Álgebra Lineal

Tema 3: Espacios Vectoriales

`ingenierocontracabrones.blogspot.com`

`mclnaranjito@gmail.com`

25 de agosto de 2016

Índice general

Capítulo 3

Espacios Vectoriales y Aplicaciones lineales

3.1. Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $(K, +, \cdot)$ es un grupo abeliano $(V, +)$ dotado con una operación externa $K \times V \to V$, que verifica las siguientes propiedades:

1. Distributiva respecto a escalares $\to \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
2. Distributiva respecto a vectores $\to (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
3. Asociativa $\to \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
4. Modular $\to 1 \cdot v = v$

Con $\lambda,\ \mu \in K$ y $v, w\ \in V$.
Si el espacio vectorial en cuestión tiene como cuerpo a los números reales será un espacio vectorial real, mientras que si tiene a los números complejos se denotará como espacio vectorial complejo.
Veamos a continuación un ejemplo práctico para su mejor comprensión:

Ejemplo 1

Demostrar que el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, con las operaciones suma y producto usuales, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales:
Demostremos que $(\mathbb{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial:
Partiendo de que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo, comprobamos que $(\mathbb{C}, +)$ es grupo abeliano:

1. Operación interna: La suma de números complejos es una operación interna ya que da como resultado otro número complejo:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i \in \mathbb{C}$$

2. Propiedad asociativa: La suma de números complejos es asociativa, ya que:

$$(a+bi)+[(c+di)+(e+fi)] = [(a+bi)+(c+di)]+(e+fi) = (a+c+e)+(b+d+f)i$$

3. Existencia de elemento neutro $(0 + 0i)$, ya que:

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$$

4. Existencia de elemento simétrico $[(-a) + (-b)i]$, ya que:

$$(a + bi) + [(-a) + (-b)i] = (0 + 0i)$$

5. Propiedad conmutativa: La suma de números complejos es conmutativa, ya que:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi) = (a + b) + (c + d)i$$

Es trivial demostrar que el producto de escalares reales con números complejos es operación externa, ya que el producto de un número real por un número complejo sigue siendo un número complejo:

$$r * (a + bi) = ra + rbi \in \mathbb{C} \quad \text{con } r, a, b \in \mathbb{R}$$

Por lo que $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \dot{\to} \mathbb{C}$.

Para terminar demostramos las cuatro propiedades que hacen que un grupo abeliano con operacion externa e interna sea un espacio vectorial sobre el cuerpo, en este caso, de los números reales:

1. Distributiva respecto a escalares:

$$r[(a+bi)+(c+di)] = r(a+bi)+r(c+di) = (ra+rc)+(rb+rd)i$$

2. Distributiva respecto a vectores:

$$(r+s)(a+bi) = r(a+bi)+s(a+bi) = (ra+sa)+(rb+sb)i$$

3. Asociativa:

$$r[(a+bi)(c+di)] = [r(a+bi)](c+di) = (rac-rbd)+(rad+rbc)i$$

4. Modular:

$$1 \cdot (a+bi) = a+bi$$

Con $r, s, a, b, c, d \ \in \mathbb{R}$

Y así queda demostrado que el cuerpo de los números complejos, con las operaciones de suma y producto, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

3.2. Subespacio vectorial

3.3. Dependencia e independencia lineal

3.3.1. Sistema generador

3.3.2. Base

3.3.3. Base de un subespacio

3.3.4. Cooredenadas y cambio de base

3.4. Operaciones con subespacios

3.5. Aplicación lineal

3.5.1. Matriz de una aplicación lineal

3.5.2. Matriz de una composición

3.5.3. Cambio de base en aplicaciones lineales

3.5.4. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

3.6. Matrices y determinantes

3.7. Sistemas y ecuaciones lineales

3.7.1. Teorema de Rouché-Fröbenius

3.7.2. Regla de Cramer

3.7.3. Método de Gauss

3.7.4. Factorización LU