Chapter 1
课堂练习

1

- 假设一个递归算法的程序步数可抽象为：$T(n)=2T(n/2)+n$，假设$T(1)=1$，$n=2^k$。请分析该算法的程序步数。
  - 注：更一般的情况是$T(n)=T(\lfloor n/2\rfloor)+T(\lceil n/2\rceil)+O(n)$，$T(1)=1$，不影响最终结果，简化为：$T(n)=2T(n/2)+n$，$T(1)=1$

解答

- 解法1：
  - $T(n) = 2T(n/2) + n=2(2T(n/4)+n/2) + n = 8T(n/8)+ n + n + n = 2^kT(n/2^k)+k*n$
  - 由于$k = \log n$，$n = 2^k$
  - 得到结果：$T(n) = n + n\log n = O(n\log n)$
- 解法2：
  - $T(n)/n = T(n/2)/(n/2) + 1$,
  - $T(n/2)/(n/2) = T(n/4)/(n/4) + 1$，…,
  - $T(2)/2 = T(1)/1 + 1$
  - 把上述各式左边相加，右边相加，消去同类项，得到：
  - $T(n)/n = T(1)/1 + \log n$,
  - 最后得到与解法1相同的结果

2

- 判断f(n)和g(n)，当n->∞时，哪个函数增长更快？
  - $f(n)=(\ln(n!)+5)^3$， $g(n)=13n^{2.5}$
  - $f(n)=n^{2.1}+\mathrm{sqrt}(n^4+1)$， $g(n)=(\ln(n!))^2+n$
  - $f(n)=2^{(n*n*n)}+(2^n)^2$,$g(n)=n^{(n*n)}+n^5$

解答

- $f(n)=(\ln(n!)+5)^3$， $g(n)=13n^{2.5}$
  - 答：f(n)快。因为$(\ln(n!)+5)^3 > (n\ln 3)^3 > n^3 > 13n^{2.5}$。（这里的大于小于号表示增长速度的快慢）。
- $f(n)=n^{2.1}+\mathrm{sqrt}(n^4+1)$， $g(n)=(\ln(n!))^2+n$
  - 答： f(n)快，$(\ln(n!))^2+n< (n\ln(n))^2$，所以就是比较$(\ln(n))^2$与$n^{0.1}$，假设$n=e^{10x}$，也就是比较$100x^2$与$e^x$，显然$e^x$快，所以结论正确。
- $f(n)=2^{(n*n*n)}+(2^n)^2$,$g(n)=n^{(n*n)}+n^5$
  - 答：f(n)增长速度快