Solid Mechanics Homework #1

Professor Z. Wu

Jintao Li

SA20007037

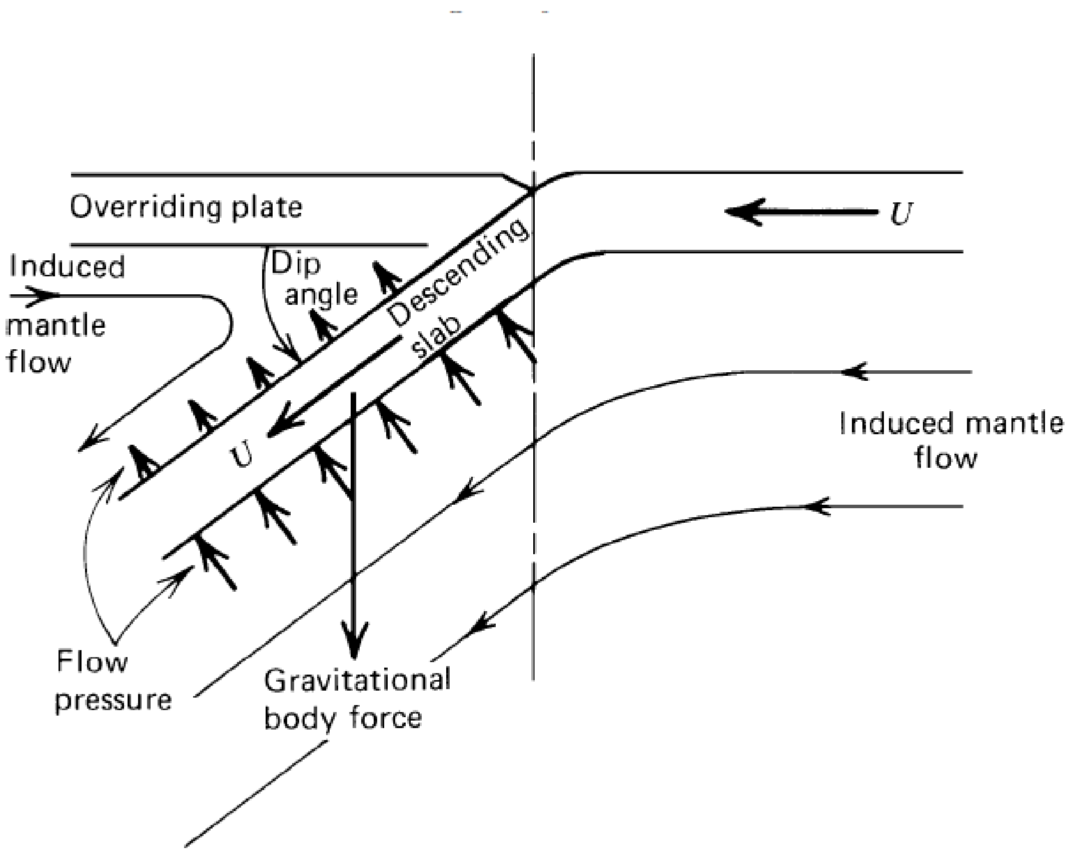
E-mail: lijintao@mail.ustc.edu.cn

November 15, 2020

Chapter 1 应力分析

Exercise 1

求地幔楔中应力的分布，假设板块的俯冲速度为 5 cm/year, 俯冲角度为 30 度, 地幔楔的粘度为 10^{20} Pa/s。



步骤：
1. 给定板块俯冲速度，可以得到地幔楔中的速度和压强分布；
2. 使用速度分布，求偏微分，得到偏应力张量的分量；
3. 根据得到的张量，求出各点的主应力的大小和方向，以及各点最大剪应力的大小，作图表示。

要求：
1. 给出公式和简要计算过程；
2. 图画到 300 公里深度以内，最大剪应力的大小使用颜色表示（画出色标），主应力的大小和方向使用十字架表示（画出线段长度的比例）。

Solution:

1. 求出流函数的常数，由此可知速度分布和压强分布

参考书籍 *Geodynamics*，图中的拐角流函数可以写成以下形式：

$$\psi = (Ax + By) + (Cx + Dy)\arctan\frac{y}{x}. \tag{1}$$

其速度为：

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -B - D\arctan\frac{y}{x} + (Cx + Dy)\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) \tag{2}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = A + C\arctan\frac{y}{x} + (Cx + Dy)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \tag{3}$$

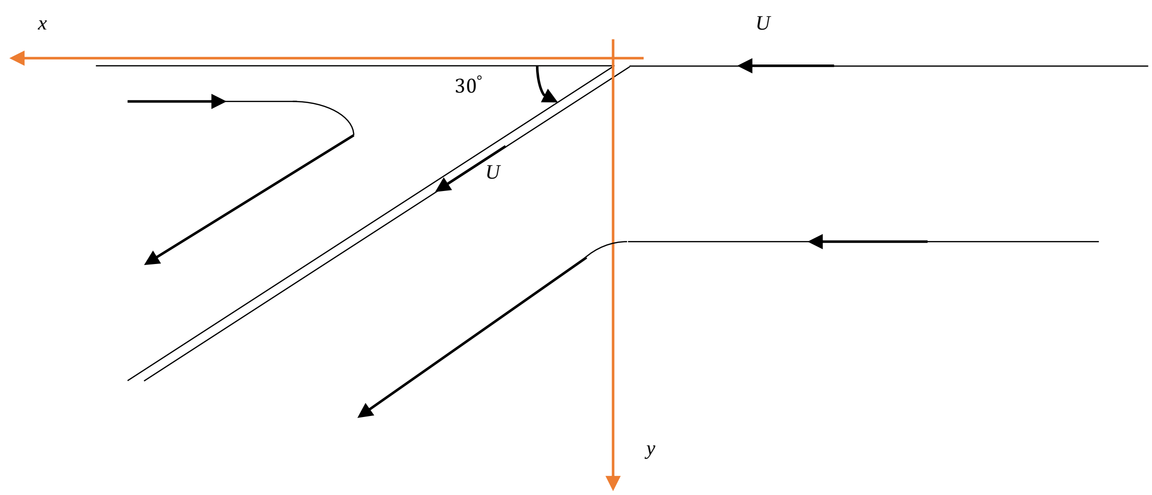


Figure 1: 示意图

建立坐标如图 所示，边界条件：对于地幔楔上覆板块部分，在 $y = 0, x > 0$ 处，有 $u = v = 0$，代入方程中得到：

$$B = -C,\ A = 0 \tag{4}$$

在 $y = x\tan\theta$ 处，有 $u = U\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}U, v = U\sin\theta = \frac{1}{2}U$，代入方程中得到

$$\begin{aligned} -B - \frac{3}{4}C - (\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4})D = \frac{\sqrt{3}}{2}U, \\ A + (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})C - \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}U. \end{aligned} \tag{5}$$

将这两处的边界条件结合可得：

$$\begin{aligned} &A = 0, \\ &B = -C, \\ &\frac{1}{4}C - (\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4})D = \frac{\sqrt{3}}{2}U, \\ &(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})C - \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}U. \end{aligned} \tag{6}$$

代入 $U = 5\ cm/year$，可以解改方程组得到上覆板块的常数 A1, B1, C1, D1。

对于下冲板块部分，在 $y = 0, x > 0$ 处，有 $u = U, v = 0$，代入方程中得到：

$$\begin{aligned} -B - C - \pi D = U, \\ A + \pi C = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

在 $y=\tan\theta x$ 处，有 $u=U\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}U, v=U\sin\theta=\frac{1}{2}U$，代入方程中得到

$$\begin{aligned} -B-\frac{3}{4}C-(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})D=\frac{\sqrt{3}}{2}U, \\ A+(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})C-\frac{1}{4}D=\frac{1}{2}U. \end{aligned} \tag{8}$$

将这两处的边界条件结合可得：

$$\begin{aligned} &A=-\pi C, \\ &B=-C-\pi D-U, \\ &\frac{1}{4}C-(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5\pi}{6})D=(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)U, \\ &-(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5\pi}{6})C-\frac{1}{4}D=\frac{1}{2}U. \end{aligned} \tag{9}$$

代入 $U=5\ cm/year$，可以解改方程组得到下冲板块的常数 A2, B2, C2, D2。

由此，两部分的流函数的常数以求出，参考书籍中的速度和压强公式可求出速度和压强分布：

$$u=-B-D\arctan\frac{y}{x}+(Cx+Dy)\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) \tag{10}$$

$$v=A+C\arctan\frac{y}{x}+(Cx+Dy)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \tag{11}$$

$$P=\frac{-2\mu(Cx+Dy)}{(x^2+y^2)} \tag{12}$$

其中 $\mu=10^{20}\ Pa/s$ 是粘滞系数。

2. 求偏应力张量的分量

对于二维粘滞系数为常数的牛顿流体，其应力偏张量分量为：

$$\begin{aligned} \tau_{xx}&=2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy}&=2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{yx}=\tau_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

3. 求应力分布

其主应力为 $\sigma_0=P$，所以其应力张量分量为：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}&=P-\tau_{xx}=P-2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy}&=P-\tau_{yy}=P-2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\tau_{yx}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

最大、最小主应力为：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{Bmatrix}=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2})^2+\sigma_{xy}^2} \tag{15}$$

最大剪应力为：

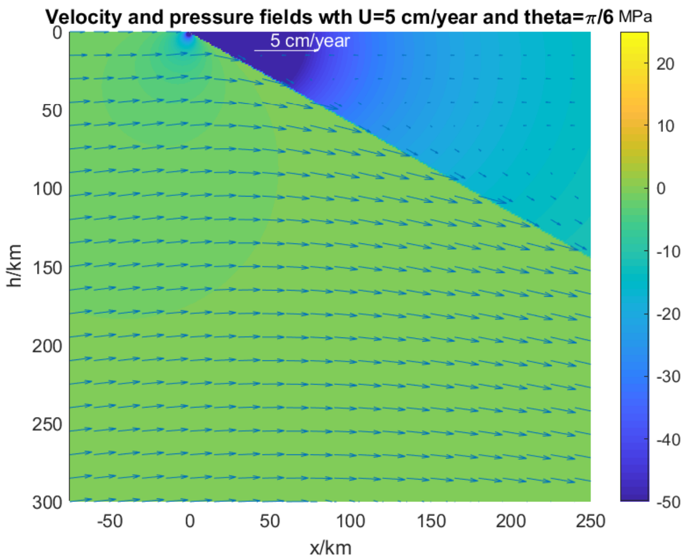
$$\tau_{max} = \pm(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}) \tag{16}$$

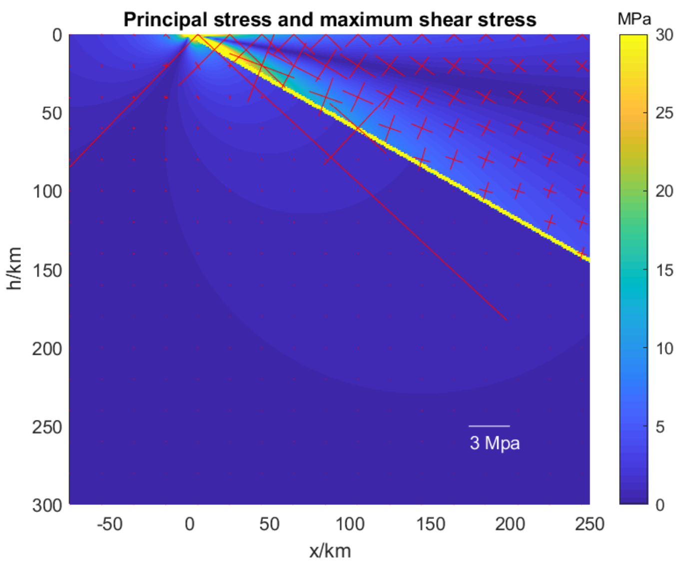
方向夹角：

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\sigma_{xy}}) \tag{17}$$

最大主应力与 x 轴夹角为 α，最小主应力与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，剪应力方向为 $\frac{\pi}{4} - \alpha$

4. 结果





5. Code

见附件