第四章　　非平稳序列的确定性分析

非平稳序列的分析

两种不同的角度

一个方向是由外向内的分析视角

确定性因素分解方法

一个方向是由内向外的分析视角

ARIMA方法

本章结构

1. 确定性因素分解
2. X-11过程
3. 指数平滑预测

确定性因素分解

- 因素分解方法（Time Series Decomposition）由英国统计学家W.M. Persons于1919年在他的论文“商业环境的指标（Indices of Business Conditions）”一文中首次使用。
- 因素分解方法认为所有的序列波动都可以归纳为受到如下四大类因素的综合影响：
  - 长期趋势（Trend）。序列呈现出明显的长期递增或递减的变化趋势。
  - 循环波动（Circle）。序列呈现出从低到高再由高到低的反复循环波动。循环周期可长可短，不一定是固定的。
  - 季节性变化（Season）。序列呈现出和季节变化相关的稳定周期波动。
  - 随机波动(Immediate)。除了长期趋势、循环波动和季节性变化之外，其他不能用确定性因素解释的序列波动，都属于随机波动。

因素分解模型

- 统计学家在进行确定性时间序列分析时，假定序列会受到这四个因素中的全部或部分的影响，导致序列呈现出不同的波动特征。换言之，任何一个时间序列都可以用这四个因素的某个函数进行拟合 $x_t = f(T_t, C_t, S_t, I_t)$
- 常用模型
  - 加法模型：

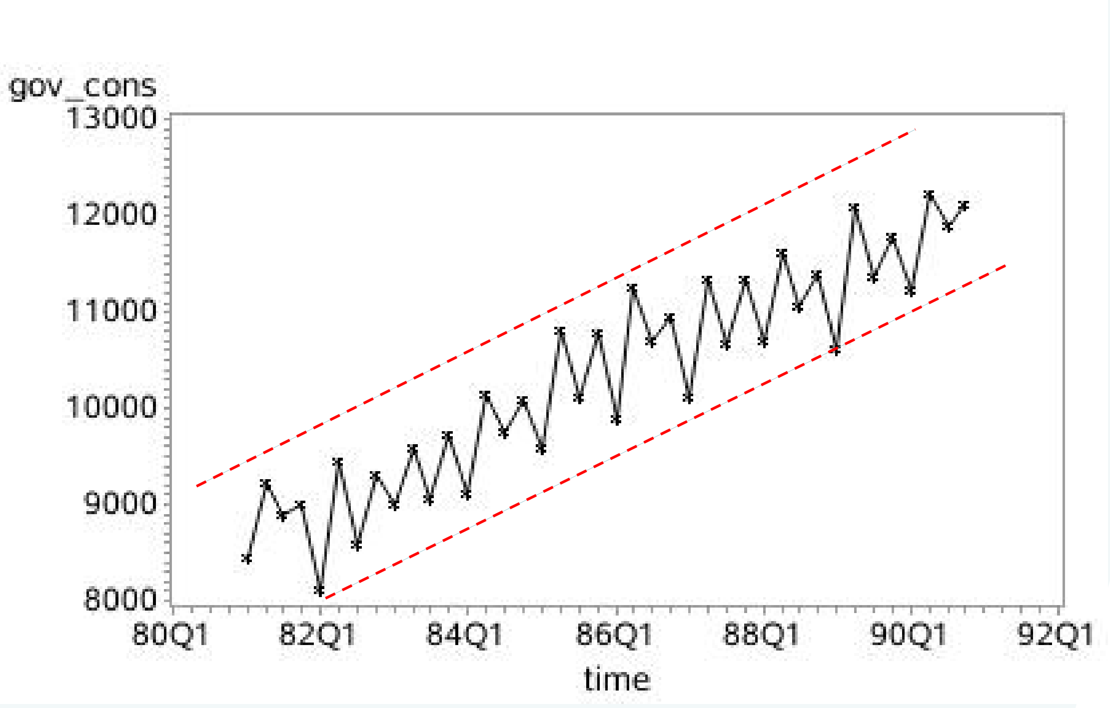
$$x_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

  - 乘法模型：

$$x_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$$

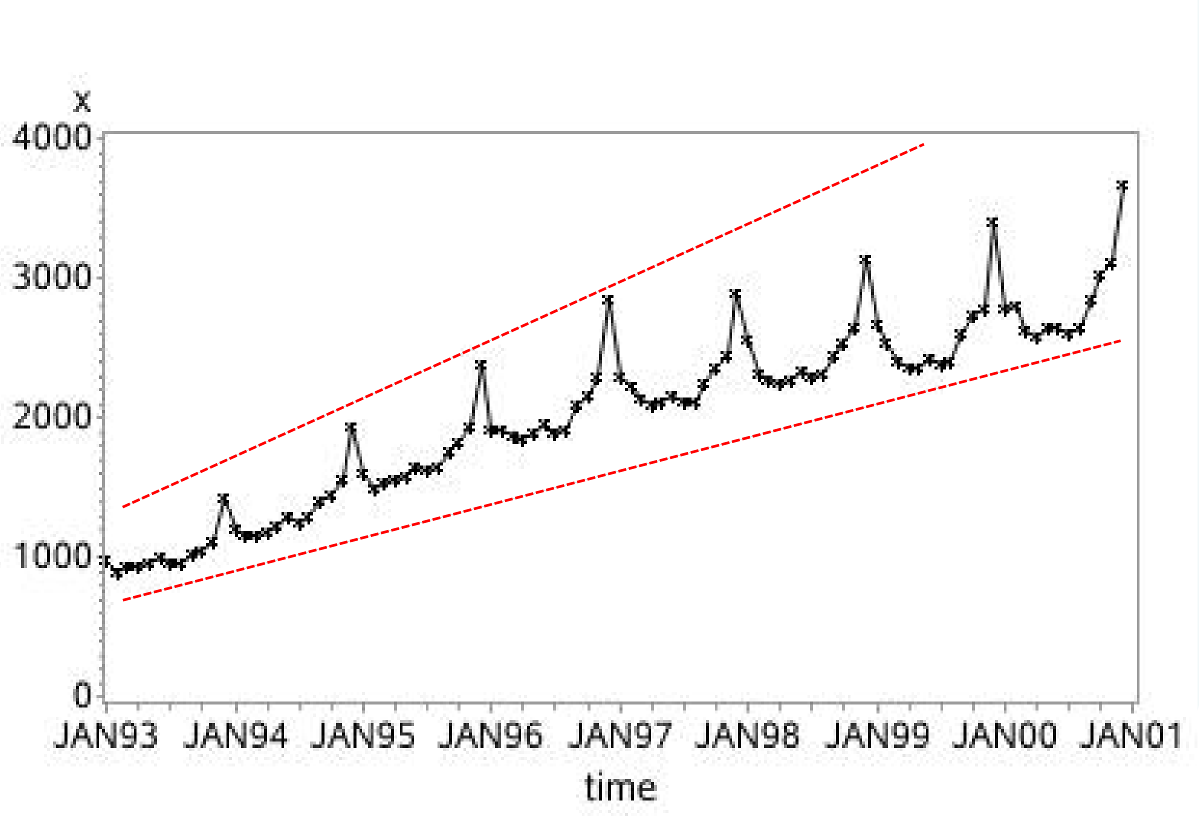
加法模型

- 例4-1：考察1981—1990年澳大利亚政府季度消费支出序列的确定性影响因素，并选择因素分解模型



乘法模型

- 例5-2：考察1993-2000年中国社会消费品零售总额序列的确定性影响因素，并选择因素分解模型。



因素分解模型遇到的问题

- 如果观察时期不是足够长，那么循环因素和趋势因素的影响很难准确区分。
  - 比如很多经济或社会现象确实有“上行——峰顶——下行——谷底”周而复始的循环周期。但是这个周期通常很长而且周期长度不是固定的。比如前面提到的太阳黑子序列，就有9-13年长度不等的周期。
  - 在经济学领域更是如此。1913年美国经济学家韦斯利.米歇尔出版了《经济周期》一书，他提出经济周期的持续时间从超过1年到10年或12年不等，它们会重复发生，但不定期。
  - 后来不同的经济学家研究不同的经济问题，一再证明经济周期的存在和周期的不确定，比如基钦周期（平均周期长度为40个月左右），朱格拉周期（平均周期长度为10年左右），库兹涅茨周期）平均长度为20年左右），康德拉季耶夫周期（平均周期长度为53.3年）。如果观察值序列不是足够长，没有包含几个周期的话，那么周期的一部分会和趋势重合，无法准确完整地提取周期影响。

因素分解遇到的问题

- 有些社会现象和经济现象显示出某些特殊日期是一个很显著的影响因素，但是在传统因素分解模型中，它却没有被纳入研究。
  - 比如研究股票交易序列，成交量、开盘价、收盘价会明显受到交易日的影响，同一只股票每周一和每周五的波动情况可能有显著的不同。
  - 超市销售情况更是明显受到特殊日期的影响，工作日、周末、重大假日的销售特征相差很大。
  - 春节、端午节、中秋节、儿童节、圣诞节等不同的节日对零售业、旅游业、运输业等多个行业都有显著影响。

因素分解改进模型

- 如果观察时期不是足够长，人们将循环因素（Circle）改为特殊交易日因素（Day）。新的四大因素为：趋势（T），季节（S），交易日（D）和随机波动（I）。
  - 加法模型：$x_t = T_t + S_t + D_t + I_t$
  - 乘法模型：$x_t = T_t \times S_t \times D_t \times I_t$
  - 伪加法模型：$x_t = T_t \times \left(S_t + D_t + I_t - 1\right)$
  - 对数加法模型：$\log x_t = \log T_t + \log S_t + \log D_t + \log I_t$

确定性时序分析的目的

- 一是克服其他因素的干扰，单纯测度出某个确定性因素（诸如季节，趋势，交易日）对序列的影响。
- 二是根据序列呈现的确定性特征，选择适当的方法对序列进行综合预测。

加法模型因素分解步骤

趋势效应的提取

- 趋势效应的提取方法有很多，比如构建序列与时间t的线性回归方程或曲线回归方程，或者构建序列与历史信息的自回归方程，但在因素分解场合，最常用的趋势效应提取方法是简单中心移动平均方法。
- 移动平均方法最早于1870年由法国数学家De Forest提出。移动平均的计算公式如下

$$M(x_t)=\sum_{i=-k}^{f}\theta_i x_{t-i}\quad,\forall k,f>0$$

移动平均

- 对移动平均函数增加三个约束条件，此时称为简单中心移动平均。

  （1）时期对称；

  （2）系数相等;

  （3）系数和为1

- 例如5期中心移动平均

$$M_5(x_t)=\frac{x_{t-2}+x_{t-1}+x_t+x_{t+1}+x_{t+2}}{5}$$

复合移动平均

- 如果移动平均的期数为偶数，那么通常需要进行两次偶数期移动平均才能实现时期对称。两次移动平均称为复合移动平均，记作 $M_{P\times Q}(x_t)$
- 例如采用2*4复合移动平均实现4期简单中心移动平均

$$M_{2\times 4}(x_t)=\frac{1}{2}M_4(x_t)+\frac{1}{2}M_4(x_{t+1})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x_{t-2}+x_{t-1}+x_t+x_{t+1}}{4}+\frac{1}{2}\frac{x_{t-1}+x_t+x_{t+1}+x_{t+2}}{4}$$

$$=\frac{1}{8}x_{t-2}+\frac{1}{4}x_{t-1}+\frac{1}{4}x_t+\frac{1}{4}x_{t+1}+\frac{1}{8}x_{t+2}$$

- 简单中心移动平均方法尽管很简单，但是却具有很多良好的属性：

  1.简单中心移动平均能够有效提取低阶趋势（一元一次线性趋势或一元二次抛物线趋势）。

  2.简单中心移动平均能够实现拟合方差最小。

  3.简单中心移动平均能有效消除季节效应。

  4.对于有稳定季节周期的序列进行周期长度的简单移动平均可以消除季节波动。

- 因为简单中心移动平均具有这些良好的属性，所以，只要选择适当的移动平均期数就能有效消除季节效应和随机波动的影响，有效提取序列的趋势信息。

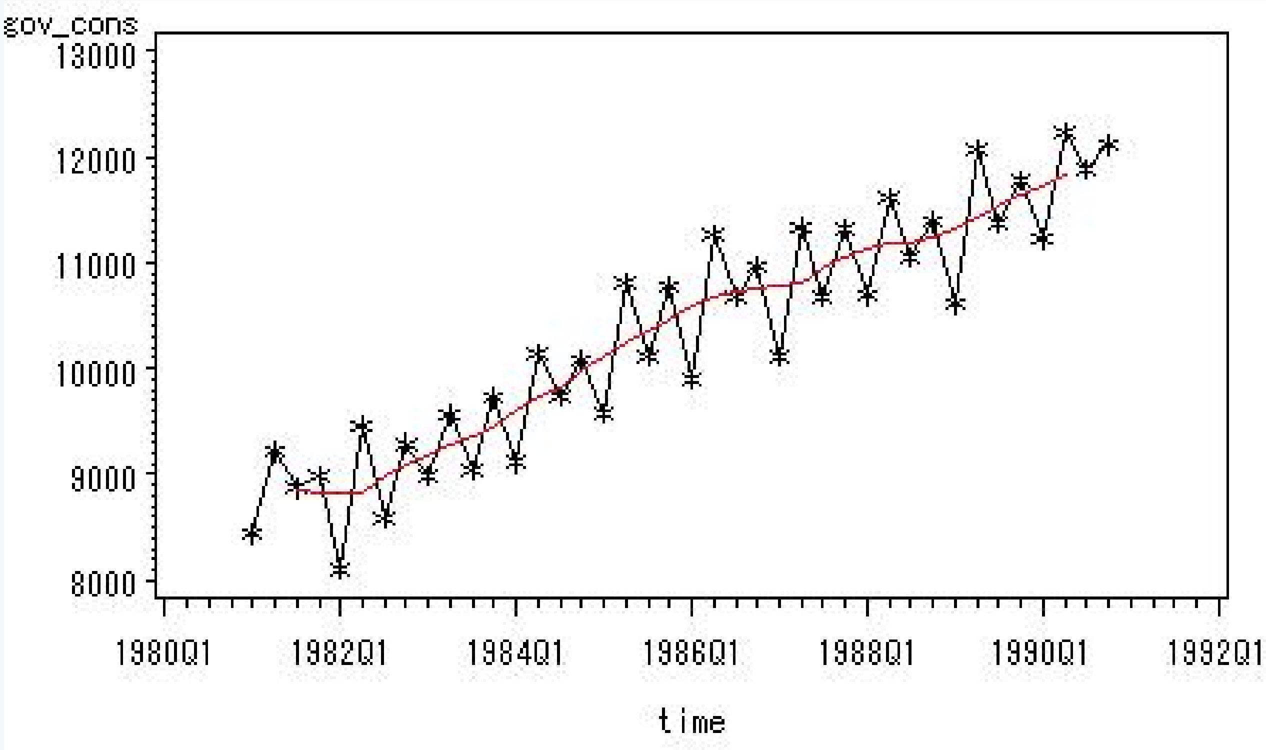
例4-1 趋势提取

- 1981-1990年澳大利亚政府季度消费支出序列，原序列为季度数据，有显著的季节特征，每年为一个周期，即周期长度为4期。对原序列先进行4期简单移动平均，再对序列进行两期移动平均，得到复合移动平均值 $M_{2\times4}(x_t)$

表 4-1 1981-1990 年澳大利亚政府季度消费支出 $M_{2\times4}(x_t)$ 计算过程

时间	消费支出	$M_4(x_t)$	$M_{2\times4}(x_t)$
1981Q1	8444.00	-	-
1981Q2	9215.00	-	-
1981Q3	8879.00	8882.00	8840.88
1981Q4	8990.00	8799.75	8830.00
1982Q1	8115.00	8860.25	8824.13
1982Q2	9457.00	8788.00	8826.00

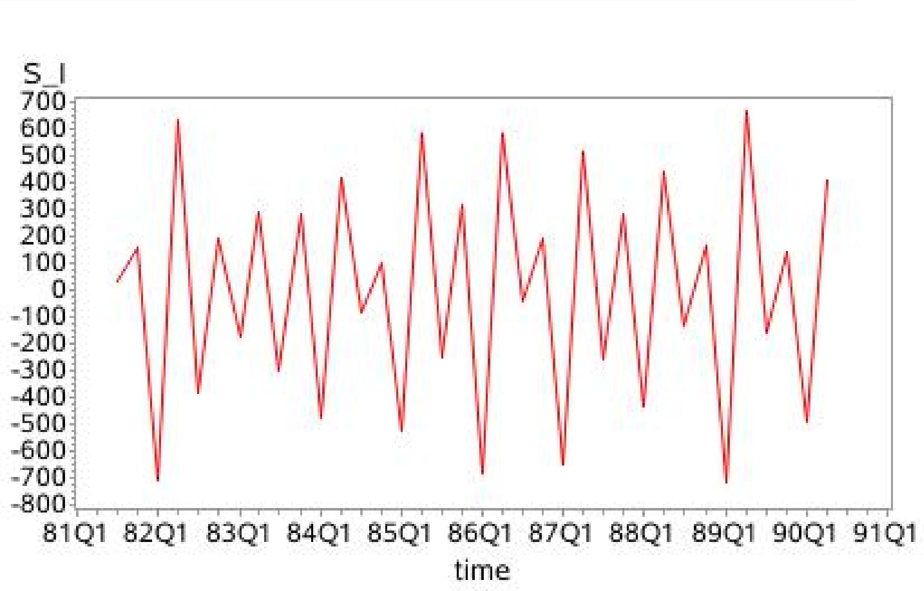
平滑效果图


gov_cons
13000
12000
11000
10000
9000
8000
1980Q1
1982Q1
1984Q1
1986Q1
1988Q1
1990Q1
1992Q1
time

例4-1 加法模型去除趋势

- 我们对该序列指定的因素分解模型为加法模型，现在用$M_{2\times4}(x_t)$提取趋势信息，那么用原序列减去趋势效应，剩下的就应该是季节效应和随机波动，

$$x_t - M_{2\times4} = S_t + I_t$$



季节效应的提取

- 在日常生活中，我们可以见到许多有季节效应的时间序列，比如四季的气温、月度商品零售额、某景点季度旅游人数，等等。它们都会呈现出明显的季节变动规律。在时间序列分析中，我们把“季节”广义化，凡是呈现出固定的周期性变化的事件，都称它具有“季节”效应。

加法模型中季节指数的构造

- 季节指数的构造分为四步：

第一步：从原序列中消除趋势效应

$$y_t = x_t - T_t = S_t + I_t$$

$$y_{ij} = \bar{y} + S_j + I_{ij}$$

- 第二步：计算序列总均值 $$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{km}$$

第三步：计算每季度均值 $$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_{ij}}{k}, \ j = 1, 2, \cdots, k$$

第四步：计算加法模型的季节指数 $$S_j = \bar{y}_j - \bar{y}$$

例4-1 加法模型季节指数计算

- 提取1981—1990年澳大利亚政府季度消费支出序列的季节效应。
- 首先剔除趋势信息

$$y_t = x_t - M_{2\times 4}$$

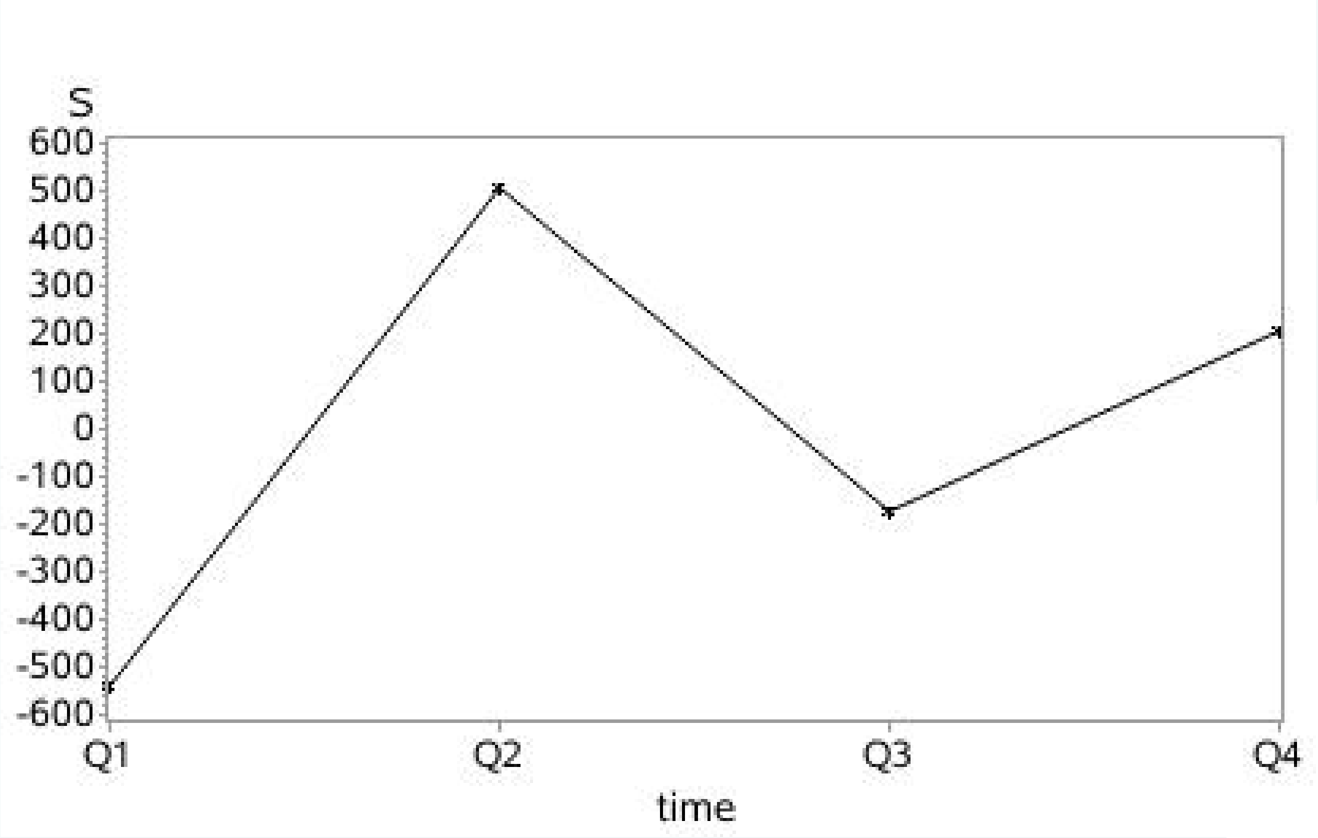
- 然后计算季节指数

例4-1

年	Q1	Q2	Q3	Q4
1981	.	.	38.13	160.00
1982	-709.13	631.00	-384.25	194.88
1983	-174.38	291.25	-300.88	285.63
1984	-476.38	416.00	-82.00	104.50
1985	-522.00	582.63	-246.88	319.63
1986	-685.75	585.25	-45.00	194.13
1987	-653.13	514.50	-259.13	280.38
1988	-429.88	440.75	-128.63	166.88
1989	-714.25	665.25	-160.75	144.00
1990	-490.75	410.25	.	.
$\overline{y}_j$	-539.51	504.10	-174.38	205.56
$\overline{y}$	-1.06			
$S_j=\overline{y}_j-\overline{y}$	-538.45	505.16	-173.32	206.61

例4-1 季节指数图

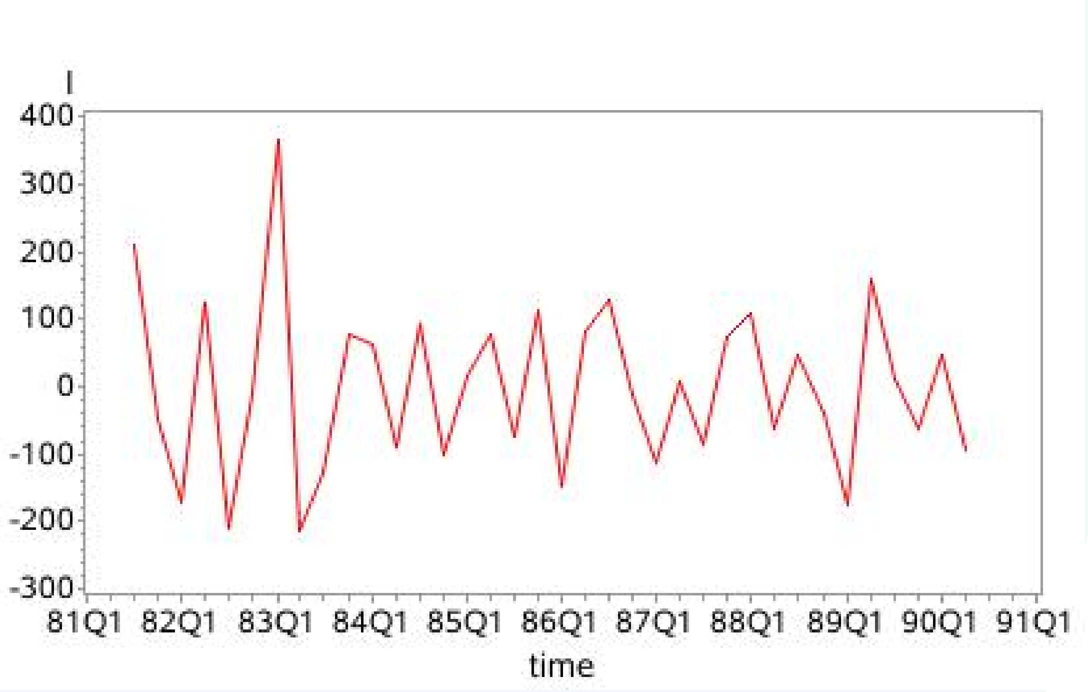
❖ 澳大利亚政府季度消费支出序列季节指数图



例5-1 加法模型的随机波动提取

- 从序列中剔除趋势和季节效应之后，就剩随机波动了

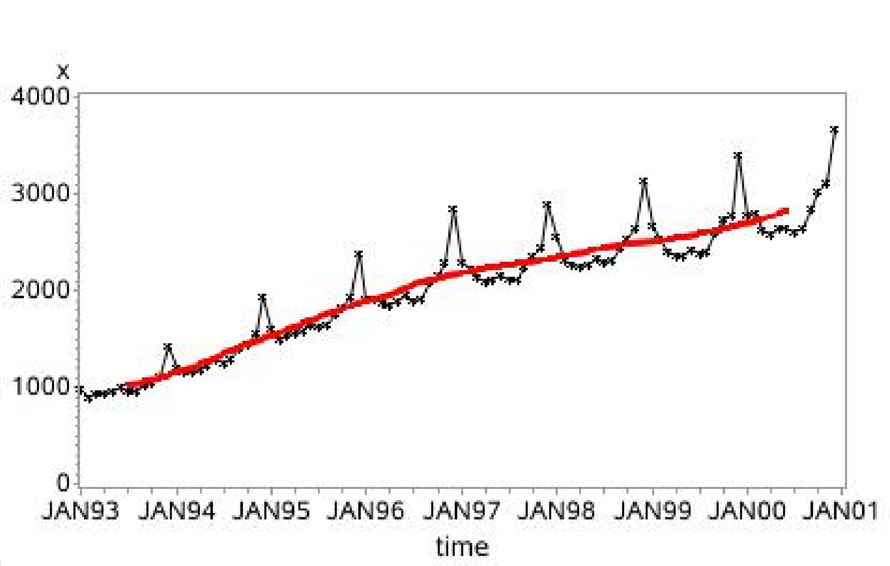
$$y_t - S = x_t - T_t - S_t = I_t$$



乘法模型因素分解步骤

例4-2 趋势拟合

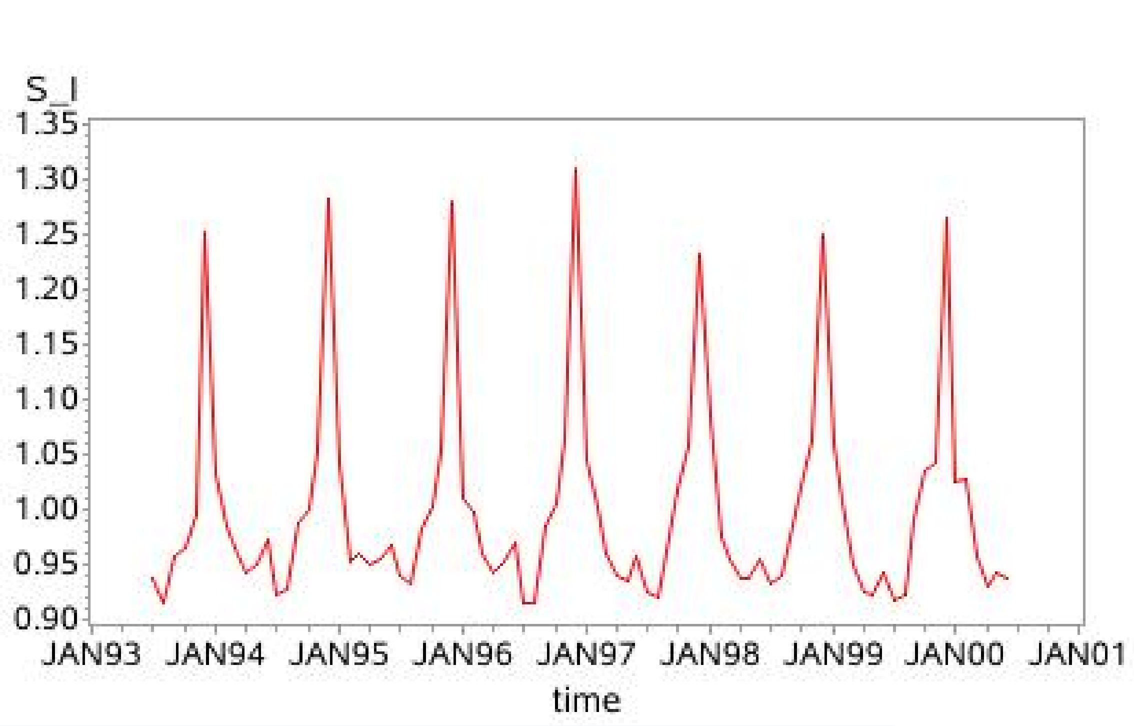
- 使用简单中心移动平均方法提取1993-2000年中国社会消费品零售总额序列的趋势效应。
- 该序列为月度数据，即周期长度等于12。对原序列先进行12期简单移动平均，再进行2期移动平均，得到 $M_{2\times12}(x_t)$ 复合移动平均值。下图显示 $M_{2\times12}(x_t)$ 能有效消除该序列的季节效应和随机波动的影响，提取该序列的趋势信息。



例4-2 乘法模型去除趋势

❖ 我们对该序列指定的因素分解模型为乘法模型，现在用 $M_{2\times4}(x_t)$ 提取趋势信息，那么用原序列除以趋势效应，剩下的就应该是季节效应和随机波动

$$\frac{x_t}{M_{2\times4}} = S_t \times I_t$$



乘法模型中季节指数的构造

- 季节指数的构造分为四步：

第一步：从原序列中消除趋势效应

$$y_t = \frac{x_t}{T_t} = S_t \times I_t$$

$$y_{ij} = \bar{y} \cdot S_j \cdot I_{ij}$$

- 第二步：计算序列总均值

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{km}$$

第三步：计算每季度均值

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_{ij}}{k}, \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

第四步：计算加法模型的季节指数 $S_j = \bar{y}_j / \bar{y}$

例5-2 计算季节指数

- 提取1993-2000年中国社会消费品零售总额序列的季节效应。
- 首先消除该序列的趋势效应

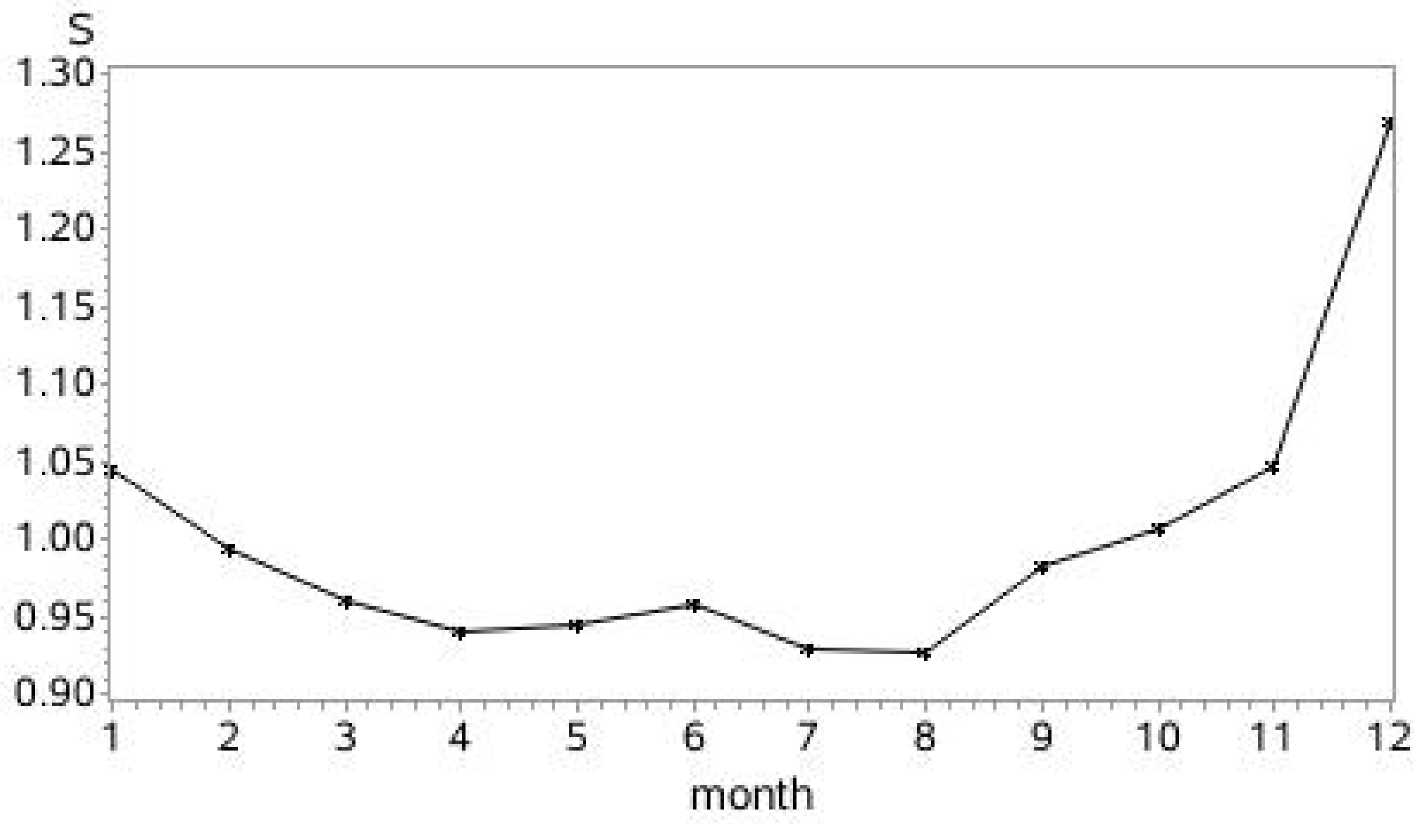
$$y_t = \frac{x_t}{M_{2\times 4}}$$

- 然后计算季节指数

计算季节指数

季节	季节指数	季节	季节指数
1月	1.04	7月	0.93
2月	0.99	8月	0.93
3月	0.96	9月	0.98
4月	0.94	10月	1.01
5月	0.94	11月	1.05
6月	0.96	12月	1.27

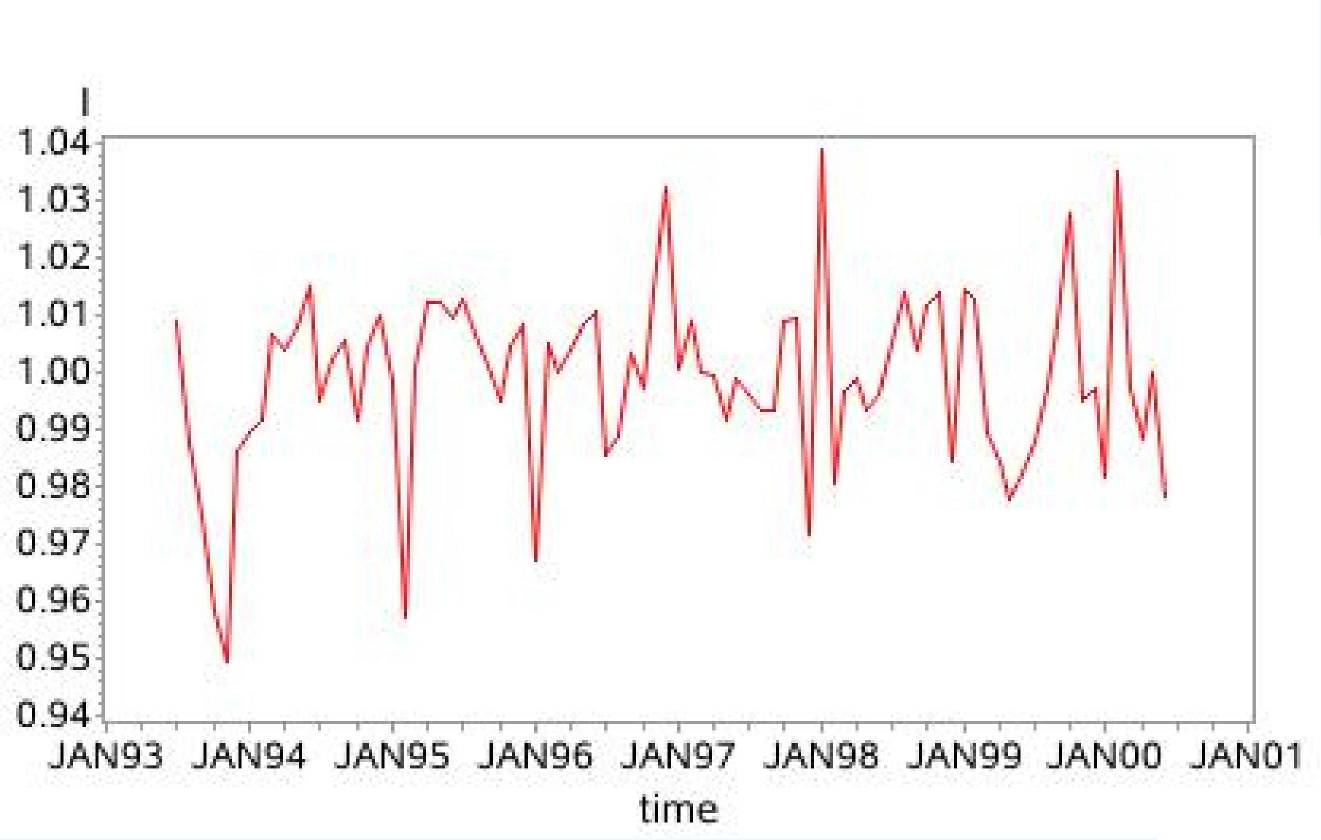
例4-2 季节指数图



例4-2 乘法模型提取随机波动

- 序列剔除趋势和季节效应之后，剩下的随机波动特征

$$\frac{y_t}{S_t}=\frac{x_t}{T_t}\Big/S_t=I_t$$



本章结构

1. 确定性因素分解
2. X-11过程
3. 指数平滑预测

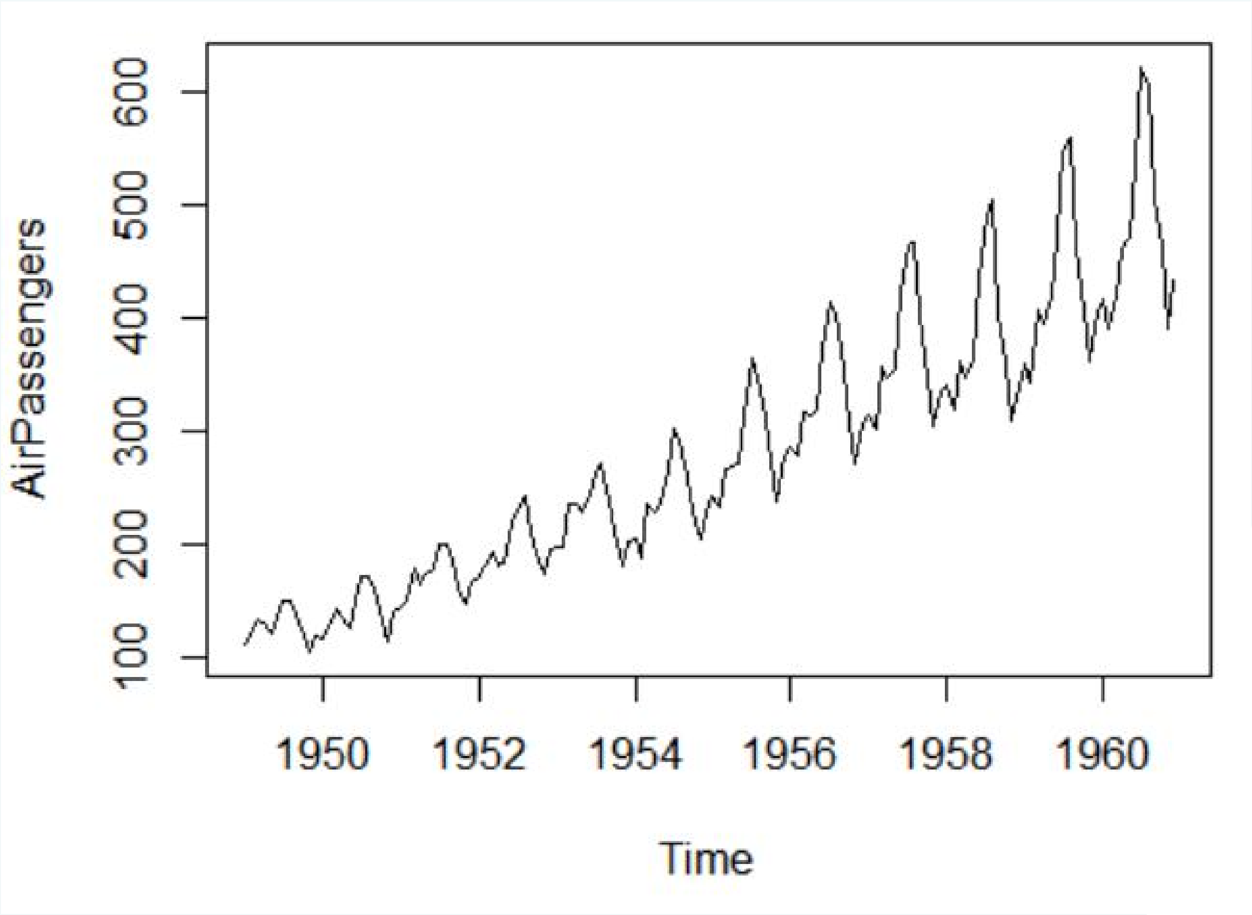
x-11模型发展历史

- X11模型也称为X11季节调节模型。它是第二次世界大战之后，美国人口普查局委托统计学家进行的基于计算机自动进行的时间序列因素分解方法。构造它的目的是因为很多序列通常具有明显的季节效应，季节性会掩盖序列发展的真正趋势，妨碍人们做出正确判断。因此在进行国情监控研究时，首先需要对序列进行因素分解，分别监控季节性波动和趋势效应。
- 1954年，第一个基于计算机自动完成的因素分解程序测试版本面世，随后经过10多年的发展，计算方法不断完善，陆续推出了新的测试版本X-1，X-2，------，X10。1965年，由统计学家Shiskin，Young和Musgrave共同研发推出了新的测试版本X11。X11在传统的简单移动平均方法的基础上，又创造性地引入两种移动平均方法以补足简单移动平均方法的不足。它通过三种移动平均方法，进行三阶段的因素分解。大量的实践应用证明，对各种特征的序列，X11模型都能进行精度很高的、计算机程序化操作的因素分解。自此，X11模型成为全球统计机构和商业机构进行因素分解时最常使用模型。
- 在R语言中我们直接调用decompose函数就可以调用X11模型进行因素分解。

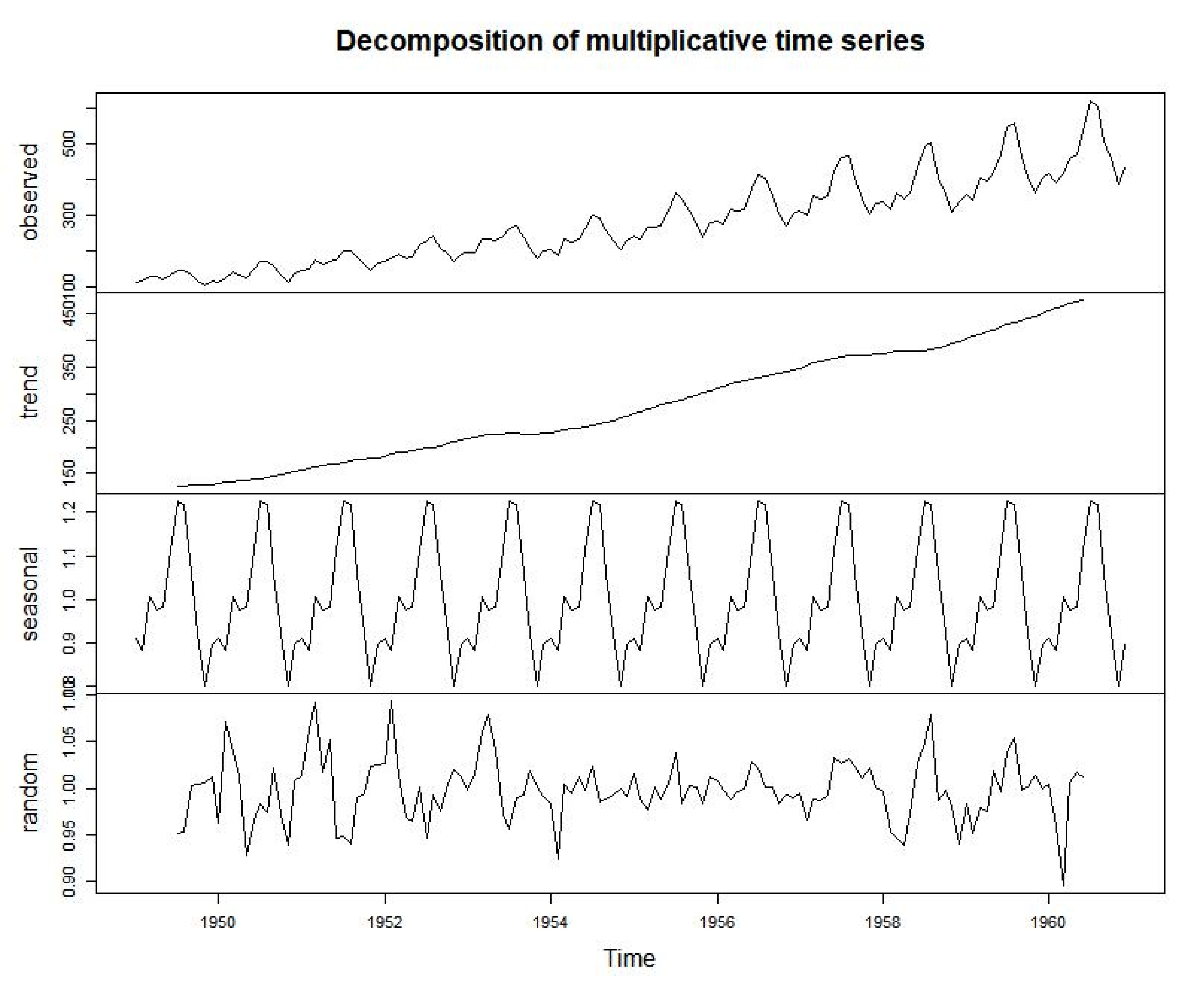
X-12和X-13模型

- X11面世之后，各国统计学家依然在致力于X11模型的持续改进。1975年，加拿大统计局将ARIMA模型引入X11模型。借助ARIMA模型可以对序列进行向后预测扩充数据，以保证拟合数据的完整性，弥补了中心移动平均方法的缺陷。
- 1998年，美国人口普查局开发了X12-ARIMA模型。这次是将干预分析（我们将在7.2节中介绍干预分析）引入X11模型。它是在进行X11分析之前，将一些特殊因素作为干预变量引入研究。这些干预变量包括：特殊节假日、固定季节因素、工作日因素、交易日因素、闰年因素，以及研究人员自行定义的任意自变量。先建立响应变量和干预变量回归模型，然后再对回归残差序列进行X11因素分解。
- 2006年美国人口普查局再次推出更新版本X13-ARIMA-Seats，它是在X12-ARIMA的基础上，增加了seats季节调整方法。

例4-3 用X11模型分析国际航空乘客人数特征



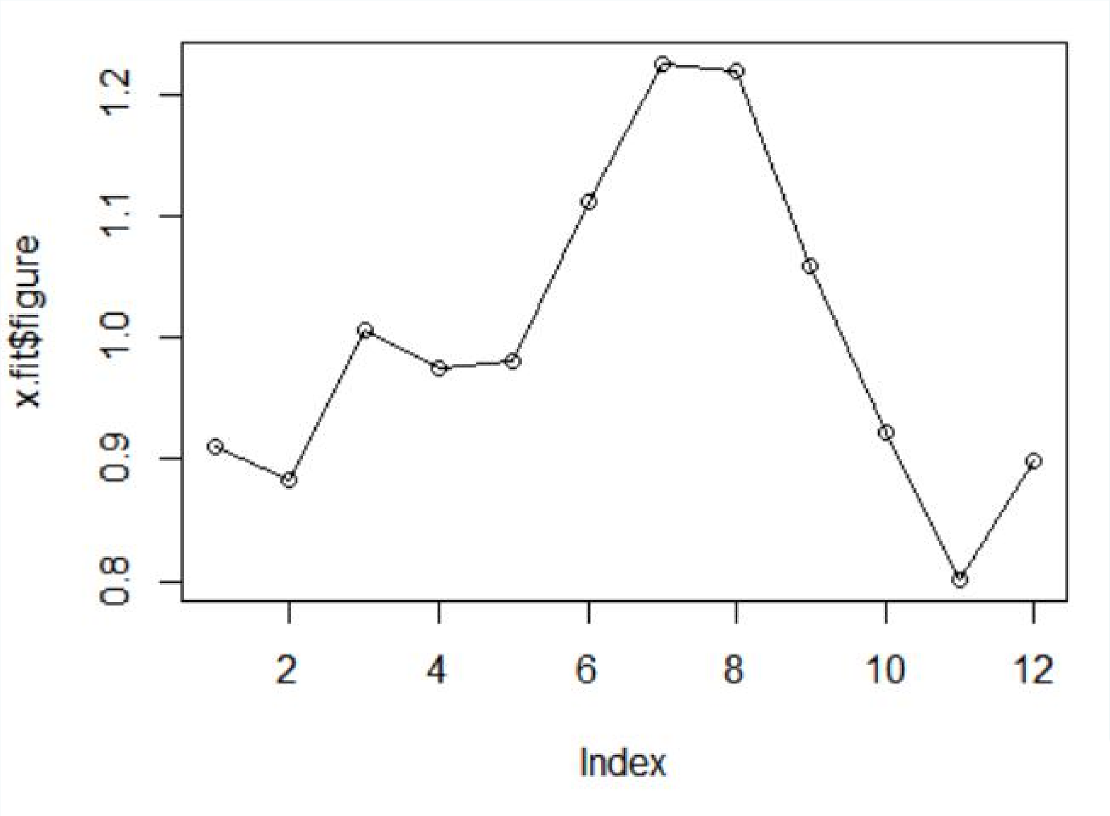
例4-3 X11因素分解结果



例4-3 季节指数

- $figure

[1] 0.9102304 0.8836253 1.0073663 0.9759060 0.9813780 1.1127758 1.2265555
[8] 1.2199110 1.0604919 0.9217572 0.8011781 0.8988244



本章结构

1. 确定性因素分解
2. X-11过程
3. 指数平滑预测

指数平滑预测模型

- 确定性因素分析的第二个主要目的是根据序列呈现的确定性特征，选择适当的模型，预测序列未来的发展。根据序列是否具有长期趋势与季节效应，可以把序列分为如下三大类：

第一类：既没有长期趋势，也没有季节效应的序列

第二类：只有长期趋势，没有季节效应的序列

第三类：有季节效应的序列

- 在确定性因素分解领域，针对这三类序列，可以采用三种不同的指数平滑模型进行序列预测。

预测模型选择	长期趋势	季节效应
简单指数平滑	无	无
Holt 两参数指数平滑	有	无
Holt-Winters 三参数指数平滑	无	有
	有	

平稳序列平滑预测

- 对于既无长期趋势，有无季节效应的序列，可以认为序列是围绕在均值附近做随机波动，即假定序列的波动服从如下模型

$$x_t = \mu + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

- 根据这个假定，对该序列的预测，主要目的是要消除随机波动的影响，得到序列稳定的均值。简单移动平均方法可以很好的完成这个任务。

简单移动平均

- 对于既无长期趋势，又无季节效应的水平平稳序列，可以认为序列在一个比较短的时间间隔内，序列的取值是比较稳定的，序列值之间的差异主要是由随机波动造成的。根据这种假定，我们可以用最近一段时间内的平均值作为未来几期的预测值，该方法称为简单移动平均预测法。
- 假定最后一期的观察值为 x_t ，那么使用简单移动平均模型，向前预测1期的预测值为

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-n+1}}{n} = \mu + \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_{t-n+1}}{n}$$

$$E(\hat{x}_{t+1}) = \mu \qquad Var(\hat{x}_{t+1}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- 这说明使用简单移动平均得到的预测值是序列真实值的无偏估计，而且移动平均期数越大，预测的误差越小。

简单指数平滑预测模型

- 简单移动平均有很多良好的属性，但是在实务中，人们也发现了它的缺点。简单移动平均法实际上就是用一个简单的加权平均数作为某一期序列值的估计值。实际上也就是假定无论时间的远近，这n期的观察值对预测值的影响力都是一样的。但在实际生活中，我们会发现对大多数随机事件而言，一般都是近期的结果对现在的影响会大些，远期的结果对现在的影响会小些。这就是1961年Brown和Meyers提出指数平滑法的构造思想。
- 简单指数平滑模型

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-3} + \cdots$$

- 因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^k = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$ 所以 $E\left(\hat{x}_{t+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^k \mu = \mu$
- 这说明简单指数平滑方法的设计既考虑到了时间间隔的影响，又不影响预测值的无偏性。所以它是一种简单好用的无趋势、无季节效应序列的预测方法。

简单指数平滑的递推公式

❖ 简单指数平滑等价递推公式

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-3} + \cdots$$

$$= \alpha x_t + (1-\alpha)\left[\alpha x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-3} + \cdots\right]$$

$$= \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_t$$

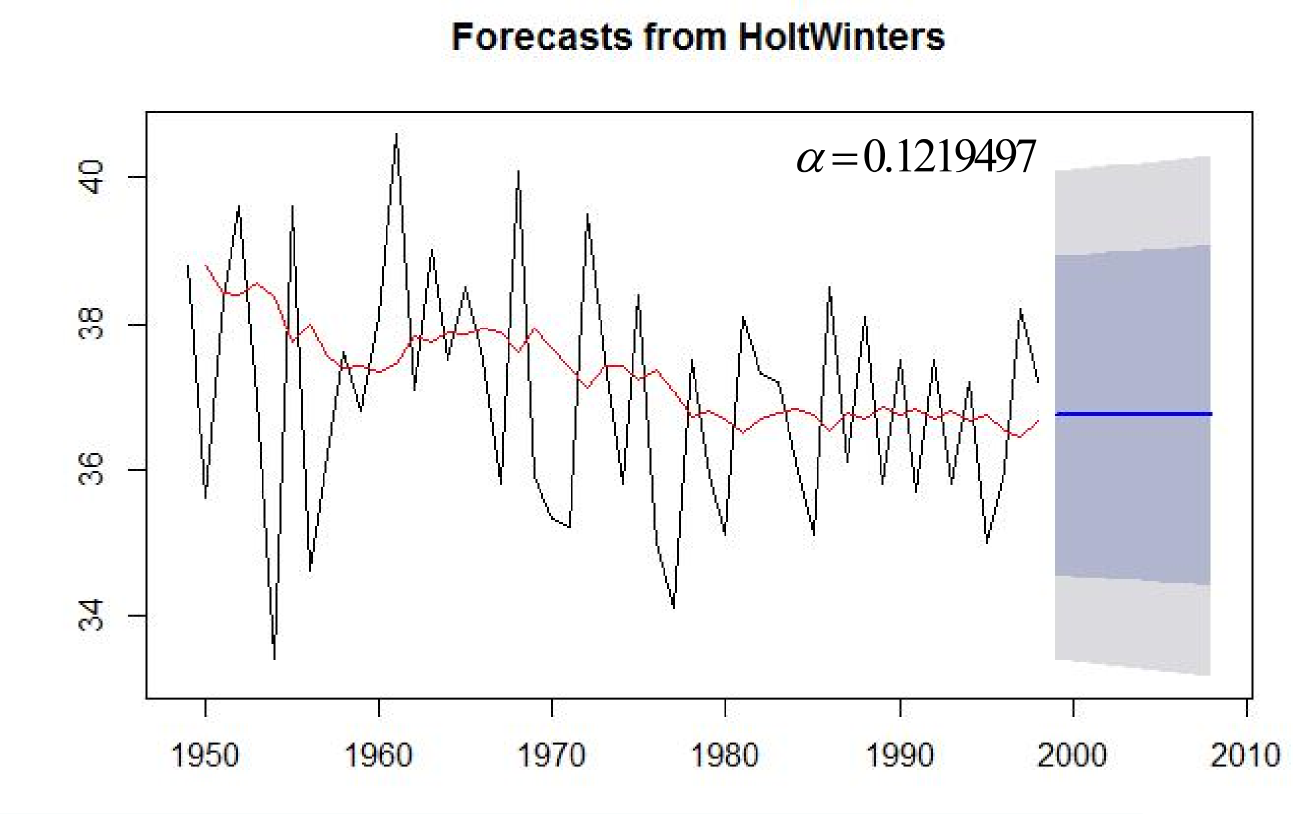
简单指数平滑

- 简单指数平滑面临一个确定初始值的问题。我们有许多方法可以确定的初始值，最简单的方法是指定 $\hat{x}_1 = x_1$ 。
- 平滑系数 α 的值最初由研究人员根据经验给出。一般对于变化缓慢的序列，α 常取较小的值，相反对于变化迅速的序列，α 常取较大的值。经验值通常介于0.05至0.3之间。
- 从理论上我们可以证明使用简单指数平滑法预测任意期的预测值都为常数。

$$\hat{x}_{t+l} = \alpha\hat{x}_{t+l-1} + (1-\alpha)\hat{x}_{t+l-1} = \hat{x}_{t+1} \ ,l \geq 2$$

例4-4

❖ 以北京市年度最高气温序列为例，进行简单指数平滑拟合及预测



Holt两参数指数平滑

- Holt两参数指数平滑适用于含有线性趋势的序列进行预测。它的基本思想是具有线性趋势的序列通常可以表达为如下模型结构

$$x_t = a_0 + bt + \varepsilon_t$$

- 等价表达

$$\begin{aligned} x_t &= a_0 + b(t-1) + b + \varepsilon_t \\ &= \left(x_{t-1} - \varepsilon_{t-1}\right) + b + \varepsilon_t \\ &= a(t) + b(t) \end{aligned}$$

- 记 $a(t) = x_{t-1} - \varepsilon_{t-1}$

$b(t) = b + \varepsilon_t$

Holt两参数指数平滑

- Holt两参数指数平滑就是分别使用简单指数平滑的方法，结合序列的最新观察值，不断修匀序列值 $\hat{a}(t)$ 和线性递增值 $\hat{b}(t)$ ，递推公式如下

$$\hat{a}(t)=\alpha x_t+(1-\alpha)\left[\hat{a}\left(t-1\right)+\hat{b}(t-1)\right]$$

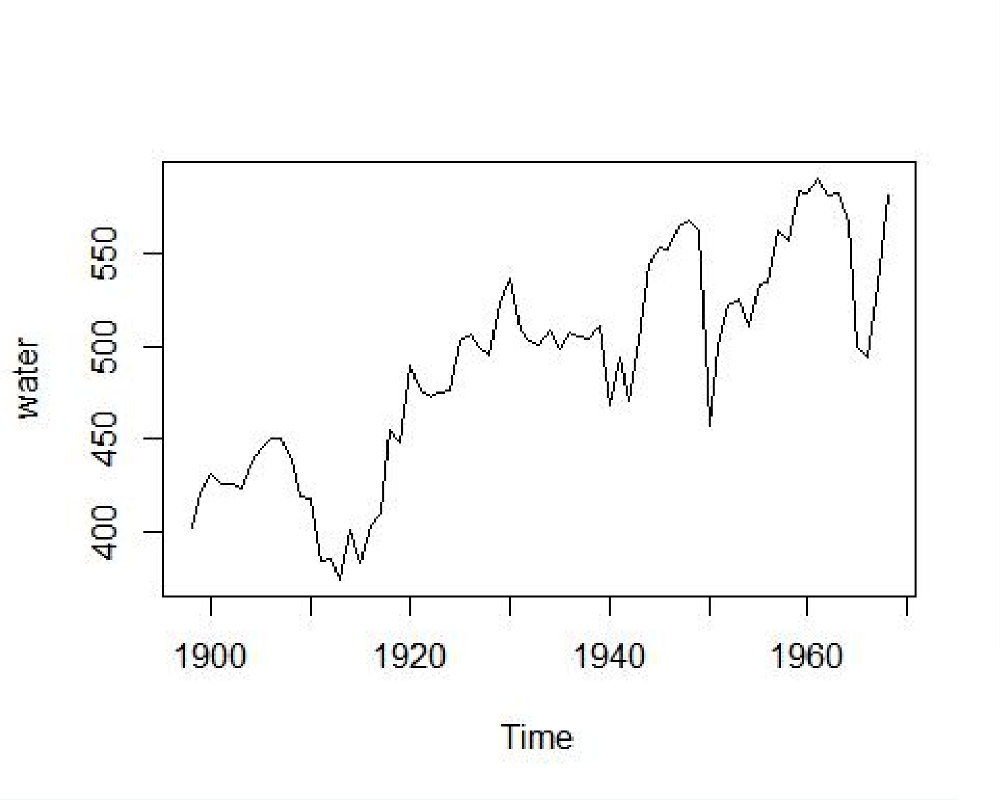
$$\hat{b}(t)=\beta\left[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)\right]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$$

- 使用Holt两参数指数平滑法，向前k期的预测值为

$$\hat{x}_{t+k}=\hat{a}(t)+\hat{b}(t)\cdot k$$

例4-5

- 对1898—1968年纽约市人均日用水量序列进行Holt两参数指数平滑，预测1969—1980年纽约市人均日用水量



例4-5

Smoothing parameters:

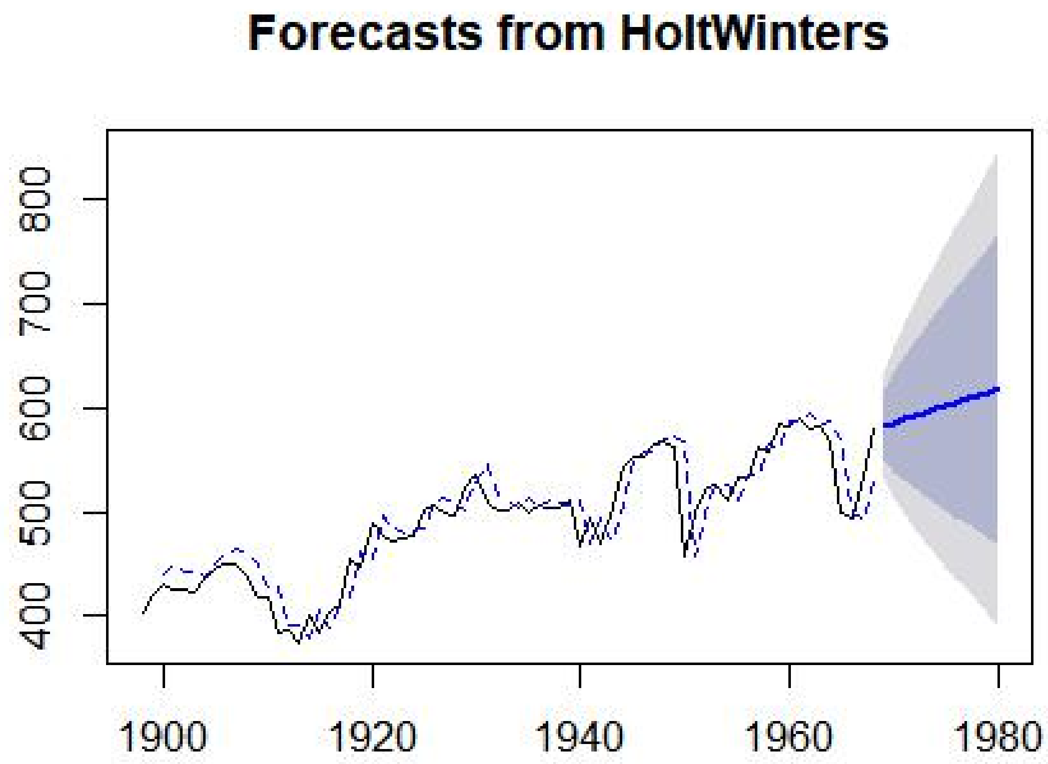
alpha: 0.9718144

beta : 0.06168602

gamma: FALSE

Coefficients:

	[,1]
a	579.7397
b	3.2201



Holt-Winters三参数指数平滑

- 为了预测带季节效应的序列，1960年Winters在Holt两参数指数平滑的基础上构造了Holt-Winters三参数指数平滑。
  - Holt-Winters三参数指数平滑加法模型
  - Holt-Winters三参数指数平滑乘法模型

Holt-Winters三参数指数平滑加法模型

- 对于季节加法模型，序列通常可以表达为如下模型结构

$$x_t = a_0 + bt + c_t + \varepsilon_t$$

$$c_t = S_j + e_t \quad , e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

- 等价表达

$$\begin{aligned} x_t &= a_0 + b(t-1) + b + c_t + \varepsilon_t \\ &= \left(x_{t-1} - c_{t-1} - \varepsilon_{t-1}\right) + (b + \varepsilon_t) + (Sd_j + e_t) \\ &= a(t) + b(t) + c(t) \end{aligned}$$

Holt-Winters三参数指数平滑加法模型

- Holt-Winters三参数指数平滑就是分别使用指数平滑的方法，迭代递推参数 $\hat{a}(t)$ ，$\hat{b}(t)$ 和 $\hat{c}(t)$ 的值，递推公式如下

$$\hat{a}(t)=\alpha\left(x_t-c\left(t-m\right)\right)+(1-\alpha)\left[\hat{a}\left(t-1\right)+\hat{b}(t-1)\right]$$

$$\hat{b}(t)=\beta\left[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)\right]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$$

$$\hat{c}(t)=\gamma\left[x_t-\hat{a}(t-m)\right]+(1-\gamma)c(t-m)$$

- 使用Holt-Winters三参数指数平滑加法公式，向前k期的预测值为

$$\hat{x}_{t+k}=\hat{a}(t)+\hat{b}(t)\cdot k+\hat{c}(t+\mathrm{mod}(k,m)-m)$$

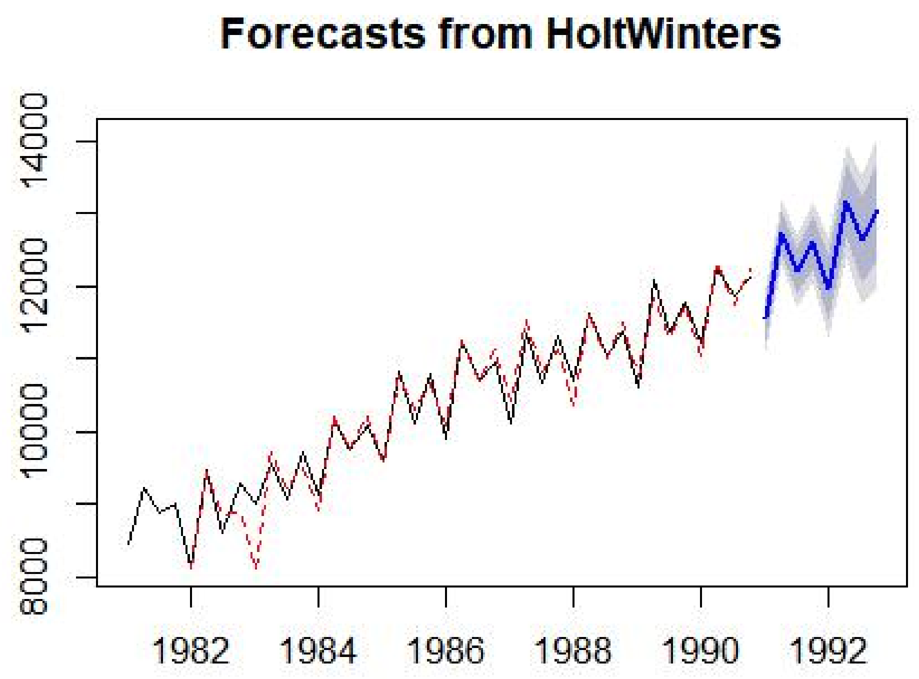
例4-1续

- 对1981—1990年澳大利亚政府季度消费支出序列，使用Holt-Winters三参数指数平滑法进行8期预测。

```
HoltWinters(x = x, seasonal = "additive")

Smoothing parameters:
 alpha: 0.143579
 beta : 1
 gamma: 0.2408436

Coefficients:
          [,1]
a    11973.62900
b      106.26456
s1    -529.30835
s2     558.59494
s3     -81.35719
s4     211.98349
```



Holt-Winters三参数指数平滑乘法模型

- Holt-Winters三参数指数平滑就是分别使用指数平滑的方法，迭代递推参数 $\hat{a}(t)$ ，$\hat{b}(t)$ 和 $\hat{c}(t)$ 的值，递推公式如下

$$\hat{a}(t)=\alpha\left(x_t-c\left(t-m\right)\right)+(1-\alpha)\left[\hat{a}\left(t-1\right)+\hat{b}(t-1)\right]$$

$$\hat{b}(t)=\beta\left[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)\right]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$$

$$\hat{c}(t)=\gamma\left[x_t-\hat{a}(t-m)\right]+(1-\gamma)c(t-m)$$

- 使用Holt-Winters三参数指数平滑加法公式，向前期的预测值为

$$\hat{x}_{t+k}=\hat{a}(t)+\hat{b}(t)\cdot k+\hat{c}(t+\mathrm{mod}(k,m)-m)$$

Holt-Winters三参数指数平滑乘法模型

- 对于季节加法模型，序列通常可以表达为如下模型结构

$$c_t = S_j + e_t \quad , e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

- 等价表达

$$\begin{aligned} x_t &= a_0 + b(t-1) + b + c_t + \varepsilon_t \\ &= \left(x_{t-1} - c_{t-1} - \varepsilon_{t-1}\right) + (b + \varepsilon_t) + (Sd_j + e_t) \\ &= a(t) + b(t) + c(t) \end{aligned}$$

Holt-Winters三参数指数平滑加法模型

- 对于季节加法模型，序列通常可以表达为如下模型结构

$$x_t = a_0 + bt + c_t + \varepsilon_t$$

$$c_t = S_j + e_t \quad , e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

- 等价表达

$$\begin{aligned} x_t &= \left[a_0 + b(t-1) + b + \varepsilon_t\right]c_t \\ &= \left[\left(x_{t-1}/c_{t-1} - \varepsilon_{t-1}\right) + \left(b + \varepsilon_t\right)\right](S_j + e_t) \\ &= \left[a(t) + b(t)\right]c(t) \end{aligned}$$

Holt-Winters三参数指数平滑乘法模型

- Holt-Winters三参数指数平滑乘法模型

$$\hat{a}(t)=\alpha\left(x_t/c(t-m)\right)+(1-\alpha)\left[\hat{a}(t-1)+\hat{b}(t-1)\right]$$

$$\hat{b}(t)=\beta[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$$

$$\hat{c}(t)=\gamma[x_t/\hat{a}(t-m)]+(1-\gamma)c(t-m)$$

- 使用Holt-Winters三参数指数平滑乘法公式，向前k期的预测值为

$$\hat{x}_{t+k}=\left[\hat{a}(t)+\hat{b}(t)\cdot k\right]\hat{c}(t+\mathrm{mod}(k,m)-m)$$

例4-2续

- 为1993-2000年中国社会消费品零售总额序列，使用Holt-Winters三参数指数平滑法进行12期预测。

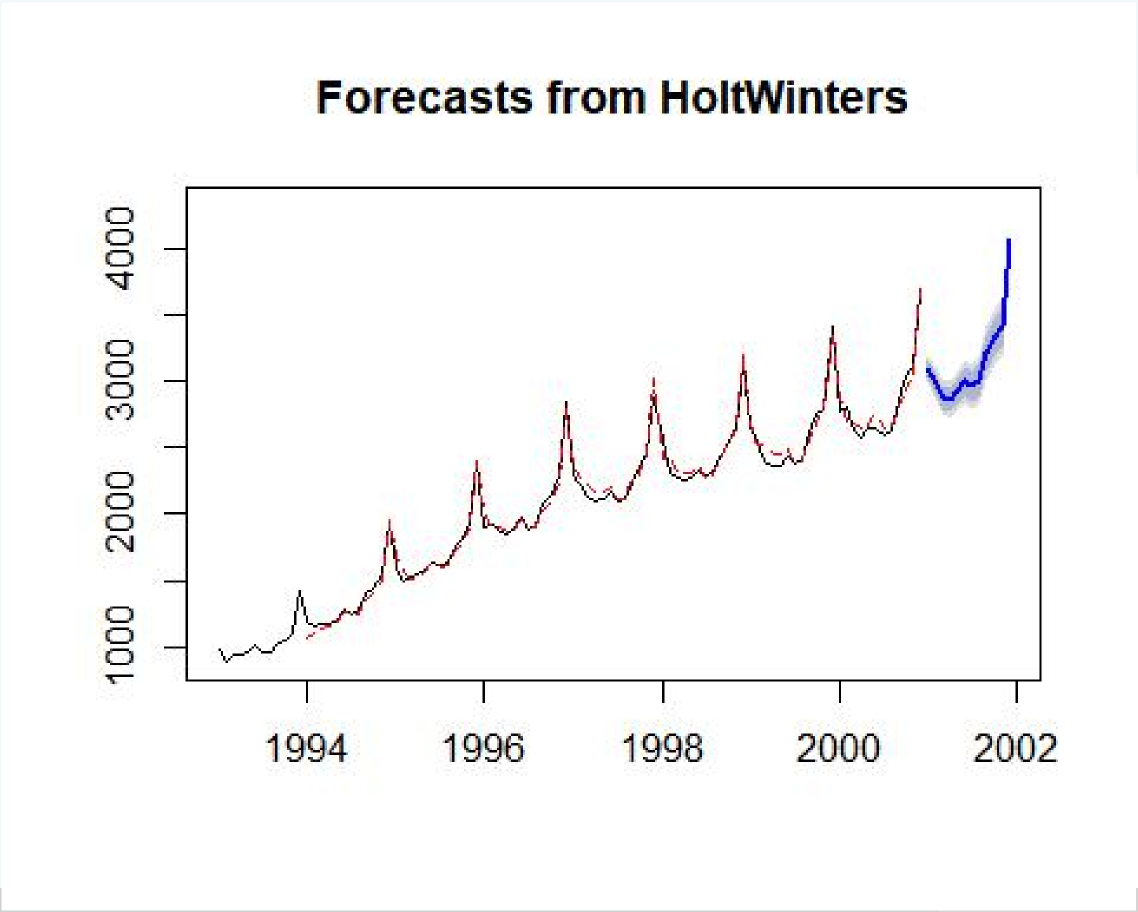
alpha: 0.5029647

beta : 0

gamma: 0.6709417

Coefficients:

	[,1]
a	2970.7763151
b	25.3040210
s1	1.0324548
s2	0.9961517
s3	0.9426316
s4	0.9293512
s5	0.9439815
s6	0.9604070
s7	0.9400179
s8	0.9444779
s9	1.0030107
s10	1.0344504
s11	1.0460739
s12	1.2411201



谢谢！

本章结构

1. 指数平滑预测
2. 确定性因素分解
3. X-12过程

指数平滑预测模型

- 确定性因素分析的第二个主要目的是根据序列呈现的确定性特征，选择适当的模型，预测序列未来的发展。根据序列是否具有长期趋势与季节效应，可以把序列分为如下三大类：

第一类：既没有长期趋势，也没有季节效应的序列

第二类：只有长期趋势，没有季节效应的序列

第三类：有季节效应的序列

- 在确定性因素分解领域，针对这三类序列，可以采用三种不同的指数平滑模型进行序列预测。

<table>
<tr><th>预测模型选择</th><th>长期趋势</th><th>季节效应</th></tr>
<tr><td>简单指数平滑</td><td>无</td><td>无</td></tr>
<tr><td>Holt 两参数指数平滑</td><td>有</td><td>无</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Holt-Winters 三参数指数平滑</td><td>无</td><td rowspan="2">有</td></tr>
<tr><td>有</td></tr>
</table>

简单移动平均

- 对于既无长期趋势，又无季节效应的水平平稳序列，可以认为序列在一个比较短的时间间隔内，序列的取值是比较稳定的，序列值之间的差异主要是由随机波动造成的。根据这种假定，我们可以用最近一段时间内的平均值作为未来几期的预测值，该方法称为简单移动平均预测法。
- 假定最后一期的观察值为 x_t ，那么使用简单移动平均模型，向前预测 l 期，各期的预测值为

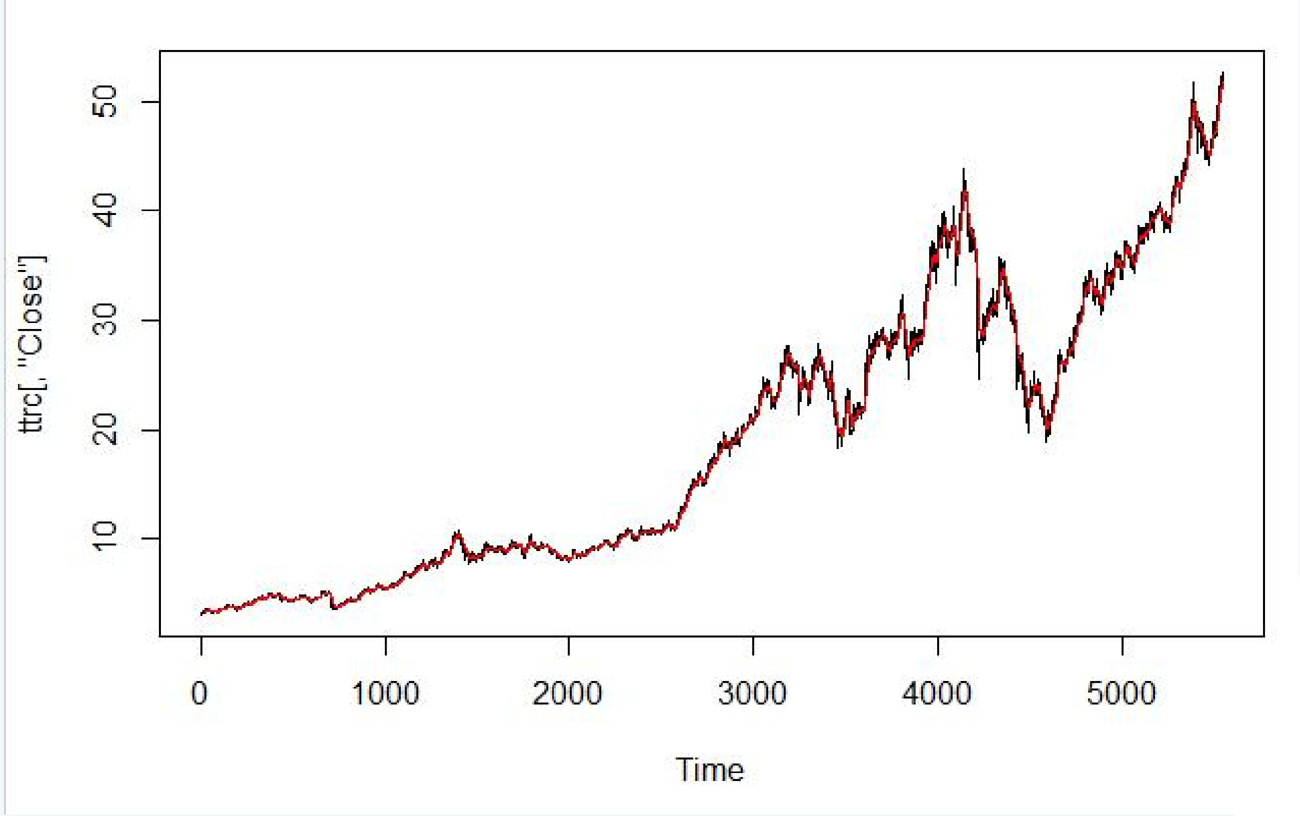
$$\hat{x}_{t+1} = \frac{x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-n+1}}{n}$$

$$\hat{x}_{t+2} = \frac{\hat{x}_{t+1} + x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-n+2}}{n}$$

$$\hat{x}_{t+l} = \frac{\hat{x}_{t+l-1} + \cdots + \hat{x}_{t+1} + x_t + \cdots + x_{t-n+l}}{n}$$

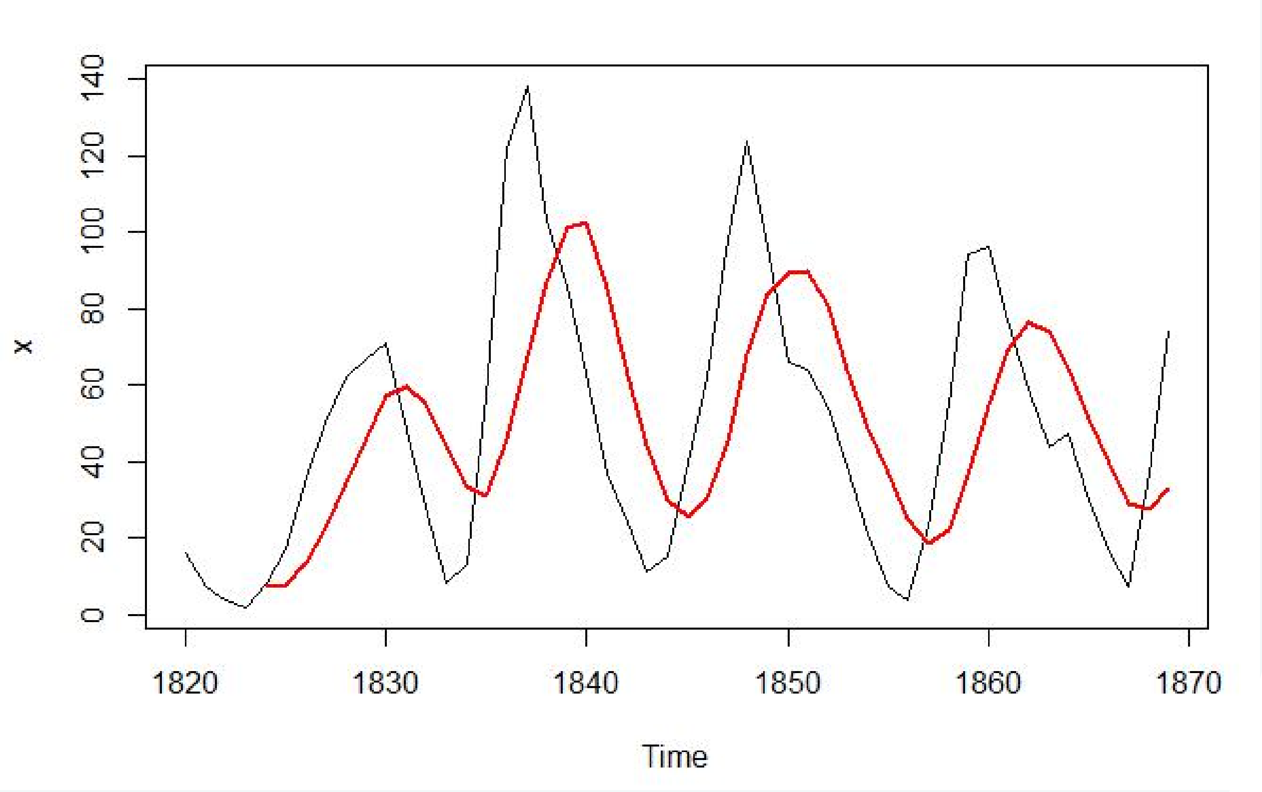
例5.1：简单移动平均在股票交易市场的应用

- TTR包有一个内置文件ttrc,是随机生成的1985-2006年股票市场的开盘价，收盘价，最高价，最低价，成交量等信息。使用简单移动平均拟合股票收盘价变动趋势，并考察简单移动平均拟合趋势序列的滞后性



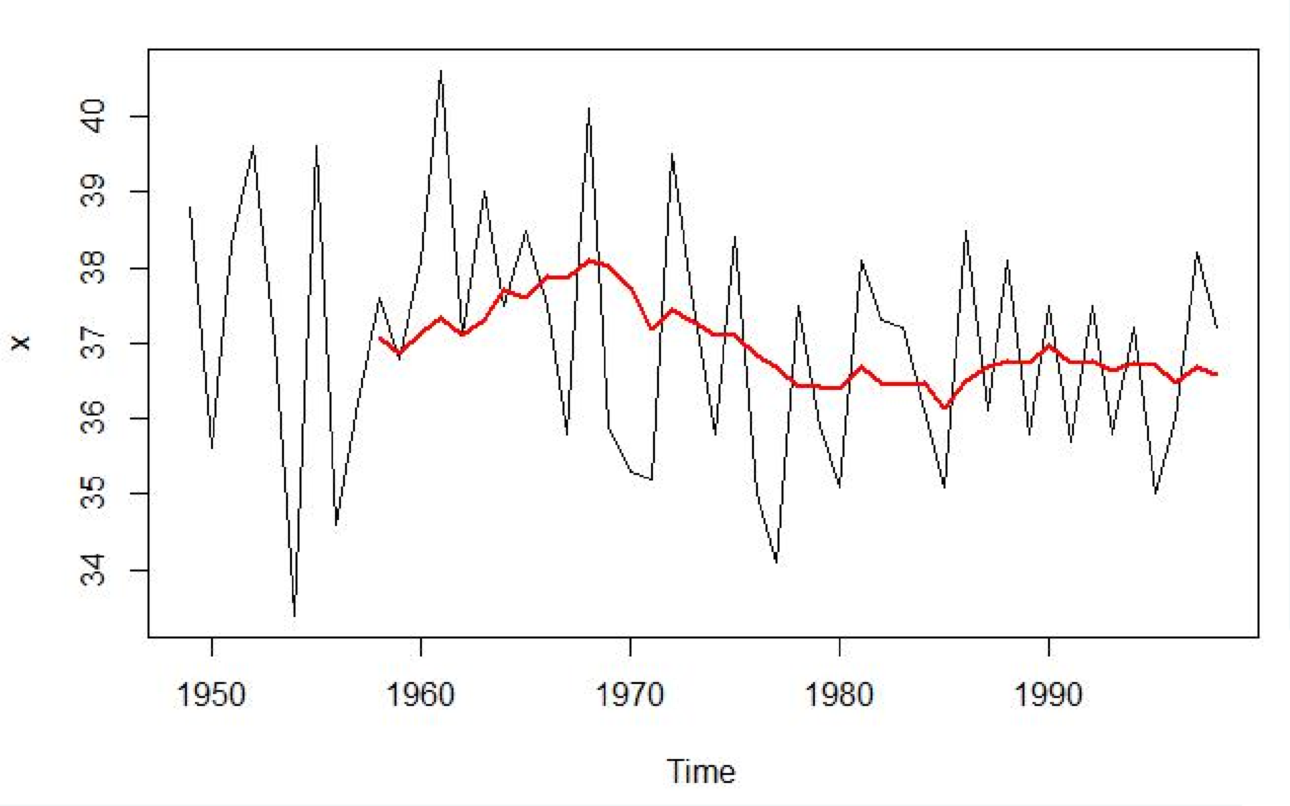
例5.2：考察简单移动平均的滞后性

- 以太阳黑子序列为例，考察周期序列使用简单移动平均的滞后性



例5.3：考察简单移动平均的滞后性

❖ 以北京市年度最高气温序列为例，考察平稳序列使用简单移动平均的滞后性



简单指数平滑预测模型

- 简单移动平均法实际上就是用一个简单的加权平均数作为某一期序列值的估计值。实际上也就是假定无论时间的远近，这n期的观察值对预测值的影响力都是一样的。但在实际生活中，我们会发现对大多数随机事件而言，一般都是近期的结果对现在的影响会大些，远期的结果对现在的影响会小些。为了更好地反映这种时间所起的影响作用，我们将考虑到时间间隔对事件发展的影响，各期权重随时间间隔的增大而呈指数衰减。这就是1961年Brown和Meyers提出指数平滑法的构造思想。
- 简单指数平滑模型

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-3} + \cdots$$

- 等价模型

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-3} + \cdots \\ &= \alpha x_t + (1-\alpha)\left[\alpha x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-3} + \cdots\right] \\ &= \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_t\end{aligned}$$

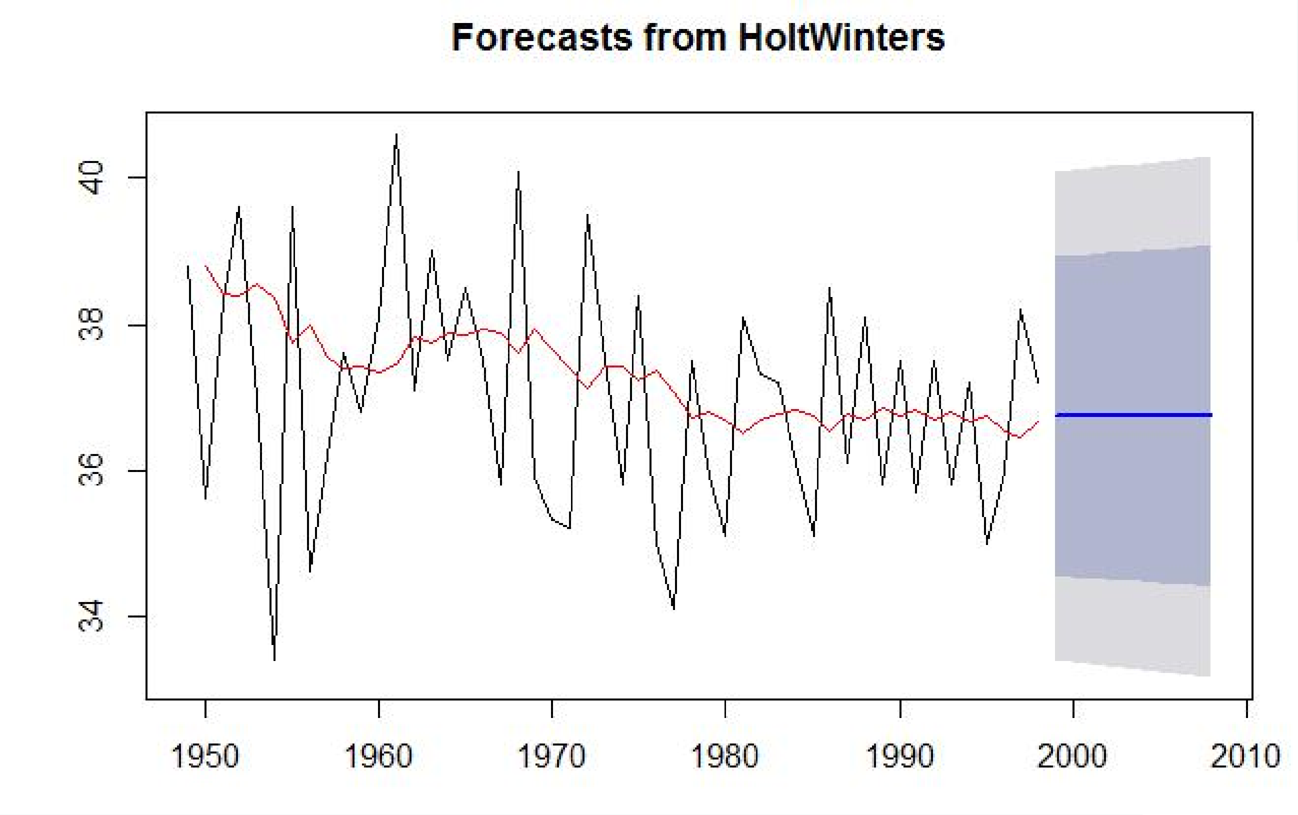
简单指数平滑

- 简单指数平滑面临一个确定初始值的问题。我们有许多方法可以确定的初始值，最简单的方法是指定 $\hat{x}_1 = x_1$。
- 平滑系数 α 的值最初由研究人员根据经验给出。一般对于变化缓慢的序列，α 常取较小的值，相反对于变化迅速的序列，α 常取较大的值。经验值通常介于0.05至0.3之间。
- 从理论上我们可以证明使用简单指数平滑法预测任意期的预测值都为常数。

$$\hat{x}_{t+l} = \alpha \hat{x}_{t+l-1} + (1-\alpha)\hat{x}_{t+l-1} = \hat{x}_{t+1} \quad ,l \geq 2$$

例5.4

- 以北京市年度最高气温序列为例，进行简单指数平滑拟合及预测



Holt两参数指数平滑

- Holt 两参数指数平滑适用于对含有线性趋势的序列进行修匀。它的基本思想是假定序列有一个比较固定的线性趋势——每期都递增r或递减r，那么第t期的估计值就应该等于第t-1期的观察值加上每期固定的趋势变动值，即

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r$$

- 但是由于随机因素的影响，使得每期的递增或递减值不会恒定为r，它会随时间变化上下波动，所以趋势序列实际上是一个随机序列,因而

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r_{t-1}$$

Holt两参数指数平滑

- Holt两参数指数平滑公式

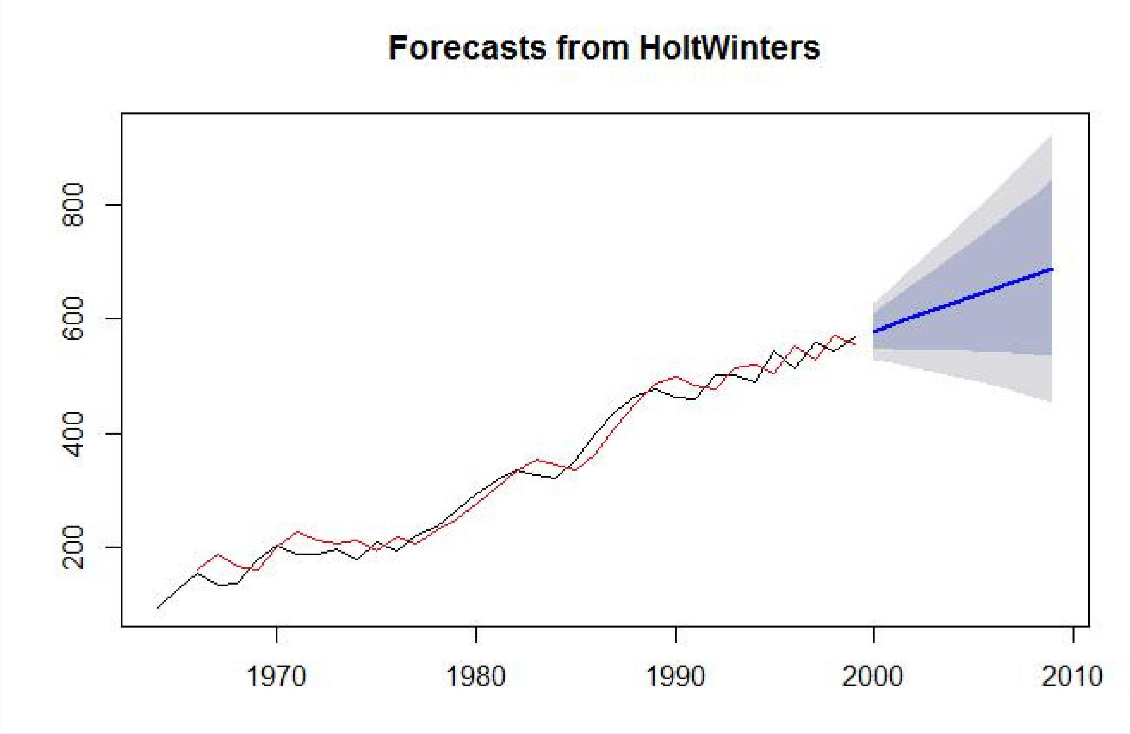
$$\begin{cases}\hat{x}_{t+1}=\alpha x_t+(1-\alpha)(x_{t-1}+r_{t-1})\\ \hat{r}_t=\beta(\hat{x}_{t+1}-\hat{x}_t)+(1-\beta)r_{t-1}\end{cases}$$

- 平滑序列的初始值，最简单的是指定 $\hat{x}_1=x_1$ 。
- 趋势序列的初始值，最简单的方法是：任意指定一个区间长度,用这段区间的平均趋势作为趋势初始值 $r_0=\frac{x_{n+1}-x_1}{n}$
- 使用Holt 两参数指数平滑法，向前 l 期的预测值为

$$\hat{x}_{t+l}=\hat{x}_{t+1}+l\hat{r}_t$$

例5.5

❖ 对1964—1999年中国纱年产量序列（file4）进行Holt 两参数指数平滑，并预测2000—2015年中国纱产量序列值



Holt-Winters三参数指数平滑

- 为了修匀引入季节效应的序列，Winters在Holt两参数指数平滑的基础上构造了Holt-Winters三参数指数平滑。
- Holt-Winters三参数指数平滑公式（加法模型）

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha(x_t - s_{t-\pi}) + (1-\alpha)(x_{t-1} + r_{t-1})$$

$$\hat{r}_t = \beta(\hat{x}_{t+1} - \hat{x}_{t-\pi}) + (1-\beta)r_{t-1}$$

$$\hat{s}_t = \gamma(x_t - \hat{x}_{t+1}) + (1-\gamma)s_{t-\pi}$$

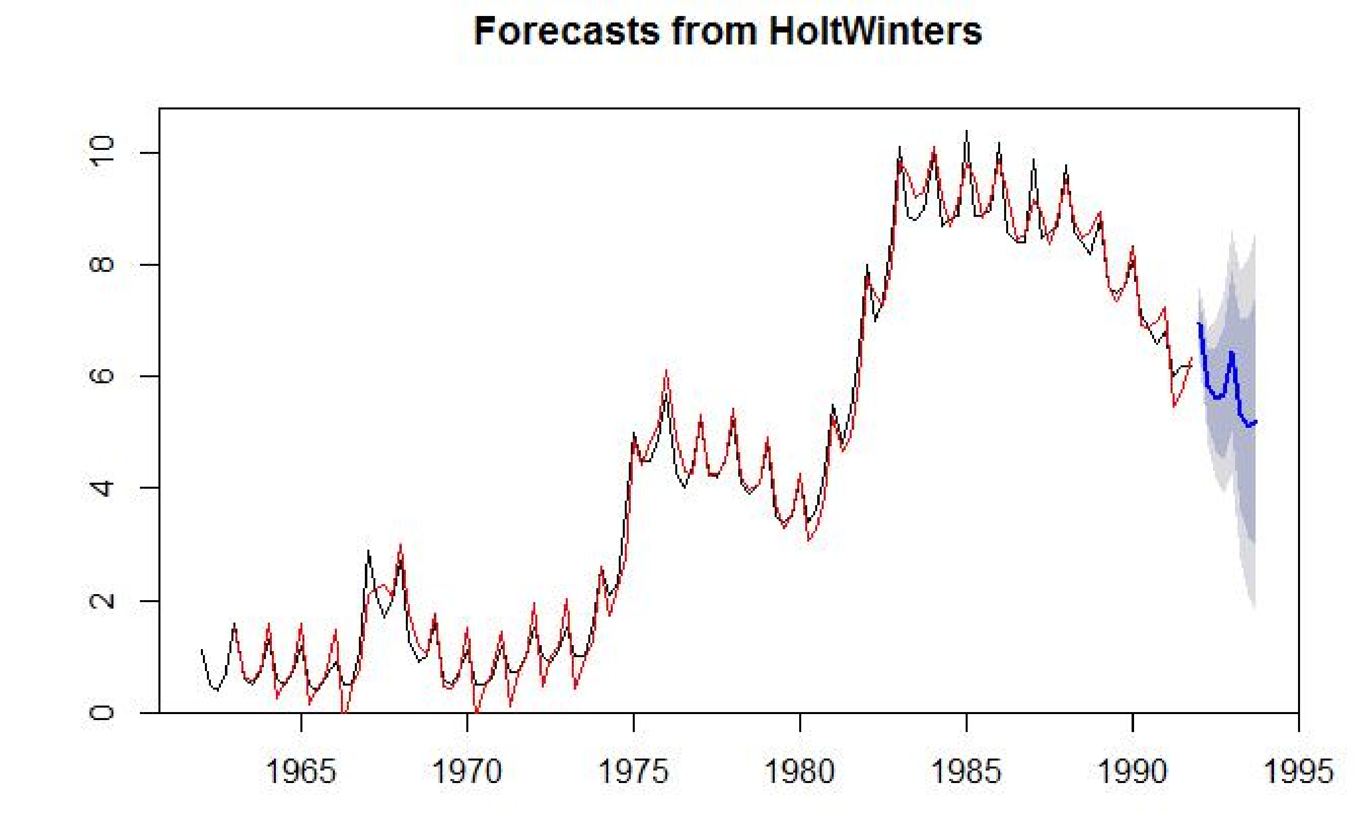
Holt-Winters三参数指数平滑

- Holt-Winters三参数指数平滑公式（乘法模型）

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha(x_t / s_{t-\pi}) + (1-\alpha)(x_{t-1} + r_{t-1})$$
$$\hat{r}_t = \beta(\hat{x}_{t+1} - \hat{x}_{t-\pi}) + (1-\beta) r_{t-1}$$
$$\hat{s}_t = \gamma(x_t / \hat{x}_{t+1}) + (1-\gamma) s_{t-\pi}$$

例5.6

❖ 以德国工人季度失业率为例，使用Holt-Winters平滑进行序列拟合与预测



本章结构

1. 指数平滑预测
2. 确定性因素分解
3. X-12过程

确定性因素分解

- 因素分解方法（Time Series Decomposition）由英国统计学家W.M. Persons于1919年在他的论文“商业环境的指标（Indices of Business Conditions）”一文中首次使用。
- 因素分解方法认为所有的序列波动都可以归纳为受到如下四大类因素的综合影响：
  - 长期趋势（Trend）。序列呈现出明显的长期递增或递减的变化趋势。
  - 循环波动（Circle）。序列呈现出从低到高再由高到低的反复循环波动。循环周期可长可短，不一定是固定的。
  - 季节性变化（Season）。序列呈现出和季节变化相关的稳定周期波动。
  - 随机波动(Immediate)。除了长期趋势、循环波动和季节性变化之外，其他不能用确定性因素解释的序列波动，都属于随机波动。

确定性时序分析的目的

- 一是克服其他因素的干扰，单纯测度出某个确定性因素（诸如季节，趋势，交易日）对序列的影响。

- 二是根据序列呈现的确定性特征，选择适当的方法对序列进行综合预测。

因素分解模型

- 统计学家在进行确定性时间序列分析时，假定序列会受到这四个因素中的全部或部分的影响，导致序列呈现出不同的波动特征。换言之，任何一个时间序列都可以用这四个因素的某个函数进行拟合 $x_t = f(T_t, C_t, S_t, I_t)$
- 常用模型
  - 加法模型：

$$x_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

  - 乘法模型：

$$x_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$$

因素分解模型遇到的问题

- 如果观察时期不是足够长，那么循环因素和趋势因素的影响很难准确区分。
  - 比如很多经济或社会现象确实有“上行——峰顶——下行——谷底”周而复始的循环周期。但是这个周期通常很长而且周期长度不是固定的。比如前面提到的太阳黑子序列，就有9-13年长度不等的周期。
  - 在经济学领域更是如此。1913年美国经济学家韦斯利.米歇尔出版了《经济周期》一书，他提出经济周期的持续时间从超过1年到10年或12年不等，它们会重复发生，但不定期。
  - 后来不同的经济学家研究不同的经济问题，一再证明经济周期的存在和周期的不确定，比如基钦周期（平均周期长度为40个月左右），朱格拉周期（平均周期长度为10年左右），库兹涅茨周期）平均长度为20年左右），康德拉季耶夫周期（平均周期长度为53.3年）。如果观察值序列不是足够长，没有包含几个周期的话，那么周期的一部分会和趋势重合，无法准确完整地提取周期影响。

因素分解遇到的问题

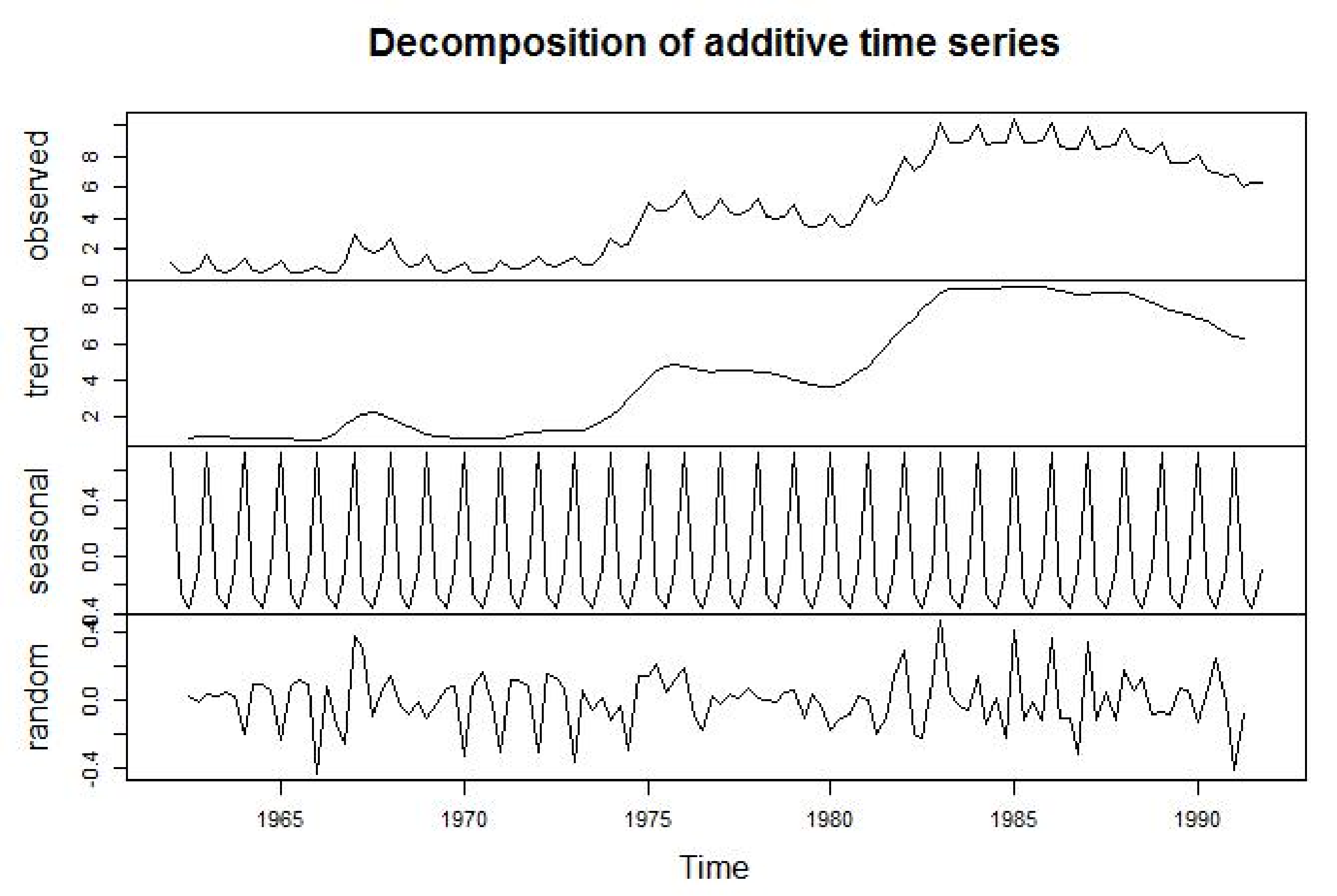
- 有些社会现象和经济现象显示出某些特殊日期是一个很显著的影响因素，但是在传统因素分解模型中，它却没有被纳入研究。
  - 比如研究股票交易序列，成交量、开盘价、收盘价会明显受到交易日的影响，同一只股票每周一和每周五的波动情况可能有显著的不同。
  - 超市销售情况更是明显受到特殊日期的影响，工作日、周末、重大假日的销售特征相差很大。
  - 春节、端午节、中秋节、儿童节、圣诞节等不同的节日对零售业、旅游业、运输业等多个行业都有显著影响。

因素分解改进模型

- 如果观察时期不是足够长，人们将循环因素（Circle）改为特殊交易日因素（Day）。新的四大因素为：趋势（T），季节（S），交易日（D）和随机波动（I）。
  - 加法模型：$x_t = T_t + S_t + D_t + I_t$
  - 乘法模型：$x_t = T_t \times S_t \times D_t \times I_t$
  - 伪加法模型：$x_t = T_t \times \left(S_t + D_t + I_t - 1 \right)$
  - 对数加法模型：$\log x_t = \log T_t + \log S_t + \log D_t + \log I_t$

例5.7

❖德国工人失业率序列确定性因素分解。



本章结构

1. 指数平滑预测
2. 确定性因素分解
3. X-12过程

X-12季节调整模型

- X12模型是二战以后，美国国情普查局委托统计学家进行基于计算机自动计算的时间序列因素分解模型。这个模型之所以叫季节调整模型，是因为国家经济序列通常具有明显的季节波动，季节性会遮盖或扰乱人们对经济发展趋势的正确判断。因此，在进行国家经济发展观察和研究时，首先需要进行因素分解，然后剔除季节波动的影响，得到国家经济发展变量的趋势特征，这就是季节调整模型的构造起因。
- 1954年，第一个基于计算机计算的时间序列因素分解程序的测试版本问世，随后经过十多年的发展，不断完善计算方法，陆续推出新的测试版本X-1，…，X-10。1965年，美国国情普查局颁布了比较完整的测试版本X-11。该版本由统计学家Shiskin，Young和Musgrave共同研发，它采用三种不同的移动平均方法，通过三个阶段的因素分解，实现了计算机程序化操作，拟合效果良好的时间序列季节调整程序。从此以后，X-11季节调整模型成为全球统计机构和商业机构进行因素分解时最爱使用的标准方法。
- 后来加拿大统计局开发了X-11-ARIMA模型，美国又开发了X-12与X-12-ARIMA模型，但它们的核心依然是X-11。

移动平均方法

- x12的核心拟合方法是移动平均方法
- 移动平均方法是一种常用的修匀方法。它最早于1870年由法国数学家De Forest提出，19世纪晚期已经广泛应用于商业和保险精算行业。商人使用移动平均方法，消除随机波动和季节性影响，得到商品的价格变动趋势。精算师采用移动平均方法来修匀死亡率，得到消除随机波动的生命表。现在股市中普遍采用的5日均线，10日均线，30日均线，60日均线等指标，实际上都是移动平均估计值。
- $M(x_t)$称为序列 x_t 的 $k+f+1$期移动平均函数

$$M(x_t)=\sum_{i=-k}^{f}\theta_i x_{t-i} \qquad \forall k,f>0$$

θ_i 称为移动平均系数或移动平均算子

X-12中用到的移动平均方法

- 对移动平均系数增加不同的约束条件，就可以得到不同的移动平均方法。在X-11程序中使用了如下三种移动平均方法，以实现对各种序列的准确分解
  - 简单中心移动平均
  - Henderson加权移动平均
  - Musgrave非对称移动平均

简单中心移动平均

❖ 对移动平均函数增加系数相等且系数和为1的约束条件，该移动平均称为n期简单移动平均

$$M(x_t)=\sum_{i=-k}^{n-k-1}\frac{1}{n}x_{t-i}$$

❖ 如果再增加一个约束条件，要求系数对称 $\theta_{-i}=\theta_i$ ，该移动平均称为n期简单中心移动平均

$$M(x_t)=\sum_{i=-\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{n}x_{t-i}$$

简单中心移动平均

- 奇数期$n=2k+1$简单中心移动平均

$$M(x_t)=\sum_{i=-k}^{k}\frac{1}{n}x_{t-i}$$

- 偶数期$n=2k$ 简单中心移动平均：需要进行两次偶数期的简单移动平均，才能实现系数中心化对称。两次移动平均称为复合移动平均，简记为$M_{P\times Q}(x_t)$

例：$M_5(x_t)=\sum_{i=-2}^{2}\frac{1}{5}x_{t-i}=\frac{x_{t-2}+x_{t-1}+x_t+x_{t+1}+x_{t+2}}{5}$

例：$$\begin{aligned}M_{2\times 4}(x_t)&=\frac{1}{2}M_4(x_t)+\frac{1}{2}M_4(x_{t+1})\\&=\frac{1}{2}\frac{x_{t-2}+x_{t-1}+x_t+x_{t+1}}{4}+\frac{1}{2}\frac{x_{t-1}+x_t+x_{t+1}+x_{t+2}}{4}\\&=\frac{1}{8}x_{t-2}+\frac{2}{8}x_{t-1}+\frac{2}{8}x_t+\frac{2}{8}x_{t+1}+\frac{1}{8}x_{t+2}\end{aligned}$$

简单中心移动平均的优良属性

- 简单中心移动平均是X-12模型首先采用的移动平均方法，它具有如下四个优良属性
  - 简单中心移动平均能有效消除季节效应
  - 简单中心移动平均能有效提取低阶趋势
  - 简单中心移动平均能实现拟合方差最小
  - 简单移动平均比值能有效提取季节效应

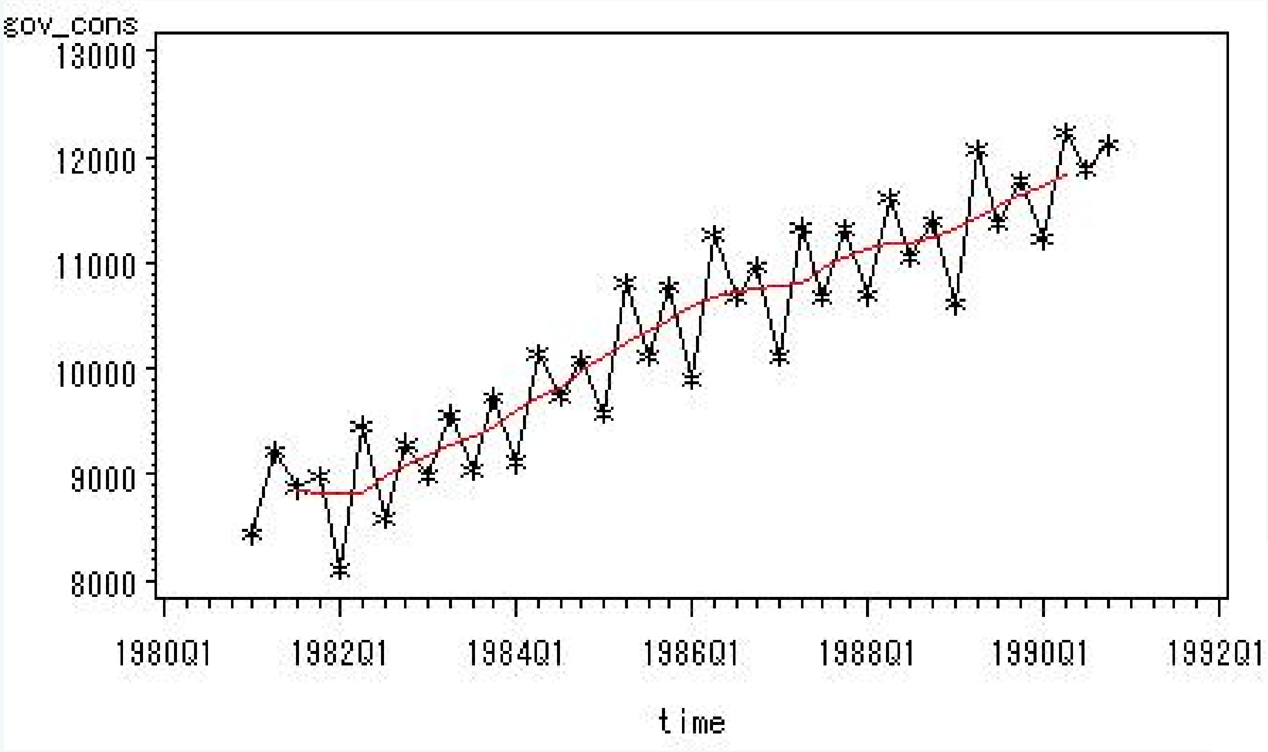
简单中心移动平均能有效消除季节效应

- 对于有稳定季节周期的序列进行周期长度的移动平均可以消除季节波动。
- 例：1981-1990年澳大利亚政府季度消费支出序列，原序列为季度数据，有显著的季节特征，每年为一个周期，即周期长度为4期。对原序列先进行4期简单移动平均，再对序列进行两期移动平均，得到复合移动平均值 $M_{2\times4}(x_t)$

表 4-1 1981-1990 年澳大利亚政府季度消费支出 $M_{2\times4}(x_t)$ 计算过程

时间	消费支出	$M_4(x_t)$	$M_{2\times4}(x_t)$
1981Q1	8444.00	-	-
1981Q2	9215.00	-	-
1981Q3	8879.00	8882.00	8840.88
1981Q4	8990.00	8799.75	8830.00
1982Q1	8115.00	8860.25	8824.13
1982Q2	9457.00	8788.00	8826.00

平滑效果图



gov_cons
13000
12000
11000
10000
9000
8000
1980Q1
1982Q1
1984Q1
1986Q1
1988Q1
1990Q1
1992Q1
time

简单中心移动平均能有效提取低阶趋势

- 假如序列有线性趋势，即

$$x_t = a + bt + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

- 那么它的2k+1期中心移动平均函数为

$$\begin{aligned} M(x_t) &= \sum_{i=-k}^{k} \theta_i x_{t-i} \\ &= \sum_{i=-k}^{k} \theta_i \left[a + b(t-i) + \varepsilon_{t-i} \right] \\ &= a \sum_{i=-k}^{k} \theta_i + bt \sum_{i=-k}^{k} \theta_i - b \sum_{i=-k}^{k} i\theta_i + \sum_{i=-k}^{k} \theta_i \varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

参数约束

- 我们希望一个好的移动平均能尽量消除随机波动的影响，还能维持线性趋势不变，即

$$E\left[M\left(x_t\right)\right]=E(x_t) \quad \Rightarrow \quad a\sum_{i=-k}^{k}\theta_i+bt\sum_{i=-k}^{k}\theta_i-b\sum_{i=-k}^{k}i\theta_i=a+bt$$

- 推导出移动平均系数要满足如下条件

$$\begin{cases}\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1\\ \sum_{i=-k}^{k}i\theta_i=0\end{cases}$$

- 简单中心移动平均系数取值对称且系数总和为1，必然满足如上两个约束条件，所以简单中心移动平均函数能保持线性趋势不变。

简单中心移动平滑对二阶趋势的提取

- 对于一元二次函数 $x_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$， 简单中心移动平均也可以充分提取二阶趋势信息

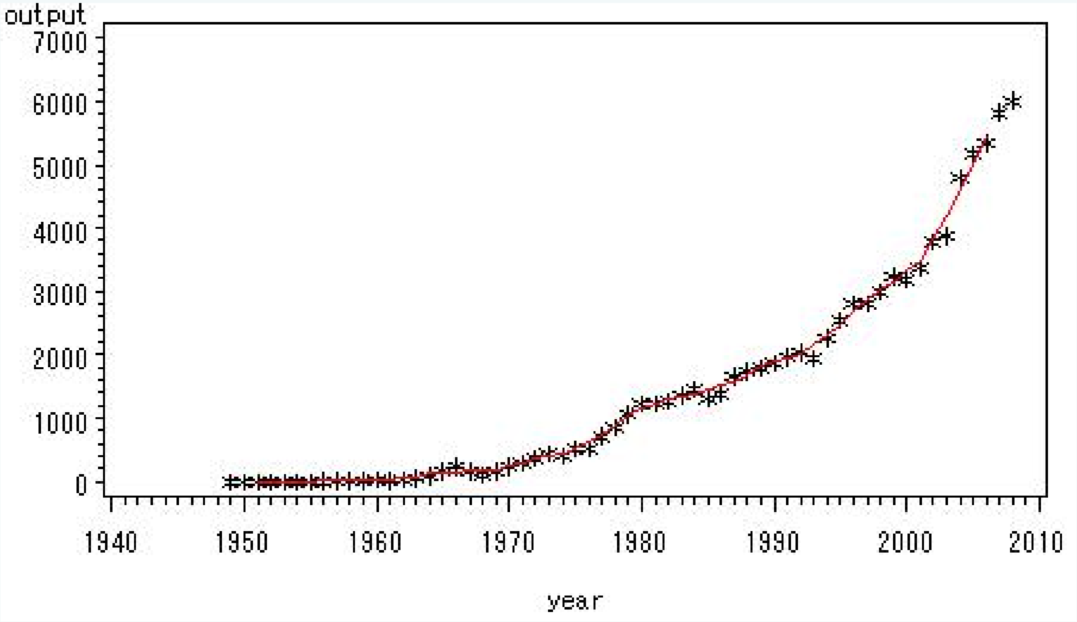
$$
\begin{aligned}
M(x_t) &= \frac{1}{2k+1}\sum_{i=-k}^{k} x_{t-i} \\
&= \frac{1}{2k+1}\sum_{i=-k}^{k}\left[a + b(t-i) + c(t-i)^2 + \varepsilon_{t-i}\right] \\
&= a + bt + ct^2 + c\frac{k(k+1)}{3} + \frac{1}{2k+1}\sum_{i=-k}^{k}\varepsilon_{t-i}
\end{aligned}
$$

- 但此时 $M(x_t)$不再是一元二次函数的无偏估计了

$$E(error_t) = E\left[x_t - M(x_t)\right] = \frac{ck(k+1)}{3}$$

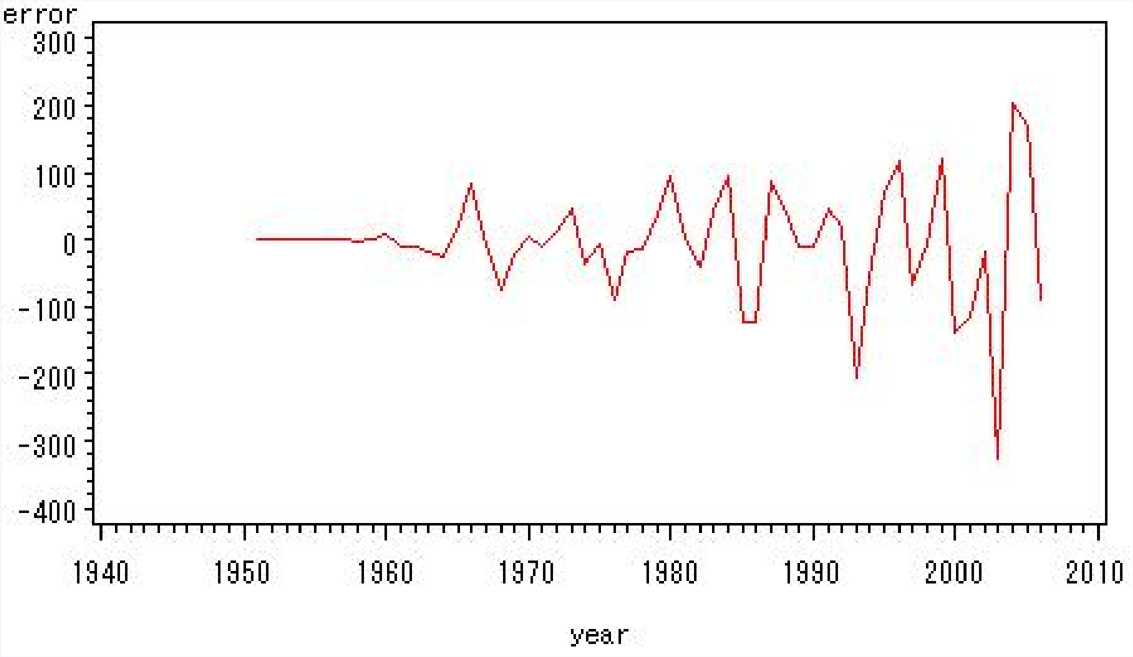
例5.8

- 我国1949-2008年化肥产量序列呈现出二次函数特征，使用五期简单中心移动平均对序列进行拟合，拟合效果图如下图所示



例5.8残差序列

- 误差序列是一个均值为-6.38821的无趋势特征序列



简单中心移动平均能实现拟合方差最小

❖ 移动平均估计值的方差为

$$Var\left[M\left(x_t\right)\right]=\mathrm{Var}\left[\sum_{i=-k}^{k}\theta_i\varepsilon_{t-i}\right]=\sum_{i=-k}^{k}\theta_i^2\sigma^2$$

❖ 因为 $\theta_i\geq 0$，且 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$ ，所以 $0\leq\theta_i\leq 1$

❖ 推导出拟合序列方差小于原序列方差

$$\sum_{i=-k}^{k}\theta_i^2\sigma^2\leq\sigma^2$$

❖ 在 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$，且 $\sum_{i=-k}^{k}i\theta_i=0$ 的约束下，使 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i^2$ 达到最小的系数值能实现方差最小，且移动平均期数越多，方差越小，修匀效果越好。

简单移动平均比值能有效提取季节效应

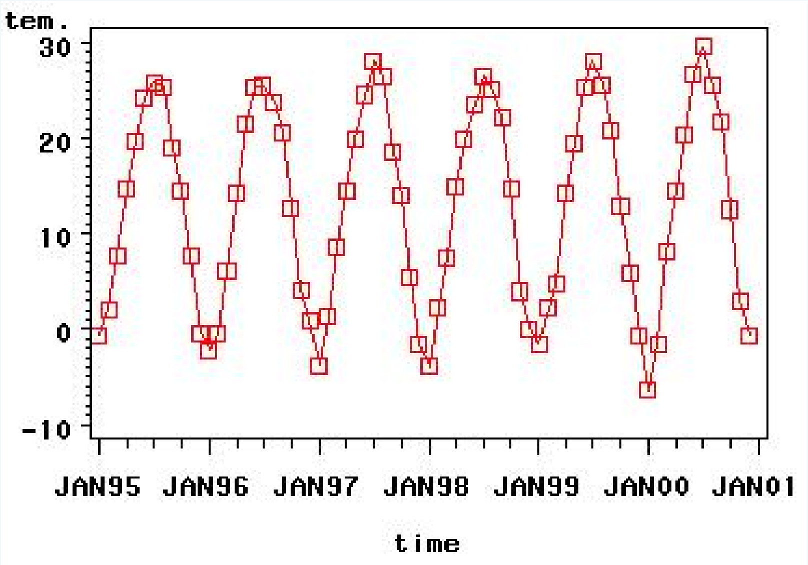
- 在日常生活中，我们可以见到许多有季节效应的时间序列，比如：四季的气温、每个月的商品零售额、某自然景点每季度的旅游人数等等。它们都会呈现出明显的季节变动规律。

- 季节效应的提取是确定性因素分析的重要工作之一。

例5.9

- 以北京市1995年——2000年月平均气温序列为例，介绍季节效应分析的基本思想和具体操作步骤。

(1)绘制时序图



例5.9

（2）构造季节偏差或季节指数模型

- 季节偏差就是用简单移动平均方法计算的各期序列移动平均值和年度均值之间的差值，主要应用于加法模型的季节特征描述，此时序列可以表示为

$$x_j = \bar{x}_j + Sd_j + I_j$$

- 所谓季节指数就是各期序列移动平均值和年度均值之间的相对数。主要应用于乘法模型的季节性特征描述，此时序列可以表示为

$$x_j = x_j S_j + I_j$$

季节效应的计算

- 第一步：对原序列使用短期复合移动平均计算当期移动平均估计值，消除随机因素对当期序列值得影响

$$\hat{x}_j = M_{P\times Q}$$

- 对短期复合移动平均序列使用周期复合移动平均计算当期移动平均估计值，消除周期效应对当期序列值得影响，m为周期长度

$$\hat{\hat{x}}_j = M_{2\times m}$$

- 加法模型计算季节偏差，乘法模型计算季节指数

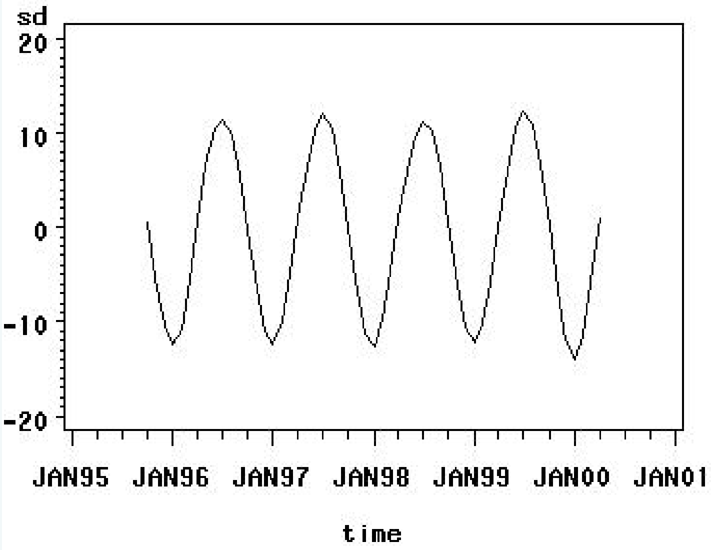
$$Sd_j = \hat{x}_j - \hat{\hat{x}}_j \qquad S_j = \frac{\hat{x}_j}{\hat{\hat{x}}_j}$$

例5.9

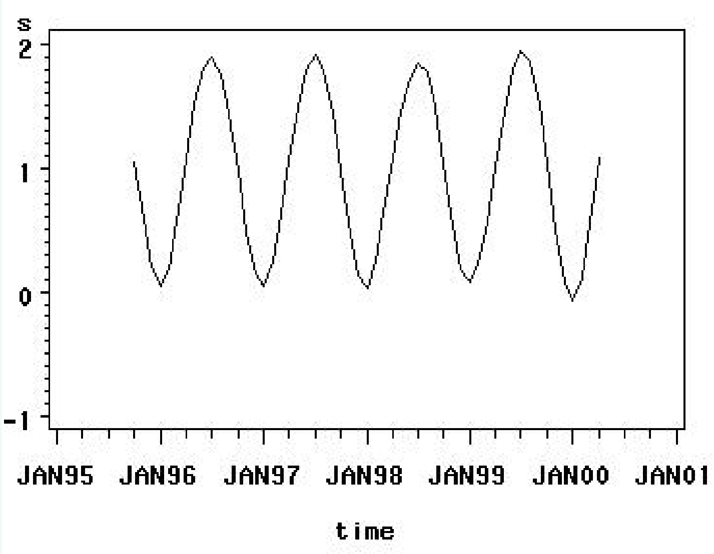
时间	x_j	$\hat{x}_j = M_{3\times3}$	$\hat{\hat{x}}_j = M_{2\times12}$	$Sd_j = \hat{x}_j - \hat{\hat{x}}_j$	$S_j = \frac{\hat{x}_j}{\hat{\hat{x}}_j}$
1995 年 1 月	-0.7	-	-	-	-
1995 年 2 月	2.1	-	-	-	-
1995 年 3 月	7.7	8.4222	-	-	-
1995 年 4 月	14.7	13.9444	-	-	-
1995 年 5 月	19.8	19.0000	-	-	-
1995 年 6 月	24.3	22.7111	-	-	-
1995 年 7 月	25.9	23.9889	-	-	-
1995 年 8 月	25.4	22.7556	-	-	-
1995 年 9 月	19	18.9333	12.9917	-	-
1995 年 10 月	14.5	13.5444	12.9361	0.6083	1.0470
1995 年 11 月	7.7	7.5667	12.9495	-5.3829	0.5843
1995 年 12 月	-0.4	2.6556	12.9917	-10.3361	0.2044
1996 年 1 月	-2.2	0.6333	13.0181	-12.3847	0.0487
1996 年 2 月	-0.4	2.3000	13.0134	-10.7134	0.1767
1996 年 3 月	6.2	7.3111	12.9778	-5.6667	0.5634

例5.9

- 季节偏差图



- 季节指数图

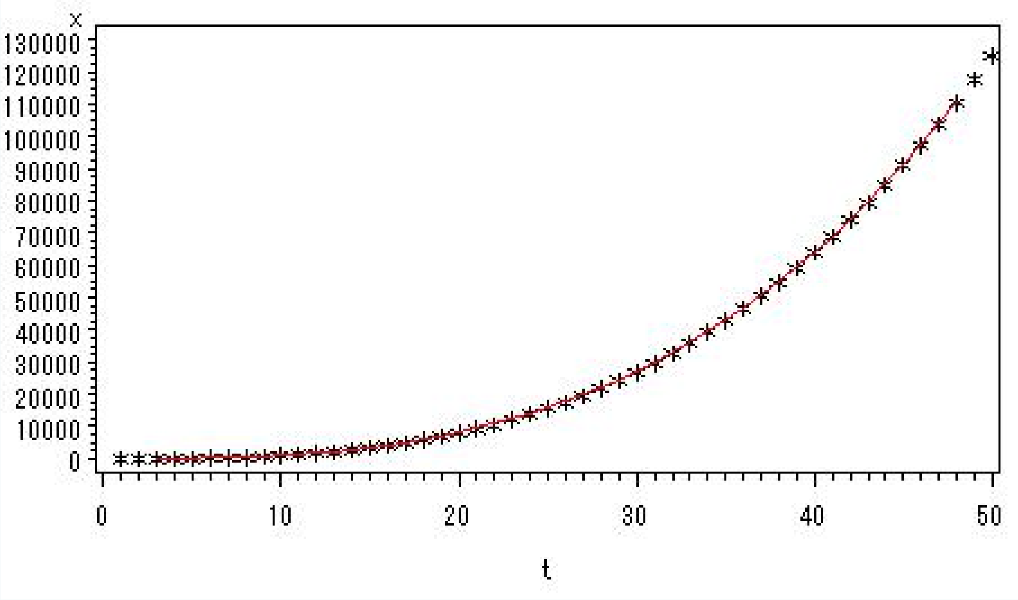


Henderson加权移动平均

- 简单中心移动平均具有很多优良属性，使它成为实务中最常用的一种移动平均方法，但是它也有不足。在提取趋势信息的时候，它能很好地提取一次函数和二次函数的信息，但是对于2次以上曲线，它的趋势信息提取不充分。
- Henderson是一位20世纪早期的保险精算统计学家，他最初提出Henderson加权移动平均是为了解决生命表的修匀问题。
- X11过程使用Henderson加权移动平均，在简单中心移动平均的基础上进一步精确提取序列趋势信息

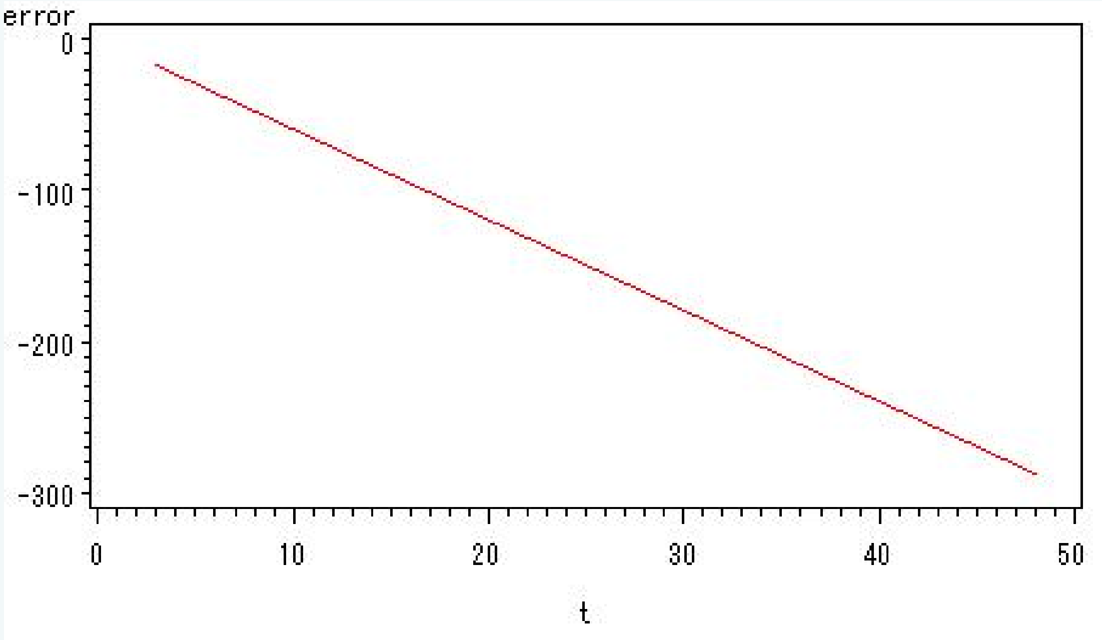
例5.10

- 使用五期简单中心移动平均对一元三次函数进行拟合，并考察拟合误差项的性质。$x_t = t^3, t \ge 0$
- 五期中心移动平均拟合效果图



例5.10

- 拟合误差序列图，可以看到误差序列依然残存显著的趋势信息



Henderson加权移动平均

- 在 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$，且$\sum_{i=-k}^{k}i\theta_i=0$ 的约束下，使得

$$S=\sum_{i=-k}^{k}(\nabla^3\theta_i)^2$$

达到最小的系数即为Henderson加权移动平均系数。

- 其中S等于移动平均系数的三阶差分的平方和，这等价于把某个三次多项式作为光滑度的一个指标，要求达到最小，就是力求修匀值接近一条三次曲线。
- 理论上也可以要求逼近更高次数的多项式曲线，比如四次或五次，这时只需要调整函数中的差分阶数。但阶数越高，计算越复杂，所以使用最多的还是3阶差分光滑度要求。

Henderson加权移动平均系数

❖ 目前人们已经计算出了3阶差分光滑度下，使达到最小的5期，7期，9期，13期和23期的移动平均系数。

k	θ_k（θ_{-k}）				
	5 期	7 期	9 期	13 期	23 期
0	0.55944	0.41259	0.33114	0.24006	0.14406
1	0.29371	0.29371	0.26656	0.21434	0.13832
2	-0.07343	0.05874	0.11847	0.14736	0.12195
3		-0.05874	-0.00987	0.06549	0.09740
4			-0.04072	0.00000	0.06830
5				-0.02786	0.03893
6				-0.01935	0.01343
7					-0.00495
8					-0.01453
9					-0.01569
10					-0.01092
11					-0.00428

Henderson加权移动平均

- 对于上例给出的一元三次函数，五期Henderson加权移动平均可以做到误差恒为零拟合。
- 对其他曲线趋势拟合，Henderson加权移动平均通常也能取得精度很高的拟合效果。

Musgrave非对称移动平均

- 前面两种移动平均方法可以很好地消除趋势，提取线性或非线性趋势信息，但是它们都有一个明显的缺点：因为是中心移动平均，假如移动平均期数为2k+1，那么序列最前面的k期和最后面的k期经过移动平均拟合后，信息就缺失了。
- 这是严重的信息损失，尤其是最后几期的信息可能正是我们最关心的信息。
- 1964年，统计学家Musgrave针对这个问题构造了Musgrave非对称移动平均方法，专门对最后k期数据进行补充平滑拟合。

Musgrave非对称移动平均

- Musgrave非对称移动平均的构造思想是，已知一组中心移动平均系数，满足$\sum_{i=-k}^{k-d}\varphi_i=1$，方差最小，光滑度最优等前提约束。现在需要另外寻找一组非中心移动平均系数，也满足和为1的约束$\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$，且它的拟合值能无限接近中心移动平均的拟合值，即对中心移动平均现有估计值做出的修正最小

$$\min\left\{E\left(\sum_{i=-k}^{k}\theta_i x_{t-i}-\sum_{i=-(k-d)}^{k}\varphi_i x_{t-i}\right)\right\}^2$$

- 其中d为补充平滑的项数

Musgrave非对称移动平均

- 在这个指导思想下，Musgrave首先构造了噪声-信号比率R（noise to signal ratio）的概念，并给出了不同期数的Henderson加权移动平均比率R的估计值

$$R=\frac{\bar{I}}{\bar{C}}$$

- 其中：$\bar{I}$ 是序列不规则部分 $\hat{I}_t$ 的绝对差分 $\left|\hat{I}_t-\hat{I}_{t-1}\right|$ 的样本均值

  $\bar{C}$ 是序列趋势-循环部分 $\hat{C}_t$ 绝对差分 $\left|\hat{C}_t-\hat{C}_{t-1}\right|$ 的样本均值。

Musgrave非对称移动平均所使用的比率值

中心移动平均	比率 R
5 期 Henderson	0.001
7 期 Henderson	4.5
9 期 Henderson	1
13 期 Henderson	3.5
23 期 Henderson	4.5

Musgrave移动平均计算公式

- 然后基于比率R和中心移动平均系数，Musgrave给出了非对称移动平均系数的计算公式

$$\varphi_j = \theta_j + \frac{1}{M}\sum_{i=M+1}^{N}\theta_i + \frac{\left[j-\frac{M+1}{2}\right]D}{1+\frac{M(M-1)(M+1)}{12}}\sum_{i=M+1}^{N}\left[i-\frac{M+1}{2}\right]\theta_i$$

- 其中

$$N = 2k+1, M = N-d$$

$$D = \frac{4}{\pi R^2}$$

- 利用该公式我们可以得到最后若干项缺失的平滑估计值。

Musgrave移动平均系数

与 Henderson $2k+1$ 期移动平均对应的 Musgrave 非对称移动平均系数（$d=k$）

j	φ_j				
	5 期	7 期	9 期	13 期	23 期
0	0.81643	0.53449	0.57972	0.42113	0.28801
1	0.36713	0.38329	0.42429	0.35315	0.26258
2	-0.18357	0.11601	0.18536	0.24390	0.22652
3		-0.03379	-0.03384	0.11977	0.18228
4			-0.15554	0.01202	0.13350
5				-0.05811	0.05444
6				-0.09186	0.03925
7					-0.00119
8					-0.02808
9					-0.04893
10					-0.06385
11					-0.07689

例5.11

- 分别使用Henderson5期加权移动平均和Musgrave非对称移动平均对一元三次函数进行拟合
- Henderson5期加权移动平均公式为：

$$\hat{x}_t = -0.07343x_{t-2} + 0.29371x_{t-1} + 0.55944x_t + 0.29371x_{t+1} - 0.07343x_{t-2}$$

- 相应的Musgrave非对称移动平均公式为：

$$\hat{x}_t = -0.18357x_{t-2} + 0.36713x_{t-1} + 0.81643x_t$$

拟合计算结果

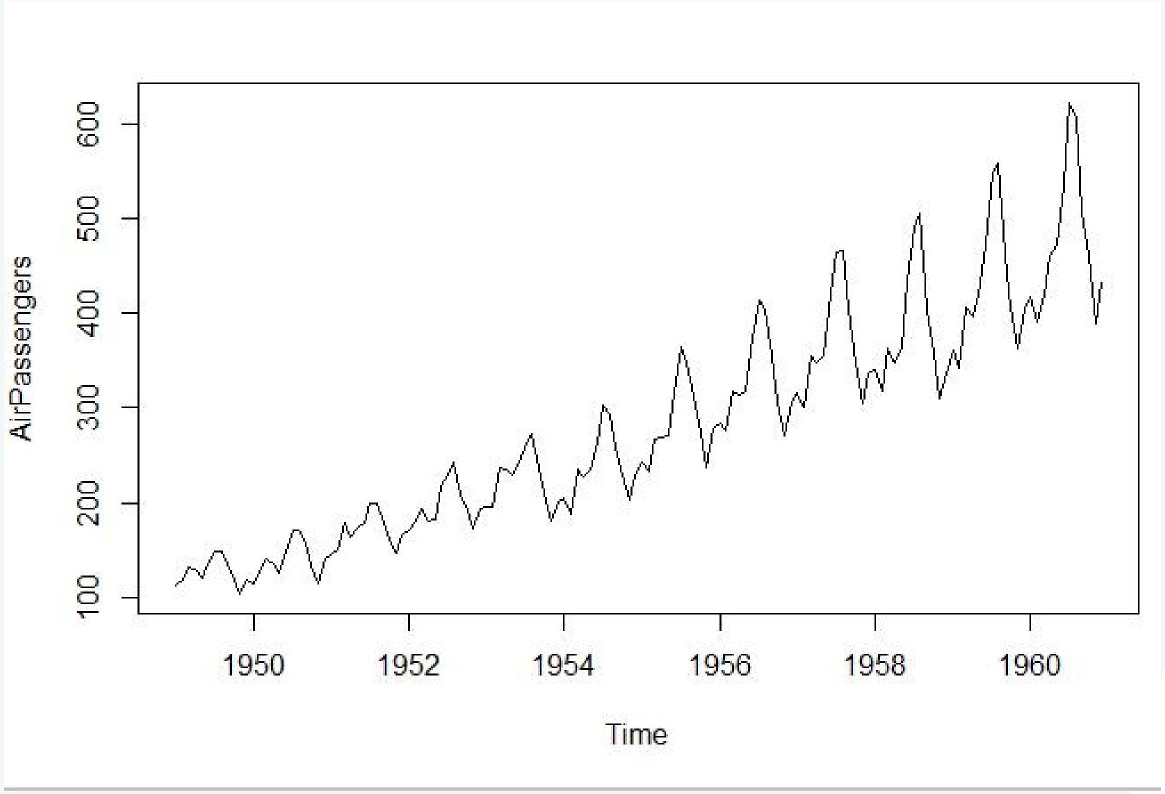
t	$x_t = t^3$	5期Henderson移动平均	Musgrave移动平均
1	1	–	–
2	8	–	–
3	27	26.9998	24.7971
4	64	63.9998	60.6955
5	125	124.9997	120.5937
6	216	215.9996	210.4917
7	343	342.9996	336.3893
8	512	511.9995	504.2866
9	729	728.9995	720.1835
10	1000	999.9994	990.0799
11	1331	1330.9993	1319.9758
12	1728	1727.9993	1715.8711
13	2197	2196.9992	2183.7657
14	2744	2743.9992	2729.6596
15	3375	3374.9991	3359.5527
16	4096	4095.9990	4079.4450
17	4913	4912.9990	4895.3363
18	5832	5831.9989	5813.2267
19	6859	–	6839.1161
20	8000	–	7979.0044

X-12季节调整程序

- X-12模型也称为X-12ARIMA模型，它主要的改进是将ARIMA模型拟合引入序列的分解中，并且可以根据实际需要引入交易日因素或者节日因素。具体做法是：
  - 如果要考虑交易日因素或者节日因素，先设置虚拟变量代表这些特殊日期，对序列进行带虚拟变量的回归分析，提取特殊日期影响
  - 然后对回归残差序列进行ARIMA建模，对序列进行预测，这样使用Henderson加权移动平均时可以借助预测值，得到所有序列值得平滑拟合
  - 每个X12程序都分为三个阶段重复迭代（三个移动平均方法下的趋势拟合，季节因子拟合和得到残差序列），同时还会自动添加极端值调整。

例5.12

- 在R语言中，有一个内置文件：AirPassengers，里面存储了1949年到1960年每个月乘坐飞机的乘客人数。对该序列进行X12拟合。



输出结果

- 输出结果显示，X12对该序列自动做了对数变换，并拟合乘积模型ARIMA(0,1,1)(0,1,10[12]模型。由于我们没有指定特殊交易日，所以没有拟合交易日的回归模型

Model Definition

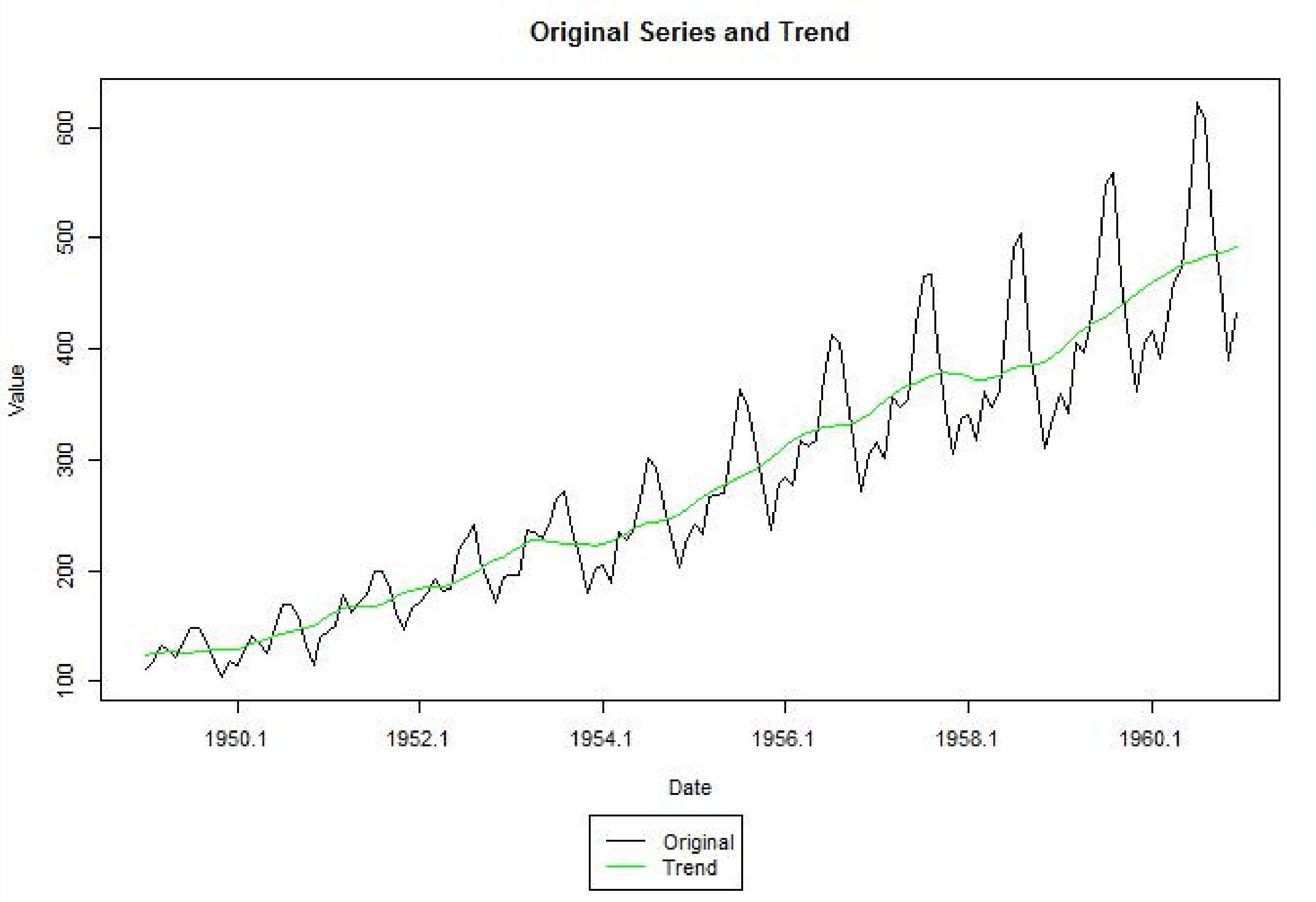
ARIMA Model: (0 1 1)(0 1 1) (Automatic Model Choice)

Model Span:

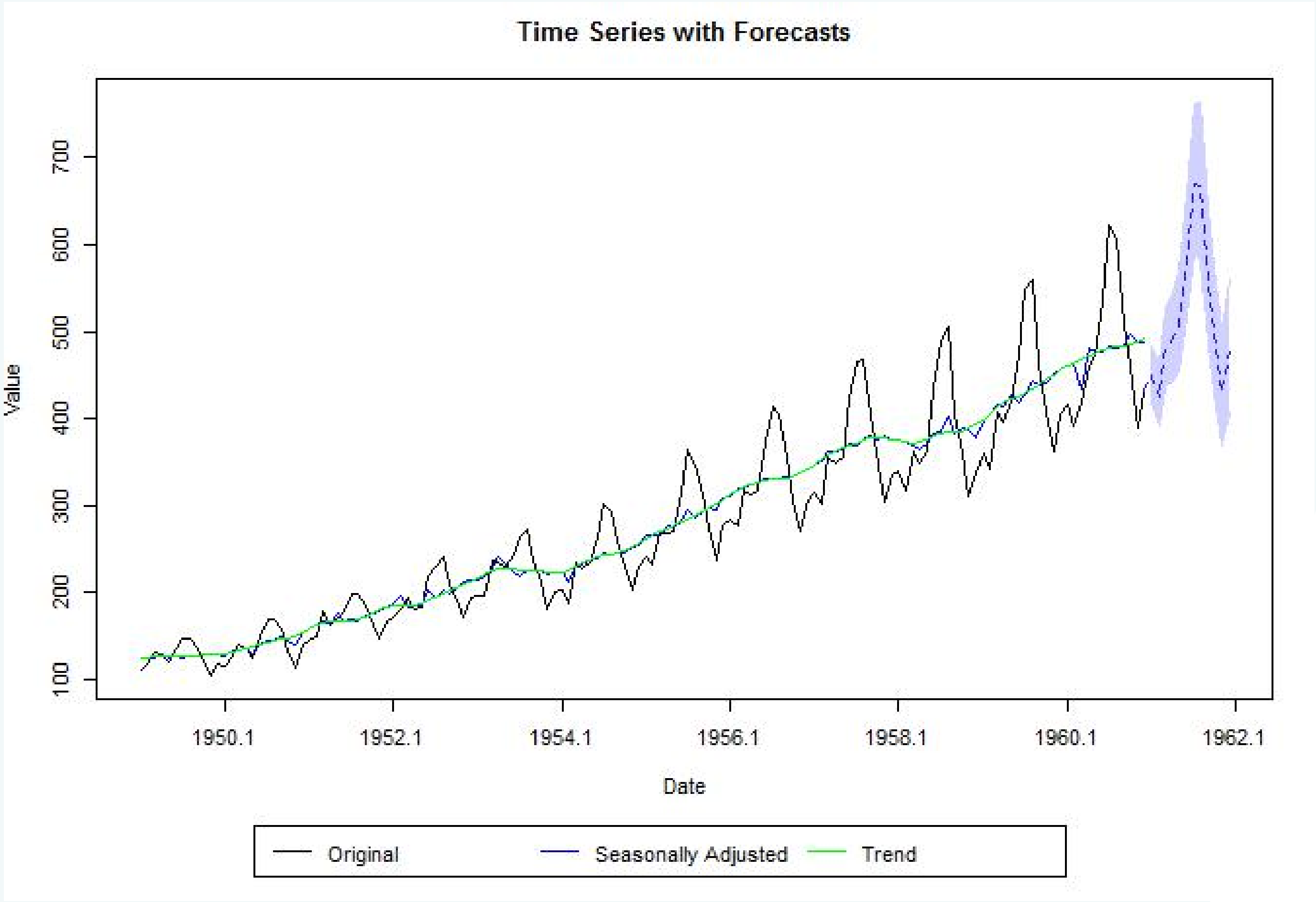
Transformation: Automatic selection : Log(y)

Regression Model: none

X12拟合后的去除季节性影响的趋势图



X12得到的预测效果图



本章内容R实现

❖ 以德国工人失业率序列为例，使用Holt-Winters平滑进行序列拟合与预测

```
x<-ts(file19$x,start=c(1962,1),frequency = 4)
plot(x)
x.fit<-HoltWinters(x,seasonal="add")
x.fit
plot(x.fit)
x.fitted<-fitted(x.fit)
x.fitted
plot(fitted)
x.fore<-forecast(x.fit,h=20)
plot(x.fore)
lines(x.fore$fitted,col=2)
```

本章内容R实现

- 以德国工人失业率序列为例进行确定性因素分解。

```
x<-ts(file19$x,start=c(1962,1),frequency = 4)
plot(x)
x.fit<-decompose(x)
x.fit$figure
x.fit$trend
x.fit$random
plot(x.fit$figure,col=2,type="o")
plot(x.fit$trend,col=3)
plot(x.fit$random,col=4)
plot(x.fit)
```

本章内容R实现

- 以AirPassengers数据为例，拟合X12模型

```
s <- new("x12Single", ts = AirPassengers, tsName = "air")
s <- x12(s)
summary(s)
orgts <- s@x12Output@a1
orgts
plot(orgts)
forecast <- s@x12Output@forecast
plot(s3, trend = TRUE, showAllout = TRUE)
plot(s, trend = TRUE, sa = TRUE, forecast = TRUE)
```

谢谢！