

# 算法设计与分析作业 1

汪笑宇

2025.9.17

## 1 问题

### 1. (渐近记号的性质)

(1) 假设  $f(n)$  和  $g(n)$  为渐近正函数,  $c > 0$  是一个常量, 证明以下结论:

- a.  $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$
- b.  $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$
- c.  $O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n) \cdot g(n))$
- d.  $O(cf(n)) = O(f(n))$
- e.  $g(n) = O(f(n))$  蕴涵  $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n))$

(2) 教材 p35 思考题 3-4:

**3-4 (渐近记号的性质)** 假设  $f(n)$  和  $g(n)$  为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

- a.  $f(n) = O(g(n))$  蕴涵  $g(n) = O(f(n))$ 。
- b.  $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$ 。
- c.  $f(n) = O(g(n))$  蕴涵  $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$ , 其中对所有足够大的  $n$ , 有  $\lg(g(n)) \geq 1$  且  $f(n) \geq 1$ 。
- d.  $f(n) = O(g(n))$  蕴涵  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ 。
- e.  $f(n) = O((f(n))^2)$ 。
- f.  $f(n) = O(g(n))$  蕴涵  $g(n) = \Omega(f(n))$ 。
- g.  $f(n) = \Theta(f(n/2))$ 。
- h.  $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$ 。

### 2. 求下列函数的渐近表达式 (请使用 $\Theta$ 记号表示):

- (1)  $3n^2 + 10n$       (2)  $\frac{n^2}{10} + 2^n$       (3)  $21 + \frac{1}{n}$       (4)  $\lg n^3$       (5)  $10 \lg 3^n$

3. 请根据增长的阶从小到大排序下面的函数, 如果  $f(n) = o(g(n))$ , 那么  $f(n)$  排在  $g(n)$  的前面; 如果两个函数渐近相等, 即  $f(n) = \Theta(g(n))$ , 则将它们放在同一集合中。例如给定函数  $n, \lg n, 2n+1, n^2$ , 排序结果是  $\lg n, \{n, 2n+1\}, n^2$ 。注: 需给出必要的分析, 而不仅是最终排序结果。

- (1)  $n^2$       (2)  $n^{100}$       (3)  $(\frac{3}{2})^n$       (4)  $n^{\lg n}$       (5)  $2^{n+1}$       (6)  $2^n$       (7)  $2^{2n}$

4. 证明以下式子成立：

(1)  $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

(2)  $n! = \omega(2^n)$  且  $n! = o(n^n)$

## 2 要求

- 提交纸质版作业，最好使用不太厚的练习本，**请勿提交单张纸以防丢失**；
- 提交前建议自行拍照存档以防出现意外情况；
- 请写好学号姓名，务必独立完成；
- 请于**2025 年 9 月 24 日**上课时提交。