定义3.2.1 设θ是总体的一个参数，设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自该总体的一个样本，对给定$\alpha(0 < \alpha < 1)$,确定两个统计量$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$使得

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) \ge 1 - \alpha,$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间,或简称$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 是θ的$1-\alpha$置信区间.

3.2.1 单总体置信区间估计

1、总体均值的区间估计

例3.2.1 设$x_1, \cdots, x_n$是来自正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本, 其两个统计量

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

在构造区间估计中发挥重要作用。

下面分两种情况(σ已知和未知)讨论μ的置信区间。

(1). σ已知时μ的置信区间

在这种情况下，由于μ的点估计为$\bar{x}$,其分布为$N(\mu, \sigma^2/n)$, 故可取

$$G = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

作为枢轴量.再用标准正态分布分位数就可获得μ的置信区间.对给定的置信水平$1 - \alpha$, 取标准正态分布的$\alpha/2$和$1 - \alpha/2$的分位数$u_{\alpha/2}$和$u_{1-\alpha/2}$,使

$$P\left(u_{\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \le u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

由于$u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, 上式可改写为：

$$P(\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha.$$

由此可看出正态均值μ的$1 - \alpha$置信区间为$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$,这是以$\bar{x}$为中心以$u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$为半径的对称区间,可简记为$\bar{x} \pm u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

置信区间的长度和覆盖率分别定义为

$$\mathrm{Inter} = E\{\bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} - (\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})\},$$

和

$$\text{Prob} = E\{I(\mu \in (\bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}))\}.$$

取样本量为 $n = 500$, 置信水平$\alpha = 0.05$，重复次数 1000。μ的覆盖率和置信区间的R程序如下：

```
#σ已知时μ的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n=500 #样本量
a=0.05#置信水平
u=0#期望
v=1#标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for (i in 1:m)
    {data=rnorm(n,u,v)
     inter[i,]=c(mean(data)-qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)/sqrt(n),
                mean(data)+qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)/sqrt(n))
     prob[i]=(u>inter[i,1])&(u<inter[i,2])
     }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

(2). σ未知时μ的置信区间

在正态总体场合,可用样本方差$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ 代替总体方差σ^2,且有

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \sim t(n-1)$$

取t作为枢轴量和t分布$1-\alpha/2$分位数$t_{1-\alpha/2}$,可得μ的$1-\alpha$置信区间

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}s/\sqrt{n}.$$

取样本量为 $n = 500$, 置信水平$\alpha = 0.05$，重复 1000。μ的置信区间和覆盖率的R程序如下：

```
#σ 未知时μ的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n=500 #样本量
a=0.05#置信水平
u=0#期望
v=1#标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for(i in 1:m)
   {data=rnorm(n,u,v)
    inter[i,]=c(mean(data)-qt(1-a/2,n-1)*sd(data)/sqrt(n),
               mean(data)+qt(1-a/2,n-1)*sd(data)/sqrt(n))
    prob[i]=(u>inter[i,1])&(u<inter[i,2])
   }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

2、总体方差的区间估计

例3.2.2 在正态总体场合，有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

故可取其为枢轴量来构造σ^2的置信区间.取$\chi^2(n-1)$分布的$\alpha/2$和$1-\alpha/2$分位数, 使

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

变形后立得σ^2的$1-\alpha$置信区间：

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right],$$

两端开平方后即得标准差σ的$1-\alpha$置信区间：

$$\left[\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}}},\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}}}\right].$$

取样本量为 $n=500$, 置信水平$\alpha=0.05$，重复次数 1000。总体方差置信区间和覆盖率的R程序如下：

```
#总体方差的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n=500 #样本量
a=0.05#置信水平
u=0#期望
v=1#标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for (i in 1:m)
    {data=rnorm(n,u,v)
     inter[i,]=c(sd(data)*sqrt(n-1)/sqrt(qchisq(1-a/2,n-1)),
                sd(data)*sqrt(n-1)/sqrt(qchisq(a/2,n-1)))
     prob[i]=(v>inter[i,1])&(v<inter[i,2])
    }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

3、总体比例的区间估计

在有些场合，寻找枢轴量及其精确分布比较困难，在样本量充分大时，可用渐进分布来构造近似的置信区间，下面给出总体比例p的置信区间。

例3.2.3 设$x_1,\cdots,x_n$是来自两点分布$b(1,p)$的样本，由中心极限定理知，样本均值$\bar{x}$的渐进分布为$N(p,p(1-p)/n)$,因此有

$$u=\frac{\bar{x}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\dot{\sim}N(0,1).$$

对给定置信水平$1-\alpha$, 利用$u_{1-\alpha/2}$可得

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right|\leq u_{1-\alpha/2}\right)\approx 1-\alpha,$$

当n较大时,可将置信区间近似为

$$\left[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{n},\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{n}\right].$$

取样本量为 $n=500$, 置信水平$\alpha=0.05$，重复次数 1000. 总体比例置信区间和覆盖率的R程序如下：

```
#总体比例置的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n=500 #样本量
a=0.05#置信水平
p=0.2 #成功概率
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for(i in 1:m)
   {data=rbinom(n,1,0.2)#成功抽取1的概率为0.2
    S=sqrt(mean(data)*(1-mean(data))/n)
    inter[i,]=c(mean(data)-qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*S,
               mean(data)+qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*S)
   prob[i]=(p>inter[i,1])&(p<inter[i,2])
   }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

3.2.2 两总体置信区间估计

设$x_1,\cdots,x_n$是来自正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的一个样本,$y_1,\cdots,y_m$是来自另一正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的一个样本,两个样本相互独立。记$Q_x=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,Q_y=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2,s_x^2=Q_x/(n-1),s_y^2=Q_y/(m-1)$.

1、两个总体均值之差的区间估计

例3.2.4 (1). σ_1^2和σ_2^2已知时$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

此时有$\bar{x}-\bar{y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$，取枢轴量为

$$u=\frac{[\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)]}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

沿用前面多次使用的方法可得$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$\bar{x}-\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

取样本量为 $n_1=n_2=500$, 置信水平$\alpha=0.05$，重复次数 1000. σ_1^2和σ_2^2已知时$\mu_1-\mu_2$ 置信区间和覆盖率的R程序如下：

```
#σ1,σ2已知时μ1-μ2 的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n1=500 #x样本量
n2=500 #y样本量
a=0.05#置信水平
u1=0#x期望
u2=0.2#y期望
v1=1#x标准差
v2=2#y标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for(i in 1:m)
  {data1=rnorm(n1,u1,v1)
   data2=rnorm(n2,u2,v2)
   u=mean(data1)-mean(data2)#均值差
   inter[i,]=c(u-qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*sqrt(v1^2/n1+v2^2/n2),
              u+qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*sqrt(v1^2/n1+v2^2/n2))
   prob[i]=((u1-u2)>inter[i,1])&((u1-u2)<inter[i,2])
   }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

(2). $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ **未知时**$\mu_1-\mu_2$**的置信区间**

由分布性质知：

$$\bar{x}-\bar{y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\sigma^2\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\right)\right)$$
$$(Q_x+Q_y)/\sigma^2\sim\chi^2(n+m-2).$$

由此可构造如下t枢轴量：

$$t=\frac{[\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)]/\left(\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)}{\sqrt{(Q_x+Q_y)/(n+m-2)}/\sigma}.$$

记$S_w=(Q_x+Q_y)/(n+m-2)$, 则$S_w\sim\chi^2(n+m-2)$,且S_w 是σ^2的无偏估计.这时

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_w}}\sim t(n+m-2).$$

利用此t分布可以构造$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间：

$$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{1-\alpha/2}(n+m-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_w}.$$

取样本量为 $n_1=n_2=500$, 重复次数 1000. σ_1^2和σ_2^2未知时$\mu_1-\mu_2$ 置信区间和覆盖率的R 程序如下：

```
#σ1=σ2未知时μ1-μ2 的置信区间
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n1=500 #x样本量
n2=500 #y样本量
a=0.05#置信水平
u1=0#x期望
u2=0.2#y期望
v=1#x,y标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for(i in 1:m)
   {data1=rnorm(n1,u1,v)
    data2=rnorm(n2,u2,v)
```

```
    u=mean(data1)-mean(data2)#均值差
    S=(var(data1)*(n1-1)+var(data2)*(n2-1))/(n1+n2-2)
    inter[i,]=c(u-qt(1-a/2,n1+n2-2)*sqrt(S/n1+S/n2),
                u+qt(1-a/2,n1+n2-2)*sqrt(S/n1+S/n2))
    prob[i]=((u1-u2)>inter[i,1])&((u1-u2)<inter[i,2])
    }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

2、两个总体方差比的区间估计

例3.2.5 由于$Q_x/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n-1)$,$Q_y/\sigma_2^2 \sim \chi^2(m-1)$, 且两者相互独立,故构造如下枢轴量：

$$F = \frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1),$$

对给定的置信水平$1-\alpha$,由

$$P\left(F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \le \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)\right) = 1-\alpha,$$

经变形即得σ_1^2/σ_2^2的$1-\alpha$置信区间：

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)}\right].$$

取样本量为 $n_1 = n_2 = 500$, 置信水平$\alpha = 0.05$，重复次数 1000. 两个总体方差比置信区间的R程序如下：

```
#两个总体方差比的区间估计
set.seed(1)
m=1000 #循环次数
n1=500 #x样本量
n2=500 #y样本量
a=0.05#置信水平
u1=0#x期望
u2=0.2#y期望
```

```
v1=1#x标准差
v2=2#y标准差
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for (i in 1:m)
    {data1=rnorm(n1,u1,v1)
     data2=rnorm(n2,u2,v2)
     s1=var(data1)
     s2=var(data2)
     inter[i,]=c((s1/s2)/qf(1-a/2,n1-1,n2-1),
                 (s1/s2)/qf(a/2,n1-1,n2-1))
     prob[i]=((v1^2/v2^2)>inter[i,1])&((v1^2/v2^2)<inter[i,2])
     }
colMeans(inter)
mean(prob)
```

3、两个总体比例的之差区间估计

例3.2.6 设$x_1,\cdots,x_n$是来自两点分布$b(1,p_1)$的一个样本,$y_1,\cdots,y_m$是来自另一两点分布$b(1,p_2)$的一个样本,两个样本相互独立.由中心极限定理可知，在大样本条件下

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n+p_2(1-p_2)/m}} \dot{\sim} N(0,1).$$

于是,两个总体比例之差p_1-p_2的$1-\alpha$置信区间近似为

$$\bar{x}-\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}+\frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}}.$$

取样本量为 $n_1=n_2=500$, 置信水平$\alpha=0.05$，重复次数 1000. 两个总体比例的之差置信区间和覆盖率的R程序如下：

```
#两个总体比例的之差区间估计
set.seed(1234)
m=1000 #循环次数
n1=500 #x样本量
```

```
n2=500 #y样本量
p1=0.2
p2=0.5
a=0.05#置信水平
inter=matrix(0,m,2)
prob=matrix(0,m,1)
for (i in 1:m)
    {data1=rbinom(n1,1,p1)#成功抽取1的概率为p1
     data2=rbinom(n2,1,p2)#成功抽取1的概率为p2
     s1=var(data1)
     s2=var(data2)
     u=mean(data1)-mean(data2)#均值差
     S=sqrt(mean(data1)*(1-mean(data1))/n1
            +mean(data2)*(1-mean(data2))/n2)
     inter[i,]=c(u-qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*S,
                u+qnorm(1-a/2,mean=0,sd=1)*S)
     prob[i]=((p1-p2)>inter[i,1])&((p1-p2)<inter[i,2])
     }
colMeans(inter)
mean(prob)
```