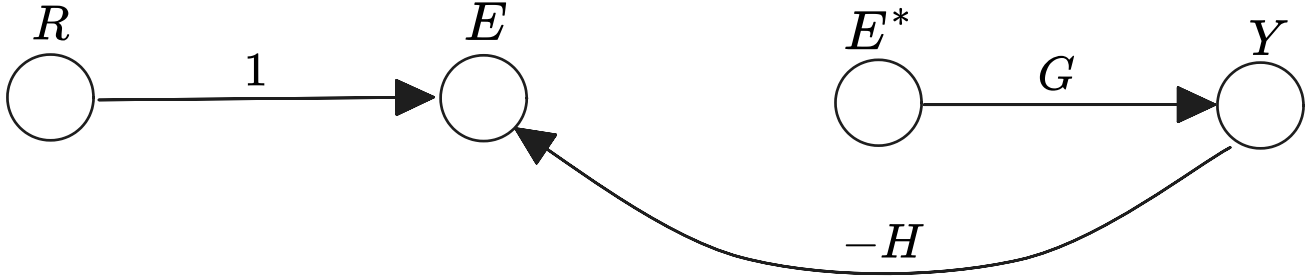


2019440102_이진우_HW02

1.a.

우선 original signal flow graph를 그립니다. ($G = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p$)



이때 샘플러의 input은 E , output은 E^* 입니다.

E 와 Y 를 나타냅니다.

$$E = R - HGE^*$$

$$Y = GE^*$$

위 두 식의 양 변에 모두 starred transform을 취합니다.

$$E^* = R^* - \overline{HG}^* E^*$$

$$E^* = \frac{R^*}{1 + \overline{HG}^*}$$

$$Y^* = G^* E^*$$

이 두 식을 정리하여 $\frac{Y^*}{R^*}$ 전달함수를 만듭니다.

$$\frac{Y^*}{R^*} = \frac{G^*}{1 + \overline{HG}^*} \quad (1)$$

이 식을 z-transform하기 위해 각 G, \overline{HG} 를 z-transform해줍니다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} \\ G^d(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{0.2z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{0.2}{z-1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} HG(s) &= \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} \\ \overline{HG}^d(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1/\tau}{s^2(s + 1/\tau)} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \frac{z [(0.2/\tau - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - 0.2/\tau e^{-0.2/\tau})]}{(1/\tau)(z-1)^2(z - e^{-0.2/\tau})} \\ &= \frac{(0.2/\tau - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - (0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z - e^{-0.2/\tau})} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1), (2), (3)에 따라 전달함수의 z-transform은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
Y^d(z)/R^d(z) &= \frac{G^d(z)}{1 + \overline{HG}^d(z)} \\
&= \frac{\frac{0.2}{z-1}}{1 + \frac{(0.2/\tau - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - (0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z - e^{-0.2/\tau})}} \\
&= \frac{0.2(1/\tau)(z - e^{-0.2/\tau})}{(1/\tau)(z-1)(z - e^{-0.2/\tau}) + ((0.2/\tau) - 1 + e^{-0.2/\tau})z + (1 - e^{-0.2/\tau} - (0.2/\tau)e^{-0.2/\tau})} \\
&= \frac{0.2(z - e^{-0.2/\tau})}{(z-1)(z - e^{-0.2/\tau}) + (0.2 - \tau + \tau e^{-0.2/\tau})z + (\tau - \tau e^{-0.2/\tau} - 0.2e^{-0.2/\tau})} \\
&= \frac{0.2(z - \epsilon)}{z^2 + (-(0.8 + \tau) + (\tau + 1)\epsilon)z + (\tau + (0.8 - \tau)\epsilon)}, \quad (\epsilon = e^{-0.2/\tau})
\end{aligned}$$

1.b.

전달함수의 분모와 분자에 $V^d(z)$ 를 곱하고 각 Y^d , R^d 에 분자, 분모를 할당합니다. 또한, 그 식에 inverse z-transform을 취합니다.

$$\begin{aligned}
Y^d(z) &= 0.2(z - \epsilon)V^d(z) \\
\rightarrow y^d(k) &= 0.2v^d(k) - 0.2\epsilon v^d(k+1) \\
R^d(z) &= \{z^2 + (-(0.8 + \tau) + (\tau + 1)\epsilon)z + (\tau + (0.8 - \tau)\epsilon)\}V^d(z) \\
\rightarrow r^d(k) &= v^d(k+2) + (-(0.8 + \tau) + (\tau + 1)\epsilon)v^d(k+1) + (\tau + (0.8 - \tau)\epsilon)v^d(k) \\
v^d(k+2) &= ((0.8 + \tau) - (\tau + 1)\epsilon)v^d(k+1) + (-\tau + (\tau - 0.8)\epsilon)v^d(k) + r^d(k)
\end{aligned}$$

위 식을 토대로 이산 시간 상태변수 모델을 만듭니다.

$$\begin{aligned}
\left(x^d(k) = \begin{bmatrix} v^d(k) \\ v^d(k+1) \end{bmatrix}, x^d(k+1) = \begin{bmatrix} v^d(k+1) \\ v^d(k+2) \end{bmatrix} \right) \\
x^d(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau + (\tau - 0.8)\epsilon & (0.8 + \tau) - (\tau + 1)\epsilon \end{bmatrix} x^d(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r^d(k) \\
y^d(k) &= [0.2 \quad -0.2\epsilon] x^d(k) \\
A^d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau + (\tau - 0.8)e^{-0.2/\tau} & (0.8 + \tau) - (\tau + 1)e^{-0.2/\tau} \end{bmatrix} \\
B^d &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
C^d &= [0.2 \quad -0.2e^{-0.2/\tau}]
\end{aligned}$$

1.c.

A^d 의 특성방정식을 구합니다.

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A^d - I\lambda) \\
&= -\lambda \left((0.8 + \tau) - (\tau + 1)e^{-0.2/\tau} - \lambda \right) + \tau + (0.8 - \tau)e^{-0.2/\tau} \\
&= \lambda^2 - \left((0.8 + \tau) - (\tau + 1)e^{-0.2/\tau} \right) \lambda + \tau + (0.8 - \tau)e^{-0.2/\tau}
\end{aligned}$$

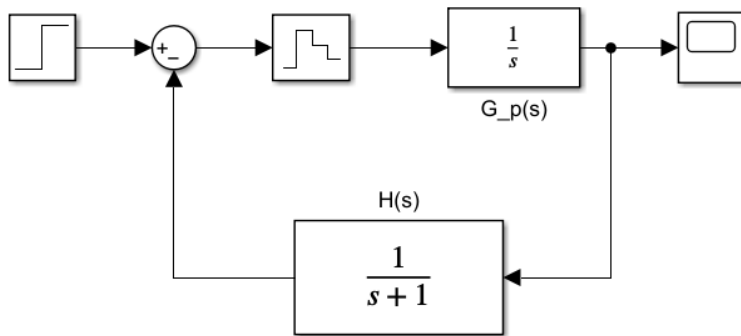
이때 이 시스템이 안정하려면 A^d 의 모든 eigenvalue가 단위원에 들어와야 합니다. 따라서, 위 이차식의 근의 크기가 1보다 작아야 합니다. 이 조건을 식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
(b &= -(0.8 + \tau) + (\tau + 1)e^{-0.2/\tau}) \\
(c &= \tau + (0.8 - \tau)e^{-0.2/\tau}) \\
\lambda &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c} \\
c \geq 0 : & \left| -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c} \right| \leq 1 \\
c < 0 : & \frac{b^2}{4} + c^2 \leq 1
\end{aligned}$$

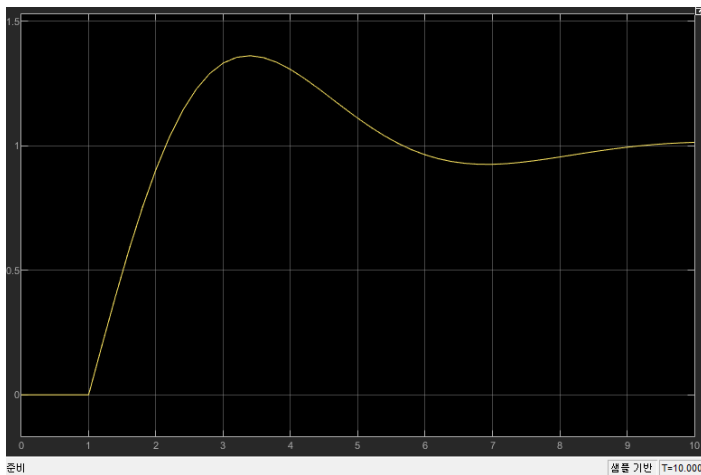
1.d.

$\tau = 1$ 일 때 $b = -0.16254$, $c = 0.83625$ 로 1.c의 조건을 만족합니다. 따라서 $H(s) = \frac{1}{s+1}$ 을 사용하였습니다.

폐루프 시스템 :



출력 파형 :



2.a.

matlab을 이용해 $G^d(z)$ 를 구하면 다음과 같습니다.

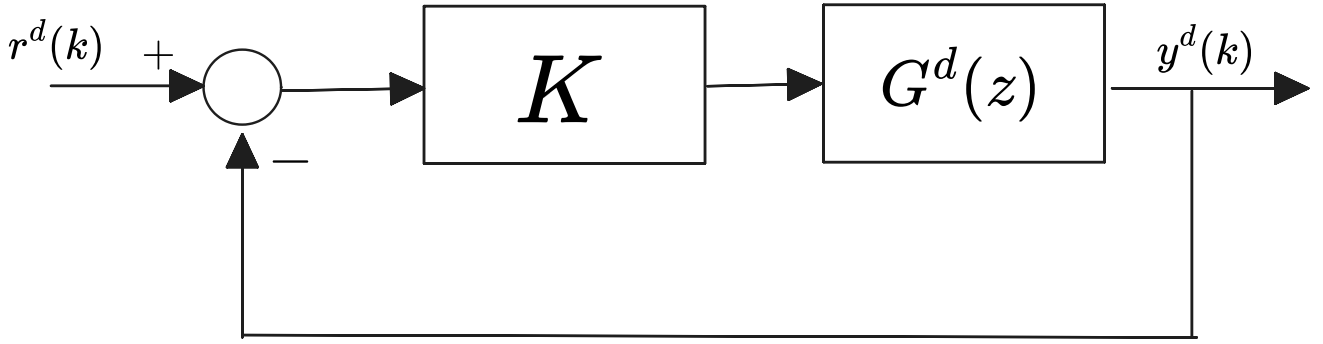
```
Gp_tf = tf(1,[1 1 0]);
T = 0.2;
Gd_tf = c2d(Gp_tf,T,'zoh')
```

Gd_tf =

```
0.01873 z + 0.01752
-----
z^2 - 1.819 z + 0.8187
```

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.

그러면 다음과 같은 폐루프 시스템과 같습니다



따라서 이것의 전달함수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 Y^d(z)/R^d(z) &= \frac{KG^d(z)}{1 + KG^d(z)} \\
 &= \frac{K \frac{0.01873z+0.01752}{z^2-1.819z+0.8187}}{1 + K \frac{0.01873z+0.01752}{z^2-1.819z+0.8187}} \\
 &= \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.819z + 0.8187 + K(0.01873z + 0.01752)} \\
 &= \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K)}
 \end{aligned}$$

2.b.

$K = 1$ 일 때 final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$\begin{aligned}
 y^d(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.01873z + 0.01752}{z^2 - 1.80027z + 0.83622} \cdot \frac{z}{z-1} \\
 &= \frac{0.03625}{0.03595} \\
 &= 1.0083
 \end{aligned}$$

$$e_{ss} = 1 - y^d(\infty) = -0.0083$$

$K = 10$ 일 때 final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$\begin{aligned}
 y^d(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.1873z + 0.1752}{z^2 - 1.6317z + 0.9939} \cdot \frac{z}{z-1} \\
 &= \frac{0.3625}{0.3622} \\
 &= 1.00083
 \end{aligned}$$

$$e_{ss} = 1 - y^d(\infty) = -0.00083$$

2.c.

final value theorem을 사용하여 정상상태 추종 오차를 구합니다.

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (r^d(k) - y^d(k)) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) (1 - Y^d(z)/R^d(z)) R^d(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \left[1 - \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K)} \right] \cdot \frac{Tz}{(z - 1)^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K) - K(0.01873z + 0.01752)}{(z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K))(z - 1)} Tz \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 - 1.819z + 0.8187)Tz}{(z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K))(z - 1)} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)(z - 0.817)Tz}{(z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K))(z - 1)} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 0.817)Tz}{(z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K))} \\
&= \frac{0.183T}{0.03625K + 0.0004}
\end{aligned}$$

이때 e_{ss} 가 존재하기 위해선 시스템이 안정해야 합니다. 따라서, 시스템이 안정하도록 하는 K의 범위를 구해야 합니다.

Jury의 안정도 판별법을 사용합니다.

$$z^2 + (K0.01873 - 1.819)z + (0.8187 + 0.01752K)$$

$$\begin{array}{ccc}
z^0 & z^1 & z^2 \\
\hline
0.8187 + 0.01752K & -1.819 + 0.01873K & 1
\end{array}$$

$$\rightarrow |0.8187 + 0.01752K| < 1$$

$$\rightarrow -103.807 < K < 10.3482$$

K의 최댓값은 10.3482로 이를 e_{ss} 에 대입하면 e_{ss} 의 최솟값이 나옵니다.

이는 0.0177 입니다.

3.a.

$$F^d(z) = z^4 + Kz^3 - 0.4z^2 + 0.5K = 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
z^0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^4 \\
\hline
0.5K & 0 & -0.4 & K & 1 \\
1 & K & -0.4 & 0 & 0.5K \\
\frac{1}{4}K^2 - 1 & -K & -\frac{1}{5}K + \frac{2}{5} & \frac{1}{2}K^2 & \\
\frac{1}{2}K^2 & -\frac{1}{5}K + \frac{2}{5} & -K & \frac{1}{4}K^2 - 1 & \\
-\frac{3}{16}K^4 - \frac{1}{2}K^2 + 1 & -\frac{3}{20}K^3 - \frac{1}{5}K^2 + K & \frac{9}{20}K^3 + \frac{1}{10}K^2 + \frac{1}{5}K - \frac{2}{5} & &
\end{array}$$

$$|0.5K/1| < 1 \rightarrow |K| < 2$$

$$\rightarrow K < 2$$

$$\left| \left(\frac{1}{4}K^2 - 1 \right) / \left(\frac{1}{2}K^2 \right) \right| > 1$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{K^2} \right| > 1$$

$$\rightarrow 0 < K < \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$$

$$\left| \left(-\frac{3}{16}K^4 - \frac{1}{2}K^2 + 1 \right) / \left(\frac{9}{20}K^3 + \frac{1}{10}K^2 + \frac{1}{5}K - \frac{2}{5} \right) \right| > 1$$

$$\rightarrow (0 < K < 0.989183) \vee (2 < K)$$

$$\therefore 0 < K < 0.989183$$

3.b.

$$F^d(z) = z^4 + Kz^3 - 0.4z^2 + 0.5K = 0$$

Bilinear transform하여 w 에 대해 특성다항식을 정리합니다.

이때 시스템의 안정성은 $T > 0$ 에 독립합니다. 따라서 $T = 2$ 를 넣어 생각합니다.

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$$

$$F^d\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 + K\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 0.4\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.5K = 0$$

$$(1+w)^4 + K(1+w)^3(1-w) - 0.4(1+w)^2(1-w)^2 + 0.5K(1-w)^4 = 0$$

$$\begin{aligned} & (0.6 - 0.5K)w^4 + (4 - 4K)w^3 \\ & + (6.8 + 5K)w^2 + 4w \\ & + (0.6 + 1.5K) = 0 \end{aligned}$$

정리된 특성다항식에 Routh-Hurwitz 판별법을 사용합니다.

$$\begin{array}{c|ccc} w^4 & 0.6 - 0.5K & 6.8 + 5K & 0.6 + 1.5K \\ w^3 & 4 - 4K & 4 & 0 \\ w^2 & a & 0.6 + 1.5K & \\ w^1 & b & 0 & \\ w^0 & 0.6 + 1.5K & & \end{array}$$

$$a = \frac{(0.6 - 0.5K)4 - (6.8 + 5K)(4 - 4K)}{-(4 - 4K)}$$

$$b = \frac{(4 - 4K)^2(0.6 + 1.5K)}{(0.6 - 0.5K)4 - (6.8 + 5K)(4 - 4K)} + 4$$

첫 열에 있는 수들이 모두 양수이도록 하는 $K(K > 0)$ 를 찾습니다.

$$\begin{aligned} 0.6 - 0.5K &> 0 \\ \rightarrow K &< 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 - 4K &> 0 \\ \rightarrow K &< 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ \rightarrow (0 < K < 0.9911) \vee (1 < K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &> 0 \\ \rightarrow 0.850 < K \end{aligned}$$

$$\therefore 0.850 < K < 0.9911$$

3.c.

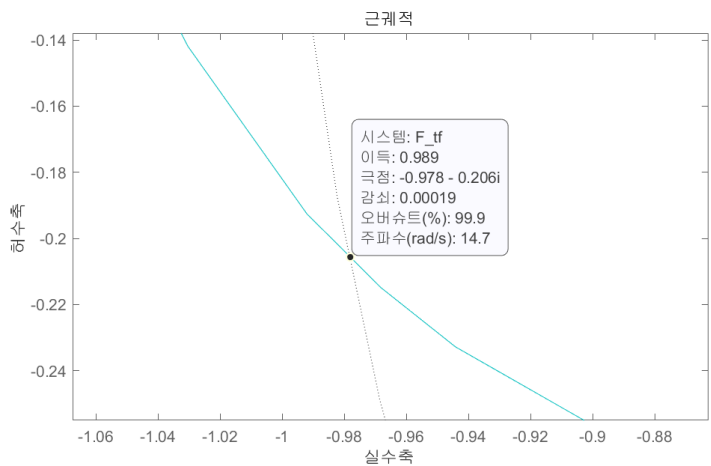
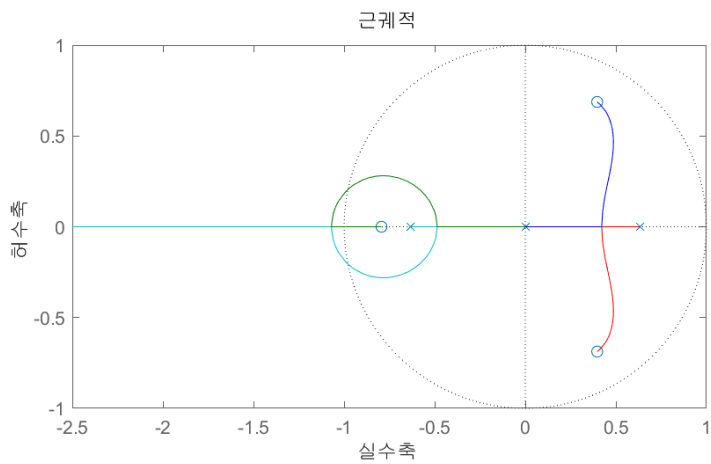
특성방정식은 다음과 같이 정리될 수 있습니다.

$$\begin{aligned} z^4 + Kz^3 - 0.4z^2 + 0.5K &= 0 \\ \rightarrow 1 + K\frac{z^3 + 0.5}{z^4 - 0.4z^2} &= 0 \end{aligned}$$

따라서 이것의 root locus를 MATLAB을 사용하여 그리면 다음과 같이 나옵니다.

```
T = 0.2;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);

rlocus(F_tf)
```



이때 단위원 위에서의 이득(K)는 위의 사진과 같이 0.989이며, 여기에서 이득(K)가 증가하게 되면, 근 하나가 단위원을 완전히 벗어납니다.

따라서 $F^d(z)$ 가 안정하도록 하는 K 의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 < K < 0.989$$

3.d.

위에서 구한 $K = 0.989$ 일 때의 nyquist plot을 그리면 다음과 같습니다.

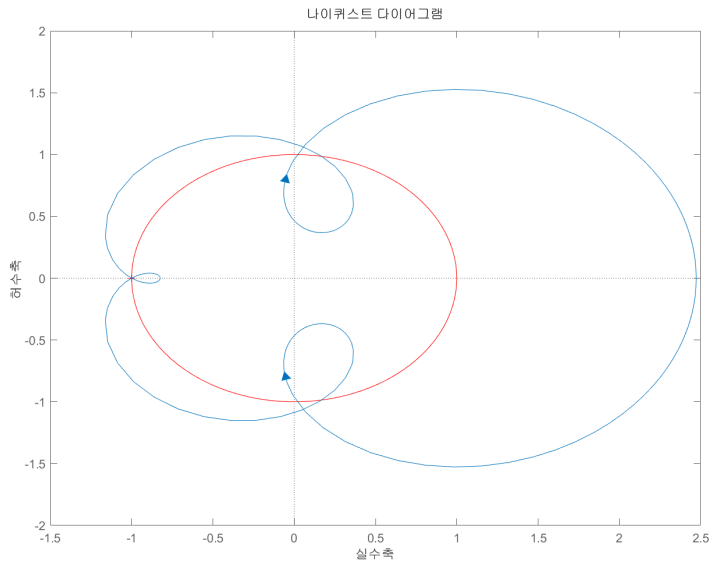
$$1 + K \frac{z^3 + 0.5}{z^4 - 0.4z^2} = 0$$

또한, unstable P는 0임을 위 식을 통해 알 수 있습니다.

```
T = 0.2;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);
K = 0.989;

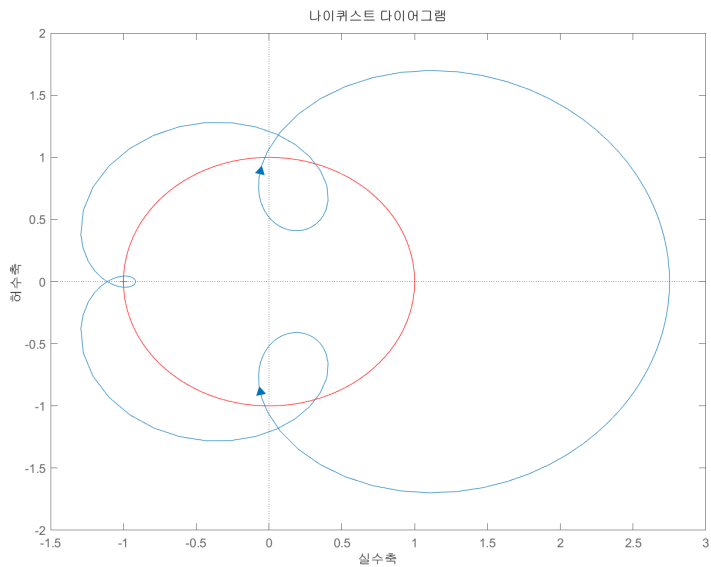
% 단위원 생성
theta = linspace(0,2*pi(),100);
x = sin(theta);
y = cos(theta);

plot(x,y,'red')
hold on
nyquist(K*F_tf)
hold off
```



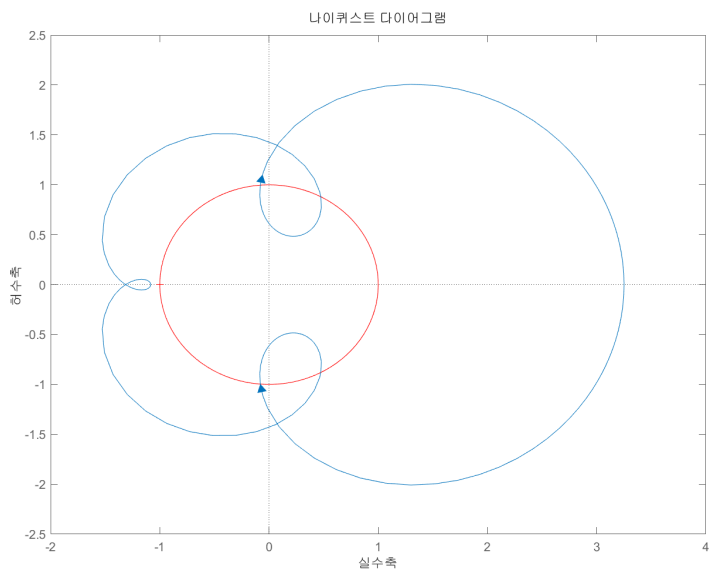
이를 보면 경로가 -1을 지나며 gain margin과 phase margin이 0인 것을 알 수 있습니다.

$K = 1.1$ 일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 두 번 감쌉니다. 따라서, 이 closed loop system은 단위원 외부에 ($Z = N + P$) 2개의 pole이 있으므로 불안정합니다.

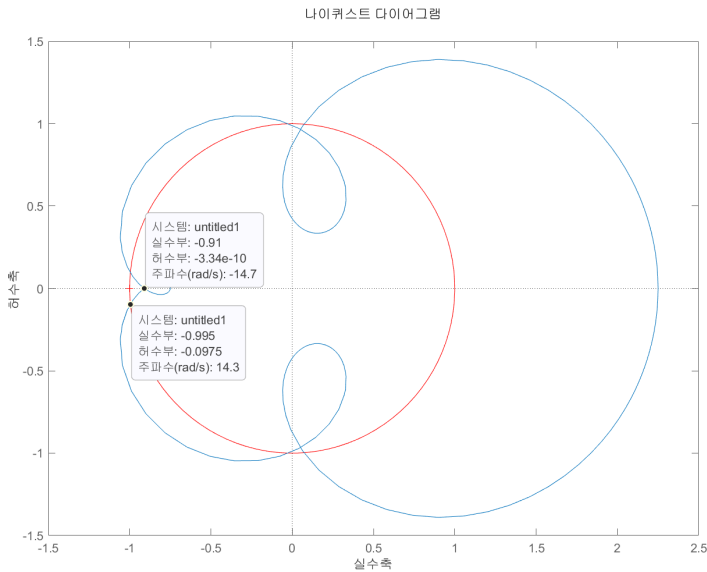
$K = 1.3$ 일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 한 번 감쌉니다. 따라서, 이 closed loop system은 단위원 외부에 ($Z = N + P$) 1개의 pole이 있으므로 불안정합니다.

따라서 $K = 0.989$ 보다 크면 시스템이 안정하지 않음을 알 수 있습니다.

$K = 0.9$ 일 때는 다음과 같이 그려집니다.



-1을 경로가 시계방향으로 감싸지 않습니다. 그러므로, 이 closed loop system은 단위원 외부에 ($Z = N + P$) 0개의 pole이 있으며, 따라서 안정합니다.

또한, phase margin과 gain margin이 증가한 것을 알 수 있습니다. 따라서 $K = 0.989$ 보다 작으면 시스템이 안정함을 알 수 있습니다.

따라서 $F^d(z)$ 가 안정하도록 하는 K 의 범위는 다음과 같습니다.

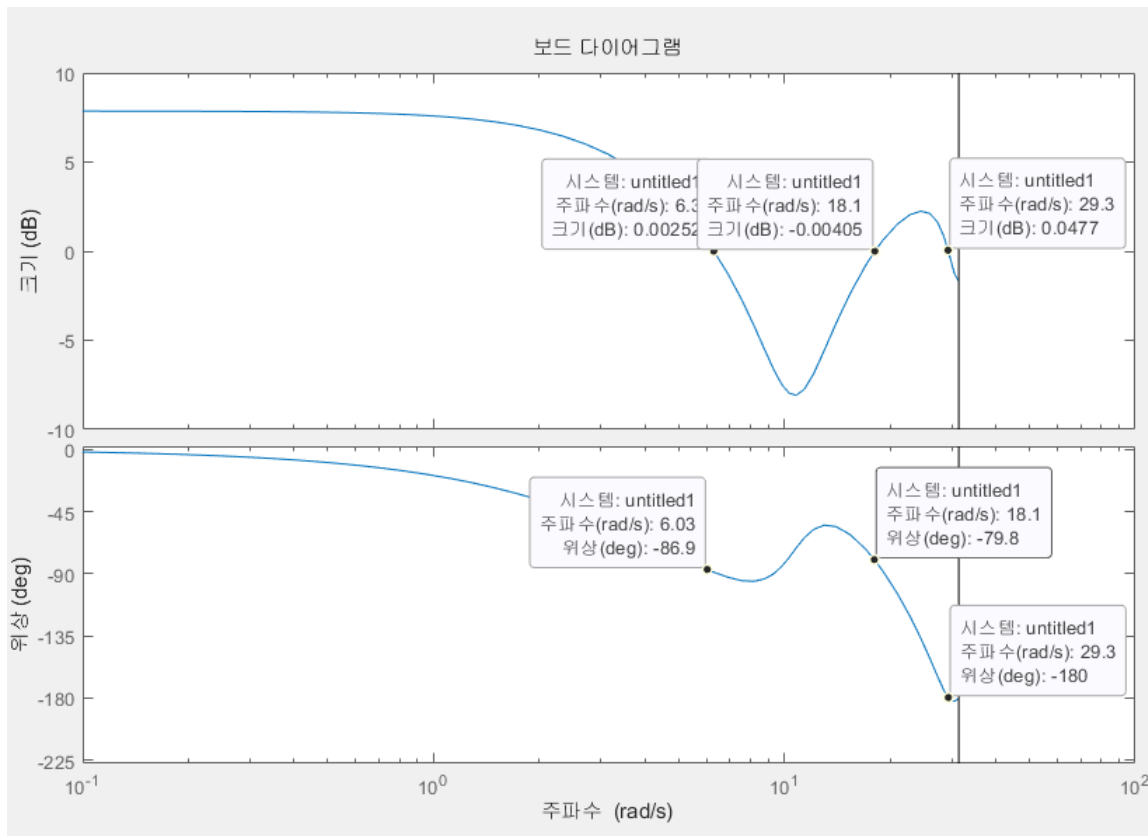
$$0 < K < 0.989$$

3.e.

위에서 구한 $K = 0.989$ 일 때의 bode plot을 그리면 다음과 같습니다.

```
T = 0.1;
num = [1 0 0 0.5];
den = [1 0 -0.4 0 0];
F_tf = tf(num,den,T);
K = 0.989;

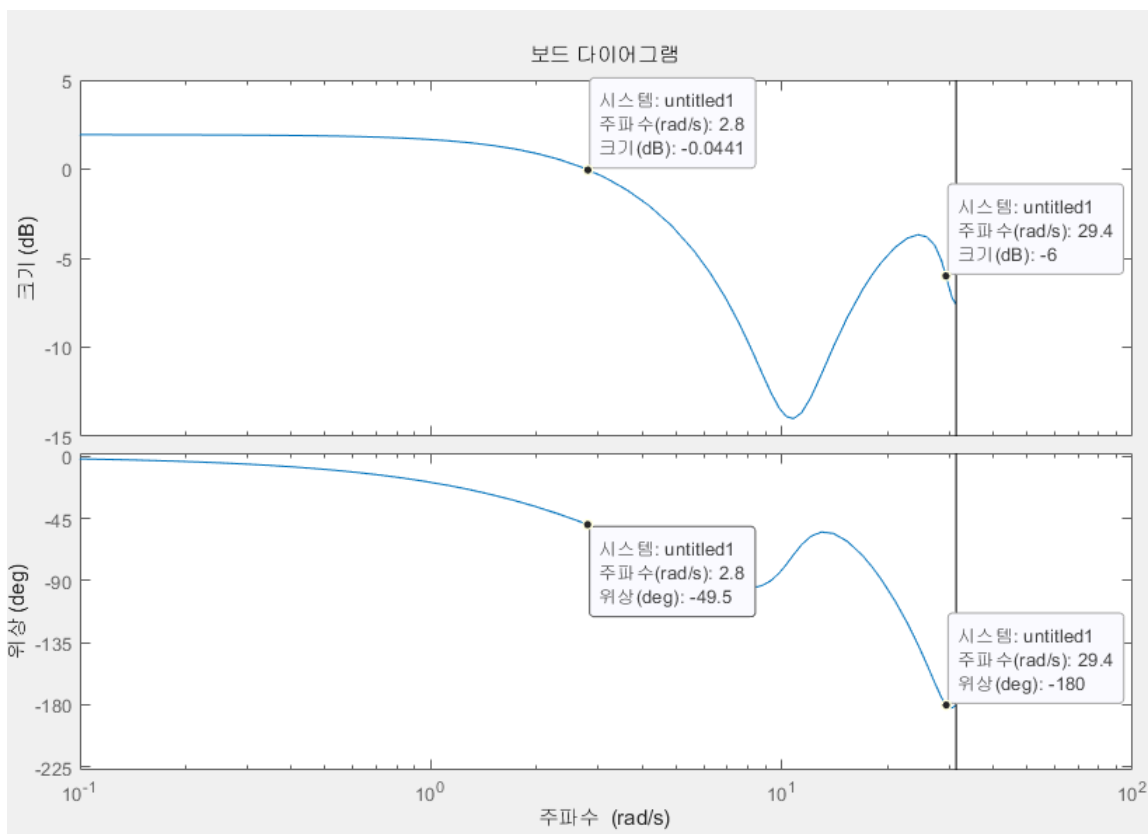
bode(K*F_tf)
```



위상이 -180 일 때 gain(dB)이 0에 가깝고, gain이 0에 가까운 모든 지점에서는 phase margin이 0 이상 있습니다.

$K = 0.5$ 일 때의 bode plot을 그려봅니다.

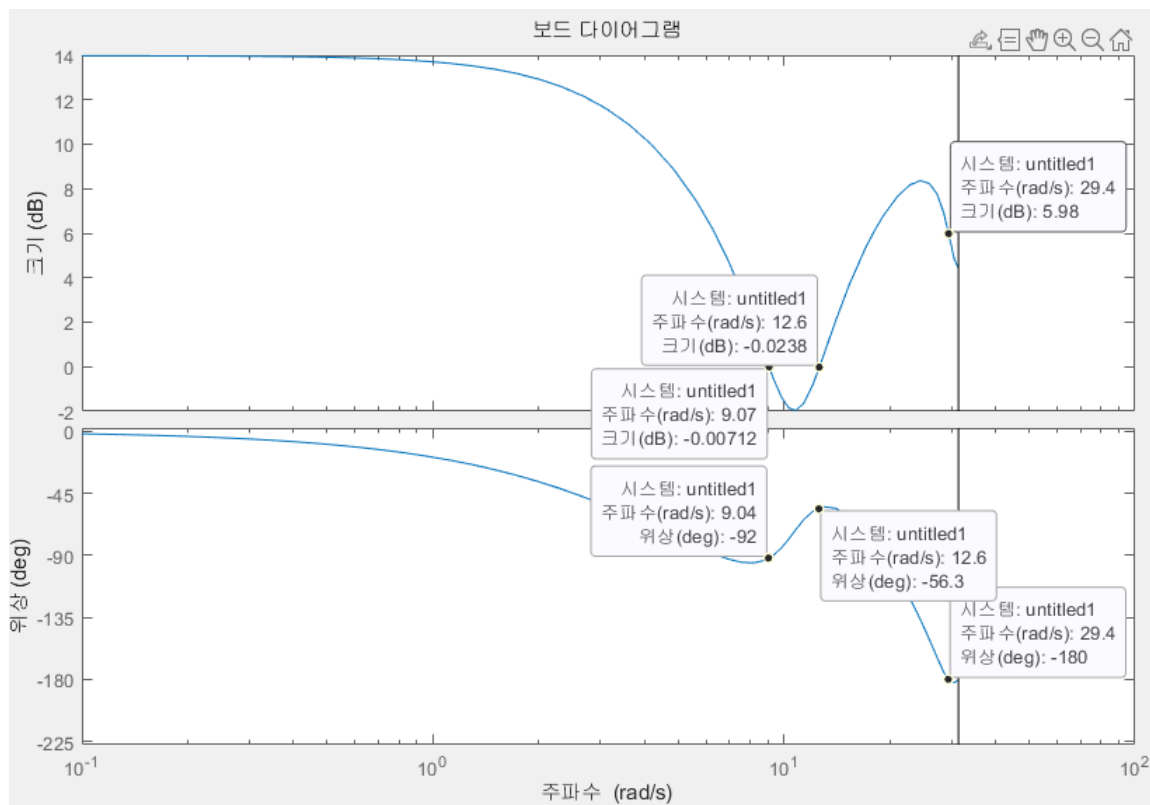
```
K = 0.5;
bode(K*F_tf)
```



위상이 -180 일 때 gain(dB)이 -6 으로 gain margin이 충분하고, phase margin도 충분한 것을 볼 수 있습니다. 따라서 이 상황에서는 시스템은 안정합니다.

$K = 2$ 일 때의 bode plot을 그려봅니다.

```
K = 2;  
bode(K*F_tf)
```



위상이 -180일 때 gain(dB)이 양수이므로 시스템이 안정하지 않음을 알 수 있습니다.

따라서 $F^d(z)$ 가 안정하도록 하는 K 의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 < K < 0.989$$