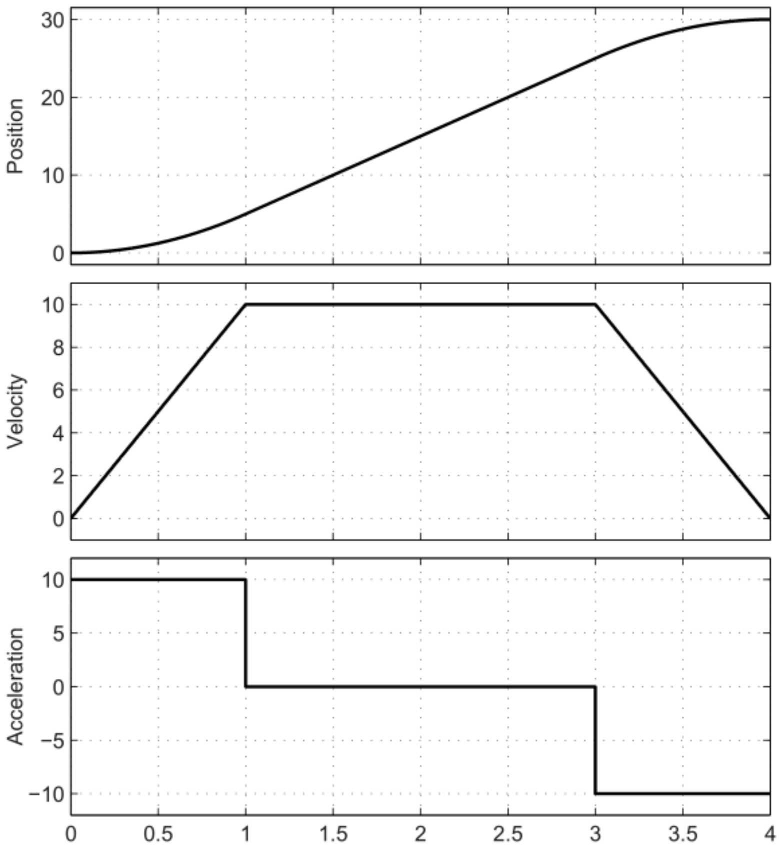
线性轨迹的抛物线过渡（梯形加减速）

使用线性运动和抛物线混合的方法是一种常用的获取连续速度的方法，就是典型的梯形速度曲线。

轨迹被分为 3 个部分，假设位移为正，$q_1>q_0$;在第一部分，加速度是恒定的正值，因此速度是时间的线性函数，位置是时间的抛物线函数。第二阶段加速度为 0，速度恒定，位置是时间的线性函数。在最后一部分，恒定的负加速度，速度线性减小并且位置也是一个二次多项式函数。对于这些轨迹，假设加速度的持续时间 T_a和减速度的持续时间 T_d相等。



设 t0=0，轨迹如下计算：

1. 加速阶段：$t\epsilon[0,T_a]$. 位置，速度和加速度可以如下表示：

$$\begin{cases} q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \\ \dot{q}(t)=a_1+2a_2t \\ \ddot{q}(t)=2a_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

这些参数 a0，a1 和 a2 有初始位置 q0 和速度 v0 约束，并且希望达到持续速度 Vv。如果初始速度为 0，则有：

$$\begin{cases} a_0=q_0 \\ a_1=0 \\ a_2=\dfrac{V_v}{2T_a} \end{cases}$$

在这个阶段，加速度恒定，值为$\frac{V_v}{T_a}$

2. 匀速阶段。 $t\epsilon[T_a，t_1-T_a]$. 位置，速度，加速度如下表示：

$$\begin{cases} q(t)=b_0+b_1t \\ \dot{q}(t)=b_1 \\ \ddot{q}(t)=0 \end{cases} \quad (1.2)$$

根据连续性：

$$b_1=V_v$$

并且

$$q(T_a)=q_0+\frac{V_vT_a}{2}=b_0+V_vT_a$$

可以得到：

$$b_0=q_0-\frac{V_vT_a}{2}$$

3. 减速阶段，$t\epsilon[t_1-T_a,t_1]$. 位置，速度，加速度如下：

$$\begin{cases} q(t)=c_0+c_1t+c_2t^2 \\ \dot{q}(t)=c_1+2c_2t \\ \ddot{q}(t)=2c_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

这些参数被最终位置 q1，末速度 v1 所约束并且持续速度 Vv 作为

减速阶段的初始速度。最终速度为 0，可以得到：

$$\begin{cases} c_0 = q_1 - \dfrac{V_v t_1^2}{2T_a} \\ c_1 = \dfrac{V_v t_1}{T_a} \\ c_2 = -\dfrac{V_v}{2T_a} \end{cases}$$

综上所述，通常情况下 t0≠0，轨迹可以表示为：

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{V_v}{2T_a}(t - t_0)^2 \\ q_0 + V_v(t - t_0 - \frac{T_a}{2}) \\ q_1 - \frac{V_v}{2T_a}(t_0 - t)^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

实际上，我们必须指定一些附加条件，才能单独求出一条完整轨迹。一个典型的情况就是与加减速的周期相关。$T_a < {}^{T}\!/_{2} = \frac{t_1 - t_0}{2}$.此外，加速度和速度还会有一些条件。

设 aa 是第一阶段的恒定加速度，可以得到：$q_a = q_0 + \frac{1}{2}a_a T_a^2$

综合上面几个公式，可以获得：

$$a_a T_a^2 - a_a(t_1 - t_0)T_a + (q_1 - q_0) = 0 \tag{1.5}$$

预先指定加速度的轨迹

定义这条轨迹的另一种方法就是预先指定加速度的最大值。然后计算加减速周期. 根据式（1.5），如果 aa 被指定，加速度周期可以的：

$$T_a = \frac{a_a(t_1 - t_0) - \sqrt{a_a^2(t_1 - t_0)^2 - 4a_a(q_1 - q_0)}}{2a_a}$$

有该方程能确定加速度的最小值：

$$a_a \geq \frac{4(q_1 - q_0)}{(t_1 - t_0)^2} = \frac{4\hbar}{T^2}$$

通常情况下的确定梯形速度的曲线参数可以指定其中几种，通过几何关系计算出来。实际应用中一般是指定梯形轨迹的位移，初始速度，末速度，最大速度，最大加速度来确定轨迹 。

因此，一般的梯形速度曲线为已知初始速度，终止速度，加速度，减速度，最大速度，位移，要确定运行轨迹，主要是计算加速度段，匀速段，减速段对应的时间 Ta，Tv，Td，然后可以计算任意时刻的 $t\in[0,T]$对应的位移，速度，加速度。

用户指定的其实速度，终止速度，加速度，减速度，最大速度，唯一参数不一定都满足，若给定参数的轨迹不存在，那麼需要修改速度参数，优先满足位移条件。

1.根据 h，v0，v1，a0，a1，其中 h=q1-q0，计算该参数能达到的最大速度 vf。要达到的速度最大，只有加速段和减速段，没有匀速段。因此有：

$$h \geq \hbar_a + \hbar_d = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a_a} + \frac{v_1^2 - v_f^2}{2a_d} \qquad （2-1）$$

即

$$v_f = \sqrt{\frac{2a_a a_d \hbar - a_a v_1^2 + a_d v_0^2}{a_d - a_a}} \qquad （2-2）$$

2.比较 vf 与 vmax 的大小，若 vf<vmax，说明按照给定参数运动无法达到用户设定的最大速度。这时候匀速段速度设置为 Vv=vf；实

际没有匀速段，只有加速段和减速段。若 vf>=vmax 说明按照给定的参数运动可以达到用户设定的最大速度。但实际中又不允许超过用户指定的最大速度 vmax，因此匀速段的速度设定为 Vv=vmax。

3.接下来计算加速段，匀速段和减速段的时间和位移。

$$T_a=\frac{v_v-v_0}{a_a},\quad L_a=v_0T_a+0.5a_aT_a^2 \tag{2-3}$$

$$T_v=\frac{\hbar-La-L_d}{v_v},\quad L_v=v_vT_v \tag{2-4}$$

$$T_d=\frac{v_1-v_v}{a_d},\quad L_d=v_vT_d+0.5a_dT_d^2 \tag{2-5}$$

4.计算轨迹离散点：

$$\begin{cases} q(t)=q_0+v_0t+\frac{1}{2}a_at^2 \\ \dot{q}(t)=v_0+a_at \\ \ddot{q}(t)=a_a \end{cases} \qquad t\epsilon[0,T_a] \tag{2-6}$$

$$\begin{cases} q(t)=q_0+L_a+v_v(t-T_a) \\ \dot{q}(t)=v_v \\ \ddot{q}(t)=0 \end{cases} \qquad t\,\epsilon[T_a,T_a+T_v] \tag{2-7}$$

$$\begin{cases} q(t)=q_0+L_a+\ L_v+\frac{1}{2}a_d(t-T_a-T_v)^2 \\ \dot{q}(t)=v_v+a_d(t-T_a-T_v) \\ \ddot{q}(t)=a_a \end{cases} \qquad t\epsilon[T_a+T_v,T_a+T_v+T_d]$$

（2-8）

代码

%设置初始参数

```
clc
clear
t0=0;
q0=0;
q1=500;
v0= 0;
v1=0;
vmax=3000;
aa=20000;
ad=-20000;
%%
```

%绘图

```
fig1=subplot(4,1,1);
ylabel('position');
grid on
hold on
fig2=subplot(4,1,2);
ylabel('velocity');
grid on
hold on
fig3=subplot(4,1,3);
ylabel=('acceleration');
%xlabel('time');
grid on
hold on
fig4=subplot(4,1,4);
ylabel=('shift');
xlabel('time');
grid on
hold on
%%
h=q1-q0;
```

%根据公式（2-2）计算最大速度

```
vf=sqrt((2*aa*ad*h-aa*v1^2+ad*v0^2)/(ad-aa));
if(vf>vmax)
    Vv=vmax;
else
    Vv=vf;
end
pos=0;
```

```
%根据（2-3）到（2-5）计算各个阶段的时间和距离
Ta=(Vv-v0)/aa;
La=v0*Ta+1.0/2.0*aa*Ta^2;
Td=(v1-Vv)/ad;
Ld=Vv*Td+1.0/2.0*ad*Td^2;
%Tv=(h-(Vv^2-v0^2)/(2.0.*aa)-(v1^2-Vv^2)/(2.0*ad))/Vv;
Lv=h-La-Ld;
Tv=Lv/Vv;
%%
%根据（2-6）到（2-8）计算每个采样时间点的位置或者相对增量
Ts=0.0002;
j=1;
for t=t0:Ts:t0+Ta+Tv+Td
    time(j)=t;
    t=t-t0;
    if(t>=0&&t<Ta)
        q(j)=q0+v0*t+1.0/2.0*aa*t^2;
        dq(j)=v0+aa*t;
        ddq(j)=aa;
        p(j)=dq(j)*Ts;
    elseif(t>=Ta&&t<=Ta+Tv)
        q(j)=q0+La+Vv*(t-Ta);
        dq(j)=Vv;
        ddq(j)=0;
         p(j)=dq(j)*Ts;
    elseif(t>Ta+Tv&&t<=Ta+Tv+Td)
        q(j)=q0+La+Lv+Vv*(t-Ta-Tv)+1.0/2.0*ad*(t-Ta-Tv)^2;
        dq(j)=Vv+ad*(t-Ta-Tv);
        ddq(j)=ad;
         p(j)=dq(j)*Ts;

    end
    pos(j)=sum(p,2);
    j=j+1;

end
%%
%绘图
c1=plot(fig1,time,q,'--r','LineWidth',1.5);
c2=plot(fig2,time,dq,'-b','LineWidth',1.5);
c3=plot(fig3,time,ddq,'--g','LineWidth',1.5);
```

```
c4=plot(fig4,time,pos,'--r','LineWidth',1.5);
clear q dq ddq
```