Il gradiente analitico del modello Heston++ e il suo utilizzo nella calibrazione consistente con le opzioni VIX

Candidato:
Matteo Paggiaro
Matricola 920812

Relatori:
Professor Daniele Marazzina
Professor Guido Germano, UCL

Anno Accademico 2019/2020

Indice des contenuti

1. Introduzione
2. Modelli a volatilità stocastica
3. Calibrazione e gradiente analitico
4. Algoritmi di calibrazione
5. Risultati numerici
6. Conclusioni

Uno sguardo d'insieme: gli indici S&P500 e VIX

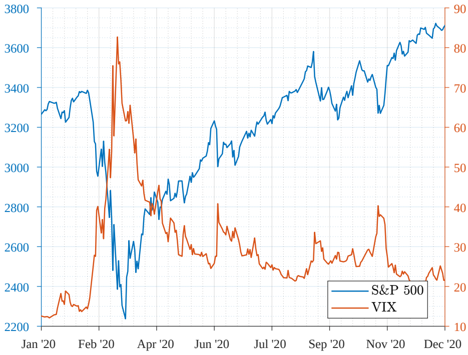


Figura: Andamento degli indici S&P500 e VIX [CBOE, 2021; Nasdaq, 2021].

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- 2003: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- 2006: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

L'indice VIX: storia e caratteristiche

Interpretazione finanziaria

L'indice VIX rappresenta la volatilità implicita a 30 giorni dello S&P500.

Caratteristiche principali

1. Indicatore del *market sentiment*: **"fear gauge"**.
2. **Correlazione negativa** con l'indice S&P500.

Storia dell'indice

- **1993**: la CBOE introduce l'indice VIX, in funzione dello S&P100.
- **2003**: ridefinizione dell'indice, modificati vari aspetti.
- **2006**: introdotte le opzioni sull'indice VIX.

Crescita del mercato delle opzioni VIX...

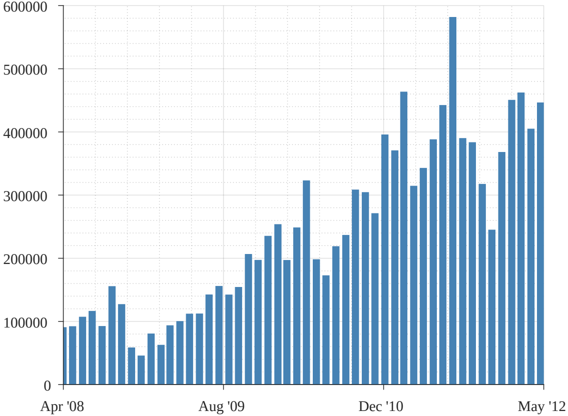


Figura: Volume giornaliero medio di opzioni VIX scambiate nel mercato U.S. [CBOE, 2021].

… Fino al mercato attuale

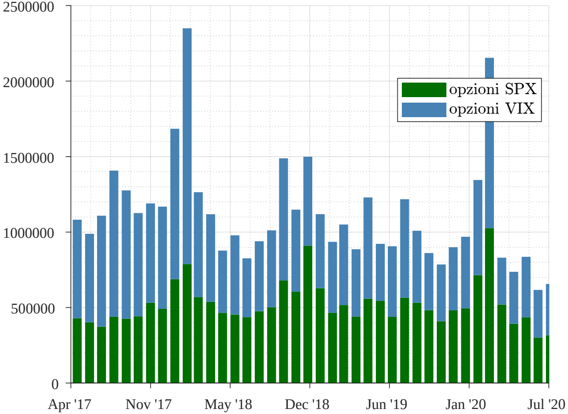


Figura: Volume giornaliero medio di opzioni VIX e S&P500 scambiate nel mercato U.S. [CBOE, 2021].

Motivazioni

- Le opzioni VIX sono il principale strumento per fare **trading sulla volatilità**.
- Le dimensioni dei due mercati sono paragonabili.

Obiettivo

Trovare dei **modelli finanziari** che siano in grado di interpretare, con sufficiente accuratezza, entrambi i mercati *simultaneamente*.

Domanda

Come testare la bontà di un modello?

$\Rightarrow$ Attraverso la **calibrazione!**

Motivazioni

- Le opzioni VIX sono il principale strumento per fare **trading sulla volatilità**.
- Le dimensioni dei due mercati sono paragonabili.

Obiettivo

Trovare dei **modelli finanziari** che siano in grado di interpretare, con sufficiente accuratezza, entrambi i mercati *simultaneamente*.

Domanda

Come testare la bontà di un modello?

$\Rightarrow$ Attraverso la **calibrazione!**

Motivazioni

- Le opzioni VIX sono il principale strumento per fare **trading sulla volatilità**.
- Le dimensioni dei due mercati sono paragonabili.

Obiettivo

Trovare dei **modelli finanziari** che siano in grado di interpretare, con sufficiente accuratezza, entrambi i mercati *simultaneamente*.

Domanda

Come testare la bontà di un modello?

$\Rightarrow$ Attraverso la **calibrazione!**

Motivazioni

- Le opzioni VIX sono il principale strumento per fare **trading sulla volatilità**.
- Le dimensioni dei due mercati sono paragonabili.

Obiettivo

Trovare dei **modelli finanziari** che siano in grado di interpretare, con sufficiente accuratezza, entrambi i mercati *simultaneamente*.

Domanda

Come testare la bontà di un modello?

$\Rightarrow$ Attraverso la **calibrazione!**

Motivazioni

- Le opzioni VIX sono il principale strumento per fare **trading sulla volatilità**.
- Le dimensioni dei due mercati sono paragonabili.

Obiettivo

Trovare dei **modelli finanziari** che siano in grado di interpretare, con sufficiente accuratezza, entrambi i mercati *simultaneamente*.

Domanda

Come testare la bontà di un modello?

$\Rightarrow$ Attraverso la **calibrazione!**

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Calibrazione finanziaria

Consiste nel...

"[...] determinare il valore dei parametri così che il modello replichi i prezzi di mercato **più accuratamente possibile**" [Cui et al., 2017].

In che modo? Mediante:

- metodi di minimizzazione non lineari di una funzione obiettivo
- utilizzo del gradiente analitico

Perché il gradiente analitico?

1. Elegante: formule analitiche
2. Si presta a un'interpretazione teorica
3. Costo computazionale ridotto del **94%** rispetto al gradiente numerico [Cui et al., 2017]

Obiettivi della nostra ricerca:

1. Illustrare **modelli finanziari** che possano interpretare simultaneamente i due mercati
2. Verificare la correttezza del **gradiente analitico** dei prezzi nei modelli scelti
3. Implementare un **algoritmo di calibrazione** robusto ed efficiente che utilizzi il gradiente analitico
4. Valutare la **performance** dell'algoritmo e dei modelli proposti

Obiettivi della nostra ricerca:

1. Illustrare **modelli finanziari** che possano interpretare simultaneamente i due mercati
2. Verificare la correttezza del **gradiente analitico** dei prezzi nei modelli scelti
3. Implementare un **algoritmo di calibrazione** robusto ed efficiente che utilizzi il gradiente analitico
4. Valutare la **performance** dell'algoritmo e dei modelli proposti

Obiettivi della nostra ricerca:

1. Illustrare **modelli finanziari** che possano interpretare simultaneamente i due mercati
2. Verificare la correttezza del **gradiente analitico** dei prezzi nei modelli scelti
3. Implementare un **algoritmo di calibrazione** robusto ed efficiente che utilizzi il gradiente analitico
4. Valutare la **performance** dell'algoritmo e dei modelli proposti

Obiettivi della nostra ricerca:

1. Illustrare **modelli finanziari** che possano interpretare simultaneamente i due mercati
2. Verificare la correttezza del **gradiente analitico** dei prezzi nei modelli scelti
3. Implementare un **algoritmo di calibrazione** robusto ed efficiente che utilizzi il gradiente analitico
4. Valutare la **performance** dell'algoritmo e dei modelli proposti

1 Introduzione
2 Modelli a volatilità stocastica
3 Calibrazione e gradiente analitico
4 Algoritmi di calibrazione
5 Risultati numerici
6 Conclusioni

Un primo modello: Heston classico

Modello di Heston

$$\begin{cases} dS_t = r\, S_t\, dt + S_t \sqrt{v_t}\, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\,(\overline{v} - v_t)\; dt + \sigma \sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S\, dW_t^v = \rho\, dt. \end{cases}$$

Vantaggi

1. Trattabilità: formule chiuse
2. Semplicità: solamente 5 parametri

Limite

L'accuratezza del fit simultaneo dei due mercati è migliorabile.

Un primo modello: Heston classico

Modello di Heston

$$\begin{cases} dS_t = r\,S_t\,dt + S_t\sqrt{v_t}\,dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\left(\overline{v} - v_t\right)\,dt + \sigma\sqrt{v_t}\,dW_t^v, \\ dW_t^S\,dW_t^v = \rho\,dt. \end{cases}$$

Vantaggi

1. Trattabilità: formule chiuse
2. Semplicità: solamente 5 parametri

Limite

L'accuratezza del fit simultaneo dei due mercati è migliorabile.

Un primo modello: Heston classico

Modello di Heston

$$\begin{cases} dS_t = r\, S_t\, dt + S_t \sqrt{v_t}\, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\, (\overline{v} - v_t)\; dt + \sigma \sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S\, dW_t^v = \rho\, dt. \end{cases}$$

Vantaggi

1. Trattabilità: formule chiuse
2. Semplicità: solamente 5 parametri

Limite

L'accuratezza del fit simultaneo dei due mercati è migliorabile.

Un primo modello: Heston classico

Modello di Heston

$$\begin{cases} dS_t = r\,S_t\,dt + S_t\sqrt{v_t}\,dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\left(\overline{v} - v_t\right)\,dt + \sigma\sqrt{v_t}\,dW_t^v, \\ dW_t^S\,dW_t^v = \rho\,dt. \end{cases}$$

Vantaggi

1. Trattabilità: formule chiuse
2. Semplicità: solamente 5 parametri

Limite

L'accuratezza del fit simultaneo dei due mercati è migliorabile.

Un passo avanti: Heston con displacement

Modello di Heston con displacement (parte di Heston++)

$$\begin{cases} dS_t = r\, S_t\, dt + S_t \sqrt{v_t + \phi_t}\, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\left(\overline{v} - v_t\right)\, dt + \sigma \sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S\, dW_t^v = \rho\, dt. \end{cases}$$

Aggiunta: *displacement deterministico* ϕ_t nella dinamica di S_t.

Vantaggio

Modello più versatile, si presta meglio a calibrare simultaneamente i due mercati.

Un passo avanti: Heston con displacement

Modello di Heston con displacement (parte di Heston++)

$$\begin{cases} dS_t = r\, S_t\, dt + S_t \sqrt{v_t + \phi_t}\, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\, (\overline{v} - v_t)\; dt + \sigma \sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S\, dW_t^v = \rho\, dt. \end{cases}$$

Aggiunta: *displacement deterministico* ϕ_t nella dinamica di S_t.

Vantaggio

Modello più versatile, si presta meglio a calibrare simultaneamente i due mercati.

Un passo avanti: Heston con displacement

Modello di Heston con displacement (parte di Heston++)

$$\begin{cases} dS_t = r\, S_t\, dt + S_t\, \sqrt{v_t + \phi_t}\, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa\, (\overline{v} - v_t)\; dt + \sigma\, \sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S\, dW_t^v = \rho\, dt. \end{cases}$$

Aggiunta: *displacement deterministico* ϕ_t nella dinamica di S_t.

Vantaggio

Modello più versatile, si presta meglio a calibrare simultaneamente i due mercati.

1. Introduzione
2. Modelli a volatilità stocastica
3. Calibrazione e gradiente analitico
4. Algoritmi di calibrazione
5. Risultati numerici
6. Conclusioni

Problema della calibrazione: formulazione analitica

Formuliamo il problema della calibrazione in forma analitica:

Calibrazione

Trovare il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ che minimizzi la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$:

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{\theta}).$$

Domanda (importante)

Come scegliamo la funzione obiettivo f?

Problema della calibrazione: formulazione analitica

Formuliamo il problema della calibrazione in forma analitica:

Calibrazione

Trovare il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ che minimizzi la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$:

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{\theta}).$$

Domanda (importante)

Come scegliamo la funzione obiettivo f?

Problema della calibrazione: formulazione analitica

Formuliamo il problema della calibrazione in forma analitica:

Calibrazione

Trovare il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ che minimizzi la funzione obiettivo $f(\boldsymbol{\theta})$:

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{\theta}).$$

Domanda (importante)

Come scegliamo la funzione obiettivo f?

La nostra proposta per la funzione obiettivo

Funzione obiettivo f

$$f(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2N_{\mathrm{SPX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\mathrm{SPX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 + \frac{1}{2N_{\mathrm{VIX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\mathrm{VIX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 ,$$

dove l'elemento i del vettore $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SPX}}$ ($\boldsymbol{r}_{\mathrm{VIX}}$) è dato da

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) := \frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\mathrm{mkt}}}{C_i^{\mathrm{mkt}}}, \qquad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{SPX}}(N_{\mathrm{VIX}}).$$

Componenti

- C_i^{mkt}: prezzo di mercato dell'opzione,
- $C_i(\boldsymbol{\theta})$: prezzo dell'opzione secondo il modello di parametri $\boldsymbol{\theta}$,
- $N_{\mathrm{SPX}}, N_{\mathrm{VIX}}$: numero di opzioni

La nostra proposta per la funzione obiettivo

Funzione obiettivo f

$$f(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2N_{\text{SPX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\text{SPX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 + \frac{1}{2N_{\text{VIX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\text{VIX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 ,$$

dove l'elemento i del vettore $\boldsymbol{r}_{\text{SPX}}$ ($\boldsymbol{r}_{\text{VIX}}$) è dato da

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) := \frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\text{mkt}}}{C_i^{\text{mkt}}}, \qquad i = 1, \dots, N_{\text{SPX}}(N_{\text{VIX}}).$$

Componenti

- C_i^{mkt}: prezzo di mercato dell'opzione,
- $C_i(\boldsymbol{\theta})$: prezzo dell'opzione secondo il modello di parametri $\boldsymbol{\theta}$,
- $N_{\text{SPX}}, N_{\text{VIX}}$: numero di opzioni

La nostra proposta per la funzione obiettivo

Funzione obiettivo f

$$f(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2N_{\mathsf{SPX}}} \left\|\boldsymbol{r}_{\mathsf{SPX}}(\boldsymbol{\theta})\right\|^2 + \frac{1}{2N_{\mathsf{VIX}}} \left\|\boldsymbol{r}_{\mathsf{VIX}}(\boldsymbol{\theta})\right\|^2,$$

dove l'elemento i del vettore $\boldsymbol{r}_{\mathsf{SPX}}$ ($\boldsymbol{r}_{\mathsf{VIX}}$) è dato da

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) := \frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\mathsf{mkt}}}{C_i^{\mathsf{mkt}}}, \qquad i = 1, \ldots, N_{\mathsf{SPX}}(N_{\mathsf{VIX}}).$$

Componenti

- C_i^{mkt}: prezzo di mercato dell'opzione,
- $C_i(\boldsymbol{\theta})$: prezzo dell'opzione secondo il modello di parametri $\boldsymbol{\theta}$,
- $N_{\mathsf{SPX}}, N_{\mathsf{VIX}}$: numero di opzioni

La nostra proposta per la funzione obiettivo

Funzione obiettivo f

$$f(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2N_{\mathrm{SPX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\mathrm{SPX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 + \frac{1}{2N_{\mathrm{VIX}}} \left\| \boldsymbol{r}_{\mathrm{VIX}}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2,$$

dove l'elemento i del vettore $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SPX}}$ ($\boldsymbol{r}_{\mathrm{VIX}}$) è dato da

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) := \frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\mathrm{mkt}}}{C_i^{\mathrm{mkt}}}, \qquad i = 1, \dots, N_{\mathrm{SPX}}(N_{\mathrm{VIX}}).$$

Componenti

- C_i^{mkt}: prezzo di mercato dell'opzione,
- $C_i(\boldsymbol{\theta})$: prezzo dell'opzione secondo il modello di parametri $\boldsymbol{\theta}$,
- $N_{\mathrm{SPX}}, N_{\mathrm{VIX}}$: numero di opzioni

Caratteristiche della funzione obiettivo:

Elementi chiave

- **Residui:** $\frac{C_i(\boldsymbol{\theta})-C_i^{\mathrm{mkt}}}{C_i^{\mathrm{mkt}}}$ scarti relativi.
- **Pesi:** $\left\{\frac{1}{N_{\mathrm{SPX}}}, \frac{1}{N_{\mathrm{VIX}}}\right\}$ bilanciamento dei due mercati.

Osservazione

La funzione obiettivo **non è lineare** nel vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$.

$\Rightarrow$ Necessari metodi di minimizzazione iterativi.

Scelta

Ci baseremo su metodi che utilizzano il **gradiente** della funzione obiettivo rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, indicato con $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Caratteristiche della funzione obiettivo:

Elementi chiave

- **Residui:** $\frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\text{mkt}}}{C_i^{\text{mkt}}}$ scarti relativi.
- **Pesi:** $\left\{ \frac{1}{N_{\text{SPX}}}, \frac{1}{N_{\text{VIX}}} \right\}$ bilanciamento dei due mercati.

Osservazione

La funzione obiettivo **non è lineare** nel vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$.

$\Rightarrow$ Necessari metodi di minimizzazione iterativi.

Scelta

Ci baseremo su metodi che utilizzano il **gradiente** della funzione obiettivo rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, indicato con $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Caratteristiche della funzione obiettivo:

Elementi chiave

- **Residui:** $\frac{C_i(\boldsymbol{\theta})-C_i^{\text{mkt}}}{C_i^{\text{mkt}}}$ scarti relativi.
- **Pesi:** $\left\{\frac{1}{N_{\text{SPX}}}, \frac{1}{N_{\text{VIX}}}\right\}$ bilanciamento dei due mercati.

Osservazione

La funzione obiettivo **non è lineare** nel vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$.

$\Rightarrow$ Necessari metodi di minimizzazione iterativi.

Scelta

Ci baseremo su metodi che utilizzano il **gradiente** della funzione obiettivo rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, indicato con $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Caratteristiche della funzione obiettivo:

Elementi chiave

- **Residui:** $\frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\text{mkt}}}{C_i^{\text{mkt}}}$ scarti relativi.
- **Pesi:** $\left\{ \frac{1}{N_{\text{SPX}}}, \frac{1}{N_{\text{VIX}}} \right\}$ bilanciamento dei due mercati.

Osservazione

La funzione obiettivo **non è lineare** nel vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$.

$\Rightarrow$ Necessari metodi di minimizzazione iterativi.

Scelta

Ci baseremo su metodi che utilizzano il **gradiente** della funzione obiettivo rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, indicato con $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Caratteristiche della funzione obiettivo:

Elementi chiave

- **Residui:** $\frac{C_i(\boldsymbol{\theta}) - C_i^{\text{mkt}}}{C_i^{\text{mkt}}}$ scarti relativi.
- **Pesi:** $\left\{ \frac{1}{N_{\text{SPX}}}, \frac{1}{N_{\text{VIX}}} \right\}$ bilanciamento dei due mercati.

Osservazione

La funzione obiettivo **non è lineare** nel vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$.

$\Rightarrow$ Necessari metodi di minimizzazione iterativi.

Scelta

Ci baseremo su metodi che utilizzano il **gradiente** della funzione obiettivo rispetto al vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$, indicato con $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Ingredienti per il calcolo del gradiente $\nabla_\theta f$:

1. **Formule chiuse** dei prezzi delle opzioni nei due modelli [Pompa, 2015]
2. Espressioni analitiche delle funzioni caratteristiche **numericamente continue** e **facilmente derivabili** [Cui et al., 2017]
3. Integrazione numerica: formule di quadratura di **Gauss-Legendre**

Ingredienti per il calcolo del gradiente $\nabla_\theta f$:

1. **Formule chiuse** dei prezzi delle opzioni nei due modelli [Pompa, 2015]
2. Espressioni analitiche delle funzioni caratteristiche **numericamente continue** e **facilmente derivabili** [Cui et al., 2017]
3. Integrazione numerica: formule di quadratura di **Gauss-Legendre**

Ingredienti per il calcolo del gradiente $\nabla_\theta f$:

1. **Formule chiuse** dei prezzi delle opzioni nei due modelli [Pompa, 2015]
2. Espressioni analitiche delle funzioni caratteristiche **numericamente continue** e **facilmente derivabili** [Cui et al., 2017]
3. Integrazione numerica: formule di quadratura di **Gauss-Legendre**

Indice dei contenuti

1. Introduzione
2. Modelli a volatilità stocastica
3. Calibrazione e gradiente analitico
4. **Algoritmi di calibrazione**
5. Risultati numerici
6. Conclusioni

Algoritmi di calibrazione: linee guida

Notazione

Chiamiamo $\boldsymbol{J} \coloneqq \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{r}^\intercal \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice Jacobiana dei residui $\boldsymbol{r}$.
$\Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}$

Domanda

Come facciamo a trovare $\boldsymbol{\theta}$ che minimizzi f?

Idea

Utilizzare algoritmi *iterativi*:

- scegliere vettore dei parametri iniziali θ_0.
- all'iterazione k, trovare θ_{k+1} da θ_k.

Algoritmi di calibrazione: linee guida

Notazione

Chiamiamo $\boldsymbol{J} \coloneqq \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{r}^\intercal \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice Jacobiana dei residui $\boldsymbol{r}$.
$\Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}$

Domanda

Come facciamo a trovare $\boldsymbol{\theta}$ che minimizzi f?

Idea

Utilizzare algoritmi *iterativi*:

- scegliere vettore dei parametri iniziali θ_0.
- all'iterazione k, trovare θ_{k+1} da θ_k.

Algoritmi di calibrazione: linee guida

Notazione

Chiamiamo $\boldsymbol{J} := \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice Jacobiana dei residui $\boldsymbol{r}$.
$\Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \boldsymbol{J} \boldsymbol{r}$

Domanda

Come facciamo a trovare $\boldsymbol{\theta}$ che minimizzi f?

Idea

Utilizzare algoritmi *iterativi*:

- scegliere vettore dei parametri iniziali $\boldsymbol{\theta}_0$.
- all'iterazione k, trovare $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ da $\boldsymbol{\theta}_k$.

Algoritmi di calibrazione: linee guida

Notazione

Chiamiamo $\boldsymbol{J} := \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{r}^\intercal \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice Jacobiana dei residui $\boldsymbol{r}$.
$\Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}$

Domanda

Come facciamo a trovare $\boldsymbol{\theta}$ che minimizzi f?

Idea

Utilizzare algoritmi *iterativi*:

- scegliere vettore dei parametri iniziali $\boldsymbol{\theta}_0$.
- all'iterazione k, trovare $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ da $\boldsymbol{\theta}_k$.

Algoritmi di calibrazione: linee guida

Notazione

Chiamiamo $\boldsymbol{J} := \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice Jacobiana dei residui $\boldsymbol{r}$.
$\Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f = \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}$

Domanda

Come facciamo a trovare $\boldsymbol{\theta}$ che minimizzi f?

Idea

Utilizzare algoritmi *iterativi*:

- scegliere vettore dei parametri iniziali $\boldsymbol{\theta}_0$.
- all'iterazione k, trovare $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ da $\boldsymbol{\theta}_k$.

Una prima idea: metodo di Gauss-Newton

Algoritmo di Gauss-Newton

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

$$\begin{cases} (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathsf{T}})_k \, \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Vantaggi

- efficiente
- poche iterazioni: rapido

Limite

La convergenza non è garantita.

Una prima idea: metodo di Gauss-Newton

Algoritmo di Gauss-Newton

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

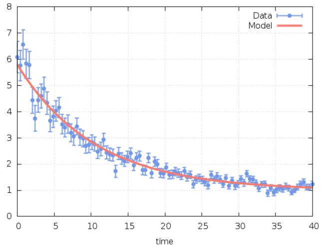
$$\begin{cases} (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\top)_k \, \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Vantaggi

- efficiente
- poche iterazioni: rapido

Limite

La convergenza non è garantita.



Una prima idea: metodo di Gauss-Newton

Algoritmo di Gauss-Newton

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

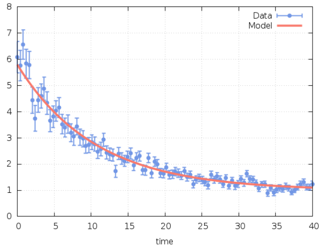
$$\begin{cases} (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\intercal)_k \, \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Vantaggi

- efficiente
- poche iterazioni: rapido

Limite

La convergenza non è garantita.



Una prima idea: metodo di Gauss-Newton

Algoritmo di Gauss-Newton

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

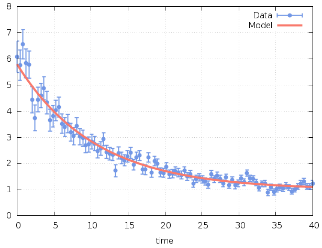
$$\begin{cases} (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\mathsf{T})_k \, \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Vantaggi

- efficiente
- poche iterazioni: rapido

Limite

La convergenza non è garantita.



L'alternativa: discesa del gradiente

Metodo della discesa del gradiente:

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \gamma_k \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k).$$

γ_k: lunghezza del passo di discesa.

Vantaggio

La convergenza è garantita.

Limite

Il metodo non è efficiente,
richiede molte iterazioni.

L'alternativa: discesa del gradiente

Metodo della discesa del gradiente:

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \gamma_k \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k).$$

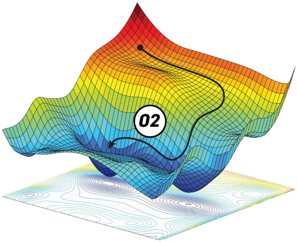
γ_k: lunghezza del passo di discesa.

Vantaggio

La convergenza è garantita.

Limite

Il metodo non è efficiente, richiede molte iterazioni.



L'alternativa: discesa del gradiente

Metodo della discesa del gradiente:

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \gamma_k \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k).$$

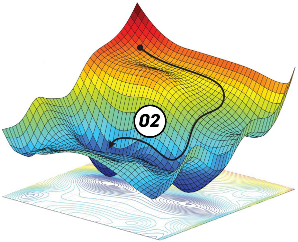
γ_k: lunghezza del passo di discesa.

Vantaggio

La convergenza è garantita.

Limite

Il metodo non è efficiente, richiede molte iterazioni.



L'alternativa: discesa del gradiente

Metodo della discesa del gradiente:

All'iterazione k, con $\boldsymbol{\theta}_k$ noto, risolvere

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \gamma_k \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k).$$

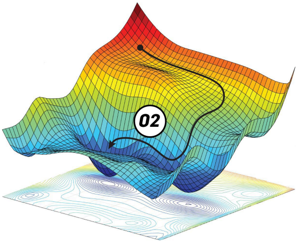
γ_k: lunghezza del passo di discesa.

Vantaggio

La convergenza è garantita.

Limite

Il metodo non è efficiente,
richiede molte iterazioni.



La nostra scelta: Levenberg-Marquardt

Algoritmo Levenberg-Marquardt

All'iterazione k, con $\lambda_k = \frac{1}{\gamma_k}$, risolvere

$$\begin{cases} \left[(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\intercal)_k + \lambda_k \boldsymbol{I}\right] \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Comportamento asintotico: *smorzamento* λ_k

- $\lambda_k \to 0$: metodo Gauss-Newton.
- $\lambda_k \to \infty$: discesa del gradiente, con $\gamma_k \to 0$.

Conclusione

Metodo robusto ed efficiente, adatto al nostro problema!

La nostra scelta: Levenberg-Marquardt

Algoritmo Levenberg-Marquardt

All'iterazione k, con $\lambda_k = \frac{1}{\gamma_k}$, risolvere

$$\begin{cases} \left[(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\top)_k + \lambda_k \boldsymbol{I}\right] \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Comportamento asintotico: *smorzamento* λ_k

- $\lambda_k \to 0$: metodo Gauss-Newton.
- $\lambda_k \to \infty$: discesa del gradiente, con $\gamma_k \to 0$.

Conclusione

Metodo robusto ed efficiente, adatto al nostro problema!

La nostra scelta: Levenberg-Marquardt

Algoritmo Levenberg-Marquardt

All'iterazione k, con $\lambda_k = \frac{1}{\gamma_k}$, risolvere

$$\begin{cases} \left[(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\intercal)_k + \lambda_k \boldsymbol{I}\right] \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Comportamento asintotico: *smorzamento* λ_k

- $\lambda_k \to 0$: metodo Gauss-Newton.
- $\lambda_k \to \infty$: discesa del gradiente, con $\gamma_k \to 0$.

Conclusione

Metodo robusto ed efficiente, adatto al nostro problema!

La nostra scelta: Levenberg-Marquardt

Algoritmo Levenberg-Marquardt

All'iterazione k, con $\lambda_k = \frac{1}{\gamma_k}$, risolvere

$$\begin{cases} \left[(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\mathsf{T})_k + \lambda_k \boldsymbol{I} \right] \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k), \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k. \end{cases}$$

Comportamento asintotico: *smorzamento* λ_k

- $\lambda_k \to 0$: metodo Gauss-Newton.
- $\lambda_k \to \infty$: discesa del gradiente, con $\gamma_k \to 0$.

Conclusione

Metodo robusto ed efficiente, adatto al nostro problema!

Indice dei contenuti

1 Introduzione
2 Modelli a volatilità stocastica
3 Calibrazione e gradiente analitico
4 Algoritmi di calibrazione
5 Risultati numerici
6 Conclusioni

Testiamo la calibrazione:

Idea: simulazioni con prezzi sintetici

Generiamo i prezzi di mercato C_i^{mkt} con il modello di parametri θ^{mkt}.

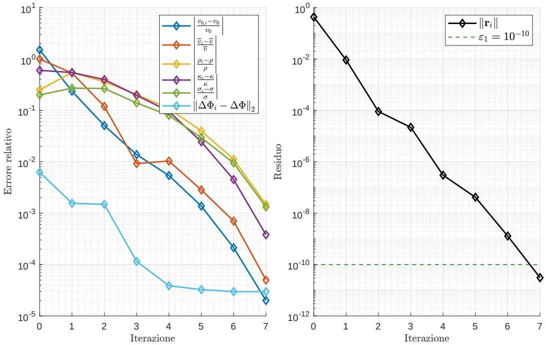
Risultati dell'algoritmo:

Testiamo la calibrazione:

Idea: simulazioni con prezzi sintetici

Generiamo i prezzi di mercato C_i^{mkt} con il modello di parametri $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{mkt}}$.

Risultati dell'algoritmo:



Principali risultati della simulazione

Robustezza

Ricavati i parametri ottimi nel **99,8%** delle simulazioni, rispetto all'88% delle ricerche precedenti [Zhao, 2018].

Efficienza e velocità

Costo computazionale ridotto del **67%** rispetto alla ricerca precedente [Zhao, 2018].

Problematiche emerse

Necessario cambiare punto iniziale θ_0 nell'11% dei casi.

$\Rightarrow$ Possibile presenza di **minimi locali**.

Principali risultati della simulazione

Robustezza

Ricavati i parametri ottimi nel **99,8%** delle simulazioni, rispetto all'88% delle ricerche precedenti [Zhao, 2018].

Efficienza e velocità

Costo computazionale ridotto del **67%** rispetto alla ricerca precedente [Zhao, 2018].

Problematiche emerse

Necessario cambiare punto iniziale θ_0 nell'11% dei casi.

$\Rightarrow$ Possibile presenza di **minimi locali**.

Principali risultati della simulazione

Robustezza

Ricavati i parametri ottimi nel **99,8%** delle simulazioni, rispetto all'88% delle ricerche precedenti [Zhao, 2018].

Efficienza e velocità

Costo computazionale ridotto del **67%** rispetto alla ricerca precedente [Zhao, 2018].

Problematiche emerse

Necessario cambiare punto iniziale θ_0 nell'11% dei casi.

$\Rightarrow$ Possibile presenza di **minimi locali**.

Principali risultati della simulazione

Robustezza

Ricavati i parametri ottimi nel **99,8%** delle simulazioni, rispetto all'88% delle ricerche precedenti [Zhao, 2018].

Efficienza e velocità

Costo computazionale ridotto del **67%** rispetto alla ricerca precedente [Zhao, 2018].

Problematiche emerse

Necessario cambiare punto iniziale θ_0 nell'11% dei casi.
$\Rightarrow$ Possibile presenza di **minimi locali**.

Testiamo i due modelli: prezzi di mercato reali

Metodologia

Calibriamo i **prezzi di mercato** con i due modelli Heston e Heston++.

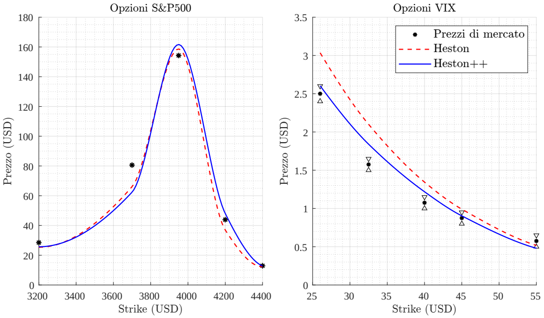
Risultati della calibrazione:

Testiamo i due modelli: prezzi di mercato reali

Metodologia

Calibriamo i **prezzi di mercato** con i due modelli Heston e Heston++.

Risultati della calibrazione:



Indice dei contenuti

1. Introduzione
2. Modelli a volatilità stocastica
3. Calibrazione e gradiente analitico
4. Algoritmi di calibrazione
5. Risultati numerici
6. Conclusioni

Conclusioni:

Paragone tra i modelli

Heston++ si presta meglio a modellare simultaneamente i due mercati.
$\Rightarrow$ Prezzi VIX: errore relativo medio passa dal **16%** al **10%**.

Principale limite

L'errore relativo medio globale sul portafoglio di opzioni resta piuttosto elevato ($\approx 12\%$).

Sviluppi futuri

- Estendere la calibrazione al modello **Heston++ completo** [Pacati et al., 2018], oppure a modelli differenti (come il Rough Heston).
- Implementare tecniche per la ricerca del minimo globale.

Conclusioni:

Paragone tra i modelli

Heston++ si presta meglio a modellare simultaneamente i due mercati.
$\Rightarrow$ Prezzi VIX: errore relativo medio passa dal **16%** al **10%**.

Principale limite

L'errore relativo medio globale sul portafoglio di opzioni resta piuttosto elevato ($\approx$ 12%).

Sviluppi futuri

- Estendere la calibrazione al modello **Heston++ completo** [Pacati et al., 2018], oppure a modelli differenti (come il Rough Heston).
- Implementare tecniche per la ricerca del minimo globale.

Conclusioni:

Paragone tra i modelli

Heston++ si presta meglio a modellare simultaneamente i due mercati.
$\Rightarrow$ Prezzi VIX: errore relativo medio passa dal **16%** al **10%**.

Principale limite

L'errore relativo medio globale sul portafoglio di opzioni resta piuttosto elevato ($\approx$ 12%).

Sviluppi futuri

- Estendere la calibrazione al modello **Heston++ completo** [Pacati et al., 2018], oppure a modelli differenti (come il Rough Heston).
- Implementare tecniche per la ricerca del minimo globale.

Conclusioni:

Paragone tra i modelli

Heston++ si presta meglio a modellare simultaneamente i due mercati.
$\Rightarrow$ Prezzi VIX: errore relativo medio passa dal **16%** al **10%**.

Principale limite

L'errore relativo medio globale sul portafoglio di opzioni resta piuttosto elevato ($\approx$ 12%).

Sviluppi futuri

- Estendere la calibrazione al modello **Heston++ completo** [Pacati et al., 2018], oppure a modelli differenti (come il Rough Heston).
- Implementare tecniche per la ricerca del minimo globale.

Conclusioni:

Paragone tra i modelli

Heston++ si presta meglio a modellare simultaneamente i due mercati.
$\Rightarrow$ Prezzi VIX: errore relativo medio passa dal **16%** al **10%**.

Principale limite

L'errore relativo medio globale sul portafoglio di opzioni resta piuttosto elevato ($\approx$ 12%).

Sviluppi futuri

- Estendere la calibrazione al modello **Heston++ completo** [Pacati et al., 2018], oppure a modelli differenti (come il Rough Heston).
- Implementare tecniche per la ricerca del minimo globale.

Grazie per la vostra attenzione!

Bibliografia I

- CBOE. (2021). *Historical and Daily Market Data*. https://www.cboe.com/us/options/
- Cui, Y., Del Baño Rollin, S. & Germano, G. (2017). Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model. *European Journal of Operational Research*, *263*, 625–638. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.05.018
- Nasdaq. (2021). *S&P500 (SPX) Historical Data*. https://www.nasdaq.com/it/market-activity/index/spx/historical
- Pacati, C., Pompa, G. & Renò, R. (2018). Smiling twice: The Heston++ model [SSRN 2697179]. *Journal of Banking and Finance*. https://doi.org/10.2139/ssrn.2697179

Bibliografia II

- Pompa, G. (2015). *Deterministic Shift Extension of Affine Models for Variance Derivatives*. https://doi.org/10.6092/imtlucca/e-theses/185
- Zhao, L. (2018). *Analytically Differentiable Expression of the Characteristic Function of the Heston Model with Displacement and its Use in Calibration* (Tesi di laurea). University College London.