

1.

(a) state-variable model

$$G_p(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+3)X(s)}{(s^2+3s+2)X(s)}$$

$$Y(s) = (s+3)X(s)$$

$$U(s) = (s^2+3s+2)X(s)$$

모든 초기값은 0으로 가정하여 Inverse Laplace transform합니다.

$$y(t) = \dot{x} + 3x(t)$$

$$u(t) = \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -3\dot{x}(t) - 2x(t) + u(t)$$

이를 행렬식으로 변환하면 다음과 같습니다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$$

따라서 결과는 다음과 같습니다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 3]$$

$$\mathbf{D} = [0]$$

(b) 전달함수 계산

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$
$$= [1 \quad 3] \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s^2+3s+2} [1 \quad 3] \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

(c) z - transform

$$\begin{aligned} G^d(z) &= \mathcal{Z} \left[G_p(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[\frac{(s+3)(1 - e^{-Ts})}{(s)(s+1)(s+2)} \right] \end{aligned}$$

이를 다음과 같이 $G(s) = B(s)F^*(s)$ 로 나누어 생각합니다.

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \\ B^d(z) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{z-1} - 2 \cdot \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} \\ F^*(s) &= 1 - e^{-Ts} \\ F^d(z) &= 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z} \end{aligned}$$

이때 다음과 같은 식들이 성립하므로

$$\begin{aligned} G(s) &= B(s)F^*(s) \\ G^*(s) &= B^*(s)F^*(s) \\ G^d(z) &= B^d(z)F^d(z) \end{aligned}$$

$G^d(z)$ 는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} G^d(z) &= B^d(z)F^d(z) \\ &= \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}} \end{aligned}$$

(d) sampled-data system's pulse transfer function & discrete state-space model with MATLAB

p1_d.m 파일 :

```
% 샘플링 주기 0.2s
T = 0.2;

% state space
state_sys = ss([-3 -2; 1 0], [1; 0], [1 3], 0);
d_state_sys = c2d(state_sys, T);

% 결과 출력

% 펄스 전달함수(이산시간 전달함수)
tf(d_state_sys)
```

% 이산시간 상태공간 모델
d_state_sys

실행 결과 :

```
>> p1_b
```

ans =

$$\frac{0.1977 z - 0.1081}{z^2 - 1.489 z + 0.5488}$$

샘플 시간 : 0.2 seconds

이산시간 전달 함수입니다.

모델 속성

d_state_sys =

A =

	x1	x2
x1	0.5219	-0.2968
x2	0.1484	0.9671

B =

	u1
x1	0.1484
x2	0.01643

C =

	x1	x2
y1	1	3

D =

	u1
y1	0

샘플 시간 : 0.2 seconds

이산시간 상태공간 모델입니다.

모델 속성

(e) Independent DC gain

$$G^d(z) = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}}$$

$$G^d(1) = \frac{3}{2}$$

위와 같이 DC gain을 구하기 위해 z 에 1을 대입하면, T 와 관련된 모든 항이 0이 됩니다. 따라서, DC gain은 샘플링 주기에 독립입니다.

2.

(a)

우선, 상태변수 모델로부터 전달함수를 구합니다.

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

위에서 구한 전달함수와 zero order hold의 곱을 z-transform 합니다.

$$\begin{aligned} G^d(z) &= \mathcal{Z} \left[G_p(s) \frac{1-e^{-Ts}}{s} \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[\frac{(-1)(1-e^{-Ts})}{s(s+2)(s+3)} \right] \end{aligned}$$

이때 $G(s) = B(s)F^*(s)$ 로 두고 구하게 됩니다.

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{-1}{s(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3} \\ B^d(z) &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{-3T}} \\ F^*(s) &= 1 - e^{-Ts} \\ F^d(z) &= 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z} \end{aligned}$$

따라서 펄스 전달함수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} G^d(z) &= B^d(z)F^d(z) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-3T}} \end{aligned}$$

(b)

p2_b.m 파일 :

```
T = 0.2

dsys = tf(-1,6,T) + tf([1 -1],[2 -2*exp(-2*T)],T) ...
      - tf([1 -1],[3 -3*exp(-3*T)],T);

dsys
```

실행 결과 :

```
>> p2_b

dsys =

      -0.52 z - 0.3725
      -----
    36 z^2 - 43.89 z + 13.24
```

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성

펄스 전달함수 :

$$\frac{-0.52z - 0.3725}{36z^2 - 43.89z + 13.24}$$

(c)

p2_c.m 파일 :

```
% 주기
T = 0.2;

% 2.b 결과
sys_d = tf(-1,6,T) + tf([1 -1],[2 -2*exp(-2*T)],T) ...
      - tf([1 -1],[3 -3*exp(-3*T)],T);

% 분모의 최고차항을 1로 맞춘다.
sys_d.Numerator{1,1} = sys_d.Numerator{1,1}/sys_d.Denominator{1,1}(1,1);
sys_d.Denominator{1,1} = sys_d.Denominator{1,1}/sys_d.Denominator{1,1}(1,1);

sys_d
```

```
% 2.c 결과
state_c = ss([-3 0;0 -2],[1;1],[1 -1],0);
tf_c = tf(state_c);
tf_d = c2d(tf_c,T);

tf_d
```

실행 결과 :

```
>> p2_c

sys_d =

    -0.01444 z - 0.01035
    -----
    z^2 - 1.219 z + 0.3679
```

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성

```
tf_d =

    -0.01444 z - 0.01035
    -----
    z^2 - 1.219 z + 0.3679
```

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성

두 전달함수는 같음을 알 수 있습니다.

3.

다음 식이 주어졌으며

$$D^d(z) = 2 + \frac{4}{z-1} \quad e^d(k) = 2 \sin \frac{1}{2}k$$

$u^d(k)$ 를 구해야 합니다.

우선, $D^d(z)$ 를 inverse z-transform한 식을 $d^d(k)$ 라고 하겠습니다.

이때, $u^d(k)$ 는 $d^d(k)$ 와 $e^d(k)$ 의 컨볼루션입니다. 따라서 다음과 같이 전개할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
u^d(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^{j\omega(k-n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2d^d(n) \sin\left(\frac{1}{2}(k-n)\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{1}{2}k\right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) \cos\left(\frac{1}{2}n\right) \right\} - 2 \cos\left(\frac{1}{2}k\right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) \sin\left(\frac{1}{2}n\right) \right\} \quad (1)
\end{aligned}$$

DTFT(Discrete Time Fourier Transform)의 정의를 생각해봅시다.

$$\begin{aligned}
\hat{d}^d(j\omega) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) [\cos(\omega n) - j \sin(\omega n)] \quad (2)
\end{aligned}$$

이에 따라, 다음 등식이 성립합니다.

$$\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) \left[\cos\left(\frac{1}{2}n\right) - j \sin\left(\frac{1}{2}n\right) \right] \quad (3)$$

식 (1), (3)에 따라, 다음 등식이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
u^d(k) &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}k\right) \Re \left[\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) \right] + 2 \cos\left(\frac{1}{2}k\right) \Im \left[\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) \right] \\
&= 2 \left| \hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) \right| \left\{ \sin\left(\frac{1}{2}k\right) \cos\left(\angle \hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{2}k\right) \sin\left(\angle \hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right) \right\} \\
&= 2 \left| \hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) \right| \sin\left(\frac{1}{2}k + \angle \hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right) \quad (4)
\end{aligned}$$

z-transform의 정의를 생각해봅시다.

$$D^d(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) z^{-n}$$

이때, $z = e^{j\omega}$ 를 대입해봅시다.

$$D^d(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^{-j\omega n}$$

이는 식 (2)의 DTFT의 정의와 같습니다. 따라서 다음과 같은 등식이 성립합니다.

$$\begin{aligned}
\hat{d}^d(j\omega) &= D^d(e^{j\omega}) \\
\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) &= D^d\left(e^{\frac{1}{2}j}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}j} - 1} \\
&= 2 + \frac{1}{\cos(0.5) + j\sin(0.5) - 1} \\
&\approx 2.467\angle -52.55^\circ = 2.467\angle -0.92
\end{aligned} \tag{5}$$

식 (4), (5)에 따라 다음 등식이 성립합니다.

$$\therefore u^d(k) = 4.934 \sin(0.5k - 0.92)$$