渐进时间确界

渐进增长

- 在插入排序的示例中，我们讨论了在分析算法时，我们
  - 关注算法的最坏运行时间 (<u>输入规模n</u>的函数)；
  - 忽略精确运行时间中的<u>精确常量 (exact constants)</u>；
  - 忽略精确运行时间中的<u>低阶项 (lower order terms)</u>。
- 什么是插入排序的最坏运行时间？
  - 这取决于我们计算机的速度：
    - 在<u>相同</u>的机器上？
    - 在<u>不同</u>的机器上？
- BIG IDEA:

  --忽略机器相关的常数；

  --关注<u>$n \to \infty$</u>时，<u>T(n)</u>的变化情况。

  <u>“渐近分析”</u>

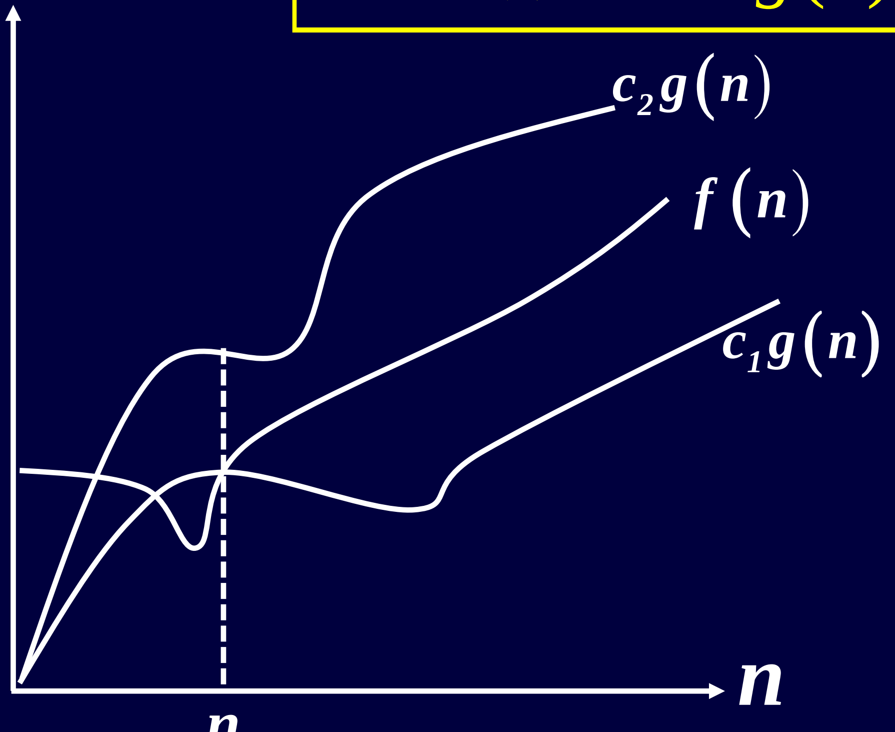
渐进表示

- 算法的渐进时间定义为一个函数，定义域为自然数集合N={0,1,2,…}，但有时也将其扩展到实数或限制到自然数的某个子集上。
- 我们用渐进记号来刻画算法运行的时间，但是渐进记号也可以适用于刻画算法的某个其他方面（例如算法使用的空间)，甚至可以适用于和算法没有任何关系的函数。

Θ记号（渐进时间确界）

- 定义：给定一个函数g(n)，$\Theta(g(n))$表示一个函数的集合：

$$\boxed{\begin{aligned}&\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists \text{常数} c_1, c_2, n_0 > 0, \text{使得对所有的} \\ &n \ge n_0 \text{有}: 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)\} \ // n\text{为size}\end{aligned}}$$



$f(n) = \Theta(g(n))$

- 存在正常数c_1和c_2以及足够大的n，函数$f(n)$能够被“<u>夹在</u>”$c_1 g(n)$和$c_2 g(n)$之间，则$f(n)$ <u>属于</u>集合$\Theta(g(n))$，$f(n) = \Theta(g(n))$。
- 因为$\Theta(g(n))$ 是一个集合，也可以记为$f(n) \in \Theta(g(n))$。
- 我们称$g(n)$是$f(n)$的一个**渐进紧致(确)界** (asymptotically tight bound) 。

渐进时间确界(续)

- 意义：对所有的$n \geq n_0$，函数$f(n)$在一个常数因子范围内等于$g(n)$
- $g(n)$是$f(n)$的一个渐进时间确界，即$g(n)$是$f(n)$是渐进上界和渐进下界
  - $f(n)$ — 算法的计算时间
  - $g(n)$ — 算法时间的数量级
  - 不同的输入实例，一个算法的计算时间$f(n)$不一定相同，故算法的计算时间应该是一个函数集合。

* Note： Θ定义中要求$f(n)$和$g(n)$是渐进非负的 (n足够大时函数值非负)，

否则，$\Theta(g(n))$是空集。

渐进时间确界(续)

- 例：$T(n)=an^2+bn+c$，则$T(n)=\Theta(n^2)$
  - 取$c_1=\frac{a}{4}$，$c_2=7\frac{a}{4}$，$n_0=2max(\frac{|b|}{a},\sqrt{\frac{|c|}{a}})$
  - 则对所有$n\geq n_0$，有$0\leq c_1n^2\leq an^2+bn+c\leq c_2n^2$成立
- 记号$\Theta(1)$：
  - 表示算法的运行时间与问题规模n无关；
  - 亦可理解为常值函数$\Theta(n^0)$：任何常数是0次多项式。

渐进时间确界(续)

- 例：证明 $\frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$
  - 若上式成立，则存在正常量c_1，c_2和n_0，使得对所有$n \geq n_0$，有

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1) \leq c_2 n^2$$

  - 当$n \geq 0$时，$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n^2$，所以可取$c_2 = \frac{1}{2}$;
  - 当$n \geq 2$时，$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{4}n^2$，所以可取$c_1 = \frac{1}{4}$;
  - 综上，取$n_0 = 2$，$c_1 = \frac{1}{4}$，$c_2 = \frac{1}{2}$，有$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1) \leq c_2 n^2$。

渐进时间确界(续)

- **例：证明 $6n^3 \neq \Theta(n^2)$**
  - 可采用反证法。若上式成立，则存在正常量c_1，c_2和n_0，使得对所有$n \geq 0$，有
  $$0 \leq c_1 n^2 \leq 6n^3 \leq c_2 n^2$$
  - 直觉告诉我们，问题可能出现在右侧不等式。为了验证这种直觉，我们先证明对任意$n \geq n_0$，有$6n^3 \leq c_2 n^2$。
  - 不等式两边同除以n^2，得到$6n \leq c_2$，即$n \leq \frac{c_2}{6}$，显然不成立
  - 综上，$6n^3 \neq \Theta(n^2)$。

等式中的渐进记号

- 用于替换等式中的低阶项以简化表达式
- 例如：
  - $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 4n^3 + 3n^2 + \Theta(n)$
    $= 4n^3 + \Theta(n^2) = \Theta(n^3)$
- 或者，我们可以这样做：
  - $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 4n^3 + f(n^2)$，其中我们利用$f(n^2)$简化了该等式。