离散数学

离散数学

计算机科学与技术学院

期中考试

- 时间地点:逸夫楼234 11月01日(18:30-20:30) 2小时(和系统有区别，以此为准)
- 题型:
  - 10道大题(一些大题包含小题),每题10分.
  - 基本题型：解答(含名词解释；判断一个结论是否成立；写出集合关于R的商集，等)；证明(如作业题型的证明，判断结论成立并证明)
- 基本不考偏僻内容(如名词解释集合的基，证明与不可兼或相关的结论)，但要求基本知识掌握全面透彻
- 期中考试分数占比20%，但期末考试，还要同样考1-3章

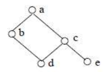
具体题型：名词解释

- 5个名词解释共10分，包括但不限于定义，如:
  - 相容关系---设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系
  - 量词---全称量词∀表达“对所有的”、“每一个”、“对任一个”等，存在量词∃可用来表达“存在一些”、“至少一些”、“对于一些”等。它们统称为量词.

具体题型：解答

- 解答题:

七、设集合 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 上的偏序关系如下图所示：（10 分）



求集合 X 的最大元素、最小元素、极大元素、极小元素。

求子集 $\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{c,d,e\}$ 的上界，下界，上确界，下确界。

解：P 的最大元素为 x_1，无最小元素，极大元素为 x_1，极小元素为 x_4, x_5。
$\{x_2,x_3,x_4\}$ 的上界为 x_1，下界为 x_4，上确界为 x_1，下确界为 x_4。
$\{x_3,x_4,x_5\}$ 的上界为 x_1, x_3，无下界，上确界为 x_3，无下确界。
$\{x_1,x_2,x_3\}$ 的上界为 x_1，下界为 x_4，上确界为 x_1，下确界为 x_4。

具体题型：解答

- 求$(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow\neg Q)$的主析取范式和主合取范式

解：a) $(\neg P \vee \neg Q)\rightarrow(P \rightleftarrows \neg Q)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \rightleftarrows \neg Q)$
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
$= \sum_{1,2,3}$
$\Leftrightarrow P \vee Q = \prod_0$

具体题型：解答

- 求等价于下面谓词公式的前束合取范式与前束析取范式。（10分）
- $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

d) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x,y))\rightarrow((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$
$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$
$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z))$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z)))$
前束析取范式，
$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$
前束合取范式。

具体题型：解答

- 设集合A={a,b,c,d}，A上的关系R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}。请用矩阵运算方法求出R的自反闭包、对称闭包和传递闭包

解：a) R 的邻接矩阵为：

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

R 的关系图如图 3－7(a) 所示。

R 的自反闭包的关系矩阵为：

$$M_R+M_{I_A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$r(R)=R\cup I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle\}$。

其关系图如图 3－7(b) 所示。

R 的对称闭包的关系矩阵为：

$$M_R+M_{R'}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$。

R 的传递闭包的关系矩阵为：

$$M_{R^2}=M_R\cdot M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\cdot M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\cdot M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $M_R+M_{R^2}+M_{R^3}+M_{R^4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$。

具体题型：判断并证明

- 判断+证明：

- 设A、B、C为任意三个集合，证明和判断下列公式成不成立。（10分）
- ① (A⊕B)×C=(A×C) ⊕ (B×C) （5分）

e) 成立。$(A\oplus B)\times C=[(A-B)\cup(B-A)]\times C$

$=[(A-B)\times C]\cup[(B-A)\times C]$

$=[(A\times C)-(B\times C)]\cup[(B\times C)-(A\times C)]$

$=(A\times C)\oplus(B\times C)$

注意：在有关集合笛卡尔积的等式证明中，应用笛卡尔积的定义和集合并交补运算的代数性质。

- ② (A∪B) ×(C∪D)=(A×C)∪(B×D)

- （这两道题都难度较高，特别是第一小题对称差，属于偏僻内容）

具体题型：证明

- **证明：** A上的覆盖{A_1，⋯，A_n}确定一个相容关系：

  R= $A_1\times A_1\cup\cdots\cup A_n\times A_n$

  证：现证 R 是一个相容关系

  ① ∀a∈A ∃i ，a∈A_i(1≤i≤n)

  ∴<a, a>∈ $A_i\times A_i\subseteq R$

  即 aRa ∴自反性成立

  ② ∀a, b∈A ， 若<a, b>∈R，

  ∴∃i(1≤i≤n)，<a, b>∈ $A_i\times A_i$

  ∴ <b, a>∈ $A_i\times A_i$， <b, a>∈R，

  ∴aRb⇒bRa，对称性成立

  ∴R是相容关系

具体题型：证明

- 设I是整数集，R={<x,y> | x∈I∧y∈I∧x≡y(mod k)}，证明R是等价关系

- 证：
- (1)自反性：任取x∈I, 必有x-x=k·0，所以 <x,x> ∈R .
- (2)对称性：任取<x, y>∈R，必有x-y=kt(t为整数)，从而y-x= -kt，所以<y, x> ∈R..
- (3)传递性：对任意的<x, y>∈R, <y, z>∈R，由于x-y= kt，y-z= ks(s, t为整数),

  从而x-z=(x-y)+(y-z)=k(t+s), 所以<x, z> ∈R..

  综上, R是等价关系.

具体题型：解答与证明

- 符号化下述论断，并证明其有效性：
- 如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习。但我数学不及格。因此我热衷于玩扑克

解：设 P：我学习。 Q：我数学不及格。 R：我热衷于玩扑克。

如果我学习，那么我数学不会不及格：$P\to\neg Q$。

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习：$\neg R\to P$。

我数学不及格：Q。

我热衷于玩扑克：R。

即本题符号化为：$(P\to\neg Q)$

证法一：$((P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q)\to R$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(R\vee P)\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow((\neg Q\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((R\vee\neg R)\wedge(R\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow\neg Q\vee P\vee R\vee\neg P$

$\Leftrightarrow T$

所以论证有效。

证法二：设$(P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q$为 T，则因 Q 为 T，$(P\to\neg Q)$ 为 T，可得 P 为 F，由$(\neg R\to P)$ 为 T，得到 R 为 T。

故本题论证有效。

离散数学

命题逻辑

计算机科学与技术学院

第一章 命题逻辑

- 1-1 命题及其表示法
- 1-2 联结词
- 1-3 命题公式与翻译

概念

- 1-4 真值表与等价公式
- 1-5 重言式与蕴含式
- 1-6 其他联结词

工具

- 1-7 对偶与范式
- 1-8 推理理论

应用

联结词

- 数理逻辑中，复合命题由原子命题与联结词组合而成，为便于书写和推演，须对联结词明确规定并符号化
  - ✓否定
  - ✓合取
  - ✓析取
  - ✓条件
  - ✓双条件

命题公式与翻译

命题符号化

命题公式：定义

1. 单个命题变元本身是一个命题公式
2. 如果A是合式公式，那么 ¬A也是命题公式
3. 如果A，B是合式公式，那么A ∧ B， A ∨ B，A → B，A ↔ B都是命题公式
4. *iff* 能够有限次应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是命题公式

- ✓ ¬(P∧Q)， ¬(P→Q)∨R，(¬P↔Q)∧(P→¬R) 均为命题公式
- ✓ (P → Q) →(∧ Q)，(P → Q，(P ∧ Q) → Q)，由于不符合定义，则不能成为合式公式

注：

1、上合式公式以递归形式给出，(1)为基础，(2)(3)是归纳，(4)称之为界限；

2、为减少使用圆括号数量，约定最外层括号可以省略；

命题公式：定义

- “否定”只作用于邻接其后的命题
- 联结词运算规定优先次序： ¬，∧，∨，→，↔
- 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
- 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最高优先级

命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各简单命题的真值，而与它们的内容无关，与二者之间是否有关系无关。

Example

命题 1：雪是白的当且仅当北京是中国的首都。

命题 2：如果 2 是偶数，则天上就可以掉馅饼。

尽管两个简单命题的内容之间无关联，但二者均为合法命题，且具有确定的真值。

等价或逻辑相等

- **定义：** 命题公式A，B，设P1，P2，…，P n为所有出现于A和B的原子变元。若给P1，P2，…，P n任一真值指派，A和B真值均相同，则称A与B等价或逻辑相等，记作$A \Leftrightarrow B$
- 列：证明 $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ 利用真值表进行验证）

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \rightarrow B)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

由上表可知：$\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ （真值为T）

十大命题定律

对等律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德. 摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P$, $P \wedge T \Leftrightarrow P$
零律	$P \wedge F \Leftrightarrow F$, $P \vee T \Leftrightarrow T$
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$, $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

蕴含式	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
假言易位	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
等价式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
等价否定等式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg P$
归谬论	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

重言式与蕴含式

重言式与蕴含式

- **重言式**
  - 对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为T，则该命题公式为重言式或永真公式
- **矛盾式**
  - 对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为F，则该命题公式为矛盾式或永假公式
- **定理：** 任何两个重言式的合取或析取，仍为重言式
  - 证明：设A，B为两个重言式，则不论A和B的分量指派任何值，总有A为T，B为T。则$A \wedge B \Leftrightarrow T$，$A \vee B \Leftrightarrow T$
- **定理：** 一重言式，对同一分量都用任何公式置换，其结果仍为一重言式。
  - 证明：由于重言式的真值与分量的指派无关。故对同一分量的任何合式公式置换后，重言式真值仍为T

重言式与蕴含式

- **定理：** 设A，B为命题公式，$A \Leftrightarrow B$ iff $A \leftrightarrow B$为一个重言式
  - 证明：
    - "$\Leftarrow$"：由$A \Leftrightarrow B$知，A与B具有相同的真值，则由双条件联结词定义可知：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$；
    - "$\Rightarrow$"：由$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$知，A与B具有相同的真值，则由命题等价定义可知：$A \Leftrightarrow B$
- **蕴含式**
  - **定义：** *iff* $P \rightarrow Q$为重言式时，称"**P蕴含Q**"，**即$P \Rightarrow Q$**
- 注：
  - 1、因 $P \rightarrow Q$ 不是对称关系，则 $P \rightarrow Q$ 与 $Q \rightarrow P$ 不等价
  - 2、对 $P \rightarrow Q$，其逆换式为 $Q \rightarrow P$，反换式为 $\neg P \rightarrow \neg Q$，逆反式为 $\neg Q \rightarrow \neg P$
  - 3、$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$，$Q \rightarrow P \Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg Q$

重言式与蕴含式

下表所列是**常见蕴含式**，均可以使用上述等价方式进行证明：

$P \wedge Q \Rightarrow P$	1	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	8
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	2	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	9
$P \Rightarrow P \vee Q$	3	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	10
$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	4	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	11
$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	5	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$	12
$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	6	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	13
$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	7	$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	14

对偶与范式

对偶与范式

- **定义**：命题公式称为**合取范式**，*iff* 它具有形式：$A1 \wedge A2 \wedge \cdots \wedge An$ $(n \geqslant 1)$，其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的析取式
  - ✓例如：$(P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$，$(P \vee Q \vee R)$ 为合取范式
- **定义**：命题公式称为**析取范式**，*iff* 它具有形式：$A1 \vee A2 \vee \cdots \vee An$ $(n \geqslant 1)$，其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的合取式
  - ✓例如：$(P \wedge \neg Q) \vee R \vee (\neg P \wedge R \wedge Q)$，$P \wedge Q \wedge \neg R$ 为析取范式

对偶与范式

- 任何命题公式，其合取范式或析取范式均可按照下面三个步骤进行：
  - ✓(1)将公式中的联结词化归为∧，∨ 及 ¬
  - ✓(2)利用德.摩根律将否定¬直接移到各个命题变元之前
  - ✓(3)利用分配律、结合律将公式归约为合取范式或析取范式
- 求$(P \wedge (Q \to R)) \to S$的合取范式。

解：$(P \wedge (Q \to R)) \to S \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S$

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R)$ //结合律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$ //分配律

对偶与范式

- 求$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的析取范式。

解：因为：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

故$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg (P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q))$ //等价式

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)$

//两次分配律

- 注：命题公式的合取范式或析取范式并不唯一

如：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)$

- 为使任一命题公式化成唯一的等价命题的标准形式，下面引进“主范式”概念

对偶与范式：小项

- **定义**：n个命题变元的合取式，称作**布尔合取或小项**，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
  - ✓例如,设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

m	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	小项
m_0 (m_{000})	0	000	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_1 (m_{001})	1	001	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$
m_2 (m_{010})	2	010	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
m_3 (m_{011})	3	011	$\neg P \wedge Q \wedge R$
m_4 (m_{100})	4	100	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_5 (m_{101})	5	101	$P \wedge \neg Q \wedge R$
m_6 (m_{110})	6	110	$P \wedge Q \wedge \neg R$
m_7 (m_{111})	7	111	$P \wedge Q \wedge R$

主析取范式

- **定义**：对给定的命题公式，若有一等价公式，仅由小项析取组成，则该等价式称作原式的主析取范式
- **定理**：在真值表中，公式真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式
- **证明**：设给定公式为A,其真值为T的指派所对应的小项为m_1'，m_2'，…，m_k' 这些小项的析取式记为B，即证$A \Leftrightarrow B$，即A与B在相应指派下具有相同真值
  - ✓对A为T的某一指派，其对应的小项为m_i'，则因为m_i'为T，而m_1'，m_2'，…，m_{i-1}'，m_{i+1}'，…，m_k'均为F，故B为T。
  - ✓对A为F的某一指派，其对应小项不包含在B中，即m_1'，m_2'，…，m_k'均为F，故B为F。因此$A \Leftrightarrow B$

主析取范式

- 例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

- 则公式A的主析取范式为：
  - ✓ $A \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_4 \vee m_7$，简记为$\Sigma_{0,4,7}$

主析取范式

- 求命题公式的主析取范式的方法：

1. 可以从真值表直接得出。
2. 可以是由基本等价公式推出，推理步骤为：
   - I. 化归为析取范式；
   - II. 除去析取范式中所有永假的析取项；
   - III. 将析取范式中重复出现的合取项和现同的变元合并；
   - IV. 对合取项补入没有出现的命题变元，如变元P未出现，即添加(P∨¬P)的合取项 ，然后应用分配律展开

- 任何命题公式的主析取范式，如果固定变元出现的次序，此公式的主析取范式便是唯一的

对偶与范式：大项

- **定义：**n个命题变元的析取式，称作布尔析取或大项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
- 设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

M	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	大项
$M_0(M_{000})$	0	000	P∨Q∨R
$M_1(M_{001})$	1	001	P∨Q∨¬R
$M_2(M_{010})$	2	010	P∨¬Q∨R
$M_3(M_{011})$	3	011	P∨¬Q∨¬R
$M_4(M_{100})$	4	100	¬P∨Q∨R
$M_5(M_{101})$	5	101	¬P∨Q∨¬R
$M_6(M_{110})$	6	110	¬P∨¬Q∨R
$M_7(M_{111})$	7	111	¬P∨¬Q∨¬R

小项 vs. 大项

- 小项(极小项)和大项(极大项)的编码方式刚好相反

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

1. $m_i \wedge m_j = 0$ $M_i \vee M_j = 1$ $(i \neq j)$
2. $m_i = \neg M_i$ $M_i = \neg m_i$
3. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$ $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - ✓ 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T。如P、Q、R为三个变元，则

大项	对应为假的指派 (P Q R)	大项	对应为假的指派 (P Q R)
¬P∨¬Q∨¬R	(T T T)	P∨¬Q∨¬R	(F T T)
¬P∨¬Q∨R	(T T F)	P∨¬Q∨R	(F T F)
¬P∨Q∨¬R	(T F T)	P∨Q∨¬R	(F F T)
¬P∨Q∨R	(T F F)	P∨Q∨R	(F F F)

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - ✓ 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T

		$M_{11}(M_3)$	$M_{10}(M_2)$	$M_{01}(M_1)$	$M_{00}(M_0)$
P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1
1	0	1	**0**	1	1
1	1	**0**	1	1	1

- 没有两个不同的极大项是等价的。
- 每个极大项只有一组成假赋值，因此可用于给极大项编码。 编码规律为：命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应。

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - 任意两个不同大项的析取式为永真(T)。$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T(i \neq j)$
  - 3)全体大项的合取式必为永假，记为： $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$

主合取范式

- **定义**：对于给定的命题公式，若一等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式
- **定理**：在真值表中，一公式的真值为F的指派对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式
  - 例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

推理

推理理论

- 在实际应用的推理中，常把本门学科的一些定律、定理和条件，作为假设前提，尽管这些前提在数理逻辑中并非永真
- 但在推理过程中，却总是假设这些命题为T，并使用一些公认的规则，得到另外的命题，形成结论，此过程即为论证
- **定义**：设A和C是命题公式，iff A→C为一重言式,即 A ⇒ C，称C是A的有效结论
- 把上述定义推广到有n个前提的情况
  - 设$H_1, H_2, \cdots, H_n$, C 是命题公式， *iff*

    $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$ （A）
  - 称C是一组前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论

推理理论

- 判别有效结论的过程就是论证过程，基本方法有真值表法、直接证法和间接证法
  - 真值表法
  - 直接证法
  - 间接证法
    - 反证法
    - CP规则 （附加前提规则）

推理理论：直接证法

- 即由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论
- **P规则（前提引用规则）**：前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用
- **T规则（逻辑结果引用规则）**：在推导中，如果有一个或多个公式、重言蕴含着公式S，则公式S可引入推导之中

直接证法：常用蕴含式

表 1-8.3

I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

直接证法：常用等价式

表 1-8.4

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$
E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$
E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W \vee R) \rightarrow V$，$V \rightarrow C \vee S$，$S \rightarrow U$，$\neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$

- 演绎思路
  - 如何得到 $\neg W$？
  - W出现在 $(W \vee R) \rightarrow V$，缺的是否定
  - 否定之后，$\neg W \wedge \neg R$；W，R同时出现在 $(W \vee R) \rightarrow V$
  - 需要得到 $\neg(W \vee R)$
  - $(W \vee R) \rightarrow V$，$V \rightarrow C \vee S$，可得到 $(W \vee R) \rightarrow C \vee S$
  - 如果由 $\neg(C \vee S)$，则 $\neg(W \vee R)$
  - 因此需要 $\neg(C \vee S)$，也就是 $\neg C \wedge \neg S$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W \vee R) \rightarrow V$，$V \rightarrow C \vee S$，$S \rightarrow U$，$\neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1)，I2
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3),I12
(5)	$\neg C$	T(1)，I1
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5),I9
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6)，E9
(8)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(9)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \rightarrow C \vee S$	T(8),(9)，I13
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(7),(10)，I12
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11)，E9
(13)	$\neg W$	T(12)，I1

推理理论：间接证法

- **反证法：**设有一组前提 $H_1, H_2, \cdots, H_m$，要推出结论C，即证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，记作 $S \Rightarrow C$，即 $\neg C \rightarrow \neg S$ 为永真(E18)，或 $C \vee \neg S$ 为永真(E16)，故 $\neg C \wedge S$ 为永假
- 因此要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，只要证明 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 是不相容的

推理理论：间接证法（反证法）

例：证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

1.	$\neg(S \vee R)$	P(附加前提)
2.	$\neg S \wedge \neg R$	T(1)，E
3.	$P \vee Q$	P
4.	$\neg P \rightarrow Q$	T(3)，E
5.	$Q \rightarrow S$	P
6.	$\neg P \rightarrow S$	T(4),(5)，I
7.	$\neg S \rightarrow P$	T(6)，E
8.	$(\neg S \wedge \neg R) \rightarrow (P \wedge \neg R)$	T(7)，I
9.	$P \wedge \neg R$	T(2),(8),I
10.	(10) $P \rightarrow R$	P
11.	(11) $\neg P \vee R$	T(10),E
12.	(12) $\neg(P \wedge \neg R)$	T(11),E
13.	$(P \wedge \neg R) \wedge \neg(P \wedge \neg R)$ (矛盾)	T(9),(12),I

（注意：反证法的证明格式）

推理理论：间接证法（反证法）

例：证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\Rightarrow S\vee R$

1.	$\neg(S\vee R)$	P(附加前提)
2.	$\neg S\wedge\neg R$	T(1)，E9
3.	$P\vee Q$	P
4.	$\neg P\to Q$	T(3)，E16
5.	$Q\to S$	P
6.	$\neg P\to S$	T(4),(5)，I13
7.	$\neg S\to P$	T(6)，E18
8.	$(\neg S\wedge\neg R)\to(P\wedge\neg R)$	T(7)，I16
9.	$P\wedge\neg R$	T(2),(8),I11
10.	$P\to R$	P
11.	$\neg P\vee R$	T(10),E16
12.	$\neg(P\wedge\neg R)$	T(11),E8
13.	$(P\wedge\neg R)\wedge\neg(P\wedge\neg R)$ (矛盾)	T(9),(12),I9

（注意：反证法的证明格式）

推理理论：间接证法

- CP规则：若要证$H1\wedge H2\wedge\cdots\wedge Hn\Rightarrow(R\to C)$。
  - ✓设 $H1\wedge H2\wedge\cdots\wedge Hm$ 为S，即证$S\Rightarrow(R\to C)$ 或$S\Rightarrow(\neg R\vee C)$
  - ✓故 $S\to(\neg R\vee C)$为永真式。
  - ✓因为 $S\to(\neg R\vee C)\Leftrightarrow\neg S\vee(\neg R\vee C)\Leftrightarrow\neg(S\wedge R)\vee C\Leftrightarrow(S\wedge R)\to C$
  - ✓因此将R作为附加前提，证明$(S\wedge R)\Rightarrow C$，即证得$S\Rightarrow(R\to C)$
- 例：证明 $A\to(B\to C)$，$\neg D\vee A$，B 重言蕴含 $D\to C$

1.	D	P(附加前提)
2.	$\neg D\vee A$	P
3.	A	T(1),(2),I10
4.	$A\to(B\to C)$	P
5.	$B\to C$	T(3),(4),I11
6.	B	P
7.	C	T(5),(6),I11
8.	$D\to C$	CP

（注意：CP规则的证明格式）

推理理论：间接证法（CP规则）

- 例：设有下列情况，结论是否有效？
  - ✓(a) 或者是天晴，或者是下雨。(b) 如果是天晴，我就去看电影。如果我去看电影，我就不看书。结论：如果我在看书则天在下雨。
- 解：若设M:天晴　　Q:下雨　　S:我看电影　　R:我看书
- 故本题即为证明：$M\overline{\vee}Q$，$M\to S$，$S\to\neg R\Rightarrow R\to Q$
- $M\overline{\vee}Q=\neg(M\leftrightarrow Q)$
- 证

✓ R	P(附加前提)
✓ $S\to\neg R$	P
✓ $R\to\neg S$	T(2),E18
✓ $\neg S$	T(1),(3),I11
✓ $M\to S$	P
✓ $\neg M$	T(4),(5),I12
✓ $\neg M\leftrightarrow Q)$	P
✓ $M\leftrightarrow\neg Q$	T(7),E22
✓ $M\to\neg Q)\wedge(\neg Q\to M)$	T(8),E 20
✓ $\neg Q\to M$	T(9),I2
✓ $\neg M\to Q$	T(10),E18
✓ Q	T(6),(11),I11
✓ $R\to Q$	CP

离散数学

谓词逻辑

计算机科学与技术学院

命题函数与量词

- 表示“对所有的”概念，为此引入符号 $\forall x$ 来表达“对所有的x”。
  - ✓M(x)：x是人，　　H(x)：x是要呼吸的，
  - ✓P(x)：x是学生，　　Q(x)：x是要参加考试的，
  - ✓I(x)：x是整数，　　R(x)：x是正数，N(x)：x是负数。
- 则上述例子记作：
  - ✓(a) $(\forall x)(M(x)\to H(x))$
  - ✓(b) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$
  - ✓(c) $(\forall x)(I(x)\to(R(x)\vee N(x))$
- 符号“∀”为全称量词
  - ✓来表达“对所有的”、“每一个”、“对任一个”等

命题函数与量词

- 引入符号 $\exists x$ 来表达“存在一些x”，上述例子可表示为：
  - ✓(a) $(\exists x)P(x)$；
  - ✓(b) $(\exists x)(M(x)\wedge R(x))$
  - ✓(c) $(\exists x)(M(x)\wedge E(x))$
- 符号“∃”称作存在量词
  - ✓可用来表达“存在一些”、“至少一些”、“对于一些”等。
- 注：
  - ✓全程量词与存在量词通称为量词。
  - ✓在不加以说明的条件下谓词逻辑中使用全总个体域。

55

变元的约束

- 谓词公式α有一部分形式为$(\forall x)P(x)$或$(\exists x)P(x)$
  - ✓这里∀,∃ 后面所跟的 x 叫做量词的**指导变元**或**作用变元**，P(x) 叫做相应量词的**作用域**或**辖域**
- 在作用域中 x 的一切出现，称为x在α中的**约束出现**,x亦称为被相应量词中的指导变元所约束，称作**约束变元**
- 在α中除去约束变元以外所有出现的变元称作**自由变元**
- 由于自由变元不受约束，故其可以看作公式中的参数

56

前束范式

- 在命题演算中，常将公式化成规范形式，对于谓词演算也可化为与之等价的范式。
- 定义：一个公式，若量词均在全式开头，且作用域延伸到整个公式末尾，则该公式叫做**前束范式**。有下述形式：
  - ✓(□v1)(□v2) …(□vn)A,其中□可能是量词 ∀ 或 ∃ ,v_i (i=1,2, …,n)是客体变元,A是不含量词的谓词公式。
- 定理:任意一谓词公式均和一个前束范式等价。
- 证明：
  - ✓首先利用量词转化公式。
  - ✓把否定深入到命题变元和谓词填式的前面。
  - ✓其次利用
    $(\forall x)A(x)\vee B\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\vee B)$ 和 $(\exists x)A(x)\wedge B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge B)$
  - ✓把量词移到全式最前面，这样便得到前束范式

57

前束范式

- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束合取范式。
  - ✓$(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\cdots\vee A_{1n1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\cdots\vee A_{2n2})\wedge\cdots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\cdots\vee A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i$ (i=1,2, …,n) 是客体变元,A_{ij}是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化为与其等价的前束合取范式。
- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束析取范式。
  - ✓$(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\cdots\wedge A_{1n1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\cdots\wedge A_{2n2})\vee\cdots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\cdots\wedge A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i$(i=1,2,…,n) 是客体变元,$A_{ij}$是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化成与其等价的前束析取范式。

58

前束范式的求解步骤：换名

$(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; $(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$; (改名规则)

$(\forall x)(G(x)\wedge H(x)) = (\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x)$; (量词分配律)

$(\exists x)(G(x)\vee H(x)) = (\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x)$.

$(\forall x)G(x)\vee(\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x)\vee H(y))$;

$(\exists x)G(x)\wedge(\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x)\wedge H(y))$.

$(\forall x)(G(x)\vee S) = (\forall x)G(x)\vee S$; $(\forall x)(G(x)\wedge S) = (\forall x)G(x)\wedge S$; (量词辖域的扩张与收缩律)

$(\exists x)(G(x)\vee S) = (\exists x)G(x)\vee S$; $(\exists x)(G(x)\wedge S) = (\exists x)G(x)\wedge S$.

59

前束范式

- 注：Wff A 转化为前束合取范式或前束析取范式步骤：
  - ✓1、取消多余量词。
  - ✓2、换名。
  - ✓3、化为仅含有∧，∨，¬
  - ✓4、将量词推到左边

60

谓词演算的推理理论

- (1)全称指定规则，表示为US

$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- P 是谓词，C是论域中某个任意的客体。如：论域为全人类，
- P(x)：“x 总是要死的”，若(∀x)P(x) ：所有人总是要死的，
- 应用US规则有：苏格拉底总是要死的。

谓词演算的推理理论

- (2)全称推广规则，表示为UG

$$\frac{P(c)}{(\forall x)P(x)}$$

- 该规则是对命题量化。**若能证明对论域中每一个客体 c 断言成立**，则应用UG规则可知，(∀x)P(x) 成立。
- 注意：
  - ✓应用此规则，必须能够证明前提 P(x) 对论域中每一个可能的客体都为真。

谓词演算的推理理论

- (3)存在指定规则，表示为ES。

$$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 注：
  - ✓**c是论域中的某些客体**
  - ✓应用此规则，其指定的客体c不是任意的，如对(∃x)P(x)和(∃x)Q(x)，则对于某些c和d，可以断定P(c)∧Q(d)为真
  - ✓但不能确定P(c)∧Q(c)为真

谓词演算的推理理论

- (4)存在推广规则，表示为EG。

$$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

- 注：
  - ✓c 是论域中一客体，该规则较明显。对某些客体c，若P(c)为真，则在论域中必有(∃x)P(x) 。

综合推理方法

- 推导过程中可以引用命题演算中的规则P 和规则T；
- 如果结论是以条件形式或析取形式给出，则可使用规则CP；
- 若需消去量词，可以引用规则US和规则ES；
- 当所求结论需定量时，可引用规则UG和规则EG引入量词；
- 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法；
- 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式；
- 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式

难点总结

- 在推导过程中，如既要使用规则US 又要使用规则ES 消去量词，而且选用的个体是同一个符号，**则必须先使用规则ES，再使用规则US**。然后再使用命题演算中的推理规则最后使用规则UG 或规则EG 引入量词，得到所求结论。
- 如一个变量是用规则ES 消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG；
- 如使用规则US 消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG 和规则UG。
- 在用规则US 和规则ES 消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，且辖域为其后的整个公式。
- 在添加量词(∀x) 和(∃x) 时，所选用的x 不能在公式G(y)或G(c) 中出现

离散数学

集合与关系

计算机科学与技术学院

集合论

集合的笛卡尔积

- 序偶
  - 两个元素a_1, a_2组成的序列记作$\langle a_1, a_2\rangle$，称为序偶
- 定义（3-4.1）：
  - 二个序偶<a, b>和<c, d>相等，当且仅当a=c且b=d，即 $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
- 推广：
  - $\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle$称为三元组，记为$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$，注：$\langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$不是三元组
  - $\langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$称为n元组，记为$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$
- 注：
  - ①二元组的元素次序是重要的。例：$\langle 2,3\rangle \neq \langle 3,2\rangle$
  - ②n元组相等，当且仅当对应的元素分别相等。
  - ③$\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$，后者不是三元组

关 系 论

关系及其表示

- 日常生活中关系普遍存在，数学上可以用序偶来表达：若有xRy，可记为$\langle x, y\rangle \in R$，由此可见，关系R是序偶的集合
- 定义(3-5.1)：
  - 任一序偶的集合确定了一个二元关系R，R中任一序偶<x, y>可记为 **$\langle x, y\rangle \in R$ 或 xRy**
  - 例：$(5,7) \in <$，或 $5<7$
- 定义(3-5.2)：
  - 二元关系R中，由所有x组成的集合叫做关系R的前域记作dom $R=\{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - 由所有y组成的集合叫做关系R的值域，Ran $R=\{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - R的前域和值域统称为R的域，记为$FLDR=dom(R) \cup ran(R)$
- 例1.
  - 设$A=\{x1, \cdots, x7\}, B=\{y1, \cdots, y6\}, R=\{\langle x3, y1\rangle, \langle x3, y2\rangle, \langle x6, y2\rangle, \langle x5, y6\rangle\}$
  - 解：$dam(R)=\{x3, x6, x5\}$，$ran(R)=\{y1, y2, y6\}$

关系的性质：自反性

- 自反性（设R是A上的二元关系）
  - 定义(3-6.1)：若$\forall x \in A$，均有xRx，那么称R是自反的
- 例
  - A= {1，2，3}，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}为自反关系
  - A= {1，2，3}，R={<1,1>,<2,2>,<1,2>} 自反？
- 注：
  - 1）A上关系R是自反的 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow xRx)$
  - 2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。在关系图中，反映为每结点都有自回路

关系的性质：反自反性

- 反自反性
  - 定义(3-6.4)：若$\forall x \in A$，均有$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称R是反自反的
- 例
  - A={1,2,3} R={<1,2>,<2,3>}
- 注：
  - 1) A上的关系R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$
  - 2) 在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。在关系图中，反映为每结点都无自回路
- 注：有些关系可以既不是自反的，也不是反自反的

关系的性质：对称性

- 对称性
  - 定义(3-6.2)：如果对于每个x, y属于A, 每当xRy, 都有yRx, 则称A上的关系R是对称的
  - 例：$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
- 注：
  - 1) 定义$\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx)$
  - 2) 关系矩阵是对称矩阵。关系图中，若有弧则必是成对出现

关系的性质：反对称性

- 反对称性
  - 定义(3-6.5)：如果对于每个x, y属于A, 每当xRy和yRx, 必有x=y，A上的关系R是反对称的
  - 例 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$
  - 又如 $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，对称的也是反对称的
- 注：
  - 1) $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$
  - 2) 在关系矩阵中，反映为主对角线对称的元素不能同时为1
- 在关系图上，反映为任意两个结点间的弧线不能成对出现
- 注：
  - 1)有些关系既不是对称的，又不是反对称的。例如$A=\{1,2,3\}$ $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$
  - 2)有些关系既是对称的，又是反对称的，例如恒等关系、空关系

关系的性质：传递性

- 传递性
  - 定义(3-6.3)：设R是A上的二元关系，如果对于任意x，y，z属于A，每当xRy，yRz时就有xRz，则称关系R在A上是传递的
- 例：$A=\{1,2,3,4\}$
  - $R_1=\{\langle 1,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
  - $R_2=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$
  - $R_3=\{\}$
  - $R_4=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$，则：$R_1$，$R_2$，$R_3$，$R_4$是传递的
  - $R_5=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 不是传递关系，没有$\langle 2,2\rangle$
- 注：
  - 1）定义$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$
  - 2）传递关系图的特征是：
    - 在关系图中若存在从a到b一条有向路径（即存在一结点序列$a=a_1$，…，$a_n=b$，其中$\langle a_i,a_{i+1}\rangle\in R$，$1\leqslant i\leqslant n-1$)，则从a到b必定存在一条弧。 传递关系在关系矩阵上的特性都不易看出来

复合关系和逆关系

- 复合关系
  - 定义(3-7.1)： 设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1\circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
  - $R_1\circ R_2=\{\langle a,c\rangle \mid (\exists b)(a\in A\wedge c\in C\wedge b\in B\wedge \langle a,b\rangle\in R_1\wedge \langle b,c\rangle\in R_2)\}$
- 注：
  - ① 关系图上，$R_1\circ R_2$是由$\langle a,c\rangle$这样的序偶组成，从$a\in A$到$c\in C$有一长度为2的路径，其中第一条弧属于R_1，第二条弧属于R_2
  - ② 若R_1的值域与R_2的前域的交集为空，则$R_1\circ R_2$为空关系
  - ③ 设I_A、I_B分别为A和B上的恒等关系，R是A到B的二元关系，则$I_A\circ R=R\circ I_B=R$
- 注意： $R\circ I_A$, $I_B\circ R$为空关系，无意义

关系的闭包运算

- 闭包的定义
- 定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果有另一关系R′满足：
  - 1）R′是自反的（对称的、传递的）；
  - 2）$R\subseteq R'$；
  - 3）对任何自反的（对称的、传递的）关系R″，$R''\supseteq R$，
  - 则 $R''\supseteq R'$
- 称R’ 为R的自反（对称、传递）闭包，记作r(R), s(R), t(R)。
- 注：
  - 自反（对称、传递）闭包其实就是包含R的最小的自反（对称、传递）关系
  - 已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成
- 如：
  - $X=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$，
  - 则 $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$

集合的划分和覆盖

- 我们除了把二个集合进行相互比较外，还常把一个集合分成若干子集讨论
- **覆盖和划分**：定义(3-9.1)： 设A为非空集，
  - $S=\{S_1,\cdots,S_m\}$，$S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing(i=1,\cdots,m)$且$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m=A$，称S是A的**覆盖**
  - 若再加$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,m)$则称S是A的**划分**，m称为S的秩
- 例1 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，

则	$X=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$	划分
	$Y=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}$	覆盖
	$Z=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$	划分
	$U=\{\{1,2,3,4,5\}\}$	划分
	$V=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$	划分

U称为A的最小划分，V称为A的最大划分

等价关系和等价类

- 定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：
  (1)自反的
  (2)对称的
  (3)传递的
则称R是A上的等价关系

- 例：
  - A={1,2,3,4}，R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}是一个等价关系
- 此外
  - 数中的“相等”关系,集合中的“相等”关系,命题演算中“⇔”关系,都是等价关系

- 注：其关系图的特点：每一结点有自回路，每对结点之间要么没有弧，要么有弧而且成对出现

相容关系

- 定义(3-11.1)：设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系
- 例：
  - a）所有等价关系是相容关系
  - b）A= {a,b,c,d,}，R= {<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>}

- 其关系矩阵与关系图
  - 1）仅给出关系矩阵的左下角就可描写相容关系（不包括主对角线元素）
  - 2）相容关系的关系图可简记（用无向边代替二条有向边、不用自回路）

序关系

- 在一个集合上，考虑元素的次序关系
- 定义(3-12.1)：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的偏序关系，序偶<A,R>称为偏序集
- 注：
  - ①常把偏序关系R记为“≤”即小于等于。则<A,R>记为<A,≤>,aRb记为a≤b，这里符号“≤”表示了一种更为普遍的“小于等于关系”即偏序关系
  - ②例如，实数集R的“小于或等于”关系是偏序关系
- 例：A={2,3,6,8}，D表示整除关系，M表示整倍数关系

  则 D={<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<2,6>,<2,8>,<3,6>}

  M={<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<6,2>,<8,2>,<6,3>}

  经验证，D和M均为偏序关系

哈斯图

- 设R 是非空集合A 上的偏序关系，使用如下方法对R 的关系图进行简化：
  - 取消每个结点的自环；(因自反性)
  - 取消所有由于传递性出现的边．即若x→y,y→z，则去掉x→z 这条边;(因传递性)
  - 重新排列每条边，使得边的箭头方向全部向上，然后去掉这些箭头.(因反对称性)
- 以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图，这个图称为偏序关系R的哈斯图(Hasse diagram)