

世界经济统计

这次真的是作业四

主讲教师：汤昕
武汉大学经济管理学院世界经济系

2016 年 4 月 18 日

截止日：2016年4月26日，星期二。作业请用中文作答并清楚写明计算过程，请于截止日课前在教室交给我，另外请在作业的抬头位置写明你的学号与姓名。作业中所有的图，请务必包含如下元素：标题、横纵轴的意义以及图例，当图中有多条曲线的时候请使用不同的颜色或曲线类型（实线、折线、断线等）。不熟悉相关语法的同学请使用搜索引擎查阅MATLAB的帮助文档或在交互式界面下键入`help plot`查阅精简版的帮助文档。

本次作业主要有两个目的：

- 复习马尔科夫链极限分布的性质。
- 复习如何应用马尔科夫链近似连续型随机过程。

1. （本题目意图帮助大家复习马尔科夫链极限分布的性质）：（本题不需要提交MATLAB代码）
设一个马尔科夫链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) 请验证 \mathbf{P} 是否定义了一个正则马尔科夫链。
- (b) 请使用MATLAB计算 \mathbf{P} 的极限转移概率矩阵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n.$$

- (c) 应用讲义中定理5.6，请手工计算 \mathbf{P} 对应的平稳分布。对比(b)中的结果，请验证两者是否相同。
- (d) 请应用讲义中定理5.6的第一款，证明 \mathbf{P} 对应的平稳分布是唯一的。（提示：请验证由讲义(5.3)式定义的线性方程组的解存在且唯一，读者可以使用高等代数知识中的克拉默(Cramer)法则进行判别。）

- (e) 注意到本题中马氏链是齐次的，若设其状态空间中的三个状态依次为

$$S = \{0.5, 1.0, 1.5\},$$

那么当上述马尔科夫链运行在平稳分布之上时，请计算该链所定义的随机过程 X_t 对应的方差与自相关系数。特别的，自相关系数定义为

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+1} - \mu)]}{V(X_t)},$$

其中 μ 是随机过程的均值， $V(X_t)$ 是方差。

2. (本题目意图帮助大家复习如何使用马尔科夫链近似连续型随机过程)：设随机过程 A_t 是对数正态的：

$$\log A_t = \rho \log A_{t-1} + v_t, v_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2).$$

- (a) 设 $\sigma = 0.4$ ，请对 $\rho = 0.95$ 和 $\rho = 0.1$ 两种情形分别仿真一条关于 A_t （注意不是 $\log A_t$ ）的500期的样本曲线，并比较两条曲线之间的差异。
- (b) 请写出遵循Tauchen (1986)算法使用有限状态的马尔科夫链对 A_t 进行近似的伪代码。
- (c) 设 $\rho = 0.9$ ，请分别使用3个和7个状态的马氏链对上述随机过程进行近似。具体来说，请计算相应马氏链所对应的一步转移概率矩阵和平稳分布，计算所得到的马氏链在平稳分布中所对应的方差和自相关系数，并与原始连续型随机过程中相应的统计量的值进行比较。请进一步的说明，当马氏链中包含的状态数上升时，其近似精度如何变化。