递归式求解——替换法

替换法 (代入法)

- 1) 猜测解; 2) 用数学归纳法确定常数c，证明解正确
- Key：用猜测的解代入到递归式中。

例1：确定$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$的上界

猜测解$T(n) = O(n\lg n)$ 假定对于所有正数m, 满足$m < n$均成立

要证$T(n) \le cn\lg n$，对某个常数$c > 0$成立

假定它对于$\lfloor n/2 \rfloor$成立，$i.e.$，$T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c\lfloor n/2 \rfloor \lg \lfloor n/2 \rfloor$,

将它代入递归式中

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg \lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le cn\lg(n/2)+n \\
&= cn\lg n - cn\lg 2 + n \\
&= cn\lg n - cn + n \le cn\lg n \quad \text{只要} c \ge 1
\end{aligned}
$$

替换法

- **例1(续)**

下面证此解对边界条件亦成立

数学归纳法要求证明解在边界条件下也成立

假定$T(0)=0$，$T(1)=1$，

而$T(n)\le c\times 1\times \lg 1=0$不成立

但渐近界只要证$T(n)\le cn\lg n \quad for\ n\ge n_0$就行了

$\therefore T(2)=2T(1)+2=4$

$T(2)\le c\times 2\times \lg 2=2c$　　只要$c\ge 2$即可

替换法(续)

1. **做出好的猜测(没有一般方法，只能凭经验)**

- 与见过的解类似，则猜测之。例如：

  $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$

  当足够大时，$\lfloor n/2 \rfloor$和$\lfloor n/2 \rfloor$+17相差无几，故上界应为$cn\lg n$

- 先证较宽松的上、下界，减小猜测范围。例如：

  $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

  显然，$T(n) = \Omega(n)$ ∵式中有"n"这个项

  $T(n) = O(n^2)$ ∵最多分解$O(n)$次，每次时间为n

  然后降低上界，升高下界，使它收敛于渐进界$T(n) = \Theta(n\lg n)$

替换法(续)

2. 细节修正

- 有时猜测解是正确的，但数学归纳法却不能直接证明其细节，这是因为**数学归纳法没有强大到足以证明其细节**。这时可从猜测解中**减去一个低阶项**以使数学归纳法得以满足
- 例： $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor)+T(\lceil n/2 \rceil)+1$

  显然，该解是$O(n)$，即证明$T(n) \le cn$

  $pf: T(n) \le c(\lfloor n/2 \rfloor)+c(\lceil n/2 \rceil)+1$ //由归纳假设代入

  $= cn+1$ //并不蕴含$T(n) \le cn$

  从解中减去一个常数猜测为：$T(n) \le cn - b$ //常数$b \ge 0$

  $pf: T(n) \le (c\lfloor n/2 \rfloor - b) + (c\lceil n/2 \rceil - b) + 1$

  $= cn - 2b + 1 \le cn - b$ //只要$b \ge 1$，$c > 0$

替换法(续)

3. 避免陷阱

- 与求和式的数学归纳法类似，证明时渐近记号的使用易产生错误。
- 例：设$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

  猜测$T(n) \le cn$ //正确应为$n\lg n$

  $pf: T(n) \le 2(c\lfloor n/2 \rfloor) + n$
  $\le cn + n$
  $\le O(n)$ //wrong! 须证明$T(n) \le cn$的精确形式

替换法(续)

4. 变量变换

- 有时改动变量能使未知递归式变为熟悉的式子。例如：

$T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \lg n$

令$m = \lg n$，$2^m = n$

得$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$

再令$S(m) = T(2^m)$

得$S(m) = 2S(m/2) + m$ //例1的形式

$\therefore S(m) = O(m\lg m)$。将其改回到$T$的形式

$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m\lg m) = O(\lg n\lg\lg n)$