1.

(a) state-variable model

$$
\begin{aligned}
G_p(s) &= \frac{s+3}{s^2+3s+2} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{(s+3)X(s)}{(s^2+3s+2)X(s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (s+3)X(s) \\
U(s) &= (s^2+3s+2)X(s)
\end{aligned}
$$

모든 초기값은 0으로 가정하여 Inverse Laplace transform합니다.

$$
y(t) = \dot{x} + 3x(t)
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) \\
\ddot{x}(t) &= -3\dot{x}(t) - 2x(t) + u(t)
\end{aligned}
$$

이를 행렬식으로 변환하면 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

따라서 결과는 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D} &= [0]
\end{aligned}
$$

(b) 전달함수 계산

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{s+3}{s^2+3s+2}
\end{aligned}
$$

(c) z - transform

$$
\begin{aligned}
G^d(z) &= \mathcal{Z}\left[G_p(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] \\
&= \mathcal{Z}\left[\frac{(s+3)(1-e^{-Ts})}{(s)(s+1)(s+2)}\right]
\end{aligned}
$$

이를 다음과 같이 $G(s) = B(s)F^*(s)$로 나누어 생각합니다.

$$
\begin{aligned}
B(s) &= \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} \\
B^d(z) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1} - 2\cdot\frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-2T}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^*(s) &= 1 - e^{-Ts} \\
F^d(z) &= 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}
\end{aligned}
$$

이때 다음과 같은 식들이 성립하므로

$$
\begin{aligned}
G(s) &= B(s)F^*(s) \\
G^*(s) &= B^*(s)F^*(s) \\
G^d(z) &= B^d(z)F^d(z)
\end{aligned}
$$

$G^d(z)$는 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
G^d(z) &= B^d(z)F^d(z) \\
&= \frac{3}{2} - 2\cdot\frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z-1}{z-e^{-2T}}
\end{aligned}
$$

(d) sampled-data system's pulse transfer function & discrete state-space model with MATLAB

p1_d.m 파일 :

```
% 샘플링 주기 0.2s
T = 0.2;

% state space
state_sys = ss([-3 -2;1 0],[1;0],[1 3],0);
d_state_sys = c2d(state_sys,T);

% 결과 출력

% 펄스 전달함수(이산시간 전달함수)
tf(d_state_sys)
```

```
% 이산시간 상태공간 모델
d_state_sys
```

실행 결과 :

```
>> p1_b

ans =

    0.1977 z - 0.1081
  ----------------------
  z^2 - 1.489 z + 0.5488

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성

d_state_sys =

  A = 
             x1       x2
   x1    0.5219  -0.2968
   x2    0.1484   0.9671

  B = 
             u1
   x1    0.1484
   x2   0.01643

  C = 
        x1  x2
   y1    1   3

  D = 
        u1
   y1    0

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 상태공간 모델입니다.
모델 속성
```

(e) Independent DC gain

$$G^d(z) = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}}$$
$$G^d(1) = \frac{3}{2}$$

위와 같이 DC gain을 구하기 위해 z에 1을 대입하면, T와 관련된 모든 항이 0이 됩니다.
따라서, DC gain은 샘플링 주기에 독립입니다.

2.

(a)

우선, 상태변수 모델로부터 전달함수를 구합니다.

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

위에서 구한 전달함수와 zero order hold의 곱을 z-transform 합니다.

$$\begin{aligned} G^d(z) &= \mathcal{Z}\left[G_p(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{(-1)(1-e^{-Ts})}{s(s+2)(s+3)}\right] \end{aligned}$$

이때 $G(s) = B(s)F^*(s)$로 두고 구하게 됩니다.

$$B(s) = \frac{-1}{s(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3}$$
$$B^d(z) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{-3T}}$$

$$F^*(s) = 1 - e^{-Ts}$$
$$F^d(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

따라서 펄스 전달함수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} G^d(z) &= B^d(z)F^d(z) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-3T}} \end{aligned}$$

(b)

p2_b.m 파일 :

```
T = 0.2

dsys = tf(-1,6,T) + tf([1 -1],[2 -2*exp(-2*T)],T) ...
        - tf([1 -1],[3 -3*exp(-3*T)],T);

dsys
```

실행 결과 :

```
>> p2_b

dsys =

     -0.52 z - 0.3725
  ------------------------
  36 z^2 - 43.89 z + 13.24

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성
```

펄스 전달함수 :

$$\frac{-0.52z - 0.3725}{36z^2 - 43.89z + 13.24}$$

(c)

p2_c.m 파일 :

```
% 주기
T = 0.2;

% 2.b 결과
sys_d = tf(-1,6,T) + tf([1 -1],[2 -2*exp(-2*T)],T) ...
        - tf([1 -1],[3 -3*exp(-3*T)],T);

% 분모의 최고차항을 1로 맞춘다.
sys_d.Numerator{1,1} = sys_d.Numerator{1,1}/sys_d.Denominator{1,1}(1,1);
sys_d.Denominator{1,1} = sys_d.Denominator{1,1}/sys_d.Denominator{1,1}(1,1);

sys_d
```

```
% 2.c 결과
state_c = ss([-3 0;0 -2],[1;1],[1 -1],0);
tf_c = tf(state_c);
tf_d = c2d(tf_c,T);

tf_d
```

실행 결과 :

```
>> p2_c

sys_d =

   -0.01444 z - 0.01035
  ----------------------
  z^2 - 1.219 z + 0.3679

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성

tf_d =

   -0.01444 z - 0.01035
  ----------------------
  z^2 - 1.219 z + 0.3679

샘플 시간: 0.2 seconds
이산시간 전달 함수입니다.
모델 속성
```

두 전달함수는 같음을 알 수 있습니다.

3.

다음 식이 주어졌으며

$$D^d(z) = 2 + \frac{4}{z-1} \qquad e^d(k) = 2\sin\frac{1}{2}k$$

$u^d(k)$를 구해야 합니다.

우선, $D^d(z)$를 inverse z-transform한 식을 $d^d(k)$라고 하겠습니다.

이때, $u^d(k)$는 $d^d(k)$와 $e^d(k)$의 컨볼루션입니다. 따라서 다음과 같이 전개할 수 있습니다.

$$
\begin{aligned}
u^d(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^d(k-n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2d^d(n) \sin\left(\frac{1}{2}(k-n)\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{1}{2}k\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} d^d(n)\cos\left(\frac{1}{2}n\right)\right\} - 2\cos\left(\frac{1}{2}k\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} d^d(n)\sin\left(\frac{1}{2}n\right)\right\} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

DTFT(Discrete Time Fourier Transform)의 정의를 생각해봅니다.

$$
\begin{aligned}
\hat{d}^d(j\omega) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^{-j\omega n} \qquad (2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) \left[\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)\right]
\end{aligned}
$$

이에 따라, 다음 등식이 성립합니다.

$$
\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n)\left[\cos\left(\frac{1}{2}n\right) - j\sin\left(\frac{1}{2}n\right)\right] \qquad (3)
$$

식 (1), (3)에 따라, 다음 등식이 성립합니다.

$$
\begin{aligned}
u^d(k) &= 2\sin\left(\frac{1}{2}k\right)\Re\left[\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right] + 2\cos\left(\frac{1}{2}k\right)\Im\left[\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right] \\
&= 2\left|\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right|\left\{\sin\left(\frac{1}{2}k\right)\cos\left(\sphericalangle\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{2}k\right)\sin\left(\sphericalangle\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right)\right\} \\
&= 2\left|\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right|\sin\left(\frac{1}{2}k + \sphericalangle\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right)\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

z-transform의 정의를 생각해봅니다.

$$
D^d(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) z^{-n}
$$

이때, $z = e^{j\omega}$를 대입해봅니다.

$$
D^d(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} d^d(n) e^{-j\omega n}
$$

이는 식 (2)의 DTFT의 정의와 같습니다. 따라서 다음과 같은 등식이 성립합니다.

$$
\begin{aligned}
\hat{d}^d(j\omega) &= D^d(e^{j\omega}) \\
\hat{d}^d\left(\frac{1}{2}j\right) &= D^d\left(e^{\frac{1}{2}j}\right) \\
&= 2 + \frac{4}{e^{\frac{1}{2}j} - 1} \\
&= 2 + \frac{4}{\cos(0.5) + j\sin(0.5) - 1} \\
&\approx 7.833\angle -1.57
\end{aligned} \tag{5}
$$

식 (4), (5)에 따라 다음 등식이 성립합니다.

$$
\therefore u^d(k) = 15.666\sin(0.5k - 1.57)
$$