: 1.338041
21893.252932→21692.035745	误差: 1.897188
21692.035745→21448.530270	误差: -0.124525
21448.530270→21136.913986	误差: -0.503716
21136.913986→20963.828306	误差: 0.905680
20963.828306→20887.314351	误差: -0.766045
20887.314351→20818.094264	误差: 1.000088
20818.094264→20595.971755	误差: -0.327491
20595.971755→20329.706597	误差: -1.334842
20329.706597→20091.815853	误差: -0.339256
20091.815853→19946.738897	误差: 1.396956
30340.462408→30187.530405	误差: -1.867997
30187.530405→29911.835560	误差: 2.414845
29911.835560→29666.036684	误差: -0.451123
29666.036684→29607.903532	误差: -0.506848
29607.903532→29382.733791	误差: -0.850259
29382.733791→29217.992410	误差: 0.551381
29217.992410→28904.950768	误差: 0.501642
28904.950768→28848.593664	误差: 0.697104
28848.593664→28663.034518	误差: -1.540854
28663.034518→28487.926719	误差: 1.657800
16699.001069→16394.311008	误差: -0.369938
16394.311008→16287.614298	误差: -0.333291
16287.614298→16209.797373	误差: -0.623075
16209.797373→16131.054012	误差: 0.303362
16131.054012→16064.321195	误差: 1.392816
16064.321195→15911.063221	误差: -2.662026
15911.063221→15747.307222	误差: 1.006000
15747.307222→15604.611220	误差: 0.336002
15604.611220→15362.559889	误差: 0.311331
15362.559889→15155.190448	误差: -1.320559
52122.384718→51883.798099	误差: -0.363381

51883.798099→51810.786953 误差: -0.568854
 51810.786953→51565.324909 误差: 0.192044
 51565.324909→51314.025888 误差: -0.480980
 51314.025888→51179.772977 误差: -0.337089
 12269.034018→12105.666840 误差: 0.597179
 12105.666840→11904.659450 误差: 0.027390
 11904.659450→11649.771264 误差: 0.178186
 11649.771264→11477.845751 误差: 0.595513
 11477.845751→11366.099961 误差: -0.464210
 44236.337381→44010.261493 误差: -0.004112
 44010.261493→43855.884992 误差: -0.043499
 43855.884992→43750.968223 误差: 1.926769
 43750.968223→43581.983163 误差: -1.394940
 43581.983163→43398.476498 误差: 0.806665
 11949.012063→11840.675814 误差: 0.976249
 11840.675814→11783.570546 误差: -2.824732
 11783.570546→11560.810539 误差: -0.299993
 11560.810539→11457.885059 误差: 1.415480
 11457.885059→11309.187375 误差: 0.627683

表 4 第二问变位罐容表标定值

高度:0.00mm	剩余油量:<=46.21L
高度:100.00mm	剩余油量:355.71L
高度:200.00mm	剩余油量:1068.21L
高度:300.00mm	剩余油量:2226.14L
高度:400.00mm	剩余油量:3705.48L
高度:500.00mm	剩余油量:5435.16L
高度:600.00mm	剩余油量:7373.74L
高度:700.00mm	剩余油量:9490.19L
高度:800.00mm	剩余油量:11759.02L
高度:900.00mm	剩余油量:14158.10L
高度:1000.00mm	剩余油量:16667.53L
高度:1100.00mm	剩余油量:19268.91L
高度:1200.00mm	剩余油量:21944.96L
高度:1300.00mm	剩余油量:24679.18L
高度:1400.00mm	剩余油量:27455.60L
高度:1500.00mm	剩余油量:30258.65L
高度:1600.00mm	剩余油量:33072.97L
高度:1700.00mm	剩余油量:35883.29L
高度:1800.00mm	剩余油量:38674.31L
高度:1900.00mm	剩余油量:41430.58L
高度:2000.00mm	剩余油量:44136.33L
高度:2100.00mm	剩余油量:46775.35L

高度:2200.00mm	剩余油量:49330.73L
高度:2300.00mm	剩余油量:51784.67L
高度:2400.00mm	剩余油量:54118.02L
高度:2500.00mm	剩余油量:56309.82L
高度:2600.00mm	剩余油量:58336.33L
高度:2700.00mm	剩余油量:60169.50L
高度:2800.00mm	剩余油量:61773.73L
高度:2900.00mm	剩余油量:63096.98L
高度:3000.00mm	剩余油量:64029.08L $\leq V \leq 64664.45L$

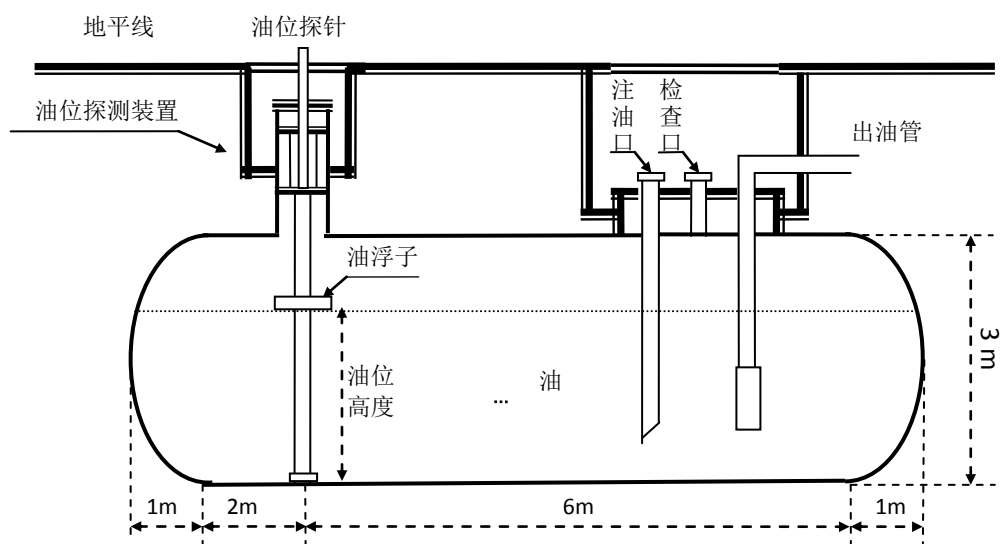
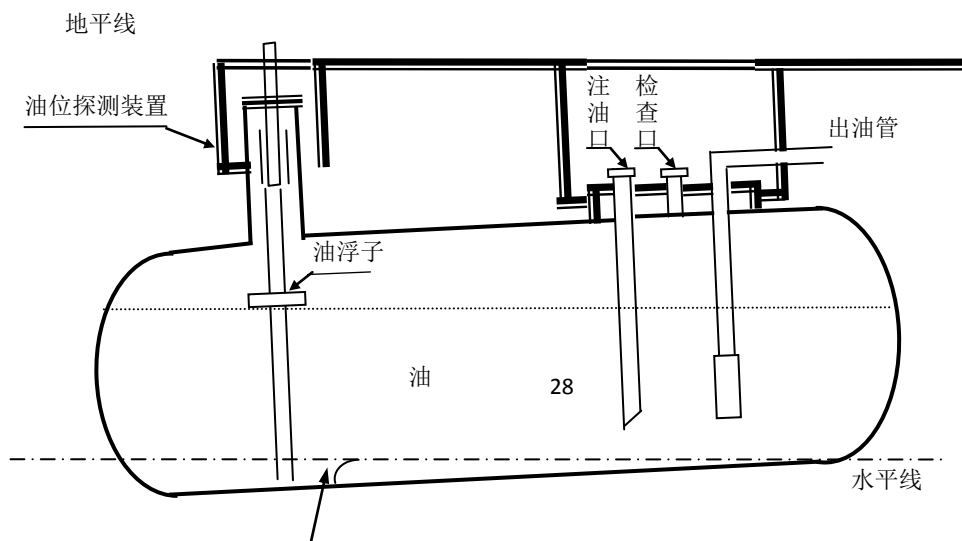


图 1 储油罐正面示意图



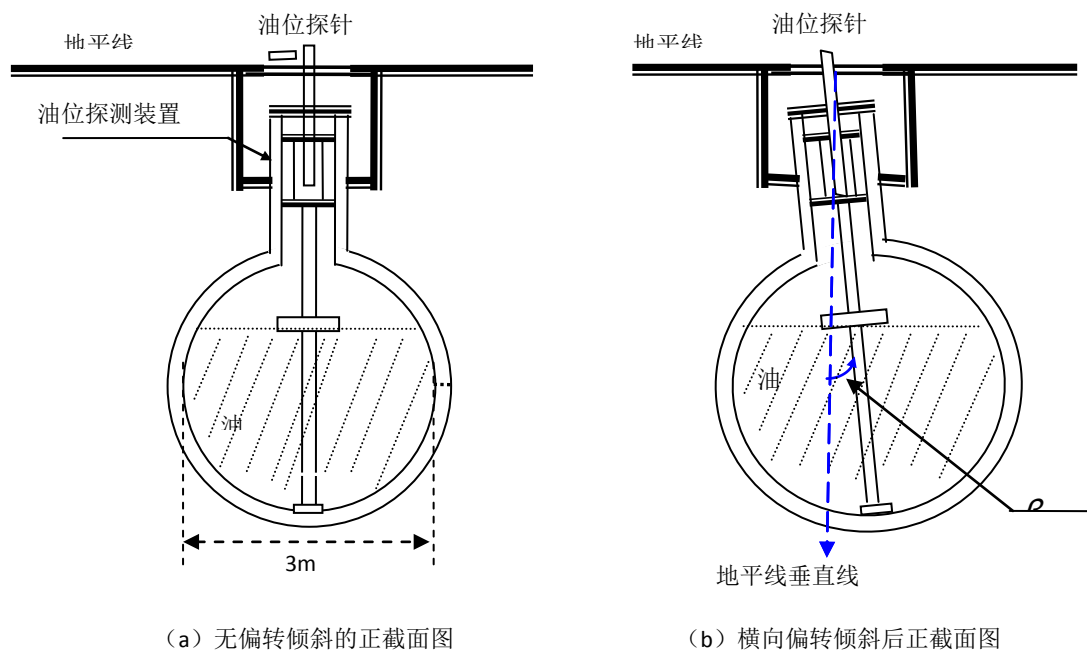


图 3 储油罐截面示意图

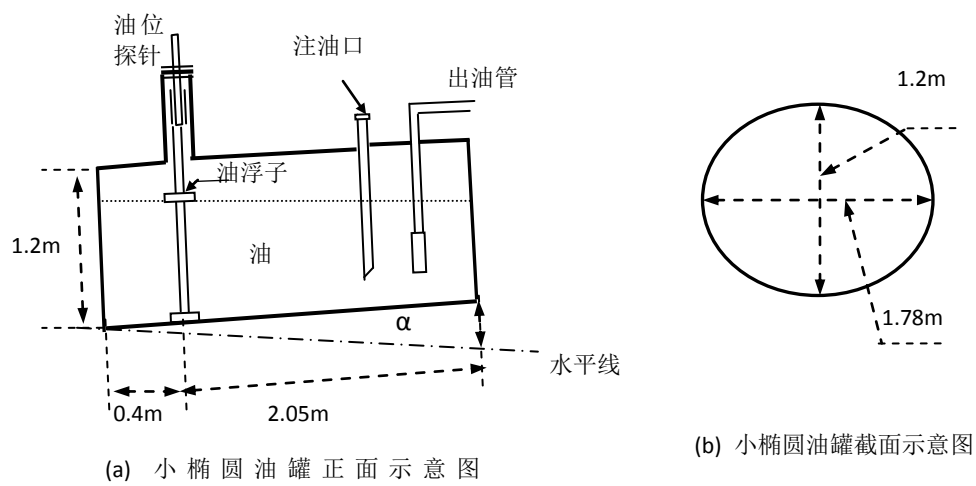


图 4 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

程序 1 数值积分求球冠体体积程序主要代码

```
double qiuguan(double h)
{
    double a = 1000, R = 1625, y = h;
    double Ra = R - a;
    double n = 1000; /*迭代 100000 次*/
    double temp = (y + 1500.0) / n;
    y = -1500;
    double out = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        double r = sqrt(R * R - y * y);
        double L = 2.0 * sqrt(r * r - Ra * Ra);
        out += (r * r * acos(Ra / r) - L * Ra / 2.0) * temp;
        y += temp;
    }
    return( out / 1e6);
}
```

程序 2: 罐容表标定值打印程序

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double qiuguan(double h)
{
    double a = 1000, R = 1625, y = h;
    double Ra = R - a;
    double n = 1000; /*迭代 100000 次*/
    double temp = (y + 1500.0) / n;
    y = -1500;
    double out = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        double r = sqrt(R * R - y * y);
        double L = 2.0 * sqrt(r * r - Ra * Ra);
        out += (r * r * acos(Ra / r) - L * Ra / 2.0) * temp;
        y += temp;
    }
    return( out / 1e6);
}

int main()
```

```

{
    FILE *fp;
    fp = fopen("a2.txt", "w+");
    double h, v;
    double pi = acos(-1);
    double a = 2.1, b = 4.6;
    double hua = a * pi / 180;
    double hub = b * pi / 180;
    h = 0;
    while (h != 3100)
    {
        if (h == 0)
        {
            fprintf(fp, "高度:0.00mm\t 剩余油量:<=46.21L\n");
        }
        else if (h < 6000 * tan(hua))
        {
            double hb = (cos(hub) * h - cos(hub) * 1500 + 2000 * tan(hua))/1500.0;
            double vm = 15 * 15.0 / tan(hua) * (-1500/3 * sqrt(pow((1 - hb * hb), 3)) + 1500 * (hb *
asin(hb) + sqrt(1 - hb * hb)) + hb * pi / 2 * 1500)/100;
            double va = qiuguan(cos(hub)*h - cos(hub)*1500 + 2000 * tan(hua));
            v = va + vm;
            fprintf(fp, "高度:%.2lfmm\t 剩余油量:%.2lfL\n", h, v);
        }
        else if (h < 3000 - 2000 * tan(hua))
        {
            double hf = (h - 1500) * cos(hub) + 1500;
            double ha = hf - 6000 * tan(hua);
            double hb = hf + 2000 * tan(hua);
            double va = qiuguan(ha- 1500);
            double vb = qiuguan(hb-1500);
            double xa = (cos(hub) * h - cos(hub) * 1500 - 6000 * tan(hua)) / 1500;
            double xb = (cos(hub) * h - cos(hub) * 1500 + 2000 * tan(hua) ) / 1500;
            double vm = 15 * 15.0 / tan(hua) * (1500.0 / 3.0 * sqrt(pow(1- xa * xa, 3)) - 1500.0 / 3 *
sqrt(pow(1 - xb * xb, 3))
+ 1500.0 * (xb * asin(xb) + sqrt(1 - xb * xb)- xa *
asin(xa) - sqrt(1 - xa * xa)) + (xb - xa) * pi / 2.0 * 1500)/100 ;
            v = (va + vb + vm);
            fprintf(fp, "高度:%.2lfmm\t 剩余油量:%.2lfL\n", h, v);
        }
        else if (h < 3000)
        {
            double ha = (cos(hub) * h - cos(hub) * 1500.0 - 6000 * tan(hua))/1500.0;
            double va = qiuguan(1500);

```

```

double vb = qiuguan(cos(hub) * h - cos(hub) * 1500 - 6000 * tan(hua));
double vm = 15 * 15 / tan(hua) * (1500 / 3 * sqrt(pow(1 - ha * ha, 3)) - 1500 * ha * asin(ha) -
1500.0 * sqrt(1 - ha * ha)
+ (2 - ha) * pi / 2 * 1500.0 + pi * (cos(hub) * h -
cos(hub) * 1500.0 + 2000 * tan(hua) - 1500.0)) / 100;
v = va + vb + vm;
fprintf(fp, "高度:%.2lfmm\t 剩余油量:%.2lfL\n", h, v);
}
else
{
fprintf(fp, "高度:3000.00mm\t 剩余油量:64029.08L <= V <= 64664.45L\n", NULL);
}
h += 100;
}
}

```