函数间的比较

比较各种函数

- 许多实数的关系性质可用(引申)到渐近比较，下面假定$f(n)$和$g(n)$是渐近正的
  - 传递性 (对于五种渐进记号均适用)

$$f(n)=\Theta(g(n)) \text{ and } g(n)=\Theta(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Theta(h(n)) \text{ //渐紧界}$$
$$f(n)=O(g(n)) \text{ and } g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$$
$$f(n)=\Omega(g(n)) \text{ and } g(n)=\Omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$$
$$f(n)=o(g(n)) \text{ and } g(n)=o(h(n)) \Rightarrow f(n)=o(h(n)) \text{ //渐近非紧上界}$$
$$f(n)=\omega(g(n)) \text{ and } g(n)=\omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\omega(h(n)) \text{ //渐近非紧下界}$$

  - 自反性

$$f(n)=\Theta(f(n)),\quad f(n)=O(f(n)), f(n)=\Omega(f(n))$$

渐近非紧界无自反性

比较各种函数（续）

- 对称性 (仅对渐近紧确界成立)

$$f(n)=\Theta(g(n)) \text{ iff } g(n)=\Theta(f(n))$$

紧致界有对称性

- 转置对称性

$$f(n)=O(g(n)) \text{ iff } g(n)=\Omega(f(n))$$

//大O与大Ω对调时，f、g对称

$$f(n)=o(g(n)) \text{ iff } g(n)=\omega(f(n))$$

//g是f的非紧上界等价于f是g的非紧下界

比较各种函数（续）

- 由上述4个性质，可将两函数间的渐近比较类比于两个实数间的比较。

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&f(n)=O(g(n)) \approx a \le b \quad //\text{“}\approx\text{”相似于，} f \;\square\; a, g \;\square\; b \\
&f(n)=\Omega(g(n)) \approx a \ge b \\
&f(n)=\Theta(g(n)) \approx a = b \\
&f(n)=o(g(n)) \approx a < b \quad // f(n)\text{渐近小于}g(n) \\
&f(n)=\omega(g(n)) \approx a > b \quad // f(n)\text{渐近大于}g(n)
\end{aligned}
}
$$

但实数的三岐性(三分性质)不能类比到渐近表示中：

三歧性：$\forall a, b \in R$，下述三种情况必有一个成立：

$$a < b, a = b, or\ a > b$$

即任意两实数间是可比较的

比较各种函数（续）

Theorem. 1：对任意函数 $f(n)$ 和 $g(n)$, $f(n)=\Theta(g(n))$ 当且仅当 $f(n)=O(g(n))$ 和 $f(n)=\Omega(g(n))$

- **并非所有函数都是渐近可比较的**

  即∃$f(n)$和$g(n)$,

  可能$f(n) = O(g(n))$不成立,

  而$f(n) = \Omega(g(n))$也不成立,

  则由**Theorem.1**知，$f(n) \neq \Theta(g(n))$

- **例：函数n和$n^{1+sin\,n}$之间是无法渐近比较的**

  $\because 1 + sin\,n \in [0,2]$

  $\therefore n^{1+sin\,n}$在$O(1)$~$O(n^2)$之间波动

函数比较示例

- **例1. 独立增长双函数情况**

证明：如果$t_1(n)\in O(f(n))$且$t_2(n)\in O(g(n))$，

则$t_1(n)+t_2(n)\in O(\max\{f(n),g(n)\})$.

$Proof: \because t_1(n)\in O(f(n))$,

$\therefore \exists$正常量c_1和非负整数n_1，对所有$n\geq n_1$,

s. t. $t_1(n)\leq c_1 f(n)$

同理 $\exists$正常量c_2和非负整数n_2，对所有$n\geq n_2$,

s. t. $t_2(n)\leq c_2 g(n)$

函数比较示例（续）

- **例1. 独立增长双函数情况（续）**

证明：如果$t_1(n)\in O(f(n))$且$t_2(n)\in O(g(n))$，

则$t_1(n)+t_2(n)\in O(\max\{f(n),g(n)\})$.

令$\mathrm{c}_3=\max\{c_1,c_2\}$，$\mathrm{n}_3\ge\max\{n_1,n_2\}$

$$
\begin{aligned}
t_1(n)+t_2(n) &\le c_1 f(n)+c_2 g(n)\\
&\le \mathrm{c}_3 f(n)+\mathrm{c}_3 g(n)\\
&= \mathrm{c}_3\left[f(n)+g(n)\right]\\
&\le 2\mathrm{c}_3\max\{f(n),g(n)\}
\end{aligned}
$$

故$t_1(n)+t_2(n)\in O(\max\{f(n),g(n)\})$，

其中$c=2\max\{c_1,c_2\}$，$n_0=\max\{n_1,n_2\}$，得证

函数比较示例（续）

例1. 独立增长双函数情况（续）

上述结论对于Ω和Θ是否同样成立？

注：尽管符号O, Ω, Θ 的正式定义对于记住它们的抽象性质必不可少，但我们很少直接用定义来比较两个特定函数的增长次数。

一种简便的方法是对两个函数的比值求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0 & f(n)\text{增长率小于}g(n) \quad ① \\ c>0 & f(n)\text{增长率等于}g(n) \quad ② \\ \infty & f(n)\text{增长率大于}g(n) \quad ③ \\ \text{不存在} & \quad ④\end{cases}$$

$\Rightarrow$

①&②： $f(n)\in O(g(n))$

②&③： $f(n)\in \Omega(g(n))$

②： $f(n)\in \Theta(g(n))$

④： 该方法不适用

函数比较示例（续）

- **例2. 利用比值法求证** $\log_2 n \in o(\sqrt{n})$

$$Proof: \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_2 n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_2 e)\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 2\log_2 e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\therefore \log_2 n$增长率（阶数）低于$\sqrt{n}$，故得证

注：借助洛必达法则，可以推广至n^{ε}

函数比较示例（续）

- **算数运算 (请同学课下证明)**
  - $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$
  - $O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$
  - $O(cf(n)) = O(f(n))$
  - $g(n) = O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n))$

渐近分析法总结

- 一种忽略常数因子和输入小项的函数比较法

  - $O(g(n))$: class of functions $f(n)$ that grow no faster than $g(n)$

  - $\Theta(g(n))$: class of functions $f(n)$ that grow at same rate as $g(n)$

  - $\Omega(g(n))$: class of functions $f(n)$ that grow at least as fast as $g(n)$