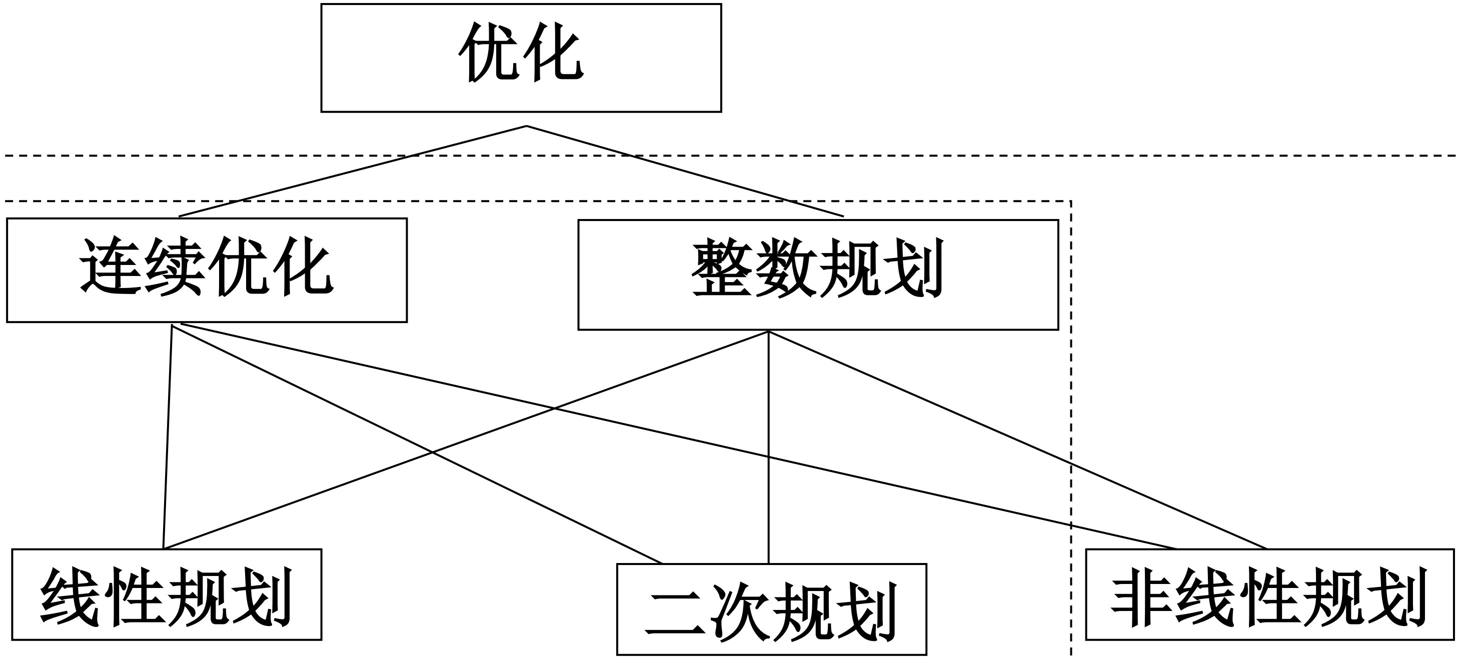
LINGO软件简介

文杰

2020.07.19

LINDO/LINGO软件的基本功能



LINDO（交互式的线性和离散优化求解器）

Linear Interactive and Discrete Optimizer

LINGO(Linear Interactive and Discrete Optimizer交互式线性和通用优化求解器)

LINGO软件求解算法

1. 线性规划求解程序通常使用单纯形算法

（为了解决大规模问题，提供内点法备用）

2. 非线性优化求解程序采用的是顺序线性规划法，即通过迭代求解一系列线性规划来逼近，达到求解非线性规划的目的。

（顺序二次规划法、广义既约梯度法，多初始点求解，全局优化）

括号内部分通常不是LINGO软件的标准配置，用户需要额外付费购买

(说明我们用的测试版软件求解非线性规划问题，不一定得到最优解，一般与初始值有关，通过选择不同初始值，通过找到多个局部最优解增加找到全局最优解的可能性。)

建立优化模型的注意事项

为了利用LINGO软件迅速得到高质量的解，建模时需要注意以下几点：

1、尽量使用实数优化，减少整数约束和整数变量

2、尽量使用光滑优化，减少非光滑约束的个数

如：尽量少使用绝对值、符号函数、多个变量求最大/最小值、四舍五入、取整函数等(这些函数是非光滑的，含有尖点，甚至间断点，不利于利用其导数信息)

3、尽量使用线性模型，减少非线性约束和非线性变量的个数 （如$x/y<5$ 改为$x<5y$)

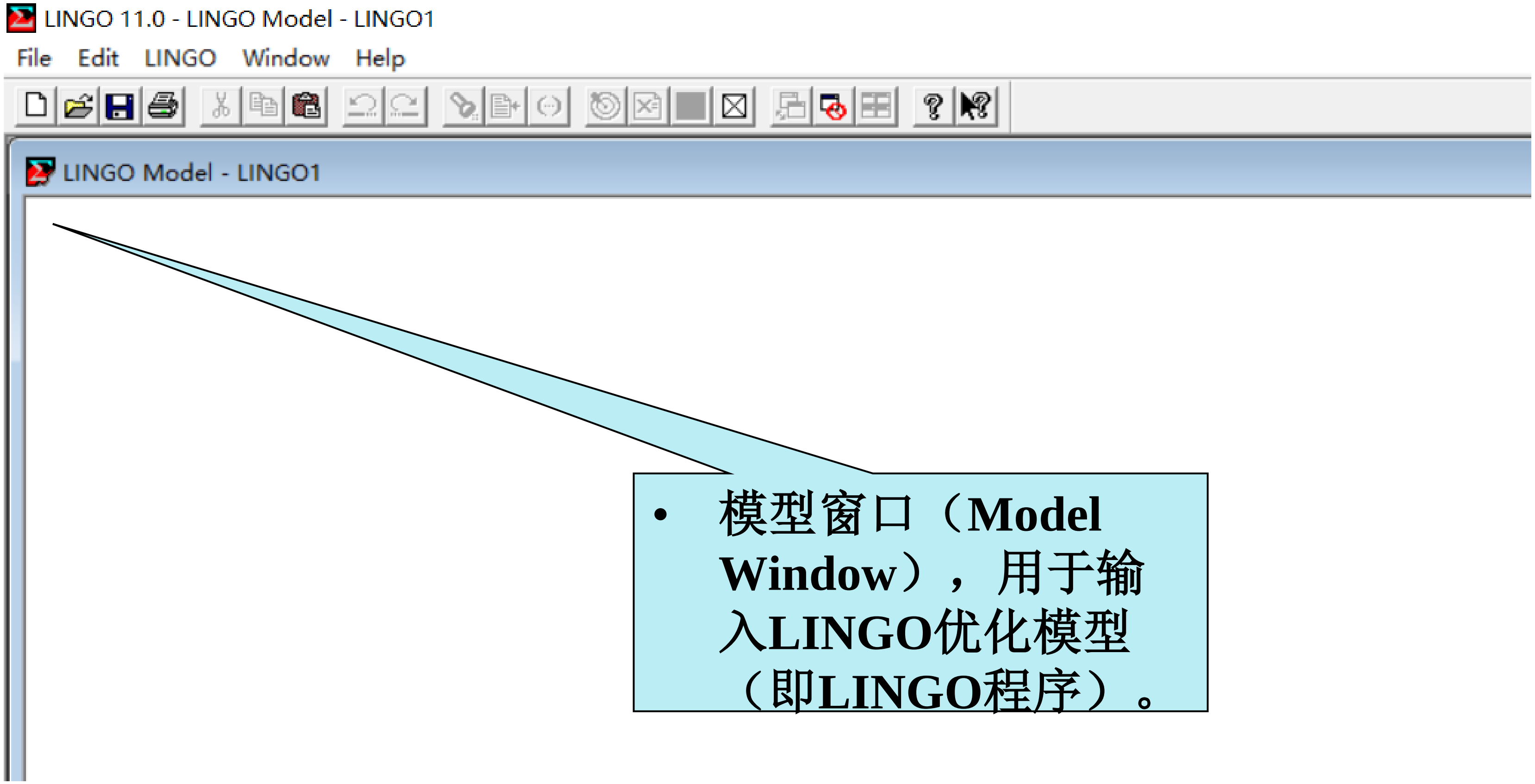
4、合理设定变量上下界，尽可能给出变量初始值

5、模型中使用的参数数量级要适当 (如最大数与最小数（按绝对值）量级不超过10^3)

首先安装LINGO软件，

Lingd11.dll	2008/6/11 15:01	应用程序扩展	68 KB
Lingdb3.dll	2005/12/15 12:11	应用程序扩展	196 KB
Lingf11.dll	2009/2/4 21:58	应用程序扩展	2,708 KB
Lingfd11.dll	2008/6/11 15:20	应用程序扩展	2,704 KB
Lingj11.dll	2008/4/25 14:56	应用程序扩展	52 KB
Lingo 11 Users Manual	2008/6/9 10:31	Chrome HTML D...	3,980 KB
LINGO.CNF	2009/2/4 21:37	CNF 文件	1 KB
Lingo11	2008/6/11 14:23	编译的 HTML 帮...	2,230 KB
Lingo11	2015/7/27 21:31	应用程序	484 KB
Lingo11	2008/4/25 14:58	Executable Jar File	3 KB
Lingo11_en	2015/7/29 0:34	应用程序	476 KB
Lingxl3.dll	2007/8/20 13:55	应用程序扩展	172 KB
lndlng11.lic	2009/2/4 21:58	LIC 文件	1 KB
Mfc42.dll	2004/8/4 2:56	应用程序扩展	1,004 KB
Mosek5_0.dll	2008/4/28 23:00	应用程序扩展	7,196 KB
Msvcr71.dll	2007/3/15 22:41	应用程序扩展	340 KB

在安装文件夹中有可执行文件，打开Lingo文件，可以启动软件，显示工作窗口。



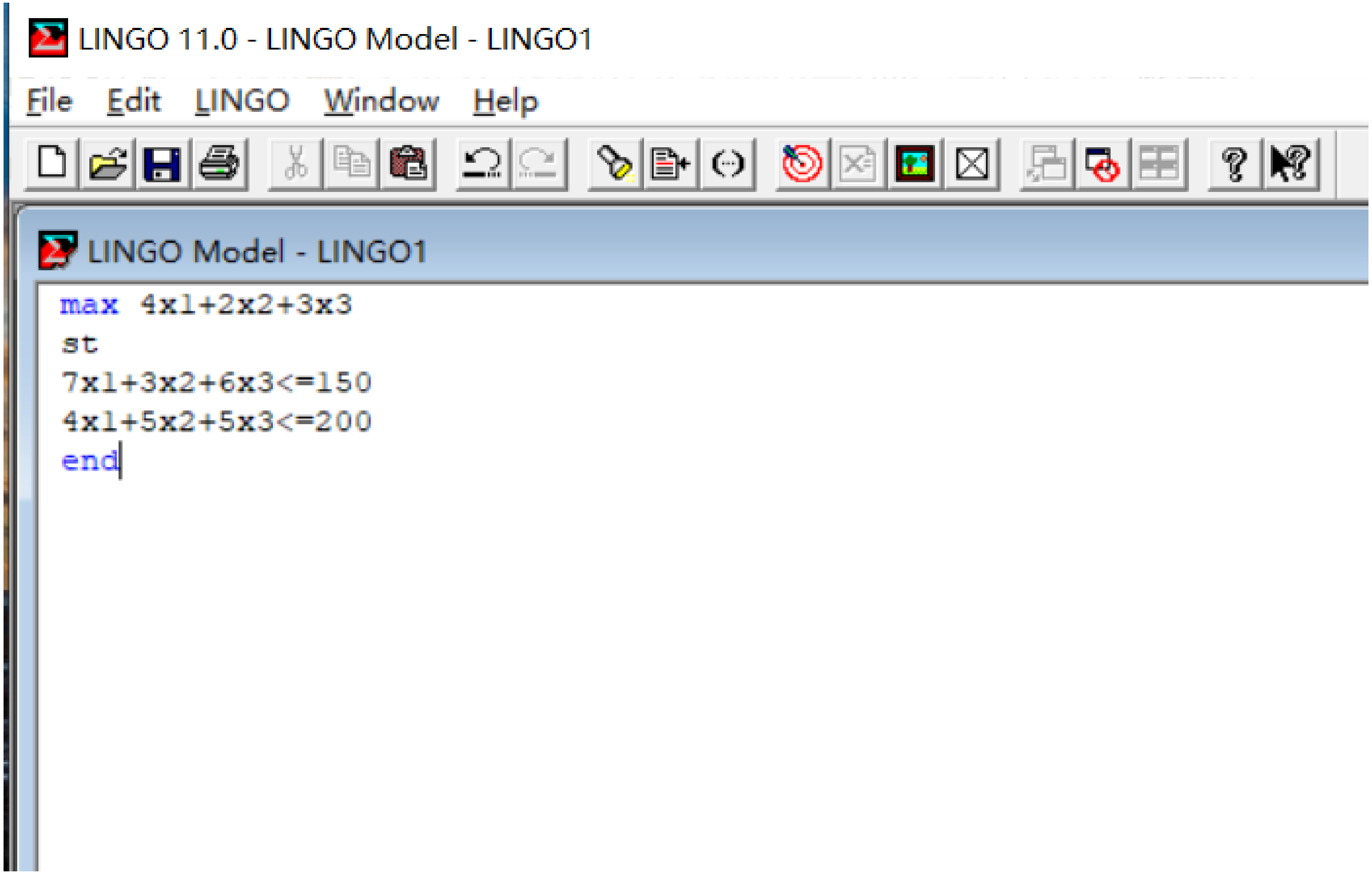
- 模型窗口（Model Window），用于输入LINGO优化模型（即LINGO程序）。

例1、每天供应原材料200kg, 每天可供使用的劳动力为150h，建立线性规划模型，求各种产品的日产量使总收益最大。

	A	B	C
劳动力（h/件）	7	3	6
原材料（kg/件）	4	4	5
利润(元/件)	4	2	3

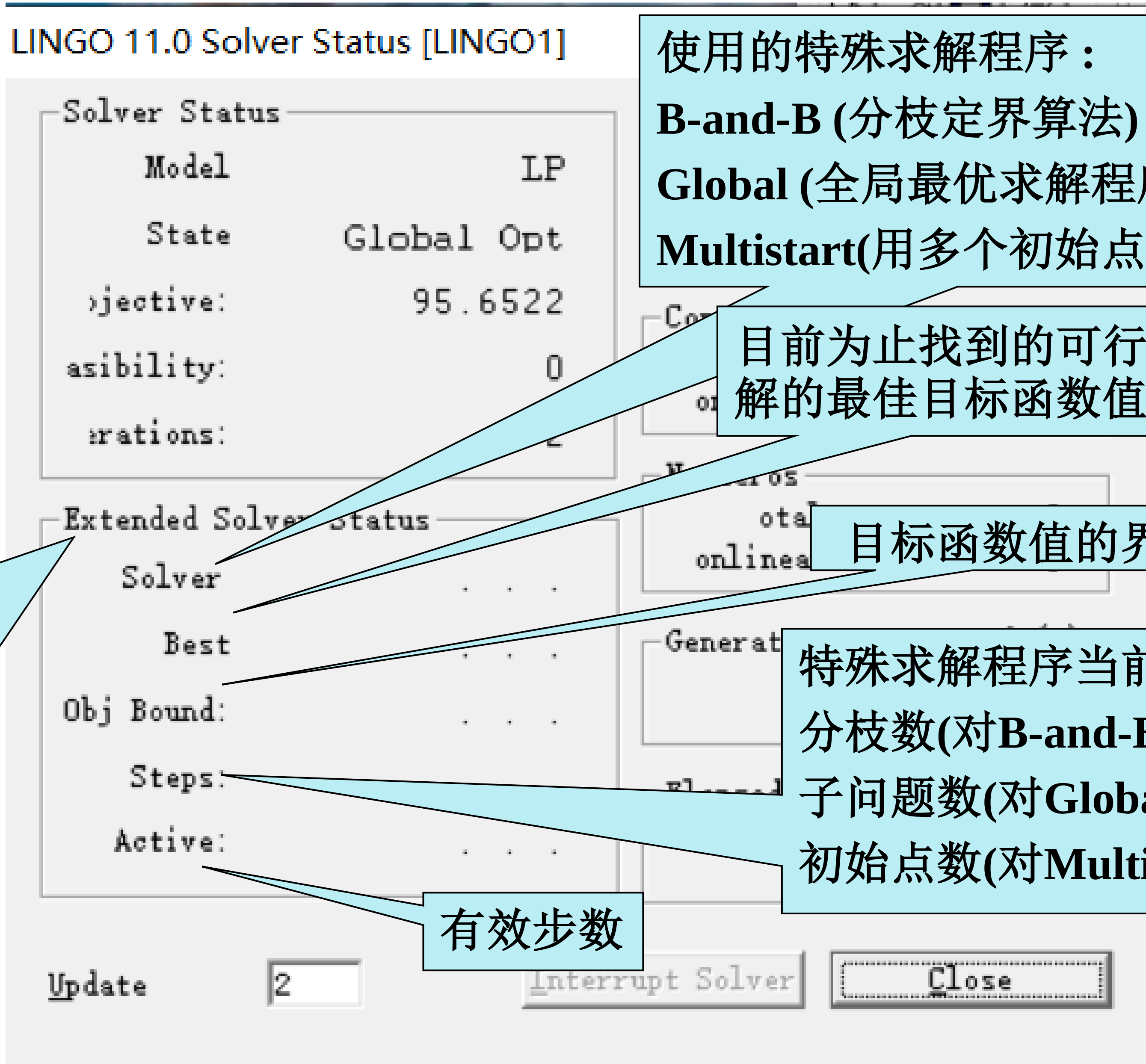
$$\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t \quad \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$


LINGO 11.0 - LINGO Model - LINGO1
File Edit LINGO Window Help
LINGO Model - LINGO1
max 4x1+2x2+3x3
st
7x1+3x2+6x3<=150
4x1+5x2+5x3<=200
end

当前模型的类型 :LP，QP，ILP，IQP，PILP， PIQP，NLP，INLP，PINLP （以I开头表示IP， 以PI开头表示PIP）

当前解的状态： "Global Optimum", "Local Optimum", "Feasible", "Infeasible“(不可行), "Unbounded“(无界), "Interrupted“(中断), "Undetermined“(未确定)



使用的特殊求解程序：

B-and-B (分枝定界算法)

Global (全局最优求解程序)

Multistart(用多个初始点求解的程序)

目前为止找到的可行解的最佳目标函数值

目标函数值的界

扩展的求解器(求解程序)状态框

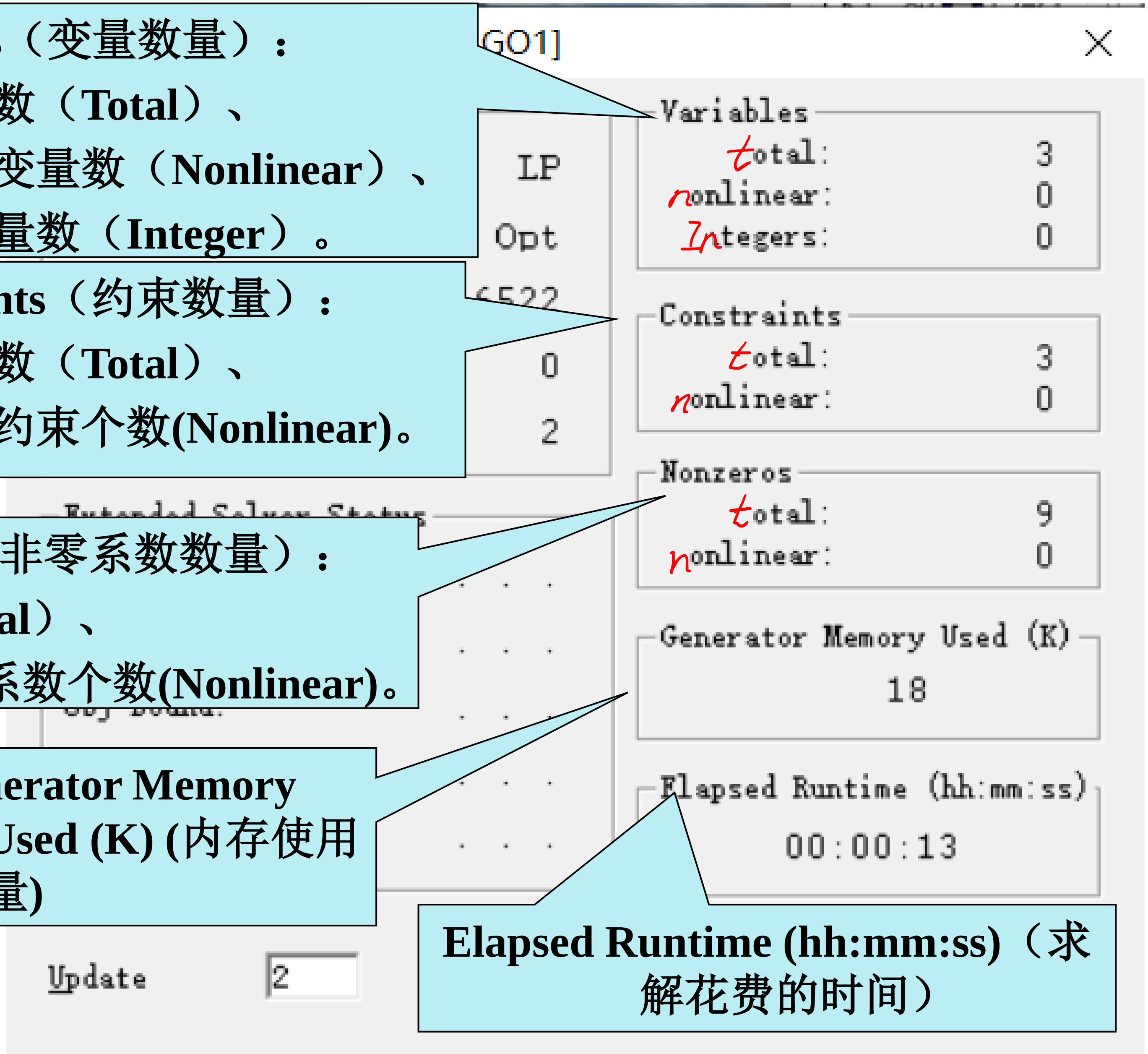
特殊求解程序当前运行步数：

分枝数(对B-and-B程序)；

子问题数(对Global程序)；

初始点数(对Multistart程序)

有效步数



Variables（变量数量）：

变量总数（Total）、

非线性变量数（Nonlinear）、

整数变量数（Integer）。

Constraints（约束数量）：

约束总数（Total）、

非线性约束个数(Nonlinear)。

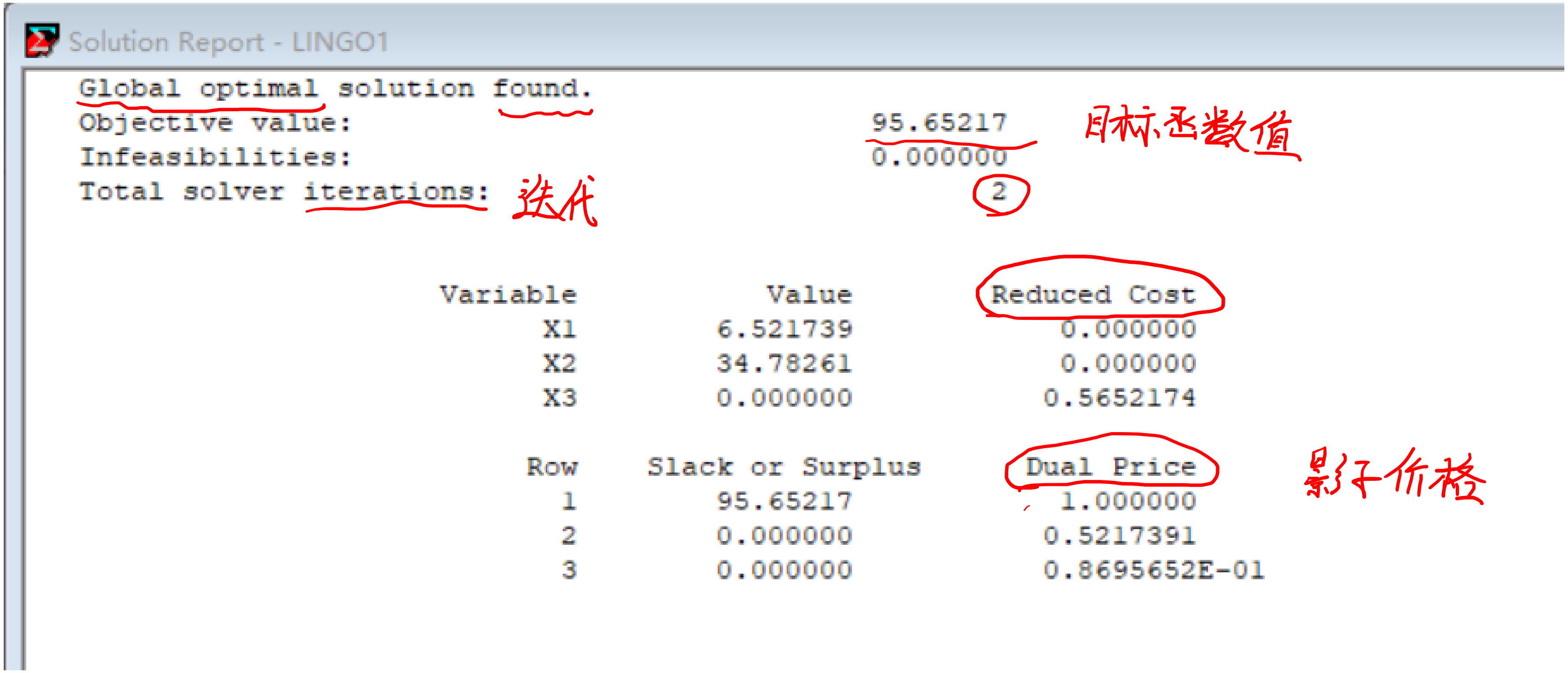
Nonzeros（非零系数数量）：

总数（Total）、

非线性项系数个数(Nonlinear)。

Generator Memory Used (K) (内存使用量)

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)（求解花费的时间）



Solution Report - LINGO1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              95.65217
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
```

迭代

目标函数值

Variable	Value	Reduced Cost
X1	6.521739	0.000000
X2	34.78261	0.000000
X3	0.000000	0.5652174

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	95.65217	1.000000
2	0.000000	0.5217391
3	0.000000	0.8695652E-01

影子价格

ReducedCost:列出最优单纯形表中判别数所在行的变量的系数,表示当变量有微小变动时,目标函数的变化率。 DUALPRICE:表示当对应约束有微小变动时,目标函数的变化率。

整数规划模型：

例2、 某服务部门一周中每天需要不同数目的雇员：周一到周四每天至少需要50人，周五至少需要80人，周六和周日至少需要90人。现规定应聘者需连续工作5天，试确定聘用方案，即周一到周日每天聘用多少人，使在满足需要的条件下聘用总人数最少。

决策变量：记周一到周日每天聘用的人数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_7$

目标函数：目标函数就是聘用的总人数，即

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$s.t$$

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 50$$

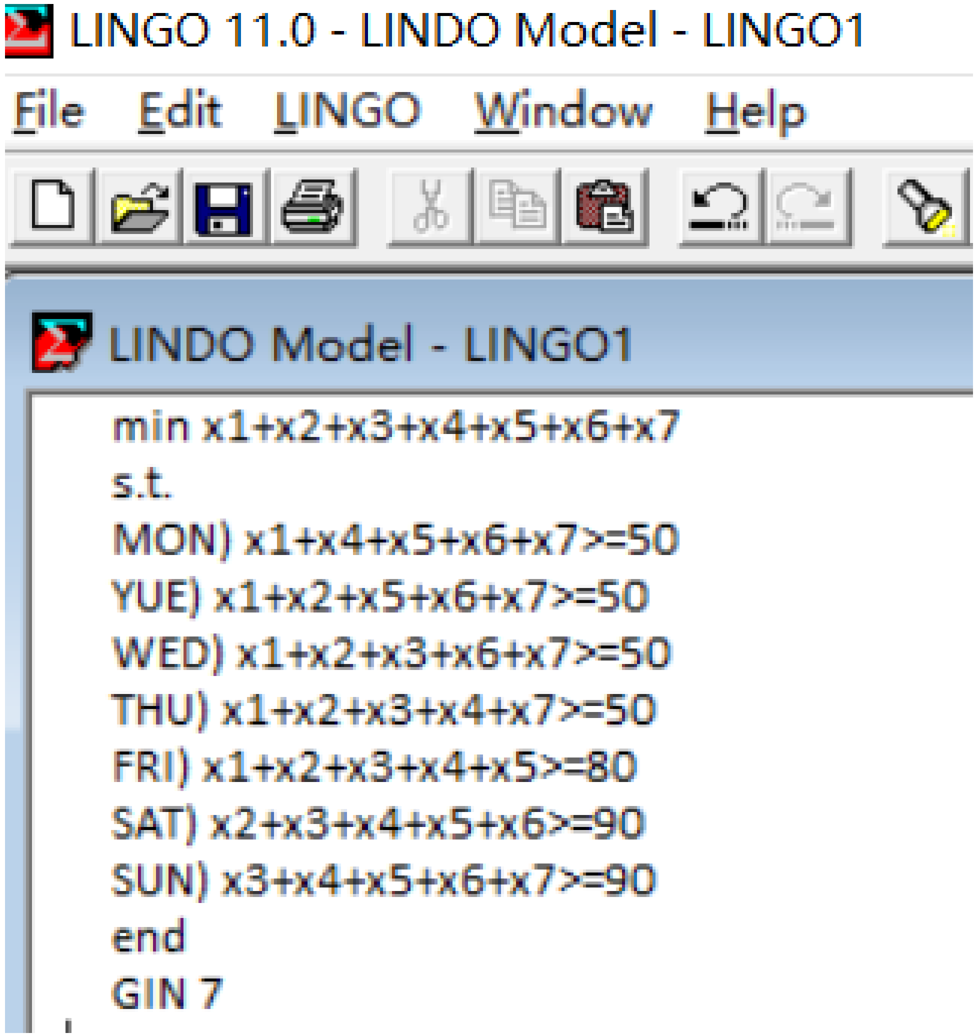
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 50$$

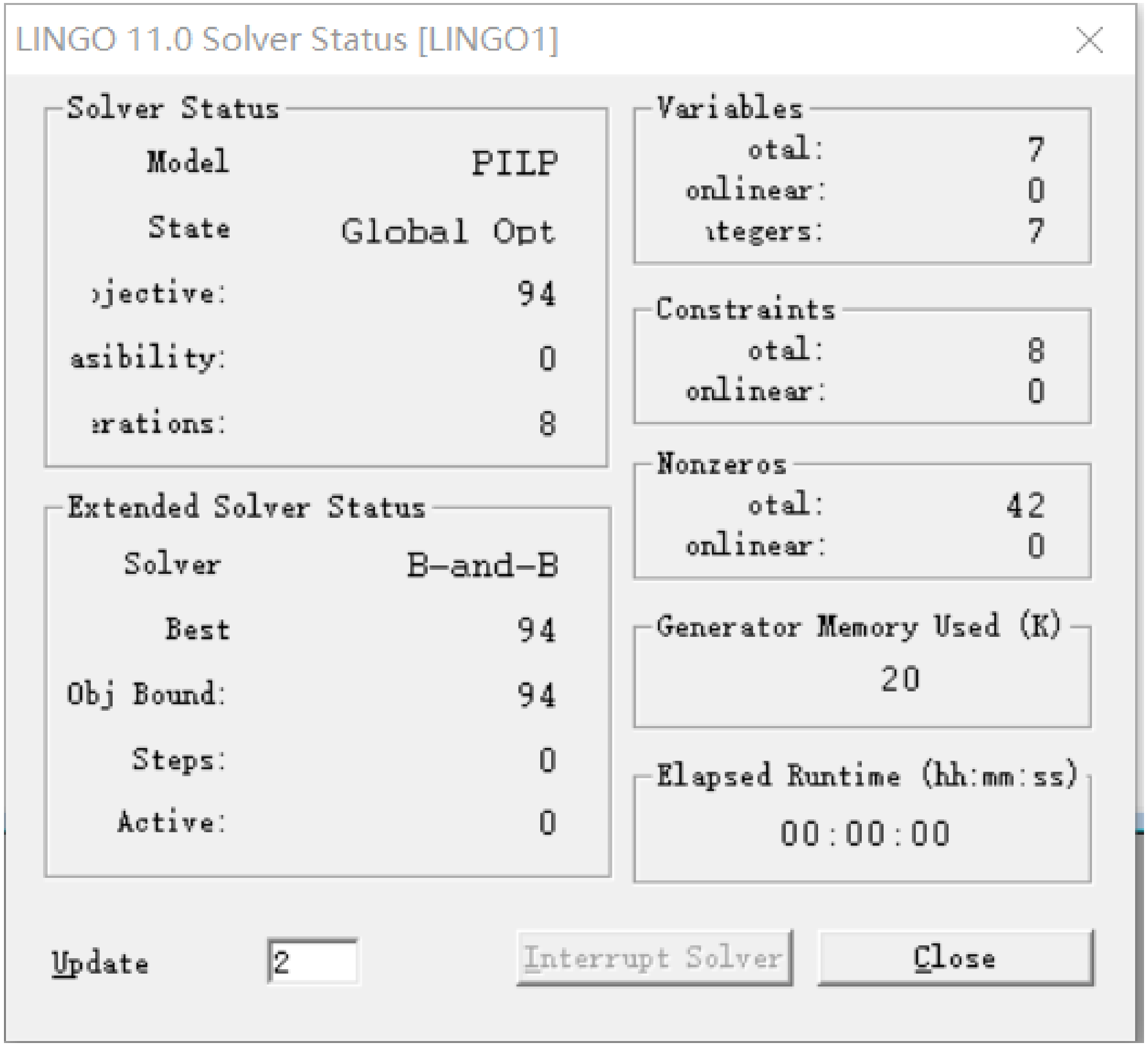
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 80$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 90$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 90$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 7)\text{且为整数}$$


LINGO 11.0 - LINDO Model - LINGO1
File Edit LINGO Window Help
LINDO Model - LINGO1
min x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7
s.t.
MON) x1+x4+x5+x6+x7>=50
YUE) x1+x2+x5+x6+x7>=50
WED) x1+x2+x3+x6+x7>=50
THU) x1+x2+x3+x4+x7>=50
FRI) x1+x2+x3+x4+x5>=80
SAT) x2+x3+x4+x5+x6>=90
SUN) x3+x4+x5+x6+x7>=90
end
GIN 7


LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]
Solver Status
Model PILP
State Global Opt
›jective: 94
asibility: 0
ɛrations: 8
Extended Solver Status
Solver B-and-B
Best 94
Obj Bound: 94
Steps: 0
Active: 0
Variables
otal: 7
onlinear: 0
ıtegers: 7
Constraints
otal: 8
onlinear: 0
Nonzeros
otal: 42
onlinear: 0
Generator Memory Used (K)
20
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:00
Update 2
Interrupt Solver
Close

Solution Report - LINGO1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              94.00000
Objective bound:                              94.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             8


                 Variable           Value        Reduced Cost
                       X1        0.000000            1.000000
                       X2        4.000000            1.000000
                       X3        40.00000            1.000000
                       X4        3.000000            1.000000
                       X5        40.00000            1.000000
                       X6        3.000000            1.000000
                       X7        4.000000            1.000000

                      Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        1        94.00000           -1.000000
                      MON        0.000000            0.000000
                      YUE        1.000000            0.000000
                      WED        1.000000            0.000000
                      THU        1.000000            0.000000
                      FRI        7.000000            0.000000
                      SAT        0.000000            0.000000
                      SUN        0.000000            0.000000
```

空气污染控制

NORI&LEFTS公司是世界主要钢厂之一，位于Steeltown市，在这里是唯一的大雇主。 Steeltown市随着公司的成长而繁荣，但公司熔炉产生的无法控制的空气污染正在破坏城市的面貌和损坏市民的健康。最近股东选举了公司新董事会，这些董事会决定担负起社会责任，他们已经与Steeltown市政府官员和居民一起研究怎样控制空气污染，并且一起制定了严格的Steeltown市空气质量标准。

在空气中三种主要的污染物是微颗粒、硫氧化物和碳氢化合物。新的标准要求公司减少这些污染物的排放（见表一），且以最经济的方式达到污染的减少。

表一　NORI&LEFTS公司清洁空气的标准

污染物质	每年需要排放率的缩减量/百万磅
微粒	60
硫磺氧化物	150
碳氢化合物	125

空气污染控制

钢厂有两种主要的污染源，即制造生铁的风炉和将铁炼成钢的平炉。在这种情况下，工程师决定最有效的消除污染方法（1）增加烟囱的高度。（2）使用过滤器。（3）在熔炉燃料中加入高级清洁材料。每一种方法都存在技术限制，但是在使用这些方法的技术限制上也有一定的灵活性。

表二给出了在技术限制下使用消除方法的每一种熔炉所能消除的排放量（数百万磅每一年）

表二　NORI&LEFTS公司中使用最大可用消除方法的排放率的降低率/百万磅每年

污染物质	更高的烟囱		过滤器		好的燃料	
	风炉	平炉	风炉	平炉	风炉	平炉
微粒	12	9	25	20	17	13
硫磺氧化物	35	42	18	31	56	49
碳氢化合物	37	53	28	24	29	20

空气污染控制

一方面，没有单独的方法能够达到要求的排放量；另一方面，在两种熔炉的全部生产能力内的结合三种方法已经足够了。因此，工程师得出结论：他们将不得不使用组合方法。

使用这些方法的全部除污能力的年总成本（百万美元）如表三所示

表三　NORI&LEFTS公司中使用最大可用消除方法每年的总成本/百万美元

消除方法	风炉	平炉
更高的烟囱	8	10
过滤器	7	6
好的燃料	11	9

空气污染控制建模

现在如何建立公司消除方法计划，可满足要求，且总成本最小？(提示：六个决策变量)

解：设x_j表示如下决策，

表三　NORI&LEFTS公司的决策变量

消除方法	高炉	平炉
更高的烟囱	x_1	x_2
过滤器	x_3	x_4
好的燃料	x_5	x_6

空气污染控制建模

则数学模型为:

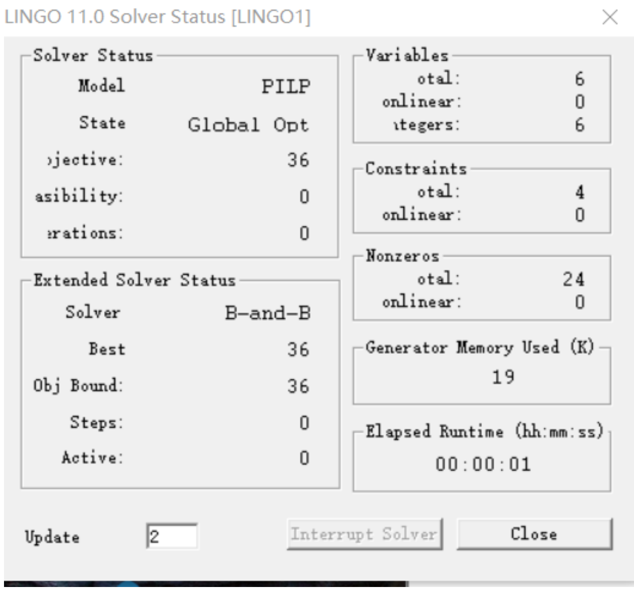
$$Min \quad Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$$

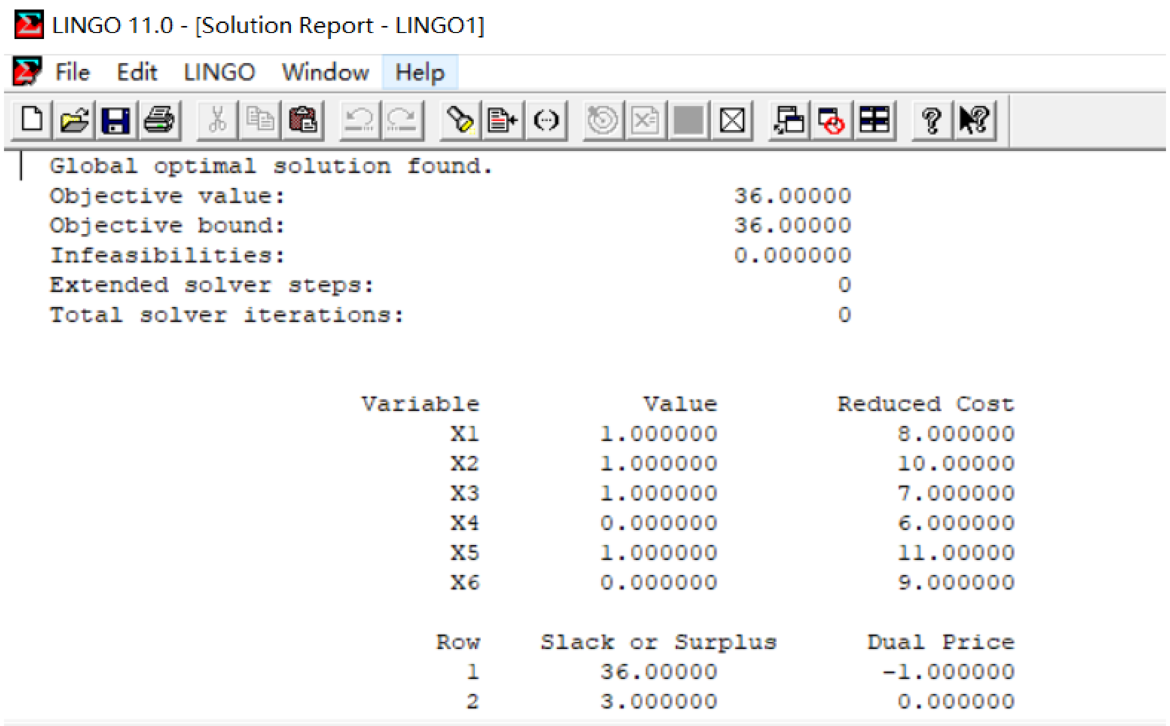
$$s.t. \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60 \\ 35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150 \\ 37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

LINGO 11.0 - [LINDO Model - LINGO1]

File Edit LINGO Window Help

```
min 8x1+10x2+7x3+6x4+11x5+9x6
s.t.
1) 12x1+9x2+25x3+20x4+17x5+13x6>=60
2) 35x1+42x2+18x3+31x4+56x5+49x6>=150
3) 37x1+53x2+28x3+24x4+29x5+20x6>=125

end
INT 6
```




LINGO 11.0 - [Solution Report - LINGO1]

File Edit LINGO Window Help

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              36.00000
Objective bound:                              36.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


          Variable           Value        Reduced Cost
                X1        1.000000            8.000000
                X2        1.000000            10.00000
                X3        1.000000            7.000000
                X4        0.000000            6.000000
                X5        1.000000            11.00000
                X6        0.000000            9.000000

               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                 1        36.00000           -1.000000
                 2        3.000000            0.000000
```

人员安排

联合航空公司（UNION AIRWAYS）正在增加更多航班来往于中心机场，因此它需要雇佣额外的客户经理。然而，应该雇佣多少还不是很清楚。

在新的航班计划上，分析制定最小数量的客户经理在不同的时间值班以使服务水平达到某个满意度。表一的最右边一列表示在第一列给出的时间段需要的客户经理的数量。

人员安排

表一 联合航空公司的时序安排问题数据

等级	覆盖的时间段					需要客户经理的最少数
	班次					
	1	2	3	4	5	
早上6：00到上午8：00	✓					48
早上8：00到上午10：00	✓	✓				79
早上10：00到中午12：00	✓	✓				65
中午12：00到下午14：00	✓	✓	✓			87
下午14：00到下午16：00		✓	✓			64
下午16：00到下午18：00			✓	✓		73
下午18：00到晚上20：00			✓	✓		82
晚上20：00到晚上22：00				✓		43
晚上22：00到午夜24：00				✓	✓	52
午夜24：00到早上6：00					✓	15
每项代理的日常花费/美元	170	160	175	180	195	

人员安排

表中反映了公司与客户经理之间的合同中的条款。这一条款是每个经理8小时的轮班替换。被许可的轮班是

第1班：早上6：00到下午14：00

第2班：上午8：00到下午16：00

第3班：中午12：00到晚上20：00

第4班：下午16：00到午夜24：00

第5班：晚上22：00到早上6：00

表中✓表示各轮班所包含的时间。对于每一个轮班，每人每天的补助（包括收益）在底下一行列出。

每天应该安排多少经理给各轮班从而使得总的人力成本最小。

人员安排的数学模型

解：设x_j表示安排给轮班j的客户经理的数量，j=1，2，3，4，5

则数学模型为：

$$Min \quad Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 79 \\ x_1 + x_2 \geq 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \\ x_2 + x_3 \geq 64 \\ x_3 + x_4 \geq 73 \\ x_3 + x_4 \geq 82 \\ x_4 \geq 43 \\ x_4 + x_5 \geq 52 \\ x_5 \geq 15 \\ x_j \geq 0 \text{且为整数}, \quad \mathrm{j} = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

LINDO Model - LINGO1

```
min 170x1+160x2+175x3+180x4+195x5

st
x1>=48
x1+x2>=79
x1+x2>=65
x1+x2+x3>=87
x2+x3>=64
x3+x4>=73
x3+x4>=82
x4>=43
x4+x5>=52
x5>=15

end
GIN 5
```

Solution Report - LINGO1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              30610.00
Objective bound:                              30610.00
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             3
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	48.00000	170.0000
X2	31.00000	160.0000
X3	39.00000	175.0000
X4	43.00000	180.0000
X5	15.00000	195.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	30610.00	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	14.00000	0.000000
5	31.00000	0.000000
6	6.000000	0.000000
7	9.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	6.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000

LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]

状态

模型类型:	PILP
状态:	Global Opt
目标函数值:	30610
非解总数:	0
迭代次	3

状态拓展

求解程序:	B-and-B
最佳函数值:	30610
Obj函数值界:	30610
步数:	0
有效步	0

变量数量

变量总数:	5
非线性变	0
整数:	5

约束数量

总数:	11
非线性约束	0

非零系数数量

总数:	23
非线性	0

内存使用量（K）

19

运行时间（HH: MM: SS）

00:00:02

更新间隔(U): 2 中断求解(I) 取消(C)

LINGO的文件类型

.LG4：LINGO格式的模型文件，保存了模型窗口中所能够看到的所有文本和其他对象及其格式信息；

.LNG：文本格式的模型文件，不保存模型中的格式信息（如字体、颜色、嵌入对象等）；

.LDT：LINGO数据文件；

.LTF：LINGO命令脚本文件；

.LGR：LINGO报告文件；

.LTX： LINDO格式的模型文件；

.MPS：示MPS（数学规划系统）格式的模型文件。

除"LG4"文件外，另外几种格式的文件都是普通的文本文件，可以用任何文本编辑器打开和编辑。

程序的几点说明:

以@开头的都是函数调用，其中整数变量@BIN、@GIN（0-1变量，整数变量），@FREE 无约束（Lingo中变量默认是非负变量），@BND（L，X，U）。

集合的基本用法

理解LINGO建模语言最重要的是理解集合（Set）及其属性（Attribute）的概念。

$$Min \quad Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$$

$$s.t. \quad \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60 \\ 35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150 \\ 37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

LINGO 11.0 - [LINGO Model - LINGO1]

File Edit LINGO Window Help

```
MODEL:
sets:
cols/1..6/:x,c;
rows/1..3/:b;
link(rows,cols):A;
endsets

data:

c=8,10,7,6,11,9;
b=60,150,125;
A=12 9 25 20 17 13
  35 42 18 31 56 49
  37 53 28 24 29 20;
enddata

min = @sum(cols:c*x);


@for(rows(i):
   @sum(cols(j):A(i,j)*x(j))>=b(i));

@for(cols(i):@BIN(x(i)));
end
```

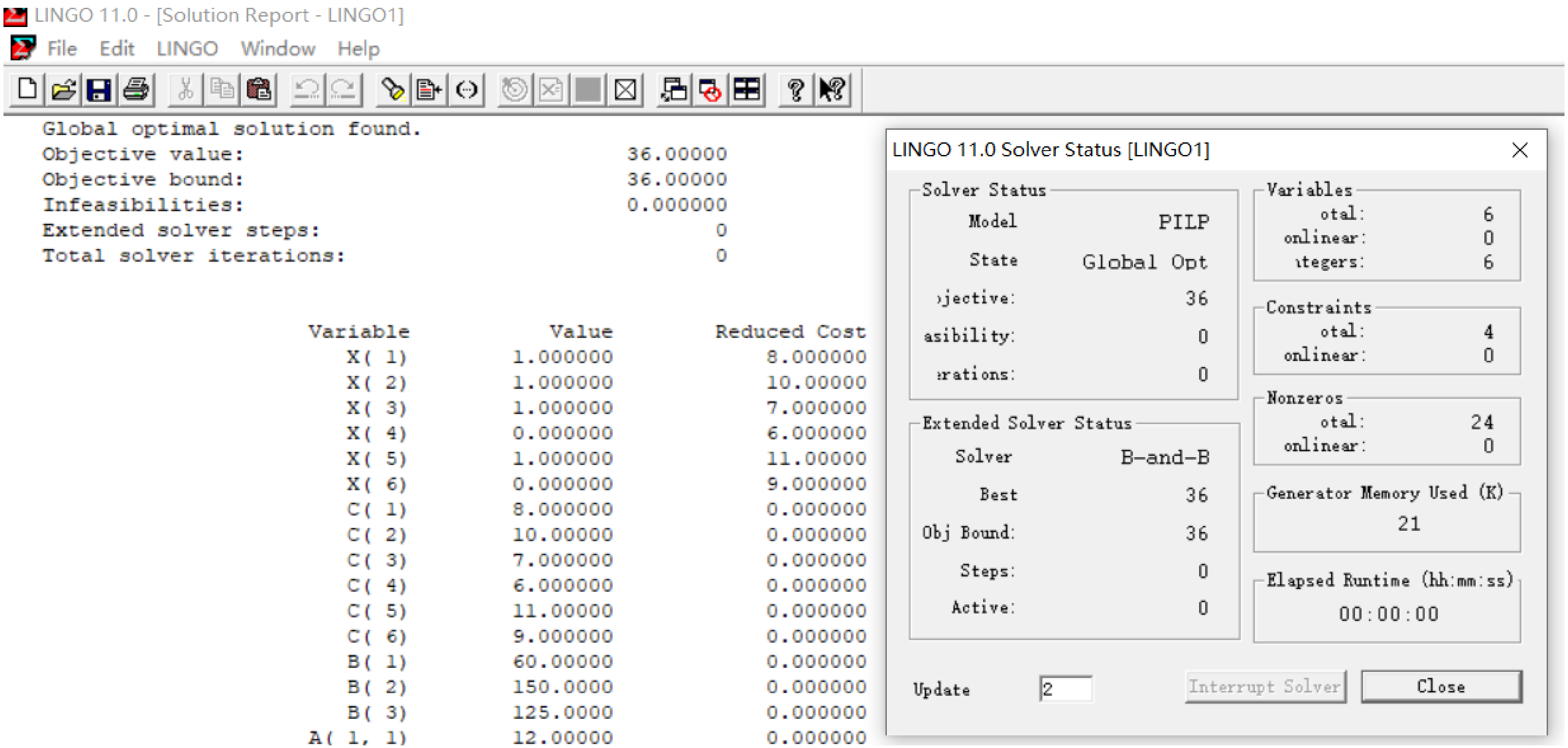
程序以“MODEL:”开头，以end结尾。

集合定义部分从“sets”到“endsets”
数据定义部分从“data”到“enddata”

给出目标函数，约束条件

循环语句用@for， 求和@sum
@bin 表示0-1变量

目标函数中对所有下标都要求和，可以省略i。



LINGO 11.0 - [Solution Report - LINGO1]
File Edit LINGO Window Help
Global optimal solution found.
Objective value: 36.00000
Objective bound: 36.00000
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 0
Variable Value Reduced Cost
X(1) 1.000000 8.000000
X(2) 1.000000 10.00000
X(3) 1.000000 7.000000
X(4) 0.000000 6.000000
X(5) 1.000000 11.00000
X(6) 0.000000 9.000000
C(1) 8.000000 0.000000
C(2) 10.00000 0.000000
C(3) 7.000000 0.000000
C(4) 6.000000 0.000000
C(5) 11.00000 0.000000
C(6) 9.000000 0.000000
B(1) 60.00000 0.000000
B(2) 150.0000 0.000000
B(3) 125.0000 0.000000
A(1, 1) 12.00000 0.000000
LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]
Solver Status
Model PILP
State Global Opt
›jective: 36
asibility: 0
›rations: 0
Extended Solver Status
Solver B-and-B
Best 36
Obj Bound: 36
Steps: 0
Active: 0
Variables
otal: 6
onlinear: 0
ıtegers: 6
Constraints
otal: 4
onlinear: 0
Nonzeros
otal: 24
onlinear: 0
Generator Memory Used (K)
21
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:00
Update 2
Interrupt Solver
Close

例3、某公司需要提前确定下一年的帆船生产量。下一年四个季度的帆船需求量分别是40条，60条，75条，25条，每个季度正常的生产能力是40条帆船，每条船的生产费用为400美元。如果加班生产，每条船的生产费用为450美元。每个季度末，每条船的库存费用为20美元。假定生产提前期为0，初始库存为10条船。如何安排生产可使总费用最小？

决策变量：设每个季度正常生产量为$ZC(i)$, 加班生产量为$JC(i)$, 库存量为$KC(i), i=1,2,3,4.$

目标函数：总费用最少

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{4} 400ZC(i)+450JC(i)+20KC(i)$$

$s.t$

$$KC(i)=KC(i-1)+ZC(i)+JC(i)-XQ(i), i=1,2,3,4$$

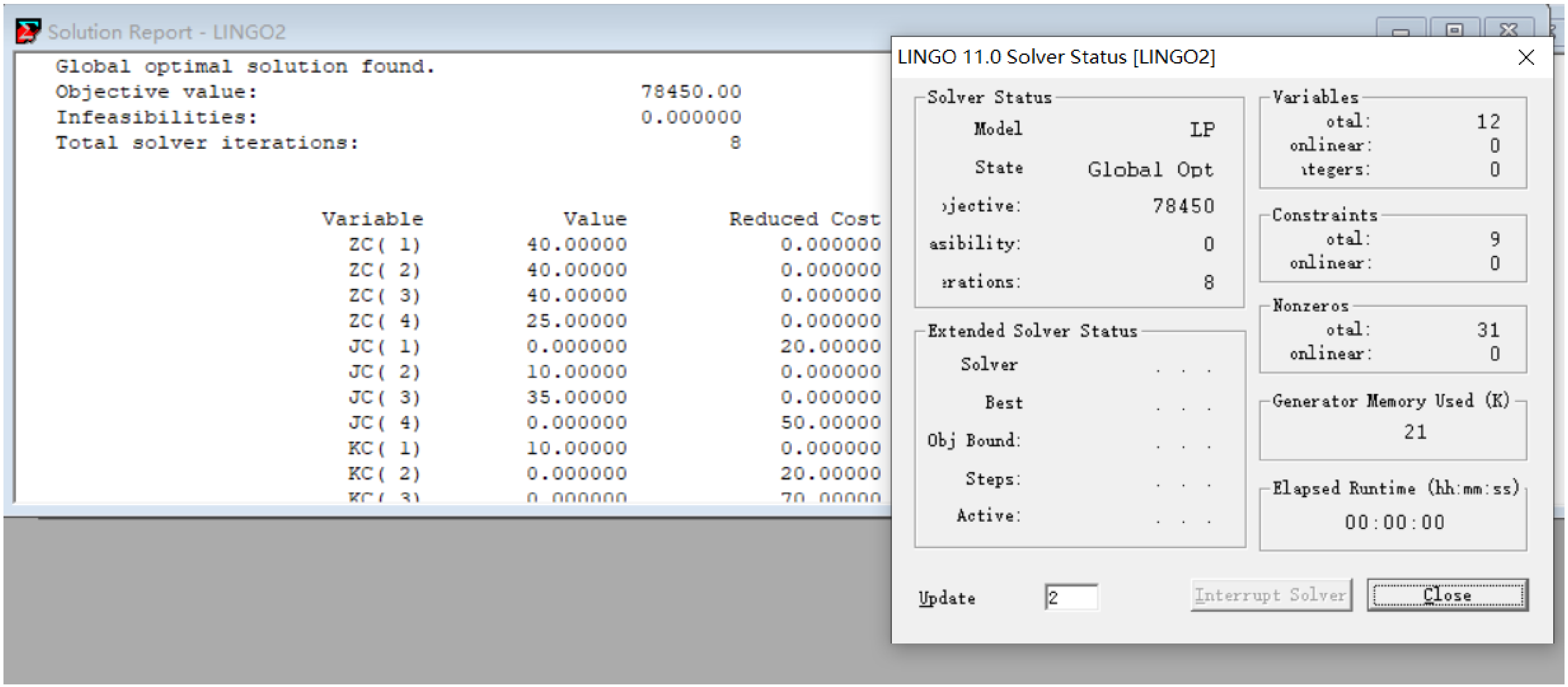
$$ZC(i)\le 40, i=1,2,3,4$$

$$KC(0)=10$$

$$ZC(i), JC(i), KC(i)\ge 0, i=1,2,3,4$$

LINGO Model - LINGO2

```
model:

sets:
jjie/1..4/: zc,jc,kc,xq;
endsets
data:
xq=40,60,75,25;
enddata

!min=@sum(jjie(i):400zc(i)+450jc(i)+20kc(i));
min=@sum(jjie:400*zc+450*jc+20*kc);
@for(jjie(i)|i#gt#1:
kc(i)=kc(i-1)+zc(i)+jc(i)-xq(i));
kc(1)=10+zc(1)+jc(1)-xq(1);
@for(jjie(i):zc(i)<=40);
end
```


Solution Report - LINGO2
Global optimal solution found.
Objective value: 78450.00
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 8
Variable Value Reduced Cost
ZC(1) 40.00000 0.000000
ZC(2) 40.00000 0.000000
ZC(3) 40.00000 0.000000
ZC(4) 25.00000 0.000000
JC(1) 0.000000 20.00000
JC(2) 10.00000 0.000000
JC(3) 35.00000 0.000000
JC(4) 0.000000 50.00000
KC(1) 10.00000 0.000000
KC(2) 0.000000 20.00000
LINGO 11.0 Solver Status [LINGO2]
Solver Status
Model LP
State Global Opt
Objective: 78450
Infeasibility: 0
Iterations: 8
Variables
Total: 12
Nonlinear: 0
Integers: 0
Constraints
Total: 9
Nonlinear: 0
Nonzeros
Total: 31
Nonlinear: 0
Extended Solver Status
Solver
Best
Obj Bound:
Steps:
Active:
Generator Memory Used (K)
21
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:00
Update 2
Interrupt Solver
Close

LINGO Model - xiugai

```
model:

sets:
jjie/1..4/: zc,jc,kc,xq;
endsets
data:
xq=40,60,75,25;
enddata

!min=@sum(jjie(i):400zc(i)+450jc(i)+20kc(i));
min=@sum(jjie:400*zc+450*jc+20*kc);
@for(jjie(i)|i#gt#1:
kc(i)=kc(i-1)+zc(i)+jc(i)-xq(i));
kc(1)=10+zc(1)+jc(1)-xq(1);
@for(jjie(i):zc(i)<=40);

calc:
zxq=@sum(jjie:xq);
axq=zxq/@size(jjie);
endcalc
end
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              78450.00
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             8


                       Variable           Value        Reduced Cost
                            ZXQ        200.0000            0.000000
                            AXQ        50.00000            0.000000
```

基本集合与派生集合

例4、建筑工地的位置(用平面坐标a, b表示，距离单位：公里)及水泥日用量d(吨)下表给出。有两个临时料场位于P (5,1), Q (2, 7),日储量各有20吨。从A, B两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。两个新的料场应建在何处，节省的吨公里数有多大?

	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

记工地位置为(a_i, b_i),水泥日用量为$d_i\ (i=1,\cdots,6)$,设料场的位置为$(x_j, y_j),\ j=1,2$. 从料场j到工地i的运送量为c_{ij}.

建立如下优化模型：

$$\min \quad f=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\sqrt{\left(x_j-a_i\right)^2+\left(y_j-a_i\right)^2} \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,2,\cdots,6 \qquad (2)$$

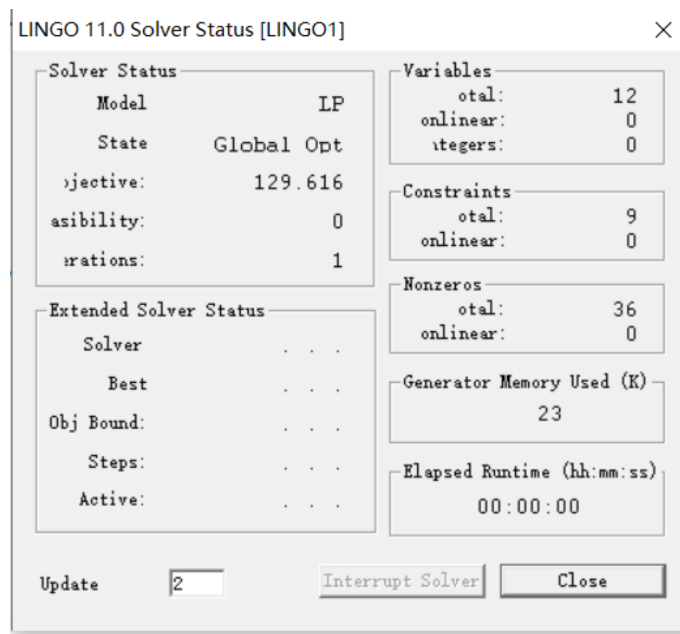
$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2 \qquad (3)$$

LINGO Model - LINGO1

```
sets:

gd/1..6/:a,b,d;
lc/1..2/:x,y,e;
link(gd,lc):c;
endsets

data:
a=1.25 8.75 0.5 5.75 3 7.25;
b=1.25 0.75 4.75 5 6.5 7.75;
d=3 5 4 7 6 11;
x=5,2;
y=2,7;
e=20,20;
enddata

min=@sum(link(i,j):c(i,j)*((x(j)-a(i))^2+(y(j)-b(i))^2)^(1/2));

@for(gd(i):
   @sum(lc(j):c(i,j))=d(i));

@for(lc(i):
    @sum(gd(j):c(j,i))<=e(i));

end
```

Solution Report - LINGO1

E(1)	20.00000	0.000000
E(2)	20.00000	0.000000
C(1, 1)	3.000000	0.000000
C(1, 2)	0.000000	2.845686
C(2, 1)	5.000000	0.000000
C(2, 2)	0.000000	6.117581
C(3, 1)	0.000000	1.698349
C(3, 2)	4.000000	0.000000
C(4, 1)	7.000000	0.000000
C(4, 2)	0.000000	2.028914
C(5, 1)	0.000000	2.935151
C(5, 2)	6.000000	0.000000
C(6, 1)	1.000000	0.000000
C(6, 2)	10.00000	0.000000

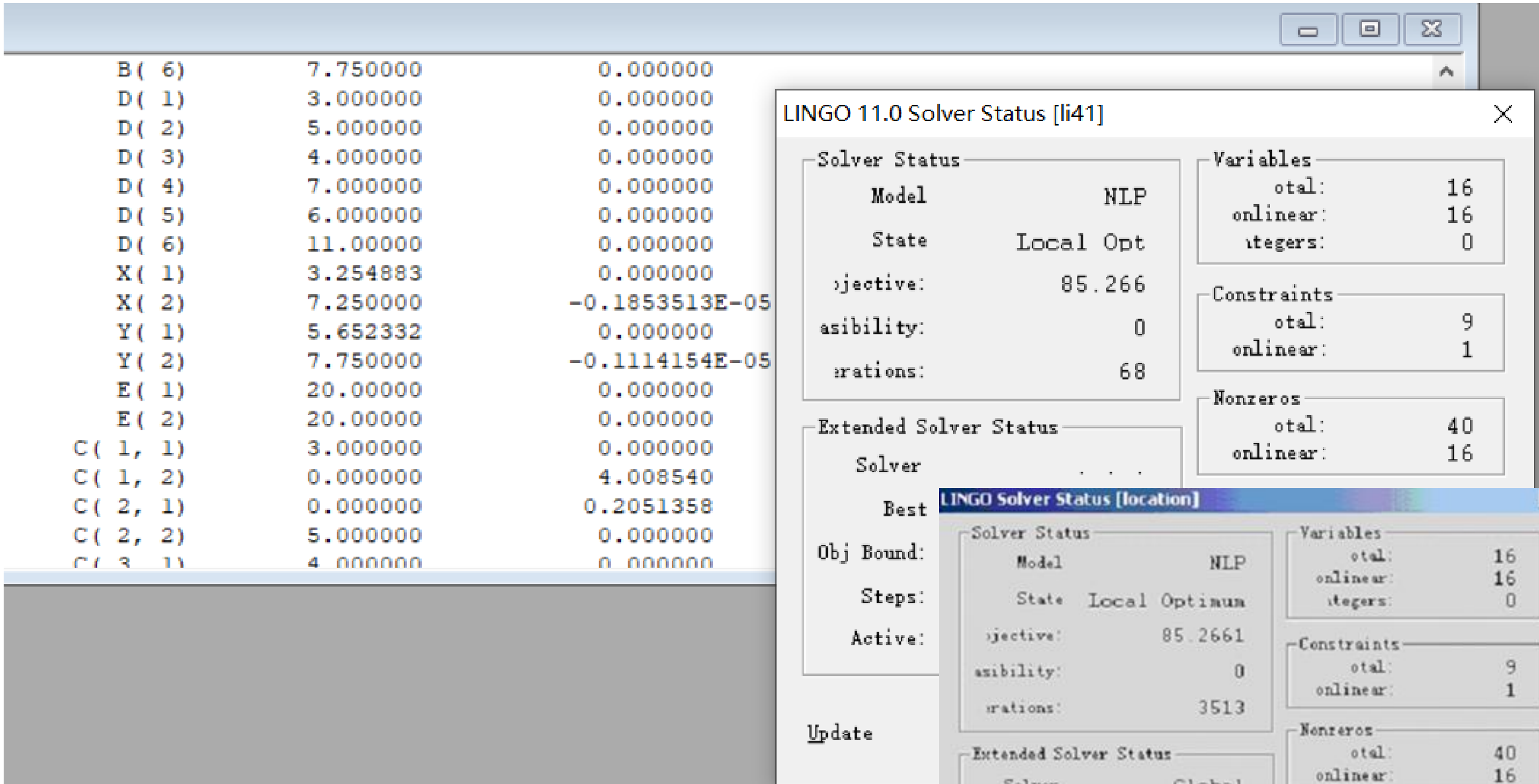


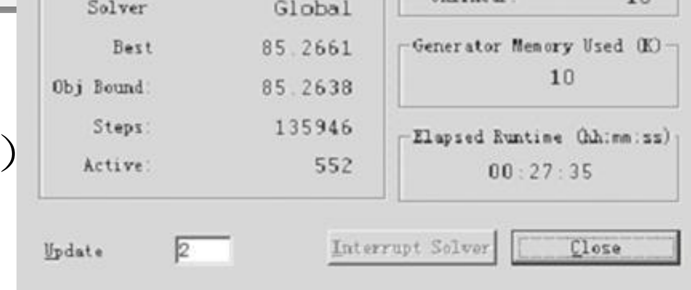
LINGO 11.0 - LINGO Model - li41

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - li41

```
link(gd,lc):c;
endsets

data:
a=1.25 8.75 0.5 5.75 3 7.25;
b=1.25 0.75 4.75 5 6.5 7.75;
d=3 5 4 7 6 11;
e=20,20;
enddata

init:
x=5,2;
y=2,7;
endinit

min=@sum(link(i,j):c(i,j)*((x(j)-a(i))^2+(y(j)-b(i))^2)^(1/2));

@for(gd(i):
   @sum(lc(j):c(i,j))=d(i));

@for(lc(i):
    @sum(gd(j):c(j,i))<=e(i));

@for(lc:@free(x);@free(y));

end
```





选择新的地址，可以节省44，35（吨公里）

运算符及其优先级

算术运算符

加、减、乘、除、乘方等数学运算(即数与数之间的运算，运算结果也是数)。

LINGO中的算术运算符有以下5种：

+（加法），

—（减法或负号），

*（乘法），

/（除法），

^(求幂)。

逻辑运算符

运算结果只有“真”(TRUE)和“假”(FALSE)两个值(称为“逻辑值”)，LINGO中用数字1代表TRUE，其他值(典型的值是0)都是FALSE。

在LINGO中，逻辑运算(表达式)通常作为过滤条件使用,逻辑运算符有9种，可以分成两类:

#AND#(与),#OR#(或),#NOT#(非)：逻辑值之间的运算，它们操作的对象本身已经是逻辑值或逻辑表达式，计算结果也是逻辑值。

#EQ#(等于),#NE#(不等于),#GT#(大于),#GE#(大于等于),#LT#(小于),#LE#(小于等于)：是“数与数之间”的比较,也就是它们操作的对象本身必须是两个数, 计算得到的结果是逻辑值。

关系运算符

表示是“数与数之间”的大小关系，在LINGO中用来表示优化模型的约束条件。
LINGO中关系运算符有3种：
<(即<=，小于等于),=(等于)，>(即>=，大于等于)
(在优化模型中约束一般没有严格小于、严格大于关系)

运算符的优先级

优先级	最高					最低	
运算符	#NOT# —(负号)	^	* /	+ —(减法)	#EQ# #NE# #GT# #GE# #LT# #LE#	#AND# #OR#	< = >

基本的数学函数

在LINGO中建立优化模型时可以引用大量的内部函数,这些函数以”@” 打头。LINGO中包括相当丰富的数学函数,这些函数的用法非常简单,下面一一列出。

@ABS(X)：绝对值函数，返回X的绝对值。

@COS(X)：余弦函数，返回X的余弦值（X的单位是弧度）。

@EXP(X)：指数函数，返回 e^X的值(其中e=2.718281...)。

@FLOOR(X)：取整函数，返回X的整数部分(向最靠近0的方向取整)。

@LGM(X)：返回X的伽玛(gamma)函数的自然对数值(当X为整数时LGM(X) = LOG(X-1)！；当X不为整数时，采用线性插值得到结果)。

@LOG(X)：自然对数函数，返回X的自然对数值。

基本的数学函数

@SIGN(X)：符号函数，返回X的符号值（X < 0时返回-1, X >= 0时返回+1）。

@SIN(X)：正弦函数，返回X的正弦值（X的单位是弧度）。

@SMAX(list)：最大值函数，返回一列数(list)的最大值。

@SMIN(list)：最小值函数，返回一列数(list)的最小值。

@SQR(X)：平方函数，返回X的平方（即X*X）的值。

@SQRT(X)：开平方函数，返回X的正的平方根的值。

@TAN(X)：正切函数，返回X的正切值（X的单位是弧度）。

集合循环函数

集合上的元素(下标)进行循环操作的函数, 一般用法如下:

@function(setname [(set_index_list)[| condition]] : expression_list);

其中:

function 集合函数名,FOR、MAX、MIN、SUM之一;

Setname 集合名;

set_index_list 集合索引列表(不需使用索引时可以省略);

Condition 用逻辑表达式描述的过滤条件(通常含有索引，无条件时可以省略);

expression_list 一个表达式(对@FOR函数，可以是一组表达式。

集合循环函数

四个集合函数名的含义:

@FOR(集合元素的循环函数)： 对集合setname的每个元素独立地生成表达式，表达式由expression_list描述（通常是优化问题的约束）。

@MAX（集合属性的最大值函数）：返回集合setname上的表达式的最大值。

@MIN（集合属性的最小值函数）：返回集合setname上的表达式的最小值。

@SUM(集合属性的求和函数):返回集合setname上的表达式的和。

钢管下料问题：

例5、某钢管零售商从钢管厂进货，将钢管按照顾客的要求切割后售出，从钢管厂进货时得到的原料都是19m长。

1）现有一客户需要50根4m长、20根6m长和15根8m长的钢管。应如何下料最节省？

2）零售商如果采用不同切割模式太多，将会导致生产过程的复杂化，从而增加生产和管理成本，所以该零售商规定采用的不同切割模式不能超过3种，此外，该客户除需要(1)中的三种钢管外，还需要10根5米长的钢管。应如何下料最节省？

表1. 钢管下料的合理切割模式

	4m钢管数	6m钢管数	8m钢管数	余料
模式1	4	0	0	3
模式2	3	1	0	1
模式3	2	0	1	3
模式4	1	2	0	3
模式5	1	1	1	1
模式6	0	3	0	1
模式7	0	0	2	3

问题(1):决策变量：用x_i表示按照第i种模式$(i=1,\cdots,7)$切割的原料钢管的根数，一定是非负整数。

目标函数：

第一种：以切割后剩余的总余料量最小为目标

建立如下优化模型：

$$\min \quad f_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50 \qquad (2)$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20 \qquad (3)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15 \qquad (4)$$

$$x_i \ge 0\text{且为整数}$$

第二种：以切割原料钢管的总根数最少为目标

建立如下优化模型：

$$\min \quad f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \qquad (1')$$

$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50 \qquad (2)$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20 \qquad (3)$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15 \qquad (4)$$

$$x_i \ge 0\text{且为整数}$$

LINGO Model - LINGO1

```
model:

sets:
row/1..3/:b;
col/1..7/:c,x;
link(row,col):a;
endsets

data:

c=3,1,3,3,1,1,3;
b=50,20,15;
a=
4 3 2 1 1 0 0
0 1 0 2 1 3 0
0 0 1 0 1 0 2;

enddata

min=@sum(col:c*x);
@for(row(i):
   @sum(col(j):a(i,j)*x(j))>=b(i));
@for(col:@gin(x));

end
```

Solution Report - LINGO1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              27.00000
Objective bound:                              27.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             3


                    Variable           Value        Reduced Cost
                       B( 1)        50.00000            0.000000
                       B( 2)        20.00000            0.000000
                       B( 3)        15.00000            0.000000
                       C( 1)        3.000000            0.000000
                       C( 2)        1.000000            0.000000
                       C( 3)        3.000000            0.000000
                       C( 4)        3.000000            0.000000
                       C( 5)        1.000000            0.000000
                       C( 6)        1.000000            0.000000
                       C( 7)        3.000000            0.000000
                       X( 1)        0.000000            3.000000
                       X( 2)        12.00000            1.000000
                       X( 3)        0.000000            3.000000
                       X( 4)        0.000000            3.000000
                       X( 5)        15.00000            1.000000
                       X( 6)        0.000000            1.000000
                       X( 7)        0.000000            3.000000
                    A( 1, 1)        4.000000            0.000000
                    A( 1, 2)        3.000000            0.000000
```

LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]

Solver Status	
Model	PILP
State	Global Opt
›jective:	27
asibility:	0
ɛrations:	3

Extended Solver Status	
Solver	B-and-B
Best	27
Obj Bound:	27
Steps:	0
Active:	0

Variables	
otal:	7
onlinear:	0
ıtegers:	7

Constraints	
otal:	4
onlinear:	0

Nonzeros	
otal:	19
onlinear:	0

Generator Memory Used (K)

21

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)

00:00:00

Update 2 Interrupt Solver Close

LINGO Model - xiaoliao2

```
model:

sets:
row/1..3/:b;
col/1..7/:c,x;
link(row,col):a;
endsets

data:

c=1,1,1,1,1,1,1;
b=50,20,15;
a=
4 3 2 1 1 0 0
0 1 0 2 1 3 0
0 0 1 0 1 0 2;

enddata

min=@sum(col:c*x);
@for(row(i):
   @sum(col(j):a(i,j)*x(j))>=b(i));
@for(col:@gin(x));

end
```

Solution Report - xiaoliao2

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              25.00000
Objective bound:                              25.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             4


                    Variable           Value        Reduced Cost
                       B( 1)        50.00000            0.000000
                       B( 2)        20.00000            0.000000
                       B( 3)        15.00000            0.000000
                       C( 1)        1.000000            0.000000
                       C( 2)        1.000000            0.000000
                       C( 3)        1.000000            0.000000
                       C( 4)        1.000000            0.000000
                       C( 5)        1.000000            0.000000
                       C( 6)        1.000000            0.000000
                       C( 7)        1.000000            0.000000
                       X( 1)        0.000000            1.000000
                       X( 2)        15.00000            1.000000
                       X( 3)        0.000000            1.000000
                       X( 4)        0.000000            1.000000
                       X( 5)        5.000000            1.000000
                       X( 6)        0.000000            1.000000
                       X( 7)        5.000000            1.000000
                    A( 1, 1)        4.000000            0.000000
                    A( 1, 2)        3.000000            0.000000
```

LINGO 11.0 Solver Status [xiaoliao2]

Solver Status

Model	PILP
State	Global Opt
›jective:	25
asibility:	0
›rations:	4

Extended Solver Status

Solver	B-and-B
Best	25
Obj Bound:	25
Steps:	0
Active:	0

Variables

otal:	7
onlinear:	0
ıtegers:	7

Constraints

otal:	4
onlinear:	0

Nonzeros

otal:	19
onlinear:	0

Generator Memory Used (K)

21

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)

00:00:00

Update 2 Interrupt Solver Close

问题(2)：决策变量：用x_i表示按照第i种模式$(i=1,\cdots,3)$切割的原料钢管的根数，一定是非负整数。

设所使用的第i种切割模式下每根原料钢管生产4米长、5米长、6米长和8米长的钢管数量分别为$r_{1i},r_{2i},r_{3i},r_{4i}$(非负整数)

目标函数：以切割原料钢管的总根数最少为目标

建立如下优化模型：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2+x_3\\
s.t\quad & r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3\ge 50\\
& r_{21}x_1+r_{22}x_2+r_{23}x_3\ge 10\\
& r_{31}x_1+r_{32}x_2+r_{33}x_3\ge 20\\
& r_{41}x_1+r_{42}x_2+r_{43}x_3\ge 15\\
& 16\le 4r_{11}+5r_{21}+6r_{31}+8r_{41}\le 19\\
& 16\le 4r_{12}+5r_{22}+6r_{32}+8r_{42}\le 19\\
& 16\le 4r_{13}+5r_{23}+6r_{33}+8r_{43}\le 19\\
& x_i\ge 0\text{且为整数}(i=1,2,3)\\
& r_{ji}\ge 0\text{且为整数}(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

LINGO 11.0 - [LINGO Model - xiaoliao3]

File Edit LINGO Window Help

```
model:

sets:
row/1..4/:b,l;
col/1..3/:c,x;
link(row,col):r;
endsets

data:

c=1,1,1;
b=50,10,20,15;
l=4,5,6,8;
cd=19;

enddata

min=@sum(col:c*x);
@for(row(i):
   @sum(col(j):r(i,j)*x(j))>=b(i));
@for(col(i):
@sum(row(j):r(j,i)*l(j))<=cd);

@for(col(i):
@sum(row(j):r(j,i)*l(j))>=16);



@for(col:@gin(x));
@for(link:@gin(r));

end
```

Solution Report - xiaoliao3

B(3)	20.00000	0.000000
B(4)	15.00000	0.000000
L(1)	4.000000	0.000000
L(2)	5.000000	0.000000
L(3)	6.000000	0.000000
L(4)	8.000000	0.000000
C(1)	1.000000	0.000000
C(2)	1.000000	0.000000
C(3)	1.000000	0.000000
X(1)	8.000000	1.000000
X(2)	10.00000	1.000000
X(3)	10.00000	1.000000
R(1, 1)	0.000000	0.000000
R(1, 2)	3.000000	0.000000
R(1, 3)	2.000000	0.000000
R(2, 1)	0.000000	0.000000
R(2, 2)	0.000000	0.000000
R(2, 3)	1.000000	0.000000
R(3, 1)	0.000000	0.000000
R(3, 2)	1.000000	0.000000
R(3, 3)	1.000000	0.000000
R(4, 1)	2.000000	0.000000
R(4, 2)	0.000000	0.000000
R(4, 3)	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	28.00000	-1.000000
2	0.000000	0.000000

LINGO 11.0 Solver Status [xiaoliao3]

Solver Status
- Model: PINLP
- State: Local Opt
- ›jective: 28
- asibility: 0
- ›rations: 6065

Extended Solver Status
- Solver: B-and-B
- Best: 28
- Obj Bound: 28
- Steps: 87
- Active: 0

Variables
- otal: 15
- onlinear: 15
- ıtegers: 15

Constraints
- otal: 11
- onlinear: 4

Nonzeros
- otal: 51
- onlinear: 24

Generator Memory Used (K)
- 22

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
- 00:00:01

Update 2 Interrupt Solver Close

例6、飞机在飞行过程中，能够收到地面上各个监控台发来的关于飞机当前位置的信息，根据这些信息可以比较精确地确定飞机的位置。VOR是高频多向导航设备的英文缩写，它能够得到飞机与该设备连线的角度信息；DME是距离测量装置的英文缩写，它能够得到飞机与该设备的距离信息。图中飞机接受到来自3个VOR给出的角度和一个DME给出的距离（括号内是测量误差限），并已知这4种设备的x,y坐标（假设飞机和这些设置在同一平面上）。如何根据这些信息精确地确定当前飞机地位置?

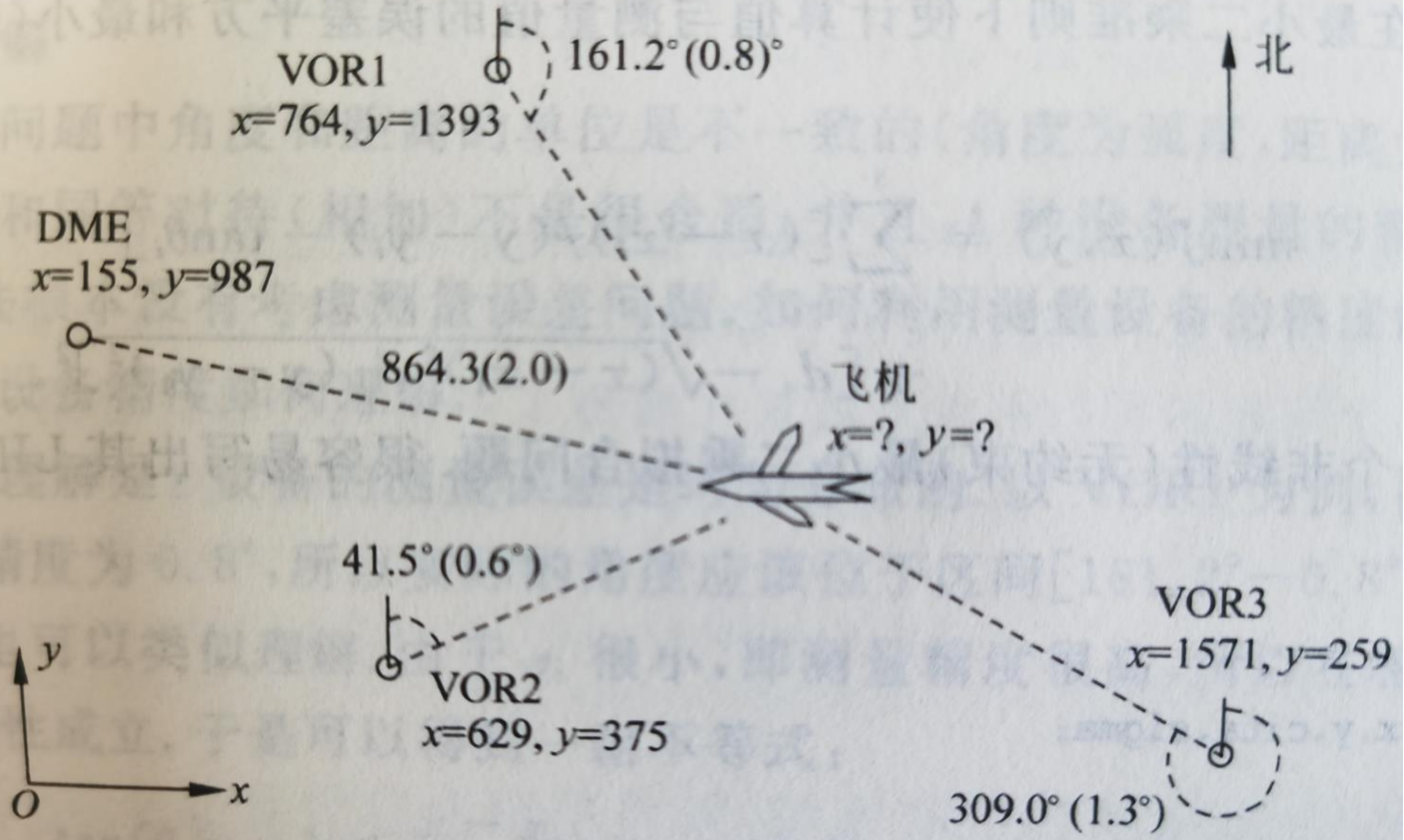

VOR1
x=764, y=1393
161.2°(0.8)°
北
DME
x=155, y=987
864.3(2.0)
飞机
x=?, y=?
41.5°(0.6°)
VOR2
x=629, y=375
VOR3
x=1571, y=259
309.0° (1.3°)
y
O
x

图 5-5　飞机与监控台

模型1: 决策变量：用(x, y)表示飞机的位置。

变量说明：

角度θ_i是点(x_i, y_i)和点(x, y)的连线与y轴的夹角（以y轴正向为基准，顺时针方向夹角为正，不考虑逆时针方向的夹角）。

$$\tan\theta_i = \frac{x - x_i}{y - y_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

对DME测量的距离，有$d_4 = \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2}$

目标函数：在最小二乘准则下使测量值的误差平方和最小。

建立如下优化模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{3} \left[{(x - x_i)}\big/{(y - y_i)} - \tan\theta_i \right]^2 + \left[d_4 - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2} \right]^2$$

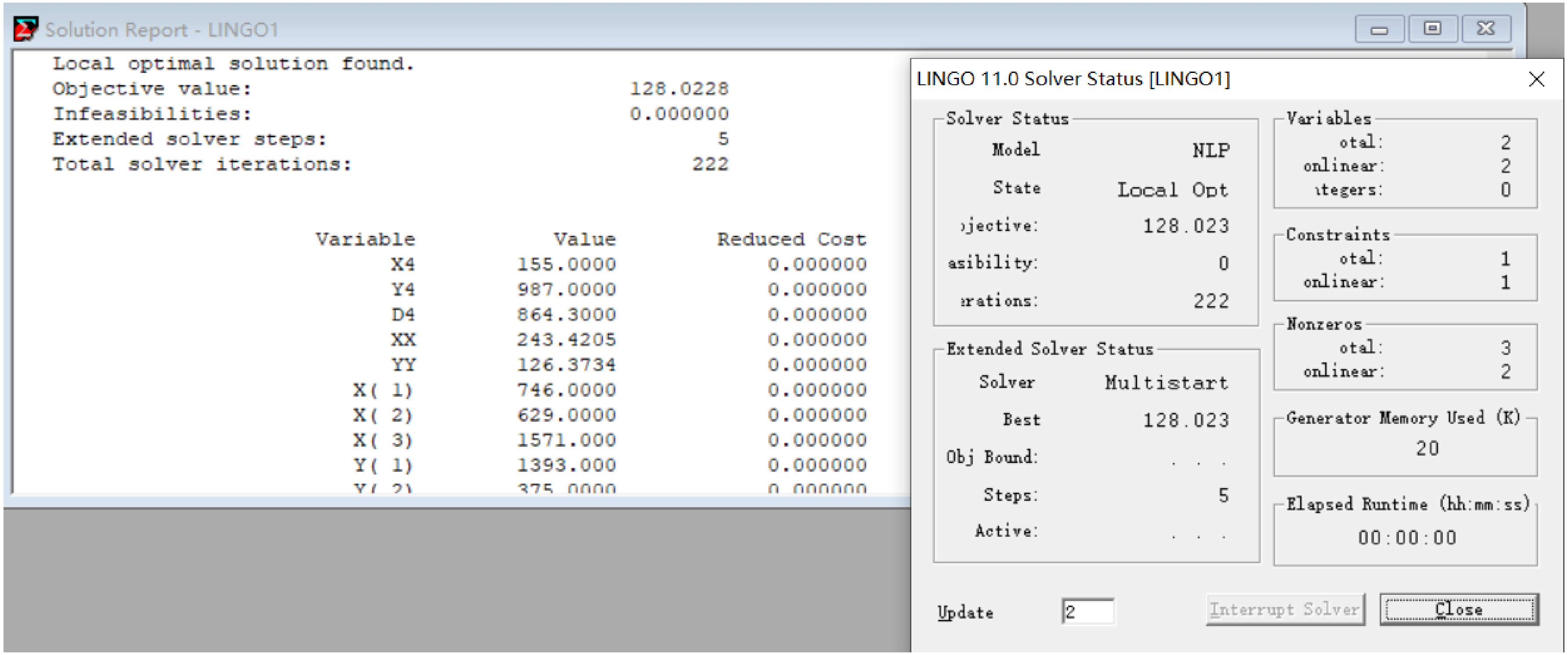
$$s.t. \quad x, y \ge 0$$

LINGO 11.0 - LINGO Model - feiji3

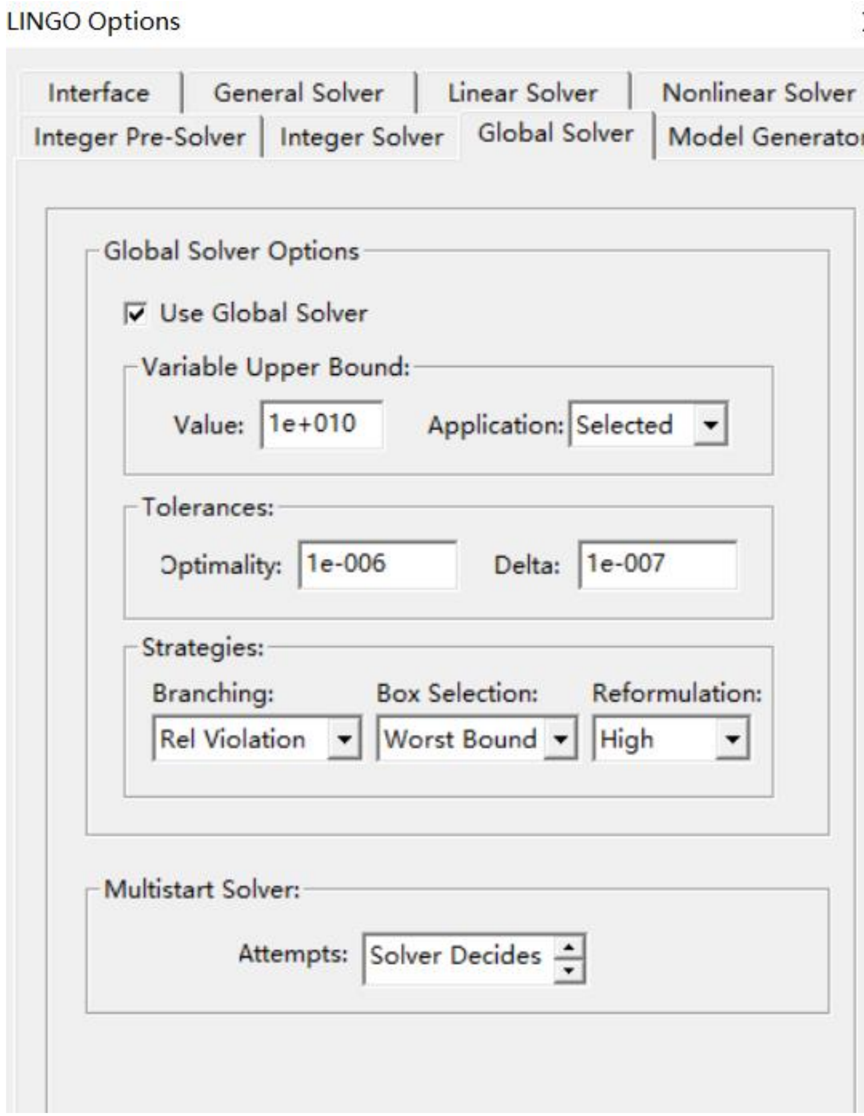
File Edit LINGO Window Help

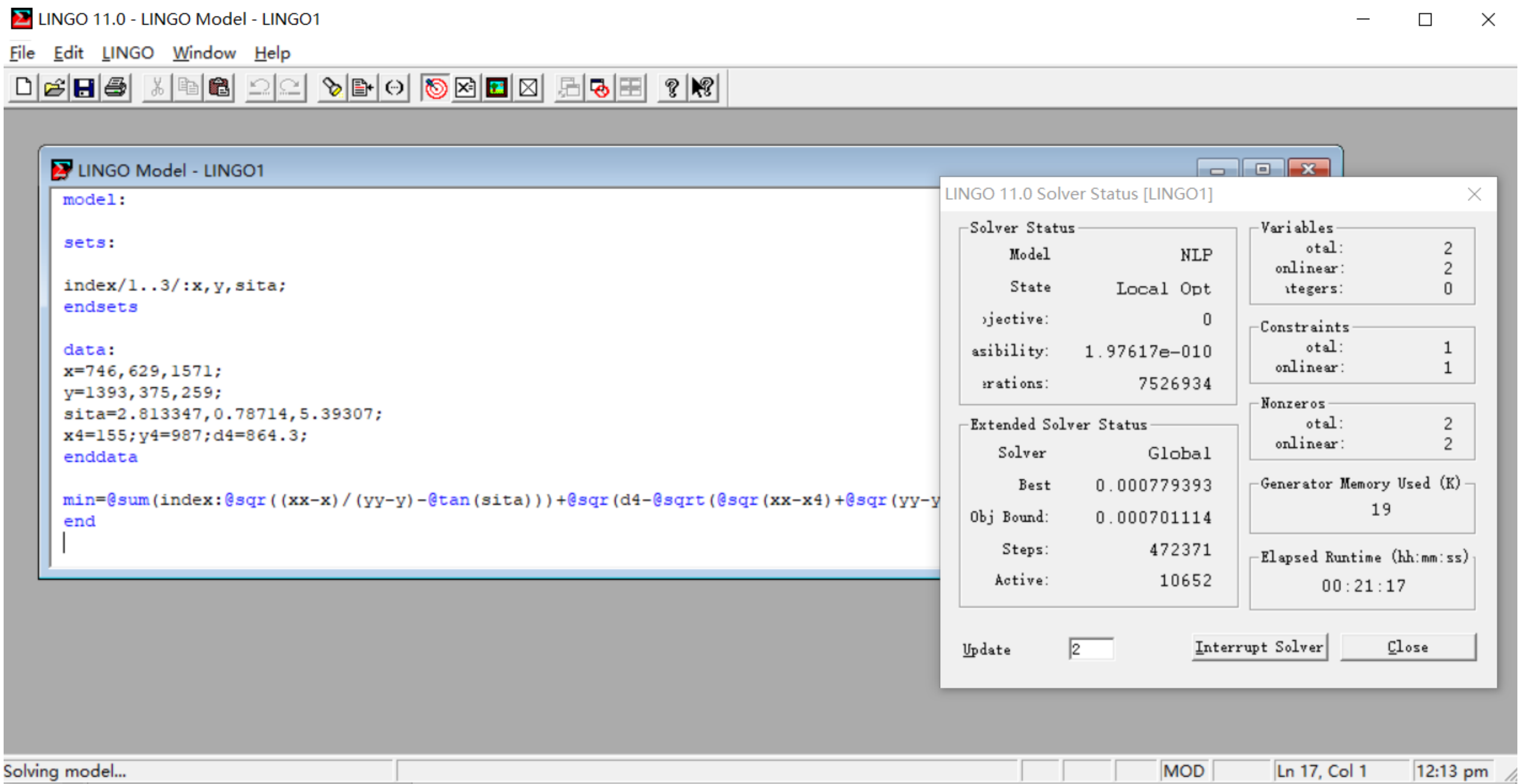
LINGO Model - feiji3

```
model:

sets:

index/1..3/:x,y,sita;
endsets

data:
x=746,629,1571;
y=1393,375,259;
sita=2.813347,0.78714,5.39307;
x4=155;y4=987;d4=864.3;
enddata

min=@sum(index:@sqr((xx-x)/(yy-y)-@tan(sita)))+@sqr(d4-@sqrt(@sqr(xx-x4)+@sqr(yy-y4)));
end
```



Solution Report - LINGO1
Local optimal solution found.
Objective value: 128.0228
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 5
Total solver iterations: 222
Variable Value Reduced Cost
X4 155.0000 0.000000
Y4 987.0000 0.000000
D4 864.3000 0.000000
XX 243.4205 0.000000
YY 126.3734 0.000000
X(1) 746.0000 0.000000
X(2) 629.0000 0.000000
X(3) 1571.000 0.000000
Y(1) 1393.000 0.000000
LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]
Solver Status
Model NLP
State Local Opt
Objective: 128.023
Infeasibility: 0
Iterations: 222
Extended Solver Status
Solver Multistart
Best 128.023
Obj Bound:
Steps: 5
Active:
Variables
Total: 2
Nonlinear: 2
Integers: 0
Constraints
Total: 1
Nonlinear: 1
Nonzeros
Total: 3
Nonlinear: 2
Generator Memory Used (K)
20
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:00
Update 2
Interrupt Solver
Close


LINGO Options
Interface
General Solver
Linear Solver
Nonlinear Solver
Integer Pre-Solver
Integer Solver
Global Solver
Model Generator
Global Solver Options
Use Global Solver
Variable Upper Bound:
Value: 1e+010
Application: Selected
Tolerances:
Optimality: 1e-006
Delta: 1e-007
Strategies:
Branching: Rel Violation
Box Selection: Worst Bound
Reformulation: High
Multistart Solver:
Attempts: Solver Decides


LINGO 11.0 - LINGO Model - LINGO1
File Edit LINGO Window Help
LINGO Model - LINGO1
model:
sets:
index/1..3/:x,y,sita;
endsets
data:
x=746,629,1571;
y=1393,375,259;
sita=2.813347,0.78714,5.39307;
x4=155;y4=987;d4=864.3;
enddata
min=@sum(index:@sqr((xx-x)/(yy-y)-@tan(sita)))+@sqr(d4-@sqrt(@sqr(xx-x4)+@sqr(yy-y
end
LINGO 11.0 Solver Status [LINGO1]
Solver Status
Model NLP
State Local Opt
jective: 0
asibility: 1.97617e-010
erations: 7526934
Extended Solver Status
Solver Global
Best 0.000779393
Obj Bound: 0.000701114
Steps: 472371
Active: 10652
Variables
otal: 2
onlinear: 2
tegers: 0
Constraints
otal: 1
onlinear: 1
Nonzeros
otal: 2
onlinear: 2
Generator Memory Used (K)
19
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:21:17
Update 2
Interrupt Solver
Close
Solving model...
MOD
Ln 17, Col 1
12:13 pm

LINGO Model - feiji2

```
model:

sets:

index/1..3/:x,y,sita;
endsets

init:
xx=900;
yy=700;
endinit

data:
x=746,629,1571;
y=1393,375,259;
sita=2.813347,0.78714,5.39307;
x4=155;y4=987;d4=864.3;
enddata

min=@sum(index:@sqr((xx-x)/(yy-y)-@tan(sita)))+@sqr(d4-@sqrt(@sqr(xx-x4)+@sqr(yy-y4)));
end
```

Solution Report - feiji2

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          0.7011097E-03
Objective bound:                          0.7005736E-03
Infeasibilities:                           0.000000
Extended solver steps:                            3
Total solver iterations:                       2995
```

Variable	Value	Reduced Cost
XX	980.6954	0.000000
YY	731.5754	0.000000
X4	155.0000	0.000000
Y4	987.0000	0.000000
D4	864.3000	0.000000
X(1)	746.0000	0.000000
X(2)	629.0000	0.000000
X(3)	1571.000	0.000000
Y(1)	1393.000	0.000000

LINGO 11.0 Solver Status [feiji2]

Solver Status

Model	NLP
State	Global Opt
›jective:	0.00070111
asibility:	0
›rations:	2995

Extended Solver Status

Solver	Global
Best	0.00070111
Obj Bound:	0.000700574
Steps:	3
Active:	0

Variables

otal:	2
onlinear:	2
ıtegers:	0

Constraints

otal:	1
onlinear:	1

Nonzeros

otal:	3
onlinear:	2

Generator Memory Used (K)
20

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:01

Update 2 Interrupt Solver Close

三、建模

在此我们设变量 x_{ij} 为在第 i 个农场中使用的土地量种植 j 种农作物，其中 $i=1,2,3$，此处分别代表 1，2，3 号农场；$j=1,2,3$，此处分别代表甜菜，棉花，高粱。根据题目设定，我们采用总利润作为本题的目标函数。由此我们得到公式

$$\max Q = 1000\sum_{i=1}^{3} x_{i1} + 750\sum_{i=1}^{3} x_{i2} + 250\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \tag{1}$$

约束条件包括农场使用面积、水资源消耗限制、最大配额，和各农场间的土地资源与水资源使用比例限制，因此我们分别有下列各式：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} &\leq 400 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} &\leq 600 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} &\leq 300 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} &\leq 600 \\ 3x_{21} + 2x_{22} + x_{23} &\leq 600 \\ 3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} &\leq 600 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} &\leq 600 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} &\leq 500 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} &\leq 325 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{3} x_{1j}}{400} = \frac{\sum_{j=1}^{3} x_{2j}}{600} = \frac{\sum_{j=1}^{3} x_{3j}}{325} \tag{5}$$

对于方程5来说，此处为非线性方程，不利于求解，因此我们将其化为方程6

$$\begin{aligned}
3\sum_{j=1} 3x_{1j} - 2\sum_{j=1} 3x_{2j} = 0 \\
13\sum_{j=1} 3x_{2j} - 24\sum_{j=1} 3x_{3j} = 0 \\
13\sum_{j=1} 3x_{1j} - 16\sum_{j=1} 3x_{3j} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

除此之外我们对于所有变量均有如式的限制

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0 \tag{7}$$

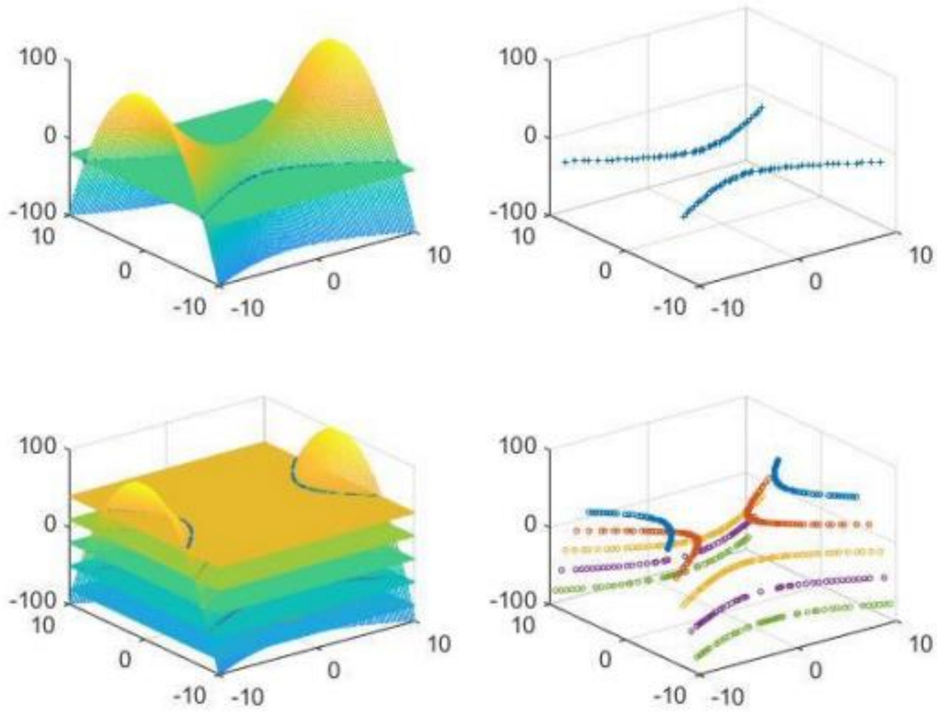
四、 求解分析

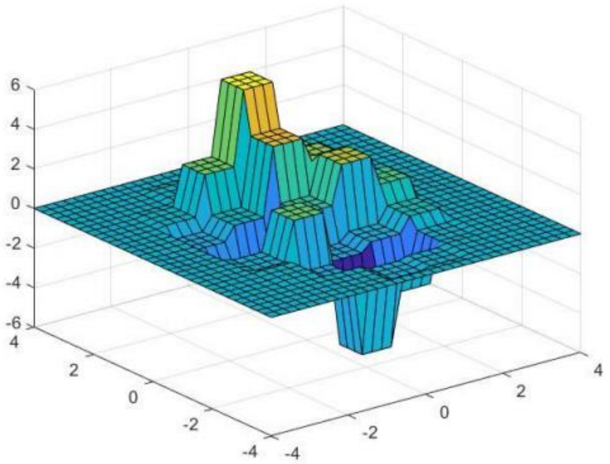
我们采用 Lingo 求解得最优目标函数值为 633333.3 美元，其中各农场对于农作物的种植安排如表3

表 3　最油种植安排

农场	甜菜	棉花	高粱
1	133.3	100.0	0
2	100.0	250.0	0
3	15.0	150.0	0

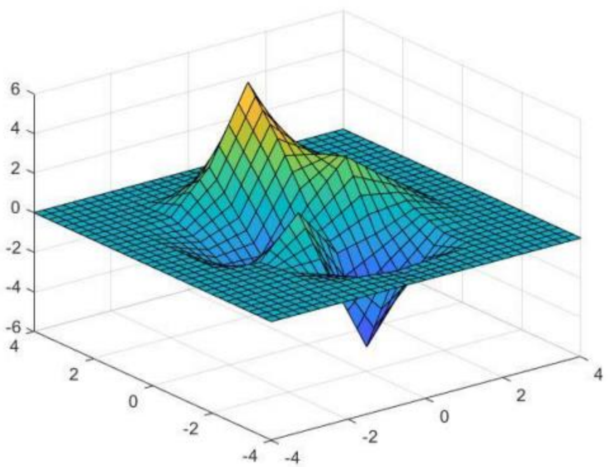
2. 生成的图形如下：


100
0
-100
10
0
-10
-10
0
10
100
0
-100
10
0
-10
-10
0
10
100
0
-100
10
0
-10
-10
0
10
100
0
-100
10
0
-10
-10
0
10

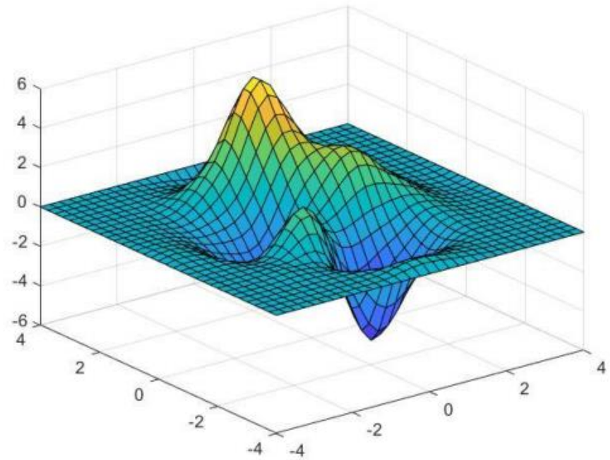


6
4
2
0
-2
-4
-6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

Linear:



6
4
2
0
-2
-4
-6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4



6
4
2
0
-2
-4
-6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4