1.1 线性轨迹（恒定速度）

确定从初始点 q0 到终点 q1 运动最简单的轨迹定义为：

$$\mathrm{q}(\mathrm{t})=a_0+a_1(t-t_0)$$

一旦指明了初始和结束时间 t0,t1 以及初始和结束位置 q0,q1，参数 a0，a1 可以通过以下方程组来计算：

$$\begin{cases} q(t_0)=q_0=a_0 \\ q(t_1)=q_1=a_0+a_1(t-t_0) \end{cases}$$

$$\mathrm{T}=t_1-t_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

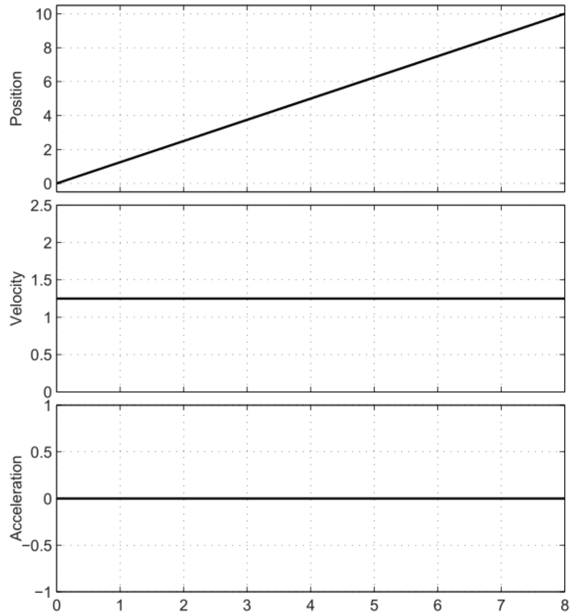
因此：

$$\begin{cases} a_0=q_0 \\ a_1=\dfrac{q_1-q_0}{t_1-t_0}=\dfrac{\hbar}{T} \end{cases}$$

位移$\mathrm{h}=q_1-q_0$,在时间[t0.t1]中，速度是恒定的，值为：

$$\dot{q}(t)=\frac{\hbar}{T}=a_1$$

显然，在运行过程中加速度为零，但是在运动的初始和结束时有加速度突变脉冲。



1.2 抛物线轨迹(对称恒定加速度)

这个轨迹，有恒定的加速度，也被称为引力轨迹，他的特征是加速度有恒定的绝对值，在加减速阶段有相反的符号。实际上，这个轨迹更像一个二阶多项式组成。一个是从 t0 到 tf，一个是从 tf 到 t1.

我们先考虑关于中点对称的轨迹。定义 $t_f = \frac{t_0+t_1}{2}$，$q_f = \frac{q_0+q_1}{2}$, $T_a = \left(t_f - t_0\right) = {}^{T}\!/_{2}$, $(q_f - q_0) = {}^{h}\!/_{2}$.

在第一阶段，加速段，轨迹可以定义为：

$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 \qquad t\epsilon[t_0, t_f]$$

参数 a0，a1，a2 可以通过边界条件 q0，qf 和初始速度 V0

$$\begin{cases} q_a(t_0) = q_0 = a_0 \\ q_a(t_f) = q_f = a_0 + a_1(t_f - t_0) + a_2(t_f - t_0)^2 \\ q_a(t_0) = v_0 = a_1 \end{cases}$$

可以得到：

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = v_0, \qquad a_2 = \frac{2}{T^2}(h - v_0 T)$$

因此，在$t\epsilon[t_0,t_f]$中，轨迹可以由以下表示：

$$\begin{cases} q_a(t) = q_0 + v_0(t-t_0) + \frac{2}{T^2}(h-v_0T)\left(t_f-t_0\right)^2 \\ \dot{q}_a(t) = v_0 + \frac{4}{T^4}(h-v_0T)(t-t_0) \\ \ddot{q}_a(t) = \frac{4}{T^2}(h-v_0T) \end{cases}$$

在 tf 点的速度是：

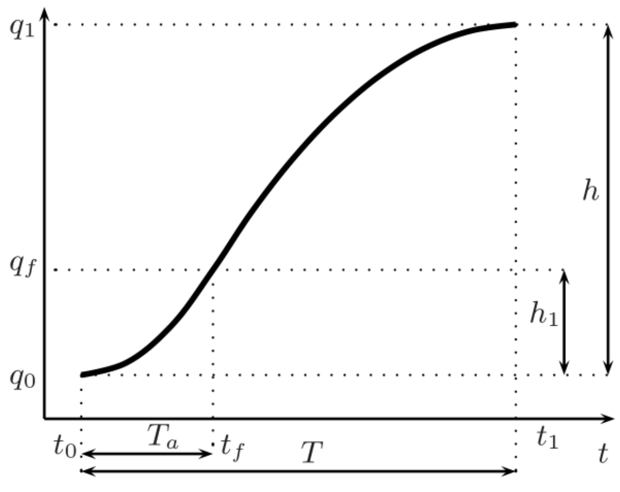
$$v_{max} = \dot{q}_a\left(t_f\right) = 2\frac{h}{T} - v_0$$

第二阶段，在中点和终点之间，轨迹可以描述为：

$$q_b(t_1) = a_3 + a_4\left(t-t_f\right) + a_5(t-t_f)^2 \qquad t\epsilon[t_f,t_1]$$

如果速度的最终值 v1 是确定的，当 t=t1 时，参数 a3，a4，a5 可以由下面公式计算：

$$\begin{cases} q_b\left(t_f\right) = q_f = a_3 \\ q_b(t_1) = q_1 = a_3 + a_4\left(t-t_f\right) + a_5(t-t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t_1) = v_1 = a_4 + 2a_5\left(t-t_f\right) \end{cases}$$

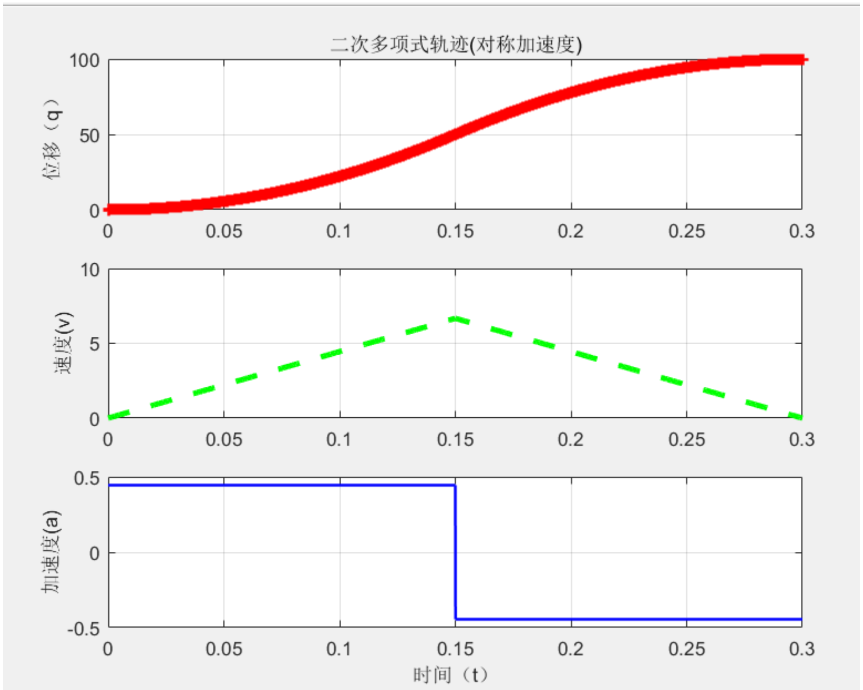


可以得到：

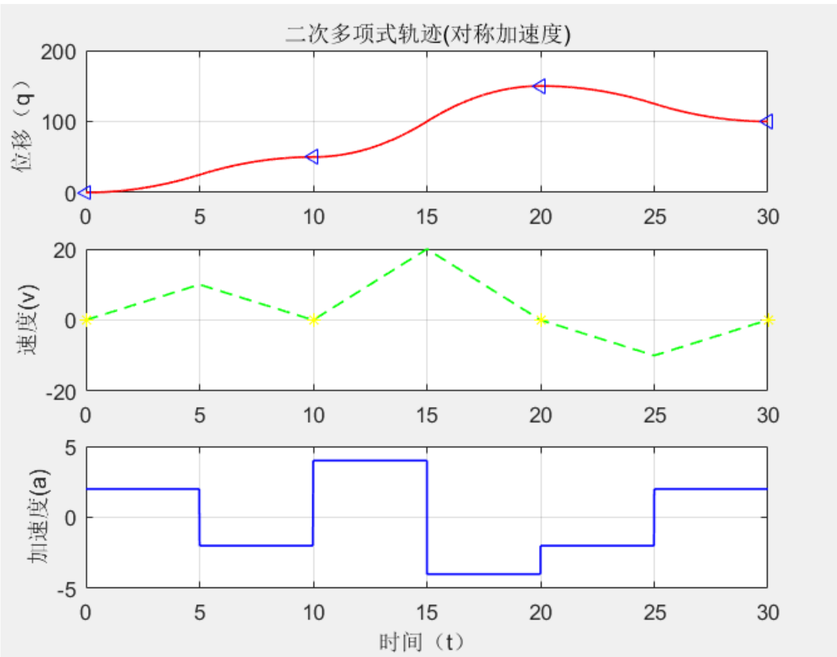
$$a_3 = q_f = \frac{q_0+q_1}{2}, \quad a_4 = 2\frac{h}{T} - v_1, \qquad a_5 = \frac{2}{T^2}(v_1T-h)$$

在$t\epsilon[t_f,t_1]$阶段轨迹可以描述为：

$$\begin{cases} q_b(t)=q_f+\left(2\dfrac{h}{T}-v_1\right)(t-t_f)+\dfrac{2}{T^2}(v_1T-h)(t-t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t)=2\dfrac{h}{T}-v_1+\dfrac{4}{T^2}(v_1T-h)(t-t_f) \\ \ddot{q}_b(t)=\dfrac{4}{T^2}(v_1T-h) \end{cases}$$



PVT 轨迹：



1.3 非对称恒加速度轨迹

在一般情况下，拐点不一定在$\frac{t_0+t_1}{2}$时刻，轨迹可以用下面两个多项式描述。

$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 \qquad t\epsilon[t_0, t_f]$$

$$q_b(t) = a_3 + a_4\left(t - t_f\right) + a_5(t - t_f)^2 \qquad t\epsilon[t_f, t_1]$$

根据 t0，t1 时刻速度和位置的四个边界条件可以得到 a0，a1，a2，a3 等参数以及 tf 时刻的两个连续条件。

$$\begin{cases} q_a(t_0) = a_0 & = q_0 \\ q_b(t_1) = a_3 + a_4\left(t_1 - t_f\right) + a_5(t_1 - t_f)^2 & = q_1 \\ \dot{q}_a(t_0) = a_1 & = v_0 \\ \dot{q}_b(t_1) = a_4 + 2a_5\left(t_1 - t_f\right) & = v_1 \\ q_a\left(t_f\right) = a_0 + a_1\left(t_f - t_0\right) + a_2\left(t_f - t_0\right)^2 & = a_3\left(= q_b\left(t_f\right)\right) \\ \dot{q}_a\left(t_f\right) = a_1 + 2a_2\left(t_f - t_0\right) & = a_4\left(= \dot{q}_b\left(t_f\right)\right) \end{cases}$$

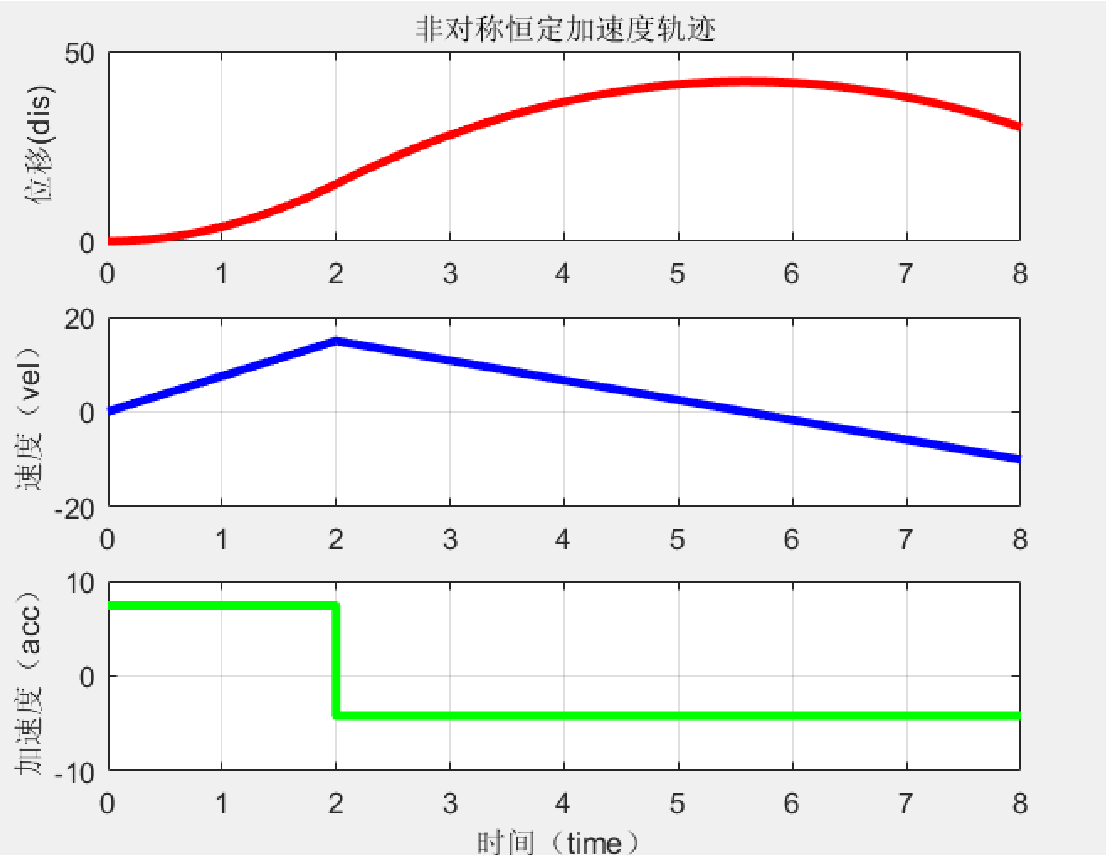
定义 Ta=tf-t0 和 Td=t1-tf,，求得最终系数为：

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \dfrac{2h - v_0(T + T_a) - v_1 T_d}{2TT_a} \\ a_3 = \dfrac{2q_1 T_a + T_d\left(2q_0 + T_a(v_0 - v_1)\right)}{2T} \\ a_4 = \dfrac{2h - v_0 T_a - v_1 T_d}{2} \\ a_5 = -\dfrac{2h - v_0 T_a - v_1(T + T_d)}{2TT_a} \end{cases}$$

速度和加速度可以得到：

$$\begin{cases} \dot{q}_a(t) = a_1 + 2a_2(t-t_0) = v_0 + \dfrac{2h - v_0(T+T_a) - v_1 T_d}{T T_a}(t-t_0) \\ \ddot{q}_a(t) = 2a_2 = \dfrac{2h - v_0(T+T_a) - v_1 T_d}{T T_a} \end{cases} \quad t\epsilon[t_0, t_f]$$

$$\begin{cases} \dot{q}_b(t) = a_4 + 2a_5(t-t_f) = \dfrac{2h - v_0 T_a - v_1 T_d}{2} - \dfrac{2h - v_0 T_a - v_1(T+T_d)}{T T_a}(t-t_f) \\ \ddot{q}_b(t) = 2a_5 = -\dfrac{2h - v_0 T_a - v_1(T+T_d)}{T T_a} \quad t\epsilon[t_f, t_1] \end{cases}$$



1.4 三次多项式轨迹

如果指定了在 t0 和 t1 时刻的速度和位置的值 q0, q1, v0, v1, 有四个边界条件需要满足，必须要使用三次多项式：

$$\mathrm{q(t)} = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 \qquad \mathrm{t}\epsilon[t_0, t_1]$$

$$q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1, \dot{q}(t_0) = v_0, \dot{q}(t_1) = v_1$$

利用三次多项式拟合轨迹：

$$\begin{cases} q(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 \\ \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2(t-t_0) + 3a_3(t-t_0)^2 \\ \ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3(t-t_0) \end{cases}$$

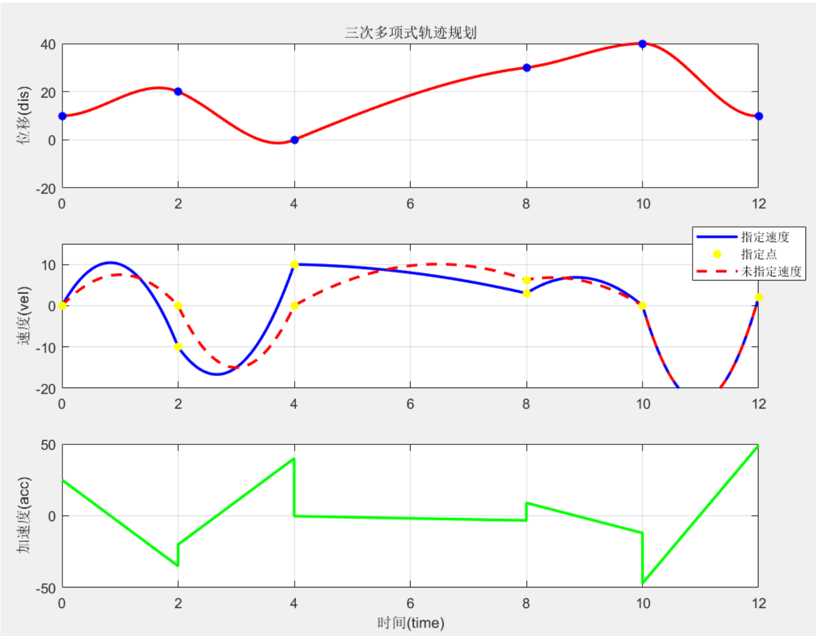
带入边界条件，可以求出四个参数 a0，a1，a2，a3 是：

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \dfrac{3\hbar - (2v_0 + v_1)T}{T^2} \\ a_3 = \dfrac{-2h + (v_0 + v_1)T}{T^3} \end{cases}$$

在定义轨迹通过一些列的点 q0，q1 •••• qn 时，中间的速度并不需要全部指定，中间速度的合适值可以通过以下公式来决定：

$$\begin{aligned} &v_0 && (assigned) \\ &v_k = \begin{cases} 0 & sign(d_k) \neq sign(d_{k+1}) \\ \dfrac{1}{2}(d_k + d_{k+1}) & sign(d_k) = sign(d_{k+1}) \end{cases} \\ &v_n && (assigned) \end{aligned}$$

$$d_k = {(q_k - q_{k-1})}\Big/{(t_k - t_{k-1})}$$



代码

```
for k=1:length(t)-1
    h(k)=q(k+1)-q(k);
    T(k)=t(k+1)-t(k);
    a0(k)=q0(k);
    a1(k)=v(k);
    a2(k)=(3*h(k)-(2*v(k)+v(k+1))*T(k))/(T(k).^2);
    a3(k)=(-2*h(k)+(v(k)+v(k+1))*T(k))/(T(k).^3);

    t_k=t0(k):Ts:t1(k);
    q_k=a0(k)+a1(k)*(t_k-t0(k))+a2(k)*(t_k-
t0(k)).^2+a3(k)*(t_k-t0(k)).^3;
    v_k=a1(k)+2*a2(k)*(t_k-t0(k))+3*a3(k)*(t_k-t0(k)).^2;
    a_k=2*a2(k)+6*a3(k)*(t_k-t0(k));

    time=[time,t_k];
    dis=[dis,q_k];
    vel=[vel,v_k];
    acc=[acc,a_k];
end
```

1.5 五次多项式

在三次多项式的插补过程中，并没有指定加速度的边界条件，导致加速度虽然在插补过程中连续没有突变，但是在每个阶段的初始和结束边界上有突变，也就是在路径上加速度不连续。为了获得连续的加速度轨迹，我们需要为加速度分配合适的初始值和终值。因此，存在六种边界条件(在这里为了使加速度和系数分别，加速度使用加粗字体)：

$\mathrm{q}(t_0) = q_0, \mathrm{q}(t_1) = q_1, \dot{\mathrm{q}}(t_0) = v_0, \dot{\mathrm{q}}(t_1) = v_1$， $\ddot{\mathrm{q}}(t_0) = \boldsymbol{a}_0, \ddot{\mathrm{q}}(t_1) = \boldsymbol{a}_1$

六个边界条件对应高阶多项式的六个系数，a0 •••••• a6；

$$
\begin{cases}
q(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 \\
+a_4(t-t_0)^4 + a_5(t-t_0)^5 \\
\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2(t-t_0) + 3a_3(t-t_0)^2 + 4a_4(t-t_0)^3 \\
+5a_5(t-t_0)^4 \\
\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3(t-t_0) + 12a_4(t-t_0)^2 + 20a_5(t-t_0)^3 \\
\dddot{q}(t) = 6a_3 + 24a_4(t-t_0) + 60a_5(t-t_0)^2
\end{cases}
$$

将边界条件带入，可以求得六个系数：

$$
\begin{cases}
a_0 = q_0 \\
a_1 = v_0 \\
a_2 = 0.5\boldsymbol{a_0} \\
a_3 = \dfrac{2h - (8v_1 + 12v_0)T - (3\boldsymbol{a_0} - \boldsymbol{a_1})T^2}{2T^3} \\
a_4 = \dfrac{-30\mathrm{h} + (14v_1 + 16v_0)T + (3\boldsymbol{a_0} - 2\boldsymbol{a_1})T^2}{2T^4} \\
a_5 = \dfrac{12h - 6(v_1 + v_0)T + (\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_0})T^2}{2T^5}
\end{cases}
$$

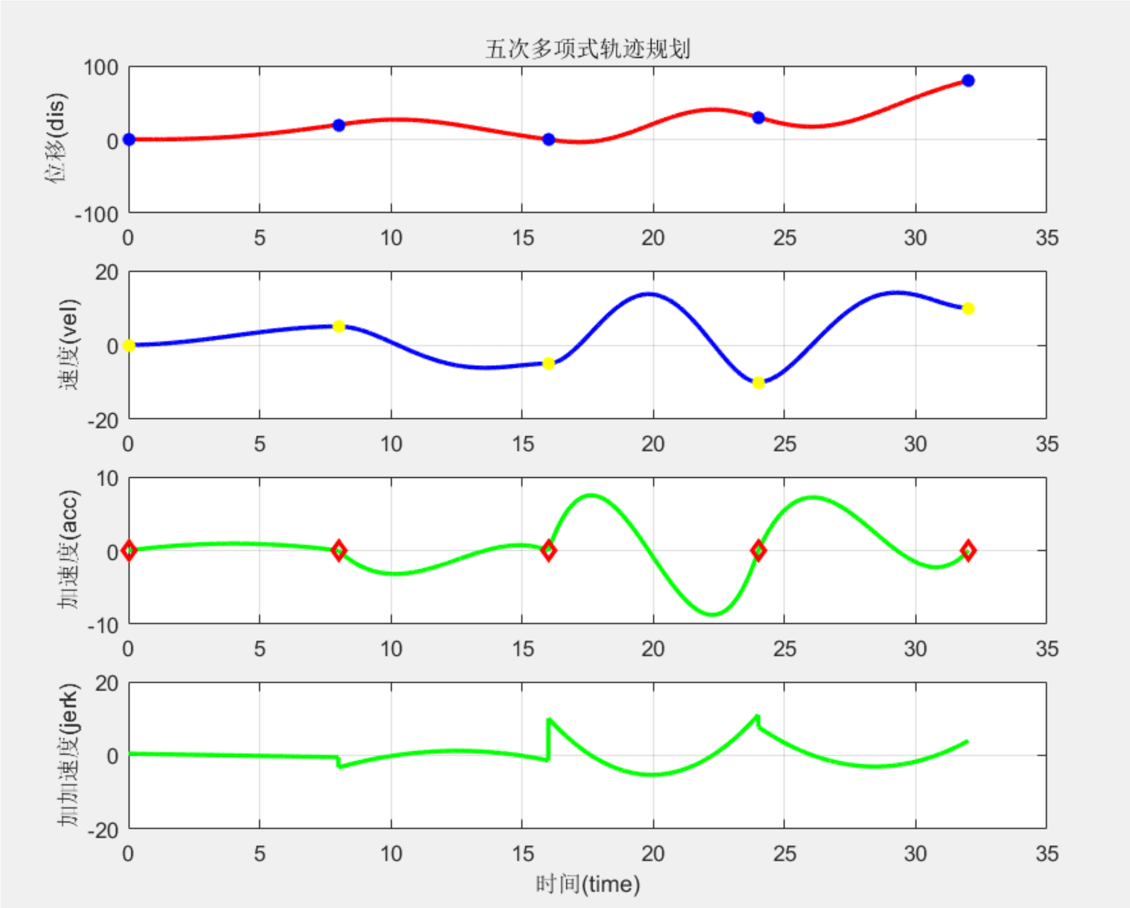
代码：

```
for k=1:length(t)-1;
    h(k)=q(k+1)-q(k);
    T(k)=t(k+1)-t(k);
    a0(k)=q(k);
    a1(k)=v(k);
    a2(k)=0.5*a(k);
    a3(k)=(1/(2*T(k).^3))*(20*h(k)-
(8*v(k+1)+12*v(k))*T(k)-(3*a(k)-a(k+1))*T(k).^2);
    a4(k)=(1/(2*T(k).^4))*(-
30*h(k)+(14*v(k+1)+16*v(k))*T(k)+(3*a(k)-
2*a(k+1))*T(k).^2);
    a5(k)=(1/(2*T(k).^5))*(12*h(k)-
6*(v(k+1)+v(k))*T(k)+(a(k+1)-a(k))*T(k).^2);

    t_k=t(k):Ts:t(k+1);
    q_k=a0(k)+a1(k)*(t_k-t(k))+a2(k)*(t_k-
t(k)).^2+a3(k)*(t_k-t(k)).^3+a4(k)*(t_k-
t(k)).^4+a5(k)*(t_k-t(k)).^5;
    v_k=a1(k)+2*a2(k)*(t_k-t(k))+3*a3(k)*(t_k-
t(k)).^2+4*a4(k)*(t_k-t(k)).^3+5*a5(k)*(t_k-t(k)).^4;
    a_k=2*a2(k)+6*a3(k)*(t_k-t(k))+12*a4(k)*(t_k-
```

```
t(k)).^2+20*a5(k)*(t_k-t(k)).^3;
    j_k=6*a3(k)+24*a4(k)*(t_k-t(k))+60*a5(k)*(t_k-
t(k)).^2;

    time=[time,t_k];
    dis=[dis,q_k];
    vel=[vel,v_k];
    acc=[acc,a_k];
    jerk=[jerk,j_k];
end
```



1.6 七次多项式

有时候，会需要更多的边界条件来限制轨迹，可以给加加速度加上边界条件，这样就有八个边界条件，需要用七次多项式来拟合：

$$\mathrm{q}(t_0) = q_0, \mathrm{q}(t_1) = q_1$$

$$\dot{\mathrm{q}}(t_0) = v_0, \dot{\mathrm{q}}(t_1) = v_1$$

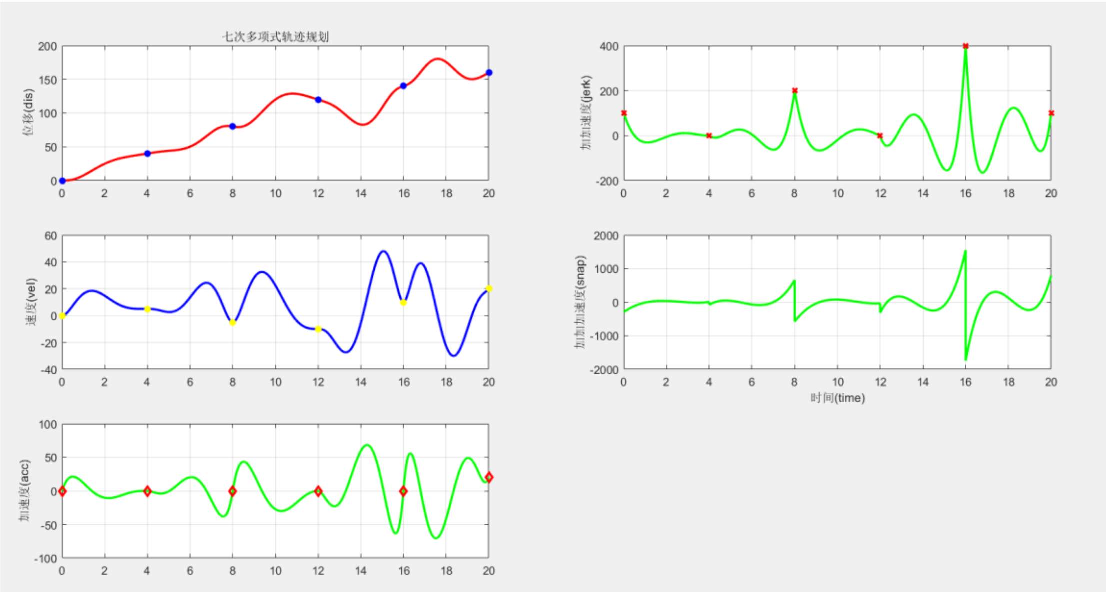
$$\ddot{\mathrm{q}}(t_0) = \boldsymbol{a}_0, \ddot{\mathrm{q}}(t_1) = \boldsymbol{a}_1$$

$$\dddot{\mathrm{q}}(t_0) = j_0, \dddot{\mathrm{q}}(t_1) = j_1$$

$$\begin{cases} \mathrm{q(t)} = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 + a_4(t-t_0)^4 \\ +a_5(t-t_0)^5 + a_6(t-t_0)^6 + a_7(t-t_0)^7 \\ \dot{\mathrm{q}}\mathrm{(t)} = a_1 + 2a_2(t-t_0) + 3a_3(t-t_0)^2 + 4a_4(t-t_0)^3 \\ +5a_5(t-t_0)^4 + 6a_6(t-t_0)^5 + 7a_7(t-t_0)^6 \\ \ddot{\mathrm{q}}\mathrm{(t)} = 2a_2 + 6a_3(t-t_0) + 12a_4(t-t_0)^2 + 20a_5(t-t_0)^3 \\ +30a_6(t-t_0)^4 + 42a_7(t-t_0)^5 \\ \dddot{\mathrm{q}}\mathrm{(t)} = 6a_3 + 24a_4(t-t_0) + 60a_5(t-t_0)^2 + 120a_6(t-t_0)^3 \\ +210a_7(t-t_0)^4 \end{cases}$$

将边界条件带入，可以求得八个参数为：

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = 0.5\boldsymbol{a_0} \\ a_3 = \dfrac{1}{6}j_0 \\ a_4 = \dfrac{210h - T[(30\boldsymbol{a_0} - 15\boldsymbol{a_1})T + (4j_0 + j_1)T^2 + 120v_0 + 90v_1]}{2T^4} \\ a_5 = \dfrac{-168\mathrm{h} + T[(20\boldsymbol{a_0} - 14\boldsymbol{a_1})T + (2j_0 + j_1)T^2 + 90v_0 + 78v_1]}{2T^5} \\ a_6 = \dfrac{420h - T[(45\boldsymbol{a_0} - 39\boldsymbol{a_1})T + (4j_0 + 3j_1)T^2 + 216v_0 + 204v_1]}{2T^6} \\ a_7 = \dfrac{-120\mathrm{h} + T[(12\boldsymbol{a_0} - 12\boldsymbol{a_1})T + (j_0 + j_1)T^2 + 60v_0 + 60v_1]}{2T^5} \end{cases}$$



代码

```
for k=1:length(t)-1;
    h(k)=q(k+1)-q(k);
    T(k)=t(k+1)-t(k);
    a0(k)=q(k);
    a1(k)=v(k);
    a2(k)=0.5*a(k);
    a3(k)=1/6*j(k);
    a4(k)=(1/(6*T(k).^4))*(210*h(k)-T(k)*((30*a(k)-
15*a(k+1))*T(k)+(4*j(k)+j(k+1))*T(k).^2+120*v(k)+90*v(k+1)
));
    a5(k)=(1/(2*T(k).^5))*(-168*h(k)+T(k)*((20*a(k)-
14*a(k+1))*T(k)+(2*j(k)+j(k+1))*T(k).^2+90*v(k)+78*v(k+1))
);
    a6(k)=(1/(6*T(k).^6))*(420*h(k)-T(k)*((45*a(k)-
39*a(k+1))*T(k)+(4*j(k)+3*j(k+1))*T(k).^2+216*v(k)+204*v(k
+1)));
    a7(k)=(1/(6*T(k).^7))*(-120*h(k)+T(k)*((12*a(k)-
12*a(k+1))*T(k)+(j(k)+j(k+1))*T(k).^2+60*v(k)+60*v(k+1)));

    t_k=t(k):Ts:t(k+1);
    q_k=a0(k)+a1(k)*(t_k-t(k))+a2(k)*(t_k-
t(k)).^2+a3(k)*(t_k-t(k)).^3+a4(k)*(t_k-
t(k)).^4+a5(k)*(t_k-t(k)).^5+a6(k)*(t_k-
t(k)).^6+a7(k)*(t_k-t(k)).^7;
    v_k=a1(k)+2*a2(k)*(t_k-t(k))+3*a3(k)*(t_k-
t(k)).^2+4*a4(k)*(t_k-t(k)).^3+5*a5(k)*(t_k-
```

```
t(k)).^4+6*a6(k)*(t_k-t(k)).^5+7*a7(k)*(t_k-t(k)).^6;
    a_k=2*a2(k)+6*a3(k)*(t_k-t(k))+12*a4(k)*(t_k-
t(k)).^2+20*a5(k)*(t_k-t(k)).^3+30*a6(k)*(t_k-
t(k)).^4+42*a7(k)*(t_k-t(k)).^5;
    j_k=6*a3(k)+24*a4(k)*(t_k-t(k))+60*a5(k)*(t_k-
t(k)).^2+120*a6(k)*(t_k-t(k)).^3+42*5*a7(k)*(t_k-t(k)).^4;
    s_k=24*a4(k)+120*a5(k)*(t_k-t(k))+360*a6(k)*(t_k-
t(k)).^2+42*5*4*a7(k)*(t_k-t(k)).^3;

    time=[time,t_k];
    dis=[dis,q_k];
    vel=[vel,v_k];
    acc=[acc,a_k];
    jerk=[jerk,j_k];
    snap=[snap,s_k];
end
```