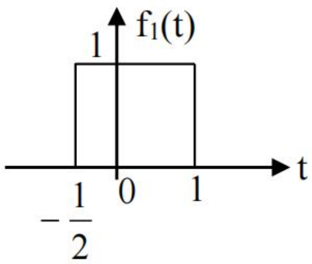
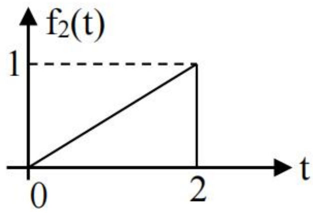
实验二：线性系统时域分析

王婧怡 202000810044

1 报告要求

1. 请同学们利用 MATLAB 实现下述两个信号的卷积积分：





(1) 推导出两个信号卷积积分运算表达式，并绘制图形

(2) 利用 Matlab 求解验证

2. 求解如下 LTI 系统的冲激响应、阶跃响应

$$2r''(t)+r'(t)+8r(t)=e(t)$$

（a）求解出该系统的冲激响应、阶跃响应的数学表达式，画出波形；

（b）利用 MATLAB 进行求解验证。

3. 已知描述系统的微分方程和激励信号如下

$$r''(t)+4r'(t)+4r(t)=e'(t)+3e(t),\quad e(t)=e^{-t}u(t)$$

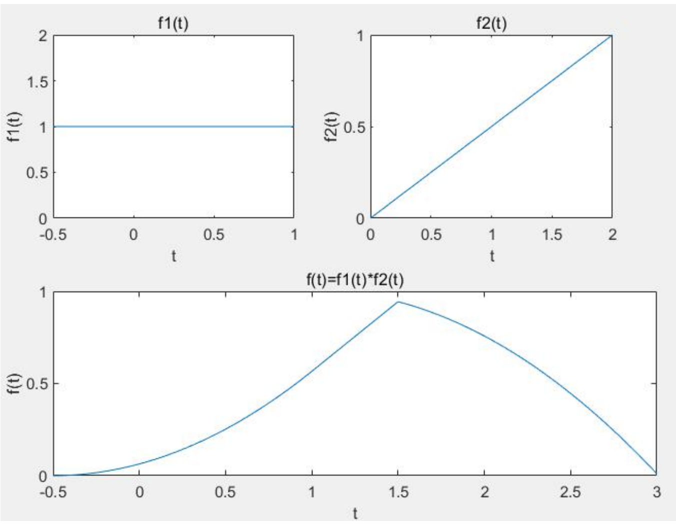
（a） 用解析法求系统的零状态响应 r(t)；

（b） 用 MATLAB 绘出系统零状态响应的时域仿真波形，验证（a）求解结果是否正确

2 实验过程

2.1 实现下述两个信号的卷积积分

（b）画图验证（第一小题在下页）



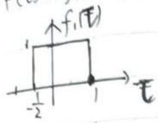

```
p=0.01;
k2=0:p:2;
f2 =0.5*k2;
k1 =- 1/2:p:1 ;
f1 = 1+zeros(1,length(k1));
[f,k]=sconv(f1,f2,k1,k2,p);
```

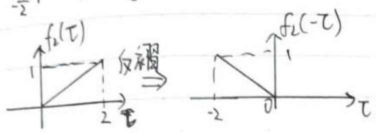
Sconv 函数如下：

```
function [f,k] = sconv(f1,f2,k1,k2,p)
f = conv(f1,f2);
f = f*p;
k0 = k1(1)+k2(1); % 貌似不是非零的
k3 = length(f1) + length(f2) - 2; % 计算f非零样值的宽度
k = k0:p:(k3*p+k0);
subplot(2,2,1);
plot(k1,f1);
title('f1(t)');
xlabel('t');
ylabel('f1(t)');
subplot(2,2,2)
plot(k2,f2) %在子图 2 绘 f2(t)时波形图
title('f2(t)')
xlabel('t')
ylabel('f2(t)')
subplot(2,2,3)
plot(k,f); % 卷积和f的时域波形
h = get(gca,'position');
h(3) = 2.5*h(3);
set(gca,'position',h) %将第三个子图的横坐标范围扩为原来的 2.5 倍
title('f(t)=f1(t)*f2(t)')
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
```

（a）推导出两个信号卷积积分运算表达式，并绘制图形

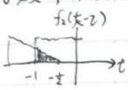
$F(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau$





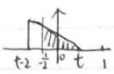
① $t\le -\frac{1}{2}$时，无交叉，$F(t)=0$.

② $-\frac{1}{2}<t\le 0$时



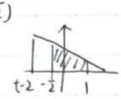
$F(t)=\frac{1}{2}\cdot(t+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(t+\frac{1}{2})^2$.

③ $0<t\le 1$时，



$F(t)=\frac{1}{4}(t+\frac{1}{2})^2$

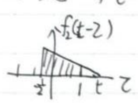
④ $1<t\le\frac{3}{2}$时



$F(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(t-1)\cdot\frac{1}{2}(t-1)$

$=\frac{1}{4}[(t+\frac{1}{2})^2-(t-1)^2]=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}$

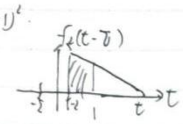
⑤ $\frac{3}{2}<t\le 2$时



$F(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\frac{1}{2}(t-1)\cdot\frac{1}{2}(t-1)$

$=1-\frac{1}{4}(t-1)^2$

⑥ $2<t\le 3$时，

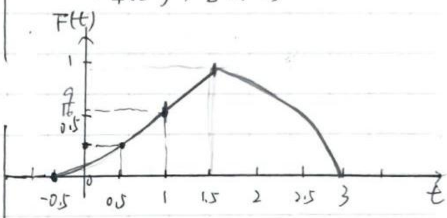


$F(t)=1-\frac{1}{4}(t-1)^2$

⑦ $t>3$时，无交叉，$F(t)=0$.

综上

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le-\frac{1}{2}\text{或}\ t>3\\ \frac{1}{4}(t+\frac{1}{2})^2, & -\frac{1}{2}<t\le 1\\ \frac{3}{4}t-\frac{3}{16}, & 1<t\le\frac{3}{2}\\ 1-\frac{1}{4}(t-1)^2, & \frac{3}{2}<t\le 3\end{cases}$$



2.2 求解冲激响应、阶跃响应

（a）求解出该系统的冲激响应、阶跃响应的数学表达式，画出波形；

$r''(t)+\frac{1}{2}r'(t)+4r(t)=\frac{1}{2}e(t)$

①冲激响应：

求齐次解：

$r^2+\frac{1}{2}r+4=0$

解得：$r=\frac{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{63}{4}}}{2}$

$r_1=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{63}}{4}i$

$r_2=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{63}}{4}i$

∴齐次解为：

$y(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$

特解为0

由方程形式可知：

$r(t)=(A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t})\varepsilon(t)$

求A_1、A_2

已知$r(t)$无阶跃，$r(0_+)=0$

$r'(t)$含有 $\frac{1}{2}\delta(t)$

$r'(t)$有跳阶跃 $\frac{1}{2}\varepsilon(t)$，$r'(0_+)=\frac{1}{2}$

代入$y(t)$，解得：

$A_1=-\frac{\sqrt{7}}{21}i$，$A_2=\frac{\sqrt{7}}{21}i$

由欧拉公式：

$r(t)=\frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{3}{4}\sqrt{7}t$.

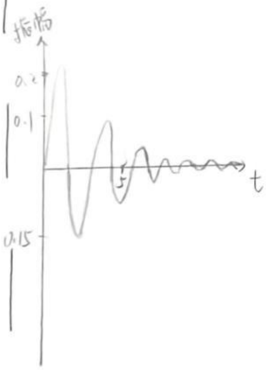
解得：$h(t)=r(t)=\frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{3}{4}\sqrt{7}t$.

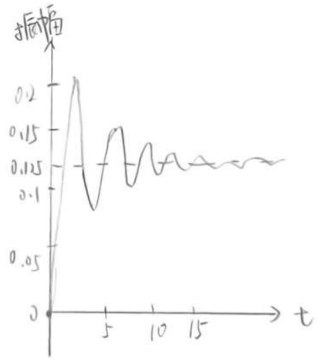
②阶跃响应

由LTI系统特性，阶跃响应$g(t)$与冲激响应

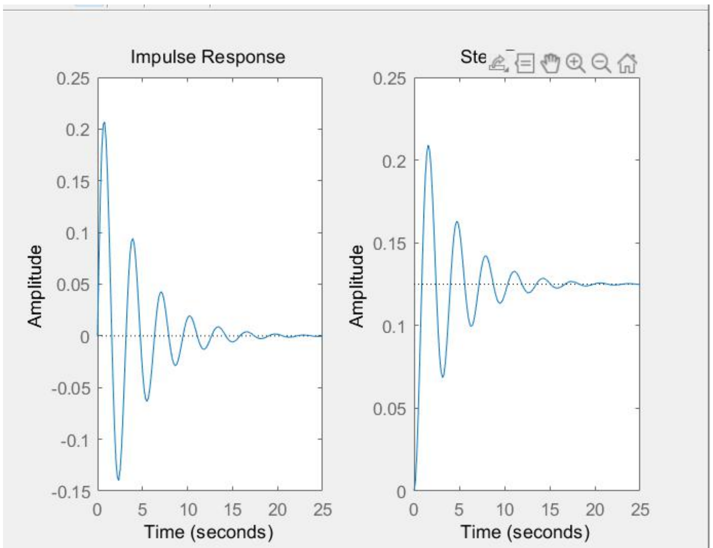
关系为：$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$

∴解得 $g(t)=\frac{\sqrt{7}e^{-\frac{t}{4}}\left[\frac{\sin(\frac{3\sqrt{7}t}{4})}{4}+3\sqrt{7}\cos(\frac{3\sqrt{7}t}{4})\right]}{168}+\frac{1}{8}$





（b）利用 MATLAB 进行求解验证




```
a = [2 1 8];
b = [1];
subplot(1,2,1)
impulse(b,a);
subplot(1,2,2)
step(b,a);
```

2.3 解析法求系统零状态响应

（a） 用解析法求系统的零状态响应 r(t)；

$r''(t)+4r'(t)+4r(t)=e'(t)+3e(t)$，

$e(t)=e^{-1}u(t)$

①求齐次解：

$r^2+4t+4=0$

$r_1=r_2=2$

则齐次解为：

$r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}$.

②求特解：$t>0$时

$r''(t)+4r'(t)+4r(t)=e'(t)+3e(t)$

$=2e^{-t}$

$-1\neq-2$

设特解为

$r_p(t)=A_3e^{-t}$

代入解得，$A_3=2$

则特解为$r_p(t)=2e^{-t}$

则完全解：$r(t)=r_h(t)+r_p(t)$

$=2e^{-t}+(A_1t+A_2)e^{-2t}$

③求初始条件

$e(t)$无奇异函数，零状态响应.

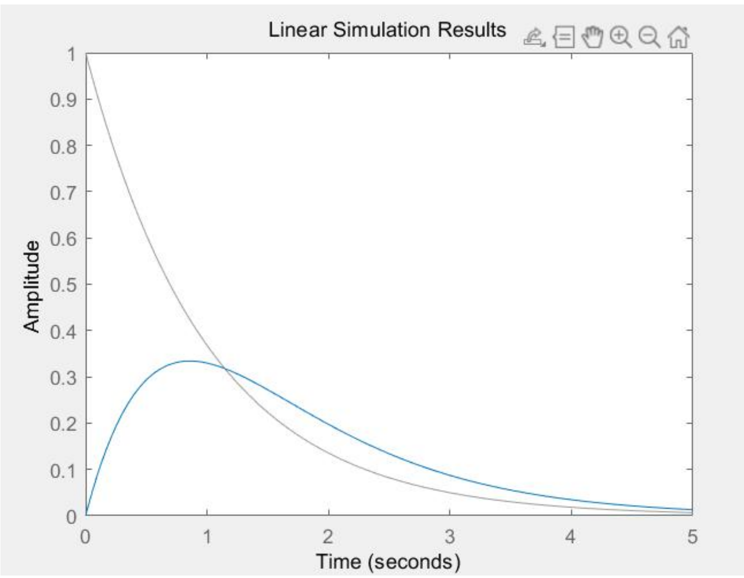
$r(0+)=0$，$r'(0+)=0$

代入得：$A_1=2$，$A_2=-2$

因此完全解：

$r(t)=[2(t-1)e^{-2t}+2e^{-t}]u(t)$

（b） 用 MATLAB 绘出系统零状态响应的时域仿真波形，验证（a）求解结果是否正确




```
a = [1 4 4];
b = [1 3];
p = 0.01;
t = 0:p:5;
x = exp(-1*t);
lsim(b,a,x,t);
```