第四章　函数

- 中学里，我们学过实数集上的函数。
- 现在，学习在广义集合上的函数。
- 从关系到函数。

1

4-1 函数的概念

定义4-1.1　设X和Y是任何两个集合，f是X到Y的一个关系，如果对于每一个$x\in X$，有唯一的$y\in Y$，使得xfy，称关系f为函数，记作：$f: X\to Y$
称x为自变量，称y为对应于x的象。

2

4-1 函数的概念

注：
1、X到Y的函数f与二元关系R的区别与联系
函数是一种特殊的二元关系。
2、函数亦称映射，习惯用小写英文f, g, …… 表示。
3、函数的定义域是X，而不能是X的某个真子集。

4、关系的前域就是函数f的定义域，记作$\mathrm{dom}\, f=X$，f的值域记为$\mathrm{ran}\, f=\{y \mid y\in Y\wedge(\exists x)(x\in X\wedge y=f(x))\}$

5、一般地，$\mathrm{ran}\, f\subseteq Y$，亦称为"集合$X$在$f$作用下的像集合"。
集合Y称为f的共域（陪域）。

3

例1　设 X=｛1, 5, p, 张明｝，Y=｛2, q, 7, 9, G｝。

（1）二元关系 f =｛＜1,2＞,＜5,q＞,＜p,7＞,＜张明, G＞｝。

则可判断 f 为函数，且dom f =X，ran f =｛2,q,7,G｝。

（2）二元关系 g =｛＜1,2＞,＜5,q＞,＜张明, G＞｝，

则 g 不能构成函数。

另外，

所有从X到Y的函数的集合记作Y^X，读作“Y上X”。符号化表示为 $Y^X=\{f\,|\,f: X\to Y\}$，有$|Y|^{|X|}$个不同的函数。

$Y^X=\{f\,|\,f: X\to Y\}$，有$|Y|^{|X|}$个不同的函数。

记|X| = m, |Y| = n. X和Y的笛卡尔积 (X ×Y) 构成一个m*n的网格;

关系R可以任意网格点放置或不放置棋子, 共有$2^{mn}=(2^n)^m$种放法,

即有$(2^n)^m$个不同关系

函数 *f* 必须在每一行上放置一个棋子, 而且仅能放置一个.

共有n^m种放法, 即有n^m个不同的函数.

函数的相等:

定义4-1.2　(函数相等) 设 ***f***，***g***为函数，若：

1. **dom *f* =dom *g***
2. **∀x∈dom *f*，都有*f*(x)= *g*(x)**

称 *f* 与 *g* 相等, 记作 *f* = *g*

例2　判断函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$，$G(x)=x-1$

因为 domF={x|x∈R∧x≠-1} 而domG=R.

从而, domF≠domG. 由此, 两个函数是不相等的。

介绍函数的几类特殊情况

定义4-1.3 对于函数 $f: X \to Y$，若 $ran\, f = Y$，即 Y 的每一个元素都是 X 中一个或多个元素的像，则称函数 f 为**满射**。

$f: X \to Y$ 是满射

$\Leftrightarrow$ 对于 $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ 使得 $y = f(x)$ 成立。

(给出了证明满射的方法)

例 A＝{a,b,c,d},B＝{1,2,3}，如果 f 为A 到 B 的函数，
且 f (a) = 1, f (b) = 1, f (c) = 3, f (d) = 2，
则 f 是A 到 B 上的满射。

7

定义4-1.4 从 X 到 Y 的函数 f，X 中没有两个元素有相同的象，则称这个函数为**入射**。 **(单射)**

$f: X \to Y$ 是入射 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(此处给出了证明入射的方法)。

例 函数f: {a,b} → {2,4,6}，f (a) = 2, f (b) = 6，
则 f 是入射，但不是满射。

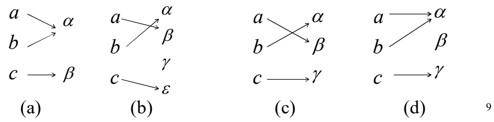
8

定义4-1.5 从 X 到 Y 的函数f，若 f 既是满射又是入射，则称函数f是**双射**。 **(一一映射)**

例 函数 f:{a,b}→{1,2}, f (a) = 1, f (b) = 2，则 f 为双射。

例 *在下图表示函数的中,判断是满射，入射或双射。*

满射 入射 双射 非入射、非满射

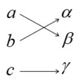


(a) (b) (c) (d)

9

定理4-1.1 令 X和 Y 为有限集，若X和Y的元素个数相同，即$|X|=|Y|$，则$f:X\to Y$是入射的，*iff* 它是一个满射。

证明：



1)设 f 是入射，则$|X|=|f(x)|$，
又因为$|X|=|Y|$，故$|f(x)|=|Y|$，
从 f 定义知$f(X)\subseteq Y$，因为 $|Y|$ 是有限的，故 $f(X)=Y$，
所以 f 是满射。

2)设f是满射，由满射定义知$f(X)=Y$，
于是由$|X|=|Y|=|f(x)|$，得到$|X|=|f(X)|$
又因为 $|X|$ 是有限的，故 f 是一个入射(反证思维)。

注：此定理仅在有限集的情况下才能成立，在无限集上不一定成立。

如：$f:I\to I$, $f(x)=2x$,这里显然 f 是一个入射，而不是满射。

10

4-2 逆函数和复合函数

一、逆函数

给定一个关系 R，颠倒 R 的所有序偶，得到逆关系R^c。

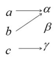
给定一个函数 f，颠倒f的所有序偶，可得到的逆关系f^c.

但逆关系f^c不一定是函数。这是因为：

1)如果 $f:X\to Y$ 不是满射，则ran f是Y的真子集，也就是dom f^c 是Y的真子集，不符合定义域的要求。

2)如果 $f:X\to Y$ 不是入射，则可能$y=f(x_1)$, $y=f(x_2)$，逆函数$f^c(y)$的值将有两个，违反函数值唯一性的要求。

为此，对函数求逆需规定一些条件：**既是满射，又是入射**。



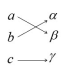
11

定理4-2.1 设$f:X\to Y$是一双射函数，则f^c是$Y\to X$的双射函数。

(证明思路：分两步，（1）证f^c为函数；（2）证f^c为双射)

(1) 设$f=\{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in Y\wedge y=f(x)\}$

$f^c=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in f\}$



(证 f^c为函数：根据函数定义去证明。) 对f^c来说，象是x

1、因为f为函数，所以f 为关系，故 f^c 也是关系。

2、(证明象的存在性，即证$\forall y\in Y,\exists x\in X$，使得$\langle y,x\rangle\in f^c$。)

$\forall y\in Y$, 由于 f 是满射，故 $\exists x\in X$ 使得$\langle x,y\rangle\in f$

$\Leftrightarrow \exists x\in X$使得$\langle y,x\rangle\in f^c$

3、(证明象的唯一性，即证$\forall y\in Y,\exists!\,x\in X$，使得$\langle y,x\rangle\in f^c$)

(反证法) 假设$\forall y\in Y,\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$ 满足 $\langle y,x\rangle\in f^c$，

由此，$\langle x_1,y\rangle\in f$, $\langle x_2,y\rangle\in f$, 从而: $f(x_1)=f(x_2)=y$

12

由于 f 为入射，故当 $x_1 \neq x_2$ 时，可得 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 与 $f(x_1) = f(x_2)$ 矛盾。

所以 $\forall y \in Y, \exists \mid x \in X$，使得 $<y,x> \in f^c$ 。

由1、2、3可知, f^c：$Y \to X$ 是一个函数。

(2) 证 f^c 是满射又是入射

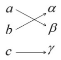
1、(证 f^c 为满射，即证 $\forall x \in X, \exists y \in Y$ 使得 $<y,x> \in f^c$),

因为 f 为函数，由 f 的像的存在性可知：

$\forall x \in X, \exists y \in Y$，使得 $<x,y> \in f$

$\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y$， 使得 $<y,x> \in f^c$ 。

故 f^c 为满射。



对 f^c 来说,象是 x

13

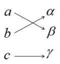
2、(证 f^c 为入射：即证 $\forall y_1,y_2 \in Y, y_1 \neq y_2, \exists x_1,x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，

使得 $<y_1,x_1>$，$<y_2,x_2> \in f^c$)

$\forall y_1,y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$， 由于 f^c 是函数，故 $\exists x_1,x_2 \in X$，

使得 $<y_1,x_1>$，$<y_2,x_2> \in f^c$

$\Leftrightarrow \exists x_1,x_2 \in X$ 使得 $<x_1,y_1>$，$<x_2,y_2> \in f$。



对 f^c 来说,象是 x

又由于 f 是双射可知 $x_1 \neq x_2$ 。

所以,$\forall y_1,y_2 \in Y, y_1 \neq y_2, \exists x_1,x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ 使得

$<y_1,x_1>$，$<y_2,x_2> \in f^c$，故 f^c 为入射。

由1、2可知 f^c 为双射。 #

14

定义4-2.1 设 f:$X \to Y$ 是一双射函数，称双射函数 f^c：$Y \to X$ 为 f 的逆函数，记作 f^{-1} 。

例子：A={1,2,3}，B={a,b,c}，f: A→B

f ={<1,a>,<2,c>,<3,b>}　　f⁻¹={<a,1>,<c,2>,<b,3>}

若 f ={<1,a>,<2,b>,<3,b>}　　f^{-1}={<a,1>,<b,2>,<b,3>}

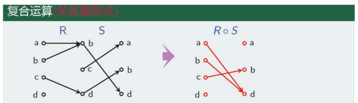
f^{-1}不是函数

15

二、复合函数

（关系可以复合，函数是一种关系，因而函数也可复合。）

- 复合关系
  - 定义(3-7.1)： 设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
  - $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle \mid (\exists b)(a\in A \land c\in C \land b\in B \land \langle a, b\rangle\in R_1 \land \langle b, c\rangle\in R_2)\}$
    - 设 A={a, b, c, d}， B={b, c, d}； C={a, b, d}
      - R={<a, b>, <c, d>, <b, b>} 是A 到B 的关系
      - S={<d, b><b, d><c, a>} 是B 到C 的关系
    - 则 R ∘ S={<a, d>, <c, b>, <b, d>}



16

二、复合函数

定义4-2.2 设函数f : X→Y ,g: W→Z，若f(X) ⊆W，则
g∘f ={<x, z>|x∈X∧z∈Z∧(∃y)(y∈Y∧y=f (x)∧z=g(y)) }
称函数 g在f的左边可复合。否则，g在f的左边不可复合。
特别地, 当f : X→Y，g: Y→Z 时, g∘f 称为复合函数.

注：1 、 g∘f和和关系$R_1 \circ R_2$位置顺序不同

2、 g∘f (x) = g(f(x))

3、若ran f ⊆ W 这个条件不成立，则定义$g \circ f$为空

17

定理4-2.2 两个函数的复合是一个函数。

即证：***f* : *X*→*Y*，*g*: *W*→*Z* 为左复合,则*g*∘*f*是一个函数**

(证明思路：利用函数的定义直接证明)

证明 设 $g: W\to Z, f: X\to Y$ 为左复合，即 $f(X)\subseteq W$。

a）对于任意 $x\in X$，因为 f 为函数，故必有唯一的序偶$\langle x,y\rangle$使 $y=f(x)$成立，而 $f(x)\in f(X)$即 $f(x)\in W$，又因为 g 是函数，故必有唯一序偶$\langle y,z\rangle$使 $z=g(y)$成立，根据复合定义，$\langle x,z\rangle\in g\circ f$，即 X 中每个 x 对应 Z 中某个 z。 （象的存在性）

b）假定 $g\circ f$ 中包含序偶$\langle x,z_1\rangle$和$\langle x,z_2\rangle$且 $z_1\neq z_2$，这样在 Y 中必存在 y_1 和 y_2，使得在 f 中有$\langle x,y_1\rangle$和$\langle x,y_2\rangle$在 g 中有$\langle y_1,z_1\rangle$和$\langle y_2,z_2\rangle$。因为 f 是一个函数，故 $y_1=y_2$。于是 g 中有$\langle y,z_1\rangle$和$\langle y,z_2\rangle$，但 g 是一个函数，故 $z_1=z_2$，即每个 $x\in X$ 只能有唯一的$\langle x,z\rangle\in g\circ f$。（象的唯一性）

由 a)，b)可知 $g\circ f$ 是一个函数。 □

18

复合的结果还可以复合，因此函数可以多次复合。

例 $f:R\to R$, $g:R\to R$, $h:R\to R$, $f(x)=x+2$, $g(x)=x-2$, $h(x)=3x$

求：$g\circ f$，$h\circ(g\circ f)$

$<x, x+2>$；$<x+2, (x+2)-2>$，从而 $<x,x>$

解：$g\circ f=\{<x,x>|x\in R\}$　$h\circ(g\circ f)=\{<x,3x>|x\in R\}$

$g\circ f=g(f(x))=g(x+2)=x+2-2=x$

$h\circ(g\circ f)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))=h(g(x+2))=h(x+2-2)=3x$

由于复合关系满足可结合性，故复合函数也满足可结合性。

一般地，有　$h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g=h\circ f\circ g$

19

定理4-2.3　令 $g\circ f$ 是一个复合函数：

a)　若 g 和 f 是满射，则 $g\circ f$ 是满射的。

b)　若 g 和 f 是入射，则 $g\circ f$ 是入射的。

c)　若 g 和 f 是双射，则 $g\circ f$ 是双射的。

(证明思路：利用满射、入射和双射的定义直接证明)

20

证明

a) $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 则 $g\circ f: X\to Z$，因为 g 是满射的。

故对于 $\forall z\in Z$, $\exists y\in Y$ 使得 $g(y)=z$。

又因为 f 是满射的，故对于上述 $y\in Y$, $\exists x\in X$，使得 $f(x)=y$。

因此，$\forall z\in Z$, $\exists x\in X$，使得 $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z$。

所以 $g\circ f$ 是满射的。

b) 因为 f 为入射，所以 $\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。

又因为 g 是入射，所以当 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 时，

有 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$。

即：$\forall x_1,x_2\in X$，且 $x_1\neq x_2$ 时，有 $g\circ f(x_1)\neq g\circ f(x_2)$。

所以 $g\circ f$ 是入射的。

c)由a)、b)立即可得。　#

21

两种常用的函数

定义4-2.3　函数 $f:X\to Y$ 叫做常函数，如果存在 $y_0\in Y$，对于每个 $x\in X$ 都有 $f(x)=y_0$，即 $f(X)=\{y_0\}$。

定义4-2.4　如果 $I_X=\{<x,x>|x\in X\}$，则称函数 $I_X:X\to X$ 为恒等函数。

22

函数与恒等函数的复合

定理4-2.4 设函数 $f:X\to Y$，则 $f=f\circ I_X=I_Y\circ f$。

（证明思路：证明定义域相同，对应关系相同。）

证明：1) 因为 $f:X\to Y$，$I_X:X\to X$，

故 $f\circ I_X:X\to Y$，所以 $\mathrm{dom}\,f=\mathrm{dom}\,f\circ I_X=X$。

2) 又因为 $\forall x\in X$, $\exists y\in Y$ 使得 $y=f(x)$，

且 $f\circ I_X(x)=f(I_X(x))=f(x)=y$。所以 $f=f\circ I_X$。

同理可证 $f=I_Y\circ f$　#

23

函数与自身逆函数的复合

定理4-2.5　如果函数 $f:X\to Y$ 有逆函数 $f^{-1}:Y\to X$，则 $f^{-1}\circ f=I_X$，　$f\circ f^{-1}=I_Y$。

（证明思路：与定理4-2.4相同）

证明：

因为 $f:X\to Y$, $f^{-1}:Y\to X$

故 $f^{-1}\circ f:X\to X$。所以 $\mathrm{dom}\,f^{-1}\circ f=\mathrm{dom}\,I_X=X$

又因为 $\forall x\in X$, $\exists y\in Y$ 使得 $y=f(x)$ 且 $f^{-1}(y)=x$

故 $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x=I_X(x)$

所以 $f^{-1}\circ f=I_X$

同理可证 $f\circ f^{-1}=I_Y$　#

24

逆函数的逆函数

定理4-2.6　若$f: X\to Y$是双射函数，则$(f^{-1})^{-1}=f$。

（证明思路：利用关系性质证明，函数相同的定义）

证明：因为$f: X\to Y$是双射，由定理4-2.1知f^{-1}是双射，
再由定理4-2.1可知$(f^{-1})^{-1}$也是双射，且$(f^{-1})^{-1}=(f^{-1})^c=(f^c)^c$
由逆关系性质知　$(f^c)^c=f$
所以$(f^{-1})^{-1}=f$

25

复合函数的逆函数

定理4-2.7　若$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$均为双射函数，则

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

证明：因为f, g为双射，由定理4-2.3知$g\circ f$是双射。
由逆函数定义可知：$f^{-1}=f^c$, $g^{-1}=g^c$, $(g\circ f)^{-1}=(g\circ f)^c$
再由复合关系逆的性质知：$(g\circ f)^c=f^c\circ g^c$
所以$(g\circ f)^{-1}=(g\circ f)^c=f^c\circ g^c=f^{-1}\circ g^{-1}$　#

26

常用的符号

(1) 自然数集(含0)—N
即非负整数集
(2) 正整数集(不含0)－$N^*(N_+)$
(3) 整数集—Z
(4) 有理数集—Q
(5) 实数集—R

27

4-4 基数的概念

为了比较两个集合“大小”，引入后继集的概念。

定义4-4.1 设A是任意集合，A的后继集定义为集合：

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

若A= Ø，则Ø的后继集依次为：

$$\phi, \phi\cup\{\phi\}, \phi\cup\{\phi\}\cup\{\phi\cup\{\phi\}\}, \phi\cup\{\phi\}\cup\{\phi\cup\{\phi\}\}\cup\{\phi\cup\{\phi\}\cup\{\phi\cup\{\phi\}\}\}, \cdots$$

也即：Ø, { Ø }, {Ø,{Ø}}, {Ø ,{Ø }, {Ø,{Ø}} }, …

若命名Ø 为0，则0^+=1，

1^+=2，　　Ø ∪{ Ø }={} ∪{ Ø }= { Ø }

2^+=3，…

28

G.Peano公理　自然数N是如下集合：

(1)$0 \in N$ (其中$0 = \varnothing$)，

(2)如果$n \in N$，那么 $n^+ \in N$；

(3)如果一个子集$S \subseteq N$ 具有性质：

a. $0 \in S$；

b. 如果$n \in S$，有$n^+ \in S$，则$S = N$。

注：

1、上述自然数定义称为归纳定义。

其中(1)为基础，(2)为归纳，(3)为极小性(指明了自然数系统 是满足公理(1)和(2)的最小集合，从而本定义是最简定义)。

2、从N的定义可见，任意一个自然数可看作是一个集合的名，

例如3= {Ø ,{Ø }, {Ø,{Ø}} }。

29

定义4-4.3　设A，B是集合，如果存在着从A到B的双射函数，就称A和B是等势的，记作$A \sim B$。

注：此定义给出了证明$A \sim B$的一种方法。

例：设R为实数集合，$S=\{x|x\in R \land 0<x<1\}$。

证明：$R \sim S$。　(0,1)区间　（后面会用到）

证明：令$f: R \to S$，$f(x) = \frac{1}{\pi}tg^{-1}x + \frac{1}{2}(-\infty < x < \infty)$。

因为 $-\frac{\pi}{2} < tg^{-1} < \frac{\pi}{2}$

所以 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{\pi}tg^{-1}x < \frac{1}{2}$　　tg^{-1} = arctan

所以 $0 < \frac{1}{\pi}tg^{-1}x + \frac{1}{2} < 1$

显然 $f: R \to S$ 是一个双射函数。故$R \sim S$。　#

30

等势的性质

定理4-4.1　在两个集合上等势关系是一个等价关系。

证明：设S为集合族。

1)对于$\forall A\in S$，可作恒等函数 $I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$。显然$I_A:A\to A$ 为一个双射函数。故$A\sim A$ 。即等势关系为自反关系。

2)对于$\forall\ A,B\in S$，

如果$A\sim B$，那么存在双射函数$f:A\to B$ 。由定理4-2.1可知 $f^{-1}:B\to A$ 存在，且为双射函数，故$B\sim A$，即等势关系为对称关系。

3)对于$\forall\ A,B,C\in S$，如果$A\sim B,B\sim C$那么存在 $f: A\to B,\ g: B\to C$均为双射函数。由定理4-2.3可知$g\circ f:A\to C$ 为双射函数， 故$A\sim C$，即等势关系为一个传递关系。

由(1)、(2)、(3)可知集合族上的等势关系是一个等价关系。　#

下面利用等势概念来定义有限集与无限集。

31

定义4-4.4　如果存在一从集合$\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$到集合$A$的双射函数，则称集合$A$是有限的；否则集合$A$是无限的。

注：$\{0,1,2,\ldots,n\text{-}1\}=N_n$称为$N$的初始段，$N_n$可用于证明集合$N$为有限集。如果$A\sim N_n$，那么集合$A$的“大小”为$n$。

定理4-4.2　自然数集N是无限的。

(证明思路：证明N_n到N不存在双射)

证明：设$\forall n\in N$，f是任意的从N_n到 N 的函数。

设$k=1+max\{f(0),f(1),\ldots,f(n\text{-}1)\}$。

那么$k\in N$，但对每一个$x\in N_n$，有$f(x)\neq k$ 。

因而$f:N_n\to N$不是满射函数，即 f也不是双射函数。

由于n 和f均为任意的，故N是无限的。　#

32

集合的基数

定义4-4.5　对有限集合A来说，如果存在与A等势的一个自然数集合$\{0,1,2,\ldots n\text{-}1\}$, 则称$n$为A的基数.

若A为无限集合，考虑与A等势的所有集合构成的集簇, 给这些集合赋予一个共同符号来描述集合元素的数量多少, 这个符号称为为A的基数.(无很; 浩瀚; 洪荒)

A的基数，记作 $K[A]$ 或 $|A|$.

两个集合的基数相等的本质在于两者等势。

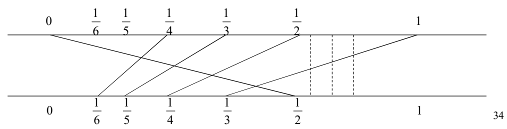
33

例　证明区间[0,1]与（0,1）基数相同。

证明：设 $A=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}, A\subseteq[0,1]$

定义 $f:[0,1]\to(0,1)$，且 $\begin{cases} f(0)=\frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+2}, n\ge 1 \\ f(x)=x, x\in[0,1]-A \end{cases}$

显然 f 是[0,1]到（0,1）上的双射函数。（如下图所示）。　#



34

4-5　可数集与不可数集

- 由定理4-4.2知 N 是无限集，但是并非所有无限集都可以与 N 等势。
- 故无限集合之间也是有大小的。我们通过寻找新的“标准”去定义无限集的基数。
- 本节重点讨论可数集与不可数集及其性质。

若A为无限集合, 考虑与A等势的所有集合构成的集簇, 给这些集合赋予一个共同符号来描述集合元素的数量多少, 这个符号称为为A的基数. 两个集合的基数相等的本质在于两者等势。

35

4-5　可数集与不可数集

阿列夫零: **首先我们选取 N 为“标准集合”，记$K[N]=\aleph_0$ 。**
(读 阿列夫零)

定义4-5.1　与自然数集合等势的任意集合称为可数的，可数集合的基数为 $\aleph_0$.

例　$A=\{1,4,9,16,\ldots,n^2,\ldots\}$，$B=\{1,8,27,64,\ldots,n^3,\ldots\}$
　　$C=\{2,5,10,17,\ldots,n^2+1,\ldots\}$，$D=\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$
均为可数集，且 $K[A]=K[B]=K[C]=K[D]=\aleph_0$

注：有限集和可数集统称为至多可数集。

36

定理4-5.1 A为可数集的充分必要条件是A可以排列 $A = \{a_1,a_2, \ldots,a_n, \ldots\}$ 的形式。(即:可枚举)

证明：如果$A= \{a_1,a_2, \ldots,a_n, \ldots\}$ ，那么存在$f: A\to N$ 且

$f(a_n) = n\text{-}1 \ (n = 1,2, \ldots)$

f为双射函数。故 $A\sim N$ ，即 A 为可数集。

反之，如果 A 可数，那么 $A\sim N$，则存在双射函数 $f: N\to A$， 令 $a_{n+1} = f(n)$ $(n = 0,1,2, \ldots)$

即可得到可枚举形式: $A= \{a_1,a_2, \ldots,a_n, \ldots\}$ #

注：

1. 此定理可以作为A 是可数集的一个等价定义
2. 也是证明 A 可数的一个实用方法。

37

定理4-5.2 任一无限集必含有可数子集。

证明：设 A为无限集合，从 A 中取出一个元素 a_1，因为A 是无限的，它不因取出 a_1 而耗尽，所以从$A\text{-}\{a_1\}$中可取元素a_2，

则 $A\text{-}\{a_1,a_2\}$ 也是非空集，所以又可取一元素 a_3，如此继续下去，就得到A 的可数子集。 #

解释: 可数集(自然数集)是**最小**的无限集

38

定理4-5.2 任一无限集必含有可数子集。

定理4-5.3 任一无限集必与其某一个真子集等势。

证明：设 M 为无限集，有可数子集$A=\{a_1,a_2, \ldots,a_n, \ldots\}$, 且$A \subseteq M$。设 $M\text{-}A = B$ ，定义集合M到自身的映射, $f: M\to M\text{-}\{a_1\}$:

$$\begin{cases} f(a_n) = a_{n+1} \quad (n = 1,2, \ldots), \\ \text{且对于任何 } b \in B,\ f(b) = b \end{cases}$$

显然 $M\text{-}\{a_1\}\subset M$，且 f 为双射函数, 从而M 与$M\text{-}\{a_1\}$等势.

解释: 从无限集合中抽取出一个可数集合不影响其大小

39

定理4-5.4　可数集的任何无限子集都是可数的。

证明：设 A 是可数集合，则 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$,$B\subseteq A$ 为一无限子集，将 A 中的元素从 a_1开始，向后检查，不断地删去不在 B 中的元素，则得到新的一列 $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in},\ldots$,

故$B=\{a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in},\ldots\}$ ，它与自然数一一对应，即 B 是可数的.

40

定理4-5.5　可数个，两两不相交的可数集合的并集，仍然是一可数集。

证明：（用排队的方法证明）

设可数个可数集分别表示为:

$S_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},\ldots,a_{1n},\ldots\}$

$S_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},\ldots,a_{2n},\ldots\}$

$S_3=\{a_{31},a_{32},a_{33},\ldots,a_{3n},\ldots\}$

………………

思路:

可枚举的无限集为可数集

可枚举的无限即为可数

令$S=S_1\cup S_2\cup\ldots=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$，对 S 的元素作如下排列：

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} \longrightarrow & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

41

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} \longrightarrow & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

每一斜线上的两足码之和，依次为2，3，4，。。。

各斜线上元素的个数为1，2，3，4，。。。

即 $S=\{a_{11},a_{21},a_{11},a_{13},a_{22},a_{31},a_{41},a_{32},\ldots\}$，所以 S 是可数集。

注:

1、S 中的元素的排列方法是不唯一的。

2、可数个可数集的并是可数的。

42

定理4-5.6：$N\times N$是可数集。

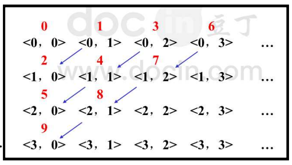
证明：

令S_1 =

S_2 =

S_3 =

……



则$N\times N=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$． 由定理4-5.5可知 $N\times N$是可数集。

注：教材上给出的证明法中，直接给出了$f: N\to N\times N$ 的一个双射函数。这种方法具有一定难度。

43

定理4-5.7　有理数集 Q 为可数集。（用排队法证明）

※有理数是整数（正整数、0、负整数）和分数的统称

证明：一切有理数均呈$\pm n/m(n,m\in N,m\neq 0)$。现将所有$\pm n/m$ 按下列次序排列：

（1）正分数按其分子、分母之和的大小顺序排列：从小到大。

（2）正分数的分子、分母之和相同者按分子大小顺序排列：从大到小。

（3）将0放在首位，与正分数具有相同形式的负分数排于正分数之后。按照上述规则可得：

0,1/1,-1/1,2/1,-2/1,1/2,-1/2,3/1,-3/1,2/2,-2/2,1/3,-1/3, …

故所有呈$\pm n/m$ 状的数所组成的集合为可数集，而 Q 为其无限子集，由定理4-5.4知 Q为可数集。　#

44

定理4-5.7　有理数集 Q 为可数集。（教科书）

※两个数的公因数只有1的两个非零自然数,叫做互质数

因为N×N是可数的，S是N×N的无限子集，根据定理4-5.4可知S是可数的

证明：N×N是可数集， S⊆N×N

S={<m,n> | m,n∈N且m,n互质}，S是可数的。

令g：S→Q_+，即g： <m，n>→m/n（m，n互质），

因为g是双射的，故Q_+是可数集，

因为Q_+~ Q_-，所以Q_-是可数集。

又因为Q= $Q_+\cup\{0\}\cup Q_-$，所以Q是可数集。

45

定理4-5.8 实数集*R*是不可数的。

证明（0,1）为不可数集。（前面证明过跟R等势）

设 $S=\{x|x\in R\land 0<x<1\}$，假设$S$是可数的，则$S$必可表示为：
$S=\{S_1,S_2,\ldots\}$，其中 $S_i(i=1,2,\ldots)$是(0,1)间的任一实数。

设 $S_i=0.y_1y_2y_3\ldots$，其中 $y_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$
（注：0.2和0.123 可分别记为0.1999… 和 0.122999… ）
（规定，所有的有限小数都写成9为循环节的循环小数）

46

定理4-5.8 实数集*R*是不可数的。

设 $S_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots$
$S_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots$
$S_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots$
……………
$S_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots$

构造一个 S 内的实数 $r=0.b_1b_2b_3\ldots$，其中

$$b_j=\begin{cases}1 & a_{jj}\neq 1\\ 2 & a_{jj}=1\end{cases}\quad j=1,2,\ldots$$

那么，r 与 S_1在位子1不同，与S_2在位置2不同,…, 等等。这样，r与所有实数$S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$不同。

因为 r 与 $S_i(i=1,2,\ldots)$ 的小数点后的第 $i(i=1,2,\ldots)$ 位数不相等。这证明了$r\notin S$，产生矛盾，因而 S 是不可数的。

47

定理4-5.8 实数集*R*是不可数的。

因为$S\sim R$（已经证明），而S是不可数集，则R也是不可数集。

阿列夫

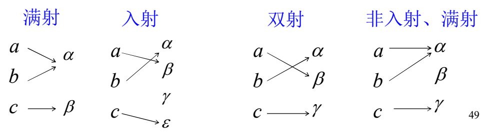
记 S=(0,1) 的基数为 ℵ，如果 $A\sim(0,1)$，那么$K[A]=$ ℵ 。
也称作连续统的势。

48

4-6 基数的比较

为了证明两个集合的基数相等，我们必须构造两个集合之间的**双射函数**，这常常是非常困难的工作。本节将介绍证明基数相等的一个较为简单的方法，首先说明基数是如何比较大小的。

定义（4-6.1）若从集合A到集合B存在一个入射，则称A的基数不大于B的基数，记作 $K[A] \le K[B]$ 。若从A到B存在一个入射，但不存在双射，则称A的基数小于B的基数，记作$K[A] < K[B]$ 。



49

定理4-6.1 （Zermelo定理或称三岐性定理）

令A和B是任意集合，则以下三条中恰有一条成立。

a) $K[A] < K[B]$　b) $K[A] > K[B]$　c) $K[A] = K[B]$

定理4-6.2 （Cantor-Schroder-Bernstein定理）

设A和B是集合，如果$K[A] \le K[B]$， $K[B] \le K[A]$，

则 $K[A] = K[B]$ 。

定理4-6.2告诉我们：

- 若存在从A到B和B到A的入射函数，则存在从A到B的双射函数。
- 它为证明两个集合具有相同的基提供了有效方法。
- 这是因为构造两个入射函数比构造一个双射函数要容易得多。

50

例 证明[0,1]与（0，1）有相同的基数。

证明：作入射函数：

f:(0,1) →[0,1],　$f(x) = x$ （恒等函数）

g:[0,1] →(0,1),　$g(x) = x/2+1/4$

注：此两个函数的选取方法不唯一。如$f(x) = x/2$,　$g(x) = x/3+1/3$.

故：[0,1]与(0,1)具有相同的基数。

例 设$A = N$, $B = (0,1)$, $K[A] = \aleph_0$, $K[B] = \aleph$. 求证：$K[A \times B] = \aleph$

证明：作$A\times B$到实数集的入射函数 $f: A\times B \to R$, $f(n,x) = n+x$

故： $K[A \times B] \le K[R] = \aleph$.

作入射函数　g: **(0,1)** $\to A\times B$, $g(x) = <0,x>$

故 $\aleph \le K[A \times B]$，因此$K[A \times B] = \aleph$ 。

51

定理4-6.3　设 A 是有限集合，则 $K[A] < \aleph_0 < \aleph$

证明：设 $K[A] = n$，$N_n=\{0,1,2,\ldots,n\text{-}1\}$，则 $A \sim N_n$，

定义入射函数 $f: N_n \to N,\ f(x) = x$

故 $K[A] \le K[N] = \aleph_0$，

又因为在证明 N 是无限集中已证明 N 与 A 之间不存在双射函数。所以 $K[A] \ne K[N]$，即$K[A] < \aleph_0$。

再定义入射函数：$g: N \to [0,1],\ g(n) = 1/(n+1)$, g是入射函数

故 $\aleph_0 \le \aleph$，[0,1]跟（0，1）的基数相同

又因为 N 为可数集, [0,1] 为不可数集，故 N 与 [0,1] 之间不存在双射函数，所以 $\aleph_0 < \aleph$。

#

52

定理4-6.4 如果 A 是无限集，那么 $\aleph_0 \le K[A]$

证明：因为 A 为无限集，由定理4-5.2知 A 必含有一个可数无限子集 B，作入射函数 $f: B \to A$, $f(x) = x$。故$K[B] \le K[A]$，又因为$K[B] = \aleph_0$，所以$\aleph_0 \le K[A]$。 #

注：

1、定理4-6.4说明$\aleph_0$是无限集中最小的基数。

2、如果 A 为无限集，那么 $\aleph_0 \le K[A], \aleph_0 < \aleph$，德国数学家康托尔认为$\aleph_0$与 $\aleph$ 之间没有其他基数存在，但是到目前为止还没有人能够证明它，这就是著名的连续统假设。

3、康托尔证明了：没有最大的基数和没有最大的集合。

53

定理4-6.5(Cantor定理)设M是一个集合，T=幂集$\rho(M)$

则$K[M] < K[T]$

证明：(a)（首先证明）$K[M] \le K[T]$

作入射函数 $f: M \to \rho(M)$, $f(a) = \{a\} \in \rho(M)$,

故$K[M] \le K[T]$。

(b)（其次证明 $K[M] \ne K[T]$，用反证法证明）

假设 $K[M] = K[T]$，则必存在双射函数 $\varphi: M \to T$，即对于$\forall\ m \in M$, $\exists \varphi(m) \in T$ 使得 m 对应 $\varphi(m)$ ($m \to \varphi(m)$)。若$m \in \varphi(m)$ 称 m 为M的内部元素，若$m \notin \varphi(m)$ 称 m 为 M 的外部元素。设 $S = \{x | x \in M, x \notin \varphi(x)\}$，则$S$为$M$的外部元素集合，则有 $S \subseteq M$，故 $S \in T$(根据幂集的定义)。

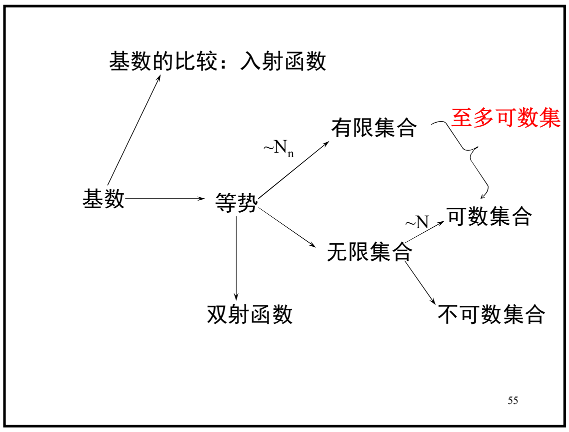
因为 φ 是双射函数，故必有一个元素 $b \in M$，使得$\varphi(b) = S$（$S \in T$）.

（1）如果 $b \in S$ 那么 $b \notin \varphi(b)$，由$\varphi(b) = S$可得 $b \in S = b \in \varphi(b)$，矛盾。

（2）如果 $b \notin S$ 那么$b \in \varphi(b)$，由$\varphi(b) = S$可得 $b \notin S = b \notin \varphi(b)$，矛盾。

故$K[M] \ne K[T]$，由(a)、(b)可知：$K[M] < K[T]$。

54 # 返回


基数的比较：入射函数
有限集合
至多可数集
~N_n
基数
等势
可数集合
~N
无限集合
双射函数
不可数集合
55