



Il gradiente analitico del modello Heston++ e il suo utilizzo nella calibrazione consistente con le opzioni VIX

Matteo Paggiaro

Laurea Magistrale in Mathematical Engineering

Indirizzo Quantitative Finance

Politecnico di Milano

Relatore: Professor Daniele Marazzina

Correlatore: Professor Guido Germano

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

La tesi presenta un algoritmo per la calibrazione completa ed efficiente dei modelli di volatilità stocastica Heston e Heston++, consistente con le superfici di volatilità implicita di due mercati differenti, le opzioni dell'indice SPX e dell'indice VIX. L'algoritmo si basa sulla formulazione della calibrazione come un problema ai minimi quadrati non lineare, e utilizza il gradiente analitico dei prezzi delle opzioni dei due mercati. Viene proposta un'espressione formale del gradiente dei prezzi delle opzioni VIX e SPX secondo il modello Heston++, la cui correttezza è stata verificata sia analiticamente che numericamente. Le performance dell'algoritmo, basato sul metodo Levenberg-Marquardt, mostrano come la calibrazione del modello Heston++ non richieda un costo computazionale aggiuntivo rispetto al modello Heston. Nelle simulazioni effettuate, si riesce a trovare con successo i parametri ottimi dei modelli nel 100% dei casi; la velocità e la robustezza dell'algoritmo lo rendono adatto a un utilizzo su larga scala. La calibrazione dei prezzi di mercato evidenzia come l'aggiunta di uno *shift* deterministico sulla volatilità garantisca una stima più accurata delle due superfici di volatilità, in particolare riducendo notevolmente l'errore relativo medio delle opzioni VIX.

Abstract

This thesis presents an algorithm for the complete and efficient calibration of the stochastic volatility models Heston and Heston++, consistent with the implied volatility surfaces of two different markets, namely vanilla options written on SPX index and options written on VIX index. The algorithm is based on the formulation of calibration as a non-linear least squares problem, and exploits the analytical gradient of the option prices of the two models. A formal expression of the Heston++ model is proposed, and its correctness has been verified both analytically and numerically. The performances of the algorithm, which is based on Levenberg-Marquardt method, show that the calibration of Heston++ model is achieved without any additional computational costs with respect to the traditional Heston model. The proposed algorithm succeeds in finding the optimal parameters of both models in 100% of the simulations; the speed and the robustness of the method make it suitable for practical trading. The calibration of market prices points out how the introduction of a deterministic shift in the volatility process guarantees a more accurate estimate of the two different implied volatility surfaces; in particular, the mean relative error on VIX prices is significantly reduced.

Indice

Sommario	3
Abstract	4
Indice	6
Introduzione	7
1 Letteratura	9
1.1 L'indice VIX: derivazione e caratteristiche	10
1.2 Modelli stocastici dell'indice di volatilità	11
1.2.1 Modelli <i>stand-alone</i>	11
1.2.2 Modelli consistenti	12
1.3 Il modello di Heston	12
1.3.1 La volatilità implicita nel modello di Heston	13
1.3.2 Il superamento del modello di Heston tradizionale	14
1.4 Heston++ e l'introduzione del displacement	15
1.4.1 Teoremi per il pricing dei derivati con Heston++	15
2 Metodologia	19
2.1 Formulazione del problema della calibrazione	19
2.2 Funzioni caratteristiche dei processi nel modello \mathcal{H}	21
2.2.1 Funzione caratteristica f_x	22
2.2.2 Funzione caratteristica f_v	23
2.3 Gradiente analitico nel modello $\mathcal{H}++$	24
2.3.1 Gradiente dei prezzi delle opzioni SPX	25

2.3.2	Gradiente dei prezzi delle opzioni VIX	27
2.3.3	Derivate dei prezzi rispetto al displacement ϕ_t	29
2.3.4	Forma finale del gradiente nel modello \mathcal{H}^{++}	31
3	Calibrazione: algoritmo Levenberg-Marquardt	33
3.1	Il metodo di Gauss-Newton	34
3.2	Il metodo della discesa del gradiente	36
3.3	Il metodo Levenberg-Marquardt	37
3.3.1	Limiti dell'algoritmo	40
4	Risultati numerici	41
4.1	Delta di un'opzione e <i>implied volatility</i>	42
4.2	Descrizione del portafoglio di calibrazione	43
4.3	Validazione del metodo di calibrazione	45
4.4	Performance	46
4.5	Calibrazione dei prezzi di mercato	55
5	Conclusioni e sviluppi futuri	65
	Bibliografia	67

Introduzione

Le recenti crisi finanziarie hanno comportato un forte aumento della domanda di derivati legati alla volatilità del mercato. Questa crescente domanda ha portato a un mercato decisamente liquido per i derivati finanziari scritti sull'indice di volatilità VIX ([Carr et al., 2009](#)).

La popolarità di questi derivati è in gran parte dovuta alla correlazione negativa tra l'indice VIX e l'indice S&P500 ([Pompa, 2015](#)), che permette di poter utilizzare le opzioni *call* VIX come un valido strumento per proteggersi dal rischio di shock negativi del mercato. La continua crescita di questo settore finanziario ha attratto l'interesse delle istituzioni finanziarie e della ricerca accademica, e sono stati proposti diversi modelli stocastici per descrivere accuratamente le dinamiche dell'indice VIX e i prezzi delle opzioni scritte su questo indice. Negli ultimi anni, la ricerca si è concentrata sullo sviluppo di modelli stocastici che fossero in grado di descrivere simultaneamente le caratteristiche dei derivati di entrambi gli indici S&P500 e VIX.

In quest'ottica, la calibrazione di un modello è cruciale quanto il modello stesso. Calibrare un modello consiste nel trovare dei valori dei parametri caratteristici del modello che permettano di replicare i prezzi osservati sul mercato nella maniera più precisa possibile. Sia l'accuratezza che la velocità della calibrazione sono dei fattori cruciali, poiché le più importanti banche d'investimento e istituzioni finanziarie utilizzano i parametri calibrati del modello di riferimento per una vasta gamma di applicazioni, come per esempio prezzare strumenti finanziari derivati esotici complessi, sviluppare strategie di trading ad alta frequenza, e occuparsi dell'*hedging* di portafogli di strumenti finanziari ([Cui et al., 2017](#)).

In questa tesi, analizzeremo i principali modelli di volatilità stocastica volti a descrivere congiuntamente le caratteristiche dei mercati dei derivati dei due indici S&P500 e VIX, e ci soffermeremo su due modelli in particolare: il modello Heston ([Heston, 1993](#)) e

quello Heston++ (Pacati et al., 2014). Descriveremo, mediante esempi e analisi, i vantaggi e i limiti di questi due modelli nella descrizione simultanea dei due mercati di riferimento. Proporremo poi un algoritmo in grado di calibrare con precisione e velocità i modelli di Heston e di Heston++ utilizzando simultaneamente i prezzi dei derivati provenienti da entrambi i mercati. Mostreremo come l'algoritmo, basato sul gradiente analitico dei prezzi dei derivati dei due mercati, garantisca velocità di convergenza, stabilità e robustezza. Una volta descritte le basi matematiche e le proprietà dell'algoritmo, ci soffermeremo sulle performance di calibrazione dei due modelli, e verificheremo l'efficacia dell'algoritmo proposto prima simulando aleatoriamente dei prezzi sintetici, e poi calibrando i prezzi reali di mercato. Confronteremo infine i due modelli proposti, alla luce dei risultati della calibrazione dei prezzi di mercato.

La tesi è strutturata come segue:

- Nel **Capitolo 1** descriveremo il mercato delle opzioni VIX e i diversi modelli proposti dalla letteratura per descrivere questo mercato, soffermandoci in particolar modo sui modelli Heston e Heston++.
- Nel **Capitolo 2** formuleremo il problema della calibrazione del modello di Heston e di Heston++, formuleremo delle espressioni delle funzioni caratteristiche dei processi stocastici adatte alla derivazione analitica, e infine illustreremo il gradiente analitico del modello Heston e lo estenderemo formalmente anche per il modello di Heston++.
- Nel **Capitolo 3** proporremo un algoritmo per la calibrazione veloce ed efficiente dei due modelli analizzati, utilizzando simultaneamente opzioni provenienti da entrambi i mercati S&P500 e VIX.
- Nel **Capitolo 4** illustreremo i risultati numerici e le performance della calibrazione dei modelli con l'algoritmo proposto, unita ai risultati della calibrazione dei prezzi di mercato.
- Nel **Capitolo 5** presenteremo le principali conclusioni della ricerca svolta, metteremo in luce i limiti riscontrati e proporremo delle possibili direzioni future per continuare la ricerca sull'argomento.

Capitolo 1

Letteratura

La crescente domanda del mercato per il trading della volatilità e la gestione del rischio di volatilità ha portato al giorno d'oggi a un mercato liquido per strumenti finanziari derivati il cui payoff è esplicitamente determinato dalla volatilità di un determinato sottostante. Derivati finanziari di questo tipo sono generalmente chiamati “derivati sulla volatilità” e includono, tra gli altri, swap, futures e opzioni scritti sull'indice di volatilità conosciuto come VIX.

L'indice di volatilità VIX fu introdotto nel mercato finanziario nel 1993 dalla Chicago Board Options Exchange. Nella sua formulazione iniziale, l'indice era definito come la media delle volatilità implicite ricavate col modello Black & Scholes di otto derivati europei con sottostante l'indice S&P100, sigla OEX, prossime alla scadenza.

Nel 2003, la CBOE rivisitò completamente la definizione dell'indice VIX sotto diversi aspetti: il sottostante passò da S&P100 a S&P500 (sigla SPX), e la metodologia di volatilità implicita venne abbandonata a favore di una replicazione robusta del *variance swap rate*, sulle tracce dei risultati mostrati dalla letteratura ([Carr et al., 1999](#)). Derivati scritti sull'indice VIX furono introdotti nella seconda metà del decennio 2000: i VIX futures nel 2004, le opzioni nel 2006. La loro popolarità è dovuta alla ben nota correlazione negativa tra gli indici VIX e SPX, e questo fatto rese gli strumenti derivati dell'indice VIX degli asset globalmente usati per il trading, la diversificazione e l'hedging. Le dinamiche degli indici SPX e VIX, insieme alle opzioni riferite a entrambi i mercati, offrono una valida fonte di informazione per descrivere e capire in profondità la dinamica della volatilità del mercato. Per questo motivo, è sorta la necessità di sviluppare dei modelli per il pricing consistente di derivati sulla volatilità e derivati sul sottostante. Questi modelli devono

essere in grado di descrivere la situazione dei prezzi delle opzioni di entrambi i mercati, parallelamente a fornire una replica accurata dei prezzi di opzioni esotiche per un utilizzo in una vasta gamma di applicazioni pratiche, quali ad esempio il trading e l'hedging di portafogli.

Questo capitolo è organizzato come segue. Nella sezione 1.1 caratterizzeremo l'indice VIX. Nella sezione 1.2 discuteremo i diversi approcci teorici per descrivere la dinamica dell'indice e per prezzare le opzioni scritte su questo. La sezione 1.3 riguarda la descrizione del modello di Heston, mentre la sezione 1.4 introduce il modello di Heston con displacement, e illustra le formule per il pricing dei derivati SPX e VIX in questo modello.

1.1 L'indice VIX: derivazione e caratteristiche

L'indice VIX misura la volatilità attesa a 30 giorni dell'indice S&P500. Viene calcolato dalla CBOE come una replica della varianza realizzata nei seguenti $T = 30$ giorni utilizzando un portafoglio di opzioni SPX out-of-the-money con maturity breve, su una griglia discreta di prezzi di esercizio (CBOE, 2018). Al tempo t , la quantità:

$$\sigma_{t,T}^2 = \frac{2}{T-t} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q(K_i, t, T) - \frac{1}{T-t} \left[\frac{F(t, T)}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (1.1)$$

viene calcolata, e il corrispondente indice VIX viene poi calcolato mediante la formula:

$$\text{VIX}_t = 100 \times \sigma_{t,T}. \quad (1.2)$$

La sommatoria nell'espressione (1.1) avviene su un insieme di *strikes* di opzioni out-of-the-money aventi prezzo $Q(K_i, t, T)$, maturity T e strike pari a K_i . Il tasso di interesse privo di rischio r è il tasso equivalente all'obbligazione statunitense avente maturity T . $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{2}$ è l'intervallo tra due strikes consecutivi, e $F(t, T)$ indica il valore, al tempo t , del contratto forward dell'indice SPX avente maturity T . Infine, lo strike K_0 è il primo strike minore o uguale a $F(t, T)$.

La CBOE ha cominciato a pubblicare i prezzi dell'indice VIX ottenuto con la metodologia qui descritta dal 22 Settembre 2003, tuttavia mediante l'espressione (1.1) è possibile risalire ai valori dell'indice fino all'anno 1990.

La stampa finanziaria si riferisce comunemente all'indice VIX come *indice della paura*, poiché l'indice è considerato un barometro attendibile del sentimento degli investitori e della volatilità del mercato.

1.2 Modelli stocastici dell'indice di volatilità

L'interesse espresso da numerosi investitori verso il trading di strumenti finanziari che rispecchiano l'aspettativa del mercato sulla futura volatilità ha portato all'introduzione da parte della CBOE di futures e opzioni scritte sull'indice VIX, rispettivamente nel 2004 e nel 2006.

Le opzioni call scritte sull'indice VIX aventi maturity T e strike price K sono opzioni di tipo Europeo aventi payoff a scadenza del tipo $(VIX_T - K)^+$. Il pricing di opzioni call (e put) C_{VIX} e P_{VIX} avviene attraverso una valutazione neutrale al rischio del valore atteso attualizzato del payoff dell'opzione a scadenza:

$$\begin{aligned} C_{VIX}(K, t, T) &= e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [(VIX_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ P_{VIX}(K, t, T) &= e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [(K - VIX_T)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (1.3)$$

dove $\tau = T - t$. I prezzi delle put e delle call soddisfano la seguente famosa relazione, conosciuta nella letteratura come *put-call parity*:

$$C_{VIX}(K, t, T) - P_{VIX}(K, t, T) = e^{-r\tau} (VIX_t - K) \quad (1.4)$$

Sono stati proposti numerosi modelli stocastici per poter stimare e predire correttamente i prezzi e la superficie di volatilità implicita delle opzioni VIX. I modelli che descrivono la dinamica dell'indice VIX possono essere suddivisi in due grandi categorie: un approccio *stand-alone* e uno *consistente*.

1.2.1 Modelli *stand-alone*

Nell'approccio *stand-alone*, che può essere tradotto in italiano come “indipendente”, “autonomo”, il processo della volatilità viene modellato direttamente, separato e indipendente dal processo dell'indice sottostante. Questo approccio si focalizza quindi nel pricing dei derivati scritti sull'indice VIX, senza considerare le opzioni con sottostante SPX. Nei modelli *stand-alone* viene introdotta una dinamica per il processo VIX_t , e da questa vengono ricavate formule per il pricing dei derivati e per la calibrazione dei parametri del modello.

1.2.2 Modelli consistenti

Nonostante le espressioni per i prezzi dei derivati VIX siano facilmente e rapidamente ottenibili con i modelli *stand-alone*, il loro principale limite è la loro inconsistenza intrinseca con le opzioni vanilla scritte sul sottostante SPX. Siccome la dinamica della volatilità determina sia i derivati scritti sull'indice equity S&P500 che quelli scritti sull'indice VIX, un modello ragionevole dovrebbe essere capace di prezzare i due tipi di opzioni, rispettivamente SPX e VIX, in maniera consistente.

La caratteristica principale dei modelli *consistenti* è quindi quella di descrivere la dinamica della volatilità sottostante in modo tale da spiegare anche la relazione che intercorre tra i due indici.

Definito S_t come la dinamica neutrale al rischio dell'indice S&P500, [Lin \(2007\)](#) ha derivato una relazione che descrive l'indice VIX nel tempo in termini di valore atteso *risk-neutral* di un contratto scritto sul logaritmo di S_t :

$$\left(\frac{\text{VIX}_t}{100}\right)^2 = -\frac{2}{\bar{\tau}} E^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S_{t+\bar{\tau}}}{F(t, t+\bar{\tau})} | \mathcal{F}_t \right] \quad (1.5)$$

dove $\bar{\tau} = 30/365$, mentre $F(t, t+\bar{\tau}) = S_t e^{(r-q)\bar{\tau}}$ indica il prezzo forward del sottostante $S_t = \text{SPX}_t$.

Questa importante espressione mette in relazione la dinamica del processo SPX con quello dell'indice di volatilità VIX, ed è la base del pricing per i derivati VIX nei modelli consistenti.

1.3 Il modello di Heston

Un modello fondamentale nella categoria dei modelli consistenti, e probabilmente il più conosciuto nella letteratura, è il modello di Heston ([Heston, 1993](#); [Rouah, 2013](#)), che definisce la dinamica di S_t come:

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + S_t \sqrt{v_t} dW_t^S, \\ dv_t = \kappa (\bar{v} - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \\ dW_t^S dW_t^v = \rho dt. \end{cases} \quad (1.6)$$

Questo modello introduce la dinamica di v_t , che rappresenta il quadrato della volatilità, o varianza del mercato, come un *mean reverting process* ([Cox et al., 1985](#)).

Parametri del modello di Heston Il parametro κ indica il tasso di *mean reversion*, e controlla la velocità dell'oscillazione di v_t attorno al suo valor medio. \bar{v} è il valor medio della varianza nel lungo periodo.

Il parametro σ viene descritto come *volatilità della volatilità*, ossia la volatilità del processo v_t , che descrive la volatilità del mercato. σ determina la *curtosi* della distribuzione dei rendimenti $\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$. Quando σ è elevato, il processo della varianza è molto disperso; di conseguenza, la distribuzione dei rendimenti presenta una maggiore *curtosi* e “code spesse” (in inglese *fat tails*) rispetto a quando σ è piccolo.

Il parametro ρ rappresenta la correlazione tra i moti browniani W_t^S e W_t^v che governano i due processi stocastici. La correlazione ρ controlla la *skewness* della distribuzione di $\ln S_T$ e dei rendimenti composti nel continuo $\ln S_T/S_0$ nell'intervallo temporale $[0, T]$. Quando $\rho > 0$, la densità di probabilità presenta una *skewness* positiva, mentre quando $\rho < 0$, la *skewness* è negativa. Infine, il quinto parametro v_0 rappresenta il valore iniziale del processo di volatilità v_t quando $t = 0$.

Heston (1993) mostra come una correlazione ρ positiva porta a un aumento della varianza v_t quando l'indice S_t aumenta. Questo fenomeno comporta l'ispessimento della coda destra della distribuzione dei rendimenti di S_t , con un parallelo assottigliamento della coda sinistra. Quando la correlazione è negativa, succede l'opposto (Rouah, 2013).

1.3.1 La volatilità implicita nel modello di Heston

Un'altra importante caratteristica del modello di Heston è il distintivo *smile* nella curva delle volatilità implicite generata dai prezzi delle opzioni. La forma di questo *smile*, più comunemente conosciuto come *smirk* per la sua asimmetria, è determinata dai parametri del modello. Il parametro ρ determina la pendenza della curva di volatilità implicite, con $\rho > 0$ che determina una pendenza positiva, e $\rho < 0$ una pendenza negativa (Rouah, 2013). Le opzioni sull'*equity*, come ad esempio le opzioni sull'indice S&P500, presentano generalmente una pendenza negativa; coerentemente al modello di Heston, la correlazione stimata dai prezzi delle opzioni è, nella maggior parte dei casi, negativa.

Il parametro σ determina la curvatura della superficie di volatilità implicita, con elevati valori di σ che portano a un aumento della curvatura. Infine, i parametri κ , \bar{v} e v_0 determinano il livello medio della superficie di volatilità, con κ che influenza in certa misura anche la curvatura della superficie (Rouah, 2013).

1.3.2 Il superamento del modello di Heston tradizionale

La crescente domanda per gli strumenti di trading di volatilità durante gli anni della crisi finanziaria ha spinto l'interesse accademico verso il neonato mercato delle opzioni scritte sugli indici di volatilità, concentrandosi principalmente sulle ampiamente diffuse opzioni sull'indice VIX. Tuttavia, la transizione verso un nuovo modello non è avvenuta in maniera morbida, e tuttora c'è un dibattito in corso su quale specifica di modello sia in grado di catturare al meglio le novità strutturali introdotte dalla superficie di volatilità implicita delle opzioni VIX: una curva dalla pendenza positiva, più pronunciata per maturities brevi e più piatta per maturities maggiori, con una notevole variabilità giornaliera. [Gatheral \(2008\)](#) sottolinea che le opzioni VIX costituiscono un vero e proprio discriminante per i modelli di volatilità stocastici. Nel suo articolo, egli nota come il modello di Heston, che riesce a stimare i prezzi delle opzioni dell'indice S&P500 con sufficiente accuratezza, fallisca completamente nel prezzare le opzioni VIX, spesso producendo una superficie di volatilità implicita con una *skewness* negativa, invece che positiva come osservato sul mercato. Questo limite intrinseco del modello di Heston ha stimolato l'introduzione di numerosi modelli che fossero in grado di descrivere congiuntamente i mercati delle opzioni SPX e VIX. La complessità dei nuovi modelli proposti ha d'altra parte incentivato lo sviluppo matematico e l'implementazione numerica di tecniche sofisticate, basate tipicamente sulle trasformate di Fourier ([Carr et al., 1999](#); [Lewis, 2000](#)) e sugli sviluppi di serie della funzione caratteristica della volatilità f_v .

Tra i modelli proposti, le specifiche introdotte sono di diversi generi. Per esempio, il modello introdotto da [Sepp \(2008\)](#) è in grado di replicare la *skewness* positiva delle opzioni VIX attraverso l'introduzione di salti nel processo di varianza v_t , e di salti correlati nel processo S_t . Un approccio diverso è quello seguito da [Branger et al. \(2016\)](#), che descrive la pendenza positiva mediante l'introduzione di processo stocastico di volatilità della volatilità, ossia $\sigma = \sigma_t$. Questo processo è tipicamente positivamente correlato con la volatilità v_t : quando aumenta la volatilità, aumenta anche la sua varianza. Un'altra strada percorribile è quella tracciata da [Christoffersen et al. \(2009\)](#), in cui viene proposto un modello multifattoriale: viene introdotto un secondo processo di volatilità $v_{2,t}$, indipendente dal primo.

1.4 Heston++ e l'introduzione del displacement

Un'importante estensione del modello di Heston per migliorare la corretta predizione della superficie di volatilità implicita fu introdotta da [Pacati et al. \(2014\)](#):

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + S_t \sqrt{v_t + \phi_t} dW_t^S, \\ dv_t = \kappa (\bar{v} - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \\ dW_t^S dW_t^v = \rho dt. \end{cases} \quad (1.7)$$

La caratteristica innovativa del modello (1.7) è che, attraverso l'introduzione di un singolo parametro aggiuntivo ϕ_t , i prezzi del nuovo modello rispecchiano con stupefacente precisione la struttura della volatilità implicita del mercato. Questo nuovo parametro è uno *shift* deterministico, chiamato comunemente *displacement*, della volatilità stocastica v_t , in modo tale che l'effettiva volatilità istantanea che guida il processo sia:

$$\text{Var} \left(\log \frac{S_t}{S_0} \right) = v_t + \phi_t. \quad (1.8)$$

ϕ_t è una funzione sufficientemente regolare del tempo, e soddisfa:

$$\begin{aligned} \phi_t &\geq 0 \quad \forall t \geq 0, \\ \phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Il nome Heston++ deriva dal parallelismo con il modello CIR++ introdotto da [Brigo et al. \(2001\)](#), in cui uno shift deterministico ϕ_t viene sommato a un modello di tassi di interesse spot x_t , in modo tale che il tasso di interesse istantaneo r_t del modello sia pari a:

$$r_t = x_t + \phi_t. \quad (1.10)$$

1.4.1 Teoremi per il pricing dei derivati con Heston++

Sia \mathbb{Q} la misura di probabilità neutrale al rischio. Definiamo $x_t = \log \frac{S_t}{S_0}$ come il prezzo logaritmico del sottostante S_t . Come già fatto da [Pacati et al. \(2018\)](#) e [Pompa \(2015\)](#) per modelli più estesi, d'ora in poi indicheremo con \mathcal{H} il modello di Heston (1.6), e con $\mathcal{H}++$ il modello di Heston con *displacement* (1.7) appena introdotto. Un primo importante lemma, introdotto da [Pompa \(2015\)](#) e ripreso nell'articolo di [Pacati et al. \(2018\)](#), mette in relazione le funzioni caratteristiche dei logaritmi dei prezzi e della volatilità nei due modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$.

Lemma 1.4.1 *Siano S_t e v_t processi stocastici descritti dalla classe di modelli \mathcal{H}^{++} , sia $x_t = \log S_t$. Siano $f_x^{\mathcal{H}^{++}}(z)$ e $f_v^{\mathcal{H}^{++}}(z)$ le funzioni caratteristiche condizionali rispettivamente dei rendimenti dei prezzi e della volatilità, definite come:*

$$\begin{aligned} f_x^{\mathcal{H}^{++}}(z) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{i z x_T} | \mathcal{F}_t \right], \\ f_v^{\mathcal{H}^{++}}(z) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{i z v_T} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Siano $f_x^{\mathcal{H}}$ e $f_v^{\mathcal{H}}$ le analoghe funzioni caratteristiche del modello \mathcal{H} . Allora valgono la seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f_x^{\mathcal{H}^{++}}(z) &= f_x^{\mathcal{H}}(z) e^{-\frac{1}{2} z(i+z) I_\phi(t, T)}, \\ f_v^{\mathcal{H}^{++}}(z) &= f_v^{\mathcal{H}}(z), \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove $z \in \mathbb{C}$ e $I_\phi(t, T) = \int_t^T \phi_s ds$.

Grazie a questo importante lemma possiamo ottenere delle formule chiuse per i prezzi delle opzioni SPX e VIX nel modello \mathcal{H}^{++} basandoci sulle funzioni caratteristiche del modello \mathcal{H} . Per entrambe le classi di opzioni, ci appoggiamo ai risultati teorici ottenuti da [Lewis \(2000\)](#), che si dimostrano essere molto utili per l'implementazione numerica del pricing, come già riportato da [Pompa, 2015](#).

Proposizione 1 *Secondo il modello \mathcal{H}^{++} , il prezzo al tempo t di una opzione call Europea scritta sul sottostante S_t con strike K e scadenza residua $\tau = T - t$ è dato da:*

$$C_{\text{SPX}}^{\mathcal{H}^{++}}(K, t, T) = S_t e^{-q\tau} - \frac{1}{\pi} \sqrt{S_t K} e^{-\frac{1}{2}(r+q)\tau} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ e^{i u k} f_x^{\mathcal{H}} \left(u - \frac{i}{2} \right) \right\} \frac{e^{-(u^2 + \frac{1}{4})} I_\phi(t, T)}{u^2 + \frac{1}{4}} du, \quad (1.13)$$

dove $k = \log \frac{S_t}{K} + (r - q)\tau$ e $I_\phi(t, T) = \int_t^T \phi_s ds$.

La dinamica del prezzo nel modello \mathcal{H}^{++} determina inoltre la dinamica dell'indice di volatilità, come già sottolineato dall'equazione (1.5). La seguente equazione, riportata da [Pompa, 2015](#) per convenienza, illustra l'effetto del displacement ϕ_t sulla dinamica dell'indice VIX.

Proposizione 2 *Rispetto al modello \mathcal{H}^{++} ,*

$$\left(\frac{\text{VIX}_t^{\mathcal{H}^{++}}}{100} \right)^2 = \left(\frac{\text{VIX}_t^{\mathcal{H}}}{100} \right)^2 + \frac{1}{\bar{\tau}} I_\phi(t, t + \bar{\tau}), \quad (1.14)$$

dove $\left(\frac{\text{VIX}_t^{\mathcal{H}}}{100} \right)^2$ è il corrispondente indice secondo il modello \mathcal{H} , definito nell'equazione (1.5), $I_\phi(t, t + \bar{\tau}) = \int_t^{t+\bar{\tau}} \phi_s ds$, e $\bar{\tau} = \frac{30}{365}$.

Grazie a questa relazione, si può ricavare una formula esplicita per il prezzo delle opzioni VIX, come fatto da [Pacati et al., 2018](#); [Pompa, 2015](#). Riportiamo qui il risultato ottenuto da [Zhao \(2018\)](#) per il modello $\mathcal{H}++$ da noi preso in considerazione.

Proposizione 3 *Secondo il modello $\mathcal{H}++$, il prezzo al tempo t di una opzione call scritta sul sottostante VIX_t avente strike price K e scadenza $\tau = T - t$ è dato da:*

$$C_{\text{VIX}}^{\mathcal{H}++}(K, t, T) = S_t \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ f_v^{\mathcal{H}}(U) \frac{e^{-iu \frac{b(\bar{v}, \kappa) + I_\phi(T, T+\bar{\tau})}{\bar{\tau}}} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{K}{S_t} \sqrt{-iu} \right) \right]}{(-iu)^{3/2}} \right\} d\text{Re}(u), \quad (1.15)$$

dove $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$ è la funzione errore complessa ([Abramowitz et al., 1965](#)), $z \in \mathbb{C}$ con $0 < \text{Im}(z) < \zeta_c(\tau)$, con $\zeta_c(\tau)$ definita nell'appendice (A) di [Pacati et al. \(2018\)](#), e $I_\phi(T, T+\bar{\tau}) = \int_T^{T+\bar{\tau}} \phi_s ds$, e infine:

$$\begin{cases} U(\kappa; u) := -u \frac{a(\kappa)}{\bar{\tau}}, \\ a(\kappa) := \frac{1 - e^{-\bar{\tau}\kappa}}{\kappa}, \\ b(\bar{v}, \kappa) := \bar{v} (\bar{\tau} - a(\kappa)). \end{cases} \quad (1.16)$$

Capitolo 2

Metodologia

Notazione: D'ora in poi ometteremo l'apice $\mathcal{H}++$ dalla notazione delle formule per il calcolo dei prezzi e delle funzioni caratteristiche, tranne nei casi di necessità, in cui verrà esplicitato.

2.1 Formulazione del problema della calibrazione

L'idea principale della calibrazione di un modello di volatilità è quella di minimizzare la differenza tra il prezzo dell'opzione calcolato secondo la teoria del modello e il prezzo osservato sul mercato. Nella ricerca di [Cui et al. \(2017\)](#), viene effettuata la calibrazione del modello \mathcal{H} utilizzando una singola superficie di volatilità, ossia riferendosi soltanto ai prezzi delle opzioni SPX, senza includere anche le opzioni VIX.

Il nostro obiettivo è quello di effettuare una calibrazione consistente, e per questo motivo la funzione obiettivo del problema deve contenere termini derivanti da diversi asset e mercati, nel nostro caso specifico opzioni VIX e SPX. Una calibrazione di questo tipo si trova, ad esempio, nell'articolo di [Pacati et al. \(2018\)](#), in cui vengono utilizzati tre tipi di strumenti finanziari diversi: opzioni sull'indice S&P500, opzioni VIX e *futures* VIX. Illustreremo brevemente le principali caratteristiche di questa funzione obiettivo, da cui prenderemo spunto per effettuare la calibrazione.

Per confrontare prezzi di strumenti finanziari diversi, la funzione obiettivo contiene errori relativi e non assoluti: la differenza tra i prezzi del modello e i prezzi di mercato viene normalizzata per i prezzi di mercato (o in alcuni casi per le volatilità implicite). Inoltre, la somma delle differenze relative viene pesata con pesi proporzionali al numero

di strumenti finanziari di ciascun mercato o asset, così da garantire che i mercati che forniscono meno osservazioni abbiano meno importanza rispetto ai mercati con un numero più elevato di strumenti. Queste considerazioni si traducono nella scelta della seguente funzione obiettivo, proposta da [Zhao \(2018\)](#).

Consideriamo un portafoglio composto da n opzioni, di cui N_{SPX} opzioni scritte sull'indice SPX e $N_{\text{VIX}} = n - N_{\text{SPX}}$ opzioni scritte sull'indice VIX. Denotiamo con $C_{\text{SPX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)$ il prezzo di mercato dell'opzione SPX avente strike K_i e time-to-maturity τ_i , e con $C_{\text{VIX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)$ il prezzo di mercato dell'opzione VIX con le medesime caratteristiche. Consideriamo adesso il modello $\mathcal{H}++$, descritto dal sistema di equazioni (1.7), con vettore dei parametri del modello $\boldsymbol{\theta}$ dato da:

$$\boldsymbol{\theta} = [v_0, \bar{v}, \rho, \kappa, \sigma, \phi_t]^\top. \quad (2.1)$$

Siano $C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K_i, \tau_i)$ e $C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K_i, \tau_i)$ i prezzi dell'opzione SPX e dell'opzione VIX secondo questo modello, calcolabili rispettivamente mediante le equazioni (1.13) e (1.15). Definiamo i residui delle opzioni SPX e delle opzioni VIX come:

$$\begin{aligned} r_{\text{SPX},i}(\boldsymbol{\theta}) &:= \frac{C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K_i, \tau_i) - C_{\text{SPX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)}{C_{\text{SPX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)}, & i = 1, \dots, N_{\text{SPX}} \\ r_{\text{VIX},i}(\boldsymbol{\theta}) &:= \frac{C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K_i, \tau_i) - C_{\text{VIX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)}{C_{\text{VIX}}^{\text{mkt}}(K_i, \tau_i)}, & i = 1, \dots, N_{\text{VIX}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

e i vettori dei residui come:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}) &:= [r_{\text{SPX},1}, \dots, r_{\text{SPX},N_{\text{SPX}}}]^\top, \\ \mathbf{r}_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}) &:= [r_{\text{VIX},1}, \dots, r_{\text{VIX},N_{\text{VIX}}}]^\top. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Analogamente a quanto fatto da [Cui et al. \(2017\)](#) e riprendendo il procedimento di [Zhao \(2018\)](#), approcciamo la calibrazione del modello $\mathcal{H}++$ come un problema inverso ai minimi quadrati, espresso nella forma della minimizzazione di una funzione obiettivo:

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.4)$$

dove $m = \dim(\boldsymbol{\theta})$ e la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ è definita da:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) &:= \frac{1}{2N_{\text{SPX}}} \|\mathbf{r}_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta})\|^2 + \frac{1}{2N_{\text{VIX}}} \|\mathbf{r}_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \\ &= \frac{1}{2N_{\text{SPX}}} \mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \mathbf{r}_{\text{SPX}} + \frac{1}{2N_{\text{VIX}}} \mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \mathbf{r}_{\text{VIX}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siccome ci sono molte più osservazioni di mercato che parametri da trovare, ossia $n \gg m$, il problema della calibrazione è sovradeterminato. È in quest'ottica che la soluzione minimizzerà i minimi quadrati degli scarti relativi di una funzione obiettivo non lineare. Nell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#) viene sottolineato come la scelta della funzione obiettivo non sia banale, e dipenda fortemente dal portafoglio di opzioni scelte per effettuare la calibrazione e dai loro strike e maturity. Discuteremo la nostra scelta nel capitolo 4. Osserviamo inoltre come la funzione obiettivo definita in (2.5) sia composta dagli scarti relativi e non assoluti dei prezzi, e che presenti dei pesi (rispettivamente pari a $\frac{1}{N_{\text{SPX}}}$ e $\frac{1}{N_{\text{VIX}}}$) volti ad equilibrare un'eventuale disparità tra i numeri di opzioni dei due gruppi. La funzione obiettivo proposta presenta quindi i principali vantaggi della funzione obiettivo già proposta da [Pacati et al. \(2018\)](#).

[Zhao \(2018\)](#) sottolinea come la principale differenza tra la funzione obiettivo (2.5) e quella proposta da [Pacati et al. \(2018\)](#) sia l'utilizzo degli scarti relativi rispetto ai prezzi delle opzioni e non rispetto alla volatilità implicita. Come discusso nell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#), le volatilità implicite vengono spesso usate per le calibrazioni nel settore finanziario; tuttavia, ottenere delle formule chiuse sul loro gradiente analitico è generalmente più difficile.

Seguendo l'approccio tracciato da [Cui et al. \(2017\)](#), vogliamo calibrare il modello $\mathcal{H}++$ mediante l'utilizzo del gradiente analitico della funzione obiettivo (2.5). Per farlo, mostreremo i risultati teorici ottenuti da [Zhao \(2018\)](#) riguardo la derivazione del gradiente delle funzioni di pricing (1.13) e (1.15), e li integreremo proponendo una forma finale del gradiente anche per il modello $\mathcal{H}++$. Un primo passo importante è la riscrittura delle funzioni caratteristiche dei processi S_t e v_t .

2.2 Funzioni caratteristiche dei processi nel modello \mathcal{H}

La derivazione del gradiente analitico della funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta} = [v_0, \bar{v}, \rho, \kappa, \sigma, \phi_t]^\top$ passa attraverso la derivazione dei gradienti delle funzioni caratteristiche $f_x^{\mathcal{H}}(u)$ e $f_v^{\mathcal{H}}(u)$, grazie alle quali si calcolano i prezzi delle opzioni SPX e VIX mediante le equazioni (1.13) e (1.15). D'ora in poi ci riferiremo alle funzioni caratteristiche del modello \mathcal{H} come $f_x(u)$ e $f_v(u)$, sottintendendo l'apice \mathcal{H} tranne nei casi ove non sia necessario specificarlo. Si può poi passare facilmente dalle funzioni caratteristiche

del modello \mathcal{H} a quelle del modello $\mathcal{H}++$ mediante il Lemma 1.4.1. Inoltre, per sottolineare la dipendenza delle funzioni caratteristiche dal vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ del modello e dal time to maturity τ degli strumenti finanziari presi in considerazione, indicheremo queste dipendenze esplicitamente utilizzando la notazione $f_x(\boldsymbol{\theta}, u, \tau)$ e $f_v(\boldsymbol{\theta}, u, \tau)$.

Per ottenere il gradiente analitico delle funzioni caratteristiche ci basiamo su degli importanti risultati della letteratura, che hanno promosso uno sviluppo di formule che garantiscono continuità numerica e facile derivazione analitica.

2.2.1 Funzione caratteristica f_x

La prima formulazione della funzione caratteristica si trova nell'articolo di [Heston, 1993](#):

$$\begin{aligned} f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) &= \mathbb{E} [e^{iux_t}] = \mathbb{E} \left[\exp \left(iu \log \frac{S_t}{S_0} \right) \right] = \\ &= \exp \left\{ iu \log \frac{F}{S_0} + \frac{\kappa \bar{v}}{\sigma^2} \left[(\xi + d)\tau - 2 \log \frac{1 - g_1 e^{d\tau}}{1 - g_1} \right] + \frac{v_0}{\sigma^2} (\xi + d) \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g_1 e^{d\tau}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove

$$\begin{cases} F := S_t e^{(r-q)\tau}, \\ \xi := \kappa - \sigma \rho iu, \\ d := \sqrt{\xi^2 + \sigma^2(u^2 + iu)}, \\ g_1 := \frac{\xi + d}{\xi - d}. \end{cases} \quad (2.7)$$

[Kahl et al. \(2005\)](#) dimostrarono che questa espressione presentava delle discontinuità rispetto ad u quando valutata con scadenze τ sufficientemente grandi.

Per migliorare la trattabilità e la derivabilità dell'espressione (2.6), sia [Schoutens et al. \(2004\)](#) che [Del Baño Rollin et al. \(2010\)](#) proposero versioni differenti della funzione caratteristica, sfruttando manipolazioni sulla funzione generatrice dei momenti. Infine, [Cui et al. \(2017\)](#) propose un'espressione che aveva il vantaggio di essere sia numericamente continua che facilmente trattabile analiticamente, espressione che riportiamo qui sotto:

$$f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) = \exp \left(iu \log \frac{F}{S_0} - \frac{\kappa \bar{v} \rho \tau iu}{\sigma} - A + \frac{2\kappa \bar{v}}{\sigma^2} D \right), \quad (2.8)$$

dove

$$\begin{cases} A := \frac{A_1}{A_2}, \\ A_1 := (u^2 + iu) \sinh \frac{d\tau}{2}, \\ A_2 := \frac{d}{v_0} \cosh \frac{d\tau}{2} + \frac{\xi}{v_0} \sinh \frac{d\tau}{2}, \\ B := \frac{de^{\frac{\kappa\tau}{2}}}{v_0 A_2}, \\ D := \log B. \end{cases} \quad (2.9)$$

I risultati che illustreremo in seguito, riguardanti la derivazione del gradiente ottenuti da [Cui et al. \(2017\)](#) e da noi utilizzati per la calibrazione, fanno affidamento alla formulazione (2.8) per via delle sue caratteristiche di continuità e facilità di manipolazione prima citati.

2.2.2 Funzione caratteristica f_v

Dei risultati simili a quelli ottenuti per la funzione caratteristica del processo $x_t = \log \frac{S_t}{S_0}$ sono stati ricavati da [Zhao \(2018\)](#) per la formulazione dell'espressione analitica della funzione caratteristica del processo di volatilità v_t . L'espressione iniziale della funzione caratteristica f_v si ricava dal fatto che il processo di volatilità v_t , definito nel sistema di equazioni (1.7), appartiene alla famiglia dei processi *mean-reverting*, conosciuti in letteratura anche come processi CIR (da Cox-Ingersoll-Ross), la cui funzione caratteristica è nota da [Cox et al., 1985](#):

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) &= \mathbb{E} [e^{iuv_t}] \\ &= \exp \left\{ \frac{-2\kappa\bar{v}}{\sigma^2} \log \left[1 - iu \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) \right] + v_0 \frac{iu e^{-\kappa\tau}}{1 - iu \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'espressione (2.10) è numericamente continua; tuttavia, essa non è facilmente differenziabile rispetto ai parametri $\boldsymbol{\theta}$ del modello. Ispirandosi al procedimento usato da [Del Baño Rollin et al. \(2010\)](#), che deriva la funzione caratteristica di x_t attraverso la funzione generatrice di momenti complessa, [Zhao \(2018\)](#) ha determinato un'espressione alternativa a (2.10) calcolando la funzione generatrice dei momenti di v_t , definita come $M(u) := \mathbb{E} [e^{uv_t}]$, ed in seguito ricavando la funzione caratteristica f_t attraverso la ben

nota relazione

$$f_v(u) = \mathbb{E} [e^{iu v_t}] = M(iu). \quad (2.11)$$

In seguito a una manipolazione dei termini analoga a quella effettuata da [Cui et al. \(2017\)](#) per f_x , l'espressione finale trovata da [Zhao \(2018\)](#) per la funzione caratteristica diviene:

$$f_v(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) = \left(\frac{e^{\frac{\kappa\tau}{2}}}{G} \right)^{\frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2}} e^F, \quad (2.12)$$

con F e G definiti come:

$$\begin{cases} F := \frac{v_0 iu}{G} e^{-\frac{\kappa\tau}{2}}, \\ G := \cosh \frac{\kappa\tau}{2} + \frac{\kappa - \sigma^2 iu}{\kappa} \sinh \frac{\kappa\tau}{2}. \end{cases} \quad (2.13)$$

I due termini intermedi F e G permettono di ottenere una rappresentazione della funzione caratteristica più compatta e più facilmente differenziabile, senza però perdere la proprietà di continuità dell'espressione (2.10). Dopo aver ottenuto le espressioni delle funzioni caratteristiche dei processi del modello $\mathcal{H}++$, siamo adesso pronti a ricavare il gradiente analitico della funzione obiettivo, per poi procedere con la calibrazione.

2.3 Gradiente analitico nel modello $\mathcal{H}++$

Notazione: D'ora in poi indichiamo con $\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ il gradiente rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ del modello $\mathcal{H}++$, e con $\nabla \nabla^\top$ l'Hessiano. Per comodità, omettiamo di scrivere esplicitamente la dipendenza dei vettori \mathbf{r}_{SPX} e \mathbf{r}_{VIX} da $\boldsymbol{\theta}$.

Ispirandoci all'approccio di [Cui et al. \(2017\)](#) e seguendo i risultati di [Zhao \(2018\)](#), vogliamo trovare il gradiente analitico della funzione obiettivo della calibrazione (2.5). Per trovare il gradiente della funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$, ci occorrono le matrici Jacobiane \mathbf{J}_{SPX} e \mathbf{J}_{VIX} dei vettori \mathbf{r}_{SPX} e \mathbf{r}_{VIX} , definite dalle formule

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\text{SPX}} := \nabla \mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \in \mathbb{R}^{m \times N_{\text{SPX}}}, \\ \mathbf{J}_{\text{VIX}} := \nabla \mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \in \mathbb{R}^{m \times N_{\text{VIX}}}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Come osservato da [Zhao \(2018\)](#), gli elementi di queste matrici si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} J_{\text{SPX},ij} &= \left[\frac{\partial r_{\text{SPX},j}}{\partial \theta_i} \right] = \left[\frac{1}{C_{\text{SPX},j}^{\text{mkt}}} \frac{\partial C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K_j, \tau_j)}{\partial \theta_i} \right], \\ J_{\text{VIX},ij} &= \left[\frac{\partial r_{\text{VIX},j}}{\partial \theta_i} \right] = \left[\frac{1}{C_{\text{VIX},j}^{\text{mkt}}} \frac{\partial C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K_j, \tau_j)}{\partial \theta_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Da un punto di vista vettoriale, la j -esima colonna della matrice \mathbf{J}_{SPX} è il vettore gradiente del prezzo valutato allo strike K_j e maturity τ_j , e normalizzato dal prezzo di mercato osservato nell'opzione avente medesimi strike e maturity, ossia $\frac{1}{C_{\text{SPX},j}^{\text{mkt}}} \nabla C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K_j, \tau_j)$. Lo stesso discorso vale anche per la matrice \mathbf{J}_{VIX} , le cui colonne possono essere espresse come $\frac{1}{C_{\text{VIX},j}^{\text{mkt}}} \nabla C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K_j, \tau_j)$. Per determinare le due matrici Jacobiane non ci resta quindi che calcolare i gradienti analitici dei prezzi delle opzioni SPX e VIX, ossia $\nabla C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ e $\nabla C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$.

2.3.1 Gradiente dei prezzi delle opzioni SPX

Nell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#) viene proposta la formulazione del gradiente analitico dei prezzi delle opzioni SPX nel modello \mathcal{H} classico. Per riassumere l'importante risultato, riportiamo qui un teorema analogo, riadattandolo alla funzione di pricing (1.13) che abbiamo ricavato nel capitolo precedente.

Il risultato, che come detto riguarda il gradiente rispetto al vettore dei parametri $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [v0, \bar{v}, \rho, \kappa, \sigma]^\top$, è incompleto per essere usato nel modello $\mathcal{H}++$ perché mancante della componente del gradiente rispetto al parametro del displacement ϕ_t . Quest'ultima componente richiede un'analisi aggiuntiva, che verrà effettuata più avanti nel capitolo.

Per prima cosa notiamo che, nell'espressione (1.13) che descrive il prezzo delle opzioni SPX, soltanto la funzione caratteristica f_x dipende dal vettore $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, per cui, allo stesso modo di quanto propone [Zhao \(2018\)](#), possiamo scrivere il gradiente del prezzo rispetto a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ come:

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau) &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}(r+q)\tau} \int_0^\infty \text{Re} \left[e^{iuk} \nabla f_x \left(\boldsymbol{\theta}; u - \frac{i}{2}, \tau \right) \right] \frac{e^{-(u^2 + \frac{1}{4})} I_\phi(t, T)}{u^2 + \frac{1}{4}} du. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Indichiamo il gradiente “parziale” ottenuto come $\nabla_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$, che in seguito verrà completato con la derivata rispetto a ϕ_t .

Il Teorema 1 dell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#) mostra come il gradiente della funzione caratteristica possa essere scritto come $\nabla f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) = f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) \tilde{\mathbf{h}}_x(u)$, dove

$$\tilde{\mathbf{h}}_x(u) := \begin{bmatrix} h_{x,v_0}(u) \\ h_{x,\bar{v}}(u) \\ h_{x,\rho}(u) \\ h_{x,\kappa}(u) \\ h_{x,\sigma}(u) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

e gli elementi di $\tilde{\mathbf{h}}_x$ sono dati da:

$$\begin{cases} h_{x,v_0}(u) = -\frac{A}{v_0}, \\ h_{x,\bar{v}}(u) = \frac{2\kappa}{\sigma^2}D - \frac{\kappa\rho\tau iu}{\sigma}, \\ h_{x,\rho}(u) = -\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2 d} \left(\frac{\partial d}{\partial \rho} - \frac{d}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right) - \frac{\kappa\bar{v}\tau iu}{\sigma}, \\ h_{x,\kappa}(u) = \frac{1}{\sigma iu} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{2\bar{v}}{\sigma^2}D + \frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2 B} \frac{\partial B}{\partial \kappa} - \frac{\bar{v}\rho\tau iu}{\sigma}, \\ h_{x,\sigma}(u) = -\frac{\partial A}{\partial \sigma} - \frac{4\kappa\bar{v}}{\sigma^3}D + \frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2 d} \left(\frac{\partial d}{\partial \sigma} - \frac{d}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \sigma} \right) + \frac{\kappa\bar{v}\rho\tau iu}{\sigma^2}. \end{cases} \quad (2.18)$$

I termini ξ, d sono definiti nelle equazioni (2.7), mentre A, A_1, A_2, B e D sono definiti nelle equazioni (2.9). I termini intermedi delle derivate parziali rispetto a ρ sono dati da

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \rho} = -\frac{\xi\sigma iu}{d}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial \rho} = -\frac{\sigma iu(2 + \xi\tau)}{2d v_0} \left(\xi \cosh \frac{d\tau}{2} + d \sinh \frac{d\tau}{2} \right), \\ \frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{e^{\kappa\tau/2}}{v_0} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial d}{\partial \rho} - \frac{d}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right), \\ \frac{\partial A_1}{\partial \rho} = -\frac{iu(u^2 + iu)\tau\xi\sigma}{2d} \cosh \frac{d\tau}{2}, \\ \frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} - \frac{A}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho}, \end{cases} \quad (2.19)$$

mentre le derivate parziali rispetto a κ e σ possono essere espresse in termini di derivate

parziali rispetto a ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial \kappa} = \frac{i}{\sigma u} \frac{\partial A}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial B}{\partial \kappa} = \frac{i}{\sigma u} \frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{B\tau}{2}, \\ \frac{\partial d}{\partial \sigma} = \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial d}{\partial \rho} + \frac{\sigma u^2}{d}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \sigma} = \frac{(u^2 + iu)\tau}{2} \frac{\partial d}{\partial \sigma} \cosh \frac{d\tau}{2}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial \sigma} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} - \frac{2 + \tau\xi}{v_0 \tau \xi i u} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \frac{\sigma \tau A_1}{2v_0}, \\ \frac{\partial A}{\partial \sigma} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \sigma} - \frac{A}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \sigma}. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Cui et al. (2017) sottolinea che l'interdipendenza tra i componenti del vettore $\tilde{\mathbf{h}}_x(u)$ permette di calcolare i suoi componenti in maniera simultanea, invece che calcolare ed integrare ciascun componente individualmente. Questa integrazione di tipo vettoriale si trasforma in un vantaggio dal punto di vista di performance nella calibrazione.

Per completare il gradiente di C_{SPX} nel modello $\mathcal{H}++$, è sufficiente calcolare l'ultima componente rimasta inespressa nel vettore $\tilde{\mathbf{h}}_x(u)$, ossia $h_{x,\phi_t}(u)$. Ricavare questa componente richiede però un'analisi approfondita, poiché il displacement ϕ_t non è un parametro scalare come gli altri parametri del modello \mathcal{H} , ma è una funzione che dipende dal tempo t . Prima di affrontare l'analisi sul gradiente rispetto al displacement, calcoliamo il gradiente parziale anche per i prezzi delle opzioni VIX.

2.3.2 Gradiente dei prezzi delle opzioni VIX

Nella tesi di Zhao (2018) viene calcolato il gradiente analitico del prezzo delle opzioni VIX $C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$, definito nell'espressione (1.15). La derivazione del gradiente dell'espressione (1.15) è più complicata di quella del prezzo delle opzioni SPX, per il fatto che stavolta non è solo f_v a dipendere dal vettore dei parametri $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, ma anche i termini U e b , come indicato nelle equazioni (1.16). In particolare, questi due termini dipendono da κ e \bar{v} . Per prima cosa occorre quindi calcolare le derivate parziali di questi termini intermedi. Per semplicità di notazione, la dipendenza dei termini U , a e b dai parametri κ e \bar{v} viene

sottintesa.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \kappa} = -\frac{u}{\bar{\tau}} \frac{\partial a}{\partial \kappa}, \\ \frac{\partial a}{\partial \kappa} = \frac{\bar{\tau} - a(\kappa\bar{\tau} + 1)}{\kappa}, \\ \frac{\partial b}{\partial \bar{v}} = \bar{\tau} - a, \\ \frac{\partial b}{\partial \kappa} = -\bar{v} \frac{\partial a}{\partial \kappa}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Una volta ottenuti questi termini intermedi, [Zhao \(2018\)](#) mostra come, in analogia con quanto fatto da [Cui et al. \(2017\)](#) per il gradiente della funzione caratteristica f_x , si possa esprimere il gradiente della funzione caratteristica f_v come $\nabla f_v(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) = f_v(\boldsymbol{\theta}; u, \tau) \tilde{\mathbf{h}}_v(u)$, dove

$$\tilde{\mathbf{h}}_v(u) := \begin{bmatrix} h_{v,v_0}(u) \\ h_{v,\bar{v}}(u) \\ h_{v,\rho}(u) \\ h_{v,\kappa}(u) \\ h_{v,\sigma}(u) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con gli elementi del vettore $\tilde{\mathbf{h}}_v$ sono dati da:

$$\begin{cases} h_{v,v_0}(u) = \frac{F}{v_0}, \\ h_{v,\bar{v}}(u) = \frac{2\kappa}{\sigma^2} \log \frac{e^{\frac{\kappa\tau}{2}}}{G}, \\ h_{v,\rho}(u) = 0, \\ h_{v,\sigma}(u) = -\frac{2\bar{v}}{\sigma} h_{v,\bar{v}}(u) - \frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2 G} \frac{\partial G}{\partial \sigma} - \frac{v_0 i u}{G^2 e^{\frac{\kappa\tau}{2}}} \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \\ h_{v,\kappa}(u) = -\frac{\sigma}{2\kappa} h_{v,\sigma}(u) + \frac{\bar{v}\tau i u}{G e^{\frac{\kappa\tau}{2}}} - \frac{v_0 u \tau}{2\kappa G^2} (2\kappa i + u\sigma^2). \end{cases} \quad (2.23)$$

I termini intermedi F e G sono definiti in [\(2.13\)](#), mentre

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = -\frac{2\sigma i u}{\kappa} \sinh \frac{\kappa\tau}{2}. \quad (2.24)$$

Combinando poi il gradiente della funzione caratteristica [\(2.22\)](#) con le derivate dei parametri U e b [\(2.21\)](#), possiamo infine ottenere un risultato analogo alla formula [\(2.16\)](#).

Zhao (2018) dimostra che il gradiente di P_{VIX} rispetto a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ possa essere scritto come:

$$\nabla_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau) = S_0 \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ f_v(\boldsymbol{\theta}; U, \tau) \hat{\mathbf{h}}_v(u) e^{-iu \frac{b + I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau})}{\bar{\tau}}} \frac{1 - \text{erf}\left(\frac{K}{S_0} \sqrt{-iu}\right)}{(-iu)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\text{Re}(u), \quad (2.25)$$

dove $\hat{\mathbf{h}}_v(u)$ è definito come:

$$\hat{\mathbf{h}}_v(u) := \begin{bmatrix} h_{v,v_0}(U) \\ h_{v,\bar{v}}(U) - \frac{iu}{\bar{\tau}} \frac{\partial b}{\partial \bar{v}} \\ 0 \\ \hat{h}_{v,\kappa}(u) - \frac{iu}{\bar{\tau}} \frac{\partial b}{\partial \kappa} \\ h_{v,\sigma}(U) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

con i termini h_{v,v_0} , $h_{v,\bar{v}}$, $h_{v,\sigma}$ definiti nelle equazioni (2.23) e il termine $\hat{h}_{v,\kappa}(u)$ dato dalla formula

$$\begin{cases} \hat{h}_{v,\kappa}(u) := h_{v,\kappa}(U) - \frac{u}{\bar{\tau}} \frac{\partial a}{\partial \kappa} \left[\frac{F}{U} - \frac{1}{G} \left(\frac{2\kappa\bar{v}}{\sigma^2} + F \right) \frac{\partial G}{\partial U} \right], \\ \frac{\partial G}{\partial U} = -\frac{\sigma^2 i}{\kappa} \sinh \frac{\kappa\tau}{2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Abbiamo quindi riportato un'espressione del gradiente del prezzo delle opzioni VIX nel modello \mathcal{H} . Per concludere, nel prossimo capitolo tratteremo la forma delle derivate dei prezzi rispetto al parametro di displacement ϕ_t del modello $\mathcal{H}++$ per completare la formule dei gradienti.

2.3.3 Derivate dei prezzi rispetto al displacement ϕ_t

Notazione: nel paragrafo sceglieremo $t = 0$, in modo tale che $T = \tau$, con $\tau = T - t$.

Come osservato in Zhao (2018), in entrambe le formule dei prezzi (1.13) e (1.15) il displacement ϕ_t appare solamente sotto forma di integrazione: per le opzioni SPX nel termine $I_\phi(0, \tau)$, mentre per le opzioni VIX nel termine $I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau})$. L'idea che abbiamo sviluppato, in linea con quelle proposte da Pacati et al. (2018) e Zhao (2018), è di definire una *term structure* per descrivere il parametro del displacement ϕ_t , i cui tempi dipendano dalle scadenze del portafoglio di opzioni utilizzato per effettuare la calibrazione del modello

$\mathcal{H}++$. In questo paragrafo illustreremo questa idea e vedremo come questa fornisca uno strumento per il calcolo del gradiente rispetto a ϕ_t .

Consideriamo i time-to-maturity del nostro portafoglio di opzioni SPX e VIX, denotando con $\mathcal{T}_{\text{SPX}} = \{\tau_{\text{SPX},1}, \tau_{\text{SPX},2}, \dots, \tau_{\text{SPX},N_{\text{SPX}}}\}$ le maturities delle opzioni SPX, e con $\mathcal{T}_{\text{VIX}} = \{\tau_{\text{VIX},1}, \tau_{\text{VIX},2}, \dots, \tau_{\text{VIX},N_{\text{VIX}}}\}$ le maturities delle opzioni VIX. In base a quanto detto prima, per prezzare i due tipi di opzioni ci occorre calibrare i seguenti intervalli:

- per le opzioni SPX, $I_\phi(0, \tau_{\text{SPX},i})$ con $i = 1, 2, \dots, N_{\text{SPX}}$;
- per le opzioni VIX, $I_\phi(\tau_{\text{VIX},j}, \tau_{\text{VIX},j} + \bar{\tau})$, con $j = 1, 2, \dots, N_{\text{VIX}}$.

Possiamo tradurre il vincolo (1.9) di non negatività della funzione ϕ_t in termini di un vincolo sull'integrale I_ϕ :

$$I_\phi(t, t + \tau) \geq 0 \quad \forall t, \tau \geq 0. \quad (2.28)$$

Seguendo poi l'idea sviluppata da Pacati et al. (2018), costruiamo l'insieme \mathcal{T} dei tempi della *term structure* come:

$$\mathcal{T} := \{0 \cup \mathcal{T}_{\text{SPX}} \cup \mathcal{T}_{\text{VIX}} \cup (\mathcal{T}_{\text{VIX}} + \bar{\tau})\} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}. \quad (2.29)$$

Nell'insieme \mathcal{T} , le scadenze che sono in comune con due mercati differenti sono contate solo una volta, e i tempi sono ordinati in ordine crescente, quindi $\tau_1 = 0, \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$. Definiamo poi gli intervalli $\{\Delta\Phi_j\}_{j=1}^{N-1}$ come:

$$\Delta\Phi_j := I_\phi(\tau_j, \tau_{j+1}) = I_\phi(0, \tau_{j+1}) - I_\phi(0, \tau_j), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.30)$$

Il vincolo di non negatività (2.28) si traduce in $\Delta\Phi_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, N-1$. Grazie agli intervalli $\Delta\Phi_j$ appena creati, possiamo ricostruire gli integrali necessari per il displacement dei derivati come segue:

- per un'opzione SPX con time to maturity $\tau = \tau_p \in \mathcal{T}_{\text{SPX}}$, l'integrale viene costruito come:

$$I_\phi(0, \tau) = I_\phi(0, \tau_p) = \sum_{j=1}^{p-1} \Delta\Phi_j; \quad (2.31)$$

- per un'opzione VIX con time to maturity $\tau = \tau_p \in \mathcal{T}_{\text{VIX}}$ e $\tau + \bar{\tau} = \tau_q \in \mathcal{T}_{\text{VIX}} + \bar{\tau}$, con $q \geq p+1$, l'integrale è dato da:

$$I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau}) = I_\phi(\tau_p, \tau_q) = \sum_{j=p}^{q-1} \Delta\Phi_j. \quad (2.32)$$

L'informazione fornita dal parametro del displacement ϕ_t è stata quindi tradotta nel vettore $\{\Delta\Phi_j\}_{j=1}^{N-1}$, per cui il calcolo del gradiente dei prezzi rispetto a ϕ_t si traduce nel calcolo del gradiente rispetto agli elementi del vettore $\{\Delta\Phi_j\}_{j=1}^{N-1}$, e il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ del modello $\mathcal{H}++$ si può esprimere come:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[v0, \bar{v}, \rho, \kappa, \sigma, \{\Delta\Phi_j\}_{j=1}^{N-1} \right]^\top. \quad (2.33)$$

Riportiamo le espressioni delle componenti del gradiente rispetto al vettore $\{\Delta\Phi_i\}_{i=1}^{N-1}$ ricavate da [Zhao, 2018](#). Per il prezzo delle opzioni SPX, la derivata vale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau = \tau_p \in \mathcal{T})}{\partial \Delta\Phi_j} &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}(r+q)\tau} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ e^{iuk} f_x \left(\boldsymbol{\theta}; u - \frac{i}{2} \right) \right\} \\ &\quad \times \frac{e^{-(u^2 + \frac{1}{4})I_\phi(0, \tau)}}{u^2 + \frac{1}{4}} \left[-\left(u^2 + \frac{1}{4} \right) \mathbb{1}_{j \in [0, p-1]} \right] du, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

L'espressione della derivata del prezzo dell'opzione VIX è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau = \tau_p \in \mathcal{T})}{\partial \Delta\Phi_j} &= S_0 \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ f_v(\boldsymbol{\theta}; U) e^{-iu \frac{b + I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau})}{\bar{\tau}}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 - \text{erf} \left(\frac{K}{S_0} \sqrt{-iu} \right)}{(-iu)^{3/2}} \frac{-iu}{\bar{\tau}} \mathbb{1}_{j \in [p, q-1]} \right\} d\text{Re}(u), \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.4 Forma finale del gradiente nel modello $\mathcal{H}++$

In conclusione, abbiamo tutti gli ingredienti necessari per calcolare i gradienti delle opzioni SPX e VIX nel modello $\mathcal{H}++$. Riassumiamo i risultati fin qui illustrati in due proposizioni, alla maniera dell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#).

Proposizione 4 *Supponiamo che la dinamica del sottostante S_t sia descritta dal modello $\mathcal{H}++$ (1.7), con $\boldsymbol{\theta}$ vettore dei parametri definito dall'espressione (2.33). Consideriamo il prezzo $C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ di una opzione call scritta sul sottostante SPX con strike K e time to maturity τ , descritto dalla formula (1.13). Allora il gradiente di $C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ rispetto a $\boldsymbol{\theta}$ è dato da:*

$$\begin{aligned} \nabla C_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau) &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}(r+q)\tau} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ e^{iuk} f_x \left(\boldsymbol{\theta}; u - \frac{i}{2}, \tau \right) \mathbf{h}_x(u) \right\} \frac{e^{-(u^2 + \frac{1}{4})I_\phi(0, \tau)}}{u^2 + \frac{1}{4}} du, \end{aligned} \quad (2.36)$$

dove $k = \log \frac{S_t}{K} + (r - q)\tau$, $f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau)$ è definita nell'equazione (2.8), $I_\phi(0, \tau)$ è dato dall'equazione (2.31), e $\mathbf{h}_x(u)$ è definito come:

$$\mathbf{h}_x(u) := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_x(u - \frac{i}{2}) \\ \left\{ -\left(u^2 + \frac{1}{4}\right) \mathbb{1}_{j \in [0, p-1]} \right\}_{j=1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

con $\tilde{\mathbf{h}}_x(u)$ definito nell'equazione (2.17).

Analoga alla Proposizione 4 per il gradiente delle opzioni SPX, la Proposizione 5 illustra il gradiente analitico delle opzioni VIX nel modello $\mathcal{H}++$.

Proposizione 5 *Supponiamo che le dinamiche del sottostante S_t e del processo di volatilità v_t siano descritte dal modello $\mathcal{H}++$ (1.7), con $\boldsymbol{\theta}$ vettore dei parametri definito dall'espressione (2.33). Consideriamo il prezzo $C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ di una opzione call scritta sul sottostante VIX con strike K e time to maturity τ , descritto dalla formula (1.15). Allora il gradiente di $C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ rispetto a $\boldsymbol{\theta}$ è dato da:*

$$\nabla C_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}; K, \tau) = S_0 \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ f_v(\boldsymbol{\theta}; U, \tau) \mathbf{h}_v(u) e^{-iu \frac{b + I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau})}{\tau}} \frac{1 - \text{erf}\left(\frac{K}{S_0} \sqrt{-iu}\right)}{(-iu)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\text{Re}(u), \quad (2.38)$$

dove $f_x(\boldsymbol{\theta}; u, \tau)$ è definita nell'equazione (2.12), U e b sono definiti nell'equazione (1.16), $I_\phi(\tau, \tau + \bar{\tau})$ è dato dall'equazione (2.32), e $\mathbf{h}_v(u)$ è definito come:

$$\mathbf{h}_v(u) := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_v(u) \\ \left\{ \frac{-iu}{\tau} \mathbb{1}_{j \in [p, q-1]} \right\}_{j=1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

con $\hat{\mathbf{h}}_v(u)$ definito nell'equazione (2.26).

Grazie a questi due risultati, siamo in grado di determinare gli elementi delle due matrici Jacobiane \mathbf{J}_{SPX} e \mathbf{J}_{VIX} , descritti dalle equazioni (2.15). Nel prossimo capitolo, descriveremo il ruolo di queste due matrici nella minimizzazione della funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$, che porterà alla calibrazione del modello $\mathcal{H}++$.

Capitolo 3

Calibrazione: algoritmo Levenberg-Marquardt

In questo capitolo descriveremo l'algoritmo proposto per minimizzare la funzione obiettivo (2.5), e discuteremo le sue principali proprietà.

Per prima cosa, è conveniente calcolare esplicitamente il gradiente della funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$, in linea con l'approccio di Cui et al. (2017) e Zhao (2018):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{2N_{\text{SPX}}} \nabla (\mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \mathbf{r}_{\text{SPX}}) + \frac{1}{2N_{\text{VIX}}} \nabla (\mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \mathbf{r}_{\text{VIX}}) = \\ &= \frac{1}{2N_{\text{SPX}}} (\nabla \mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \mathbf{r}_{\text{SPX}} + \mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \nabla \mathbf{r}_{\text{SPX}}) + \frac{1}{2N_{\text{VIX}}} (\nabla \mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \mathbf{r}_{\text{VIX}} + \mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \nabla \mathbf{r}_{\text{VIX}}) = \\ &= \frac{1}{N_{\text{SPX}}} \nabla \mathbf{r}_{\text{SPX}}^\top \mathbf{r}_{\text{SPX}} + \frac{1}{N_{\text{VIX}}} \nabla \mathbf{r}_{\text{VIX}}^\top \mathbf{r}_{\text{VIX}} = \\ &= \frac{1}{N_{\text{SPX}}} \mathbf{J}_{\text{SPX}} \mathbf{r}_{\text{SPX}} + \frac{1}{N_{\text{VIX}}} \mathbf{J}_{\text{VIX}} \mathbf{r}_{\text{VIX}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Le matrici \mathbf{J}_{SPX} e \mathbf{J}_{VIX} sono definite nelle equazioni (2.15). Per ottenere un'espressione più semplice, raggruppiamo i contributi provenienti dai due tipi di opzioni in un unico vettore, definendo il vettore dei residui $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, con $n = N_{\text{SPX}} + N_{\text{VIX}}$, come:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &:= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N_{\text{SPX}}}} \mathbf{r}_{\text{SPX}} \\ \frac{1}{\sqrt{N_{\text{VIX}}}} \mathbf{r}_{\text{VIX}} \end{bmatrix} = \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{N_{\text{SPX}}}} r_{\text{SPX},1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N_{\text{SPX}}}} r_{\text{SPX},N_{\text{SPX}}}, \frac{1}{\sqrt{N_{\text{VIX}}}} r_{\text{VIX},1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N_{\text{VIX}}}} r_{\text{VIX},N_{\text{VIX}}} \right]^\top.\end{aligned}\tag{3.2}$$

In questo modo, possiamo esprimere la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ nella più convenzionale forma della minimizzazione dei quadrati del vettore \mathbf{r} :

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{r}^\top \mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.3)$$

Allo stesso modo, definiamo la matrice \mathbf{J} come:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &:= \nabla \mathbf{r}^\top \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{N_{\text{SPX}}}} \mathbf{J}_{\text{SPX}}, \frac{1}{\sqrt{N_{\text{VIX}}}} \mathbf{J}_{\text{VIX}} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

In questo modo, l'espressione (3.1) del gradiente della funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ si semplifica in:

$$\nabla f = \mathbf{J} \mathbf{r}. \quad (3.5)$$

Nelle sezioni successive, proporremo dei metodi di minimizzazione che si basano sul gradiente appena ottenuto, analizzando proprietà e limiti di ciascun metodo e proponendo un algoritmo adatto al nostro problema di calibrazione finanziaria.

3.1 Il metodo di Gauss-Newton

Vogliamo trovare il vettore di parametri $\boldsymbol{\theta}$ che minimizza la somma dei quadrati dei residui, come espresso nell'equazione (3.3). Siccome i componenti $r_i(\boldsymbol{\theta})$ sono una funzione non lineare del vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, la minimizzazione dell'equazione (3.3) richiede l'uso di metodi numerici iterativi.

Un approccio tipico è quello di esprimere i componenti $r_i(\boldsymbol{\theta})$ attraverso un'espansione di Taylor lineare al primo ordine attorno ad un punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)}]$, scelto arbitrariamente, con la condizione che non sia un punto stazionario di f , ossia che $\nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) \neq 0$. Possiamo poi assumere che le componenti $r_i(\boldsymbol{\theta})$ possano essere approssimate mediante un'espressione lineare nel vettore $\boldsymbol{\theta}$:

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) \approx \tilde{r}_i(\boldsymbol{\theta}) := r_i(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial r_i}{\partial \theta_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}} [\theta_j - \theta_j^{(0)}], \quad \text{con } i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Per semplicità, chiamiamo $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})$, e $\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})$. Più in generale, indicheremo con l'apice (0) ciascuna funzione calcolata rispetto a $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$. Possiamo quindi esprimere

l'equazione (3.6) in forma vettoriale come:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)\top} \Delta \boldsymbol{\theta}, \quad \text{con } \Delta \boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(0)}. \quad (3.7)$$

Vogliamo cercare il vettore $\Delta \boldsymbol{\theta}$ che minimizza la funzione $\tilde{f}(\boldsymbol{\theta})$, definita come segue:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\boldsymbol{\theta}) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i^2 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{r}}^\top \tilde{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)\top} \Delta \boldsymbol{\theta}]^\top [\mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)\top} \Delta \boldsymbol{\theta}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}^\top \mathbf{r})^{(0)} + (\mathbf{J} \mathbf{r})^{(0)\top} \Delta \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}^\top (\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(0)} \Delta \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per minimizzare $\tilde{f}(\Delta \boldsymbol{\theta})$, calcoliamo la derivata dell'espressione (3.8) rispetto a $\Delta \boldsymbol{\theta}$ e poniamola uguale a zero:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \Delta \boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \Delta \theta_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \Delta \theta_m} \right]^\top = (\mathbf{J} \mathbf{r})^{(0)} + (\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(0)} \Delta \boldsymbol{\theta} = 0. \quad (3.9)$$

L'annullamento della derivata porta alla ben nota equazione ai minimi quadrati ordinaria:

$$(\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(0)} \Delta \boldsymbol{\theta} = -(\mathbf{J} \mathbf{r})^{(0)} = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(0)}). \quad (3.10)$$

Supponiamo adesso che esista $(\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(0)} \boldsymbol{\theta}^{(0)}{}^{-1}$; possiamo quindi risolvere l'equazione (3.10) invertendo la matrice $(\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(0)}$ e trovando il vettore $\Delta \boldsymbol{\theta}$ ottimale. Proporranno in seguito una soluzione quando l'inversa non esiste. Una volta ottenuto $\Delta \boldsymbol{\theta}$ dal sistema lineare (3.10), $\boldsymbol{\theta}$ può essere ricavato dalla relazione:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(0)} + \Delta \boldsymbol{\theta}. \quad (3.11)$$

Questo procedimento appena descritto può essere ripetuto, e ci permette quindi di introdurre il seguente metodo di risoluzione iterativo:

1. Selezionato un punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, calcolare $\Delta \boldsymbol{\theta}$ mediante l'equazione (3.10);
2. calcolare $\boldsymbol{\theta}$ con l'equazione (3.11);
3. ripartire dal punto 1. scegliendo $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \boldsymbol{\theta}$.

Per descrivere il procedimento con chiarezza, descriviamo la $(p+1)$ -esima iterazione dell'algoritmo, che porta alla stima $\boldsymbol{\theta}^{(p+1)}$. Per prima cosa, risolvere l'equazione:

$$(\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{(p)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(p)} = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(p)}). \quad (3.12)$$

Dopodiché, calcolare la stima aggiornata di $\boldsymbol{\theta}$ come:

$$\boldsymbol{\theta}^{(p+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(p)} + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}. \quad (3.13)$$

Per terminare il metodo iterativo, si possono introdurre i seguenti criteri di arresto:

$$\begin{cases} \|f(\boldsymbol{\theta}^{(p)})\| \leq \varepsilon_1, \\ \frac{\|\Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}\|}{\|\boldsymbol{\theta}^{(p)}\|} \leq \varepsilon_2, \\ p > p^{\max}, \end{cases} \quad (3.14)$$

dove ε_1 , ε_2 e p^{\max} sono valori di tolleranza prestabiliti. Il primo criterio in (3.14) indica il raggiungimento di un valore sufficientemente basso della funzione obiettivo f , il secondo indica una variazione troppo piccola nel vettore dei parametri, mentre il terzo indica il superamento di un numero massimo di iterazioni p^{\max} . Questo metodo iterativo di minimizzazione è conosciuto come *metodo di Gauss-Newton* (Quarteroni et al., 2007). Il principale limite di questo metodo è che un valore iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ troppo lontano dal valore ottimale $\boldsymbol{\theta}$ potrebbe far sì che l'ipotesi di linearità (3.6) non sia veritiera. Se questo è il caso, $\|\Delta\boldsymbol{\theta}^{(0)}\|$ potrebbe essere troppo elevato da comportare un metodo iterativo non convergente (come mostrato nell'esempio 1a di Pujol, 2007). Nella prossima sezione discutiamo l'introduzione di un diverso metodo numerico per ovviare a questo problema di mancata convergenza.

3.2 Il metodo della discesa del gradiente

Il metodo della discesa del gradiente, conosciuto anche come metodo *steepest descent*, si basa sul fatto che, per una data funzione $f(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, la direzione di massima discesa in un determinato punto $\bar{\mathbf{x}}$, nel cui intorno la funzione è definita e derivabile, è la direzione opposta del suo gradiente in quel punto, ossia $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$. Da ciò segue che, se prendiamo $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^m$ con f definita e derivabile nel suo intorno, e poniamo

$$\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{x}_p - \gamma \nabla f(\mathbf{x}_p), \quad (3.15)$$

con $\gamma \in \mathbb{R}_+$ sufficientemente piccolo, allora $f(\mathbf{x}_p) \geq f(\mathbf{x}_{p+1})$. Notiamo la presenza del segno negativo: il termine $\gamma \nabla f(\mathbf{x}_p)$ viene sottratto a \mathbf{x}_p poiché ci stiamo muovendo in direzione opposta al gradiente, verso il minimo locale della funzione.

Possiamo quindi applicare questo semplice metodo per la ricerca di un minimo locale della funzione f . Partendo da un punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ arbitrariamente scelto, costruiamo la sequenza $\{\boldsymbol{\theta}^{(p)}\}_{p \geq 0}$ mediante l'espressione

$$\boldsymbol{\theta}^{(p+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(p)} - \gamma^{(p)} \nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(p)}), \quad p \geq 0. \quad (3.16)$$

Il parametro $\gamma^{(p)}$ rappresenta la lunghezza del passo di discesa, e determina la velocità con cui il metodo converge al minimo locale. In ciascuna iterazione p , scegliamo $\gamma^{(p)}$ in modo tale che il valore della funzione f diminuisca:

$$f(\boldsymbol{\theta}^{(p)}) \geq f(\boldsymbol{\theta}^{(p+1)}), \quad p \geq 0. \quad (3.17)$$

La condizione (3.17) garantisce che la sequenza $\{\boldsymbol{\theta}^{(p)}\}_{p \geq 0}$ converga a un minimo locale di f . Determinare il corretto valore del passo di ricerca $\gamma^{(p)}$ in ciascuna iterazione è una questione di fondamentale importanza: valori di γ troppo piccoli porterebbero infatti a una convergenza molto lenta, mentre valori troppo grandi porterebbero il metodo iterativo a divergere. Inoltre, siccome il gradiente di una funzione è una proprietà locale, la direzione di discesa del gradiente dipende della posizione, e così avviene per il passo di discesa. Per queste ragioni, il valore di $\gamma^{(p)}$ in ciascuna iterazione deve essere selezionato con accuratezza. Diverse strategie per la corretta stima del passo $\gamma^{(p)}$ sono state proposte (Quarteroni et al., 2007). Nella prossima sezione spiegheremo come si può modificare il metodo di Gauss-Newton sfruttando i vantaggi del metodo della discesa del gradiente.

3.3 Il metodo Levenberg-Marquardt

Come illustrato nella sezione 3.1, il principale limite del metodo di Gauss-Newton è che la convergenza non è garantita se il punto iniziale si discosta troppo dal parametro ottimo. Questo fatto è stato risolto da un modello, proposto sia da Levenberg (1944) che da Marquardt (1963) indipendentemente, che mediante approcci diversi sono giunti a una medesima conclusione.

Il metodo, che prende il nome di Levenberg-Marquardt dai suoi ideatori, si basa sulla risoluzione dell'equazione:

$$(\mathbf{J}\mathbf{J}^\top + \lambda \mathbf{I}) \Delta \boldsymbol{\theta} = -\nabla f, \quad (3.18)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice identità. Questa equazione è nota come equazione di Levenberg-Marquardt, o come equazione dei *minimi quadrati smorzata*. Il parametro

λ rappresenta il *fattore di smorzamento*, e determina il comportamento numerico del metodo. Quando infatti λ tende a zero, l'equazione (3.18) diventa l'equazione ai minimi quadrati ordinaria (3.10) del metodo di Gauss-Newton. Quando invece λ tende all'infinito, il termine $\mathbf{J}\mathbf{J}^\top$ nell'equazione (3.18) diventa trascurabile rispetto al termine $\lambda\mathbf{I}$, e la soluzione dell'equazione diventa:

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_g \approx -\frac{1}{\lambda}\nabla f \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Nel caso limite appena descritto, la soluzione ai minimi quadrati smorzata corrisponde quindi alla soluzione del metodo della discesa del gradiente (3.15). Per questo motivo, abbiamo indicato la soluzione dell'equazione (3.19) con il pedice g . In aggiunta, il passo di discesa γ del gradiente è dato da $\gamma = \frac{1}{\lambda}$, e tende a zero.

Sulla base di queste considerazioni possiamo quindi introdurre un metodo iterativo per la ricerca di un minimo locale della funzione f . Partendo dal valore iniziale del vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ e da un valore iniziale $\lambda^{(0)}$ scelti arbitrariamente, determiniamo $\Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}$ nella p -esima iterazione, $p \geq 0$, risolvendo l'equazione

$$\left[(\mathbf{J}\mathbf{J}^\top)^{(p)} + \lambda^{(p)}\mathbf{I} \right] \Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)} = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(p)}). \quad (3.20)$$

Calcoliamo poi il valore aggiornato della soluzione $\boldsymbol{\theta}$ come

$$\boldsymbol{\theta}^{(p+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(p)} + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}, \quad (3.13 \text{ bis})$$

che viene usato per calcolare $f^{(p+1)}$. Dopodiché, se

$$f(\boldsymbol{\theta}^{(p+1)}) < f(\boldsymbol{\theta}^{(p)}), \quad (3.17 \text{ bis})$$

allora lo step iterativo è terminato, il valore di $\boldsymbol{\theta}$ accettato e il fattore di smorzamento $\lambda^{(p)}$ viene ridotto. Altrimenti, $\lambda^{(p)}$ viene incrementato e $\Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}$ viene ricalcolato mediante l'equazione (3.20), fino a quando la condizione (3.17 bis) non è rispettata. Sia [Levenberg \(1944\)](#) che [Marquardt \(1963\)](#) propongono differenti procedure per determinare il fattore di smorzamento $\lambda^{(p)}$ in ciascuna iterazione. La discussione di queste procedure esula dall'obiettivo di questa tesi. In ogni caso, è importante sottolineare come la scelta di λ avvenga per “tentativi ed errori” (in anglosassone *trial and error*), e che questo fatto garantisca di avere una successione monotona decrescente come imposto dalla condizione

(3.17 bis), e quindi garantisca una successione $\{\boldsymbol{\theta}^{(p)}\}_{p \geq 0}$ convergente a un minimo locale della funzione obiettivo f . Riassumiamo il metodo appena descritto nell'Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Algoritmo Levenberg-Marquardt per calibrare il modello $\mathcal{H}++$.

```

1 Scegliere il punto iniziale  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ , e calcolare  $\|\mathbf{r}^{(0)}\|$  e  $\mathbf{J}^{(0)}$ .
2 Scegliere il fattore di smorzamento iniziale come  $\lambda^{(0)} = \lambda \max \{\text{diag}(\mathbf{J}^{(0)})\}$ , con  $\lambda$ 
  arbitrario, e  $\nu^{(0)} = 2$ .
3 for  $p = 0, 1, 2, \dots$  do
4   Risolvere l'equazione (3.20) per  $\Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}$ .
5   Calcolare  $\boldsymbol{\theta}^{(p+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(p)} + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}$ , e  $\|\mathbf{r}^{(p+1)}\|$ .
6   if  $\|\mathbf{r}^{(p+1)}\| < \|\mathbf{r}^{(p)}\|$  then
7     Accettare lo step: calcolare  $\mathbf{J}^{(p+1)}$ ,  $\lambda^{(p+1)} = \lambda^{(p)}$ ,  $\nu^{(p+1)} = \nu^{(p)}$ .
8   else
9     Ripetere lo step: porre  $\lambda^{(p)} = \lambda^{(p)}\nu^{(p)}$ ,  $\nu^{(p)} = 2\nu^{(p)}$  e risolvere nuovamente
      (3.20).
10  end
11  if uno dei criteri di arresto (3.21) è soddisfatto then
12    break
13  end
14 end

```

I criteri di arresto dell'Algoritmo 1 sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{r}^{(p)}\| \leq \varepsilon_1, \\ \frac{\|\Delta\boldsymbol{\theta}^{(p)}\|}{\|\boldsymbol{\theta}^{(p)}\|} \leq \varepsilon_2, \\ \|\mathbf{J}^{(p)}\|_{\infty} \leq \varepsilon_3, \\ p > p^{\max}, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

dove ε_1 , ε_2 , ε_3 e p^{\max} sono valori di tolleranza prestabiliti. Questi criteri sono analoghi a quelli dell'algoritmo Gauss-Newton (3.14), con l'aggiunta della terza condizione, che arresta il metodo iterativo per un valore troppo piccolo del gradiente $\mathbf{J}^{(p)}$.

Esistono diverse implementazioni dell'algoritmo Levenberg-Marquardt. Per il nostro problema di calibrazione finanziaria abbiamo scelto la libreria `levmar` (Lourakis, 2004), che presenta un pacchetto numericamente stabile e robusto nei linguaggi C e C++. Nonostante la documentazione della libreria non faccia riferimento ad utilizzi in finanza

computazionale, `levmar` è già stato utilizzato da [Cui et al. \(2017\)](#) e [Zhao \(2018\)](#) per la calibrazione finanziaria con risultati soddisfacenti.

3.3.1 Limiti dell'algoritmo

[Pujol \(2007\)](#) sottolinea come la velocità di convergenza del metodo e il numero di iterazioni dipendano fortemente dalla scelta del valore iniziale dello smorzamento $\lambda^{(0)}$. Come mostrato nell'esempio (1c) del suo articolo, valori diversi del punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ comportano fattori di smorzamento $\lambda^{(0)}$ ottimali diversi. Inoltre, viene sottolineato come un elevato numero m di parametri, con $m = \dim(\boldsymbol{\theta})$, possa influire negativamente sulla convergenza del metodo. Infine, ricordiamo che il metodo di Levenberg-Marquardt è un metodo numerico per la ricerca di *minimi locali* della funzione f , e che perciò non garantisce di trovare il minimo globale se questa presenta diversi minimi locali. In questo caso, il risultato dell'algoritmo e il minimo trovato dipenderanno in maniera decisiva dalla scelta dei valori iniziali $(\boldsymbol{\theta}, \lambda)^{(0)}$. Per investigare la scelta più opportuna del parametro di smorzamento λ , [Pujol \(2007\)](#) suggerisce di effettuare la calibrazione usando dati sintetici generati mediante simulazione (ad esempio con il metodo Monte Carlo), e di analizzare le performance di convergenza del metodo al variare del punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ e del parametro λ .

Capitolo 4

Risultati numerici

In questo capitolo descriveremo i risultati sperimentali ottenuti nella calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ consistenti con i prezzi delle opzioni SPX e VIX. Nell'articolo di [Cui et al. \(2017\)](#) viene sottolineato come la scelta degli strikes e delle scadenze delle opzioni del portafoglio non sia scontata. Per esempio, come spiegato nell'articolo di [Christoffersen et al. \(2009\)](#), se scegliessimo il medesimo strike per differenti scadenze avremmo le opzioni con scadenza breve più *out-of-the-money* rispetto a quelle con scadenza più lunga, con la conseguenza di effettuare una calibrazione meno precisa nella curva di volatilità delle opzioni a lunga scadenza. Per risolvere questa problematica, adottiamo un approccio largamente utilizzato nel mondo delle *foreign exchange*, ossia quello di selezionare gli strikes corrispondenti a determinati valori del delta di Black & Scholes delle opzioni.

Il capitolo è strutturato come segue. Nella sezione [4.1](#) descriveremo brevemente come passare dal delta al valore dello strike desiderato, mediante il modello di Black & Scholes. Nella sezione [4.2](#) descriveremo le caratteristiche dei portafogli di opzioni SPX e VIX selezionati per effettuare la calibrazione. Nella sezione [2](#) descriveremo di simulazione di prezzi di mercato e la procedura che abbiamo adottato per validare l'algoritmo di calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$. Nella sezione [4.4](#) descriveremo le performance ottenute nella calibrazione dei prezzi sintetici. Infine, nella sezione [4.5](#) descriveremo i risultati ottenuti nel calibrare i due modelli con i prezzi di mercato.

4.1 Delta di un'opzione e *implied volatility*

Il delta di un'opzione rispetto al modello di [Black et al. \(1973\)](#), che indichiamo con il simbolo Δ_{BS} , è la sensitività del prezzo dell'opzione nel modello di Black & Scholes rispetto al sottostante S_t . Siano $C_{BS}(K, \tau)$ e $P_{BS}(K, \tau)$ i prezzi di una call e di una put europea con strike K e time to maturity τ secondo il modello di Black & Scholes. I delta delle due opzioni, rispettivamente $\Delta_{BS}^{\text{call}}$ e Δ_{BS}^{put} , sono definiti dalle formule:

$$\begin{aligned}\Delta_{BS}^{\text{call}} &:= \frac{\partial C_{BS}(K, \tau)}{\partial S_t}, \\ \Delta_{BS}^{\text{put}} &:= \frac{\partial P_{BS}(K, \tau)}{\partial S_t},\end{aligned}\tag{4.1}$$

Il prezzo di una call europea secondo il modello di [Black et al. \(1973\)](#) è dato dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} C_{BS}(K, \tau) = C_{BS}(\sigma_{BS}; K, \tau) = \mathcal{N}(d_1)S_t - \mathcal{N}(d_2)Ke^{-r(T-t)}, \\ d_1 = \frac{1}{\sigma_{BS}\sqrt{T-t}} \left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma_{BS}^2}{2}\right)(T-t) \right], \\ d_2 = d_1 - \sigma_{BS}\sqrt{T-t}, \end{cases}\tag{4.2}$$

con $\mathcal{N}(\cdot)$ che indica la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard, data dalla formula

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \quad x \in \mathbb{R},\tag{4.3}$$

e $\sigma_{BS} > 0$ che rappresenta la volatilità dei rendimenti di S_t secondo il modello Black & Scholes, da non confondere con la volatilità della volatilità σ dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$. Derivando l'espressione (4.2), si ricava facilmente l'espressione del delta della call:

$$\Delta_{BS}^{\text{call}} = \mathcal{N}(d_1).\tag{4.4}$$

Analogamente, attraverso la *put-call parity* $C - P = S - Ke^{-r\tau}$, si ottiene la relazione

$$\Delta_{BS}^{\text{call}} - \Delta_{BS}^{\text{put}} = e^{-q\tau} = 1, \quad \text{con } q = 0,\tag{4.5}$$

che viene normalmente utilizzata per ricavare il delta della put da quello della call.

Illustreremo adesso il procedimento per ricavare lo strike K di un'opzione del modello $\mathcal{H}++$, nel caso in cui il suo Δ sia noto. Un procedimento analogo può essere svolto per

il modello \mathcal{H} . Consideriamo il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ che descrive il modello $\mathcal{H}++$, e sia $C(\boldsymbol{\theta}; K, \tau)$ il prezzo di un'opzione call con strike K e time to maturity τ secondo questo modello, definito dall'equazione (1.13) se si tratta di un'opzione SPX oppure dall'equazione (1.15) se si tratta di una VIX. La *volatilità implicita* σ_{BS} dell'opzione rispetto al modello Black & Scholes è il valore σ_{BS} tale per cui vale l'uguaglianza

$$C(\boldsymbol{\theta}; K, \tau) = C_{BS}(\sigma_{BS}; K, \tau), \quad (4.6)$$

con $C_{BS}(\sigma_{BS}; K, \tau)$ definito dall'espressione (4.2). Per determinare lo strike K dell'opzione conoscendo il suo delta Δ , troviamo il valore K tale per cui

$$\Delta = \Delta_{BS}^{\text{call}}(K) = \mathcal{N}(d_1(\sigma_{BS}(K), K)), \quad (4.7)$$

con $d_1 = d_1(\sigma_{BS}(K), K)$ definito nell'equazione (4.2) e $\sigma_{BS}(K)$ volatilità implicita dell'opzione, determinata in modo tale da soddisfare l'equazione (4.6). Nella prossima sezione, illustreremo come una determinata scelta di delta per determinare il portafoglio di opzioni si rifletta nei valori degli strikes.

4.2 Descrizione del portafoglio di calibrazione

Per effettuare la calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ mediante l'algoritmo 1, abbiamo scelto un portafoglio composto da $N_{\text{SPX}} = 40$ opzioni SPX e $N_{\text{VIX}} = 30$ opzioni VIX. Ciascuno dei due gruppi di opzioni è selezionato da una griglia avente *time to maturity* pari a τ_{SPX} , e τ_{VIX} , con τ_{SPX} e τ_{VIX} pari a:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{SPX}} &= \{30, 60, 90, 120, 150, 180, 270, 360\} \quad (\text{giorni}), \\ \tau_{\text{VIX}} &= \{7, 14, 21, 30, 60, 90\} \quad (\text{giorni}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Per ciascun time to maturity, selezioniamo 5 opzioni che abbiano dei determinati valori di delta: tre call con $\Delta^{\text{call}} = 50\%$, 25% e 10% , e due put con $\Delta^{\text{put}} = -25\%$ e -10% . Per la relazione (4.5), le due put corrispondono a due call aventi $\Delta^{\text{call}} = 75\%$ e 90% . Scegliamo di prezzare le call per avere un portafoglio di opzioni più omogeneo. Una volta specificati i time-to-maturity e i delta delle opzioni, possiamo ricavare i relativi strikes con il metodo illustrato nella sezione 4.1. Per fare un esempio pratico di questa procedura, le tabelle 4.2 e 4.3 mostrano la griglia degli strikes delle opzioni SPX e VIX nel caso in cui il modello selezionato sia \mathcal{H} e i parametri di mercato siano quelli specificati nella tabella 4.1.

Parametri del modello		Parametri di mercato	
v_0	0.08	S_0	1.00
\bar{v}	0.10	r	0.02
ρ	-0.80	q	0
κ	3.00		
σ	0.25		

Tabella 4.1: Specifiche di parametri per illustrare il metodo della sezione 4.1, già utilizzati da Cui et al. (2017) per testare la calibrazione.

Con i parametri specificati nella tabella 4.1, otteniamo i seguenti valori degli strikes:

τ (giorni)	$\Delta^{\text{put}} = -10\%$	$\Delta^{\text{put}} = -25\%$	$\Delta^{\text{call}} = 50\%$	$\Delta^{\text{call}} = 25\%$	$\Delta^{\text{call}} = 10\%$
30	93.71	99.56	104.27	122.87	139.39
60	86.03	98.68	104.63	123.99	141.02
90	81.12	97.28	104.99	124.85	142.91
120	77.60	95.88	105.30	126.59	144.56
150	74.70	94.64	105.62	126.46	146.03
180	72.16	93.58	105.93	127.15	147.36
270	66.99	91.75	106.63	128.59	150.05
360	61.37	90.25	107.66	130.46	153.28

Tabella 4.2: Strikes (esprese in percentuale) delle opzioni SPX con i parametri di mercato e il vettore dei parametri del modello θ specificati nella tabella 4.1.

τ (giorni)	$\Delta^{\text{put}} = -10\%$	$\Delta^{\text{put}} = -25\%$	$\Delta^{\text{call}} = 50\%$	$\Delta^{\text{call}} = 25\%$	$\Delta^{\text{call}} = 10\%$
7	7.66	7.82	8.01	8.20	8.37
14	7.53	7.75	8.02	8.28	8.53
21	7.43	7.71	8.02	8.35	8.66
30	7.33	7.65	8.03	8.43	8.81
60	7.08	7.53	8.07	8.64	9.19
90	6.91	7.45	8.10	8.81	9.50

Tabella 4.3: Strikes (esprese in percentuale) delle opzioni VIX con i parametri di mercato e il vettore dei parametri del modello θ specificati nella tabella 4.1.

Osservando i valori degli strikes delle tabelle 4.2 e 4.3, notiamo come all'aumentare della maturity aumenti la dispersione degli strikes delle opzioni selezionate.

4.3 Validazione del metodo di calibrazione

Validiamo il metodo di calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ seguendo l'approccio suggerito da Cui et al. (2017). L'idea è quella di generare dei prezzi di mercato sintetici che provengano esattamente dal modello che stiamo calibrando. Per farlo, scegliamo arbitrariamente un vettore di parametri, che indicheremo con $\boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}$, poiché verrà utilizzato per generare i prezzi di mercato sintetici. Questo vettore di parametri specificherà le caratteristiche del modello, \mathcal{H} o $\mathcal{H}++$ a seconda della scelta della calibrazione, con il quale genereremo i prezzi delle opzioni del portafoglio descritto nella sezione 4.2. Dopodiché, scegliamo arbitrariamente un vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, che corrisponde alla *guess* iniziale dei parametri del modello. La calibrazione, descritta nell'algoritmo 1, restituirà un vettore di parametri $\boldsymbol{\theta}^*$ che replica al meglio i prezzi sintetici del portafoglio generati con il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}$. Se il vettore $\boldsymbol{\theta}^*$ trovato dall'Algoritmo 1 è distante dal vettore $\boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}$ ottimale, oppure se questo dipende dal punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, allora concluderemo che la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ presenta dei minimi locali. Nel caso in cui, invece, il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ trovato dall'algoritmo sia sufficientemente vicino al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}$ ottimale, ossia nel caso in cui

$$\|\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}\| < \varepsilon, \quad (4.9)$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, allora concludiamo che la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$ del problema presenta un solo minimo globale.

Validiamo il metodo generando randomicamente N_c diversi vettori di parametri iniziali $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ e di parametri di mercato $\boldsymbol{\theta}^{\text{mkt}}$, estraendo ciascun parametro dagli intervalli specificati nella tabella 4.4.

Parametro	Range
v_0	(0.05, 0.95)
\bar{v}	(0.05, 0.95)
ρ	(-0.90, -0.10)
κ	(0.50, 5.00)
σ	(0.05, 0.95)
ϕ_t	(0, 8×10^{-4})

Tabella 4.4: Intervalli ragionevoli per la generazione aleatoria dei parametri del modello $\mathcal{H}++$. Abbiamo utilizzato gli intervalli proposti da [Cui et al. \(2017\)](#) per i 5 parametri del modello \mathcal{H} , mentre per il displacement ϕ_t ci siamo ispirati ai risultati numerici ottenuti da [Pompa \(2015\)](#).

Descriviamo ora l'algoritmo che abbiamo utilizzato per validare la calibrazione consistente dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ con le azioni SPX e VIX.

Algoritmo 2: Procedura di validazione della calibrazione consistente dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ con le opzioni SPX e VIX.

```

1 for  $i = 1, 2, \dots, N_c$  do
2   Generare il vettore dei parametri di mercato  $\boldsymbol{\theta}_i^{\text{mkt}}$  e il punto iniziale  $\boldsymbol{\theta}_i^{(0)}$ ,
   estraendo ciascun componente da una variabile aleatoria uniformemente
   distribuita  $\mathcal{U}(a, b)$ , con intervallo  $(a, b)$  specificato nella Tabella 4.4.
3   Determinare il portafoglio di opzioni come specificato nella sezione 4.2, e
   calcolare i prezzi delle opzioni usando il vettore dei parametri  $\boldsymbol{\theta}_i^{\text{mkt}}$ .
4   Calibrare il modello mediante l'Algoritmo 1, con punto iniziale  $\boldsymbol{\theta}_i^{(0)}$ .
5 end
```

4.4 Performance

Abbiamo implementato in C++ le funzioni dei prezzi e dei gradienti delle opzioni SPX e VIX dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$. Per utilizzare l'algoritmo 1, abbiamo scelto la libreria `levmar` di [Lourakis \(2004\)](#), e abbiamo specificato le tolleranze dei criteri di arresto (3.21) con i seguenti valori: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-10}$. Per calcolare gli integrali nelle formule dei prezzi e dei gradienti descritti dalle Proposizioni 1, 3, 4 e 5, abbiamo adottato la tecnica della quadratura con i nodi di Gauss-Legendre ([Quarteroni et al., 2007](#)), scegliendo $N = 64$ nodi di quadratura. Abbiamo troncato l'estremo superiore degli integrali al valore $u_{\max} = 200$,

che garantisce un errore assoluto inferiore a 10^{-8} , come mostrato da Cui et al. (2017). Per la ricerca del vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ ottimale nell'algoritmo 1, abbiamo imposto i seguenti vincoli di ricerca dei parametri per il modello \mathcal{H} :

$$\begin{cases} v_0 > 0, \\ \bar{v} > 0, \\ \rho \in [-1, 1], \\ \kappa > 0, \\ \sigma > 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Per il modello $\mathcal{H}++$ abbiamo posto gli stessi vincoli, con l'aggiunta del vincolo di non negatività (2.28) degli intervalli $\{\Delta\Phi_j\}_{j=1}^{N-1}$.

Abbiamo svolto la procedura di validazione descritta nell'algoritmo 2 con $N_c = 10\,000$ simulazioni, prima per il modello \mathcal{H} e poi per il modello $\mathcal{H}++$. Per il modello \mathcal{H} abbiamo scelto un fattore di smorzamento iniziale $\lambda = 10^{-3}$, mentre per il modello $\mathcal{H}++$ abbiamo verificato che si ottengono risultati migliori, in termini di numero di iterazioni e velocità di convergenza, con $\lambda = 10^{-5}$. Per entrambi i processi di validazione abbiamo impostato un numero massimo di iterazioni dell'algoritmo 1 pari a $p_{\max} = 35$. L'algoritmo è terminato per il raggiungimento di un valore sufficientemente basso del modulo dei residui $\|\mathbf{r}^*\|$ in 9278 casi su 10 000 per il modello \mathcal{H} , e in 8931 casi su 10 000 per il modello $\mathcal{H}++$. Nei restanti casi, l'algoritmo si è interrotto per aver raggiunto il numero massimo di iterazioni p_{\max} . Le considerazioni fatte nella sezione 3.3.1 sottolineano come la velocità di convergenza dell'algoritmo Levenberg-Marquardt possa dipendere dal punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ scelto. Per questo, per le calibrazioni più lente abbiamo ripetuto l'algoritmo 1 scegliendo un punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ diverso, estraendolo randomicamente dagli intervalli (4.4). In questo caso, anche i 722 casi del modello \mathcal{H} e i 1069 del modello $\mathcal{H}++$ in cui l'algoritmo si interrompeva per un numero elevato di iterazioni vanno a convergenza con successo per un valore ridotto dei residui, avendo risSelectedionato il vettore dei parametri iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ per una media di 1.21 volte per il modello \mathcal{H} e 1.29 volte per il modello $\mathcal{H}++$.

Le performance medie della calibrazione dei due modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ sono riassunte rispettivamente nelle tabelle 4.5 e 4.6.

Notiamo che la velocità di convergenza e il numero di iterazioni sono paragonabili ai risultati ottenuti da Cui et al. (2017), nonostante la calibrazione da noi effettuata riguardi due tipi diversi di opzioni e non solo uno, e nonostante l'aggiunta del displacement ϕ_t nel

Deviazione da θ^{mkt}		Misura dell'errore		Costo computazionale	
$ v_0^* - v_0^{\text{mkt}} $	1.47×10^{-6}	$\ \mathbf{r}^{(0)}\ $	1.29×10^{-1}	Tempo impiegato (s)	0.51
$ \bar{v}^* - \bar{v}^{\text{mkt}} $	1.52×10^{-5}	$\ \mathbf{r}^*\ $	1.68×10^{-11}	No. iterazioni	10.42
$ \rho^* - \rho^{\text{mkt}} $	1.53×10^{-3}	$\ \mathbf{J}^*\ _\infty$	2.22×10^{-5}	No. valutazioni prezzo	18.74
$ \kappa^* - \kappa^{\text{mkt}} $	6.88×10^{-4}	$\ \Delta\theta^*\ $	8.96×10^{-5}	No. valutazioni gradiente	10.42
$ \sigma^* - \sigma^{\text{mkt}} $	3.61×10^{-4}			No. sistemi lineari risolti	10.42

Tabella 4.5: Risultati medi delle performance di calibrazione nelle 10 000 simulazioni del modello \mathcal{H} .

Deviazione da θ^{mkt}		Misura dell'errore		Costo computazionale	
$ v_0^* - v_0^{\text{mkt}} $	3.79×10^{-5}	$\ \mathbf{r}^{(0)}\ $	5.70×10^{-1}	Tempo impiegato (s)	0.96
$ \bar{v}^* - \bar{v}^{\text{mkt}} $	4.02×10^{-4}	$\ \mathbf{r}^*\ $	3.52×10^{-11}	No. iterazioni	13.55
$ \rho^* - \rho^{\text{mkt}} $	2.51×10^{-2}	$\ \mathbf{J}^*\ _\infty$	1.59×10^{-5}	No. valutazioni prezzo	21.85
$ \kappa^* - \kappa^{\text{mkt}} $	4.17×10^{-3}	$\ \Delta\theta^*\ $	9.42×10^{-4}	No. valutazioni gradiente	13.55
$ \sigma^* - \sigma^{\text{mkt}} $	7.90×10^{-3}			No. sistemi lineari risolti	13.55
$\ \Delta\Phi^* - \Delta\Phi^{\text{mkt}}\ $	7.94×10^{-3}				

Tabella 4.6: Risultati medi delle performance di calibrazione nelle 10 000 simulazioni del modello $\mathcal{H}++$.

modello $\mathcal{H}++$. Inoltre, le performance del modello \mathcal{H} sono decisamente migliori delle performance presentate da Zhao (2018), con un tasso di convergenza pari al 100% se si permette di cambiare punto iniziale nel caso delle simulazioni con convergenza più lenta.

Per indagare più a fondo i risultati della calibrazione con i prezzi sintetici, analizziamo un caso rappresentativo della calibrazione. Scegliamo lo stesso *benchmark* utilizzato da Cui et al. (2017) per generare i prezzi di mercato, generando i prezzi sintetici con il vettore θ^{mkt} specificato dalla tabella 4.1, e displacement pari a $\phi_t^{\text{mkt}} = 4 \times 10^{-3}$, $t > 0$. Come *guess* iniziale selezioniamo il vettore dei parametri $\theta^{(0)}$ specificato nell'espressione 4.11:

$$\theta^{(0)} = \begin{bmatrix} v_0^{(0)} = 0.2 \\ \bar{v}^{(0)} = 0.2 \\ \rho^{(0)} = -0.6 \\ \kappa^{(0)} = 1.2 \\ \sigma^{(0)} = 0.3 \\ \phi_t^{(0)} = 2 \times 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

In seguito, ci riferiremo a questo esempio di calibrazione specifico come “caso *benchmark*”. Le performance della calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ nel caso *benchmark* sono descritte nelle tabelle 4.7 e 4.8.

Deviazione da θ^{mkt}		Misura dell'errore		Costo computazionale	
$ v_0^* - v_0^{\text{mkt}} $	3×10^{-7}	$\ \mathbf{r}^{(0)}\ $	3.56×10^{-1}	Tempo impiegato (s)	0.34
$ \bar{v}^* - \bar{v}^{\text{mkt}} $	3×10^{-6}	$\ \mathbf{r}^*\ $	1.21×10^{-11}	No. iterazioni	6
$ \rho^* - \rho^{\text{mkt}} $	2.88×10^{-4}	$\ \mathbf{J}^*\ _\infty$	9.37×10^{-5}	No. valutazioni prezzo	7
$ \kappa^* - \kappa^{\text{mkt}} $	9.1×10^{-4}	$\ \Delta\theta^*\ $	4.24×10^{-5}	No. valutazioni gradiente	6
$ \sigma^* - \sigma^{\text{mkt}} $	5×10^{-5}			No. sistemi lineari risolti	6

Tabella 4.7: Risultati della calibrazione del modello \mathcal{H} nel caso *benchmark*.

Le figure 4.1 e 4.2 mostrano la distanza relativa di ciascun parametro dal parametro ottimo e la convergenza del vettore dei residui \mathbf{r}_i nella calibrazione *benchmark* dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$.

Dalle figure 4.1 e 4.2 si nota come l'errore si riduca in maniera esponenziale da un'iterazione all'altra, e come si arrivi a un errore minore di $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ in sole 6 iterazioni nel modello \mathcal{H} e in 7 per il modello $\mathcal{H}++$. In particolare, il grafico della convergenza dei parametri non presenta le discontinuità mostrate da Zhao (2018) nel capitolo 4, e allo

Deviazione da θ^{mkt}		Misura dell'errore		Costo computazionale	
$ v_0^* - v_0^{\text{mkt}} $	2×10^{-6}	$\ \mathbf{r}^{(0)}\ $	4.30×10^{-1}	Tempo impiegato (s)	0.34
$ \bar{v}^* - \bar{v}^{\text{mkt}} $	2.3×10^{-5}	$\ \mathbf{r}^*\ $	3.08×10^{-11}	No. iterazioni	7
$ \rho^* - \rho^{\text{mkt}} $	1.9×10^{-3}	$\ \mathbf{J}^*\ _\infty$	8.94×10^{-5}	No. valutazioni prezzo	8
$ \kappa^* - \kappa^{\text{mkt}} $	6.2×10^{-3}	$\ \Delta\theta^*\ $	2.17×10^{-4}	No. valutazioni gradiente	7
$ \sigma^* - \sigma^{\text{mkt}} $	3.01×10^{-4}			No. sistemi lineari risolti	7
$\ \Delta\Phi^* - \Delta\Phi^{\text{mkt}}\ $	2.96×10^{-5}				

Tabella 4.8: Risultati della calibrazione del modello $\mathcal{H}++$ nel caso *benchmark*.

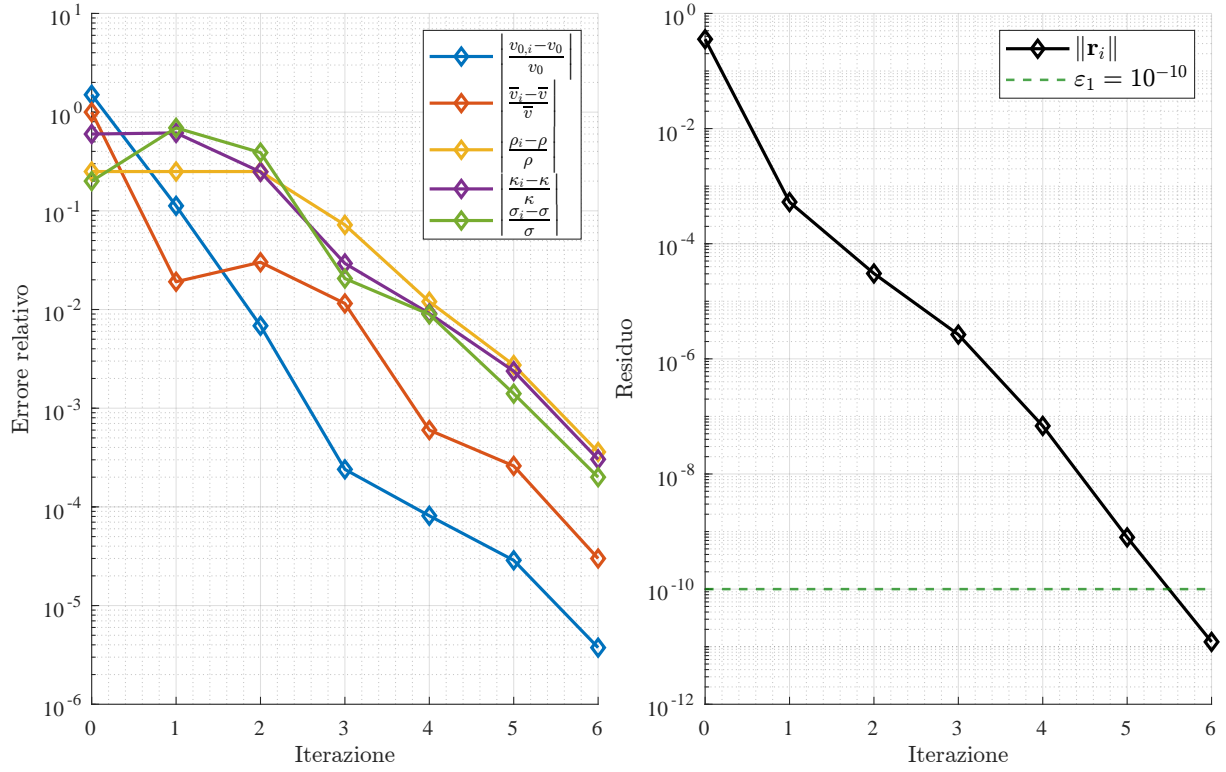


Figura 4.1: calibrazione *benchmark* del modello \mathcal{H} : sulla sinistra, è mostrata la distanza relativa delle componenti di $\theta^{(i)}$ dal vettore dei parametri di mercato $\theta = \theta^{\text{mkt}}$, al variare delle iterazioni i . Sulla destra, è mostrato l'andamento del modulo del residuo \mathbf{r}_i al variare delle iterazioni i .

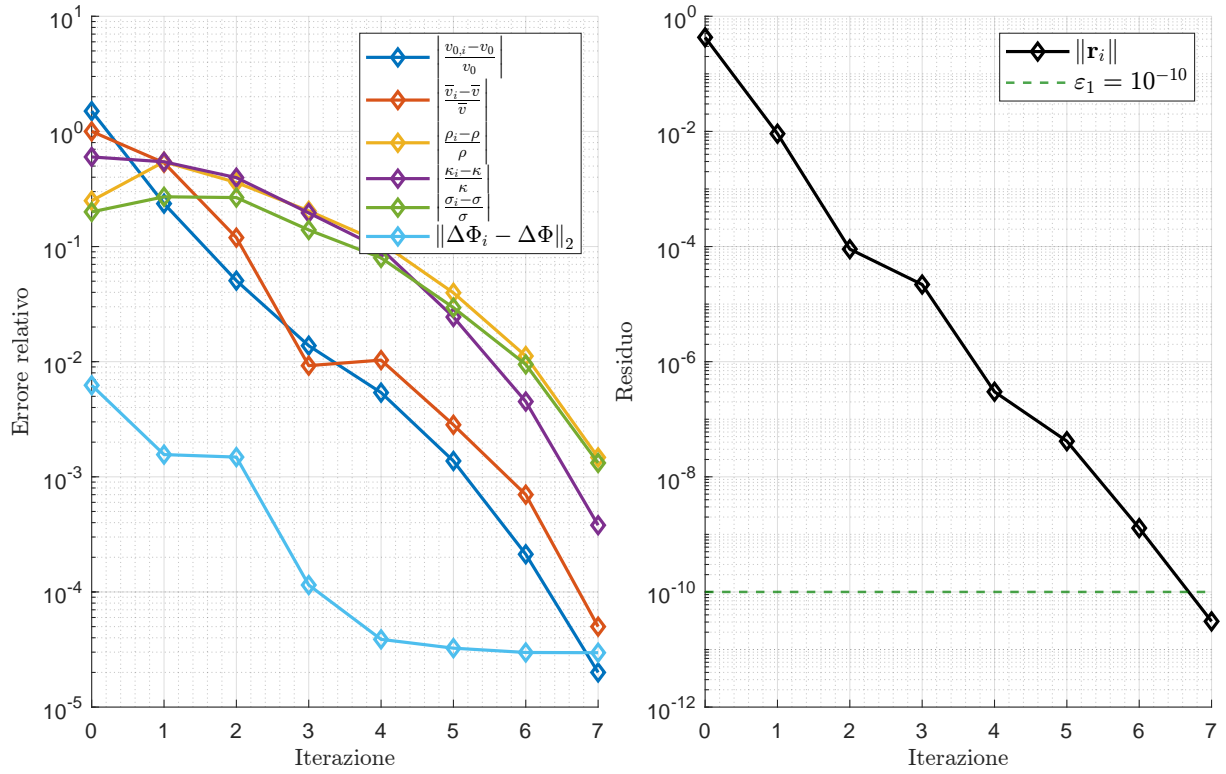
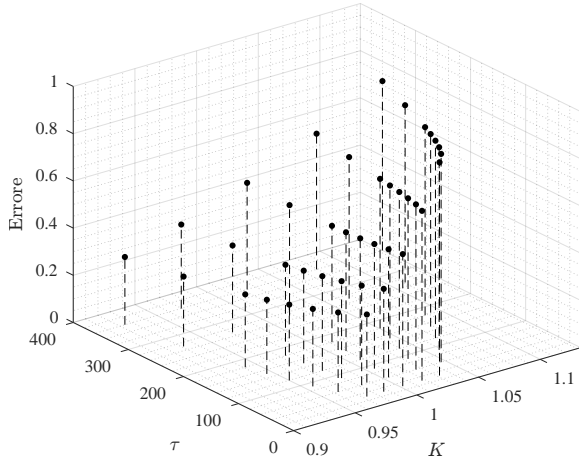


Figura 4.2: calibrazione *benchmark* del modello $\mathcal{H}++$: sulla sinistra, è mostrata la distanza relativa delle componenti di $\theta^{(i)}$ dal vettore dei parametri di mercato $\theta = \theta^{\text{mkt}}$, al variare delle iterazioni i . Sulla destra, è mostrato l'andamento del modulo del residuo \mathbf{r}_i al variare delle iterazioni i .

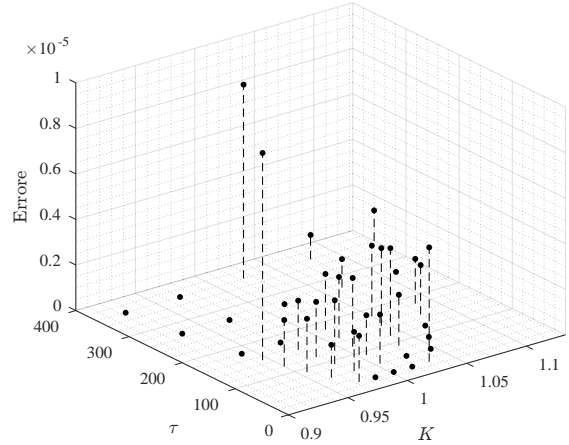
stesso tempo la velocità di convergenza è molto più alta, con un numero di iterazioni decisamente più basso. In particolare, notiamo come l'estensione del displacement ϕ_t non presenti costi aggiuntivi dal punto di vista del tempo computazionale di calibrazione oppure in termini di velocità di convergenza.

Infine, le figure 4.3 e 4.4 rappresentano, nel modello \mathcal{H} e in quello $\mathcal{H}++$, gli errori relativi dei prezzi delle opzioni nelle due superfici di volatilità SPX e VIX, prima rispetto al punto iniziale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ e poi rispetto al punto finale $\boldsymbol{\theta}^*$ trovato dall'algoritmo 1.

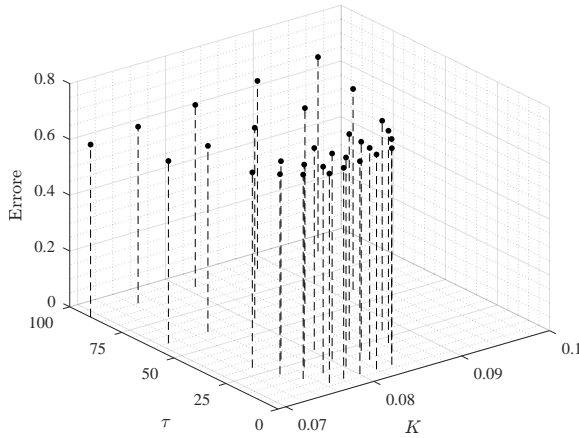
Dalle figure 4.3 e 4.4 notiamo come l'errore relativo dei prezzi delle opzioni si riduca da un ordine di grandezza di 1 a un ordine di grandezza di 10^{-5} , per entrambe le superfici di volatilità e per entrambi i modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$. Questa analisi conferma, insieme alle precedenti, la bontà della calibrazione consistente dei modelli da noi proposta.



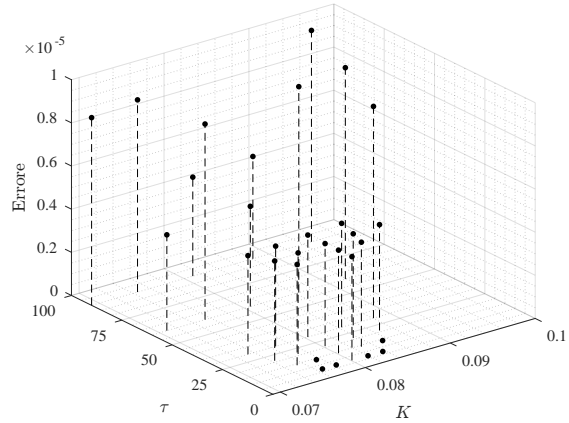
(a) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^{(0)}, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni SPX nel punto iniziale $\theta^{(0)}$.



(b) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^*, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni SPX nel punto finale θ^* .

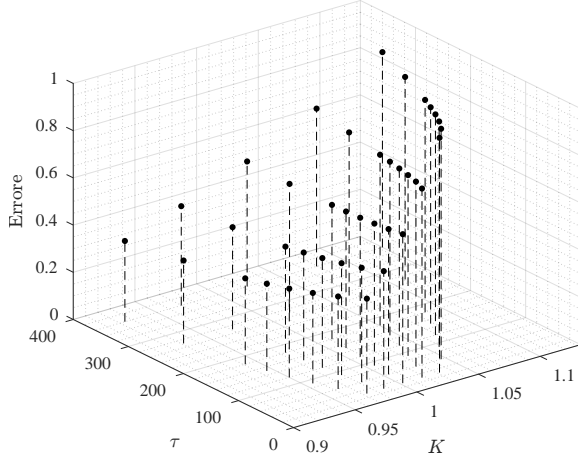


(c) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^{(0)}, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni VIX nel punto iniziale $\theta^{(0)}$.

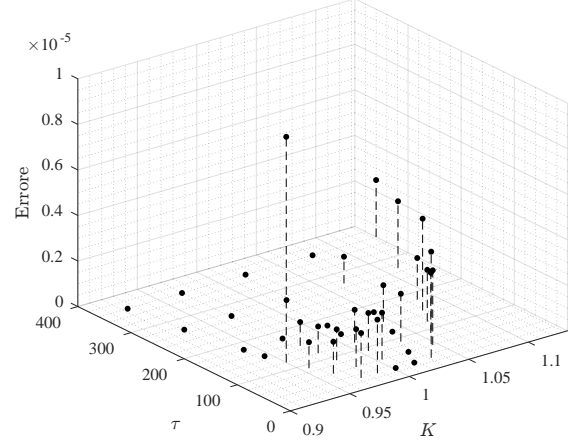


(d) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^*, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni VIX nel punto finale θ^* .

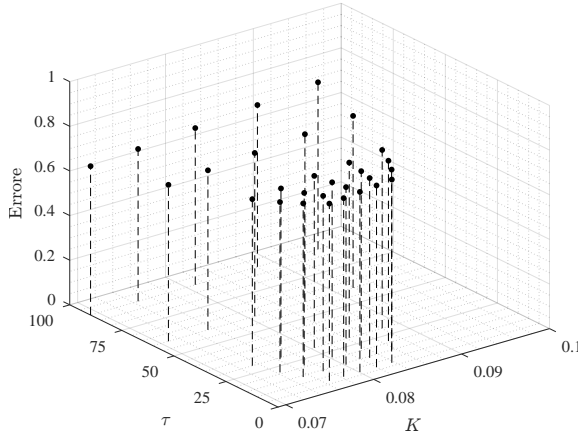
Figura 4.3: Errori relativi dei prezzi delle opzioni SPX e VIX, rappresentati nella loro superficie di volatilità, nella calibrazione *benchmark* del modello \mathcal{H} .



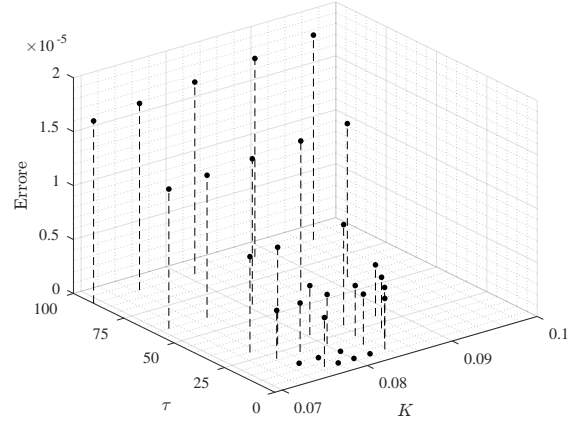
(a) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^{(0)}, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni SPX nel punto iniziale $\theta^{(0)}$.



(b) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^*, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni SPX nel punto finale θ^* .



(c) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^{(0)}, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni VIX nel punto iniziale $\theta^{(0)}$.



(d) Errore relativo $\left| \frac{C(\theta^*, K, \tau) - C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)}{C(\theta^{\text{mkt}}, K, \tau)} \right|$ per le opzioni VIX nel punto finale θ^* .

Figura 4.4: Errori relativi dei prezzi delle opzioni SPX e VIX, rappresentati nella loro superficie di volatilità, nella calibrazione *benchmark* del modello \mathcal{H}^{++} .

4.5 Calibrazione dei prezzi di mercato

Vogliamo adesso testare la calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ con dei prezzi di mercato reali. Per farlo, abbiamo selezionato un portafoglio di opzioni SPX e VIX come suggerito dalla precedente ricerca di [Pacati et al. \(2018\)](#). Abbiamo scaricato, mediante la piattaforma Thomson Reuters Eikon, i prezzi di mercato di $N_{\text{SPX}} = 40$ opzioni SPX e $N_{\text{VIX}} = 15$ opzioni VIX. Per selezionare le opzioni SPX, abbiamo usato il medesimo approccio descritto nella sezione [4.2](#), mentre abbiamo selezionato, tra le opzioni VIX, soltanto delle call liquide, come fatto da [Pacati et al. \(2018\)](#). Nel caso delle opzioni SPX, abbiamo selezionato delle put *out-of-the-money* in prossimità di delta elevati per le call.

Gli strikes e le maturities delle opzioni SPX del mercato sono riportati nella tabella [4.9](#), mentre quelli delle opzioni VIX sono riportati nella tabella [4.11](#). Nelle tabelle [4.10](#) e [4.12](#) mostriamo rispettivamente i prezzi di mercato, osservati il 16 marzo 2021, delle opzioni SPX e quelli delle opzioni VIX, mentre nelle figure [4.5](#) e [4.6](#) mostriamo le curve delle volatilità implicite dei due gruppi di opzioni, osservate nel medesimo giorno.

τ (giorni)	$\Delta^{\text{put}} \simeq -10\%$	$\Delta^{\text{put}} \simeq -25\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 50\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 25\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 10\%$
31	3600	3800	3975	4075	4250
66	3400	3700	3925	4200	4300
94	3200	3700	3950	4200	4400
122	3200	3600	3925	4250	4400
157	3100	3500	4000	4250	4500
185	3100	3500	3900	4300	4600
276	2900	3300	3900	4300	4600
367	2700	3300	3850	4475	4800

Tabella 4.9: Strikes delle opzioni SPX selezionate dal mercato.

Tipo opzione	put	put	call	call	call
τ (giorni)	Prezzi (\$)				
31	13.75	32.1	67.65	25.55	3.15
66	25.2	54.5	141.8	25.5	11.9
94	28.5	80.6	154.25	43.9	12.9
122	40.85	85.35	194.8	48.55	22.15
157	48.55	93.85	176.5	68.55	22.3
185	59.15	110.45	255.5	67.55	19.6
276	68	121.45	307	106.9	40.85
367	70.3	157.75	381.95	92.1	39.15

Tabella 4.10: Prezzi di mercato delle opzioni SPX, osservati il 16 Marzo 2021. I valori degli strikes delle opzioni sono specificati nella tabella 4.9.

τ (giorni)	$\Delta^{\text{call}} \simeq 50\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 35\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 25\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 25\%$	$\Delta^{\text{call}} \simeq 10\%$
36	26	32,5	40	45	55
64	26	35	45	50	60
92	29	40	50	60	70

Tabella 4.11: Strikes delle opzioni call VIX selezionate dal mercato.

τ (giorni)	Prezzi (\$)				
36	2.5	1.575	1.075	0.875	0.575
64	3.950	2.300	1.475	1.225	0.875
92	4.10	2.35	1.55	1.15	0.85

Tabella 4.12: Prezzi di mercato delle opzioni VIX di tipo *call*, osservati il 16 Marzo 2021. I valori degli strikes delle opzioni sono specificati nella tabella 4.11.

Le osservazioni empiriche delle due superfici di volatilità implicite delle opzioni S&P500 e VIX forniscono un'importante informazione sulla natura profondamente diversa dei due mercati. La superficie di volatilità delle opzioni SPX, nella figura 4.5, presenta delle caratteristiche piuttosto comuni: una pendenza negativa, più accentuata quando le maturities sono basse, e con le opzioni call *out-of-the-money* aventi un prezzo molto più basso delle

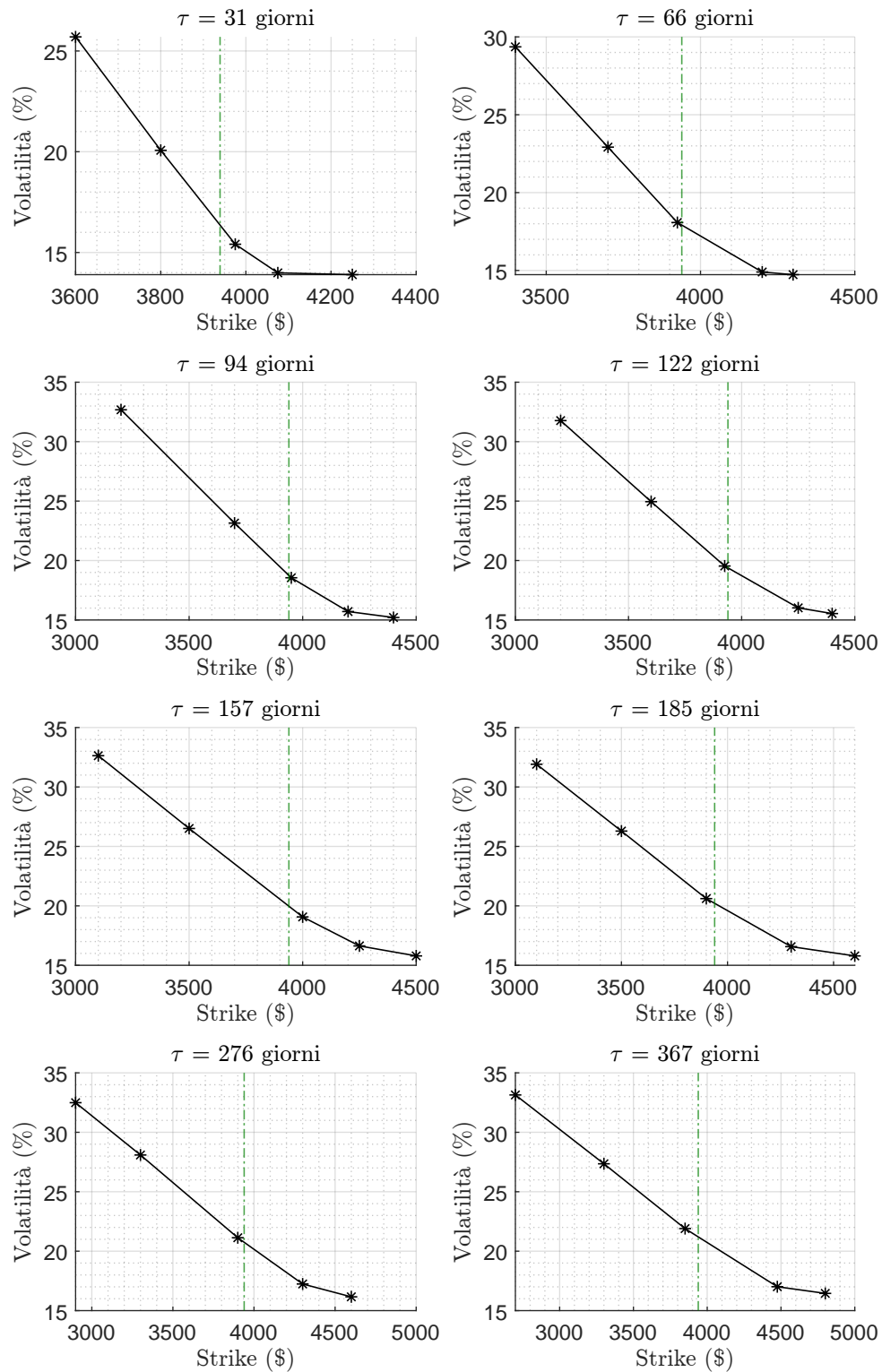


Figura 4.5: Superficie di volatilità implicite di mercato delle opzioni S&P500, osservate il 16 marzo 2021. Le volatilità sono espresse in percentuale. La linea verde tratteggiata indica lo strike per cui le azioni sono *at-the-money*, ossia $K = S_0 = 3968.94$.

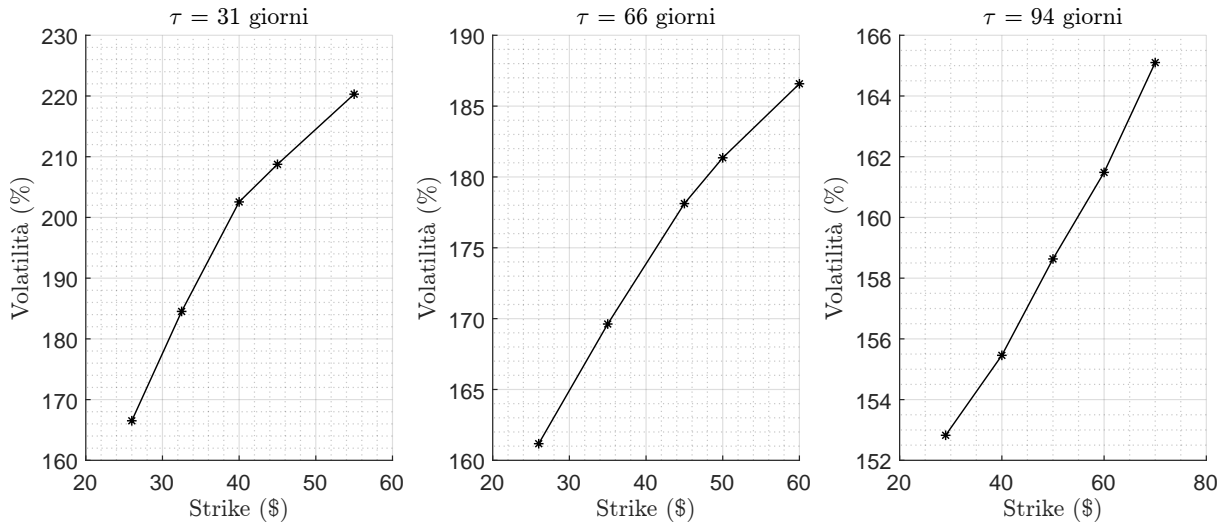


Figura 4.6: Superficie di volatilità implicite di mercato delle opzioni VIX, osservate il 16 marzo 2021. Le volatilità sono espresse in percentuale.

rispettive put. La superficie di volatilità delle opzioni VIX, nella figura 4.6, presenta delle caratteristiche peculiari: la pendenza della curva è positiva, e il livello globale di volatilità implicita è molto più elevato rispetto alla curva delle opzioni SPX. Inoltre, le opzioni call *out-of-the-money* VIX sono molto più liquide delle opzioni put *out-of-the-money*, e presentano un premio di rischio più elevato: questo aspetto si contrappone alla caratteristica tipica delle opzioni SPX, in cui le put *out-of-the-money* sono più liquide e più costose. [Pompa \(2015\)](#) fornisce una possibile spiegazione a questa contrapposizione: sia le put SPX che le call VIX forniscono una forma di *hedging* verso gli shock negativi del mercato *equity*.

Con il procedimento illustrato in [CBOE \(2018\)](#), abbiamo ricavato i tassi di interesse privi di rischio r delle opzioni dalle curve dei tassi dei Buoni del Tesoro U.S.A, comunemente chiamati “Constant Maturity Treasury”, o CMT. Nella figura 4.7 viene mostrata la curva dei CMT del 16 marzo 2021. Per selezionare il tasso r di un’opzione avente maturity τ , abbiamo effettuato un’interpolazione lineare dei valori della curva in corrispondenza della scadenza τ .

Per effettuare la calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ con i prezzi di mercato, abbiamo adottato una procedura simile a quella descritta nella sezione 4.4. Abbiamo eseguito l’algoritmo 1, scegliendo come fattore di smorzamento iniziale $\lambda = 10^{-3}$ per il modello \mathcal{H} e $\lambda = 10^{-5}$ per il modello $\mathcal{H}++$. La ricerca del parametro θ^* ottimo che replichi al meglio

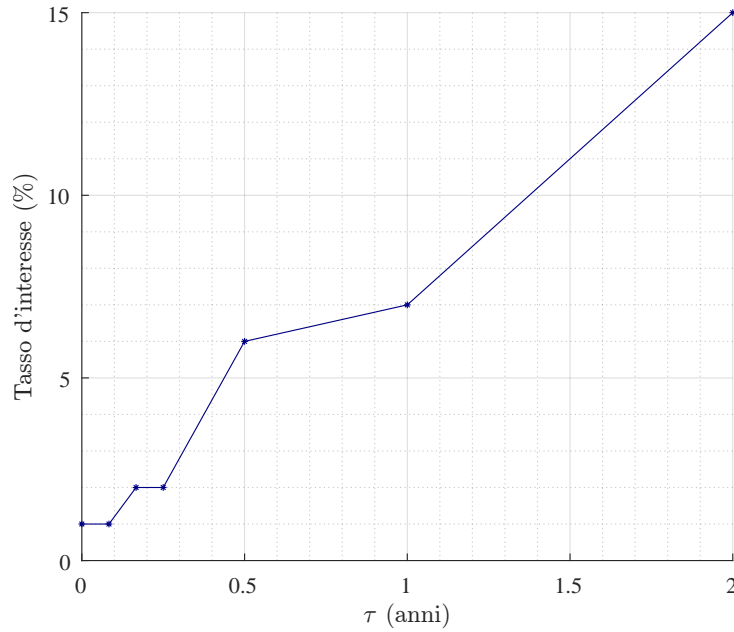


Figura 4.7: Curva dei tassi dei Buoni del Tesoro Statunitensi del 16 Marzo 2021, utilizzata per ricavare il tasso di interesse r di ciascuna opzione SPX e VIX. I tassi sono espressi in percentuale.

i prezzi delle due superfici di volatilità è stata soggetta ai vincoli di modello (4.10), con l'aggiunta del vincolo di non negatività (2.28) per il modello $\mathcal{H}++$. Per entrambi i modelli, abbiamo generato $N_c = 1000$ vettori dei parametri iniziali $\theta^{(0)}$, e abbiamo selezionato il risultato che garantiva un valore del vettore dei residui $\|\mathbf{r}^*\|$ più basso possibile.

Per valutare l'accuratezza della calibrazione, paragoniamo la performance di ciascun modello separatamente su ciascun mercato, in termini di errori relativi. Utilizziamo come indice di errore la radice quadrata dello scarto relativo quadratico medio, in inglese *root mean squared relative error*, abbreviato in RMSRE, già proposto da Pacati et al. (2018) per valutare i risultati della calibrazione. Questo indice è definito come:

$$\text{RMSRE}_{\mathcal{M}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\mathcal{M}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{M}}} \left(\frac{C_{i,\mathcal{M}}^{\text{mkt}} - C_{i,\mathcal{M}}^*}{C_{i,\mathcal{M}}^{\text{mkt}}} \right)^2}, \quad (4.12)$$

dove $\mathcal{M} = \{\text{SPX}, \text{VIX}\}$ indica il tipo di mercato, $C_{i,\mathcal{M}}^{\text{mkt}}$ indica il prezzo di mercato dell' i -esima opzione del tipo \mathcal{M} , e $C_{i,\mathcal{M}}^*$ il prezzo della medesima opzione stimato dalla calibrazione. Inoltre, possiamo valutare la performance complessiva della calibrazione mediante

l'indice RMSRE globale:

$$\text{RMSRE}_{\text{All}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{M}}} \left(\frac{C_{i,\mathcal{M}}^{\text{mkt}} - C_{i,\mathcal{M}}^*}{C_{i,\mathcal{M}}^{\text{mkt}}} \right)^2}, \quad (4.13)$$

dove $N = N_{\text{SPX}} + N_{\text{VIX}}$. La tabella 4.13 mostra i valori calibrati dei parametri dei modelli, mentre la figura 4.8 mostra il valore dell'integrale calibrato del displacement $I_{\phi}(0, \tau)$ per il modello $\mathcal{H}++$.

Parametri	\mathcal{H}	$\mathcal{H}++$
v_0 (%)	1.81	2.01
\bar{v} (%)	9.21	15.80
ρ	-0.69	-1.00
κ	5.21	1.21
σ	2.75	2.19

Tabella 4.13: Parametri calibrati. Questa tabella riporta i risultati della calibrazione consistente dei prezzi, ottenuti il giorno 16 marzo 2021, delle opzioni SPX e VIX per i modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$.

I parametri ottenuti hanno una solida interpretazione economica, e sono in linea con i parametri medi tipici illustrati dalla letteratura. Le stime della calibrazione indicano una sostanziale differenza nei parametri dei due modelli. Per prima cosa, il processo di volatilità v_t stimato dal modello \mathcal{H} ha un *mean-reversion rate* κ maggiore rispetto a quello stimato dal modello $\mathcal{H}++$, ossia $\kappa_{\mathcal{H}}^* > \kappa_{\mathcal{H}++}^*$, e quindi oscillerà con più frequenza attorno al valor medio della volatilità \bar{v} . Inoltre, nel modello $\mathcal{H}++$ il processo di volatilità v_t presenta un valor medio stimato più elevato ($\bar{v}_{\mathcal{H}}^* < \bar{v}_{\mathcal{H}++}^*$), e una volatilità minore ($\sigma_{\mathcal{H}}^* > \sigma_{\mathcal{H}++}^*$). Infine, anche la correlazione stimata ρ tra i processi S_t e v_t è sostanzialmente diversa nei due modelli: nel caso di $\mathcal{H}++$ i due processi sono perfettamente correlati negativamente ($\rho_{\mathcal{H}++}^* = -1$), mentre nel modello \mathcal{H} la correlazione è fortemente negativa ma non totale.

La tabella 4.14 riporta i valori degli errori medi di calibrazione per i modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ nei due mercati separati e globalmente. Le figure 4.9 e 4.10 mostrano invece i prezzi di mercato delle opzioni SPX e delle opzioni VIX, e i prezzi stimati dalla calibrazione dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$.

I risultati mostrano come entrambi i modelli siano in grado di spiegare soltanto con una precisione approssimativa i prezzi di mercato delle opzioni SPX e VIX ottenuti il 16

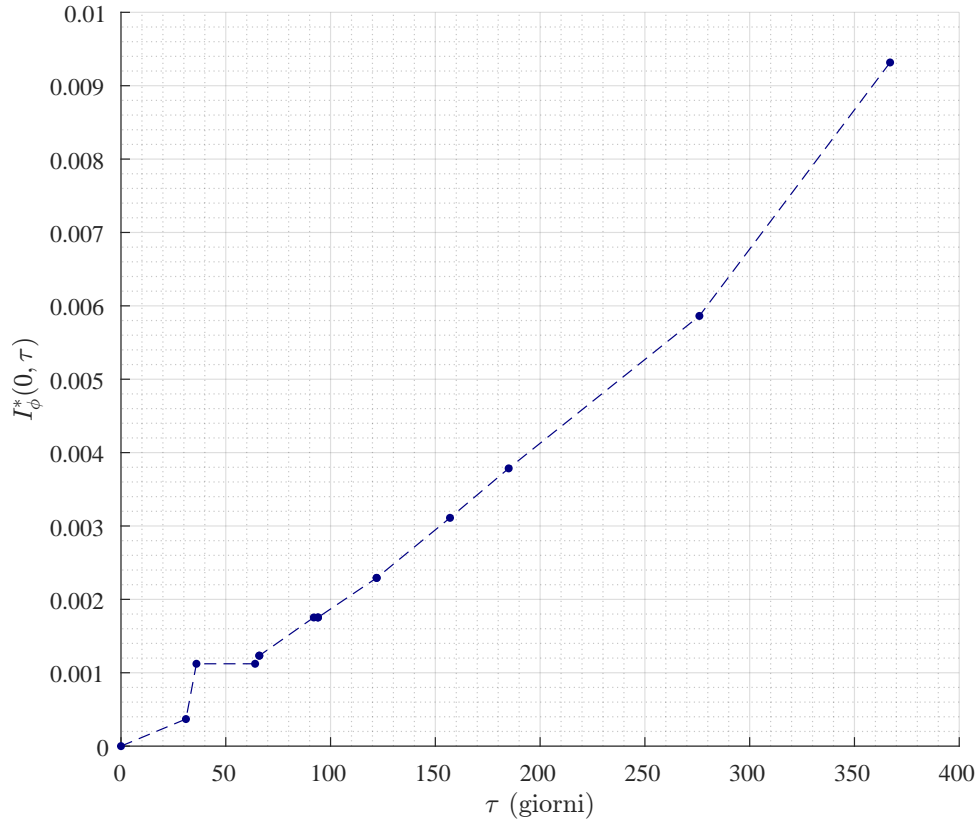


Figura 4.8: Integrale calibrato del displacement $I_\phi^*(0, \tau)$, risultante dalla calibrazione consistente dei prezzi, ottenuti il giorno 16 marzo 2021, delle opzioni SPX e VIX per il modello $\mathcal{H}++$.

	\mathcal{H}	$\mathcal{H}++$
RMSRE _{SPX}	11.03	12.95
RMSRE _{VIX}	16.39	10.05
RMSRE _{All}	12.72	12.23

Tabella 4.14: Errori di calibrazione, espressi in percentuale. Questa tabella riporta i valori dei *root mean squared relative errors* dei modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ calibrati congiuntamente con le opzioni SPX e VIX, i cui prezzi sono stati ottenuti il 16 marzo 2021. Gli errori relativi RMSRE_{SPX} e RMSRE_{VIX} sui prezzi SPX e VIX sono definiti dalla formula (4.12), mentre l'errore relativo globale è definito da (4.13).

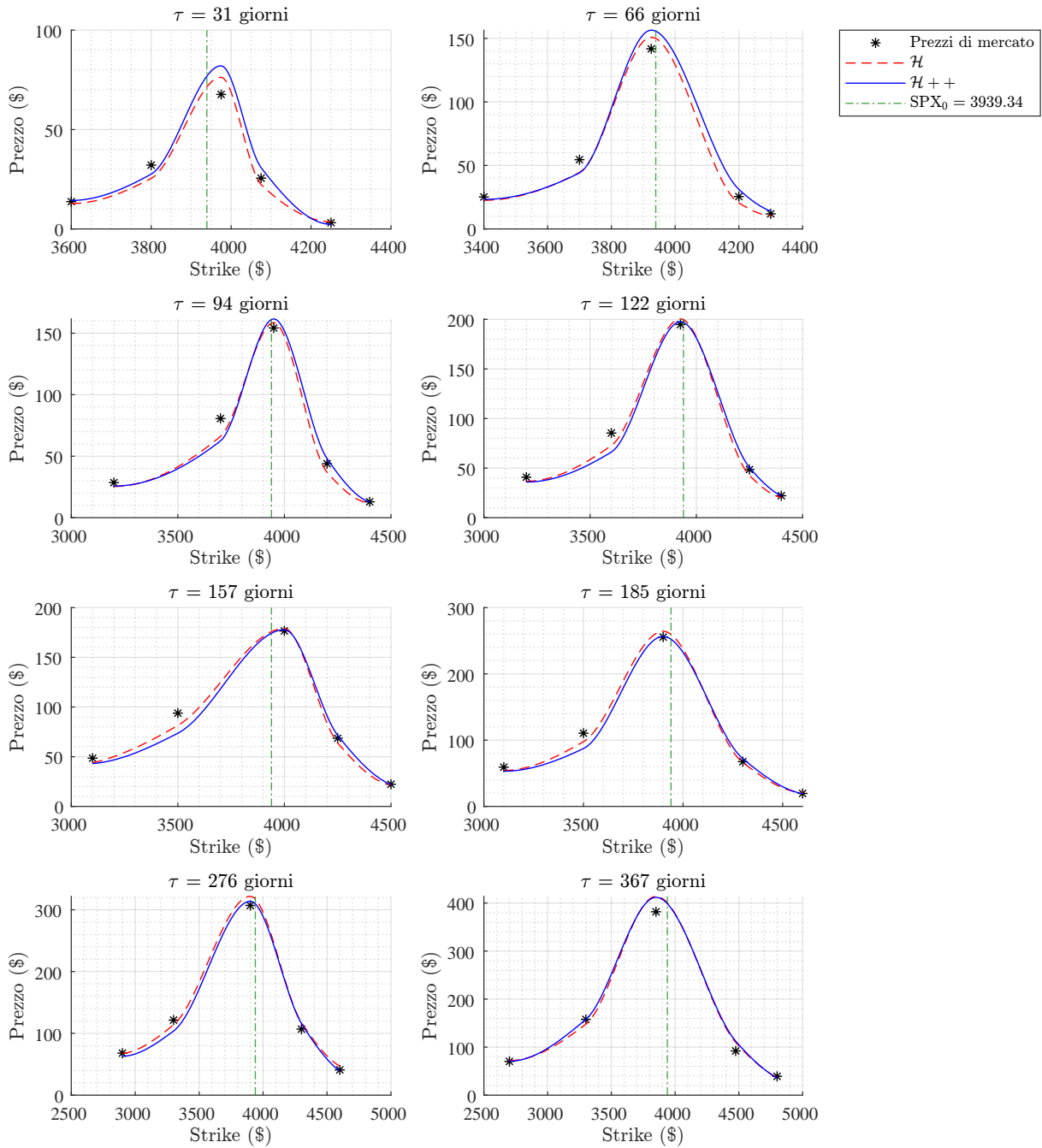


Figura 4.9: La figura riporta i prezzi di mercato, osservati il 16 marzo 2021, e i prezzi stimati dai modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ delle opzioni SPX, ottenuti dalla calibrazione simultanea di opzioni SPX e VIX.

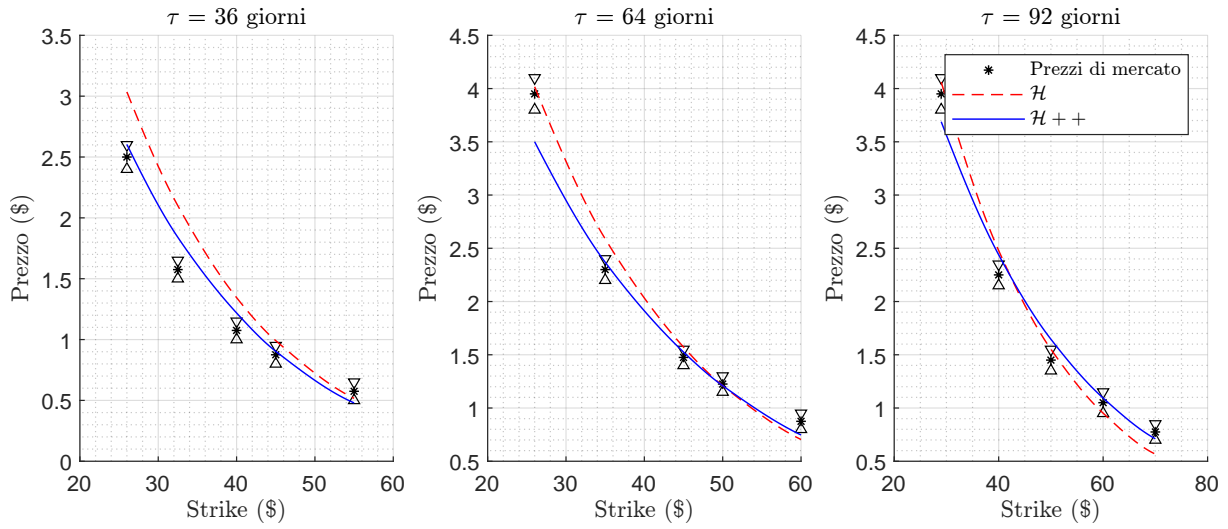


Figura 4.10: La figura riporta i prezzi di mercato, osservati il 16 Marzo 2021, e i prezzi stimati dai modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ delle opzioni VIX, ottenuti dalla calibrazione simultanea di opzioni SPX e VIX. Le due frecce sopra e sotto il prezzo di mercato indicano il *bid* e l'*ask* di mercato delle opzioni.

marzo 2021, con un errore medio relativo globale di 12.72% per il modello \mathcal{H} e di 12.23% per il modello $\mathcal{H}++$. In particolare, la performance di calibrazione sulle opzioni SPX dei due modelli è simile, con il modello $\mathcal{H}++$ che fornisce una stima leggermente meno precisa del modello \mathcal{H} nel caso di maturities τ basse. Per quanto riguarda le opzioni VIX, notiamo un deciso miglioramento nella stima quando si utilizza lo shift deterministico, con l'errore relativo medio che diminuisce dal 16.39% del modello \mathcal{H} al 10.05% del modello $\mathcal{H}++$. La miglior performance di calibrazione del modello con displacement è particolarmente evidente per le opzioni VIX con maturities τ più basse, come si può chiaramente osservare nella figura 4.10.

I risultati della calibrazione dei prezzi di mercato mostrano chiaramente come l'aggiunta dello *shift* deterministico ϕ_t migliori la precisione nel replicare le due superfici di volatilità contemporaneamente, in particolar modo riducendo sensibilmente l'errore di calibrazione nel caso delle opzioni VIX. Tuttavia, l'errore relativo medio globale di entrambi i modelli resta piuttosto elevato, attorno al 12%. Nella ricerca futura, sarà interessante indagare la natura di questo errore. Un motivo può essere la presenza di *outliers* nei prezzi di mercato selezionato: per escluderli, si può allargare notevolmente il portafoglio di calibrazione, considerando un intervallo temporale di più giorni e una griglia di strikes più

fitta, selezionando e rimuovendo dal campione i valori che si discostano in maniera decisa dalla media, come fatto da [Pacati et al. \(2018\)](#). Un altro motivo può essere che neppure l'estensione del displacement ϕ_t è sufficiente a descrivere con accuratezza le caratteristiche congiunte dei due mercati SPX e VIX. Per migliorare il risultato di calibrazione, sarà quindi interessante estendere il modello $\mathcal{H}++$, aggiungendo un secondo processo di volatilità oppure dei salti. Si potrà poi calcolare il gradiente analitico di questo modello, per mantenere i vantaggi di accuratezza, robustezza e velocità dell'algoritmo di calibrazione da noi proposto.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

Lo scopo di questa tesi è stato quello di proporre una formulazione del gradiente analitico dei prezzi delle opzioni SPX e VIX nel modello $\mathcal{H}++$, da poter utilizzare nella calibrazione consistente con i prezzi del mercato delle opzioni scritte sull'indice S&P500 e delle opzioni scritte sull'indice di volatilità VIX. Abbiamo verificato analiticamente e numericamente la correttezza della formulazione del gradiente proposto da Zhao (2018), e abbiamo riassunto i risultati in due proposizioni formali, le Proposizioni 4 e 5. Abbiamo poi proposto l'algoritmo 1 per la calibrazione consistente dei due mercati, mediante l'utilizzo del metodo di minimizzazione Levenberg-Marquardt. Abbiamo validato l'algoritmo di calibrazione generando in maniera randomica i prezzi delle opzioni e i parametri di ricerca iniziale, sia per il modello \mathcal{H} che per il modello $\mathcal{H}++$. Per entrambi i modelli, i parametri di ricerca ottimali sono stati trovati correttamente nel 100% delle 10 000 simulazioni effettuate. I parametri trovati dall'algoritmo replicano con estrema precisione le superfici di volatilità dei due mercati, con una norma del residuo \mathbf{r}^* inferiore a 10^{-10} , e con un errore relativo medio di entrambe le superfici dell'ordine di 10^{-5} . La velocità e la stabilità derivanti dall'uso del gradiente analitico suggeriscono che il metodo proposto sia adatto per un utilizzo nel trading in tempo reale e nel risk management. In particolare, abbiamo verificato come l'algoritmo 1 garantisca la calibrazione del modello $\mathcal{H}++$ senza alcun costo computazionale aggiuntivo rispetto al più tradizionale modello \mathcal{H} . Abbiamo infine utilizzato l'algoritmo di calibrazione proposto per calibrare i modelli \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$ mediante l'utilizzo di prezzi di mercato di opzioni SPX e VIX. L'errore relativo medio delle calibrazioni di entrambi i modelli è stato del 12%; abbiamo mostrato come l'aggiunta dello *shift* deterministico ϕ_t nel modello $\mathcal{H}++$ svolga un ruolo cruciale nel migliorare la calibrazione della superficie di

volatilità delle opzioni VIX, migliorando significativamente del 6% l'errore medio relativo, e dimostrandosi quindi un modello più adatto per la calibrazione consistente dei due mercati.

Ci sono ancora numerosi margini di miglioramento nello sviluppo di questo algoritmo di calibrazione. Per esempio, per validare l'algoritmo, abbiamo dovuto cambiare il valore del punto iniziale $\theta^{(0)}$ nel 7.2% dei casi nel modello \mathcal{H} e nel 10.7% dei casi nel modello $\mathcal{H}++$, per via di un numero di iterazioni troppo elevato rispetto alle simulazioni *benchmark*. Questa lenta convergenza può essere dovuta alla presenza di minimi locali nel problema di calibrazione, oppure al fatto che la superficie della funzione obiettivo presenti un fondo molto piatto. Questi fenomeni fanno dipendere il successo dell'algoritmo dalla corretta selezione del punto iniziale $\theta^{(0)}$. Per migliorare la velocità di convergenza e la robustezza dell'algoritmo rispetto alla scelta del punto iniziale, si possono introdurre dei termini di correzione al metodo Levenberg-Marquardt, come l'accelerazione geodesica (Transtrum et al., 2012) oppure la tecnica del *simulated annealing* (Dkhichi et al., 2014), per trasformare l'algoritmo proposto in un algoritmo di minimizzazione globale, che non dipenda dalla scelta del punto iniziale.

Per quanto riguarda la calibrazione dei prezzi di mercato, l'elevato errore medio ottenuto nella calibrazione di entrambi i modelli rende evidente la necessità di effettuare ulteriori analisi per capire la natura del problema. Un possibile punto di partenza può essere quello di estendere la dimensione del portafoglio di opzioni selezionato per la calibrazione, prendendo in esame prezzi di mercato in un intervallo di tempo di mesi o anni, e scegliendo una fitta superficie di *strikes*, come fatto da Pacati et al. (2018). In seguito, sarebbe opportuno operare un *data filtering* sui prezzi di mercato selezionati ed escludere accuratamente eventuali *outliers* presenti nel campione. Un altro approccio, più interessante dal punto di vista teorico, può riguardare l'estensione del gradiente analitico a modelli più complessi di \mathcal{H} e $\mathcal{H}++$, come per esempio il modello proposto da Pompa (2015), in cui sono presenti due processi distinti di volatilità e diversi processi di salto. Una volta esteso il gradiente analitico, si potrà paragonare la precisione della calibrazione del nuovo modello ai precedenti, pur mantenendo i vantaggi in termini di velocità e robustezza dell'algoritmo da noi sviluppato. Infine, si potrebbe modificare il metodo del gradiente analitico in modo tale che il problema ai minimi quadrati non lineare faccia riferimento alla minimizzazione degli scarti delle volatilità implicite, invece che dei prezzi, dei due gruppi di opzioni, e analizzare l'effetto della modifica della funzione obiettivo nelle performance dell'algoritmo e nella calibrazione delle superfici di volatilità di mercato.

Bibliografia

- Abramowitz, M. & Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. Courier Dover Publications.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 631–659. <https://doi.org/10.1086/260062>
- Branger, N., Kraftschik, A. & Völkert, C. (2016). The fine structure of variance: Pricing vix derivatives in consistent and log-vix models. *Available at SSRN 2028285*.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2001). On Deterministic Shift Extensions of Short Rate Models. <https://doi.org/10.2139/ssrn.292060>
- Carr, P. & Madan, D. B. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform.
- Carr, P. & Lee, R. (2009). Volatility Derivatives. *Annual Review of Financial Economics*, 1(1), 319–339. <https://doi.org/10.1146/annurev.financial.050808.114304>
- CBOE. (2018). The CBOE volatility index-VIX [White Paper]. <https://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>
- Christoffersen, P., Heston, S. & Jacobs, K. (2009). The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work So Well. *Management Science*, 55(12), 1914–1932. <https://EconPapers.repec.org/RePEc:inm:ormnsc:v:55:y:2009:i:12:p:1914-1932>
- Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385–407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- Cui, Y., Del Baño Rollin, S. & Germano, G. (2017). Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model. *European Journal of Operational Research*, 263, 625–638. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.05.018>
- Del Baño Rollin, S., Ferreiro-Castilla, A. & Utzet, F. (2010). On the density of log-spot in the Heston volatility model. *Stochastic Processes and their Applications*, 120, 2037–2063. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.06.003>

- Dkhichi, F., Oukarfi, B., Fakkar, A. & Belbounagua, N. (2014). Parameter identification of solar cell model using Levenberg–Marquardt algorithm combined with simulated annealing. *Solar Energy*, 110, 781–788. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2014.09.033>
- Gatheral, J. (2008). Consistent modeling of SPX and VIX options [Bachelier Congress].
- Heston, S. I. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327–342. <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>
- Kahl, C. & Jäckel, P. (2005). Not-so-complex logarithms in the Heston model. *Wilmott Magazine*, 2005, 94–103. <https://www.wilmott.com/not-so-complex-logarithms-in-the-heston-model/>
- Levenberg, K. (1944). A Method For The Solution Of Certain Nonlinear Problems In Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2), 164–168. <https://doi.org/10.2307/43633451>
- Lewis, A. (2000). *Option Valuation Under Stochastic Volatility*.
- Lin, Y.-N. (2007). Pricing VIX futures: Evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures. *Journal of Futures Markets*, 27, 1175–1217. <https://doi.org/10.1002/fut.20291>
- Lourakis, M. I. A. (2004). levmar: Levenberg-Marquardt nonlinear least squares algorithms in C/C++. <http://www.ics.forth.gr/~lourakis/levmar>
- Marquardt, D. W. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431–441. <https://doi.org/10.2307/2098941>
- Pacati, C., Pompa, G. & Renò, R. (2018). Smiling twice: The Heston++ model [SSRN 2697179]. *Journal of Banking and Finance*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2697179>
- Pacati, C., Renò, R. & Santilli, M. (2014). Heston model: shifting on the volatility surface.
- Pompa, G. (2015). *Deterministic Shift Extension of Affine Models for Variance Derivatives* [PhD thesis, IMT Lucca]. <https://doi.org/10.6092/imtlucca/e-theses/185>
- Pujol, J. (2007). The solution of nonlinear inverse problems and the Levenberg-Marquardt method. <https://doi.org/10.1190/1.2732552>
- Quarteroni, A., Sacco, R. & Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b98885>

- Rouah, F. D. (2013). *The Heston model and its extensions in Matlab and C#*. John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9781118656471>
- Schoutens, W., Simons, E. & Tistaert, J. (2004). A perfect calibration! Now what? *Wilmott Magazine*, 2004, 66–78.
- Sepp, A. (2008). Pricing options on realized variance in the Heston model with jumps in returns and volatility. *Journal of Computational Finance*, 11(4), 33–70.
- Transtrum, M. & Sethna, J. (2012). Improvements to the Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization. <https://doi.org/1201.5885>
- Zhao, L. (2018). *Analytically Differentiable Expression of the Characteristic Function of the Heston Model with Displacement and its Use in Calibration* (Tesi di laurea). University College London.