

算法设计与分析作业 2

汪笑宇

2025.10.22

1 问题

1. (教材 p53 练习 4.4-2 至 4.4-5: 递归树确定渐近上界、代入法验证)

4.4-2 对递归式 $T(n) = T(n/2) + n^2$, 利用递归树确定一个好的渐近上界, 用代入法进行验证。

4.4-3 对递归式 $T(n) = 4T(n/2 + 2) + n$, 利用递归树确定一个好的渐近上界, 用代入法进行验证。

4.4-4 对递归式 $T(n) = T(n-1) + 1$, 利用递归树确定一个好的渐近上界, 用代入法进行验证。

4.4-5 对递归式 $T(n) = T(n-1) + T(n/2) + n$, 利用递归树确定一个好的渐近上界, 用代入法进行验证。

其中 $n \geq 1$ 。且假定上述各题所有递归边界条件都是 $T(n) = 1$, 其中的 n 足够小使得根据递归方程不能再减小规模, 或是减小到小于 1 的规模。注意: 须画出递归树!

2. (教材 p60 思考题 4-1: a-f, 主定理的应用)

4-1 (递归式例子) 对下列每个递归式, 给出 $T(n)$ 的渐近上界和下界。假定 $n \leq 2$ 时 $T(n)$ 是常数。给出尽量紧确的界, 并验证其正确性。

a. $T(n) = 2T(n/2) + n^4$

b. $T(n) = T(7n/10) + n$

c. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

d. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$

e. $T(n) = 7T(n/2) + n^2$

f. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

3. (受限汉诺塔问题)

有 3 个塔座从左到右分别为 X、Y、Z, 每次只能将一个塔座上最小的圆盘移动到**相邻**塔座上, 即不可将圆盘从 X 直接移动到 Z (或者从 Z 直接移动到 X)。当然, 依旧不允许大圆盘放在小圆盘上。任务为: 将 n 个大小不同且依次叠放的圆盘从 X 移动到 Z。请设计一个递归算法: (1) 说明算法设计思想, (2) 写出伪代码, (3) 分析使用该算法需移动圆盘的次数。

4. (教材 p24 思考题 2-4)

2-4 (逆序对) 假设 $A[1..n]$ 是一个有 n 个不同数的数组。若 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$, 则对偶 (i, j) 称为 A 的一个**逆序对**(inversion)。

- a. 列出数组 $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$ 的 5 个逆序对。
- b. 由集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中的元素构成的什么数组具有最多的逆序对? 它有多少逆序对?
- c. 插入排序的运行时间与输入数组中逆序对的数量之间是什么关系? 证明你的回答。
- d. 给出一个确定在 n 个元素的任何排列中逆序对数量的算法, 最坏情况需要 $\Theta(n \lg n)$ 时间。
(提示: 修改归并排序。)

2 要求

- 提交纸质版作业, 最好使用不太厚的练习本, **请勿提交单张纸以防丢失**;
- 提交前建议自行拍照存档以防出现意外情况;
- 请写好学号姓名, 务必独立完成;
- 请于**2025 年 10 月 29 日**上课时提交。