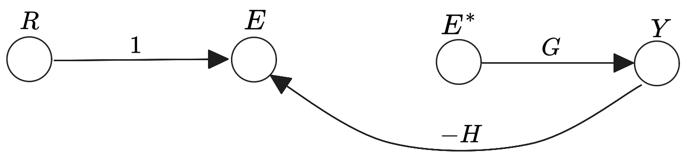
1.a.

우선 original signal flow graph를 그립니다. ($G = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p$)



이때 샘플러의 input은 E, output은 E^*입니다.

E와 Y를 나타냅니다.

$$E = R - HGE^*$$

$$Y = GE^*$$

위 두 식의 양 변에 모두 starred transform을 취합니다.

$$\begin{aligned} E^* &= R^* - \overline{HG}^* E^* \\ E^* &= \frac{R^*}{1 + \overline{HG}^*} \end{aligned}$$

$$Y^* = G^* E^*$$

이 두 식을 정리하여 $\frac{Y^*}{R^*}$전달함수를 만듭니다.

$$\frac{Y^*}{R^*} = \frac{G^*}{1 + \overline{HG}^*} \tag{1}$$

이 식을 z-transform하기 위해 각 $G, \overline{HG}$를 z-transform해줍니다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} \\ G^d(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{0.2z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{0.2}{z-1} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} HG(s) &= \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} \\ \overline{HG}^d(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1/\tau}{s^2(s + 1/\tau)}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \frac{z\left[(0.2/\tau - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - 0.2/\tau e^{-0.2/\tau})\right]}{(1/\tau)(z-1)^2(z - e^{-0.2/\tau})} \\ &= \frac{(0.2/\tau - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - (0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z - e^{-0.2/\tau})} \end{aligned} \tag{3}$$

식 (1), (2), (3)에 따라 전달함수의 z-transform은 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
Y^d(z)/R^d(z) &= \frac{G^d(z)}{1+\overline{HG}^d(z)} \\
&= \frac{\frac{0.2}{z-1}}{1+\frac{(0.2/\tau-1+e^{-0.2/\tau})z+(1-e^{-0.2/\tau}-(0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z-e^{-0.2/\tau})}} \\
&= \frac{0.2(1/\tau)(z-e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z-e^{-0.2/\tau})+((0.2/\tau)-1+e^{-0.2/\tau})z+(1-e^{-0.2/\tau}-(0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})} \\
&= \frac{0.2(z-e^{-0.2/\tau})}{(z-1)(z-e^{-0.2/\tau})+(0.2-\tau+\tau e^{-0.2/\tau})z+(\tau-\tau e^{-0.2/\tau}-0.2e^{-0.2/\tau})} \\
&= \frac{0.2(z-\epsilon)}{z^2+(-(0.8+\tau)+(\tau+1)\epsilon)z+(\tau+(0.8-\tau)\epsilon)}, \quad \left(\epsilon = e^{-0.2/\tau}\right)
\end{aligned}
$$

1.b.

전달함수의 분모와 분자에 $V^d(z)$를 곱하고 각 Y^d, R^d에 분자, 분모를 할당합니다. 또한, 그 식에 inverse z-transform을 취합니다.

$$
\begin{aligned}
Y^d(z) &= 0.2(z-\epsilon)V^d(z) \\
\rightarrow y^d(k) &= 0.2v^d(k) - 0.2\epsilon v^d(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^d(z) &= \{z^2+(-(0.8+\tau)+(\tau+1)\epsilon)z+(\tau+(0.8-\tau)\epsilon)\}V^d(z) \\
\rightarrow r^d(k) &= v^d(k+2)+(-(0.8+\tau)+(\tau+1)\epsilon)v^d(k+1)+(\tau+(0.8-\tau)\epsilon)v^d(k) \\
v^d(k+2) &= ((0.8+\tau)-(\tau+1)\epsilon)v^d(k+1)+(-\tau+(\tau-0.8)\epsilon)v^d(k)+r^d(k)
\end{aligned}
$$

위 식을 토대로 이산 시간 상태변수 모델을 만듭니다.

$$
\left(x^d(k) = \begin{bmatrix} v^d(k) \\ v^d(k+1) \end{bmatrix},\ x^d(k+1) = \begin{bmatrix} v^d(k+1) \\ v^d(k+2) \end{bmatrix}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
x^d(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau+(\tau-0.8)\epsilon & (0.8+\tau)-(\tau+1)\epsilon \end{bmatrix} x^d(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r^d(k) \\
y^d(k) &= [0.2 \quad -0.2\epsilon] x^d(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau+(\tau-0.8)e^{-0.2/\tau} & (0.8+\tau)-(\tau+1)e^{-0.2/\tau} \end{bmatrix} \\
B^d &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
C^d &= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2e^{-0.2/\tau} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

1.c.

A^d의 특성방정식을 구합니다.

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(A^d - I\lambda) \\
&= -\lambda\left((0.8+\tau)-(\tau+1)e^{-0.2/\tau}-\lambda\right)+\tau+(0.8-\tau)e^{-0.2/\tau} \\
&= \lambda^2-\left((0.8+\tau)-(\tau+1)e^{-0.2/\tau}\right)\lambda+\tau+(0.8-\tau)e^{-0.2/\tau}
\end{aligned}
$$

이때 이 시스템이 안정하려면 A^d의 모든 eigenvalue가 단위원에 들어와야 합니다. 따라서, 위 이차식의 근의 크기가 1보다 작아야 합니다. 이 조건을 식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
&\left(b = -(0.8+\tau)+(\tau+1)e^{-0.2/\tau}\right) \\
&\left(c = \tau+(0.8-\tau)e^{-0.2/\tau}\right) \\
&\lambda = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c}
\end{aligned}
$$

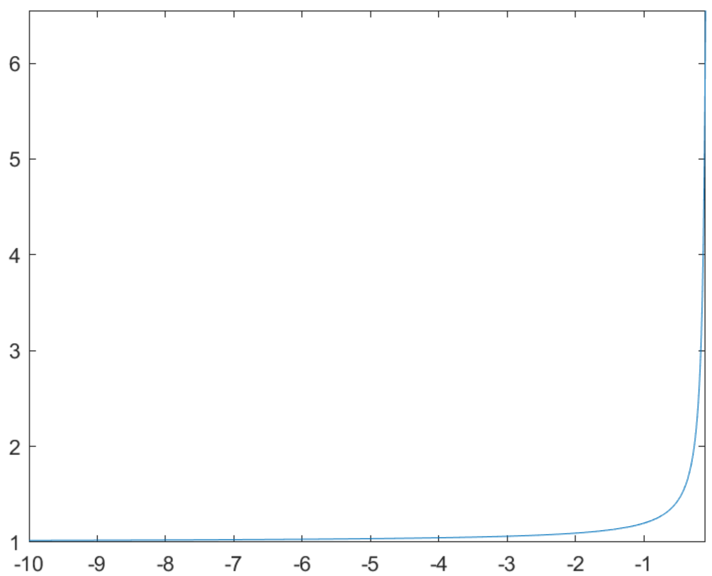
$$
\begin{aligned}
&c \geq 0 : \left|-\frac{b}{2} \pm \sqrt{c}\right| \leq 1 \\
&c < 0 : \frac{b^2}{4} + c^2 \leq 1
\end{aligned}
$$

이를 Matlab을 통해 알아봅니다.

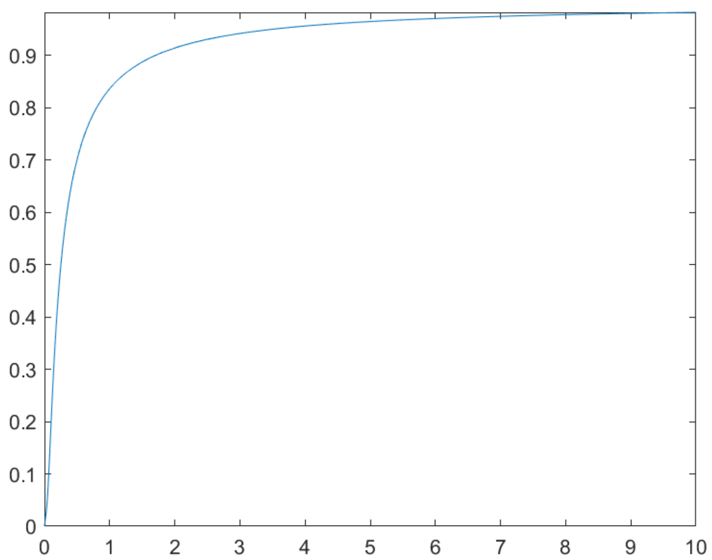
```
clc; clear; close all;
syms t;

% Define the function
b = -(0.8+t)+(t+1)*exp(-0.2/t);
c = t + (0.8-t)*exp(-0.2/t);

% drwa the function
figure;
range = [-10,-0.1];
fplot(c, range);
figure;
range = [0.1,10];
fplot(c, range);
```

우선 τ에 대한 c의 그래프를 그려봅니다.
$\tau = 0$인 경우는 없으므로 범위를 $[-10, -0.1], [0, 10]$이렇게 두 개 나누어 그립니다. (양수에서 0으로 가는 극한값은 0이므로 0에서 10으로 범위를 잡아 넣었습니다.)

$[-10, -0.1]$:



$[0, 10]$:



이를 통해 c는 0보다 작은 경우가 없음을 알 수 있습니다. 따라서

$$c \geq 0 : \left| -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c} \right| \leq 1$$

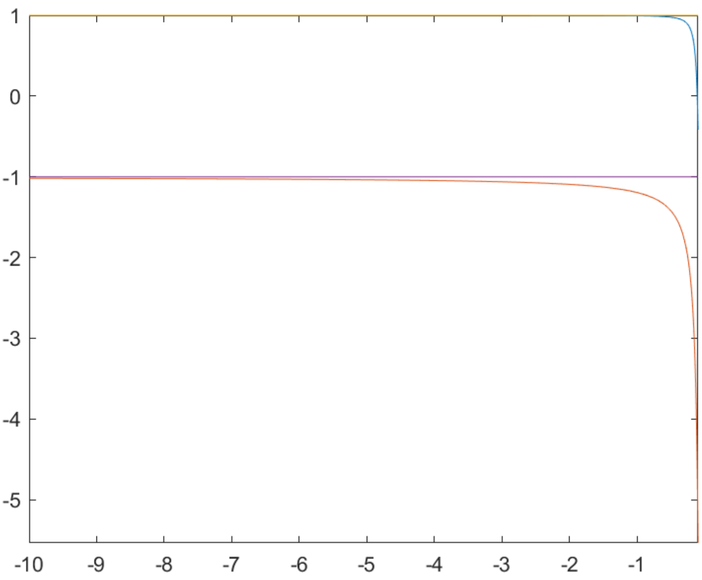
이 식만 사용합니다.

이제 MATLAB을 사용하여 $-\frac{b}{2}+\sqrt{c},\ -\frac{b}{2}-\sqrt{c},\ 1,\ -1$을 그려 비교합니다.

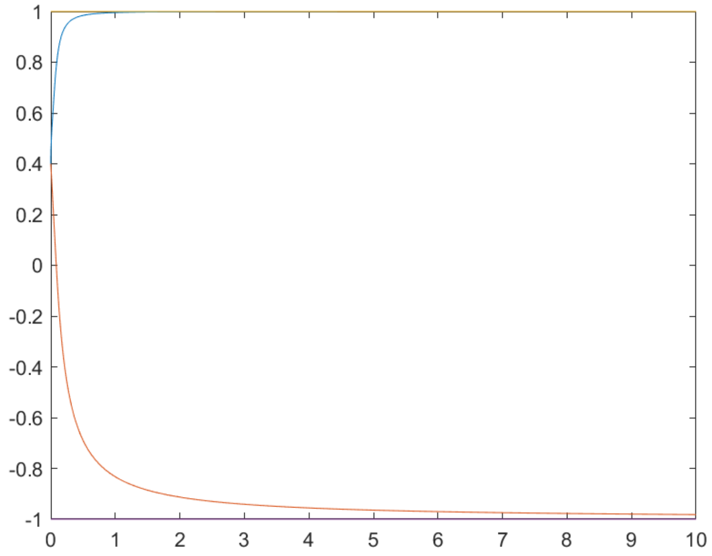
```
clc; clear; close all;
syms t;

% Define the function
b = -(0.8+t)+(t+1)*exp(-0.2/t);
c = t + (0.8-t)*exp(-0.2/t);
p = -b/2+sqrt(c);
q = -b/2-sqrt(c);

% drwa the function
figure;
range = [-10,-0.1];
fplot(p, range); hold on;
fplot(q, range); hold on;
fplot(1, range); hold on;
fplot(-1, range); hold on;

figure;
range = [0,10];
fplot(p, range); hold on;
fplot(q, range); hold on;
fplot(1, range); hold on;
fplot(-1, range); hold on;

% finde limit of the function as t approches to infinity
limit(p, t, inf)
limit(q, t, inf)
```

결과는 다음과 같습니다.

$[-10, -0.1]$:



$[0, 10]$:



이때 τ 의 양수 부분에서 각 함수의 극한값이 무엇인지 표시하였습니다.

```
ans =

1


ans =

-1
```

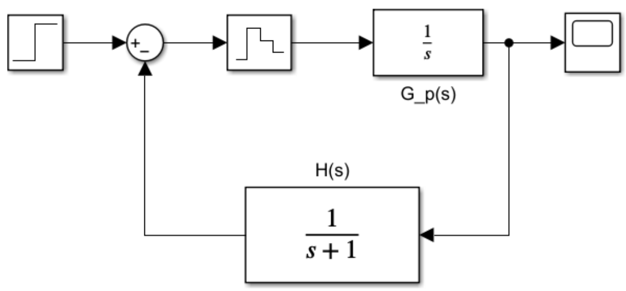
이를 통해 τ가 0 초과일 때 이 조건을 만족함을 알 수 있습니다.

$$\tau > 0$$

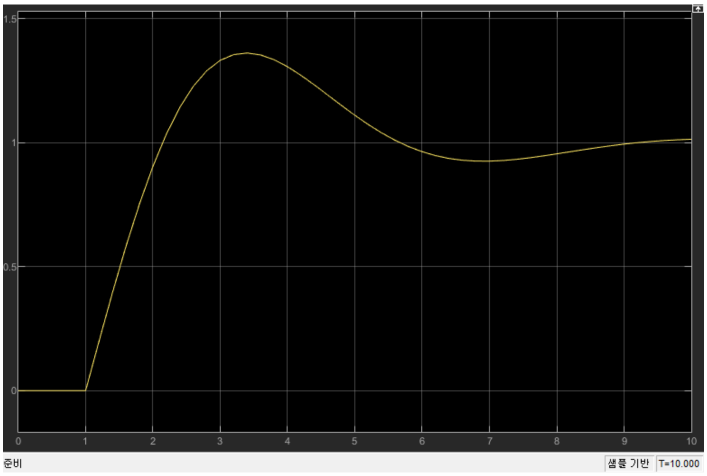
1.d.

$\tau = 1$ 일 때 $b = -0.16254,\ c = 0.83625$로 1.c의 조건을 만족합니다. 따라서 $H(s) = \frac{1}{s+1}$을 사용하였습니다.

폐루프 시스템 :



출력 파형 :



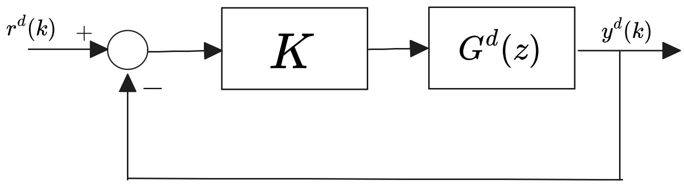
2.a.

matlab을 이용해 $G^d(z)$를 구하면 다음과 같습니다.

```
Gp_tf = tf(1,[1 1 0]);
T = 0.2;
Gd_tf = c2d(Gp_tf,T,'zoh')
```

```
Gd_tf =

   0.01873 z + 0.01752
  ----------------------
  z^2 - 1.819 z + 0.8187

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
```

그러면 다음과 같은 페루프 시스템과 같습니다



따라서 이것의 전달함수는 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
Y^d(z)/R^d(z) &= \frac{KG^d(z)}{1+KG^d(z)} \\
&= \frac{K\frac{0.01873z+0.01752}{z^2-1.819z+0.8187}}{1+K\frac{0.01873z+0.01752}{z^2-1.819z+0.8187}} \\
&= \frac{K(0.01873z+0.01752)}{z^2-1.819z+0.8187+K(0.01873z+0.01752)} \\
&= \frac{K(0.01873z+0.01752)}{z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K)}
\end{aligned}
$$

2.b.

$K=1$일 때 final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$
\begin{aligned}
y^d(\infty) &= \lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.01873z+0.01752}{z^2-1.80027z+0.83622}\cdot\frac{z}{z-1} \\
&= \frac{0.03625}{0.03595} \\
&= 1.0083
\end{aligned}
$$

$$
e_{ss} = 1 - y^d(\infty) = -0.0083
$$

$K = 10$일 때 final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$
\begin{aligned}
y^d(\infty) &= \lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.1873z+0.1752}{z^2-1.6317z+0.9939}\cdot\frac{z}{z-1} \\
&= \frac{0.3625}{0.3622} \\
&= 1.00083
\end{aligned}
$$

$$
e_{ss} = 1 - y^d(\infty) = -0.00083
$$

2.c.

final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{k\to\infty}(r^d(k)-y^d(k)) \\
&= \lim_{z\to1}(z-1)\left(1-Y^d(z)/R^d(z)\right)R^d(z) \\
&= \lim_{z\to1}(z-1)\left[1-\frac{K(0.01873z+0.01752)}{z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K)}\right]\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to1}\frac{z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K)-K(0.01873z+0.01752)}{(z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K))(z-1)}Tz \\
&= \lim_{z\to1}\frac{(z^2-1.819z+0.8187)Tz}{(z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K))(z-1)} \\
&= \lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z-0.817)Tz}{(z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K))(z-1)} \\
&= \lim_{z\to1}\frac{(z-0.817)Tz}{(z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K))} \\
&= \frac{0.183T}{0.03625K+0.0004}
\end{aligned}
$$

이때 e_{ss}가 존재하기 위해선 시스템이 안정해야 합니다. 따라서, 시스템이 안정하도록 하는 K의 범위를 구해야 합니다.

Jury의 안정도 판별법을 사용합니다.

$$
z^2+(K0.01873-1.819)z+(0.8187+0.01752K)
$$

z^0	z^1	z^2
$0.8187+0.01752K$	$-1.819+0.01873K$	1

$$
\begin{aligned}
&\to |0.8187+0.01752K| < 1 \\
&\to -103.807 < K < 10.3482
\end{aligned}
$$

K의 최댓값은 10.3482로 이를 e_{ss}에 대입하면 e_{ss}의 최솟값이 나옵니다.

이는 0.0177 입니다.

3.a.

$$
F^d(z) = z^4 + Kz^3 - 0.4z^2 + 0.5K = 0
$$

z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
$0.5K$	0	-0.4	K	1
1	K	-0.4	0	$0.5K$
$\frac{1}{4}K^2-1$	$-K$	$-\frac{1}{5}K+\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}K^2$	
$\frac{1}{2}K^2$	$-\frac{1}{5}K+\frac{2}{5}$	$-K$	$\frac{1}{4}K^2-1$	
$-\frac{3}{16}K^4-\frac{1}{2}K^2+1$	$-\frac{3}{20}K^3-\frac{1}{5}K^2+K$	$\frac{9}{20}K^3+\frac{1}{10}K^2+\frac{1}{5}K-\frac{2}{5}$		

$$
\begin{aligned}
&|0.5K/1| < 1 \rightarrow |K| < 2 \\
&\rightarrow K < 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{4}K^2 - 1\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}K^2\right)\right| > 1 \\
&\rightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{2}{K^2}\right| > 1 \\
&\rightarrow 0 < K < \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(-\frac{3}{16}K^4 - \frac{1}{2}K^2 + 1\right) \Big/ \left(\frac{9}{20}K^3 + \frac{1}{10}K^2 + \frac{1}{5}K - \frac{2}{5}\right)\right| > 1 \\
&\rightarrow (0 < K < 0.989183) \vee (2 < K)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore 0 < K < 0.989183
$$

3.b.

$$
F^d(z) = z^4 + Kz^3 - 0.4z^2 + 0.5K = 0
$$

Bilinear transform하여 w에 대해 특성다항식을 정리합니다.

이때 시스템의 안정성은 $T > 0$에 독립합니다. 따라서 $T = 2$를 넣어 생각합니다.

$$
\begin{aligned}
&z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \\
&F^d\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 + K\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 0.4\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.5K = 0
$$

$$
(1+w)^4 + K(1+w)^3(1-w) - 0.4(1+w)^2(1-w)^2 + 0.5K(1-w)^4 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&(0.6 - 0.5K)w^4 + (4 - 4K)w^3 \\
&+ (6.8 + 5K)w^2 + 4w \\
&+ (0.6 + 1.5K) = 0
\end{aligned}
$$

정리된 특성다항식에 Routh-Hurwitz 판별법을 사용합니다.

$$
\begin{array}{c|ccc}
w^4 & 0.6 - 0.5K & 6.8 + 5K & 0.6 + 1.5K \\
w^3 & 4 - 4K & 4 & 0 \\
w^2 & a & 0.6 + 1.5K & \\
w^1 & b & 0 & \\
w^0 & 0.6 + 1.5K & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(0.6 - 0.5K)4 - (6.8 + 5K)(4 - 4K)}{-(4 - 4K)} \\
b &= \frac{(4 - 4K)^2(0.6 + 1.5K)}{(0.6 - 0.5K)4 - (6.8 + 5K)(4 - 4K)} + 4
\end{aligned}
$$

첫 열에 있는 수들이 모두 양수이도록 하는 $K(K > 0)$를 찾습니다.

$$
\begin{aligned}
&0.6-0.5K>0\\
&\rightarrow K<1.2\\
\\
&4-4K>0\\
&\rightarrow K<1\\
\\
&a>0\\
&\rightarrow (0<K<0.9911)\vee(1<K)\\
\\
&b>0\\
&\rightarrow 0.850<K\\
\\
&\therefore 0.850<K<0.9911
\end{aligned}
$$

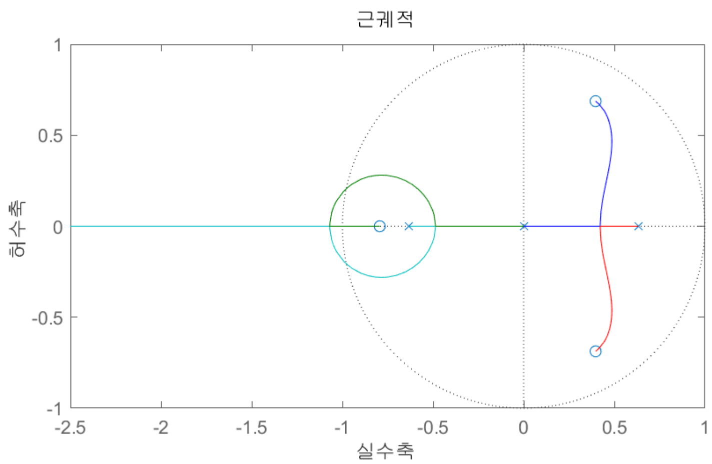
3.c.

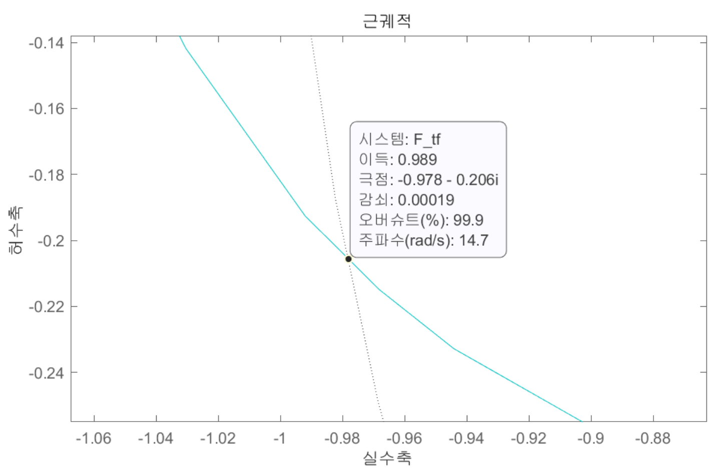
특성방정식은 다음과 같이 정리될 수 있습니다.

$$
\begin{aligned}
z^4+Kz^3-0.4z^2+0.5K=0\\
\rightarrow 1+K\frac{z^3+0.5}{z^4-0.4z^2}=0
\end{aligned}
$$

따라서 이것의 root locus를 MATLAB을 사용하여 그리면 다음과 같이 나옵니다.

```
T = 0.2;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);

rlocus(F_tf)
```





이때 단위원 위에서의 이득(K)는 위의 사진과 같이 0.989이며, 여기에서 이득(K)가 증가하게 되면, 근 하나가 단위원을 완전히 벗어납니다.

따라서 $F^d(z)$가 안정하도록 하는 K의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 < K < 0.989$$

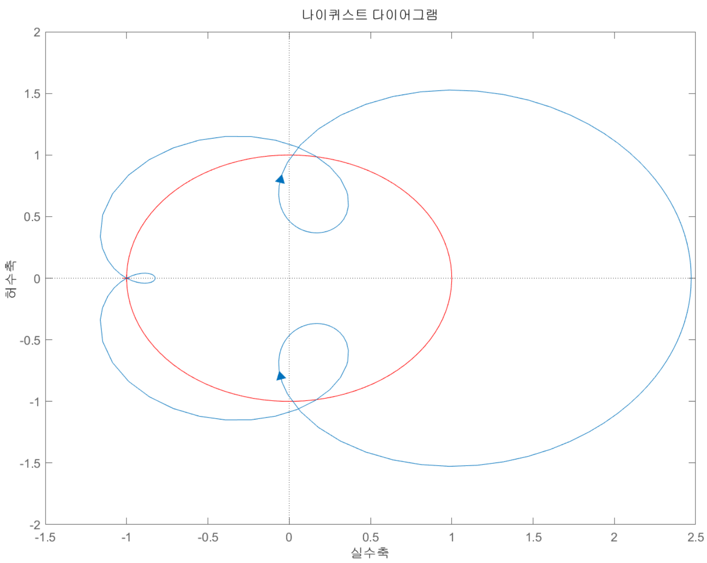
3.d.

위에서 구한 $K = 0.989$일 때의 nyquist plot을 그리면 다음과 같습니다.

$$1 + K\frac{z^3 + 0.5}{z^4 - 0.4z^2} = 0$$

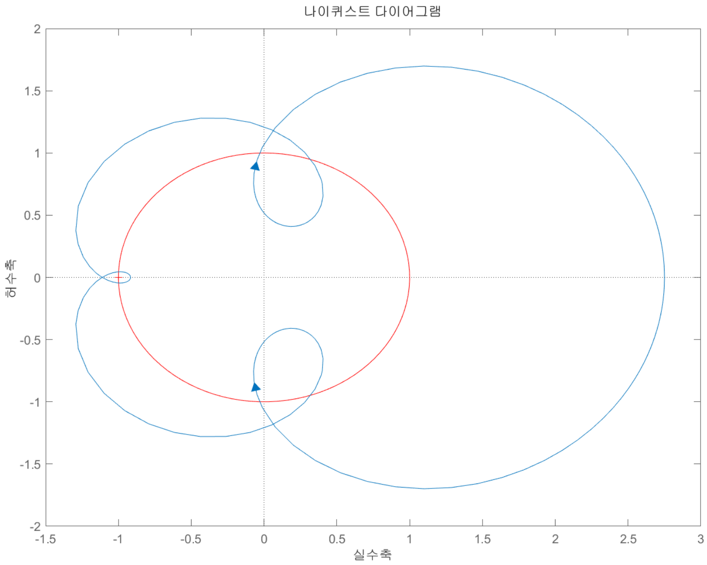
또한, unstable P는 0임을 위 식을 통해 알 수 있습니다.

```
T = 0.2;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);
K = 0.989;

% 단위원 생성
theta = linspace(0,2*pi(),100);
x = sin(theta);
y = cos(theta);

plot(x,y,'red')
hold on
nyquist(K*F_tf)
hold off
```



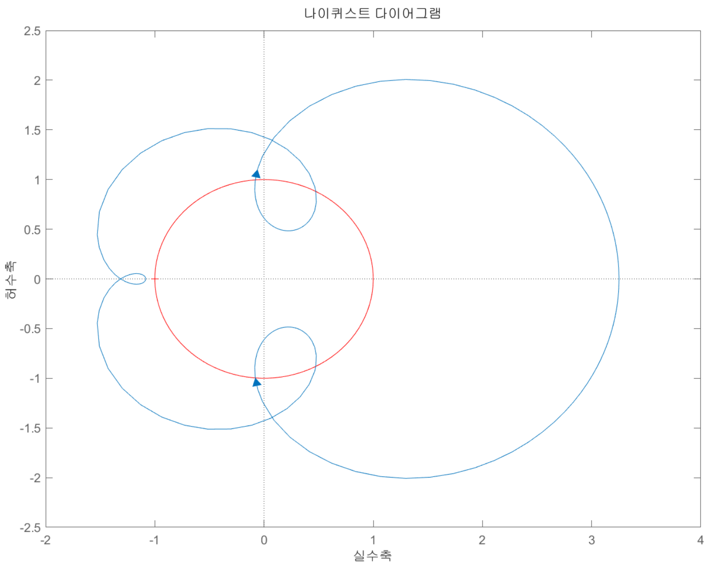
이를 보면 경로가 -1을 지나며 gain margin과 phase margin이 0인 것을 알 수 있습니다.

$K = 1.1$일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 두 번 감쌉니다. 따라서, 이 closed loop system은 단위원 외부에 (Z = N + P) 2개의 pole이 있으므로 불안정합니다.

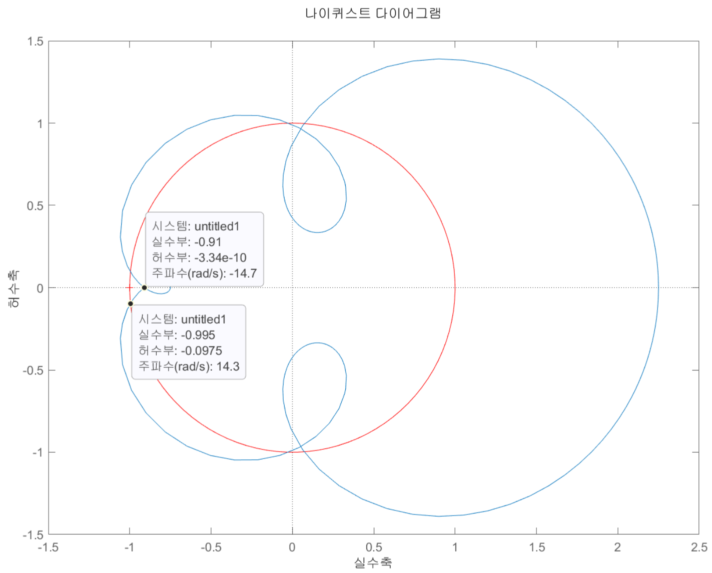
$K = 1.3$일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 한 번 감쌉니다. 따라서, 이 closed loop system은 단위원 외부에 (Z = N + P) 1개의 pole이 있으므로 불안정합니다.

따라서 $K = 0.989$보다 크면 시스템이 안정하지 않음을 알 수 있습니다.

$K = 0.9$일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 감싸지 않습니다. 그러므로, 이 closed loop system은 단위원 외부에 (Z = N + P) 0개의 pole이 있으며, 따라서 안정합니다.
또한, phase margin과 gain margin이 증가한 것을 알 수 있습니다. 따라서 $K = 0.989$보다 작으면 시스템이 안정함을 알 수 있습니다.

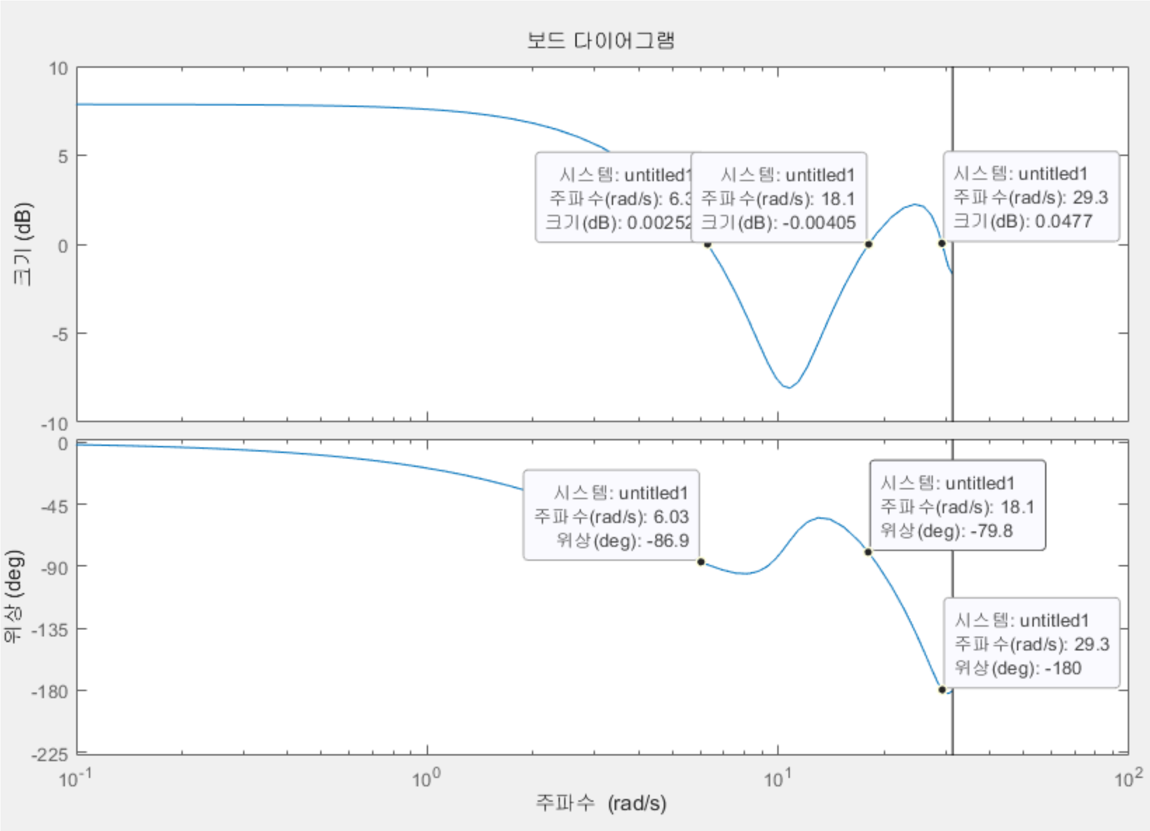
따라서 $F^d(z)$가 안정하도록 하는 K의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 < K < 0.989$$

3.e.

위에서 구한 $K = 0.989$일 때의 bode plot을 그리면 다음과 같습니다.

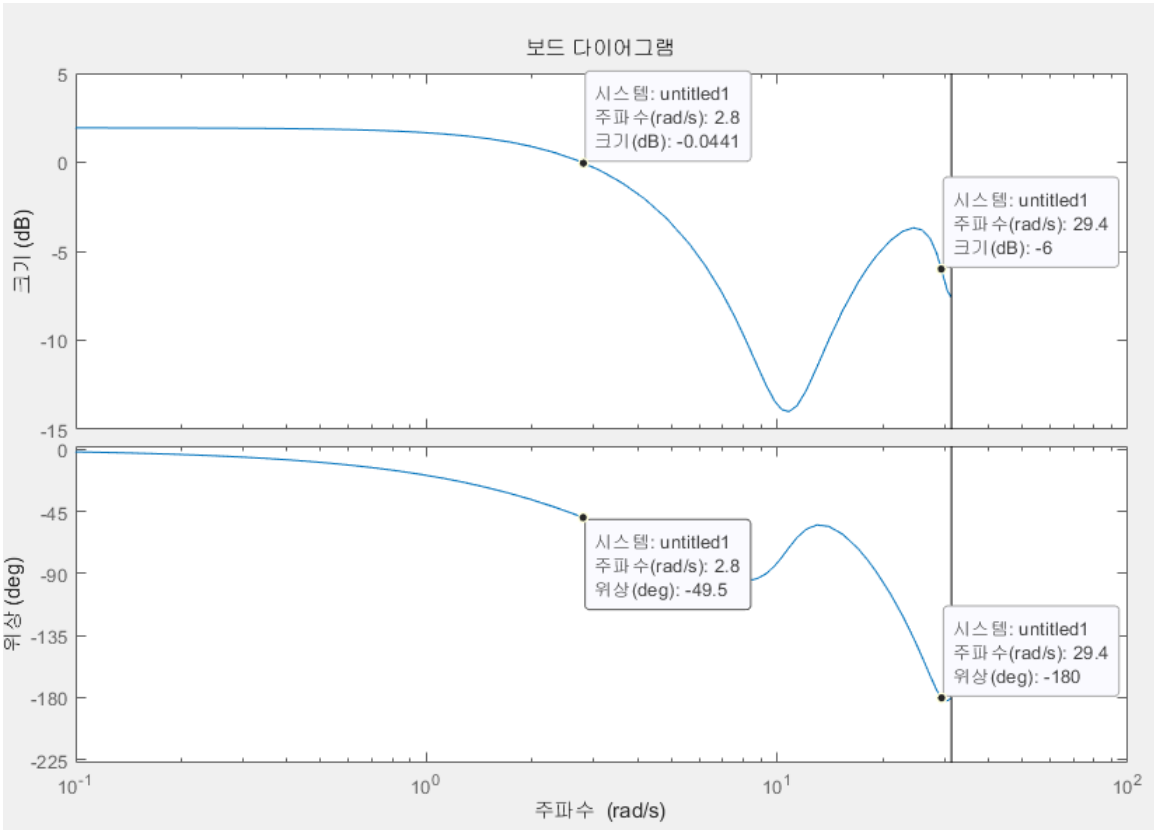
```
T = 0.1;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);
K = 0.989;

bode(K*F_tf)
```



위상이 -180일 때 gain(dB)이 0에 가깝고, gain이 0에 가까운 모든 지점에서는 phase margin이 0 이상 있습니다.

$K = 0.5$일 때의 bode plot을 그려봅니다.

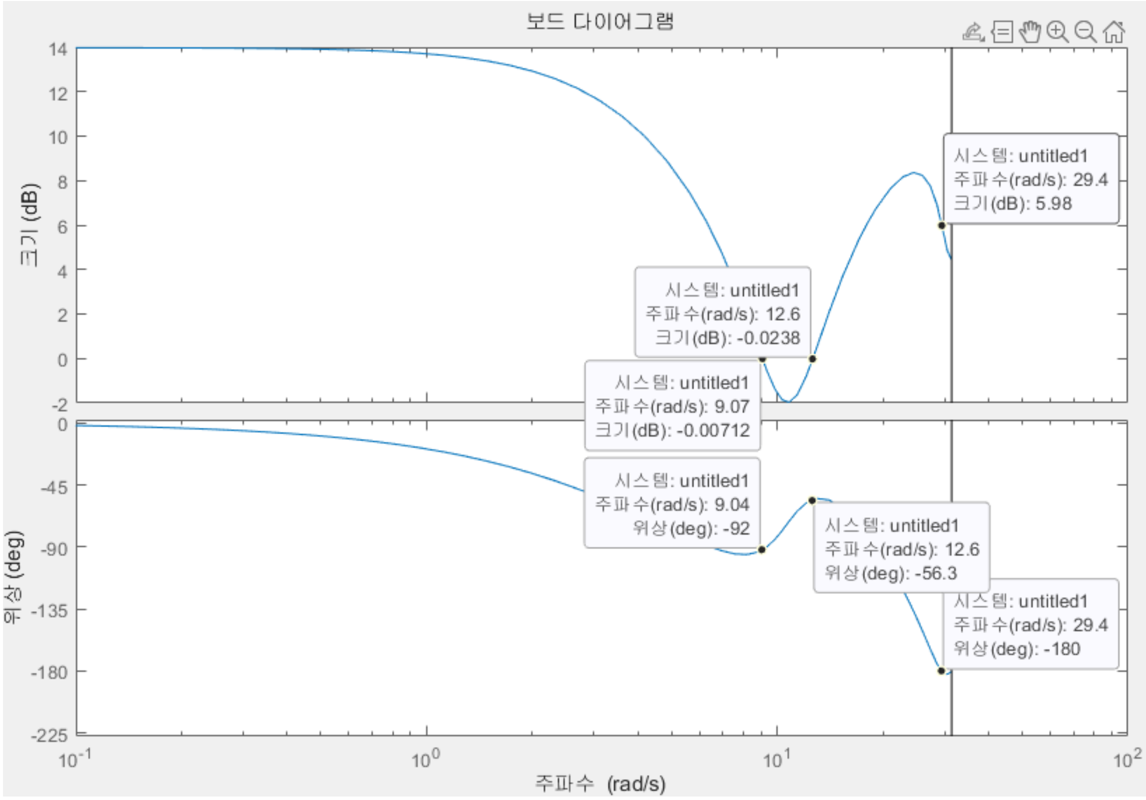
```
K = 0.5;
bode(K*F_tf)
```



위상이 -180일 때 gain(dB)이 -6으로 gain margin이 충분하고, phase margin도 충분한 것을 볼 수 있습니다. 따라서 이 상황에서는 시스템은 안정합니다.

$K = 2$일 때의 bode plot을 그려봅니다.

```
K = 2;
bode(K*F_tf)
```



위상이 -180일 때 gain(dB)이 양수이므로 시스템이 안정하지 않음을 알 수 있습니다.

따라서 $F^d(z)$가 안정하도록 하는 K의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 < K < 0.989$$