第六章 格与布尔代数

- 对于计算机科学来说，格与布尔代数是两个重要的代数系统。
- 此两个系统有一个重要特点：强调次序关系。
- 格提供了一种描述和处理元素间关系的工具，尤其是在需要明确层次或顺序的场景中非常有用。

应用领域

1. 在数据库中，格常用于表示数据的层次结构（如权限管理、类型系统等），并帮助执行高效的查询、数据合并等操作。
2. 在任务调度中，格可以用来描述任务之间的优先级关系。
3. 知识表示：例如在语义网中，格可用于表示概念之间的继承关系。

回忆偏序的一些概念:

- (1) 若集合A上的二元关系满足自反性、反对称性、传递性，称A为偏序集。aRb记为a≤b，它可用哈斯图表示。
- (2)设〈A，≤〉是偏序集合，B是A的子集，
  - 若∀b∈B,b≤a,则a是子集B的上界。（领导）
  - 若a'也是B的上界，有a≤a'，称a是子集B的最小上界，记为lub (B)；（级别最小的领导）
  - 若∀b∈B,b≥a,则a是子集B的下界。（下级）
  - 若a'也是B的下界，有a≥a'，称a是子集B的最大下界，记为glb(B)。（级别最大的下级）
- (3) 若最大下界、最小上界存在，则必定唯一。

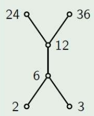
上界和上确界

Definition

设 $<A,\leqslant>$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a\in A$, 使得

- 对任意 $x\in B$, 满足 $x\leqslant a$, 则称 a 为 B 的上界;
- 若元素 $a'\in A$ 是 B 的上界, 元素 $a\in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a'\leqslant a$, 则称 a' 为 B 的最小上界或上确界.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
上界	12,24,36	6,12,24,36	无	12,24,36
上确界	12	6	无	12

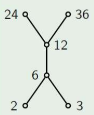
下界和下确界

Definition

设 $<A,\leqslant>$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a\in A$, 使得

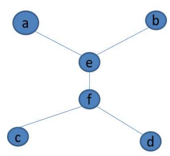
- 对任意 $x\in B$, 满足 $a\leqslant x$, 则称 a 为 B 的下界;
- 若元素 $a'\in A$ 是 B 的下界, 元素 $a\in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a\leqslant a'$, 则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
下界	2,3,6	无	2,3,6,12	无
下确界	6	无	12	无

- 例



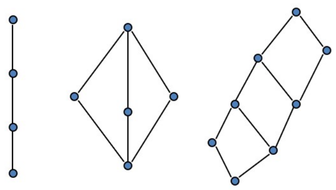
则：

lub(a,b)不存在 glb(a,b)=e

lub(a,e)=a glb(a,e)=e

lub(c,d)=f glb(c,d)不存在

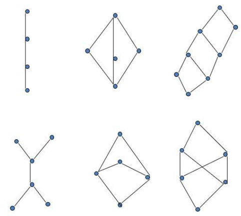
然而,有些偏序集中,任何两个元素都有lub和glb:



6.1 格的概念

定义6-1.1：设〈A，≤〉是偏序集，若∀a，b∈A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,≤〉是一个格。

例1



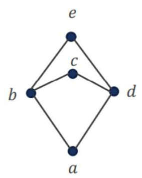
是格

不是格

6.1 格的概念

定义6-1.1：设〈A，≤〉是偏序集，若∀a，b∈A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,≤〉是一个格。

例1

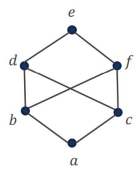


{b,d}的上界集为{e,c}，而e,c不可比，故不是格。

6.1 格的概念

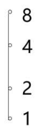
定义6-1.1：设〈A，≤〉是偏序集，若∀a，b∈A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,≤〉是一个格。

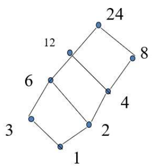
例1



{d,f}的下界集为{b,c,a}，而b,c不可比，故下界集中找不到能跟所有元素都可比且从而该偏序集不是格。

- 例2.设n是一正整数，S_n是n的所有因子的集合，D是整除关系,则$<S_n, D>$是个格。
- 如：

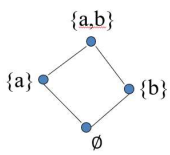




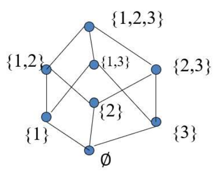
n=8， Sn={1, 2, 4, 8}　n=24，S_n={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

- 例3. 设S是任意集合，ρ(S)是幂集，偏序集< ρ(S), ⊆>是个格。

如: S={a,b}



S={1,2,3}

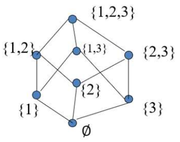


- **定义6-1.2** 设<A, ≤ >是一个格，定义代数系统<A, ∧,∨ >,使得对于任意元素a,b,
  - 有a∧b=glb(a,b)，a∨b=lub(a,b)，
  - 称<A, ∧,∨>为由格〈A，≤〉所诱导的代数系统。
  - 称二元运算∧,∨分别为**交和并**

交∧：找出共同点/最低共同层次

并∨：合并优点/形成更高的共同层次

- 例如 S={1,2,3}



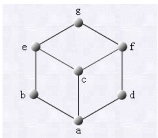
子格

- **定义6-1.3** 设<A, ≤ >是一个格，B是A的非空子集，若A中的运算∧和∨关于B是封闭的，则称B是A 的**子格**。
- 例如
  - $<I_+,|>$是格，诱导的代数系统是

    $<I_+$, 最大公约数,最小公倍数>

  设E_+是正偶整数，因为 E_+在运算上是封闭的，所以$<E_+,|>$是$<I_+,|>$的子格

例 设格L如下图所示。



令S_1={a,e,f,g}，不是L的子格

因为对于e和f,有e∧f=c,但c∉s_1.

S_2={a,b,e,g}, 是L的子格。

P233 例5：

S={a,b,c,d,e,f,g,h}

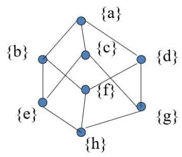
S_1={a,b,d,f}

S_2={c,e,g,h}

S_3={a,b,c,d,e,g,h}

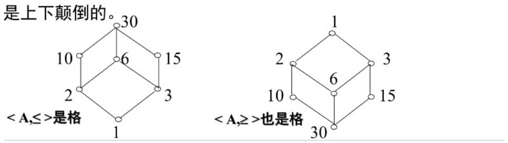
设<S, ≤ >是格

- $<S_1$, ≤ > , $<S_2$, ≤ >是<S, ≤ >的子格
- $<S_3$, ≤ >不是<S, ≤ >的子格，因为b∧d=f不属于S_3



对偶原理

若<A,≤>是格，可证明<A,≥>也是一个格，且它们的哈斯图是上下颠倒的。



对偶原理

- 因为
  - <S, ≤>的交是<S, ≥>的并，
  - <S, ≤>的并是<S, ≥> 的交，
- 所以，关于格的一般性质的任意命题：
  - 如用≥替换≤，用≤替换≥，用∨替换∧，用∧替换∨，格的一般性质的任意命题仍成立，
- 称为格的**对偶原理**。

格的基本性质

在格<A, ≤ >中，对于任意a，b，c，d ∈A，

偏序的性质

① 自反：$a \leqslant a$

② 反对称：若$a \leqslant b$且$b \leqslant a$，则$a = b$

③ 传递性：若$a \leqslant b$且$b \leqslant c$，则$a \leqslant c$

格的基本性质

定理6-1.1:

$a \leqslant a \vee b$，$b \leqslant a \vee b$

$a \wedge b \leqslant a$，$a \wedge b \leqslant b$（对偶式）

证：由上界定义即得.

- 定义（3-12.7）设<A, ≼ >是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, x≼ a ，则称a为B的上界
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, a≼ x ，则称a为B的下界

格的基本性质

定理6-1.2: 若$a \leqslant c$, $b \leqslant d$, 则

$a \wedge b \leqslant c \wedge d$，$a \vee b \leqslant c \vee d$

证：（基于定理6-1.1和偏序传递性证第一式）

$a \wedge b \leqslant a$, $a \leqslant c \Rightarrow a \wedge b \leqslant c$

$a \wedge b \leqslant b$, $b \leqslant d \Rightarrow a \wedge b \leqslant d$

从而，$a \wedge b$是{c, d}的一个下界.

而$c \wedge d$是{c, d}的最大下届 $\Rightarrow a \wedge b \leqslant c \wedge d$

格的基本性质

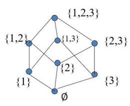
定理6-1.2: 若$a \leqslant c$, $b \leqslant d$, 则

$a \wedge b \leqslant c \wedge d$，$a \vee b \leqslant c \vee d$

启发性模型：

对于格< ρ(S), ⊆>, ≤为⊆, ∧和∨分别为∩ 和 ∪

S={1,2,3}



若A⊆B，C⊆D，那么，A∪C⊆B∪D

若A⊆B，C⊆D，那么，A∩C⊆B∩D

格的基本性质

推论:(保序性) 若$b \leqslant c$, 则

$a \wedge b \leqslant a \wedge c$，$a \vee b \leqslant a \vee c$

证：

因为$a \leqslant a$, $b \leqslant c$，由定理6-1.2知

$a \wedge b \leqslant a \wedge c$，$a \vee b \leqslant a \vee c$

格的基本性质

1. 交换律
   - $a \wedge b = b \wedge a$
   - $a \vee b = b \vee a$
2. 结合律
   - $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
   - $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. 等幂律
   - $a \wedge a = a$
   - $a \vee a = a$
4. 吸收律
   - $a \wedge (a \vee b) = a$
   - $a \vee (a \wedge b) = a$

启发性模型：对于格< ρ(S), ⊆>, ≤为⊆, ∧和∨分别为∩ 和 ∪

格的基本性质

结合律：

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ （对偶式）

证：

令 $R = a \wedge (b \wedge c)$， $R' = (a \wedge b) \wedge c$

则由定理6-1.1, $R \leqslant a$, $R \leqslant b \wedge c$

$\Rightarrow R \leqslant a,\ R \leqslant b,\ R \leqslant c$

$\Rightarrow R \leqslant a \wedge b,\ R \leqslant c$ （$a \wedge b$是最大下界）

$\Rightarrow R \leqslant (a \wedge b) \wedge c$

$\Rightarrow R \leqslant R'$

同理可证：$R \geqslant R'$ 所以 $R = R'$

注：常用证明思路是利用反对称性。

格的基本性质

吸收律：

$a \wedge (a \vee b) = a$

$a \vee (a \wedge b) = a$ （对偶式）

证：

因为 $a \leqslant a, a \leqslant a \vee b$, （a是{a, $a \vee b$}的下界）

所以 $a \leqslant a \wedge (a \vee b)$. （$a \wedge (a \vee b)$是最大下界）

又因为 $a \geqslant a \wedge (a \vee b)$, （定理6—1.1）

所以 $a = a \wedge (a \vee b)$.

注：常用证明思路是利用反对称性。

格的基本性质

对于格 $<\rho(S), \subseteq>$，结论是等号，更特殊些.

- 定理6-1.5： 分配律不等式

① $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

② $a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ （对偶式）

证：

$a \leqslant a \vee b,\ a \leqslant a \vee c$ （上确界）

$\Rightarrow a \wedge a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) \Rightarrow a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

$b \leqslant a \vee b,\ c \leqslant a \vee c \Rightarrow b \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$\therefore a \vee (b \wedge c) \leqslant ((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$

$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

格的基本性质

定理6-1.6：$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

证：

"$\Rightarrow$" 设 $a \leqslant b$,

$\therefore a \leqslant a,\ a \leqslant b$,

$\therefore a \leqslant a \wedge b$ ，又 $a \geqslant a \wedge b$ (下确界)， $\therefore a \wedge b = a$.

"$\Leftarrow$" 设 $a \wedge b = a$, 而 $a \wedge b \leqslant b$ (下确界)， $\therefore a \leqslant b$.

类似可证： $a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b$。

定理6-1.7： 模不等式

$a \leqslant c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$

证：

"$\Rightarrow$" 若 $a \leqslant c$ 则 $a \vee c = c$, (定理6-1.6)

代入分配不等式

$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$。

"$\Leftarrow$" 若 $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$,

因为 $a \leqslant a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c \leqslant c$, (上确界、下确界)

所以 $a \leqslant c$。

格的存在性判定

定理6-1.4：设代数系统 $<A, \wedge, \vee>$， 如果二元运算 $\wedge, \vee$ 满足交换律、结合律和吸收律，则A上必定存在格 $<A, \leqslant>$.

先证幂等性成立。

由吸收律知 $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$

$a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$

下证有偏序关系≤。

先定义L上≤关系如下；对任意$a,b \in L$,

$a \leqslant b$当且仅当$a \wedge b = a$

(1)证≤为L上偏序关系。

①由幂等性，因为$a \wedge a = a$,故$a \leqslant a$。自反性得证。

②设$a \leqslant b, b \leqslant a$,则$a \wedge b = a$, $b \wedge a = b$。由于交换律$a \wedge b = b \wedge a$, 故$a = b$。反对称性得证。

③设$a \leqslant b, b \leqslant c$,则$a \wedge b = a, b \wedge c = b$,于是

$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$

故$a \leqslant c$。传递性得证。

(2)可证$a \leqslant b$当且仅当$a \vee b = b$。

设$a \leqslant b$,那么$a \wedge b = a$,从而$(a \wedge b) \vee b = a \vee b$,由吸收律即得$b = a \vee b$。

反之,设$a \vee b = b$,那么$a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$,由吸收律可知$a = a \wedge b$,即$a \leqslant b$。

(3)下证在这个关系下,对任意$a,b \in L$,$a \vee b$为$\{a,b\}$的上确界,即$a \vee b = LUB\{a,b\}$。

1. 由吸收律$a \wedge (a \vee b) = a$,所以$a \leqslant a \vee b$。
2. 又因为$b \wedge (a \vee b) = b$,所以$b \leqslant a \vee b$
3. 故$a \vee b$为$\{a,b\}$的一个上界。

设c为$\{a,b\}$任一上界,即$a \leqslant c, b \leqslant c$,那么,

1. $a \vee c = c, b \vee c = c$
2. 于是 $a \vee c \vee b \vee c = c \vee c$
3. 亦即$a \vee b \vee c = c$,故$a \vee b \leqslant c$。
4. 这表明$a \vee b$为$\{a,b\}$的上确界。

(4)下证在这个关系下,对任意$a,b \in L$,$a \wedge b$为$\{a,b\}$的下确界,即$a \wedge b = GLB\{a,b\}$。

1. 由结合律/交换律$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge a \wedge b = a \wedge b$，所以$a \wedge b \leqslant a$
2. 又因为$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b$,所以$a \wedge b \leqslant b$
3. 故$a \wedge b$为$\{a,b\}$的一个下界。

设c为$\{a,b\}$任一下界，即$c \leqslant a$且$c \leqslant b$,

1. 那么 $a \wedge c = c, b \wedge c = c$,
2. 于是 $c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$
3. 所以$c \leqslant a \wedge b$,即$a \wedge b$为$\{a,b\}$的下确界。

因此$<L, \leqslant>$是格。

6.2 分配格

- 对于一般的格，有分配律不等式(定理6-1.5):

  $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

  $a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

- 定义6-2.1: 设代数系统$<A, \wedge, \vee>$由格$<A, \leqslant>$诱导的，若$\forall a,b,c \in A$，有:

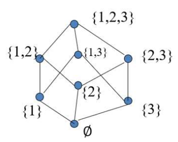
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

  则称$<A, \leqslant>$为分配格。

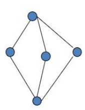
p.244页例题

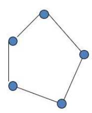
例：



$S=\{1,2,3\}$, $<\rho(S), \subseteq>$

是分配格





不是分配格

6.2 分配格

- 定理6-2.1 代数系统<A, ∧,∨>由格< A,≼>诱导的，则
  $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c) \Leftrightarrow a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

证：如果 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

- 则 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)$
  $=a\vee((a\vee b)\wedge c)$
  $=a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))$
  $=(a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c)$
  $=a\vee(b\wedge c)$

- 分配格的定义中，条件可以减弱。

6.2 分配格

- 定义6-2.1’：设代数系统<A, ∧,∨>由格< A,≼>诱导的，若∀a,b,c∈A，有：
  $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$
  则称< A, ≼ >为分配格。

- 定义6-2.1”：设代数系统<A, ∧,∨>由格< A,≼>诱导的，若∀a,b,c∈A，有：
  $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
  则称< A, ≼ >为分配格。

- 定理6-2.2: 每个链是分配格。（自行练习）
- 定理6-2.3: 设<A, ≼ >是分配格，则 ∀a,b,c∈A，若$c\wedge a=c\wedge b$并且$c\vee a=c\vee b$,则$a=b$

证明：

因为 $(c\wedge a)\vee b=(c\wedge b)\vee b= b$ （因$c\wedge a=c\wedge b$）
$(c\wedge a)\vee b=(c\vee b)\wedge(a\vee b)$
$=(c\vee a)\wedge(a\vee b)$ （因$c\vee a=c\vee b$）
$=a\vee(c\wedge b)$ （反向分配）
$=a\vee(c\wedge a)$ （因$c\wedge a=c\wedge b$）
$=a$

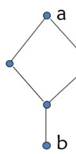
所以a=b。

6.3 有补格

- 定义6-3.1，给定格<A,≼>，若存在a∈A，
  - 使∀b∈A,有b≼a （或a≼b)，称a为< A,≼>的全上界（或全下界）。
  - 分别记为1和0。

- 定理6-3.1 一个格的全上界（全下界）是唯一的。（若存在）

- 例：格



  - 全上界为a，全下界为b。

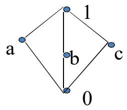
- 定理6-3.3 设格<A,≼>，对任意的a∈ A，必有：$a\vee1=1, a\vee0=a, a\wedge1=a, a\wedge0=0$

定理6-1.6：$a≼b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$

有界格,补元

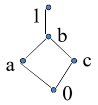
- 定义6-3.3 具有全上界和全下界的格，称为有界格
- 定义6-3.4 设< A ∧,∨, >是有界格诱导的，对于元素a∈A，若存在b∈A，使$a\wedge b=0$，$a\vee b=1$，称b为a的补元。
- 注：
  - ① 若a是b的补元，则b也是a的补元；
  - ② 补元可以不存在，若存在也可以不唯一。
  - ③有界分配格中，补元若存在，则必定唯一 。（定理6-3.4）

- 例3
- a)



a的补元是b,c
b的补元是a,c
c的补元是a,b

- b)



a,b,c 均不存在补元。

- c) 有界格中，0，1互为补元。

有补格

定义6-3.5:若在一个有界格中，每个元素至少有一个补元，则称此格为有补格。

补元：$\bar{a}$ =a, $\bar{a}$ 是a的补元

运算"$^{-}$"：这个一元运算称为补运算

格的同态和同构

定义(6−1.4)：设$<A_1,\leqslant_1>$和$<A_2,\leqslant_2>$是两个格，由它们分别诱导的代数系统为$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$和$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$,如果存在着一个从A_1到A_2的映射f，使得对于任意的a，b∈A_1，有

$$f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b),$$
$$f(a\wedge_1 b)=f(a)\wedge_2 f(b),$$

则称 f 为从$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$)的格同态，亦可称$<f(A_1),\leqslant_2>$是$<A_1,\leqslant_1>$的格同态象。此外，当f是双射时，则称f为从$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$的格同构，亦$<A_1,\leqslant_1>$和$<A_2,\leqslant_2>$这两个格是同构的。

格的同态和同构

定理6-1.8: 设f是格〈A_1,≤$_1$〉到〈A_2,≤$_2$〉的格同态, 则对任意的x,y∈A_1,如果$x\leqslant_1 y$, 那么

$$f(x)\leqslant_2 f(y)$$

证明：　　定理6-1.6：a≤b ⇔ a∧b=a ⇔ a∨b=b

因为$x\leqslant_1 y$, 所以 $x\wedge_1 y=x$,
从而 $f(x\wedge_1 y)=f(x)$.
因 f是格同态, 故 $f(x)\wedge_2 f(y)=f(x\wedge_1 y)=f(x)$,
因此 $f(x)\leqslant_2 f(y)$

6.4 布尔代数

- 定义6-4.1 一个有补分配格，称布尔格。
- 定义6-4.2 由布尔格<A,≤> 诱导的代数系统 $<A,\wedge,\vee,^{-}>$称为布尔代数。
- 例如：
  - 集合运算<ρ(S)，⊆>，命题运算，都是布尔代数，
  - (因为满足结合律、交换律、吸收律、分配律、存在补元及0，1)

定理6-4.1　有补分配格中，任何元素的补元是唯一的。

证明：设b，c都是a的补元，则

$a\wedge b=0=a\wedge c$，$a\vee b=1=a\vee c$，

由定理6-2.3，　有 b=c。

定理6-4.2 有补分配格满足德.摩根定律，即

（1）$(a^{\wedge})^{\wedge}=a$

（2）$(a\wedge b)^{\wedge}=a^{\wedge}\vee b^{\wedge}$

（3）$(a\vee b)^{\wedge}=a^{\wedge}\wedge b^{\wedge}$