离散数学

集合与关系

计算机科学与技术学院

集合论

3-1集合论的基本概念

- 集合的概念
  - 集合是作为一次论述的事物的全体，在某些场合有时又称为类、族或搜集。
- 集合用大写英文字母A，B，C，…等表示
  - 组成集合的每个事物称为此集合的**元素**
- 集合中的元素用小写英文子母a,b,c，…表示
  - 若a是A中的元素，记为：$a \in A$

集合的表示法

- 列举法
  - 例：偶数集合 A = {…，-4，-2，0，2，4，…}
- 描述法：用谓词描述出集合元素的特征来表示集合
  - 例1：$A = \{x \mid x=a \lor x=b\}$（$A=\{a,b\}$）
  - 例2：A为偶数集合 $A=\{x \mid \exists y(y \in I \land x=2y)\}$（I表示整数集）
  - 例3：永真式集合 $A=\{p \mid p \in wff \land p \Leftrightarrow T\}$
  - 一般地，$S = \{a \mid P(a)\}$ 表示 $a \in S$ 当且仅当$P(a)$是真
    - $S = \{a \mid$ a是人$\}$

集合的表示法

- 注：
  - 集合中的元素可以是集合，例：$A = \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
  - 仅含一个元素的集合称为单元素集合
  - 应把单元素集合与单元素区别开来
- 例：
- {a}与a不同
  - {a}表示仅以a为元素的集合
- {{1，0}}与{1，0}不同
  - {{1，0}}表示仅以{1，0}为元素的集合
  - {1，0}是{{1，0}}的元素

集合的基数

- 含有有限个元素的集合称有限集合，否则称为无限集。
- 有限集合的元素个数称为该集合的基数或势，记为 |A|
- 例：
  - $A = \{a, b\}$，则 $|A|=2$
  - $|\{A\}|=1$
  - $B =\{a, b\}$，$|B|=2$

集合相等公理

- 外延性公理：
  - 集合A，B相等，当且仅当A与B有相同的元素
  - 即：集合A，B相等，*iff* $\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\forall x(x\in B\to x\in A)$
- 故：
  - 列举法中，元素的次序无关紧要，即{x, y, z}与{z, x, y}相等
  - 元素的重复出现无关紧要，即{x, y, x}，{y, x}，{x, x, x, x, y}相等
  - 集合的表示不唯一，如{x| $x^2=1$}与{-1, 1}表示相同的集合

集合间的包含关系

- 子集
  - 定义(3-1.1)：设A和B是集合，若$\forall x(x\in A\to x\in B)$，那么A是B的子集，记为$A\subseteq B$。读作'B包含A'或'A是B的子集'，又称"B是A的扩集"
- 真子集
  - 定义(3-1.2)：若$A\subseteq B$，且$A\neq B$，称A是B的真子集，记$A\subset B$。读"B真包含A"
  - 即 $A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\exists x(x\notin A\wedge x\in B)$

集合间的包含关系

- 全集
  - 我们讨论的元素和集合是限于某一论述区域中，此论述区域称为全集E。虽然有时这个论述区域未明晰给出
- 定理：
  - 任意集合$A\subseteq E$
  - 证：∵$\forall x(x\in A\to x\in E)$为真
  - ∴定理1正确
- 定理 (3-1.1)： A=B等价于$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$
  - 证：∵ $A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\forall x(x\in B\to x\in A)\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$
  - ∴定理正确
  - 推论： $A\subseteq A$ （∵ A=A，∴ $A\subseteq A$ ）
- 定理：若$A\subseteq B$，且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$
  - 证：∵$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)$
  - $B\subseteq C\Leftrightarrow\forall x(x\in B\to x\in C)$
  - ∴$\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\forall x(x\in B\to x\in C)\Rightarrow\forall x(x\in A\to x\in C)$
  - 即定理3正确

集合间的包含关系

- 空集
  - 定义 (3-1.3)：没有元素的集合称为空集，记为Φ
- 定理 (3-1.2)：对任意集合A，$\Phi\subseteq A$
  - 证：∵$\forall x(x\in\Phi\to x\in A)$永真
  - ∴$\Phi\subseteq A$
- 注：Φ与{Φ}不同，前者没有元素，后者是以空集为一个元素的集合。

集合间的包含关系

- 幂集
  - 定义 (3-1.5)给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记为ρ(A)。
- 举例：
  - 例1：试求出集合{p, q}的幂集。
  - 解：
    - Φ，{p}，{q}，{p, q}是{p, q}的子集，
    - ∴{Φ，{p}，{q}，{p, q}}是{p, q}的幂集。
- 定理 (3-1.3)：集合A有n个元素，则其幂集有2^n个元素。
  - 证明：从幂集的定义出发，根据乘法原理，易得。

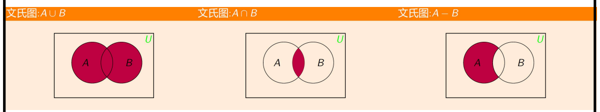
集合间的包含关系

- 幂集的编码表示法：设S={a, b, c}
  - $\rho(A)=\{S_i, i\in J\}$，其中$J=\{i\,|\,i$是二进制数且$000\le i\le 111\}$
  - 例如，$S_3=S_{011}=\{b,c\}$，$S_6=S_{110}=\{a,b\}$等

集合上的运算：并、交、差运算

- 并、交、差运算

- 基本概念（设A和B为集合）
  - ✓定义(3-2.1) A和B的并：$A\cup B=\{x \mid x\in A \lor x\in B\}$
  - ✓定义(3-2.2) A和B的交：$A\cap B=\{x \mid x\in A \land x\in B\}$
  - ✓定义(3-2.3) A和B的差：$A-B=\{x \mid x\in A \land x\notin B\}$，也称为相对补



集合上的运算：并、交、差运算

- 并运算
  - ✓集合{1,3,5} 和集合{1,2,3} 的并集是{1,2,3,5}
- 交运算
  - ✓集合{1,3,5} 和集合{1,2,3} 的交集是{1,3}
- 差运算
  - ✓集合{1,3,5} 和集合{1,2,3} 的差集是{5}

集合上的运算：并、交、差运算

- 基本性质
  - ✓a) $A\cup B=B\cup A$
  - ✓b) $A\cap B= B\cap A$
  - ✓c) $(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$
  - ✓d) $(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$

a) $A\cap A=A$。	a) $A\cup A=A$。
b) $A\cap\varnothing=\varnothing$。	b) $A\cup E=E$。
c) $A\cap E=A$。	c) $A\cup\varnothing=A$。

- 即交、并运算是可交换和可结合的

- 证：b) $\forall x\in E$（全集）
  - ✓$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\land x\in B$　（∩的定义）
  - ✓$\Leftrightarrow x\in B\land x\in A$　（∧的可交换性）
  - ✓$\Leftrightarrow x\in B\cap A$，
  - ✓∴$\forall x(x\in A\cap B\leftrightarrow x\in B\cap A)$ ，即$A\cap B = B\cap A$

集合上的运算：并、交、差运算

- 定理 (3-2.1)：（分配律）设A、B、C为任意三个集合，则
  - ✓a) $A\cup (B\cap C)= (A\cup B)\cap (A\cup C)$
  - ✓b) $A\cap (B\cup C)= (A\cap B)\cup (A\cap C)$

- 证：b) $\forall x\in E$
- $x\in A\cap (B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\land x\in (B\cup C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\land (x\in B\lor x\in C)$
- $\Leftrightarrow (x\in A\land x\in B)\lor (x\in A\land x\in C)$　（∧对∨的分配律）
- $\Leftrightarrow (x\in A\cap B)\lor (x\in A\cap C)$
- $\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup (A\cap C)$
- ∴$A\cap (B\cup C)= (A\cap B)\cup (A\cap C)$

集合上的运算：并、交、差运算

- 定理 (3-2.2)：（吸收律）设A、B为任意两个集合，则
  - ✓a) $A\cup (A\cap B)= A$
  - ✓b) $A\cap (A\cup B)= A$

- 证明：a) $A\cup (A\cap B) = (A\cap E)\cup (A\cap B)$
- $= A\cap (E\cup B)$　分配律-反向
- $= A$
- b) $A\cap (A\cup B) = (A\cup A)\cap (A\cup B)$
- $= A\cup (A\cap B)$
- $= A$
- 注：也可以利用谓词性质证明。类似定理3-2.1的证明方法

集合上的运算：并、交、差运算

- 例：设A,B,C,D是任意集合,则
  - ✓a）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cup C\subseteq B\cup D$
  - ✓b）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cap C\subseteq B\cap D$

- 证：对 b）
  - ✓∵ $x\in (A\cap C)\Leftrightarrow x\in A\land x\in C\Rightarrow x\in B\land x\in D$
  - ✓$\Leftrightarrow x\in (B\cap D)$
  - ✓∴$A\cap C\subseteq B\cap D$

19

集合上的运算：并、交、差运算

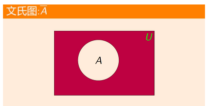
- 定理（3-2.3）设A,B是任意集合,则
  - ✓a） $A\subseteq B$, *iff* $A\cup B=B$
  - ✓b） $A\subseteq B$, *iff* $A\cap B=A$
- 证：对 b）“⇒”
  - ✓ ∵ $A\subseteq B$, 又$A\subseteq A$
  - ✓ ∴ $A\cap A\subseteq A\cap B$，即 $A\subseteq A\cap B$
  - ✓ 又 ∵ $A\cap B\subseteq A$
  - ✓ ∴ $A=A\cap B$
  - ✓ “⇐” $A\cap B=A$
  - ✓ ∵ $A\cap B \subseteq B$
  - ✓ ∴ $A \subseteq B$

$A\subseteq E$
$B\subseteq B$
$A\cap B\subseteq E\cap B$
$A\cap B\subseteq B$

20

集合上的运算：补运算

- 定义（3-2.4）：设E是全集，A的补集为：
  - ✓$\sim A=E-A=\{x\mid x\in E\wedge x\notin A\}=\{x\mid x\notin A\}$，也称绝对补
  - ✓例：集合{1,3,5} 和集合{1,2,3,4,5,6} 的补集是{2,4,6}
- 性质：设A为任意集合，则
  - ✓a) $A \cup \sim A = E$
  - ✓b) $A \cap \sim A = \Phi$
  - ✓c) $\sim\Phi = E$
  - ✓d) $\sim E = \Phi$
  - ✓e) $\sim\sim A = A$



21

集合上的运算：德•摩根定律

- 定理（3-2.4）：设A、B为任意两个集合，则：
  - ✓a) $\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$
  - ✓b) $\sim(A\cap B)= \sim A\cup\sim B$

证明 a) $\sim(A\cup B)=\{x\mid x\in\sim(A\cup B)\}$
$=\{x\mid x\notin A\cup B\}$
$=\{x\mid(x\notin A)\wedge(x\notin B)\}$
$=\{x\mid(x\in\sim A)\wedge(x\in\sim B)\}$
$=\sim A\cap\sim B$

b）其证法与a)类似。

22

集合上的运算：德•摩根定律推广

- 定理（3-2.5）：设A、B为任意两个集合，则：
  - ✓a) $A-B = A\cap\sim B$ （演算过程中对减号的常用变化技巧）
  - ✓b) $A-B = A-(A\cap B)$
- 证明：b)
  - ✓$A-(A\cap B)=A\cap\sim(A\cap B)$
  - ✓ $=A\cap(\sim A\cup\sim B)$
  - ✓ $=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)$
  - ✓ $=\Phi\cup(A\cap\sim B)$
  - ✓ $=A-B$

23

集合上的运算：德•摩根定律推广

- 定理（3-2.6）设A、B、C为任意三个集合，则：
  - ✓$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
- 证明：
  - ✓$A\cap(B-C) = A\cap(B\cap\sim C)$
  - ✓ $= A\cap B\cap\sim C$
  - ✓$(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$
  - ✓ $= (A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$
  - ✓ $= (A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$
  - ✓ $= \Phi\cup(A\cap B\cap\sim C)$
  - ✓ $= A\cap B\cap\sim C$
  - ✓所以：$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

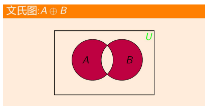
24

集合上的运算：德•摩根定律推广

- 定理（3-2.7）设A、B为任意两个集合,若$A\subseteq B$，则：
  - ✓a) $\sim B \subseteq \sim A$
  - ✓b) $(B-A)\cup A = B$
- 证明：a)
  - ✓若$x\in A$ ，则$x\in B$。因此$x\notin B$必有$x\notin A$
  - ✓故$x\in\sim B$必有$x\in\sim A$，即$\sim B\subseteq\sim A$
- 证明：b)
  - ✓$(B-A)\cup A=(B\cap\sim A)\cup A$
  - ✓$= (B\cup A)\cap(\sim A\cup A)$
  - ✓$= (B\cup A)\cap E$
  - ✓$= B\cup A$
  - ✓因为$A\subseteq B$，就有$B\cup A=B$。因此$(B-A)\cup A=B$

集合上的运算：对称差

- 定义(3-2.5)：集合A和B的对称差为集合S，其元素或属于A，或属于B，但不能既属于A又属于B，记为A⊕B
- 即 A⊕B = (A-B)∪(B-A)，或{x|x∈A $\bar{\vee}$ x∈B}
  - ✓例：集合{1,3,5} 和集合{1,2,3} 的对称差是{2,5}
- 性质
  - ✓A⊕B = B⊕A
  - ✓A⊕Φ = A
  - ✓A⊕A = Φ
  - ✓A⊕B = (~A∩B)∪(A∩~B)
  - ✓(A⊕B)⊕C = A⊕(B⊕C)



序偶和笛卡尔积

事物间的联系

- 蝴蝶效应
  - ✓亚马逊雨林一只蝴蝶翅膀偶尔振动，也许两周后就会引起美国得克萨斯州的一场龙卷风应

- 易经
  - ✓太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦生万物

集合的笛卡尔积

- 序偶
  - ✓两个元素a_1, a_2组成的序列记作<a_1, a_2>, 称为**序偶**
- 定义 (3-4.1)：
  - ✓二个序偶<a,b>和<c,d>相等， 当且仅当a=c且b=d， 即<a,b>=<c,d>⇔a=c∧b=d
- 推广：
  - ✓<<a_1, a_2>, a_3>称为三元组， 记为<a_1, a_2, a_3>， 注:<a_1, <a_2, a_3>>不是三元组
  - ✓<<a_1, …, a_{n-1}>, a_n>称为n元组， 记为<a_1, a_2, …, a_n>
- 注：
  - ✓①二元组的元素次序是重要的。例:<2,3>≠<3,2>
  - ✓②n元组相等， 当且仅当对应的元素分别相等。
  - ✓③<<a_1， a_2>, a_3>≠<a_1, <a_2, a_3>>， 后者不是三元组

集合的笛卡尔积

- 例
  - ✓张明喜欢离散数学可用序偶表示为：<张明， 离散数学>
  - ✓英语课本在书桌上可用序偶表示为：<英语课本， 书桌>
  - ✓若序偶<x+y; 2y-1> = <3y-4; 5>， 根据序偶相等的定义有
  - ✓x+y = 3y-4; 2y-1 = 5， 解得x = 2; y = 3

集合的笛卡尔积

- 笛卡尔积(定义(3-4.2))：
  - ✓设任意两个集合A和B，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，由所有这样的序偶组成的集合，称为集合A和集合B的笛卡尔积， 记为A×B。 即：A×B={<x,y>|x∈A∧y∈B}
- 举例
  - ✓例1：设A={a,b},B={1,2,3},C={p,q}， E={0}。
  - ✓则：A×B={<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>},
    A×Φ = Φ,
    (A×E)×E={<a,0,0>,<b,0,0>}
    (A×B)∩(B×A)=Φ

NO

A×(B×C)不是三元组

- 另外， (A×B)×C=A×(B×C)吗？
- 性质： 笛卡尔积不符交换律和结合律

集合的笛卡尔积

- 定理(3-4.1)：设A、B、C为任意三个集合
- 则：
  - ✓a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
  - ✓b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
  - ✓c) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
  - ✓d) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
- 证明（d）设$\langle x,y\rangle$是$(A\cap B)\times C$的任一元素，

$\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C$

$\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge y\in C$（根据定义）

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)$（幂等律+交换律）

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\ \wedge\ \langle x,y\rangle\in B\times C$

$\Leftrightarrow\ \langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C)$

∴ $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$。(a),(b),(c)的证明类似

集合的笛卡尔积

- 定理(3-4.2)：在$C\neq\Phi$的情形下，有：

  $A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)$；$A\subseteq B\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$
- 第一式证明：
  - ✓“⇒”：设$\langle x,y\rangle\in A\times C$，由$A\subseteq B$，有

    $\langle x,y\rangle\in A\times C\Rightarrow(x\in A\wedge y\in C)$

    $\Rightarrow(x\in B\wedge y\in C)$

    $\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C$

    因此 $A\times C\subseteq B\times C)$
  - ✓“⇐”：因为$C\neq\Phi$，可取$y\in C$. 由$A\times C\subseteq B\times C$，有

    $x\in A\Rightarrow x\in A\wedge y\in C$

    $\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C$

    $\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C$

    $\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C$

    $\Rightarrow x\in B$

    因此 $A\subseteq B$
  - ✓类似可证：$A\subseteq B\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$

集合的笛卡尔积

- 定理(3-4.3)：设A,B,C,D为四个非空集，则：
  - ✓$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件为 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$
- 证明：
  - ✓“⇒”：若$A\times B\subseteq C\times D$，对任意$x\in A$和$y\in B$有

    $x\in A\wedge y\in B\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B$

    $\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D$

    $\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$

    即：$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$
  - ✓“⇐”：若$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$，设任意$x\in A$和$y\in B$有

    $\langle x,y\rangle\in A\times B\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

    $\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$

    $\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D$

    因此 $A\times B\subseteq C\times D$

关 系 论

二元关系

- 例：令A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则A×B 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是A×B 的某一个子集。
- 日常生活中关系普遍存在，数学上可以用序偶来表达：若有xRy，可记为$\langle x,y\rangle\in R$，由此可见，关系R是序偶的集合
- 例：“小于”关系，$5<7$可以记为 $(5,7)\in<$
- 定义(3-5.1)：任一序偶的集合R确定了一个二元关系R，R中任一序偶$\langle x,y\rangle$可记为$\langle x,y\rangle\in R$ 或 xRy

强调了序偶集合与二元关系的映射：任一序偶集合都对应了一个关系

枚举二元关系

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解 首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{<a,c>\},\{<a,d>\},\{<b,c>\},\{<b,d>\}$；
- 2–元子集：$\{<a,c>,<a,d>\},\{<a,c>,<b,c>\},\{<a,c>,<b,d>\},\{<a,d>,<b,d>\},\{<a,d>,<b,d>\},\{<b,c>,<b,d>\}$；
- 3–元子集：$\{<a,c>,<a,d>,<b,c>\},\{<a,c>,<a,d>,<b,d>\},\{<a,c>,<b,c>,<b,d>\},\{<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$；
- 4–元子集：$\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

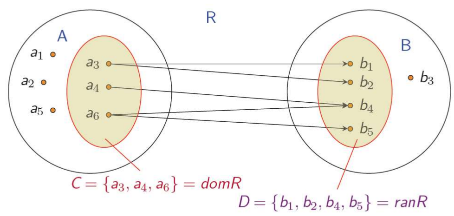
所以，上面的 16 个不同子集就是从 A 到 B 的所有不同关系。

关系及其表示

- 定义(3-5.2):
  - ✓二元关系R中，由所有x组成的集合叫做关系R的前域记作dom R =$\{x|\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$
  - ✓由所有y组成的集合叫做关系R的值域，ran R=$\{y|\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$
  - ✓R的前域和值域统称为R的域，记为FLD R = dom(R)∪ran(R)
- 例1.
  - ✓设A={x1, …, x7}, B={y1, …, y6},
  - ✓R={<x3, y1>, <x3, y2>, <x6, y2>, <x5, y6>}
  - ✓解：dam(R)={x3, x6, x5}, ran(R)={y1, y2, y6}

FLD意义不大

前域和值域



关系与笛卡儿积

- 关系中序偶的元素分别来自于两个不同的集合，因此：关系其实就是这两个集合的笛卡儿积的子集
- 定义(3-5.3): X×Y的两个平凡子集X×Y和空集， X×Y称为全域关系，空集称为空关系
- 关系的运算
  - ✓定理5.1：关系的交，并，补，差仍是X到Y的关系

关系与笛卡儿积

- 定义:当 X=Y 时，关系R是X×X的子集，称R为X上的二元关系
  - ✓例 设X={1，2，3，4}，求X上的“大于”关系 >
  - ✓解：{<2, 1>, <3, 1>, <4, 1>, <3, 2>, <4, 2>, <4, 3>}
- 定义(3-5.4)：设R是X上的二元关系，且R={<x, x>|x属于X}，则称R是X上的恒等关系，记为I_x
  - ✓例：X={1，2，3}，则I_x={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>}

关系的表示

- 关系矩阵
  - ✓设集合x=$\{x_1,\ldots,x_m\}$，y=$\{y_1,\ldots,y_n\}$,R是从X到Y的一个二元关系。则对应于关系R有一个关系矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$,其中

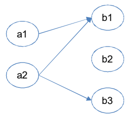
$$r_{ij}=\begin{cases}1,<x_i,y_i>\in R\\0,<x_i,y_j>\notin R\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

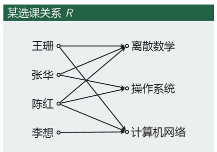
- 例:
  - ✓设 A=$\{a_1, a_2\}$ B=$\{b_1,b_2,b_3\}$
  - ✓R=$\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_1\rangle,\langle a_2,b_3\rangle\}$

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

关系的表示

- 关系图：设集合x=$\{x_1,\cdots,x_m\}$， y=$\{y_1,\cdots,y_n\}$, R是从X到Y的一个二元关系
  - ✓用小圈表示元素
  - ✓i)若$\langle x_i,y_i\rangle\in R$, 则从结点$x_i$画一有向弧，箭头指向$y_i$
  - ✓ii)否则，结点之间没有线段连接
  - ✓这样的图称为关系图
  - ✓例：设 A=$\{a_1, a_2\}$ B=$\{b_1,b_2,b_3\}$；
  - ✓R=$\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_1\rangle,\langle a_2,b_3\rangle\}$





关系的性质：自反性

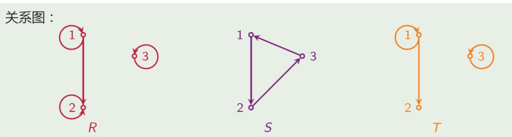
- 自反性（设R是A上的二元关系）
  - ✓定义(3-6.1)：若∀x∈A，均有xRx，那么称R是自反的
- 例
  - ✓A= {1，2，3}，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}为自反关系
  - ✓A= {1，2，3}，R={<1,1>,<2,2>,<1,2>} 自反？ 非自反
- 注：
  - ✓1）A上关系R是自反的 ⇔∀x（x∈A→xRx）
  - ✓2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。在关系图中，反映为每结点都有自回路

关系的性质：反自反性

- 反自反性
  - ✓定义(3-6.4)：若∀x∈A，均有<x,x>∉R，那么称R是反自反的
- 例
  - ✓ A={1,2,3} R={<1,2>,<2,3>}
- 注：
  - ✓1) A上的关系R是反自反的⇔∀x（x∈A→ <x,x>∉R）
  - ✓2) 在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。在关系图中，反映为每结点都无自回路
- 注：有些关系可以既不是自反的，也不是反自反的

自反性与反自反性

- 设A = {1，2，3}，定义A 上的关系R，S 和 T 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，2>，<2，2>，<3，3>} 自反
  - ✓S = {<1，2>，<2，3>，<3，1>} 反自反
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<1，3>，<3，1>，<3，3>} 非自反，非反自反



自反性与反自反性

- 关系矩阵
  - ✓关系R 是自反的当且仅当R 的关系矩阵的主对角线上全为1,
  - ✓关系R 是反自反的当且仅当R 的关系矩阵的主对角线上全为0

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系的性质：对称性

- 对称性
  - ✓定义(3-6.2)：如果对于每个x,y属于A,每当xRy,都有yRx,则称A上的关系R是对称的
  - ✓例：A={1,2,3}，R={<1,2>,<2,1>,<3,3>}
- 注：
  - ✓1) 定义⇔∀x∀y(x∈A∧y∈A∧xRy→yRx)
  - ✓2) 关系矩阵是对称矩阵。关系图中，若有弧则必是成对出现

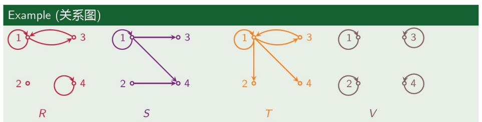
关系的性质：反对称性

- 反对称性
  - ✓定义(3-6.5):如果对于每个x,y属于A,每当xRy和yRx,必有x=y，A上的关系R是反对称的
  - ✓例 A={1,2,3}，R={<1,2>,<1,3>}
  - ✓又如 S={<1,1>,<2,2>,<3,3>},对称的也是反对称的
- 注：
  - ✓1) ⇔∀x∀y(x∈A∧y∈A∧xRy∧yRx→x=y)
  - ✓2) 在关系矩阵中，反映为主对角线对称的元素不能同时为1
  - ✓在关系图上，反映为任意两个结点间的弧线不能成对出现
- 注：
  - ✓1)有些关系既不是对称的，又不是反对称的。例如A={1,2,3} R={<1,2>,<2,1>,<1,3>}
  - ✓2)有些关系既是对称的，又是反对称的，例如恒等关系、空关系

对称性与反对称性

- 设A = {1，2，3，4}，定义A 上的关系R，S,T 和V 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，3>，<3，1>，<4，4>} 对称
  - ✓S = {<1，1>，<1，3>，<1，4>，<2，4>} 反对称
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<1，3>，<3，1>，<1，4>} 非对称，非反对称
  - ✓V = {<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>} 对称，反对称

Example (关系图)



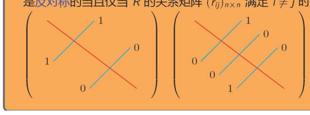
关系图判定法：关系R 是对称的当且仅当R 的关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无边，关系R 是反对称的当且仅当R 的关系图中，任何一对结点之间至多只有一条边。

对称性与反对称性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系矩阵判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $i \neq j$ 时，$r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$.



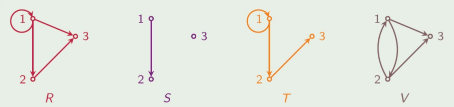
关系的性质：传递性

- 传递性
  - ✓定义(3-6.3)：设R是A上的二元关系，如果对于任意x，y，z属于A，每当xRy，yRz时就有xRz，则称关系R在A上是传递的
- 例：A={1,2,3,4}
  - ✓R_1={<1,4>,<4,3>,<1,3>,<3,1>,<1,1>,<4,1>,<3,3>,<4,4>}不是传递的
  - ✓R_2= {<1,1>，<2,2>，<3,3>，<4,4>}
  - ✓R_3= { }
  - ✓R_4= {<1,2>，<2,2>}，则：R_2，R_3，R_4是传递的
  - ✓R_5= {<1,1>，<1,2>，<2,1>} 不是传递关系，没有<2,2>
- 注：
  - ✓1）定义⇔∀x∀y∀z(x∈A∧y∈A∧z∈A∧xRy∧yRz→xRz)
  - ✓2）传递关系图的特征是：
    - 在关系图中若存在从a到b一条有向路径（即存在一结点序列a=a_1，…，a_n=b，其中<a_i,a_{i+1}>∈R，1≤i≤n-1)，则从a到b必定存在一条弧。
    - 传递关系在关系矩阵上的特性都不易看出来

传递性

- 设A = {1，2，3}，定义A 上的关系R，S,T 和V 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，2>，<2，3>，<1，3>} 传递
  - ✓S = {<1，2>} 传递
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<2，3>} 非传递
  - ✓V = {<1，2>，<2，3>，<1，3>，<2，1>} 非传递

关系图:



传递性

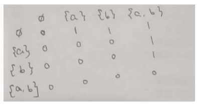
Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中，任何三个不同结点 x, y, z 之间，若从 x 到 y 有一条边存在，从 y 到 z 有一条边存在，则从 x 到 z 一定有一条边存在;
- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系矩阵中，对任意 $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$，必有 $r_{ik} = 1$.

关系性质判定



	∅	{a}	{b}	{a,b}
∅	0	1	1	1
{a}	0	0	0	1
{b}	0	0	0	1
{a,b}	0	0	0	0

- 一个关系可能满足多种性质，如：
  - ✓非空集合A 上的全关系E_A：（所有序偶集合，全1矩阵）自反，对称，传递
  - ✓非空集合A 上的空关系∅：（全0矩阵）反自反，对称，反对称，传递
  - ✓非空集合A 上的恒等关系I_A：自反，对称，反对称，传递
  - ✓实数集R 上的等于关系=：自反，对称，反对称，传递
  - ✓幂集上的真包含关系⊂：反自反，反对称，传递（需举例来理解）
- 假设A = {a，b，c，d}，R 是定义在A 上的关系.
  - ✓R = {<a，a>，<a，b>，<b，a>，<c,d>}有哪些性质？
    非自反，非反自反，非对称，非反对称，非传递
  - ✓可见，一个关系也有可能不满足任何性质

关系性质

- 设A = {1, 2, 3}, R, S 是集合A 上的关系
  - ✓R = {<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>}　反自反，反对称，传递
  - ✓S = {<3, 2>, <3, 1>, <2, 1>}　反自反，反对称，传递
  - ✓R∘S = {<1, 1>, <2, 2>, <2, 1>, <1, 2>} 非反自反，非反对称
  - ✓R∪S = {<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <31>} 非传递，非反对称

  - ✓R = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>}自反，对称，传递
  - ✓S = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <3, 2>, <2, 3>}自反，对称，传递
  - ✓R ∘ S = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <2, 3>, <3, 2>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>}
    非传递，非对称
  - ✓R-S = {<1, 2>, <2, 1>}　非自反，非传递

注：关系性质对运算不能保持

复合关系-布尔矩阵的并和交运算

Definition

1. 如果 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则A 和 B 的并也是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\vee B=C=(c_{ij})$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } a_{ij}=1 \text{ or } b_{ij}=1\\ 0 & \text{if } a_{ij}=0 \text{ and } b_{ij}=0\end{cases}$$

2. 如果 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则A 和 B 的交也是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\wedge B=C=(c_{ij})$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } a_{ij}=1 \text{ and } b_{ij}=1\\ 0 & \text{if } a_{ij}=0 \text{ or } b_{ij}=0\end{cases}$$

注1：布尔矩阵，元素均为0或1；
注2：A，B可均为1x1矩阵，即两个数

复合关系-布尔矩阵的积运算

Definition

如果 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times p$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $p\times n$ 矩阵，则A 和 B 的积是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\odot B=C=(c_{ij})$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \exists k, a_{ik}=1 \text{ and } b_{kj}=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

Example

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$，则 $A\odot B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

复合关系和逆关系

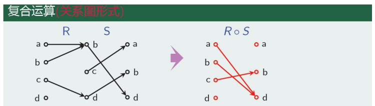
- 复合关系
  - ✓定义(3-7.1)：　设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1\circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
  - ✓ $R_1\circ R_2=\{\langle a,c\rangle \mid (\exists b)(a\in A\wedge c\in C\wedge b\in B\wedge \langle a,b\rangle\in R_1\wedge \langle b,c\rangle\in R_2)\}$

- 注：
  - ✓① 关系图上，$R_1\circ R_2$是由<a, c>这样的序偶组成，从a∈A到c∈C有一长度为2的路径，其中第一条弧属于R_1，第二条弧属于R_2
  - ✓② 若R_1的值域与R_2的前域的交集为空，则$R_1\circ R_2$为空关系
  - ✓③ 设I_A、I_B分别为A和B上的恒等关系，R是A到B的二元关系，则
    $I_A\circ R=R\circ I_B=R$　（同一律）
- 注意：　$R\circ I_A$, $I_B\circ R$ 没有定义，无意义

复合关系

- 设 A={a, b, c, d}，B={b, c, d}；C={a, b, d}
  - ✓R={<a, b>, <c, d>, <b, b>} 是A 到B 的关系
  - ✓S={<d, b><b, d><c, a>} 是B 到C 的关系
- 则 R ∘ S={<a, d>, <c, b>, <b, d>}

复合运算(关系图形式)



复合运算(关系矩阵形式)

$$M_{R\circ S}=M_R\odot M_S=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

复合关系和逆关系

- 例1
  - ✓设A={1, 2, 3, 4, 5}，A上的二元关系
  - ✓R={<1, 2>, <3, 4>, <2, 2>}
  - ✓S={<4, 2>, <2, 5>, <3, 1>, <1, 3>}
- 则
  - ✓R ∘ S={<1, 5>, <3, 2>, <2, 5>}，S ∘R={<4, 2>, <3, 2>, <1, 4>}
  - ✓(R ∘ S) ∘ R={<3, 2>}，　　R ∘ (S ∘ R)={<3, 2>}
  - ✓R ∘ R={<1, 2>, <2, 2>}，　S ∘ S={<4, 5>, <3, 3>, <1, 1>}
- 例2：
  - ✓xR_1y表示x是y的兄弟，yR_2z表示y是z的父亲

  则
  - ✓$xR_1\circ R_2z$ 表示x是z的叔伯
  - ✓$xR_2\circ R_2z$ 表示x是z的祖父

61

复合关系和逆关系：结合律

- 结合律
  - ✓设R_1, R_2, R_3分别是从A到B，从B到C，从C到D的关系。
  - ✓则 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
    - 证：设$\langle a, d\rangle$是$(R_1 \circ R_2) \circ R_3$的任一序偶。（路径：$a\ R_1\ b\ R_2\ c\ R_3\ d$）

则 $\langle a, d\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists c(\langle a, c\rangle \in R_1 \circ R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists c(\exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2) \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c \exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b \exists c(\langle a, b\rangle \in R_1 \land (\langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, d\rangle \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

- 故 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ R_2 \circ R_3$

62

复合关系和逆关系：关系R的幂

- 定义
  - ✓设R是集合A上的二元关系，R与自身的复合为R的幂，记为$R^{(n)}$。如下：
  - ✓1）$R^{(0)}$是A的相等关系，$R^{(0)}=\{\langle x, x\rangle | x \in A\}=I_A$
  - ✓2) $R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R$
- 其关系图的意义
  - ✓在$R^{(2)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为2的路径（$R^{(2)}$的弧,是由后R给前R搭桥而致,从而R本身就有桥）
  - ✓在$R^{(n)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为n的路径

63

复合关系和逆关系：关系R的幂

- R^n 的基数并非随着n 的增加而增加，而是呈递减趋势

Example

设 $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系, 考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$:

$R^1=R$,

$R^2=R\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$,

$R^3=R^2\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$,

$R^4=R^3\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$,

$R^5=R^4\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}$,

$R^6=R^5\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}=R^5$,

$R^7=R^6\circ R=R^5$,

Example

设 $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系, 考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$:

$S^1=S$, $S^2=S\circ S=\{<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$,

$S^3=S\circ S\circ S=S^2\circ S=\{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$, $S^4=S^3\circ S=\{<1,5>,<2,6>\}$,

$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\}$, $S^6=S^5\circ S=\varnothing$, $S^7=\varnothing$, $\cdots$ $S^n=\varnothing(n>5)$;

64

复合关系和逆关系：复合关系的矩阵表达

- 设
  - ✓$X=\{x_1, \ldots, x_m\}, Y=\{y_1, \ldots, y_n\}, Z=\{z_1, \ldots, z_p\}$。R、S分别是X到Y, Y到Z的关系，设$M_R=[a_{ik}], M_S=[b_{kj}]$,
- 则
  - ✓构造为 $M_{R\circ S}=[C_{ij}]$，如果Y中至少有这样一个元素y_j，使得$\langle x_i, y_j\rangle$属于R，$\langle y_j, z_k\rangle$属于S，则必有$\langle x_i, z_k\rangle$属于$R \circ S$, 也即$C_{ik}=1$；否则$C_{ik}=0$。
- 故：
  - ✓$M_{R\circ S}=[C_{ij}]=M_R \circ M_S = C_{ik}$
  - ✓其中 $C_{ik} = V_{j=1}^{n}(a_{ij} \land b_{jk})$
  - ✓(“∧”表示逻辑乘，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant k \leqslant p$，“∨”表示逻辑加)

65

复合关系和逆关系：复合关系的矩阵表达

- 例1
  - ✓设$X=\{1, 2\}$，$Y=\{a, b, c\}$，$Z=\{\alpha, \beta\}$，$R=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, c\rangle\}$，
  - ✓$S=\{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \beta\rangle\}$。
- 解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R \circ M_S = M_{R\circ S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

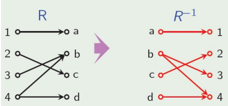
66

复合关系和逆关系：逆关系

- 定义(3-7.2)：设R是A到B的二元关系，则R的逆是B到A的二元关系，记为 R^c 其中 $R^c=\{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\}$。
- 例1
  - ✓$A=\{0, 1, 2, 3\}$　$R=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$
  - ✓则 $R^c=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 3, 0\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$
- 整数集上的 ‘<’ 关系的逆是 ‘>’ 关系
- 集合族上的 ‘⊆’ 关系的逆是 ‘⊇’
- 注：
  - ✓（1）$xRy \Leftrightarrow yR^cx$
  - ✓（2）交换R 的关系矩阵的行和列，既得R^c的关系矩阵
  - ✓（3）颠倒R的关系图中每条弧线的箭头方向，既得R^c的关系图

逆关系

- 设A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}， R 是从A 到B 的一个关系且, R = {<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, b>, <4, d>} 则
  - ✓ R^{-1} = {<a, 1>, <c, 2>, <b, 3>, <b, 4>, <d, 4>}



$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理 (3-7.1) 设R, R_1, R_2是A到B的关系，则
  - ✓ a） $(R^c)^c=R$
  - ✓ b） $(R_1 \cup R_2)^c=R_1^c \cup R_2^c$
  - ✓ c） $(R_1 \cap R_2)^c=R_1^c \cap R_2^c$
  - ✓ d） $(\sim R)^c=\sim(R^c)$，其中 $\sim R=A\times B-R$
  - ✓ e） $(R_1-R_2)^c=R_1^c - R_2^c$

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理 (3-7.2) 设R、S分别是A到B、B到C的关系。
  - ✓ 则 $(R \circ S)^c=S^c \circ R^c$ （即使在同一个集合上,复合运算也没有交换律）
- 证：

设<c, a>是$(R \circ S)^c$ 的任一元素，

则 $\langle c,a\rangle \in (R \circ S)^c \Leftrightarrow \langle a,c\rangle \in R \circ S$

$\Leftrightarrow \exists b(\langle a,b\rangle \in R \land \langle b,c\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow \exists b(\langle c,b\rangle \in S^c \land \langle b,a\rangle \in R^c)$

$\Leftrightarrow \langle c,a\rangle \in S^c \circ R^c$

（关系也是集合，一个二维集合）

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理3(3-7.3)：R是A上的二元关系,
  - ✓ (a)R是对称的 $\Leftrightarrow$ $R=R^c$
  - ✓ (b)R是反对称的 $\Leftrightarrow$ $R \cap R^c \subseteq I_A$
-
- 证：

(a) ‘⇒’ 设R是对称

$\langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R^c$

即$R=R^c$

‘⇐’ 设 $\langle a,b\rangle \in R$ 则$\langle b,a\rangle \in R^c$

∵$R=R^c$

∴$\langle b,a\rangle \in R$，故R是对称的

(b)略

关系的闭包运算-引言

- 一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？
  - ✓ 例如，对给定集合A ={1, 2, 3}上的关系R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>}，它不具有自反性
  - ✓ 我们可以通过添加一些元素， 使得关系具备我们想要的性质
  - ✓ 在关系R 中添加<2, 2>, <3, 3>这两个元素后，所得到的新关系R′ 就具有自反性
  - ✓ 另外，还可以添加<2, 2>, <3, 3>, <1, 3>，得到的新关系R″ 仍然具有自反性
- 如何在给定关系中添加最少的元素，使其具有需要的特殊性质，这就是关系的闭包问题

关系的闭包运算-引言

数据库查询优化： 在数据库中，闭包运算可以帮助确定查询中是否存在隐含的关系，从而减少计算的复杂度。通过构建关系的传递闭包，数据库系统可以优化复杂查询的执行。

图论与网络分析： 在社交网络或其他网络结构中，闭包运算可以用来确定社交圈或网络中节点之间的连接。例如，传递闭包可以识别网络中的所有直接和间接联系。

人工智能中的推理系统： 在知识图谱或逻辑推理中，闭包运算用于推导隐含的知识。例如，传递闭包可以帮助推导两个概念之间的关系，哪怕它们之间没有直接连接。

路径规划和导航： 在路径规划或交通网络中，闭包运算可以帮助确定不同地点之间的可达性。传递闭包可以快速找出从一个节点到达另一个节点的所有可能路径。

关系的闭包运算

- 闭包的定义
- 定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果有另一关系R′满足：
  - ✓1）R′是自反的（对称的、传递的）； reflexive (symmetric, transitive)
  - ✓2）R′⊇R ；
  - ✓3）对任何自反的（对称的、传递的）关系R″，若R″⊇R, 则 R″⊇R′
- 称R′为R的自反（对称、传递）闭包，记作r(R), s(R), t(R)。
- 注：
  - ✓自反（对称、传递）闭包其实就是包含R的最小的自反（对称、传递）关系
  - ✓已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成
- 如：
  - ✓X= {a, b, c} ， R= {<a, a>, <b, b>, <b, c>} ,
  - ✓则 r(R)= {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <b, c> }

关系的闭包运算

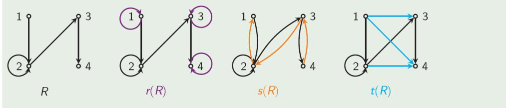
- 例子

Example

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>\}$ 是定义在 A 上的二元关系，则

1. $r(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,1>,<3,3>,<4,4>\}$;
2. $s(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$;
3. $t(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$.

- 利用关系图



关系的闭包运算

- 定理3-8.1　设R是X上的二元关系， R的自反闭包记为r(R), R的对称闭包记为s(R)，R的传递闭包记为t(R), 那么
  a. R是自反的 ⇔ r(R)=R
  b. R是对称的 ⇔ s(R)=R
  c. R是传递的 ⇔ t(R)=R
- 证明：
  - ✓1）如果R是自反的，因为R⊇R，且任何包含R的自反关系R″，有R″⊇R，故R就是满足自反闭包的定义，即 R=r(R). 反之，如果R=r(R)，由定义3-8.1，R必是自反的。
  - ✓2）和3）的证明完全类似1）

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.2：设R是X上的二元关系，则：$r(R)=R\cup I_X$
- 证明：

  设$R'=R\cup I_X$,

  ∵① ∀x∈A, <x, x>∈R′ ∴R′具有自反性

  ② R⊆R′

  ③ 设R″是自反的，且R⊆R″，显然有 $I_X\subseteq R''$

  又∵R⊆R″ ， ∴$R'=I_X\cup R\subseteq R''$

  根据定义， $R'=I_X\cup R$为R的自反闭包, 即$r(R)=R\cup I_X$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.3：设R是X上的二元关系，则：$s(R)=R\cup R^c$
- 证明：设 $R'=R\cup R^c$

  ① $(R')^c=(R\cup R^c)^c=R^c\cup(R^c)^c=R^c\cup R=R'$

  从而若<x, y>∈R′，则<y, x>∈$(R')^c$ =R′,

  所以 R′是对称的　(若<x,y>∈R′, 则 <y,x>∈R′)

  ② $R'=R\cup R^c\supseteq R$

  ③设R″是对称的，且R⊆R″, 要证 R′⊆R″

  $\langle a,b\rangle\in R'=R\cup R^c$

  $\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^c$

  $\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R$

  $\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R''$

  $\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle a,b\rangle\in R''$

  $\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R''$

  $\therefore R'=R\cup R^c\subseteq R''$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.4设R是X上的二元关系，则 $\boxed{t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i}$
- 证明：先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq t(R)$

- 归纳法：对∀n>0, $R^n\subseteq t(R)$

  i) 由定义可知 R⊆t(R)

  ii)假设 $R^n\subseteq t(R)$ 成立，要证 $R^{n+1}\subseteq t(R)$

  设$<a,b>\in R^{n+1}=R^n\circ R$

  ∴存在c使$<a,c>\in R^n$,且<c,b>∈R

  ∵由归纳假设, <a,c>∈t(R), 且 <c,b>∈t(R)

  ∵t(R)是传递的，∴<a,b>∈t(R) . 从而, $R^{n+1}\subseteq t(R)$

  由归纳原理, 对一切n，$R^n\subseteq t(R)$.从而,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq t(R)$$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$
- 设<a, b>, <b, c>是$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 的任意元素
  - ✓∴∃s, ∃t, 使得<a, b>∈R^s, <b, c>∈R^t ∴<a, c>∈$R^t \circ R^s = R^{t+s}$
  - ✓∴<a, c>∈ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, ∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的
  - ✓∵t(R)包含R的最小传递关系，∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$
  - ✓综上必有 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
- 注意：通常，将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 记作R^+， 读做“R正”

关系的闭包运算:有限集的传递闭包

- 定理3-8.5 设R是有限集A的二元关系，| A | =n, 则存在一个正整数k<=n, 使得 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{k} R^i$
- 证：

对任意<x, y>∈t(R)，即证存在一个最小的正整数k≤n，使xR^ky

(反证法)

假设最小的正整数k>n，

∵xR^ky ∴存在序列$x=a_0, a_1$, ……， $a_{k-1}, a_k=y$, 使得xRa_1, ……, $a_{k-1}Ry$

(也就是 a_0Ra_1, ……, $a_{k-1}Ra_k$)

又∵k>n

∴a_0, ……, a_k中必有两个元素相同，不妨设$a_i=a_j$， 0≤i<j≤k

∴$xRa_1, a_1Ra_2, \cdots, a_{i-1}Ra_i, a_jRa_{j+1}, \cdots, a_{k-1}Ry$成立

令 S=k-(j-i)<k， 且xR^Sy。这与k是最小的假设矛盾

关系的闭包运算:有限集的传递闭包

- 例1 设A={a, b, c, d}，给定A上的关系R为：
  - ✓R= { 〈a, b〉，〈b, a〉，〈b, c〉，〈c, d〉 }，求t(R)
- 解

$$M_R = \boxed{\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}} \qquad M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}}$$

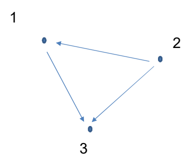
$$M_{R^3} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}}$$

$$M_{R^4} = \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

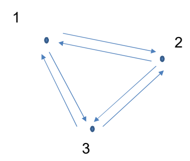
$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

- 若R是自反的，则s(R)和t(R)也是自反的
- 若R是对称的，则r(R)和t(R)也是对称的
- 若R是传递的，则r(R)是传递的，s(R)不一定传递

$r(R)= R \cup I_X$　　$s(R)= R \cup R^c$　　$t(R) = \bigcup_{i=1}^{k} R^i$

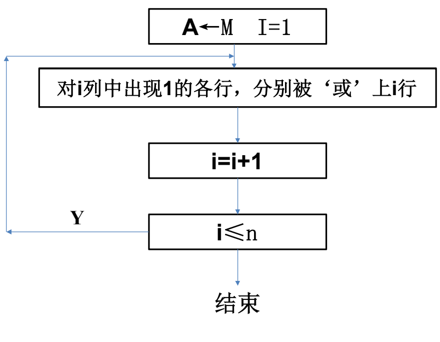


R {<1,3>, <2,3>, <2,1>}是传递的



s(R) 无<1,1>

关系的闭包运算:Warshall算法(p.124)



Warshall算法

求t(R)的矩阵Warshall算法：|X|=n, R⊆X×X,

令M_R=A R^2的矩阵为A^2，… R^k的矩阵为A^k.于是

t(R)的矩阵记作$M_{R+}=A+A^2+\ldots+A^k+\ldots$ (+是逻辑加)

(1)置新矩阵 A :=M_R ;

(2)置 i=1;

(3)对所有 j ,如果A[j,i] =1 ,则对k=1,2,…,n

A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]; /*第j行+第i行,送回第j行*/

(4) i加1;

(5) 如果i≤n, 则转到步骤(3)，否则停止。 CSDN @醉蕤

Warshall算法:例子

1 i=1 (i---列, j---行)
A[4,1]=1
1行+4行→4行

A的初值: $A=M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ → $A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ After 1

2 i=2 A[1,2]=1 ,1行+2行→1行
A[2,2]=1 ,2行+2行→2行 A不变
A[4,2]=1 ,4行+2行→4行,4行全1, A不变

3 i=3 A[1,3]=1,1行+3行→1行, 3行全0, A不变
A[2,3]=1,2行+3行→2行, 3行全0, A不变
A[4,3]=1,4行+3行→4行, 3行全0, A不变

$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ After 2 After 3

4 i=4 A[1,4]=1 ,1行+4行→1行
A[4,4]=1 ,4行+4行→4行 A不变,
最后 $A=M_{t(R)}$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ After 4

关系的闭包运算

- 定理3-8.6 设R是X上的二元关系, 则:
  - ✓a) rs(R)=sr(R) (自反对称闭包等于对称自反闭包)
  - ✓b) tr(R)=rt(R)
  - ✓c) ts(R)⊇st(R)
- 证:

a) $rs(R)=r(R\cup R^c)=I_X\cup R\cup R^c$
$= I_X\cup R\cup I_X^c\cup R^c$
$= I_X\cup R\cup (I_X\cup R)^c$
$= s(I_X\cup R)=sr(R)$

b) $tr(R) = t(I_X \cup R)$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_X\cup R)^i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_X\cup\bigcup_{j=1}^{i}R^j) = I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{i}R^i = I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i = rt(R)$$

关系的闭包运算

- 定理3-8.6 设R是X上的二元关系, 则:
  - ✓a) rs(R)=sr(R) (自反对称闭包等于对称自反闭包)
  - ✓b) tr(R)=rt(R)
  - ✓c) ts(R)⊇st(R)
- 证 c)
- 1) 若$R_1\supseteq R_2$, 则$s(R_1)\supseteq s(R_2)$, $t(R_1)\supseteq t(R_2)$

i) ∵$R_1\supseteq R_2$
∴$\langle b,a\rangle\in R_2^c\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_2\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R_1^c$
∴$R_1^c\supseteq R_2^c$,
∴$R_1\cup R_1^c\supseteq R_2\cup R_2^c$, 即$s(R_1)\supseteq s(R_2)$。

ii) n=1, $R_2\subseteq R_1$, 假设$R_2^n\subseteq R_1^n$, 则
$\langle a,b\rangle\in R_2^{n+1}\Leftrightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_2^n\wedge\langle c,b\rangle\in R_2)$
$\Rightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_1^n\wedge\langle c,b\rangle\in R_1)$
$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_1^{n+1}$

∴$R_2^{n+1}\subseteq R_1^{n+1}$, ∴$\bigcup_{i=1}^{\infty}R_1^i\supseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R_2^i$, ∴$t(R_1)\supseteq t(R_2)$

关系的闭包运算

- (继续)

∵s(R)⊇R
∴ ts(R)⊇t(R)
∴ sts(R)⊇st(R)
又∵s(R)是对称的, 故ts(R)是对称的
由定理1(b)知 ∴sts(R)=ts(R)
∴ts(R)⊇st(R)。
下举例说明上包含可以是真包含:
例 整数集I上的<关系
st(<)=s(<)=≠
ts(<)=t(≠)=I×I
∴st(<)⊆ts(<)

- 注: R*表示R的自反传递闭包, 即R*=tr(R) 读做 "R星"

集合的划分和覆盖

- 我们除了把二个集合进行相互比较外, 还常把一个集合分成若干子集讨论
- **覆盖和划分:** 定义(3-9.1): 设A为非空集,
  - ✓$S=\{S_1,\cdots,S_m\}$, $S_i\subseteq A$, $S_i\neq\varnothing(i=1,\cdots,m)$且$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m=A$, 称S是A的**覆盖**
  - ✓若再加$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m)$则称S是A的**划分**, m称为S的秩
- 例1 设A={1,2,3,4,5},

则 X={{1,2},{3},{4,5}} 划分
Y={{1,2},{2,3},{4,5}} 覆盖
Z={{1,2,3},{4}} 划分
U={{1,2,3,4,5}} 平凡划分
V={{1},{2},{3},{4},{5}} 平凡划分

U称为A的最小划分, V称为A的最大划分

集合的划分和覆盖

- 定义(3-9.2): 若$S_1=\{A_1,\cdots,A_m\}$, $S_2=\{B_1,\cdots,B_n\}$是A的两个划分
  - ✓则$S=\{A_i\cap B_j \mid A_i\in S_1\wedge B_j\in S_2$, 且$A_i\cap B_j\neq\varnothing\}$称为A的**交叉划分**
  - ✓(要求$A_i\cap B_j\neq\varnothing$,即排除空集干扰)
- **定理(3-9.1):** 交叉划分是在集合A的划分 (非空、覆盖、交空)

证明: $S=\{A_1\cap B_1,\cdots,A_1\cap B_n,\cdots,A_m\cap B_1,\cdots,A_m\cap B_n\}$

① 则$(A_1\cap B_1)\cup\cdots\cup(A_1\cap B_n)\cup\cdots\cup(A_m\cap B_n)$
$=(A_1\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))\cup\cdots\cup(A_m\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))$
$=((A_1\cup\cdots\cup A_m)\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))$
$=A\cap A$
$=A$ ∴S是A的一个覆盖

② $\forall(A_i\cap B_h),(A_j\cap B_k)\in S$

$$(A_i\cap B_h)\cap(A_j\cap B_k)=\begin{cases}\varnothing, & i\neq j,\ h=k\\ \varnothing, & i\neq j,\ h\neq k\\ \varnothing, & i=j,\ h\neq k\end{cases}$$

∴S是A的一个划分

集合的划分和覆盖

- 定义(3-9.3)：设S, S′是集合A的两个划分，若S的每一块均是S′中某块的子集，称S是S′的加细（或细分）
- 例：

  A=整数集 ，S′={{1,3,5,7…},{2,4,6…}}
  S={{1,5,9…},{3,7…},{2,4,6…}}
  则： S是S′的加细(细分)

- 定理3-9.2：任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的一种加细(细分)

等价关系和等价类

- 定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：
  (1)自反的
  (2)对称的
  (3)传递的

  则称R是A上的等价关系

- 例：
  - ✓ A={1,2,3,4}，R={⟨1,1⟩,⟨1,4⟩,⟨4,1⟩,⟨4,4⟩,⟨2,2⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩,⟨3,3⟩}是一个等价关系
- 此外
  - ✓ 数中的“相等”关系,集合中的“相等”关系,命题演算中“⇔”关系,都是等价关系
- 注：其关系图的特点：每一结点有自回路，每对结点之间要么没有弧，要么有弧而且成对出现

等价关系和等价类

- 定义(3-10.2)：设R是A上的等价关系，∀a∈A，集合 $[a]_R$={x | x∈A, aRx}称为元素a形成的R等价类
- 例： A={1,2,3,4}，
  R={⟨1,1⟩,⟨1,4⟩,⟨4,1⟩,⟨4,4⟩,⟨2,2⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩,⟨3,3⟩}
  - ✓ 上例中，A上各个元素形成的R等价类为：

    $[1]_R$={1,4} =$[4]_R$
    $[2]_R$={2,3} =$[3]_R$

等价关系和等价类

- 定理(3-10.1):设R是定义在A上的等价关系,∀a,b∈A,有
  aRb ⇔ $[a]_R=[b]_R$
- 证：‘⇐’ 由R的自反性知： a∈$[a]_R$
  根据条件$[a]_R=[b]_R$，因为a∈$[a]_R$，故a∈$[b]_R$，
  由等价类定义可知：bRa ⇒ aRb
  ‘⇒’ 根据条件 aRb 可知:
  ∀x∈$[a]_R$ ⇔ xRa又aRb ⇒ xRb ⇔ x∈$[b]_R$,
  故$[a]_R\subseteq[b]_R$
  同理可证： $[b]_R\subseteq[a]_R$
  所以， $[a]_R=[b]_R$

等价关系和等价类

- 定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合{$[a]_R$ | a ∈A}称为A关于R的商集，记为A/R
- 例：上例中,A={1,2,3,4}；

  R={⟨1,1⟩,⟨1,4⟩,⟨4,1⟩,⟨4,4⟩,⟨2,2⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩,⟨3,3⟩}

- A/R={$[1]_R$,$[2]_R$} 或 {$[4]_R$,$[2]_R$} (注意二者之间的对应)

  ={{1,4},{2,3}}

- 那么，商集是否可以认为是一种划分？

等价关系和等价类

- 定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合{$[a]_R$ | a ∈A}称为A关于R的商集，记为A/R
- 例：上例中,A={1,2,3,4}；

  R={⟨1,1⟩,⟨1,4⟩,⟨4,1⟩,⟨4,4⟩,⟨2,2⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩,⟨3,3⟩}

- A/R={$[1]_R$,$[2]_R$} 或 {$[4]_R$,$[2]_R$} (注意二者之间的对应)

  ={{1,4},{2,3}}

- 那么，商集是否可以认为是一种划分？

等价关系和等价类

- 定理(3-10.2)：集合A上的等价关系R，则商集A/R是A的一个划分
- 证明：$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

1. ∵$\forall a\in A$, aRa成立, ∴ $a\in[a]_R$,
   从而 $\cup_{a\in A}[a]_R=A$，∴A/R是一个覆盖
2. ∵$a\in[a]_R$，∴ $[a]_R=\varnothing$
3. 若$[a]_R\neq[b]_R$，则$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$
   - ✓反证法：设$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$，则$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R$
     ∴cRa，cRb（同时aRc成立）
     ∵R是传递的
     ∴aRb
   通过定理3-10.1知$[a]_R=[b]_R$ ，与前提矛盾

等价关系和等价类

- 定理(3-10.3)：集合A的任一划分S确定了A上的一个等价关系R，满足A/R=S.
- 证明： 设$S=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$，定义关系R：aRb，当且仅当a,b在S的同一分块中，现证R是等价关系
  1. $\forall a\in A$，a与a在同一块中，∴aRa ，自反性成立
  2. $\forall a,b\in A$，a与b在同一块中，则b与a也在同一块
     即 aRb⇒bRa，∴对称性成立
  3. $\forall a,b,c\in A$，若a与b在同一块，b与c在同一块，
     ∵$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j)$，即b属于且仅属于一个分块
     ∴a与c在同一块，即aRb∧bRc⇒aRc
     ∴传递性满足
     ∴R是A的一个等价关系，且A/R=S

$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

等价关系和等价类

- 上述定理中关系R的具体构造
  ---定义关系R：aRb,当且仅当a,b在S的同一分块中

例：A={1,2,3,4} ， S={{1,4},{2,3}}
则 R_1={1,4}×{1,4}={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>}
 R_2={2,3}×{2,3}={<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}
则 $R=R_1\cup R_2$
={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}

一般地，$R=A_1\times A_1\cup\cdots\cup A_n\times A_n$, 称为由S诱导的等价关系

等价关系和等价类

- 定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合$\{[a]_R \mid a\in A\}$称为A关于R的商集，记为A/R

- 例：上例中，A={1,2,3,4}；

  $\boxed{R=\{<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}}$

- $A/R=\{[1]_R, [2]_R\}$ 或 $\{[4]_R, [2]_R\}$ (注意二者之间的对应)

  $\boxed{=\{\{1,4\},\{2,3\}\}}$

- 那么，商集是否可以认为是一种划分？

等价关系和等价类

- 上述定理告诉我们
  - ✓划分与等价关系本质上相同
  - ✓唯一区别是关系可以在空集上定义，划分则不能

等价关系和等价类

- 定理(3-10.4)设R_1，R_2是非空集合上的等价关系，则
  $R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$

- 证明：
  '⇒' 显然!!!
  '⇐' 若$A/R_1=A/R_2$，
  ∴$\forall a\in A$，$[a]_{R1}\in A/R_1$，$\exists c\in A$，使 $[a]_{R1}=[c]_{R2}$
  ∴$\forall a,b\in A$
  若$<a,b>\in R_1 \Leftrightarrow a\in[a]_{R1}\wedge b\in[a]_{R1}$
  $\Leftrightarrow a\in[c]_{R2}\wedge b\in[c]_{R2} \Rightarrow <a,b>\in R_2$
  ∴$R_1\subseteq R_2$， 同理可证$R_2\subseteq R_1$
  ∴$R_1=R_2$

相容关系

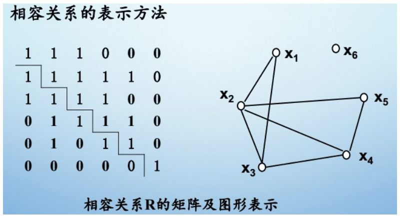
- 定义(3-11.1)：设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系

- 例：
  - ✓a) 所有等价关系是相容关系
  - ✓b) A= {a,b,c,d}，R= {<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>}

  - ✓朋友关系，是相容关系.

相容关系:关系矩阵与关系图

- 关系矩阵与关系图
  - ✓1）仅给出关系矩阵的左下角就可描写相容关系（不包括主对角线元素）
  - ✓2）相容关系的关系图可简记（用无向边代替二条有向边、不用自回路）



相容关系

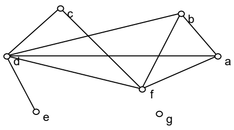
A={a,b,c,d}
R={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>}

- 定义(3-11.2)：设R是集合A的相容关系，集合C是A的子集，满足 $\forall x,y\in C$ ，则xRy，则C称为由R产生的相容类
  - ✓例如，上例中{a，b}，{c}，{d}，{a}，{b}都是（紧密朋友圈）

- 定义(3-11.3)：设R是集合A的相容关系，C是由R产生的相容类，如果C不真包含于其他任何相容类，则称C为最大相容类
  - ✓例如，上例中{a，b}，{c}，{d}都是

相容关系

- 注：
  - ✓1）A上的相容关系R的最大相容类集合$\{A_1,\cdots,A_m\}$构成A的一个覆盖 **（未证明的定理）**
  - ✓2）最大相容类在关系图上反映为一个完全图
  - ✓完全图：图中每一对结点间都有边相连（紧密朋友圈：任意两人都是朋友）
- 最大相容类的求法（利用关系图）
  - ✓求出图中所有最大完全图，每个完全图代表了一个最大相容类



  - ✓**所有最大相容类为{a, b, d, f}，{c, d, f, }，{d, e}，{g}}**

相容关系

- 定义(3-11.4)：在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$（A关于R的覆盖）

- A上的相容关系R确定一个覆盖，即$C_R(A)$

相容关系

- 定理(3-11.2)A上的覆盖$\{A_1,\cdots,A_n\}$确定一个相容关系：

$$R= A_1\times A_1\cup\cdots\cup A_n\times A_n$$

证：现证 R 是一个相容关系

① $\forall a\in A$　$\exists i$，$a\in A_i\ (1\leq i\leq n)$

$\therefore \langle a,a\rangle\in A_i\times A_i\subseteq R$

即 aRa　∴自反性成立

② $\forall a,b\in A$，　若$\langle a,b\rangle\in R$，

$\therefore \exists i\ (1\leq i\leq n)$，$\langle a,b\rangle\in A_i\times A_i$　（全关系：自反，对称，传递）

$\therefore$ $\langle b,a\rangle\in A_i\times A_i$，$\langle b,a\rangle\in R$，

$\therefore aRb\Rightarrow bRa$，对称性成立

∴R是相容关系

相容关系

- 定理（3-11.3）：集合A上相容关系R与覆盖存在一一对应

序关系

- 在一个集合上，考虑元素的次序关系
- 定义(3-12.1)：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的偏序关系，序偶<A, R>称为偏序集
- 注：
  - ✓①常把偏序关系R记为"≼"即小于等于。则<A, R>记为<A, ≼>, aRb记为a≼b，这里符号"≼"表示了一种更为普遍的"小于等于关系"即偏序关系
  - ✓②例如，**实数集R的"小于或等于"关系是偏序关系**
- 例：A={2, 3, 6, 8}，D表示整除关系

  则 D={<2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <8, 8>, <2, 6>, <2, 8>, <3, 6>}

  经验证，D为偏序关系

  (2≼6: 2整除6，前者出现在分母上)

序关系：覆盖

- 定义(3-12.2):在偏序集合<A, ≼>中，如果

  x, y∈A， x ≼ y， x≠y，

且没有其他元素z满足x ≼ z， z ≼ y，称**y盖住x**，或**y覆盖x**

盖住关系集合：COV A={<x, y>|y盖住x}

- 例：正整数集合上的整除关系中
  - ✓4和6覆盖2
  - ✓但8、12 等均不覆盖2
- 例：A={2, 3, 6, 8}，D表示整除关系

  D={<2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <8, 8>, <2, 6>, <2, 8>, <3, 6>}
  - ✓上例中D的盖住关系集合为COV A = {<2, 6>, <3, 6>, <2, 8>}

序关系：可比

- 设R是非空集合A上的偏序关系，∀x, y∈A, 如果x ≼ y 或 y ≼ x，则称 **x与y可比**
- 例：正整数集合上的整除关系中
  - ✓2与4可比, 6与3可比, 4和3不可比
- A = {1, 2, 3, 4} 的幂集上的包含关系中
  - ✓{1} 和{1, 2}可比
  - ✓{1} 和{2}不可比
  - ✓{1, 2}和{1, 3, 4}不可比

序关系：哈斯图

- 在偏序集的关系图中，许多有向边可以不用显示出来
  - ✓例如，偏序关系满足自反性，所以每个结点都有环，因此可以不必显示这些环;
  - ✓又如，偏序关系满足传递性，我们不必显示由于传递性而必须出现的边; (只认覆盖，不许越级汇报)
  - ✓另外，由于其反对称的特性，我们可以规定边的方向，从而省去箭头.
- 按照以上方法对关系图进行简化而得到的图形叫做**哈斯图**,
  - ✓哈斯图对于判断元素之间的先后顺序以及确定特殊元素非常方便

序关系：哈斯图

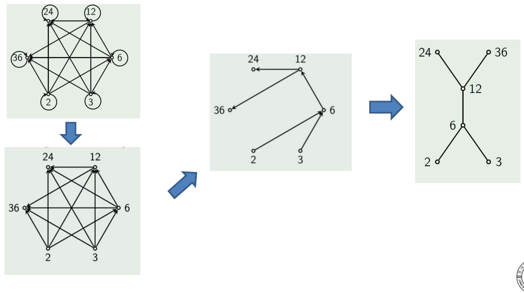
- 偏序集合用图表示，作图规则为:
  - ✓小圆圈表示元素
  - ✓如果x≼ y，则将y画在x之上
  - ✓如果<x, y> ∈CovA，则在x，y之间无向连接
- 所得的关系图称为哈斯图（hasse图）

序关系：哈斯图

- 设R是非空集合A 上的偏序关系，使用如下方法对R 的关系图进行简化：
  - ✓取消每个结点的自环；(因自反性)
  - ✓取消所有由于传递性出现的边. 即若x→y, y→z, 则去掉x→z 这条边;(因传递性)
  - ✓重新排列每条边，使得边的箭头方向全部向上，然后去掉这些箭头.(因反对称性)
- 以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图，这个图称为偏序关系R的哈斯图(Hasse diagram)

序关系：哈斯图

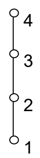
- 设A = {2, 3, 6, 12, 24, 36}，“≼”是A 上的整除关系R



序关系：练习

P={1, 2, 3, 4}

- <P, ≤>的哈斯图为

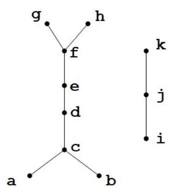


序关系：链与反链

- 定义(3-12.3)：设<A, ≼ >是一个偏序集合，B⊆A，∀a, b∈B，都有a≼ b或b≼ a（也即a与b是可比较的），则称B为链；若a, b总是不可比，称B为反链
- 我们约定，当B只有唯一元素时，B既是链，又是反链

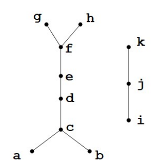
链与反链:例子

- 下图是某一偏序集<A, ≼> 的哈斯图，其中 A={a, b, …, k}



链与反链:例子

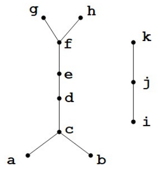
- 判断1：B_1={a, c, d, e}是一条长为4的链；
  - ✓这四个元素互相之间是可比的；并且也是覆盖的，e覆盖d，d覆盖c，c覆盖a；
- 判断2：B_2={a, e, h}是一条长为3的链；
  - ✓a, e, h之间都是可比的，但没有覆盖关系，即他们之间都有其它元素相隔，这也是链；
  - ✓集合中有 n个元素，且这些元素可比，那么这个集合就是一个长为n的链 ，中间可以隔着其它元素；
- 判断3：B_3={b, g}是一条长为2的链；
  - ✓b, g之间隔着4个元素，但这个集合中元素是可比的，也是链，长度为元素个数；



链与反链:例子

- 判断4: B_4={g, h, k} 是一条长为3的反链;
  - ✓集合中的元素，都不可比，那这个集合就是反链;
  - ✓如果一部分可比，另一部分不可比，那这个集合什么都不是，既不是链，也不是反链;
- 判断5: B_5={a} 是一条长为1的链，同时也是一条长为1的反链;
  - ✓如果集合中只有一个元素，那么该集合既是链，又是反链，长度为1;
- 判断6: B_6={a, b, g, h} 既不是链，也不是反链;
  - ✓g, a是可比的，h, a是可比的，g, b是可比的，h, b是可比的，g, h不可比，a, b不可比，因此其既不是链，也不是反链;

问: B={a, c, b} ?
既不是链，也不是反链;
只能沿着从下到上的路径去抓一条链



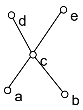
序关系:全序关系

- 定义（3-12.4）: 在偏序集合<A, ≼ >中，如果A是一个链，则称<A, ≼ >为全序集合或线序集合，此时≼称为全序关系或线序关系

  (注意名词区分: 全关系E_A)
- 例:
  - ✓a）定义在自然数集合N上的“小于等于”关系“≤”就是一个全序关系。
  - ✓b）{1, 2, 3, 6}的整除关系不能构成一个线序集合。
- 例:
  - ✓P={∅ ，{a}, {a, b}, {a, b, c}}上的包含于关系“⊆”，可验证<P, ⊆ >是一个全序集合
- 可见，全序集合的哈斯图是一竖立的结点序列，每相邻的结点用一条弧连接

序关系: 极大元与极小元

- 定义（3-12.5）: 设<A, ≼ >是一偏序集合，B是A的子集，
  - ✓若b∈B, 且B中不存在元素x, 使b≠x且b≼ x，称b∈B是B的极大元
  - ✓若b∈B, 且B中不存在元素x, 使b≠x且x≼ b，称b∈B是B的极小元
- 例



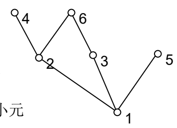
(无上行空间) (无下行空间)

  - ✓则A= {a, b, c, d, e} 极大元为d, e, 极小元为a, b。B={c, a, b}则极大元素为c, 极小元素为a, b
- **可见，极大元和极小元可以不唯一。其实也可以不存在，例如<I, ≤>设B={i | i∈N}.**
- **但对于非空有限偏序集合，其极大元和极小元总是存在**

序关系: 最大元与最小元

- 定义(3-12.6): 设<A, ≼ >是一偏序集合，B是A的子集，
  - ✓若b∈B, 且对每一元素x∈B, x≼ b, 则称b为B的最大元
  - ✓若b∈B, 且对每一元素x∈B, b≼ x, 则称b为B的最小元
- 例 A={1, 2, 3, 4, 5, 6} 则<A, 整除>哈斯图为

最大元: 无上行空间, 但可下行至任一点
最小元: 无下行空间, 但可上行至任一点

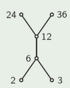


  - ✓a) B={1, 2, 3, 6}，则6是B的最大元，1是B的最小元
  - ✓b) B={2, 3, 6}，则6是B的最大元，B没有最小元
  - ✓c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}，则B没有最大元，1是B的最小元
- 可见，子集的最大元可以不存在，例如<I, ≤>
- 设B={i | i∈N}

最大元、最小元、极大元和极小元

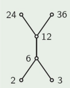
- B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中;
- b是B的最大元，B中所有的元素都比b小;
- b是B的最小元，B中所有的元素都比b大;
- b是B的极大元，B中没有比b大的元素;
- b是B的极小元，B中没有比b小的元素.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

Example



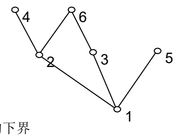
	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
极大元	12	2,3	24,36	12
极小元	6	2,3	24,36	2,3

序关系

- 定理(3-12.1): 设<A, ≼ >是一偏序集合，且B⊆A则B若有最大（最小）元，则最大（最小）元是唯一的
- 证: （反证法）
  - ✓设 a, b都是B的最大元，那么a≼ b, b≼ a，由反对称性得a=b

序关系：上界与下界

- 定义（3-12.7）设<A，≼>是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓ 如有**a∈A**，且∀x∈B, x ≼ a，则称a为B的上界
  - ✓ 如有**a∈A**，且∀x∈B, a ≼ x，则称a为B的下界
- 例： A={1,2,3,4,5,6} 则<A,整除>哈斯图为



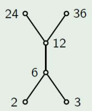
  - ✓ a) B={1,2,3,6}，则6是B的上界，1是B的下界
  - ✓ b) B={2,3,6}，则6是B的上界， 1是B的下界。
  - ✓ c) B={1,2,3,4,5,6}，则B的上界不存在， 1是B的下界
- 可见，B的上界（下界）未必是B的元素。上界和下界可以不存在，也可以不唯一

序关系：上界与下界

- 定义(3-12.8)：设<A，≼>是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓ 若a是B的上界，且对B的所有上界y，有a≼y，那么称a为B的最小上界，记为 LUB B
  - ✓ 若a是B的下界，且对B的所有下界y，有y≼a，那么称a为B的最大下界，记为 GLB B

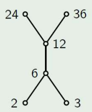
序关系：上界与下界

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
上界	12,24,36	6,12,24,36	无	12,24,36
上确界	12	6	无	12

Example



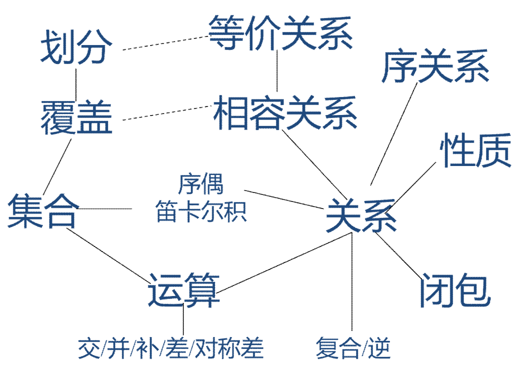
	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
下界	2,3,6	无	2,3,6,12	无
下确界	6	无	12	无

序关系：良序关系

- 定义(3-12.9)：若R是A上的一个偏序关系，且A的每个非空子集都有最小元素，则称R是A上的良序关系，序偶<A,R>称良序集合
- 例：
  - ✓（a）每一个有限的线序集合都是良序集合
  - ✓（b）<I,≤>是良序集合

序关系：良序关系

- 定理(3-12.2)：每一个良序集合，一定是全(线)序集合
- 证：
  - ✓ 设<R,≼>为良序集合，
  - ✓ 则对于任意两个元素a,b∈R可构成子集｛a,b｝，必存在最小元素不是a就是b，
  - ✓ 因此一定有a≼b或b≼a. 所以<R,≼>为全序集
- 定理(3-12.3)：每一个有限的全(线)序集合都是良序集合
- 证：
  - ✓ 设A=｛a_1, a_2, …, a_n｝，令〈A,≼〉是全序集合，现在假定〈A,≼〉不是良序集合，那么必存在一个非空子集B⊆A，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找出两个元素x与y是无关的，由于〈A，≼〉是全序集，x,y∈A，所以x,y必有关系，得出矛盾，故〈A，≼〉必是良集合



133

谢谢

Thanks!

134

离散数学10.17

微信扫码签到