

倾斜卧式储油罐油量标定的实用方法

摘要

储油罐长期使用会产生变位，从而使罐容表的标定值与理论值存在误差。因此，需要进行识别变位并对罐容表进行重新标定。

首先，对小椭圆形储油罐进行研究：利用微积分知识建立了平头罐无变位情况下罐内油量和油位高度关系的数学模型，并在此基础上建立了纵向倾角 $\alpha = 4.1^\circ$ 时罐内油量和油位高度关系的理论模型，利用龙贝格积分公式求解不同油位高度时储油量的数值解，进而进行罐容表的标定。

其次，对实际储油罐进行研究：将油位高度分成三种情况，在每种情况下，对球冠、筒身的油量与油位高度的函数关系进行了分别推导。在计算球冠内油量与油位高度的关系时采用了拆补法，边缘情况使用了近似计算。对于最终建立的储油量和油位高度关系理论模型，利用最小二乘法和单目标优化的方法进行参数估计，求得：

$$\alpha = 2.14^\circ \quad \beta = 4.6^\circ$$

得到 α 和 β 后，对罐容量进行重新标定。检验模型时利用相对标准偏差的思想，构造评价函数 δ ，得到结果 $\delta = 0.0055\%$ ，误差极其微小，说明了所建模型的正确性和可靠性。

所建模型充分利用了附表中的数据，并合理地筛选了有效数据，适于推广到运输，化工，储藏行业。

关键词：龙贝格积分法，最小二乘法，单目标优化，误差分析

目录

1. 问题重述	2
2. 问题分析	2
3. 模型假设	2
4. 符号说明	3
5. 模型建立与求解	4
5.1 小椭圆型储油罐的罐容表标定	4
5.1.1 罐体无变位时的罐容表标定	4
5.1.2 纵向变位倾斜角 $\alpha = 4.1^\circ$ 时的罐容表标定	5
5.2 实际储油罐的罐容表标定	10
5.2.1 油罐内油料体积的计算	10
5.2.2 利用最小二乘法对 α 、 β 进行估计	14
5.2.3 误差分析及模型检验	15
6. 模型分析	16
7. 参考文献	17
8. 附录	17
8.1 附录一 龙贝格积分 matlab 程序	17
8.2 附录二 参数估计的 C++ 程序	18

1. 问题重述

通常加油站都有若干地下储油罐，许多储油罐在使用一段时间后，罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化，需要定期对罐容表重新标定。本题要求用数学建模的方法研究以下两个问题：

问题一：对平头小椭圆型储油罐无变位和纵向倾斜 4.1° 两种情况进行研究，并建立数学模型，研究罐体变位对罐容表的影响，并重新标定罐容表。

问题二：对球形封头的实际储油罐的横向偏转和纵向倾斜进行研究，并建立出罐体变位后标定罐容表的数学模型，根据所建立的模型确定变位参数 α 和 β ，最后利用实验数据对模型进行检验。

2. 问题分析

题目采用油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。由于变位等原因产生了理论值和标定值的相应误差。题中要求分析这些误差并予以修订。

在第一问中，需要对倾斜角 $\alpha = 4.1^\circ$ 的罐容表进行重新标定。因此，解决该问题的关键是：充分利用各种几何关系求出储油量和油位高度的函数关系，并合理解决积分形式较复杂时函数数值解的计算问题。

在第二问中，同样需要先计算出储油量和油位高度的函数关系式，由于问题中变位参数未知，故解决此问题的关键是：寻找一种方法，利用求得的罐内储油量与油位高度及变位参数的关系式来确定 α 和 β 具体的数值，从而确定罐容表，并利用统计学相关知识检验模型的正确性并进行误差分析

3. 模型假设

- 1) 变位纵向倾斜时只在出油管一侧向上倾斜
- 2) 不计储油罐壁厚对油量统计的影响及温度对油体积的影响
- 3) 进/出油时无油量损失

4. 符号说明

$a=0.89$	小椭圆型油罐横截面长半轴
$b=0.6$	小椭圆型油罐横截面短半轴
h	油浮子测得的油高
α	纵向倾斜角
β	横向倾斜角
L_1	油浮子到小椭圆型油罐左壁的距离
L_2	油浮子到小椭圆型油罐右壁的距离
$S(h)$	油高为 h 时小椭圆油罐截面面积
$V(h)$	小椭圆型油罐油高为 h 时罐内理论剩余油量
$V_1(h)$	小椭圆型油罐油高为 h 时罐内实际剩余油量
V_m	小椭圆型油罐装满油时的油量
$V_{head}(h)$	油高为 h 时 实际储油罐球冠的理论储油量
$V_{body}(h)$	油高为 h 时实际储油罐中间筒体的理论储油量
R	球冠的球径
r_h	球冠水平截面圆的半径
r	球冠竖直截面圆的半径
V_0	实际储油罐出油时的初始油量

5. 模型建立与求解

5.1 问题一：小椭圆型储油罐的罐容表标定

此部分针对小椭圆型储油罐，分别对罐体无变化和倾斜角为 α 的纵向变位两种情况进行模型建立，然后与附表中所给实验数据进行对比，以此分析模型建立的准确性，并研究罐体变位后对罐容表的影响。

5.1.1 罐体无变位时的罐容表标定

(1) 模型的建立：

小椭圆型油罐横截面如图 1 所示，以椭圆下顶点为原点建立坐标系，可得

椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-0.6)^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a=0.89, b=0.6$ 。

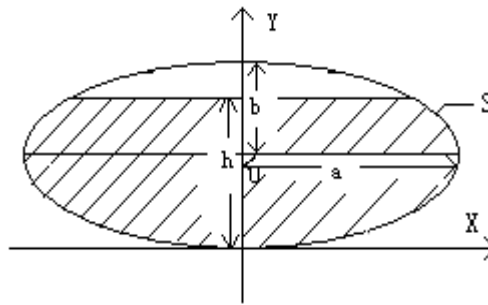


图 1

由椭圆方程可导出 $x = \frac{a}{b} \times \sqrt{-y^2 + 2by}$ ，在 y 轴上积分得油高为 h 时椭圆油罐截

面面积 $S(h) = \int_0^h (2 \times \frac{a}{b} \times \sqrt{-y^2 + 2by}) dy$ 。无变位时，油罐内剩余油量可视为一个高度为 2.45m 的柱体，故油高为 h 时对应的剩余油料体积

$$V(h) = L \times \int_0^h (2 \times \frac{a}{b} \times \sqrt{-y^2 + 2by}) dy$$

积分得：

$$V(h) = 2abL \left[\frac{h-b}{2b} \sqrt{1 - \left(\frac{h-b}{b} \right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{h-b}{b} \right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

(2) 模型求解与验证：

为验证模型的正确性，现将计算结果与实验数据进行对比。取表中所给一系

列 h 值，求出对应的剩余油量，即为计算值；同时，将表中列出的剩余油量数据进行曲线拟合得到如下函数：

$$V_1(x) = -7.247 \times 10^{-10} \times x^4 - 4.706 \times 10^{-7} \times x^3 + 0.002535 \times x^2 + 2.321 \times x - 388.1 + 262$$

画出 $V(h)$ 与 $V_1(h)$ 的曲线图如下：

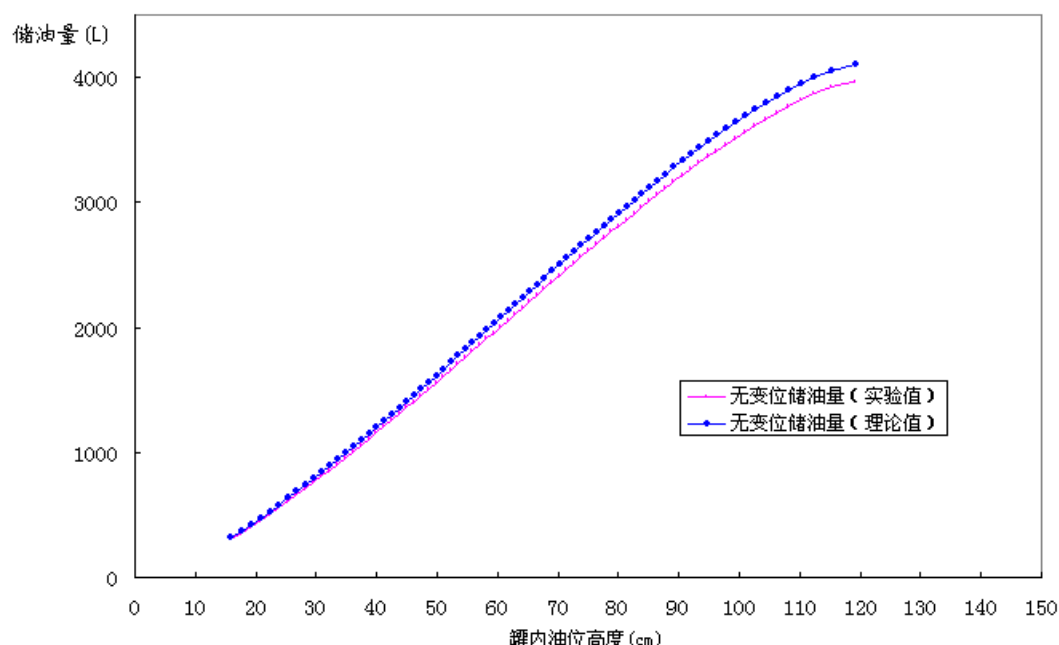


图 2 无变位储油量理论值与实际值对比图

由图 2 看出，理论计算值与实际值有存在一定的偏差，并且随 h 的增高，理论计算值与实际测量值的差值越来越大。

仔细分析其原因：由于注油管、出油管及油浮子均占有一定体积，随 h 的增高，注油管、出油管及油浮子浸入液面下的体积也在逐渐增加，导致实际值比理论值偏大，且差值会随 h 的增加而增加。

5.1.2 纵向变位倾斜角 $\alpha = 4.1^\circ$ 时的罐容表标定

(1) 模型的建立：

由 5.1.1 模型建立过程可知，高度为 h ，长短轴为 a 、 b 的椭圆部分面积

$$S(h) = 2ab \left[\frac{h-b}{2b} \sqrt{1 - \left(\frac{h-b}{b} \right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{h-b}{b} \right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

当纵向倾斜角 $\alpha = 4.1^\circ$ 时，为方便运算，将油罐经旋转后放入坐标系进行分析，如下图所示：

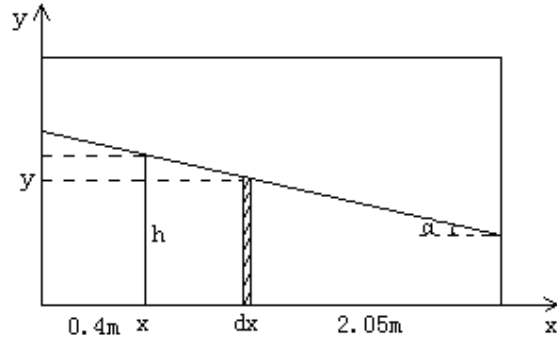


图 3

由图知,当油浮子显示高度为 h 时,横坐标为 x 处的油面高度 $y = h + (L_1 - x) \times \tan \alpha$
对 x 轴上每一点对应的截面积进行积分,即得到油料体积。

由积分范围的不同,油料体积的计算分为以下三种情况:

① $L_1 \tan \alpha \leq h \leq L_2 \tan \alpha$ 时: 如图 4 所示

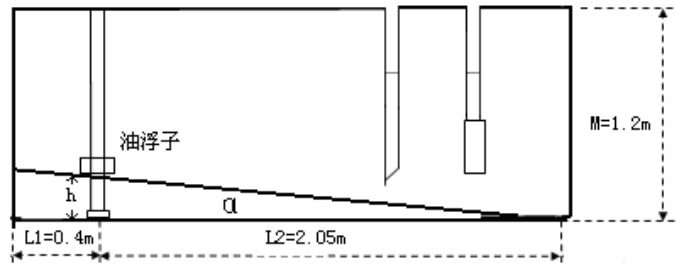


图 4

$$\text{油罐内油料体积 } V(h) = \int_0^{\frac{h}{\tan \alpha} + L_1} S(h + (L_1 - x) \times \tan \alpha) dx$$

② $L_2 \tan \alpha < h < M - L_1 \tan \alpha$ 时: 如图 5 所示

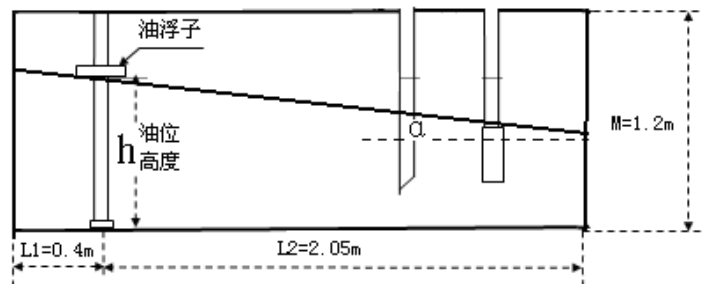


图 5

$$\text{油罐内油料体积 } V(h) = \int_0^{L_1 + L_2} S(h + (L_1 - x) \times \tan \alpha) dx$$

③ $M - L_1 \tan \alpha \leq h \leq M$ 时: 如图 6 所示

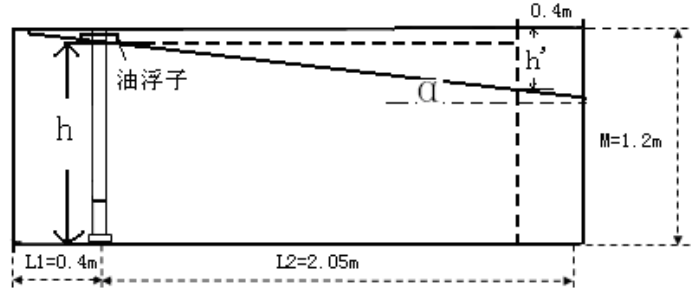


图 6

如图设 h' ，则易看出 $h' = M - h + (L_2 - L_1) \tan \alpha$ 。于是，设罐内总油量为 V_m ，可以直观地看出：油罐内的剩余油量 $V = V_m - V''$ 。同时，可使用①中的方法利用 h' 求得空余部分体积 $V'' = V(h')$ ，最终可得到：

$$\text{罐内油料体积 } V = V_m - \int_0^{\frac{h'}{\tan \alpha} + L_1} S(h' + (L_1 - x) \times \tan \alpha) dx$$

(2) 模型求解与验证：

由于以上体积函数形式不一，且较为复杂，若通过正常的积分求取结果会比较繁琐。考虑问题一不要求找出具体的函数关系，只需要每隔 1cm 标注一次结果，故利用龙贝格积分^[2]算法求解积分的数值解，从而对罐容量进行标定。龙贝格积分法具体算法如下：

设用复合梯形计算积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的近似值，取步长 $h = \frac{b-a}{n}$ ，并记 $T_1(h) = T_n$ ，

则有 $I \approx T_1(h) = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$ 。当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上充分光滑时，可证

用 $T_1(h)$ 逼近 I 的截断误差是 $I - T_1(h) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_k h^{2k} + \dots$ ，其中 a_k 是与 h

无关的常数。按理查森外推法 $\begin{cases} F_1(h) = F(h) \\ F_{m+1}(h) = \frac{F_m(qh) - q^p F_m(h)}{1 - q^{p_m}} \end{cases}, m=1, 2, \dots$ 其中 q 为

满足 $1 - q^{p_m} \neq 0 (m=1, 2, \dots)$ 的适当正数。以 $q = \frac{1}{2}$ 取序列

$T_{m+1}(h) = \frac{4^m \cdot T_m(\frac{h}{2}) - T_m(h)}{4^m - 1}, (m=1, 2, \dots)$ 。其中用 $T_{m+1}(h)$ 来逼近 I 的误差为

$O(h^{2(m+1)})$ 。

龙贝格算法具体实现见附录一，将 $h=0, 1, 2, 3, \dots, 119, 120$ 带入到 $V(h)$ ，由龙

贝格算法计算得到油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值，列表如下：

表 1 小椭圆型储油罐罐容表

油高(mm)	储油罐油量(L)	油高(mm)	储油罐油量(L)	油高(mm)	储油罐油量(L)
0	0~1.674387	400	965.660776	800	2661.422634
10	3.531122	410	1004.953782	810	2703.552425
20	6.263648	420	1044.583921	820	2745.491028
30	9.976866	430	1084.534871	830	2787.224773
40	14.758956	440	1124.790717	840	2828.739779
50	20.694101	450	1165.335924	850	2870.021937
60	27.858068	460	1206.155298	860	2911.056886
70	36.320883	470	1247.233966	870	2951.829995
80	46.147722	480	1288.557344	880	2992.326337
90	57.399578	490	1330.111117	890	3032.530662
100	70.133778	500	1371.881217	900	3072.42737
110	84.404394	510	1413.8538	910	3112.000481
120	100.262581	520	1456.01523	920	3151.233596
130	117.756843	530	1498.352059	930	3190.109866
140	136.933273	540	1540.851013	940	3228.611946
150	157.818421	550	1583.498973	950	3266.721951
160	180.259099	560	1626.282961	960	3304.421402
170	203.999405	570	1669.190128	970	3341.691168
180	228.906603	580	1712.20774	980	3378.511401
190	254.884875	590	1755.32316	990	3414.861462
200	281.857661	600	1798.523842	1000	3450.719834
210	309.760769	610	1841.797318	1010	3486.06402
220	338.538729	620	1885.131182	1020	3520.870436
230	368.142595	630	1928.513081	1030	3555.114269
240	398.5285	640	1971.930708	1040	3588.76932
250	429.656656	650	2015.371783	1050	3621.80782
260	461.49062	660	2058.824048	1060	3654.20019
270	493.996746	670	2102.275257	1070	3685.91477
280	527.143753	680	2145.713159	1080	3716.917462
290	560.902397	690	2189.125495	1090	3747.171291
300	595.245191	700	2232.499981	1100	3776.635821
310	630.146191	710	2275.824302	1110	3805.266392
320	665.580805	720	2319.086097	1120	3833.013049
330	701.525646	730	2362.272952	1130	3859.819002
340	737.958395	740	2405.372383	1140	3885.618241
350	774.857693	750	2448.371831	1150	3910.33151
360	812.203042	760	2491.258644	1160	3933.85845
370	849.974723	770	2534.020068	1170	3956.05568
380	888.153723	780	2576.643232	1180	3973.212325
390	926.721671	790	2619.115135	1190	3992.388755
				1200	4009.883017

为分析模型的准确性，将模型求得的数据与表中所给数据在同一坐标中作出 V-h 曲线图如下：

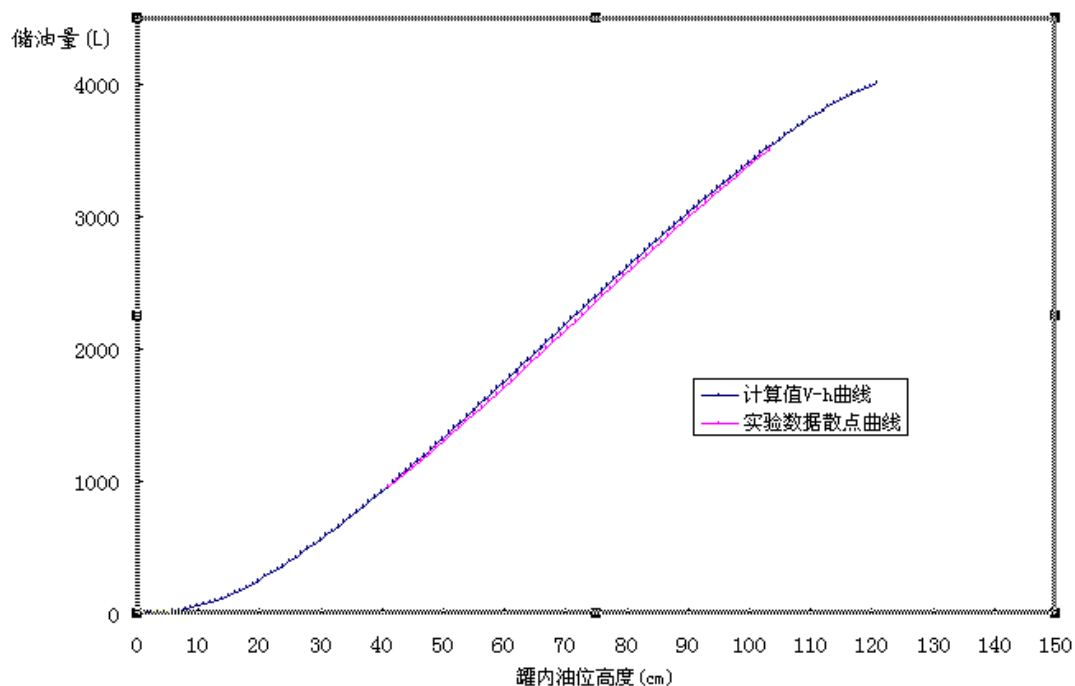


图 7

由图 7 可看出，由模型得到的曲线与实验数据散点曲线基本相吻合，说明模型结果基本正确。

除此以外，为研究罐体变位后对罐容表的影响，利用模型所得数据，分别作出罐体变位前后的 V-h 曲线进行对比，模型曲线图如下：

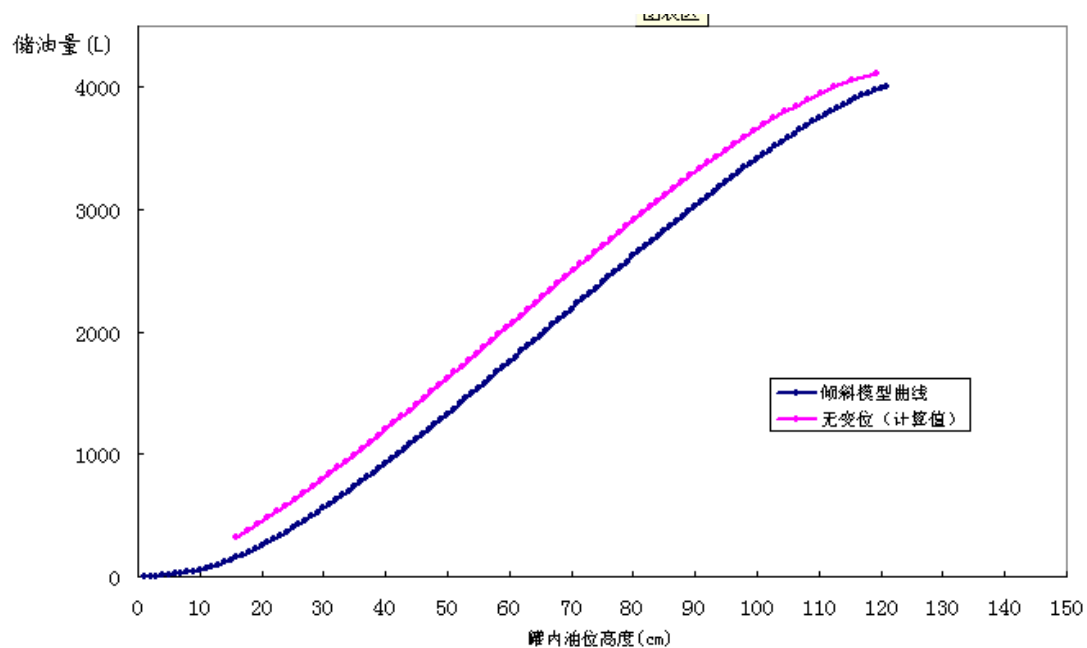


图 8

由图 8 看出，罐体发生变位后，原始罐容表的标定值与实际油量相比会偏大，即实际罐容表数据变小，且变位参数越大，偏差量越大。此时，若不对罐容表进行修改，则所得数据比实际值大，使得对罐内储油量的判断产生错误。

5.2 问题二 实际储油罐的罐容表标定

为计算储油罐实际变位量 α 、 β ，首先建立模型，求得油浮子显示高度 h 与储油量 $V(\alpha, \beta)$ 的关系，然后通过所给数据估计 α 、 β 的具体数值，最后根据实际数据验证模型的准确性。

5.2.1 油罐内油料体积的计算

(1) 两侧球缺体积的计算

对于实际储油罐，变位后为了建立罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。将罐内的容油量分为三部分，

$V = V_{head1} + V_{head2} + V_{body}$ 。其中 V_{head1} 及 V_{head2} 表示两端凸头的容油量， V_{body} 表示中间筒体的容油量。令 r 为圆柱截面圆半径。油罐中间部分横截面示意图如下图所示，由图 9 可知，当油罐的横向偏转角度为 β 时，显示的油位高度为 h 。可求得油面到罐底的最大垂直距离 $H = r - (r - h) \cos \beta$ 。

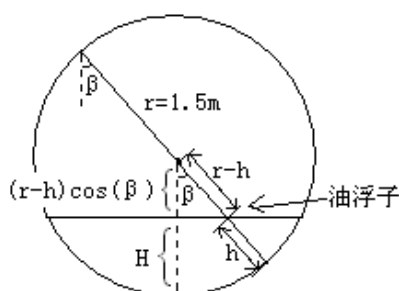


图 9

用同“问题一”的方法，将储油罐纵向旋转一个角度 α 放入坐标平面内，如下图：

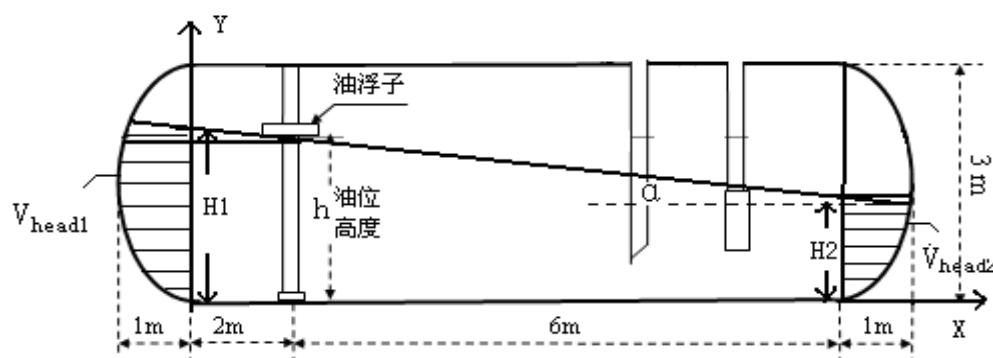


图 10

由图 10 可知， $H_1 = H + 2 \tan \alpha$ ， $H_2 = H - 6 \tan \alpha$ 。

①当 $H_1 \leq 3, H_2 \geq 0$ 时

下面，首先计算油位高度显示 h 时两端凸头内的油料体积：

如图 10 所示，在 A 点与 B 点分别作水平圆面，则由几何知识易知 V_{head1} 的“余”部分可以近似补到 V_{head2} 的“缺”部分，则求球头内油体积的问题转化为了求如下图所示的水平面下的球头体积问题^[1]。

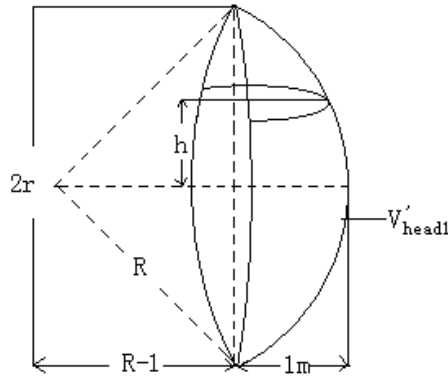


图 11

图 11 是 V_{head1} 的情况，其中 R 是两端封头球径， V'_{head1} 是水平面下球头内油体积。

图 12 是水平截面圆，阴影部分面积 S 为某一高度的封头内油面积，只需将 S 对深度进行积分即可求出体积 V'_{head1} 。

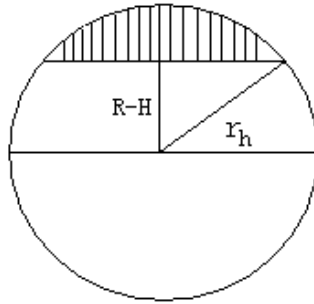


图 12

设 r_h 为水平截面圆的半径，则由图 12 可知 $r_h = \sqrt{R^2 - h^2}$ 。于是，水平截

面积 $S(h) = \int_{R-1}^{r_h} 2\sqrt{r_h^2 - s^2} ds = \int_{R-1}^{\sqrt{R^2 - h^2}} 2\sqrt{R^2 - h^2 - s^2} ds$ ，通过积分可得结果如下：

$$S(h) = (1-h)\sqrt{2R-h^2-1} + \frac{1}{2}\pi(R^2-h^2) + (h^2-R^2)\arctan\left(\frac{R-1}{\sqrt{2R-h^2-1}}\right)$$

再对此面积在纵向进行积分得：

$$\begin{aligned}
V'_{head}(h) = \int_0^h S(h) dh = & \frac{\pi R^2 (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)}{2} - \frac{\pi (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^3}{6} \\
& + \frac{2(h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R) \sqrt{2R - (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^2 - 1}}{3} \\
& - \frac{2R(h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R) \sqrt{2R - (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^2 - 1}}{3} \\
& - \frac{2R^3 - 3R + 1}{3} \arctan \left(\frac{(h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)}{\sqrt{2R - (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^2 - 1}} \right) \\
& + \frac{(h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^3 - 3R^2 (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)}{3} \\
& \times \arctan \left(\frac{R-1}{\sqrt{2R - (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^2 - 1}} \right) \\
& + \frac{2R^3}{3} \arctan \left(\frac{(R-1)(h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)}{\sqrt{2R - (h \cos \beta - R \cos \beta + 2 \tan \alpha + R)^2 - 1}} \right)
\end{aligned}$$

于是得到 $V'_{head1} = V'_{head}(H_1)$, $V'_{head2} = V'_{head}(H_2)$

② 当 $H_1 \leq 3, H_2 < 0$ 时, 只有 V_{head1} , 此时 $V_{head1} \approx V'_{head1}$

③ 当 $H_1 > 3$ 时, $V_{head1} = V'_{head1}, V_{head2} \approx V'_{head2}$

(2) 中间圆筒部分体积的计算

由“问题一”中椭圆部分面积公式可推出, 半径为 R 高为 t 的弓形面积:

$$S(t) = -r^2 \arcsin \frac{r-t}{r} - (r-t) \sqrt{2rt - t^2} + \frac{\pi}{2} r^2$$

为计算方便, 同样将油罐经旋转后放入坐标系进行分析, 如下图所示:

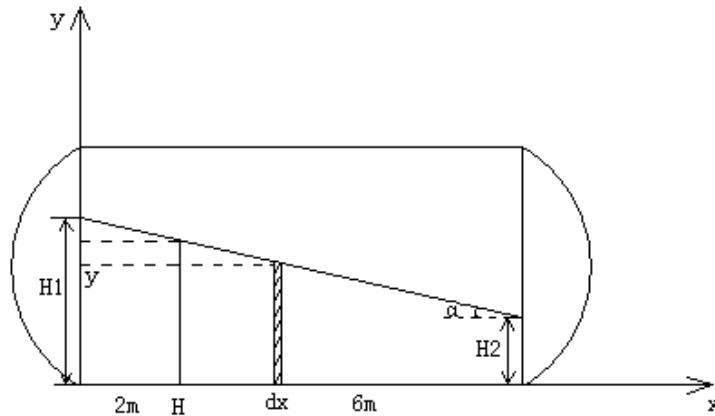


图 13

设液体表面任意一点坐标为 (x, y) ，则有 $y = H_1 - x \tan \alpha \Rightarrow dx = -\frac{1}{\tan \alpha} dy$

\Rightarrow 图 13 中阴影部分体积 $dV = s(y)dx$ ，中间部分体积的计算分一下三种情况：

① 当 $H_1 \leq 3, H_2 \geq 0$ 时，从最左端积到最右端，得：

$$\begin{aligned} V_{body} &= \int_0^8 S(y)dx = -\frac{1}{\tan \alpha} \int_{H_1}^{H_1-8\tan \alpha} S(y)dy \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} \int_{H_1}^{H_1-8\tan \alpha} [-r^2 \arcsin \frac{r-y}{R} - (r-y)\sqrt{2ry-y^2} + \frac{\pi}{2} r^2] dy \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} [r^2(R-y) \arcsin \frac{r-y}{r} + r^2 \sqrt{r^2 - (r-y)^2} - \frac{1}{3}(2ry-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} r^2 y] \Big|_{H_1}^{H_1-8\tan \alpha} \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} \{r^2(r-H_1+8\tan \alpha) \arcsin \frac{r-H_1+8\tan \alpha}{r} - r^2(r-H_1) \arcsin \frac{r-H_1}{r} \\ &\quad + r^2 \sqrt{r^2 - (r-H_1+8\tan \alpha)^2} - r^2 \sqrt{2rH_1-H_1^2} - \frac{1}{3}[2r(H_1-8\tan \alpha) - (H_1-8\tan \alpha)^2]^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{3}(2rH_1-H_1^2)^{\frac{3}{2}} - 4\pi r^2 \tan \alpha\} \end{aligned}$$

② 当 $H_1 \leq 3, H_2 < 0$ 时，由以上 H_1 、 H_2 、 H 和 h 的关系可求得 $h \leq 0.22$ ，用同“问题一”的体积计算方法，可得：

$$\begin{aligned} V_m &= \int_0^{\frac{H_1}{\tan \alpha}} S(y)dx = -\frac{1}{\tan \alpha} \int_{H_1}^0 S(y)dy \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} \int_{H_1}^0 [-r^2 \arcsin \frac{r-y}{r} - (r-y)\sqrt{2ry-y^2} + \frac{\pi}{2} r^2] dy \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} [\frac{\pi}{2} r^3 - r^2(r-H_1) \arcsin \frac{r-H_1}{r} - r^2 \sqrt{2rH_1-H_1^2} + \frac{1}{3}(2rH_1-H_1^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2} r^2 H_1] \end{aligned}$$

③ 当 $H_1 > 3$ 时，与②同理可求得 $h \geq 2.92$ ，此时 V_m = 中间部分总体积 - 上部空余体，上部空余体积用 (2) 中公式计算。

综上 (1) (2) 可得，罐内总油量

$$V(\alpha, \beta, h) = V'_{head}(H_1) + V'_{head}(H_2) + V_{body}(H_1)$$

其中 $H_1 = H + 2 \tan \alpha$ ， $H_2 = H - 6 \tan \alpha$ ， $H = r - (r-h) \cos \beta$ 。

5.2.2 利用最小二乘法对 α 、 β 的值进行估计

(1) 参数估计模型的建立

以上求出的储油罐中剩余油料体积公式中含有参数 α 、 β ，下面用题中所给的实际储油罐的采集数据对其具体值进行估计。首先，对“实际采集数据表”进行分析，每个采集点记录了一个出油量 Δv_i 、显示的油高 h_i 、显示的油量容积 V_i ，其中 V_i 是储油罐无变位情况下油高为 h_i 时对应的油料体积，与实际数据不符，不能用来对 α 、 β 进行估计。

因此，为得到油高为 h_i 时实际的剩余油料体积，设原始油料体积为 V_0 ，对所给数据进行处理，算出油高为 h_i 时的总出油量 v_i 。于是，有油高为 h_i 时，油罐内的实际剩余油量 $V'_i = V_0 - v_i$ ；于是得到一系列数据 (h_i, V'_i) ，且这些数据均满足表达式 $V(\alpha, \beta, h_i)$ 。给出任意一组符合条件的 α 、 β 、 V_0 ，可算出计算值与测量值的总偏差

$$F(\alpha, \beta, V_0) = \sum_{i=1}^N (V(\alpha, \beta, h_i) - V_0 + v_i)$$

显然，使得总偏差 $F(\alpha, \beta, V_0)$ 最小的 α 、 β 、 V_0 即为实际的有效参数。于是，此问题变为以下最优化问题：求取合适的 α^* 、 β^* 、 V_0^* ，使得

$$F(\alpha^*, \beta^*, V_0^*) = \min F(\alpha, \beta, V_0)$$

(2) 模型求解：

这里采用枚举法求 α 、 β 、 V_0 的值。首先分析所给数据，在一次性补充进油前，可算出累计出油量为54118.18L，此时显示的剩余油量为6086.74L；由上面求得的体积函数 $V(\alpha, \beta, h_i)$ 可看出， h_i 一定时， $V(\alpha, \beta, h_i)$ 随 α 、 β 的增大而减小，故此时油罐中的剩余油量必大于显示值。于是可得出，初始油量 V_0 必大于累计出油量、小于累积出油量+显示值，即 $54118.18L < V_0 < 60204.92L$ 。 α 、 β 的范围均为 $0 \sim 90^\circ$ 。然后用C++编程计算三个变量的具体数值。

为减少计算量，采用逐步细化的方法：先在以上范围内以较大步长（ α 、 β 步长为 1° ， V_0 步长为 $1m^3$ ）枚举 α 、 β 、 V_0 的值，计算出个参数的一个大概数

值，在该数值附近再次进行较精细的计算，如此反复，直到达到参数所需要的精度为止。通过该方法计算出 α 、 β 、 V_0 结果如下：

$$\alpha = 2.14^\circ \quad \beta = 4.6^\circ \quad V_0 = 58.98 \, m^3$$

枚举算法的 C++ 程序见附录二。

将计算出的 α 、 β 值带入到函数 $V(\alpha, \beta, h_i)$ 中，取适当的 h_i 得到实际储油罐油位高度间隔为 10cm 时的罐容表标定如下表：

表 2 实际储油罐罐容表

浮油子高度 (mm)	储油罐油量 (L)	浮油子高度 (mm)	储油罐油量 (L)
100	0~356.34	1600	33036.57
200	1062.58	1700	35846.89
300	2213.02	1800	38638.09
400	3687.75	1900	41394.69
500	5413.81	2000	44100.95
600	7349.39	2100	46740.62
700	9463.31	2200	49296.84
800	11730.02	2300	51751.78
900	14127.3	2400	54086.32
1000	16635.22	2500	56279.51
1100	19235.37	2600	58307.66
1200	21910.43	2700	60142.76
1300	24643.88	2800	61749.31
1400	27419.75	2900	63075.39
1500	30222.43	3000	64011.43

5.2.3 误差分析及模型检验

(1) 方法一：

将附件 2 中显示油高数据带入到所得的罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的函数关系式中，再加上相对应的累积出油量可得到 603 组油量初始值，分析这 603 组数据和我们已经得到的理论油

量初始值，利用相对标准偏差的思想 我们构造评价函数
$$\delta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (V_i - V_0)^2}}{\frac{n-1}{V_0}} \quad \text{其中}$$

V_i 为第 i 组数据得到的油量初始值， V_0 为理论油量初始值。

通过计算得 $\delta = 0.0055\%$ ，误差很小，说明所建模型较为准确，基本可以用来解决实际问题。

(2) 方法二:

令得到的罐内储油量与油位高度及变位参数 (纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β) 之间的函数关系式中的 $\alpha = 0, \beta = 0$, 得到无变位情况下, 罐内储油量与油位高度的关系, 代入附件 2 中显示油高数据组, 得到对应的出油量理论值。每隔 20 个点取一个数据, 将其与显示的油量体积作对比, 如下表所示:

表 3 储油量实际值与理论值对比表

高度 (mm)	标注体积 (L)	计算体积 (L)	高度 (mm)	标注体积 (L)	计算体积 (L)
2632.23	60448.88	60448.8	473.22	6154.36	6154.25
2490.06	57782.53	57782.45	2357.27	54955.32	54955.25
2334.88	54451.17	54451.1	2240.56	52250.9	52250.83
2177.92	50727.53	50727.46	2091.02	48542.48	48542.41
2035.94	47119.35	47119.28	1957.15	45039.03	45038.96
1868.46	42643.93	42643.87	1815.31	41186.12	41186.05
1710.1	38261.74	38261.68	1681.91	37471.31	37471.25
1581.14	34629.99	34629.93	1542.45	33534.85	33534.79
1450.53	30930.79	30930.67	1405.53	29657.54	29657.41
1305.06	26827.49	26827.36	1280.75	26146.69	26146.57
1163.62	22898.62	22898.5	1127.72	21916.34	21916.22
1020.05	19018.44	19018.32	982.05	18015.71	18015.59
870.36	15141.26	15141.14	841.56	14419.83	14419.71
726.89	11640.87	11640.76	712.82	11311.13	11311.01

通过对比可看出, 计算出的体积与表中标注的体积十分接近, 误差很小, 说明体积函数 $V(\alpha, \beta, h_i)$ 模型建立基本正确。

6. 模型分析

模型优点:

- (1) 充分利用了附表中的数据, 通过对图表中数据的分析, 合理地筛选了有效数据, 提高了模型建立的准确性。
- (2) 使用最小二乘法进行优化, 确定参数值, 得到结果误差很小, 十分可靠。
- (3) 该模型具有普适性, 适于推广到运输, 化工, 储藏等行业。

模型缺点:

建模方法较单一, 对于同一问题没有建立多个模型, 无法进行多种方法的分析比较。

7. 参考文献

- [1] 付昶林.倾斜油罐容量的计算[J].黑龙江八一农垦大学学报, 1981: 43-52
- [2] 刘玉娟, 陈应祖, 卢克功.龙贝格积分法及其应用编程[J].重庆科技学院学报, 2007 (3) :97-100
- [3] 高恩强, 丰培云.卧式倾斜安装圆柱体油罐不同液面高度时贮油量的计算[J].山东冶金, 1998 (2): 26-28
- [4] 管冀年, 赵海.卧式储油罐内油品体积标定的实用方法[J].计量与测试技术, 2004 (2): 36
- [5] 姜启源. 数学模型 (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003, 59-121
- [6] 施光燕, 董加礼. 最优化方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999, 63-107

8. 附录

附录一: 龙贝格积分 matlab 程序

```
%=====
function R = romberg(f, a, b, n)
format long
% ROMBERG -- Compute Romberg table integral approximation.
%
% SYNOPSIS:
%   R = romberg(f, a, b, n)
%
% DESCRIPTION:
%   Computes the complete Romberg table approximation to the integral
%
%           / b
%   I = |    f(x) dx
%       /  a
%
% PARAMETERS:
%   f   - The integrand.  Assumed to be a function callable as
%         y = f(x)
%         with 'x' in [a, b].
%   a   - Left integration interval endpoint.
%   b   - Right integration interval endpoint.
%   n   - Maximum level in Romberg table.
%
% RETURNS:
%   R   - Romberg table.  Represented as an (n+1)-by-(n+1) lower
```

```

%          triangular matrix of integral approximations.
%
% SEE ALSO:
%   TRAPZ, QUAD, QUADL.

% NOTE: all indices adjusted for MATLAB's one-based indexing scheme.

% Pre-allocate the Romberg table.  Avoids subsequent re-allocation which
% is often very costly.
R = zeros([n + 1, n + 1]);

% Initial approximation.  Single interval trapezoidal rule.
R(0+1, 0+1) = (b - a) / 2 * (feval(f, a) + feval(f, b));

% First column of Romberg table.  Increasingly accurate trapezoidal
% approximations.
for i = 1 : n,
    h = (b - a) / 2^i;

    s = 0;
    for k = 1 : 2^(i-1),
        s = s + feval(f, a + (2*k - 1)*h);
    end

    R(i+1, 0+1) = R(i-1+1, 0+1)/2 + h*s;
end
End

```

附录二：参数估计的 C++ 程序

```

#include <iostream>
#include <cmath>

#define PI 3.1415926
using namespace std;

double r = 1.625;
double p1, p2;
double R = 1.5;

double f(double x)
{
    double ans = PI*r*r*x/2-PI*x*x*x/6+2*x*sqrt(2.25-x*x)/3
        -2*x*r*sqrt(2.25-x*x)/3
        -(1-3*r+2*r*r*r)*atan(x/sqrt(2.25-x*x))/3
        +(x*x*x-3*x*r*r)*atan(0.625/sqrt(2.25-x*x))/3
}

```

```

+2*r*r*r*atan(0.625*x/(r*sqrt(2.25-x*x)))/3+2.0289;
return ans;
}

double g(double x)
{
    double ans =
4*PI*R*R-(R*R*(R-x+8*tan(p1))*asin((R-x+8*tan(p1))/R)+R*R*sqrt(2*R*(x
-8*tan(p1))-(x-8*tan(p1))*(x-8*tan(p1)))-R*R*(R-x)*asin((R-x)/R)-R*R*
sqrt(2*R*x-x*x)-pow((2*R*(x-8*tan(p1))-(x-8*tan(p1))*(x-8*tan(p1))),1.
5)/3+pow((2*R*x-x*x), 1.5)/3)/tan(p1);
    return ans;
}

int main()
{
    double H1, V1, H, H2, h1, h2;
    double out, s, t, ans, ansx, ansy, ansz, tt, ss, pppp;

    double numx[1024], numy[1024], left[1024];

    freopen("in2.txt", "r", stdin);
    freopen("out1.txt", "w", stdout);
    numx[0] = 0;
    int k = 1;
    while(scanf("%lf %lf", &numx[k], &numy[k]) == 2)
    {
        numx[k] += numx[k-1];
        k++;
    }
    printf("%d\n", k);

    double ansk = 100000000;
    //此处先采用大范围大步长、再使用小范围小步长
    for(int qq = 5850; qq <= 5950; qq++)
    {
        double q = (double)qq/100;
        ans = 100000000;
        for(int j = 40; j <= 60; j++)
        {
            for(int i = 190; i <= 220; i++)
            {
                p1 = (double)i/18000*PI; //角度
                p2 = (double)j/1800*PI;

```

```

double tmp = 0;
for(int o = 5; o <= 290; o++)
{
    t = numy[o];
    out = numx[o];
    t /= 1000;
    out /= 1000;
    H = 1.5-(1.5-t)*cos(p2);
    H1 = H+2*tan(p1);
    H2 = H-6*tan(p1);
    h1 = H1-1.5;
    h2 = H2-1.5;

    V1 = f(h1)+f(h2)+g(H1);
    tmp += (V1-q+out)*(V1-q+out);
}
if(tmp < ans)
{
    ans = tmp;
    ansx = i;
    ansy = j;
    ansz = q;
}
}
}
if(ans < ansk)
{
    ansk = ans;
    tt = ansx;
    ss = ansy;
    pppp = q;
}
printf("%.2lf %lf          total:%lf\n", ansx/100, ansy/10, q);
}
printf("答案: %.2lf %lf          total:%lf\n", tt/100, ss/10, pppp);
return 0;
}

```