Solid Mechanics Homework #2

Professor Z. Wu

Jintao Li

SA20007037

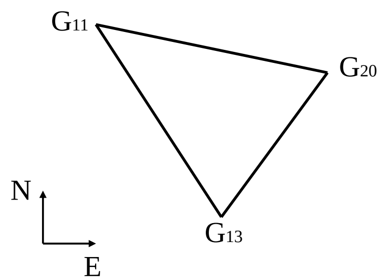
E-mail: lijintao@mail.ustc.edu.cn

November 15, 2020

Chapter 2 应变分析

Exercise 1

求给定区域的平面主应变的大小和方向，如下图所示，



已知相对于参考点（在左下），测点的坐标（单位为 km）分别为：

$$\begin{aligned} G_{11} &: (22.06342, 40.58706); \\ G_{13} &: (23.14246, 33.03411); \\ G_{20} &: (29.33004, 40.33619). \end{aligned} \tag{1}$$

测线长度的年度变化 (单位为 m)，见下表。

基线名称	2003 年边长	2004 年边长
G20-G13	9579.5050	9579.5230
G20-G11	7278.5936	7278.6129
G13-G11	7618.7608	7618.7675

步骤:
1. 求三角形的中心坐标；
2. 求三条边的方向角度 (比如相对于方向东的角度)；
3. 求三条边上的线应变；
4. 根据应变花的方法, 求出主应变和主方向；
5. 将求得的主方向的角度转化成以北方向为 0 度来表示。

Solution:

1. 求三角形的中心点坐标；

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times (22.06342 + 23.14246 + 29.33004) = 24.64531 \\ \frac{1}{3} \times (40.58706 + 33.03411 + 40.33619) = 37.62545 \end{aligned} \tag{2}$$

所以中心点的坐标为 $(24.64531, 37.62545)$。

2. 求三条边的方向角度 (比如相对于方向东的角度)；

$$
\begin{aligned}
G_{11} \to G_{13} : \theta_1 &= \arctan \frac{40.58706 - 33.03411}{22.06342 - 23.14246} \approx -1.4289 = -81.87^\circ \\
G_{11} \to G_{20} : \theta_2 &= \arctan \frac{40.58706 - 40.33619}{22.06342 - 29.33004} \approx -0.0346 = -1.98^\circ \\
G_{13} \to G_{20} : \theta_3 &= \arctan \frac{33.03411 - 40.33619}{23.14246 - 29.33004} \approx 0.8678 = 49.72^\circ
\end{aligned} \tag{3}
$$

3. 求三条边上的线应变；

$$
\begin{aligned}
&\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \\
&G_{11} \to G_{13} : \epsilon_1 = \frac{7618.7675 - 7618.7608}{7618.7608} = 8.79 \times 10^{-7} \\
&G_{11} \to G_{20} : \epsilon_2 = \frac{7278.6129 - 7278.5936}{7278.5936} = 2.65 \times 10^{-6} \\
&G_{13} \to G_{20} : \epsilon_3 = \frac{9579.5230 - 9579.5050}{9579.5050} = 1.88 \times 10^{-6}
\end{aligned} \tag{4}
$$

4. 根据应变花的方法, 求出主应变和主方向；
根据教材第 36 页的公式，设最大主应力方向为 σ_1, σ_2，与东方向的夹角为 α （与应变方向观测一致）

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta_1 - \alpha) \\
\epsilon_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta_2 - \alpha) \\
\epsilon_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta_3 - \alpha)
\end{aligned} \tag{5}
$$

将第 3 步得到的 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 代入上面的公式中，可以解出：

$$
\sigma_1 = 2.7 \times 10^{-6}, \sigma_2 = 8.79 \times 10^{-7}, \alpha = 7.52^\circ. \tag{6}
$$

matlab code

```
clear;clc;
syms sigma_1 sigma_2 alpha;
eq1 = 0.5*(sigma_1+sigma_2)+0.5*(sigma_1-sigma_2)*cos(2*(-1.4289-alpha))==8.79e-7;
eq2 = 0.5*(sigma_1+sigma_2)+0.5*(sigma_1-sigma_2)*cos(2*(-0.0346-alpha))==2.65e-6;
eq3 = 0.5*(sigma_1+sigma_2)+0.5*(sigma_1-sigma_2)*cos(2*(0.8678-alpha))==1.88e-6;

[sigma_1, sigma_2, alpha] = solve(eq1, eq2, eq3, sigma_1, sigma_2, alpha);
sigma_1 = single(sigma_1)
sigma_2 = single(sigma_2)
alpha = rad2deg(single(alpha))
```

5. 将求得的主方向的角度转化成以北方向为 0 度来表示；
显然，

$$
\alpha^{'} = 90^\circ - \alpha = 82.48^\circ. \tag{7}
$$