作业1

苏州大学 计算机科学与技术学院
汪笑宇
Email: xywang21@suda.edu.cn

主要问题

作业批的较松，考试时请务必按照数学推导严格要求！
细节决定成败，有些情况并不是直觉想象的那样！

- 渐近记号性质证明中没有严格导出定义形式

  $O(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c, n_0, 使得对所有$n \geq n_0$ 有$0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$

- 很多同学给出了函数绝对值形式以及反向证明。是否是AI生成的答案与抄袭？
- 发现几位同学题目顺序错且错的一模一样，直接认定抄袭
- $\lg(f(n))$与$\lg(g(n))$的渐近增长关系不等价于$f(n)$与$g(n)$的渐近增长关系
- 最后一题未使用斯特林公式，或使用了“~”、"≈"符号
- 看清楚题目中的渐近记号，不要用O代替Θ

Θ记号 (大Θ表示法) (续)

■记号Θ(1)

➢算法运行时间与输入规模n无关

➢也可理解为常值函数$\Theta(n^0)$

■渐近符号在公式中替换低阶项用来简化表达

➢例：$4n^2+2n+1 = 4n^2+2n+\Theta(1) = 4n^2+\Theta(n) = \Theta(n^2)$

*O*记号 (大*O*表示法) (续)

■注记：

➢当我们说“运行时间是$O(n^2)$”时，通常表示最坏情况运行时间是$O(n^2)$，最好情况通常更好

➢O记号使得分析算法变得更加简单

➢记号说明：

- 通常将$f(n) \in O(g(n))$写作$f(n)=O(g(n))$
- 公式中通常也会使用O记号，例如$2n^2+3n+1 = 2n^2+O(n)$ (也就是说$2n^2+3n+1 = 2n^2+f(n)$，其中$f(n)=O(n)$)

$\hat{}$(1)表示常数时间，与输入规模无关

Θ记号 (大Θ表示法)

■Θ记号：给定一个函数$g(n)$，$\Theta(g(n))$表示以下函数的集合：

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c_1,c_2,n_0, 使得对所有$n \geq n_0$有$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$

➢即$f(n) \in \Theta(g(n))$表示存在正常数c_1,c_2及足够大的n，使得$f(n)$夹在$c_1 g(n)$和$c_2 g(n)$之间

➢通常$f(n) \in \Theta(g(n))$表示为$f(n)=\Theta(g(n))$

- 这里的等号表示“属于”关系，等号两边对调则错误！

➢称$g(n)$是$f(n)$的一个渐近紧确界 (asymptotically tight bound)

作业1-1(1) a-c

$O(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c, n_0, 使得对所有$n \geq n_0$有$0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$

$f(n)$和$g(n)$为渐近正函数，证明：

a. $O(f(n))+O(g(n))=O(\max\{f(n), g(n)\})$

b. $O(f(n))+O(g(n))=O(f(n)+g(n))$

c. $O(f(n))\cdot O(g(n))=O(f(n)\cdot g(n))$

- 证明：设$h_1(n)=O(f(n))$, $h_2(n)=O(g(n))$，且h_1, h_2均为渐近正函数，则根据定义可找到n_1, n_2>0以及相应的常数c_1, c_2>0，使得当$n \geq n_1$时满足$0 \leq h_1(n) \leq c_1 f(n)$，以及$n \geq n_2$时满足$0 \leq h_2(n) \leq c_2 g(n)$。取$n_0=\max\{n_1, n_2\}$则可同时满足两者。

  a. 当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq c_1 f(n)+c_2 g(n) \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\}+c_2 \max\{f(n), g(n)\}=(c_1+c_2)\max\{f(n), g(n)\}$。因此取$c=c_1+c_2$即得当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq c\max\{f(n), g(n)\}$，即$O(f(n))+O(g(n))=O(\max\{f(n), g(n)\})$

  b. 当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq c_1 f(n)+c_2 g(n) \leq \max\{c_1, c_2\}f(n)+\max\{c_1, c_2\}g(n) =\max\{c_1, c_2\}(f(n)+g(n))$。因此取$c=\max\{c_1, c_2\}$即得当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq c(f(n)+g(n))$，即$O(f(n))+O(g(n))=O(f(n)+g(n))$

  c. 当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)\cdot h_2(n) \leq c_1 f(n)\cdot c_2 g(n) \leq c_1 c_2 f(n)\cdot g(n)$。因此取$c=c_1 c_2$即得当$n \geq n_0$时，$0 \leq h_1(n)\cdot h_2(n) \leq c(f(n)\cdot g(n))$，即$O(f(n))\cdot O(g(n))=O(f(n)\cdot g(n))$

作业1-1(1) d-e

$O(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c, n_0, 使得对所有$n \geq n_0$有$0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$

$f(n)$和$g(n)$为渐近正函数，$c>0$是一个常量，证明：
d. $O(cf(n))=O(f(n))$
e. $g(n)=O(f(n))$蕴涵$O(f(n))+O(g(n))=O(f(n))$

- 证明：设$h_1(n)=O(f(n))$, $h_2(n)=O(g(n))$，且h_1, h_2均为渐近正函数，则根据定义可找到n_1, $n_2>0$以及相应的常数c_1, $c_2>0$，使得当$n \geq n_1$时满足$0 \leq h_1(n) \leq c_1 f(n)$，以及$n \geq n_2$时满足$0 \leq h_2(n) \leq c_2 g(n)$。取$n_0=\max\{n_1, n_2\}$则可同时满足两者。

d. 设$h_3(n)=O(cf(n))$为渐近正函数，则根据定义可找到一个$n_3>0$以及相应的常数$c_3>0$，使得当$n \geq n_3$时满足$0 \leq h_3(n) \leq c_3 cf(n)$。因此取$c_4=c_3 c$即得当$n \geq n_3$时，$0 \leq h_3(n) \leq c_4 f(n)$，即$O(cf(n))=O(f(n))$

e. 因为$g(n)=O(f(n))$，所以可找到一个$n_4>0$以及相应的常数$c_5>0$，使得当$n \geq n_4$时满足$0 \leq g(n) \leq c_5 f(n)$。取$n_5=\max\{n_0, n_4\}$，可得当$n \geq n_5$时，有$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq c_1 f(n)+c_2 g(n) \leq c_1 f(n)+c_2 c_5 f(n)=(c_1+c_2 c_5) f(n)$。因此取$c=c_1+c_2 c_5$即得当$n \geq n_5$时，$0 \leq h_1(n)+h_2(n) \leq cf(n)$，即$O(f(n))+O(g(n))=O(f(n))$

作业1-1(2)

3-4 （渐近记号的性质） 假设 $f(n)$和 $g(n)$为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

a. $f(n)=O(g(n))$蕴涵 $g(n)=O(f(n))$。

b. $f(n)+g(n)=\Theta(\min(f(n),\ g(n)))$。

c. $f(n)=O(g(n))$蕴涵 $\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$，其中对所有足够大的 n，有 $\lg(g(n))\geqslant 1$ 且 $f(n)\geqslant 1$。

d. $f(n)=O(g(n))$蕴涵 $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$。

e. $f(n)=O((f(n))^2)$。

f. $f(n)=O(g(n))$蕴涵 $g(n)=\Omega(f(n))$。

g. $f(n)=\Theta(f(n/2))$。

h. $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$。

- c, f, h正确，其他全部错误
  - 反驳：
    - a, b: $f(n)=n$, $g(n)=n^2$
    - d: $f(n)=2n$, $g(n)=n$， $2^{2n}=4^n\neq O(2^n)$
    - e: $f(n)=1/n$
    - g: $f(n)=4^n$， $f(n/2)=2^n$， $4^n\neq\Theta(2^n)$

作业1-1(2)c

取对数后依旧保持渐近上界性质

3-4 （渐近记号的性质） 假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

a. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=O(f(n))$。

b. $f(n)+g(n)=\Theta(\min(f(n), g(n)))$。

c. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$，其中对所有足够大的 n，有 $\lg(g(n))\geqslant 1$ 且 $f(n)\geqslant 1$。

d. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$。

e. $f(n)=O((f(n))^2)$。

f. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=\Omega(f(n))$。

g. $f(n)=\Theta(f(n/2))$。

h. $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$。

c. 证明：根据定义可找到一个足够大的$n_0>0$以及相应的常数$c>0$，使得当$n\geq n_0$时满足$0\leq f(n)\leq cg(n)$，且$\lg(g(n))\geq 1$且$f(n)\geq 1$，因此当$n\geq n_0$时满足$0\leq \lg(f(n))\leq \lg(cg(n))=\lg c+\lg(g(n))\leq(\lg c+1)\lg(g(n))$。因此取$c_1=\lg c+1$，即得当$n\geq n_0$时$0\leq \lg(f(n))\leq c_1\lg(g(n))$，即$\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$

作业1-1(2)f

渐近上界与渐近下界转置对称性

3-4 （渐近记号的性质） 假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

a. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=O(f(n))$。

b. $f(n)+g(n)=\Theta(\min(f(n), g(n)))$。

c. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$，其中对所有足够大的 n，有 $\lg(g(n))\geqslant 1$ 且 $f(n)\geqslant 1$。

d. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$。

e. $f(n)=O((f(n))^2)$。

f. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=\Omega(f(n))$。

g. $f(n)=\Theta(f(n/2))$。

h. $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$。

f. 证明：根据定义可找到$n_0>0$以及相应的常数$c>0$，使得当$n\geq n_0$时满足$0\leq f(n)\leq cg(n)$，即$0\leq(1/c)f(n)\leq g(n)$。因此取$c_1=1/c$，即得当$n\geq n_0$时，$0\leq c_1f(n)\leq g(n)$，即$g(n)=\Omega(f(n))$

作业1-1(2)h

渐近紧确界由最高阶项决定

3-4 （渐近记号的性质） 假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为渐近正函数。证明或反驳下面的每个猜测。

a. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=O(f(n))$。

b. $f(n)+g(n)=\Theta(\min(f(n), g(n)))$。

c. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$，其中对所有足够大的 n，有 $\lg(g(n))\geqslant 1$ 且 $f(n)\geqslant 1$。

d. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$。

e. $f(n)=O((f(n))^2)$。

f. $f(n)=O(g(n))$ 蕴涵 $g(n)=\Omega(f(n))$。

g. $f(n)=\Theta(f(n/2))$。

h. $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$。

h. 证明：设$h(n)=o(f(n))$为渐近正函数，由定义可知对任意常数$c>0$，存在$n_0>0$，使得当$n\geq n_0$时有$0\leq h(n)<cf(n)$。因此当$n\geq n_0$时， $0\leq f(n)\leq f(n)+h(n)<f(n)+cf(n)=(c+1)f(n)$，其中最后一个小于号可写为小于等于。由于$c$可取任意大于0的常数，因此可取$c_1=1, c_2=2$，当$n\geq n_0$时有$0\leq c_1 f(n)\leq f(n)+o(f(n))\leq c_2 f(n)$，即$f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$

作业1-2

求下列函数的渐近表达式（请使用 Θ 记号表示）：

(1) $3n^2 + 10n$ (2) $\frac{n^2}{10} + 2^n$ (3) $21 + \frac{1}{n}$ (4) $\lg n^3$ (5) $10 \lg 3^n$

(1) $\Theta(n^2)$

(2) $\Theta(2^n)$

(3) $\Theta(1)$

(4) $\Theta(\lg n)$

(5) $\Theta(n)$

作业1-3

- 排序结果：n^2, n^{100}, $n^{\lg n}$, $(3/2)^n$, $\{2^n, 2^{n+1}\}$, 2^{2n}
  - 采用相除求极限的方法证明排序，可使用洛必达法则
  - 以下说明$n^{\lg n}$大于任意多项式阶，且小于任何大于1为底数的指数阶，即$n^{\lg n}=\omega(n^d)$且$n^{\lg n}=o(k^n)$其中$k>1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^d}{n^{\lg n}}=\lim_{n\to\infty}n^{d-\lg n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n^{\lg n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{k^{\log_k n\lg n}}=\lim_{n\to\infty}k^{\boxed{n-\log_k n\lg n}}=\infty$$

设函数$f(n)=n-\log_k n\lg n$，则$f'(n)=1-(\boxed{\frac{\lg n}{n\ln k}}+\boxed{\frac{\log_k n}{n\ln 2}})$

由于$\frac{\log_k n}{n}$在n趋于无穷大时趋向于0

所以在n趋于无穷大时$f(n)$单调递增，且递增斜率趋近于1 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\infty$

作业1-3 (续)

■排序结果：n^2, n^{100}, $n^{\lg n}$, $(3/2)^n$, $\{2^n, 2^{n+1}\}$, 2^{2n}

➢注：比较$n^{\lg n}$与2^n时直接对两者取对数求比值极限对吗？

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lg n}}{2^n} \cancel{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n^{\lg n})}{\lg 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg^2 n}{n} = 0 \ ?$$

取对数情况的反例：n^2与n^3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad n^2 = O(n^3) \quad \to \quad \lg(n^2) = O(\lg(n^3))$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n^2)}{\lg(n^3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\lg n}{3\lg n} = \frac{2}{3} \qquad \lg(n^3) = O(\lg(n^2)) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad n^3 \cancel{=} O(n^2)$$

c. $f(n)=O(g(n))$蕴涵$\lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$，其中对所有足够大的n，有$\lg(g(n))\geqslant 1$且$f(n)\geqslant 1$。 注意蕴涵的方向！

作业1-3 (续)

- 排序结果：n^2, n^{100}, $n^{\lg n}$, $(3/2)^n$, $\{2^n, 2^{n+1}\}$, 2^{2n}
  - 注：比较$n^{\lg n}$与2^n时直接对两者取对数求比值极限对吗？
  - 正确做法：$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lg n}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\lg(n^{\lg n})}}{2^{\lg 2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\boxed{\lg^2 n-n}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\lg^2 n}{n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\lg^2 n-n=\lim_{n\to\infty}n(\frac{\lg^2 n}{n}-1)=-\infty$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lg n}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\lg(n^{\lg n})}}{2^{\lg 2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\lg^2 n-n}=0$$

作业1-4(1)

■证明 (1) $\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$

■使用斯特林公式证明

➢证明：(1)

$$
\begin{aligned}
\lg(n!) &\boxed{=} \lg(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+\Theta(1/n))) \\
&= \lg(2\pi n)/2 + n\lg(n/e) + \lg(1+\Theta(1/n)) \\
&= \lg(2\pi)/2 + (\lg n)/2 + n\lg n - n\lg e + \lg(1+\Theta(1/n)) \\
&= \Theta(1) + \Theta(\lg n) + \boxed{\Theta(n\lg n)} - \Theta(n) \\
&= \Theta(n\lg n)
\end{aligned}
$$

最高阶项

一部分同学引用了结论$(n/2)^{n/2} \le n! \le n^n$ $(n \to \infty)$，需给出明确的证明！

作业1-4(2)

- 证明 (2) $n!=\omega(2^n)$且$n!=o(n^n)$
  - 证明：(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+\Theta(1/n))}{2^n}$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}(1+\Theta(1/n))\left(\frac{n}{2e}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^n\\
&=\infty
\end{aligned}
$$

可推导出对所有的k>0，都有$n!=\omega(k^n)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+\Theta(1/n))}{n^n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}(1+\Theta(1/n))\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$