拟阵

贪心算法的理论基础：拟阵

- 该理论可被用于确定贪心算法何时能够产生最优解，它用到了一种组合结构：Matroid (拟阵)。
- 该结构是Whitney于1935年在研究矩阵中线性无关结构时抽象出来的，由Korte于80年代初将该理论发展为贪心算法理论。
- 该理论覆盖了许多贪心法的应用实例(Kruskal、匈牙利算法等)，不过并未覆盖所有情况(如活动选择问题)，但它仍在发展。

拟阵定义及证明要点

- 定义：一个拟阵是满足下列条件的有序对$M=(S,I)$
  - S是一有穷非空集。
  - I是S的一个非空子集(称为S的独立子集)簇，使得若$B\in I$且$A\subseteq B$，则$A\in I$(集合A、B均独立)。满足此性质的I是遗传的，即B独立(指$B\in I$)，则B的子集也独立。注意$\Phi\in I$。
  - 若$A\in I$，$B\in I$且$|A|<|B|$，则存在某个元素$x\in B-A$使得$A\cup\{x\}\in I$。称M满足交换性质。
- 拟阵性质证明要点：
  - S满足有穷非空
  - 集合簇I满足遗传性(某子集独立，则该独立子集的子集亦独立)
  - M满足交换性(即可扩展)

如何证明有序对具有拟阵性质？

拟阵例子

- 例子
  - 测试Whitney于1935年研究矩阵拟阵时引入。一个矩阵拟阵是指：S的元素是矩阵的行，若行的子集线性无关则该子集独立，易证这种结构是拟阵。
  - **图的拟阵**

    $M_G=(S_G,I_G)$是在无向图$G=(V,E)$基础上定义的：
    - $S_G=E$
    - 若$A\subseteq E$，则：$A\in I_G\Leftrightarrow A$无回路。

      即：边集A独立$\Leftrightarrow$子图$G_A=(V,A)$是森林(多棵互不相交的树的集合)。

图拟阵证明

- **Theorem. 1**：若G是无向图，则$M_G = (S_G, I_G)$是一个拟阵。

pf:

① $S_G = E$是一有穷非空集。

② 证明I_G满足遗传性：
若$B \in I_G$，且$A \subseteq B$，意味着A是森林B的子集，它仍为森林不可能有回路，所以$A \in I_G$

③ 证明M_G具有交换性
设$G_A = (V, A)$和$G_B = (V, B)$为森林，且$|B| > |A|$。现要证：$\exists e \in B - A$，使e扩充到A后仍不产生回路。

图拟阵证明 (续)

可利用定理：具有k条边的森林包含$|V|-k$棵树。

由该定理可知，G_A有$|V|-|A|$棵树，G_B有$|V|-|B|$棵树。

$\because G_B$中树的数目$<G_A$中的数目（因为$|B|>|A|$）

$\therefore G_B$中必存在某棵树T，它的顶点至少属于森林G_A中两棵不同的树。（否则，若G_B中任何树的顶点必在G_A的同一棵树中，这与G_A中树的数量大于G_B矛盾。）

$\because$ T是连通的，必存在一条边$e=(u,v)\in T$，使得u,v在G_A两个不同的树中。

$\therefore$将e加入G_A后不会产生回路，即$A\cup\{e\}\in I_G$，满足交换性。

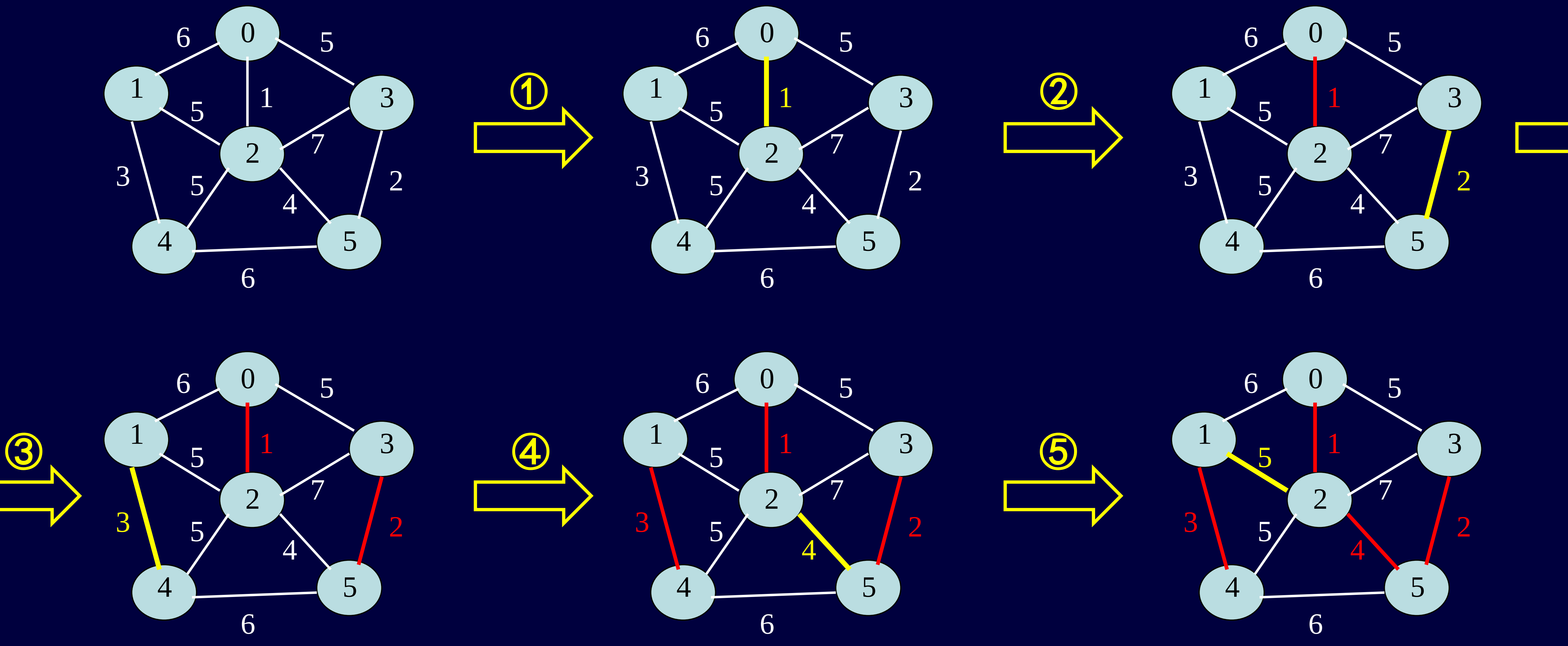
综合①、②、③知，M_G是一个拟阵。

M_G与MST问题紧密相关

MST

- MST (最小生成树) 问题
  - 生成树：若无向连通图G 的一张子图是包含图G中所有顶点的树，则称该子图为图G 的生成树。
  - 最小生成树：若图G中的每条边均有一个权值，生成树的权即为它包含的所有边的权值之和。权值最小的生成树被称为最小生成树。
  - 求解算法：
    - Prim算法：从某一个顶点开始构建生成树，每次将纳入代价最小的新顶点纳入生成树，直到所有顶点都纳入为止。
    - Kruskal算法：将图中所有的边按照权值大小做升序排序，从权值最小的边开始选择，只要此边不和已选择的边一起构成环路，就可以选择它组成生成树。

MST (Kruskal算法)



拟阵最大独立子集定义

- 独立子集的扩张

在拟阵$M = (S, I)$中，若$A \in I$，$x \notin A$，$A \cup \{x\} \in I$，则元素x称为A的一个扩张，即元素x扩充到独立子集A后仍保持独立性。

例：在图的拟阵M_G中，若A是一个独立子集，则e是A的扩张是指加入e后仍不产生回路。

- 拟阵的最大独立子集

若A是拟阵M的独立子集，且无法进行任何扩张，则A称为M的最大独立子集，即在M中没有更大的独立子集能包含A。

拟阵最大独立子集性质

- **Theorem. 2：拟阵中所有最大独立子集的大小(势)相同。**

  pf：[反证法]

  设A是M的最大独立子集，且存在另一更大的最大独立子集B。

  由交换性知：$\exists x \in B - A$，使$A \cup \{x\} \in I$，
  即A是可扩张的，与A是最大独立子集矛盾。

例：在M_G中，每个最大独立子集是一棵生成树，有$|v| - 1$条边

加权拟阵定义

- 若对$\forall x \in S$，为x指派一个正的权值$w(x)$，则称$M = (S, I)$是加权拟阵。S的子集(独立子集)的权可定义为：

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x) \text{ for any } A \in S$$

例：M_G中，可定义$w(e)$为边e的长度(权重)，$w(A)$为A中所有边的长度(权重)之和。

拟阵最优子集

- **加权拟阵的最大独立子集可描述某些问题的最优解**(加权拟阵的最优子集)

可用贪心算法求出最优解的许多问题(<u>但不是全部</u>)可形式化为一加权拟阵中找到一个**权值最大的独立子集**。即：给定加权拟阵$M=(S,I)$，希望找到I的一个独立子集A，使$w(A)$最大。

- 拟阵的**最优子集**：**拟阵中权值最大的独立子集**

它也一定是拟阵中的一个最大独立子集(子集**体积**最大)，反之不然。

pf：$\because \forall x \in S$，$w(x) > 0$

$\therefore$若权值最大的独立子集A不是最大独立子集，可将其扩张至最大独立子集，后者的权更大，使A的权非最大。

拟阵最优子集 (续)

❖例：求连通无向图$G=(V,E)$的MST问题⇒求加权拟阵中权最大的独立子集问题。即：求拟阵的最优子集。

设G的权函数w定义为边的长度，且$w(e)>0$。

加权拟阵M_G的权w'定义为：$w'(e)=w_0-w(e)$，w_0为一大于各边最大长度的值。

在M_G中，$\forall e\in E, w'(e)>0$，故M_G的每个最优子集A是G的一颗MST。

pf：$\because A$是拟阵的最大独立子集

$\therefore$它是一颗生成树，它的权为$w'(A)=(|V|-1)w_0-w(A)$

$\because$ A是权最大的独立子集

$\therefore w'(A)$最大必有$w(A)$最小，即A是G的一颗MST

加权拟阵上的贪心算法

- 加权拟阵的贪心算法
  - 适用于任何加权拟阵求最优子集*A*
  - 贪心之处：尽可能选权值最大的元素扩充到*A*

加权拟阵上的贪心算法 (续)

$Greedy(M,w)\{$

//输入拟阵$M=(S,I)$，表示正的权函数

$A \leftarrow \Phi;$

按权w单调递减对S排序

for 每个$x \in S$，按$w(x)$单调递减 do

$if\ (A \cup \{x\} \in I)\ then$ //独立性检测

$A \leftarrow A \cup \{x\};$ //扩充x未破坏A的独立性

//否则放弃x

$return\ A;$

$\}$

时间分析：

设$|S|=n$，排序$O(n\lg n)$

for循环n次，

每次检验$A \cup \{x\}$是否独立，

设检查时间为$O(f(n))$，

总时间为$O\left(n\lg n+nf(n)\right)$

$Greedy$算法第一步贪心选择正确

- $Greedy$算法返回1个最优子集

  A是独立子集易从Φ独立开始用归纳法证明

  - Lemma. 3：(拟阵呈现贪心选择性质)

    设$M=(S,I)$是加权拟阵，权函数为w，且S已按权值的单调递减排序，设x是S的第一个使$\{x\}$独立的元素(若这样的x存在)。若x存在，则存在S的一个最优子集A包含x 。(即说明第一步贪心选择正确)

    pf:

    1) 若无这样的x存在，则唯一的独立子集是Φ

    2) 否则设B为M的任一非空最优子集，若$x\in B$, 则令$A=B$，证毕

$Greedy$算法第一步贪心选择正确 (续)

若$x \notin B$，则可从B构造一个最优子集A，使其包含x。

为此需证$w(\mathrm{A}) \geq w(B)$：

i) 先证$\forall y \in B$，有$w(x) \geq w(y)$

$\because\ y \in B \quad \therefore \{y\} \subseteq B$

由于B是M的最优子集，故B也是独立子集，

由I的遗传性知$\{y\}$亦是独立子集

$\because \{x\}$是S的第一个独立子集，而S中元素已按权值的单调递减排序

$\therefore\ w(x) \geq w(y)$

$Greedy$算法第一步贪心选择正确 (续)

ii) 构造集A，使其包含x且A最优

开始令$A = \{x\}$，显然A独立。

利用交换性质，重复地在B中找新的元素，扩充到A使A独立，

直至$|A| = |B|$ 。于是有：$A = (B - \{y\}) \cup \{x\}$对某个$y$成立。

由i) 立即知道：

$$w(A) = w(B) - w(y) + w(x) \geq w(B)$$

由B是最优子集，可知A亦是最优子集，且它包括x。

$Greedy$算法跳过非Φ扩张的元素不会导致错误

下面的引理和推论说明：若一元素开始未被选中，则此后亦不可能被选中

- Lemma. 4：设$M=(S,I)$是任一拟阵，若S的一个元素x是S的某个独立子集A的一个扩张，则x亦是Φ的一个扩张。

pf:

$\because x$是A的扩张

$\therefore A\cup\{x\}\in I$

由I的遗传性知，$\{x\}$是独立的，它是Φ的一个扩张。

$Greedy$算法跳过非Φ扩张的元素不会导致错误 (续)

- **Corollary. 5**：设$M=(S,I)$是任一拟阵，若S的一个元素x不是Φ的扩张，则x也不是S的任何独立子集A的一个扩张。

  pf：由Lemma. 4易证

  该推论告诉我们，若一开始某元素没被选中，此后亦不会选中，保证$Greedy$算法开始时的正确性

拟阵具有最优子结构性质

- **Lemma. 6 (拟阵具有最优子结构性质)**

对于加权拟阵$M = (S, I)$，设x是$Greedy$算法选中的第一个元素，找一个包含x的权最大的独立子集的剩余问题可归结为找加权拟阵$M' = (S', I')$的一个权值最大的独立子集，这里：

$$S' = \{y \in S: \{x, y\} \in I\}$$

//即S'由S中可扩张至$\{x\}$中的元素组成

$$I' = \{B \subseteq S - \{x\}: B \cup \{x\} \in I\}$$

//即I'是由S的不包含x的独立子集构成

且M'的权函数是M的权函数，但只限于S'。我们称M'是由元素x引起的M的收缩，它是M的子问题。

拟阵具有最优子结构性质 (续)

pf:

若A是M的任一包含x的最优子集(即权最大的独立子集)，则由I'的定义可知：

$A' = A - \{x\}$是M'的一个独立子集，

反之，M'的任一独立子集A'产生M的一个独立子集：

$A = A' \cup \{x\}$

$\because$两种情况下，均有$w(A) = w(A') + w(x)$

$\therefore$包含x的A是M中权最大的独立子集，保证了$w(A')$须最大，即A'是M'的最优子集，反之亦然，即：

A是原问题M的最优解要求A'是子问题M'的最优解；反之，$A' \cup \{x\}$构成原问题的最优解A

$Greedy$算法正确性证明

❖ **Theorem. 7 (拟阵的贪心算法的正确性)**

若$M=(S,I)$是权函数为w的加权拟阵，则调用$Greedy(M,w)$将返回一个最优子集

pf：

① 由Corollary.5知，一开始被忽略的元素可以放弃，因为它们不是Φ的扩张意味着此后也不会是任何独立子集的扩张。

② 一旦一个元素x被选中，Lemma.3保证了算法将其扩充到A中是正确的，因为存在一个最优子集包含x。

$Greedy$算法正确性证明 (续)

③ Lemma.6蕴含着剩余子问题是在M'中找一最优子集。在$Greedy$将A置为$\{x\}$之后，剩下的各步骤可解释为是在拟阵M'中进行的，因为$\forall B \in I'$，B在M'中独立等价于$B \cup \{x\}$在M中独立。因此，$Greedy$的后续操作将找出M'的一个最优子集(可用归纳法)，$Greedy$的全部操作可以找到M的最优子集。

- **若一应用问题能抽象为加权拟阵，则一定能用贪心法求出其最优解。**