作业一

2215408108 软件工程 程乐怡

3.1-1

若$max(f(n),g(n))=\Theta(f(n)+g(n))$成立，说明存在$c_1,c_2>0$，对于一切$n>n_0$都有$c_1(f(n)+g(n))\le max(f(n),g(n))\le c_2(f(n)+g(n))$.

- 首先证明$max(f(n),g(n))\le c_2(f(n)+g(n))$

取$c_2=1$，显然

$$max(f(n),g(n))\le c_2(f(n)+g(n))$$

- 接下来证明$c_1(f(n)+g(n))\le max(f(n),g(n))$

取$c_1=\frac{1}{2}$，假设$f(n)\le g(n)$，那么

$$\frac{1}{2}(f(n)+g(n))\le max(f(n),g(n))$$

也即

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(f(n)+g(n))\le g(n)\\ f(n)\le g(n)\end{gathered}$$

由于$f(x)$和$g(x)$具有轮换对称性，故$f(n)\ge g(n)$是依然成立。

综上，$max(f(n),g(n))=\Theta(f(n)+g(n))$得证

3.2-3

1. 证明等式3.19

若$\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$成立，说明存在$c_1,c_2>0$，对于一切$n>n_0$都有

$$c_1 n\lg n\le \lg(n!)\le c_2 n\lg n$$

根据斯特林公式，有：

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

因此

$$\lg(n!)\approx\lg(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)$$

展开对数表达式，可以得到：

$$\lg(n!)\approx\lg\left(\sqrt{2\pi n}\right)+\lg\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

进一步化简，得到：

$$\lg(n!) \approx \frac{1}{2}\lg(\sqrt{2\pi n}) + n\lg\frac{n}{e}$$

因为$\frac{1}{2}\lg(2\pi n)$ 是较小的项，可以忽略，从而得到：

$$\lg(n!) \approx n\lg n - n$$

在渐进意义下，$-n$项可以忽略，因此近似得到：

$$\lg(n!) = \Theta(n\lg n)$$

- 证明上界

利用不等式

$$\lg(n!) = \sum_{k=1}^{n}\lg k \leq \int_1^n \lg x\,dx$$

计算积分得：

$$\int_1^n \lg x\,dx = [x\lg x - x]_1^n = n\lg n - n + 1$$

因此

$$\lg(n!) \leq n\lg n - n + 1 \leq c_2 \cdot n\lg n$$

其中 c_2 是某个大于 1 的常数。

- 证明下界

类似地，利用积分不等式下界：

$$\lg(n!) = \sum_{k=1}^{n}\lg k \geq \int_1^n \lg x\,dx.$$

计算得

$$\int_1^n \lg x\,dx = n\lg n - n + 1.$$

因此

$$\lg(n!) \geq n\lg n - n$$

可以取 c_1 为小于 1 的常数，从而满足下界。

综上$\lg(n!) = \Theta(n\lg n)$得证.

2. 证明$n! = \omega(2^n)$且$n! = o(n^n)$

根据 ω 的定义，如果$f(n)=\omega(g(n))$，那么对于，必须有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$$

在这里，$f(n)=n!$ 且 $g(n)=2^n$。可以计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}.$$

使用斯特林公式近似 n!$n!$n!：

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

因此

$$\frac{n!}{2^n}\approx\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2^n}=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{2e}>1$，因此 $\left(\frac{n}{2e}\right)^n\to\infty$。于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=\infty$$

因此 $n!=\omega(2^n)$成立。

根据 o 的定义，如果$f(n)=o(g(n))$，那么对于 $n\to\infty$，必须有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

在这里，$f(n)=n!$且 $g(n)=n^n$。可以计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$$

同样利用斯特林公式近似$n!$：

$$\frac{n!}{n^n}\approx\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

注意到$\left(\frac{1}{e}\right)^n$是一个指数衰减的项，当 $n\to\infty$时趋向于 0。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

因此$n!=o(n^n)$ 成立。

3.2-8

要证明$k\ln k=\Theta(n)$ 蕴含 $k=\Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$，可以通过分析$k$ 的表达式来推导出结果。具体步骤如下：

首先，根据定义，$k \ln k = \Theta(n)$ 意味着存在正的常数c_1、c_2 和 n_0 ，使得对于所有$n \geq n_0$都有

$$c_1 n \leq k \ln k \leq c_2 n.$$

在$k \ln k = \Theta(n)$中，假设k 是 n 的某个函数$k = f(n)$。
为了得到这种依赖关系，可以先假设 k $\approx \frac{n}{\ln n}$，并验证这种假设是否符合$k \ln k = \Theta(n)$ 的条件。
假设$k = \frac{n}{\ln n}$，那么

$$k \ln k = \frac{n}{\ln n} \cdot \ln\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

接下来对$\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)$进行展开：

$$\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right) = \ln n - \ln(\ln n).$$

因此

$$k \ln k = \frac{n}{\ln n} \cdot (\ln n - \ln(\ln n)) = n - \frac{n \ln(\ln n)}{\ln n}.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 0$，因此 $k \ln k \approx n$，满足$k \ln k = \Theta(n)$ 的条件。

3-2

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ	yes	yes	no	no	no
n^k	c^n	yes	yes	no	no	no
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	no	no	no	no	no
2^n	$2^{\frac{n}{2}}$	no	no	yes	yes	no
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	yes	no	yes	no	yes
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	yes	no	yes	no	yes

3-4

1. 错误

$$n = O(n^2), n^2 = O(n).$$

2. 错误

$$n + n^2 \neq O(n)$$

3. 正确

$f(n) = O(g(n))$，存在常数 c 和 n_0 使得当 $n \geq n_0$时，$f(n) \leq c \cdot g(n)$且 $f(n) \geq 1$。

$$\log(f(n)) \leq \log(c \cdot g(n)) = \log(c) + \log(g(n))$$

因为 $f(n) \geq 1$现在需要找到 d 使得 $\log(f(n)) \leq d \cdot \log(g(n))$可以通过使

$$\log(c) + \log(g(n)) \leq d \cdot \log(g(n))$$

来实现。由于$\log(g(n)) \geq 1$，取 $d = \log(c) + 1$即可满足条件。

4. 错误

$$2n = O(n), 2^{2n} \neq 2n$$

5. 错误

$$\begin{gathered} f(n) = \frac{1}{n} \\ n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq c\frac{1}{n^2} \\ kc \geq n_0, k > 1, \frac{1}{kc} \leq \frac{1}{k^2c^2} = \frac{1}{k^2c} \end{gathered}$$

6. 正确

$$\begin{gathered} f(n) = O(g(n)) \\ \text{存在} c, n_0, n \geq n_0, f(n) \leq cg(n) \\ g(n) \geq \frac{1}{c}f(n) \\ g(n) = \Omega(f(n)) \end{gathered}$$

7. 错误

$$\begin{gathered} f(n) = 2^{2n}. \\ 2^{2n} \neq O(2^n). \end{gathered}$$

8. 正确

设 g 为一个函数，满足 $g(n) = o(f(n))$ 。由于 g 渐进上是正的，可以找到一个 n_0 使得当 $n \geq n_0$时， $g(n) \geq 0$ 。于是：

下界：因为当 $n \geq n_0$时$g(n) \geq 0$，所以

$$\begin{gathered} f(n) + g(n) \geq f(n) \\ f(n) + o(f(n)) = \Omega(f(n)) \end{gathered}$$

上界：根据小o 符号的定义，存在一个 n_1 使得对于所有 $n \geq n_1$**，** $g(n) \leq \frac{1}{2}f(n)$。那么对于 $n \geq n_1$，有

$$\begin{gathered} f(n) + g(n) \leq f(n) + \frac{1}{2}f(n) = \frac{3}{2}f(n) \\ f(n) + o(f(n)) = O(f(n)) \end{gathered}$$

因为$f(n) + o(f(n))$ 同时是$\Omega(f(n))$ 和 $O(f(n))$，故$f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$，得证