# 集 合 论

3-1 集合论的基本概念

3-2 集合上的运算

3-3 * 包含排斥原理

3-4 序偶与笛卡尔积

# 3-1　集合论的基本概念

## 一、**集合的概念**

集合是作为一次论述的事物的全体，在某些场合有时又称为**类**、**族**或**搜集**。

集合用大写英文字母*A*，*B*，*C*，…等表示。组成集合的每个事物称为此集合的**元素**，

集合中的元素用小写英文字母*a*,*b*,*c*, …表示。 *若a*是*A*中的元素，记为：$a \in A$。

## 1．集合的表示法

### ① 列举法

例：偶数集合 $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

②**描述法**：用谓词描述出集合元素的特征来表示集合。

例1：$A = \{x | x = a \vee x = b\}$（$A=\{a,b\}$）

例2：$A$为偶数集合 $A=\{x | \exists y(y \in I \wedge x=2y)\}$ ($I$表示整数集)

例3：永真式集合 $A=\{p | p \in wff \wedge p \Leftrightarrow T\}$

一般地，$S = \{a | P(a)\}$ 表示$a \in S$当且仅当$P(a)$是真。

## 2．注：

a) 集合中的元素可以是集合。例：$A = \{a,b,c, \{a,b,c\}\}$

b) 仅含一个元素的集合称为单元素集合。

c) 应把单元素集合与单元素区别开来。

例：$\{a\}$与$a$不同。$\{a\}$表示仅以$a$为元素的集合。$\{\{1, 0\}\}$与$\{1, 0\}$不同，$\{\{1, 0\}\}$表示仅以$\{1, 0\}$为元素的集合，$\{1, 0\}$是$\{\{1, 0\}\}$的元素。

## 3．集合的基数

含有有限个元素的集合称有限集合，否则称为无限集。有限集合的元素个数称为该集合的基数或势，记为$|A|$。

例：$A=\{a,b\}$,则$|A|=2$,

$|\{A\}|=1$;　　$B=\{a,b\}$,　　$|B|=2$。

## 4．集合相等公理

**外延性公理**：集合$A$，$B$相等，当且仅当$A$与$B$有相同的元素

[即 $iff\ \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$]

故:

①列举法中，元素的次序无关紧要，即$\{x,y,z\}$与$\{z,x,y\}$相等。

②元素的重复出现无关紧要，即$\{x,y,x\},\{y,x\},\{x,x,x,x,y\}$相等。

③集合的表示不唯一，如$\{x|x^2=1\}$与$\{-1,1\}$表示相同的集合。

# 二、集合间的包含关系

## 1. 子集与真子集

**定义(3-1.1)**：设$A$和$B$是集合，若$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$,那么$A$是$B$的子集，记为$A\subseteq B$。读作‘$B$包含$A$’或‘$A$是$B$的子集’，又称“$B$是$A$的扩集”。

**定义(3-1.2)**：若$A\subseteq B$，且$A\neq B$，称$A$是$B$的真子集，记$A\subset B$。读“$B$真包含$A$”。即$A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\notin A\wedge x\in B)$。

## 2. 全集

我们讨论的元素和集合是限于某一论述区域中，此论述区域称为**全集*U***。虽然有时这个论述区域未明晰给出。

**定理**：任意集合$A\subseteq U$。

证：$\because\forall x(x\in A\rightarrow x$U)为真，$\therefore$定理1正确。 #

**定理 (3-1.1 )**： $A$=B等价于$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

证：$\because A = B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$，$\therefore$定理正确。 #

**推论**： $A\subseteq A$ （$\because A=A$，$\therefore A\subseteq A$ ）

**定理**：若$A \subseteq B$，且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

**证**：$\because A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$

$\therefore \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in C) \Rightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$

即定理3正确。 #

## 3. 空集

**定义 (3-1.3)**：没有元素的集合称为空集，记为$\Phi$。

**定理 (3-1.2)**：对任意集合A，$\Phi \subseteq A$。

**证**：$\because \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in A)$永真，

$\therefore \Phi \subseteq A$

**注**：$\Phi$与$\{\Phi\}$不同，前者没有元素，后者是以空集为一个元素的集合。

**定义 (3-1.5)** 给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成 的集合，称为集合A的幂集,记为$\rho$(A) 。

举例:

**例1**：试求出集合{p,q}的幂集。

**解**：Φ，{p},{q},{p,q}是{p,q}的子集,

∴{Φ，{p},{q},{p,q}}是{p,q}的幂集。

**定理 (3-1.3)**：集合A有n个元素,则其幂集有$2^n$个元素。

证明:

从幂集的定义出发，根据乘法原理，易得。

幂集的编码表示法：$\rho(A)=\{S_i, i\in J\}$ 其中J={00…0, … ,11…1}

返回

# 3-2　集合上的运算

## 一、 并、交、差运算

1． **基本概念**（设$A$和$B$为集合）

**定义(3-2.1)** $A$和$B$的并：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$

**定义(3-2.2)** $A$和$B$的交：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$$

**定义(3-2.3)** $A$和$B$的差：

$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$，也称为相对补

文氏图表示?

## 2. 基本性质

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

即交、并运算是可交换和可结合的。

**证**：b) $\forall x \in U$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$，（$\cap$的定义）

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$（$\wedge$的可交换性）

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$,

$\therefore \forall x (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A)$，即$A \cap B = B \cap A$。 #

**定理 (3-2.1)**：（分配律）设A、B、C为任意三个集合，则

$a)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$b)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

**证**：b) $\forall x\in U$

$$
\begin{aligned}
x\in A\cap(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\quad(\wedge\text{在}\vee\text{上可分配})\\
&\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}
$$

$\therefore A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

#

**定理 (3-2.2)**：（吸收律）设A、B为任意两个集合，则

a) $A\cup(A\cap B)=A$

b) $A\cap(A\cup B)=A$

**证明**：a) $A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)$

$$=A\cap(E\cup B)$$

$$=A$$

b) $A\cap(A\cup B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$

$$=A\cup(A\cap B)$$

$$=A$$

（**注**：也可以利用谓词性质证明。类似定理3-2.1的证明方法。）

**例**: 设A,B,C,D是任意集合,则

**a)** 若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cup C\subseteq B\cup D$

b）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cap C\subseteq B\cap D$

**证**: 对b）

$$\because x\in(A\cap C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C$$
$$\Rightarrow x\in B\wedge x\in D$$
$$\Leftrightarrow x\in(B\cap D)$$

$\therefore A\cap C\subseteq B\cap D$。

**定理（3-2.3）**设A,B是任意集合,则

a） $A\subseteq B$, iff $A\cup B=B$;

b） $A\subseteq B$, iff $A\cap B=A$

**证**: 对b）

$\because A\subseteq B$,又$A\subseteq A$,

$\therefore A\cap A\subseteq A\cap B$，即$A\subseteq A\cap B$，

又$\because A\cap B\subseteq A$，

$\therefore A=A\cap B$。

## 二、补运算

### 1. 定义

**定义 (3-2.4)** 设U是全集，A的补集为：

$$\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

也称绝对补。

### 2. 性质

设A为任意集合，则

a) $A \cup \sim A = U$

b) $A \cap \sim A = \Phi$

c) $\sim \Phi = U$

d) $\sim U = \Phi$

e) $\sim \sim A = A$

## 3. 德•摩根定律

**定理 (3-2.4)**设A、B为任意两个集合，则:

a) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

b) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

**证**：b)

$\because(\sim A\cup\sim B)\cap(A\cap B)=(\sim A\cap A\cap B)\cup(\sim B\cap A\cap B)$

$=\Phi\cup\Phi$

$=\Phi$,

$(\sim A\cup\sim B)\cup(A\cap B)=(\sim A\cup\sim B\cup A)\cap(\sim A\cup\sim B\cup B)$

$=U$

$\therefore\ \sim A\cup\sim B$是$A\cap B$的补，

但$\sim(A\cap B)$也是$A\cap B$的补，由补的唯一性，

$\therefore\ \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$。

#

**定理 (3-2.5)**设A、B为任意两个集合，则：

$$a)A-B=A\cap\sim B$$

$$b)A-B=A-(A\cap B)$$

**证明**：$b)A-(A\cap B)=A\cap\sim(A\cap B)$

$=A\cap(\sim A\cup\sim B)$

$=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)$

$=\Phi\cup(A\cap\sim B)$

$=A-B$ #

# 上节内容复习

- 集合的基本概念
  - 集合/子集/真子集/全集/幂集
- 集合的运算
  - 交
  - 并
  - 补
  - 差

**定理 (3-2.6)**设A、B、C为任意三个集合，则：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

**证明**： $A\cap(B-C) = A\cap(B\cap\sim C)$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

$(A\cap B)-(A\cap C)$

$$= (A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$$

$$=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$$

$$= (A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$= \Phi\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

所以：$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。

#

**定理 (3-2.7)**设A、B为任意两个集合,若$A\subseteq B$，则:

$$\text{a) } \sim B\subseteq \sim A$$

$$\text{b) } (B-A)\cup A=B$$

**证明**：a)若$x\in A$，则$x\in B$。

因此$x\notin B$必有$x\notin A$。

故$x\in \sim B$必有$x\in \sim A$，即$\sim B\subseteq \sim A$。

b) $(B-A)\cup A=(B\cap\sim A)\cup A$

$= (B\cup A)\cap(\sim A\cup A)$

$= (B\cup A)\cap U$

$= B\cup A$

因为$A\subseteq B$，就有$B\cup A=B$。因此$(B-A)\cup A=B$。 #

# 三、对称差

## 1．定义

**定义(3-2.5)**：集合A和B的对称差为集合S，其元素或属于A，或属于B，但不能既属于A又属于B，记为$A\oplus B$，即 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。或$\{x|x\in A \triangledown x\in B\}$。

## 2．性质

① $A\oplus B=B\oplus A$

② $A\oplus \Phi=A$

③ $A\oplus A=\Phi$

④ $A\oplus B=(\sim A\cap B)\cup(A\cap \sim B)$

⑤ $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

返回

# 3-3 * 包含排斥原理

## 1. 有限集基数的有关结果

**定理**：

a) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$　　　　$(|A\cap B|\le \min(|A|,|B|)$

b) $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$

c) $|A-B|\ge|A|-|B|$ $(\because |A-B|+|B|=|A\cup B|\ge|A|)$

a)**证明**：①当$A\cap B=\Phi$,则$|A\cup B|=|A|+|B|$，a)成立。

②当$A\cap B\ne\Phi$,

则：$|A|=|A\cap(B\cup\sim B)|$

$=|A\cap\sim B|+|A\cap B|$,

$|B|=|B\cap\sim A|+|A\cap B|$

$\therefore |A|+|B|=|A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|+|A\cap B|$

$=|A\cup B|+|A\cap B|$　　　$(|A\cup B|=|A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|)$

$\therefore |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ 。　　{**包含排斥原理**}

**例**：设某班有60名同学，其中班足球队员有28名，篮球队员有15名。若有25名同学没有参加这两个队，问同时参加这两个队的队员有多少名？

**解**：设A为足球队员集合，B为篮球队员集合，则

$$|A\cup B|=60-25=35,$$

$$\therefore |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=28+15-35=8$$

## 2. 包含n个集合的包含排斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n|$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} |A_i| + \Sigma_{1\le I<j\le n}|A_i \cap A_j| + \Sigma_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n|$$

特别地,n=3, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2|$

$-|A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

**证明**:当n=2时,结论成立（前面已证明）。

设n-1时,结论成立,则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n|$$

$$= |\cup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n|$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n}|A_i| - \Sigma_{1\le i<j\le n-1}|A_i \cap A_j| + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}|\cap_{i=1}^{n-1} A_i| -$$

$$[\Sigma_{i=1}^{n-1}|A_i \cap A_n| - \Sigma_{1\le i<j<n-1}|A_i \cap A_j \cap A_n| + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-2}|\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n|]$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n}|A_i| - \Sigma_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_n| + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}|\cap_{i=1}^{n} A_i|$$

例2:试决定在1到100之间能被2,3,5中某一数整除的个数。

**解**：$A_1$表示1到100之间能被2整除的整数集，

$A_2$表示1到100之间能被3整除的整数集，

$A_3$表示1到100之间能被5整除的整数集，

则：$|A_1|=100/2=50$，$|A_2|=100/3=33$，$|A_3|=100/5=20$，

$|A_1 \cap A_2|=100/(2\times 3)=16$，$|A_1 \cap A_3|=100/(2\times 5)=10$，

$|A_2 \cap A_3|=100/(3\times 5)=6$，

$$\begin{aligned}\therefore |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3| \\ &\quad -|A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 50+33+20-16-10-6+3 \\ &= 74\end{aligned}$$

返回

# 3-4 集合的笛卡尔积

## 1. 序偶

两个元素$a_1,a_2$组成的序列记作$<a_1,a_2>$,称为**序偶**。

**定义 (3-4.1)**：二个序偶$<a,b>$和$<c,d>$相等，当且仅当$a=c$且$b=d$, 即

$$<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \wedge b=d。$$

推广：$<<a_1, a_2>,a_3>$称为三元组，记为$<a_1,a_2,a_n>$。

$<<a_1,\ldots,a_{n-1}>,a_n>$称为n元组，记为$<a_1,a_2,\ldots,a_n>$。

**注**： ①二元组的元素次序是重要的。例:$<2,3>\neq<3,2>$ 。

②n元组相等，当且仅当对应的元素分别相等。

③$<<a_1, a_2>,a_3>\neq<a_1,<a_2,a_3>>$，后者不是三元组

## 2. 笛卡尔积

**定义** (**3-4.2**)：设任意两个集合A和B，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，由所有这样的序偶组成的集合，称为集合A和集合B的笛卡尔积， 记为$A\times B$。 即：$A\times B=\{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$

## 3. 举例

例1：设$A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{p,q\}$, $E=\{0\}$。

则：$A\times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\}$,

$A\times \Phi = \Phi$,

$(A\times E)\times E=\{<a,0,0>,<b,0,0>\}$

$(A\times B)\cap(B\times A)=\Phi$

另外，（$A\times B$）$\times C=A\times$（$B\times C$）吗? **NO**

## 二、性质

**笛卡尔积不符交换律和结合律。**

**定理(3-4.1)**：设A、B、C为任意三个集合，

则：

$$\text{a)}\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$\text{b)}\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$\text{c)}\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

$$\text{d)}\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

**证明**：（d）设 $<x,y>$ 是 $(A\cap B)\times C$ 的任一元素，

$$<x,y>\in(A\cap B)\times C$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow<x,y>\in A\times C\ \wedge\ <x,y>\in B\times C$$

$$\Leftrightarrow\ <x,y>\ \in(A\times C)\cap(B\times C)$$

$\therefore(A\cap B)\times C=A\times C\cap B\times C$。(a),b),c)的证明类似) #

**定理(3-4.2)**:若$C\neq\Phi$,

则: $\mathbf{A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)}$

$\mathbf{\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)}$ 。

**证明**: 必要性: 若$y\in C$, 设$A\subseteq B$, 有

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in A\times C &\Rightarrow (x\in A\wedge y\in C)\\
&\Rightarrow (x\in B\wedge y\in C)\\
&\Rightarrow <x,y>\in B\times C
\end{aligned}
$$

因此 $A\times C\subseteq B\times C)$。

充分性: 若$C\neq\Phi$, $A\times C\subseteq B\times C$, 取$y\in C$, 则有

$$
\begin{aligned}
x\in A &\Rightarrow x\in A\wedge y\in C\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\\
&\Rightarrow <x,y>\in B\times C\\
&\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C\\
&\Rightarrow x\in B
\end{aligned}
$$

因此 $A\subseteq B$

类似可证: $A\subseteq B\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$ 。 #

**定理(3-4.3)**：设A,B,C,D为四个非空集，

则：$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件为$A\subseteq C$, $B\subseteq D$。

**证明**：必要性：若$A\times B\subseteq C\times D$，对任意$x\in A$和$y\in B$有

$$
\begin{aligned}
x\in A\wedge y\in B &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B \\
&\Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D \\
&\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D
\end{aligned}
$$

即：　$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$。

充分性：若$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$，设任意$x\in A$和$y\in B$有

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle\in A\times B &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \\
&\Rightarrow x\in C\wedge y\in D \\
&\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D
\end{aligned}
$$

因此　$A\times B\subseteq C\times D$。　#

返回

# 关 系 论

# 3-5 关系及其表示

日常生活中关系普遍存在，数学上可以用序偶来表达：

若有xRy，可记为<x,y> ∈ R，由此可见，关系R是序偶的集合。

**定义（3-5.1）** 任一序偶的集合确定了一个二元关系R，R中任一序偶<x,y>可记为<x,y> ∈R或xRy。例(5,7)∈<,或5<7。

**定义（3-5.2）** 二元关系R中，由所有x组成的集合叫做关系R的**前域**记作 dom R={x|∃y(<x,y>∈R)}。由所有y组成的集合叫做关系R的**值域**， Ran R={y|∃x(<x,y>∈R)} 。R的前域和值域统称为R的**域**，记为FLDR=dom(R)∪ran(R)。

**例1**.设A={$x_1$， …， $x_7$},B={$y_1$， …， $y_6$}

R={<$x_3$,$y_1$> ，<$x_3$,$y_2$> ，<$x_6$,$y_2$> ，<$x_5$,$y_6$>}

解：dam(R)={$x_3$,$x_6$,$x_5$}, ran(R)={$y_1$,$y_2$,$y_6$}

## 关系与笛卡儿积?

关系中序偶的元素分别来自于两个不同的集合，因此：关系其实就是这两个集合的笛卡儿积的子集。

**定义（3-5.3）** X×Y的两个平凡子集X×Y称为全域关系，空集称为空关系。

当X=Y时，关系R是X×X的子集，称R为X上的二元关系。

**例** 设X={1，2，3，4}，求X上的关系>。

解：

**定义（3-5.4）** 设R是X上的二元关系，且R={<x,x>|x属于X}，则称R是X上的恒等关系，记为Ix。

**例** X={1，2，3}，则Ix={<1,1>,<2,2>,<3,3>}。

## 关系的运算

**定理5.1** 关系的交，并，补，差仍是X到Y的关系。

# 关系的表示

## 1.关系矩阵

设集合x={x1,...,xm}，y={y1,...,yn},R是从X到Y的一个二元关系。则对应于关系R有一个**关系矩阵M**R=(rij)m×n,其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1,<x_i,y_i>\in R\\0,<x_i,y_j>\notin R\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

## 2. 关系图

设集合x={x1,...,xm}，y={y1,...,yn},R是从X到Y的一个二元关系。用小圈表示元素,

i)若<xi,yi>∈R,则从结点xi画一有向弧，箭头指向yi。

ii)否则，结点之间没有线段连接。

这样的图称为**关系图**。

例：设$A=\{a_1，a_2\}$ $B=\{b_1,b_2,b_3\}$

$R=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_1>,<a_2,b_3>\}$

解：

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

关系图

**指出**：

设R是X到Y上的关系，则R是X×Y的子集，由有X×Y是（XUY）×（XUY）的子集，所以R也是（XUY）×（XUY）的子集。因此，以后的讨论仅**局限于同一集合上的二元关系**。

# 3-6　关系的性质

**自反性（设R是A上的二元关系）**

**定义（3-6.1）　若∀x∈A，均有xRx，那么称R是自反的。**

**例 A=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}为自反关系。**

**注：1）A上关系R是自反的⇔∀x（x∈A→xRx）**

**2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。**

**在关系图中，反映为每结点都有自回路。**

**反自反性**

**定义 (3-6.4)若∀x∈A，均有$x\not R x$，那么称R是反自反的。**

**如例 A={1,2,3} R={<1,2>,<2,3>}。**

**注： 1) A上的关系R是反自反的⇔∀x（x∈A→$x\not R x$)**

**2) 在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。**

**在关系图中，反映为每结点都无自回路。**

## 对称性

**定义(3-6.2)** 如果对于每个x,y属于A,每当xRy,都有yRx,则称A上的关系R是**对称的**。 例 A={1,2,3}，R={<1,2>,<2,1>,<3,3>}

注：1) 定义$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$

2) 关系矩阵是对称矩阵。关系图中，若有弧则必是成对出现。

## 反对称性

**定义 (3-6.5)**如果对于每个x,y属于A,每当xRy和yRx,必有x=y, A上的关系R是**反对称的**。 例 A={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>}

注：1) $\Leftrightarrow \forall x \forall y( x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$

2) 在关系矩阵中，反映为主对角线对称的元素不能同时为1。

在关系图上，反映为任意两个结点间的弧线不能成对出现。

注： 1)有些关系既不是对称的，又不是反对称的。例如A={1,2,3} R={<1,2>,<2,1>,<1,3>}

2)有些关系既是对称的，又是反对称的，例如恒等关系、空关系。

## 传递性

**定义 (3-6.3)**: 设R是A上的二元关系，如果对于任意x，y，z属于A，每当xRy，yRz时就有xRz，则称关系R在A上**是传递的**。

例：A={1,2,3,4}

$R_1$={<1,4>,<4,3>,<1,3>,<3,1>,<1,2>,<3,2>,<2,3>,<4,2>,<1,1>,<3,3>}。

$R_2$=｛<1,1>，<2,2>，<3,3>，<4,4>｝。

$R_3$=｛｝。

$R_4$=｛<1,2>，<3,2>｝。则：$R_1$，$R_2$，$R_3$，$R_4$是传递的。

R=｛<1,1>，<1,2>，<2,1>｝不是传递关系。

**注**:

1）定义$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z( x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

2）传递关系图的特征是：在关系图中若存在从a到b一条有向路径（即存在一结点序列$a=a_1$，…，$a_n=b$，其中$<a_i,a_{i+1}> \in R$，$1 \le i \le n-1$)，则从a到b必定存在一条弧。 传递关系在关系矩阵上的特性都不易看出来。

# 3-7　复合关系和逆关系

## 1. 复合关系

定义(3-7.1)　设$R_1$是A到B的关系，$R_2$是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：

$$R_1 \circ R_2=\{\langle a,c\rangle \mid (\exists b)(a\in A \land c\in C \land b\in B \land \langle a,b\rangle \in R_1 \land \langle b,c\rangle \in R_2)\}$$

注：①关系图上，$R_1 \circ R_2$是由$\langle a,c\rangle$这样的序偶组成，从$a\in A$到$c\in C$有一长度为2的路径，其中第一条弧属于$R_1$，第二条弧属于$R_2$。

② 若$R_1$的值域与$R_2$的前域的交集为空，则$R_1 \circ R_2$为空关系。

③ 设$I_A$、$I_B$分别为A和B上的恒等关系，R是A到B的二元关系，则　$I_A \circ R=R \circ I_B=R$。

（注意：　$R \circ I_A$, $I_B \circ R$为空关系，无意义）

例1 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，A上的二元关系$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$。

则 $R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\}$，$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

$(R\circ S)\circ R=\{\langle 3,2\rangle\}$， $R\circ(S\circ R)=\{\langle 3,2\rangle\}$

$R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$， $S\circ S=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

例2：

$xR_1y$表示x是y的兄弟，$yR_2z$表示y是z的父亲

则 $xR_1\circ R_2z$ 表示x是z的叔伯，

$xR_2\circ R_2z$ 表示x是z的祖父。

## 结合律

设$R_1, R_2, R_3$分别是从A到B，从B到C，从C到D的关系。

则 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

证：设$\langle a, d\rangle$是$(R_1 \circ R_2) \circ R_3$的任一序偶。

则 $\langle a, d\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists c (\langle a, c\rangle \in R_1 \circ R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists c (\exists b (\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2) \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c \exists b (\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b \exists c (\langle a, b\rangle \in R_1 \land (\langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b (\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, d\rangle \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

故 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ R_2 \circ R_3$。 #

## 关系R的幂

### （1）定义

定义 设R是集合A上的二元关系，R与自身的复合为R的幂，记为$R^{(n)}$。

如下：

1）$R^{(0)}$是A的相等关系，$R^{(0)}=\{\langle x,x\rangle | x\in A\}=I_A$。

2）$R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R$。

### （2）其关系图的意义

在$R^{(2)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为2的路径。

在$R^{(n)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为n的路径。

## 复合关系的矩阵表达

### （1）复合关系的矩阵

设$X=\{x_1, ..., x_m\}$，$Y=\{y_1, ..., y_n\}$，$Z=\{z_1, ..., z_p\}$。

R、S分别是X到Y，Y到Z的关系，设$M_R=[a_{ik}]$，$M_S=[b_{kj}]$，

则构造为 $M_{R \circ S}=[C_{ij}]$，如果Y中至少有这样一个元素$y_j$，使得$\langle x_i, y_j\rangle$属于R，$\langle y_j, z_k\rangle$属于S，则必有$\langle x_i, z_k\rangle$属于$R \circ S$，也即$C_{ik}=1$；否则$C_{ik}=0$。故：

$M_{R \circ S}=[C_{ij}]=M_R \circ M_S$

其中$C_{ik}=\vee_{j=1}^{n} a_{ij} \wedge b_{jk}$。

（“∧”表示逻辑加，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant k \leqslant p$，“∨”表示逻辑乘）

例1

设x={1, 2}， y={a, b, c}， z={α, β}， R={⟨1, a⟩, ⟨1, b⟩, ⟨2, c⟩}，

S={⟨a, β⟩, ⟨b, β⟩}。

解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R \circ M_S = M_{R \circ S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 逆关系

定义(3-7.2)：设R是A到B的二元关系，则R的逆是B到A的二元关系，记为 $R^c$ 其中 $R^c=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\}$。

例1 $A=\{0,1,2,3\}$　$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

则 $R^c=\{\langle 0,0\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

整数集上的 ‘$<$’ 关系的逆是 ‘$>$’ 关系。

集合族上的 ‘$\subseteq$’ 关系的逆是 ‘$\supseteq$’。

注：（1）$xRy \Leftrightarrow yR^cx$

（2） 交换R 的关系矩阵的行和列，既得$R^c$的关系矩阵。

（3）颠倒R的关系图中每条弧线的箭头方向，既得$R^c$的关系图。

**定理（3-7.1）** 设$R, R_1, R_2$是A到B的关系，则

a） $(R^c)^c=R$

b） $(R_1 \cup R_2)^c=R_1^c \cup R_2^c$

c） $(R_1 \cap R_2)^c=R_1^c \cap R_2^c$

d） $(\sim R)^c=\sim(R^c)$， $\sim R=A\times B-R$

e） $(R_1-R_2)^c=R_1^c-R_2^c$

**定理（3-7.2）** 设R、S分别是A到B、B到C的关系。

则 $(R \circ S)^c=S^c \circ R^c$

证：设$\langle c, a\rangle$是$(R \circ S)^c$的任一元素，则

$$\langle c, a\rangle \in (R \circ S)^c \Leftrightarrow \langle a, c\rangle \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists b(\langle c, b\rangle \in S^c \wedge \langle b, a\rangle \in R^c)$$

$$\Leftrightarrow \langle c, a\rangle \in S^c \circ R^c$$

定理3(3-7.3)：R是A上的二元关系，

（**a**）R是对称的$\Leftrightarrow R=R^c$，

（**b**）R是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^c\subseteq I_A$。

证：(a) ‘$\Rightarrow$’　设R是对称

$\langle a,b\rangle\in R\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R^c$。

即$R=R^c$。

‘$\Leftarrow$’　设 $\langle a,b\rangle\in R$　则$\langle b,a\rangle\in R^c$

$\because R=R^c$

$\therefore\langle b,a\rangle\in R$，故R是对称的。

(b)略。

返回

# 3-8 关系的闭包运算

## 一. 闭包的定义及求法

### 1. 闭包的定义

定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果有另一关系R'满足：

1）R'是自反的（ ）；

2）R⊆ R'；

3）对任何自反的（ ）关系R"，R"⊇R, 则 R"⊇R'。

则称R' 为R的自反（ ）闭包，记作r(R), s(R), t(R)。

注：自反（对称、传递）闭包其实就是包含R的最小的自反（对称、传递）关系。

注：已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成。

如： X= {a, b, c} ，

R= {<a, a>, <b, b>, <b, c> } , 则

r(R)= {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <b, c> }

**定理3-8.1** 设R是X上的二元关系，R的自反闭包记为r(R)，R的对称闭包记为s(R)，R的传递闭包记为t(R)，那么

1）若R是自反的，则R=r(R)，反之也成立。
2）若R是对称的，则R=s(R)，反之也成立。
3）若R是传递的，则R=t(R)，反之也成立。

证明：

1）如果R是自反的，因为R⊇R，且任何包含R的自反关系R”，有R”⊇R，故R就是满足自反闭包的定义，即 R=r(R)
反之，如果R=r(R)，由定义3-8.1，R必是自反的。

2）和3）的证明完全类似1）。 #

## 2. 闭包的求法

**定理3-8.2：** 设R是X上的二元关系，则：$r(R)=R\cup I_X$。

证明：设$R'=R\cup I_X$，∵①$\forall x\in A, \langle x,x\rangle\in R'$ ∴R'具有自反性。

② $R\subseteq R'$。

③ 设R"是自反的，且$R\subseteq R''$，

∵R是自反的，∴$I_X\subseteq R''$ 。

又∵$R\subseteq R''$ ， ∴$R'=I_X\cup R\subseteq R''$。 #

**定理3-8.3：** 设R是X上的二元关系，则：$S(R)= R\cup R^c$。

证明：设 $R'= R\cup R^c$ ，

①$R'^c=(R\cup R^c)^c=R^c\cup(R^c)^c= R^c\cup R=R$。

②$R'=R\cup R^c\supseteq R$，

③设R"是对称的，且$R\subseteq R''$ 要证 $R'\subseteq R''$

$\langle a,b\rangle\in R\cup R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle a,b\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle\in R''$

∴$R'=R\cup R^c\subseteq R$。 #

(3) 定理3-8.4设R是X上的二元关系，则：$\boxed{t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i}$。

证明：(a) 先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$

归纳法：对∀n>0, $R^n \subseteq t(R)$

i) 由定义$R \subseteq t(R)$

ii)假设$R^n \subseteq t(R)$成立，要证$R^{n+1} \subseteq t(R)$。

设$\langle a, b\rangle \in R^{n+1}=R^n \circ R$

∴存在c使$\langle a, c\rangle \in R^n$, $\langle c, b\rangle \in R$

∵由归纳法知$\langle a, c\rangle \in t(R)$ $\langle c, b\rangle \in t(R)$

∵ t(R)是传递的，∴$\langle a, b\rangle \in t(R)$ 即$R^{n+1} \subseteq t(R)$

∴对一切n，$R^n \subseteq t(R)$。

∴

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$$

(2) 再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$

设<a, b>, <b, c>是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$的任意元素。

∴∃s, ∃t, 使得<a, b>∈$R^s$, <b, c>∈$R^t$ ∴<a, c>∈$R^t$ ∘ $R^s$=$R^{t+s}$。

∴<a, c>∈ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ ， ∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的。

∵t (R) 包含R的最小传递关系，∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$ 。

综上必有 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。 #

注意：通常，将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 记作R+， 读做“R正”。

例：

# 二. 有限集的传递闭包

定理3-8.5 设R是有限集A的二元关系，|A|=n, 则存在一个正整数k<=n, 使得 $\boxed{t(R)=\bigcup_{i=1}^{k} R^{i}}$ 。

证：对任意<x, y>∈t(R)，即证存在一个最小的正整数k≤n，使$xR^ky$。

(反证法)，假设最小的正整数k>n,

∵ $xR^ky$ ∴存在序列$x=a_0, a_1, \ldots\ldots, a_k=y$, 使得

$xRa_1, \ldots\ldots, a_{k-1}Ry$ 又∵k>n ,

∴$a_0, \ldots\ldots, a_k$中必有两个元素相同，不妨设$a_i=a_j$ , $0\le i<j\le k$

∴$xRa_1, a_1Ra_2, \ldots, a_{i-1}Ra_i, a_jRa_{j+1}, \ldots, a_{k-1}Ry$成立

令 S=k-(j-i), 则k<R, 且$xR^Sy$。这与R是最小的假设矛盾，

证毕。

例1 设A={a, b, c, d}，给定A上的关系R为：

R= { ⟨a, b⟩ ，⟨b, a⟩ ，⟨b, c⟩ ，⟨c, d⟩ }，求t(R)。

**解：**

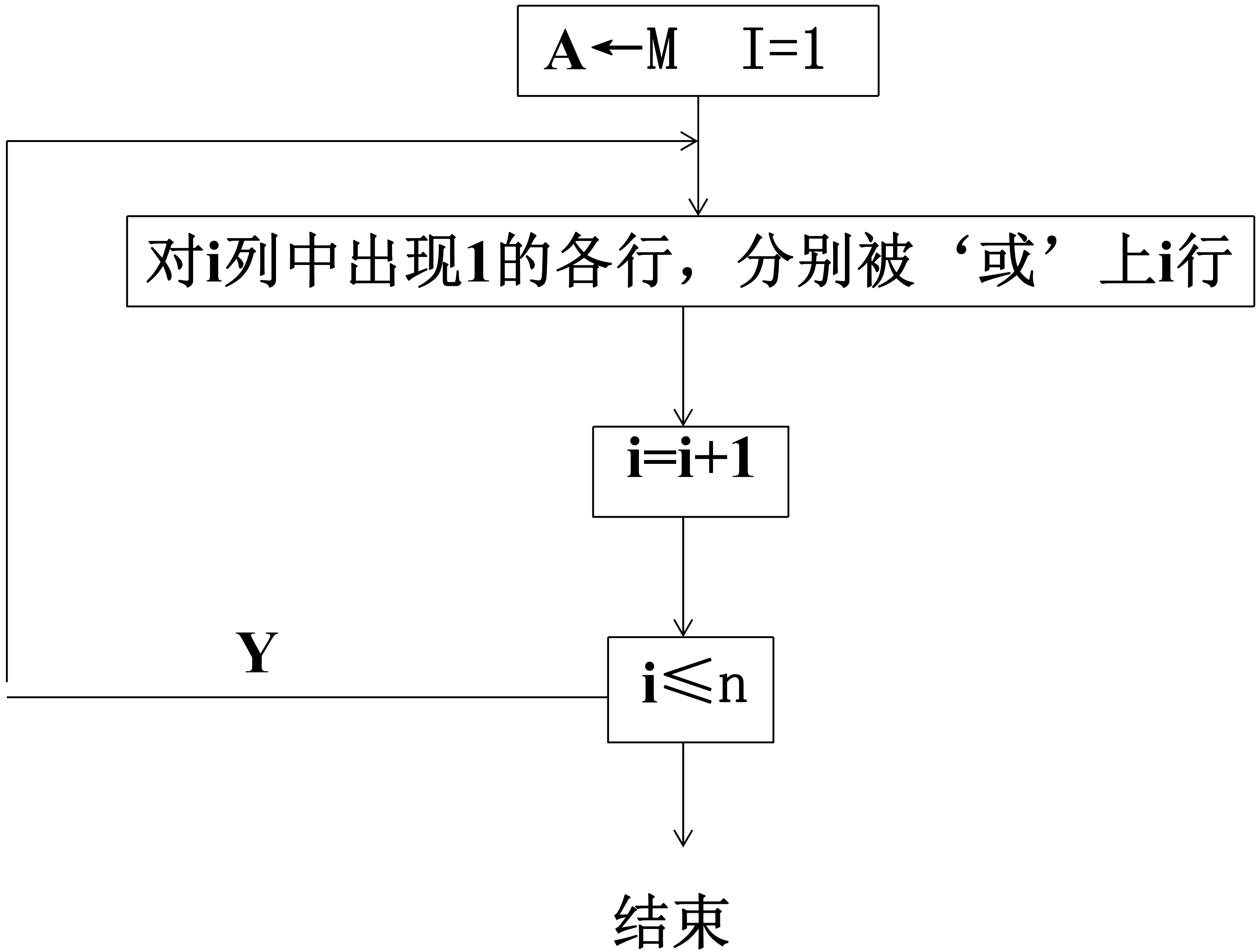
$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R^2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^4}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

## 2. Warshall算法



定理3-8.6 设R是X上的二元关系，则：

a) $rs(R)=sr(R)$ （自反对称闭包等于对称自反闭包）

b) $tr(R)=rt(R)$

c) $ts(R)\supseteq st(R)$ （证明较困难，书上说不困难。）

证：a) $rs(R)=r(R\cup R^c)=I_A\cup R\cup R^c$

$=I_A\cup R\cup(I_A\cup R)^c$

$=s(I_A\cup R)=sr(R)$。

b)定理1中已证明。

c) 1）若$R_1\supseteq R_2$，则$s(R_1)\supseteq s(R_2)$， $t(R_1)\supseteq t(R_2)$。

i) ∵$R_1\supseteq R_2$，

∴$\langle b,a\rangle\in R_2^c\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_2\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R_1^c$。

∴$R_1^c\supseteq R_2^c$，

∴$R_1\cup R_1^c\supseteq R_2\cup R_2^c$， 即$s(R_1)\supseteq s(R_2)$。

ii) n=1， $R_2\subseteq R_1$， 假设$R_2^n\subseteq R_1^n$， 则

$\langle a,b\rangle\in R_2^{n+1}\Leftrightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_2^n\wedge\langle a,c\rangle\in R_2)$

$\Rightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_1^n\wedge\langle a,c\rangle\in R_1)$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_1^{n+1}$

$\therefore R_2^{n+1} \subseteq R_1^{n+1}$，  $\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_2^i$，$\therefore t(R_1) \supseteq t(R_2)$。

2) $\because s(R) \supseteq R$，

$\therefore ts(R) \supseteq t(R)$。

$\therefore sts(R) \supseteq st(R)$。

又$\because s(R)$是对称的。

由定理1(b)知$ts(R)$是对称的。

$\therefore sts(R)=ts(R)$

$\therefore ts(R) \supseteq st(R)$。 #

下举例说明上包含可以是真包含：

例 整数集I上的<关系

$st(<)=s(<)=\neq$

$ts(<)=t(\neq)=I \times I$

$\therefore st(<) \subseteq ts(<)$

注： $R^*$表示R的自反传递闭包，即$R^*=tr(R)$ 读做“R星”。

返回

# 3-9 集合的划分和覆盖

我们除了把二个集合进行相互比较外，还常把一个集合分成若干子集讨论。

## 一. 覆盖和划分

**定义(3-9.1)：** 设A为非空集，$S=\{S_1,\ldots,S_m\}$，$S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing(i=1,\ldots,m)$ 且 $S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m=A$，称S是A的覆盖。若再加 $S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1,2,\ldots,m)$ 则称S是A的划分，m称为S的秩.

例1 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，

则 $X=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$ 划分

$Y=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ 覆盖

$Z=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ 不是覆盖

$U=\{\{1,2,3,4,5\}\}$ 划分

$V=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ 划分

U称为A的最小划分，V称为A的最大划分。

## 二. 交叉划分

**定义(3-9.2)：** 若 $S_1=\{A_1,\ldots,A_m\}$，$S_2=\{B_1,\ldots,B_n\}$ 是A的两个划分，则 $S=\{A_i\cap B_j \mid A_i\in S_1\wedge B_j\in S_2\}$ 称为A的交叉划分。

定理(3-9.1)：交叉划分是在集合A的划分。

证明：$S=\{A_1\cap A_2, \ldots, A_1\cap B_n, \ldots, A_m\cap B_1, \ldots, A_m\cap B_n\}$

① 则 $(A_1\cap B_1)\cup\ldots\cup(A_1\cap B_n)\cup\ldots\cup(A_m\cap B_n)$

$$=\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$$ ∴S是A的一个覆盖

② $\forall (A_i\cap B_h), (A_j\cap B_R)\in S$

$$(A_i\cap B_h)\cap(A_j\cap B_R)=\begin{cases}\varnothing & , i\neq j\\ \varnothing & , i=j, h\neq k\\ A_i\cap B_h & , i=j, h=k\end{cases}$$

∴S是A的一个划分

# 三. 细分

定义(3-9.3)：设S, S'是集合A的两个划分，若S的每一块均是S'中某块的子集，称S是S'的细分(或加细)。

例：　　　A=整数集 ，S={{1, 3, 5, 7...}, {2, 4, 6...}}

S'={{1, 5, 9...}, {3, 7...}, {2, 4, 6...}}。

则：　S'是S的细分。

定理3-9.2　任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的一种细分。

返回

# 3-10　等价关系和等价类

定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：

(1)自反的

(2)对称的

(3)传递的

则称R是A上的等价关系。

例：A={1，2，3，4}，R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}是一个等价关系。

此外，数中的“相等”关系

集合中的“相等”关系

命题演算中“⇔”关系

都是等价关系。

注：其关系图的特点：每一结点有自回路，每对结点之间要么没有弧，要么有弧而且成对出现。

**定义(3-10.2)**：设R是A上的等价关系，$\forall a\in A$，集合 $[a]_R=\{x \mid x\in A, xRa\}$ 称为元素a形成的R等价类。

例：上例中，A上各个元素形成的R等价类为：

$[1]_R=\{1, 4\}$

$[2]_R=\{2, 3\}$

**定理(3-10.1)** 设R是定义在A上的等价关系, $\forall a, b\in A$, 有 $aRb \Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$ 。

证：'$\Leftarrow$' 由R的自反性知：$a\in[a]_R$ 。

故：$a\in[a]_R=[b]_R$，根据等价类定义可知：aRb。

'$\Rightarrow$' $\forall x\in[a]_R \Leftrightarrow xRa$ 又 $aRb \Rightarrow xRb \Leftrightarrow x\in[b]_R$

故知 $[a]_R\subseteq[b]_R$。

同理可证：$[b]_R\subseteq[a]_R$。

所以，$[a]_R=[b]_R$。

#

定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为A关于R的商集，记为A/R。

例 上例中 $A/R=\{[1]_R, [2]_R\}$（也可以是$=\{[4]_R, [2]_R\}$ ）

那么，商集是否可以认为是一种划分？

**定理(3-10.2)集合A上的等价关系R，则商集A/R是A的一个划分。**

证明：

$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

$\because \forall a\in A$， $aRa$， $\therefore$ $a\in[a]_R$。

1° $\bigcup_{a\in A}[a]_R=A$， $\therefore A/R$是一个覆盖。

**2°** $\forall a,b\in A$， $[a]_R\neq[b]_R$， 则$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$。

反证法：若$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$， 设$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R$，

$\therefore cRa$， $cRb$ 。

$\because R$是传递的

$\therefore aRb$

知$[a]_R=[b]_R$，与前提矛盾。

返回

**定理(3-10.3)　集合A的任一划分S确定了A上的一个等价关系R。**

证明：　设$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$，定义关系R：

$aRb$：a, b在S的同一分块中，现证R是等价关系。

1° $\forall a \in A$，a与a在同一块中，∴aRa，自反性成立。

2° $\forall a, b \in A$，a与b在同一块中，则b与a也在同一块。

即 $aRb \Rightarrow bRa$，∴对称性成立。

3° $\forall a, b, c \in A$，若a与b在同一块，b与c在同一块，

∵$S_i \cap S_j = \varnothing \quad (i \neq j)$。

∴a与c在同一块，即$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

∴传递性满足。

∴R是A的一个等价关系，且$A/R=S$。

例 $A=\{a, b, c, d, e\}$，$S=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$。

则 $R_1=\{a, b\}\times\{a, b\}=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$。

$R_2=\{c\}\times\{c\}=\{\langle c, c\rangle\}$。

$R_3=\{d, e\}\times\{d, e\}=\{\langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$。

则$R=R_1 \cup R_2 \cup R_3$是由S诱导的等价关系。

问：等价关系<->划分，这种诱导的唯一吗？

**定理(3-10.4)** 设$R_1$，$R_2$是非空集合上的等价关系，则 $R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$。

证明：

'⇒' 若$R_1=R_2$ $\because A/R_1=\{[a]R_1 \mid a\in A\}$ ，$A/R_2=\{[a]R_2 \mid a\in A\}$，

$\forall a\in A$，$x\in[a]R_1 \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_1 \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_2 \Leftrightarrow x\in[a]R_2$。

$\therefore [a]R_1=[a]R_2$，$\therefore A/R_1=A/R_2$。

'⇐' 若$A/R_1=A/R_2$ ，

$\therefore \forall a\in A$，$[a]R_1\in A/R_1$，$\exists c\in A$，使 $[a]R_1=[c]R_2$。

$\therefore \forall a,b\in A$

$\langle a,b\rangle\in R_1 \Leftrightarrow a\in[a]R_1 \wedge b\in[a]R_1$

$\Leftrightarrow a\in[c]R_2 \wedge b\in[c]R_2$

$\Rightarrow \langle a,b\rangle\in R_2$

$\therefore R_1\subseteq R_2$ ， 同理可证$R_2\subseteq R_1$。

$\therefore R_1=R_2$。 #

上述定理告诉我们，划分与等价关系本质上相同，唯一区别是关系可以在空集上定义，划分则不能。

返回

# 3-11 相容关系

定义(3-11.1) 设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系。

例：a）所有等价关系是相容关系。

b)A={a, b, c, d, }, R={〈a, a〉, 〈b, b〉, 〈c, c〉, 〈d, d〉, 〈a, b〉, 〈b, a〉}

其关系矩阵与关系图

1）仅给出关系矩阵的左下角就可描写相容关系（不包括主对角线元素）。

2）相容关系的关系图可简记（用无向边代替二条有向边、不用自回路）。

定义(3-11.2)：设R是集合A的相容关系，集合C是A的子集，满足$\forall x, y \in C$，则xRy，则C称为由R产生的相容类。

例如，上例中{a，b}，{c}，{d}，{a}，{b}都是。

定义(3-11.3)：设R是集合A的相容关系，C是由R产生的相容类，如果C不真包含于其他任何相容类，则称C为最大相容类。

例如，上例中{a，b}，{c}，{d}都是。

注:1) A上的相容关系R的最大相容类集合{$A_1$, …, $A_m$}构成A的一个覆盖。

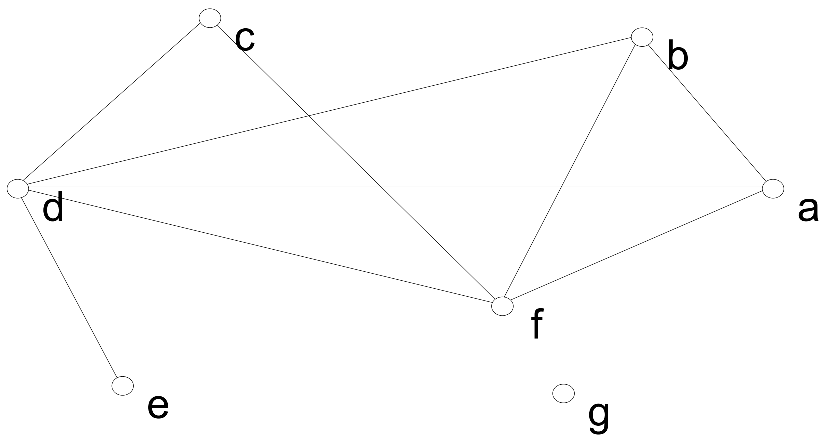
2) 最大相容类在关系图上反映为一个完全图。

(完全图:图中每一对结点间都有边相连)

## 最大相容类的求法(利用关系图)

求出图中所有最大完全图,每个完全图代表了一个最大相容类。

例:




所有最大相容类为{a, b, d, f}, {c, d, f, }, {d, e}, {g}}

定义(3-11.4)在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的**完全覆盖**，记作$C_R$（A）。

A上的相容关系R确定一个完全覆盖。

证：∵ $\forall a \in A \quad aRa$ ∴ $\bigcup_{a \in A} [a]_{a所在的最大相容类} = A$

定理(3-11.2) A上的覆盖$\{A_1, \ldots, A_n\}$确定一个相容关系：

$$R = A_1 \times A_1 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$$

证：现证 R 是一个相容关系

① $\forall a \in A \quad \exists i\ , a \in A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$

∴ $\langle a, a \rangle \in A_i \times A_i \subseteq R$

即 aRa ∴自反性成立。

② $\forall a, b \in A$， 若$\langle a, b \rangle \in R$，

∴ $\exists i (1 \leqslant i \leqslant n), \langle a, b \rangle \in A_i \times A_i$, ∴ $\langle b, a \rangle \in A_i \times A_i$， $\langle b, a \rangle \in R$，

∴ $aRb \Rightarrow bRa$，

∴R是相容关系。 #

问：相容关系<->完全覆盖，这种诱导的唯一吗？

定理（3-11.3）集合A上相容关系R与完全覆盖$C_R$存在一一对应。

返回

# 3-12　序关系

在一个集合上，考虑元素的次序关系

**定义(3-12.1)**：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的**偏序关系**，序偶<A, R>称为偏序集。

注：①常把偏序关系R记为“≤”即小于等于。则<A, R>记为<A, ≤>，aRb记为a≤b，这里符号“≤”表示了一种更为普遍的“小于等于关系”即偏序关系。

②例如，实数集R的“小于或等于”关系是偏序关系。

例 1　A={2,3,6,8}，D表示整除关系，M表示整倍数关系。

则　D={<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<2,6>,<2,8>,<3,6>}

M={<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<6,2>,<8,2>,<6,3>}

经验证，D和M均为偏序关系。

定义(3-12.2)在偏序集合<A, ≼>中，如果x，y ∈A，x ≼y，且没有其他元素z满足x ≼z，z ≼y，则称y盖住x。盖住关系　COV A={<x,y>|y盖住x}。

例2，上例中D的盖住关系为COV A = {<2,6>,<3,6>,<2,8>}。

偏序集合用图表示，作图规则为：

① 小圆圈表示元素；

② 如果x ≼y，则将y画在x之上；

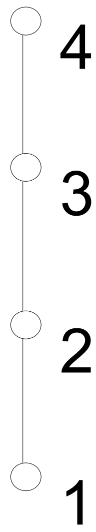
③ 如果<x,y> ∈CovA，则在x，y之间无向连接。

所得的关系图称为哈斯图（hasse图）。

例3

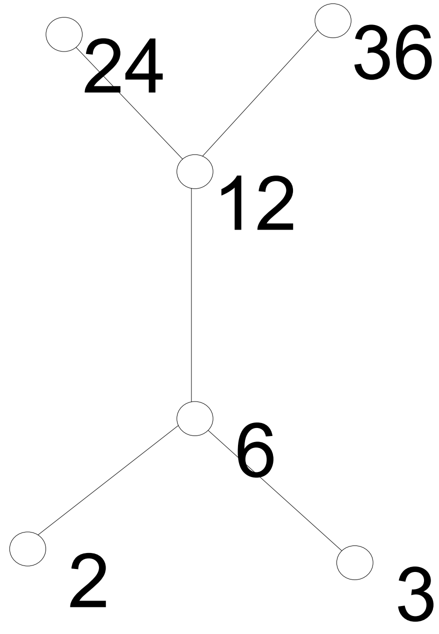
a) P={1, 2, 3, 4}

<P, ≤>的哈斯图为




b) A={2, 3, 6, 12, 24, 36},

<A, 整除>的哈斯图为



**定义（3-12.3）** 设<A,≤>是一个偏序集合，B ⊆A，∀a，b∈B，都有a≤b或b ≤a（也即a与b是可比较的），则称B为链，否则称B为反链。

我们约定，当B只有唯一元素时，B既是链，又是反链。

**定义（3-12.4）** 在偏序集合<A，≤>中，如果A是一个链，则称<A，≤>为全序集合或线序集合，此时≤称为全序关系或线序关系。

例 a）定义在自然数集合N上的“小于等于”关系“≤”就是一个全序关系。

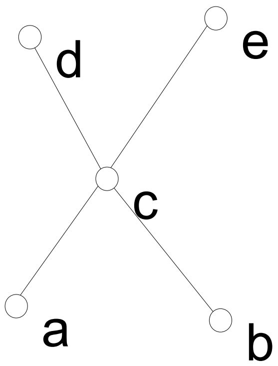
b）{1,2,3,6}的整除关系不能构成一个线序集合。

例4 P={∅，{a},{a,b},{a,b,c}}上的包含于关系“⊆”，可验证<P，⊆ >是一个全序集合。

可见，全序集合的哈斯图是一竖立的结点序列，每相邻的结点用一条弧连接。

**定义（3-12.5）** 设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集，若b∈B, 且B中不存在元素x, 使b≠x且b≤x，称b∈B是B的**极大元**。若b∈B, 且B中不存在元素x, 使b≠x且b≥x，称b∈B是B的**极小元**。

例：

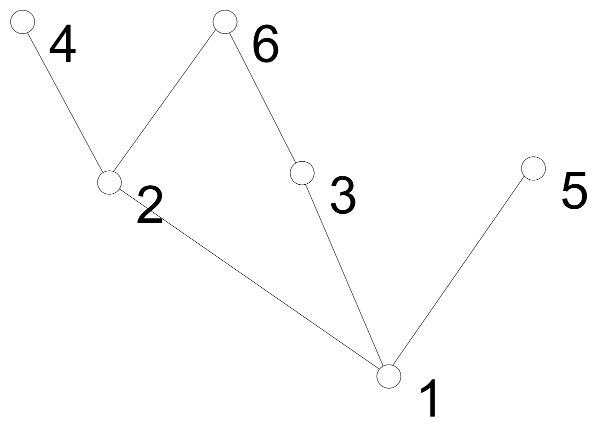



则A={a, b, c, d, e} 极大元为d, e, 极小元为a, b。
B={c, a, b}则极大元素为c, 极小元素为a, b。

可见，极大元和极小元可以不唯一。其实也可以不存在，例如<I, ≤>设B={i | i∈N}，但对于非空有限偏序集合，其极大元和极小元总是存在。

**定义(3-12.6)**：设<A, ≼>是一偏序集合，B是A的子集，若b∈B，且对每一元素x∈B，x≼b，则称b为B的**最大元**。若b∈B，且对每一元素x∈B，b≼x，则称b为B的**最小元**。

**例**　A={1, 2, 3, 4, 5, 6}　则<A, 整除>哈斯图为




a) B={1, 2, 3, 6}，则6是B的最大元，1是B的最小元。
b) B={2, 3, 6}，则6是B的最大元，B没有最小元
c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}，则B没有最大元，1是B的最小元。

可见，子集的最大元可以不存在，　例如<I, ≼>设B={i | i∈N}。

**定理(3-12.1)** 设$\langle A, \leqslant \rangle$是一偏序集合，且$B \subseteq A$则B若有最大（最小）元，则最大（最小）元是唯一的。

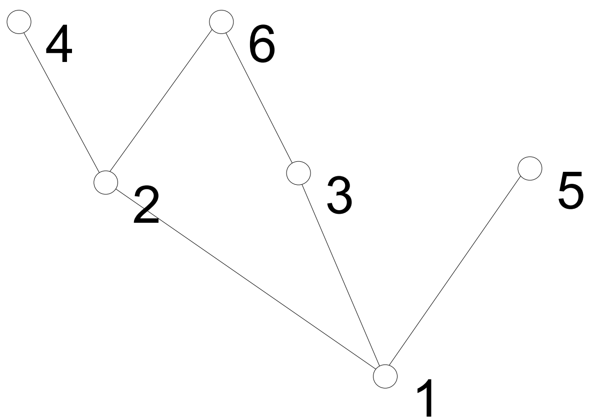
证：（反证法）
设a, b都是B的最大元素，那末$a \leqslant b$, $b \leqslant a$，由反对称性得$a=b$。

**定义（3-12.7）** 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合，B是A的子集。

如有$a \in A$，且$\forall x \in B, x \preccurlyeq a$，则称a为B的**上界**。

如有$a \in A$，且$\forall x \in B, a \preccurlyeq x$，则称a为B的**下界**。

**例** $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 则<A, 整除>哈斯图为




a) $B=\{1, 2, 3, 6\}$，则6是B的上界，1是B的下界。

b) $B=\{2, 3, 6\}$，则6是B的上界， 1是B的下界。

c) $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则B的上界不存在， 1是B的下界。

可见，B的上界（下界）未必是B的元素。上界和下界可以不存在，也可以不唯一。

定义(3-12.8) 设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集。若a是B的上界，且对B的所有上界y，有a≤y，那么称a为B的最小上界，记为 LUB B。

若a是B的下界，且对B的所有下界y，有y≤a，那么称a为B的最大下界，记为 GLB B。

**定义(3-12.9)：** 若R是A上的一个偏序关系，且A的每个非空子集都有最小元素，则称R是A上的良序关系，序偶<A, R>称良序集合。

例　（a）每一个有限的线序集合都是良序集合。

　　（b）<I，≤>是良序集合。

**定理(3-12.2)：** 每一个良序集合，一定是全序集合。

证：设<R, ≤>为良序集合，则对于任意两个元素a, b∈R可构成子集｛a, b｝，必存在最小元素不是a就是b，因此一定有a≤b或b≤a. 所以<R, ≤>为全序集.　　　　#

**定理(3-12.3)：** 每一个有限的全序集合都是良序集合。

证：设A=｛$a_1$, $a_2$，…, $a_n$｝，令〈A，≤>是全序集合，现在假定〈A，≤>不是良序集合，那么必存在一个非空子集B⊆A，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找出两个元素x与y是无关的，由于〈A，≤>是全序集，x, y∈A，所以x, y必有关系，得出矛盾，故〈A，≤>必是良集合。　　#

返回

# 第三章
# 知识结构图