DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2008.03.013
第28卷　第3期　　物　理　实　验　　Vol.28　No.3
2008年3月　　PHYSICS EXPERIMENTATION　　Mar.,2008

复摆方程的一种求解方法

毛瑞全[1],刘翠红[2],郑　卿[3]
(1.河海大学 计算机及信息工程学院,江苏 常州 213022;
2.河海大学 数理教学部,江苏 常州 213022;
3.扬州大学 生物科学与技术学院,江苏 扬州 225009)

摘　要:利用复摆测量物体的转动惯量是一种重要方法,本文对复摆的转动惯量公式进行拉普拉斯变化,用能量和时间来表达转动惯量,丰富了不规则物体转动惯量的测量方法.

关键词:转动惯量;复摆;拉普拉斯变换

中图分类号:O313.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-4642(2008)03-0045-02

1　引　言

关于复摆,已经作了很多的研究[1-2].复摆的公式推导一般匀采用椭圆积分后略去高阶小量.但最大摆角的不确定,使精度受到了影响.本文提出的方法将空间域中的关系变换到时间域里,这样可以更加清楚地观察到摆动过程中转动惯量的变化趋势和某一时刻的大小.这个结论有别于通常的定性分析,有助于对实验的更深一层地理解,本文的方法也可推广到其它的工程领域,有一定的现实意义.

2　原公式的推导

复摆如图1所示,设质量为m,摆动点和质心的距离为l,在摆动过程中任意时刻摆角为θ,初始情况时复摆处于最大摆角为θ_m的静止状态下,忽略阻力的情况下,利用能量守恒和椭圆积分可以在理论上得到相对精确的解析解为

$$I=\frac{mgl}{4\pi^2}T^2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_m}{2}+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_m}{2}+\cdots}\right)^2,\tag{1}$$

忽略了高阶小量后,可得到复摆的转动惯量的公式[3]

$$I=\frac{mgl}{4\pi^2}T^2.\tag{2}$$

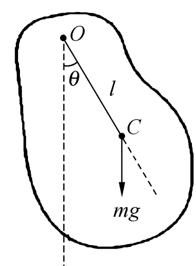

图1　复摆

3　新公式的导出

若复摆在初始情况下处于静止状态,此时给复摆冲击,其能量为E,以此瞬间的状态为初始状态$\theta(0)=0$,在忽略空气阻力的情况下,可得到公式[4-5]

$$mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}I\theta^2=E,\tag{3}$$

$$\theta=-\sqrt{2\frac{E}{I}}\sqrt{1-\frac{mgl(1-\cos\theta)}{E}},$$

由Maclaurin series

$$\theta=-\sqrt{2\frac{E}{I}}\left[1-\frac{mgl(1-\cos\theta)}{2E}+Kf(\theta)\right].\tag{4}$$

其中$f(\theta)$为关于$\cos\theta$的余项,K是其常系数.

因为$l\{\theta(t)\}=s\Theta(s)-\theta(0)$,所以用Laplace变换对各项进行处理,由积分变换的知识可知:

收稿日期:2006-11-01;**修改日期**:2007-12-25
作者简介:毛瑞全(1985—),男,江苏连云港人,河海大学计算机及信息工程学院2004级本科生.

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s},\ \mathcal{L}\{\cos(\theta)\}=\frac{s}{s^2+1}.$$

故

$$\mathcal{L}\{\theta\}=\mathcal{L}\left\{\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{mgl}{2E}-\sqrt{\frac{2E}{I}}\right\}-\mathcal{L}\left\{\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{l\cos\theta}{2E}\right\},$$

$$\mathcal{L}\{\theta\}=\left(\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{mgl}{2E}-\sqrt{\frac{2E}{I}}\right)\mathcal{L}\{1\}-l\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{1}{2E}\mathcal{L}\{\cos\theta\},$$

$$s\Theta(s)-\theta(0)=\left(\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{mgl}{2E}-\sqrt{\frac{2E}{I}}\right)\frac{1}{s}-l\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{1}{2E}\frac{s}{1+s^2}.$$

将初始条件 $\theta(0)=0$ 代入后,可以得到

$$\Theta=-\sqrt{\frac{2E}{I}}\frac{1}{s^2}+\frac{mgl}{\sqrt{2EI}}\frac{1}{s^2}-\frac{mgl}{\sqrt{2EI}}\frac{1}{s^2+1}-KF(s).\quad(5)$$

由Laplace 逆变换

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t,$$

可以将问题从复频域归结到时间域中分析

$$\theta=-\sqrt{\frac{2E}{I}}t+\frac{mgl}{\sqrt{2EI}}t-\frac{mgl}{\sqrt{2EI}}\sin t+Kf(t).\quad(6)$$

4 结束语

应用能量和时间来控制转动惯量,不仅丰富了不规则物体转动惯量的测量方法,此外复摆新公式提出,无论在物理的理论研究,还是生产实际中,比如复摆颚式破碎机等,都有它积极的意义.

参考文献:

[1] 王占平.精确测量单摆周期[J].物理实验,2006,26(10):27-28.

[2] 李传亮.用单摆测定重力加速度实验中的几点探讨[J].物理实验,2006,26(4):28.

[3] 戚作涛.复摆的非线性振动[J].广西师范大学学报(物理专辑),2000:46-48.

[4] 龚善初.复摆的振动分析[J].物理与工程,2004,14(6):20-22.

[5] 潘洪明.复摆振动中的混沌现象[J].物理实验,2006,26(9):10-11.

A solving method for compound pendulum equation

MAO Rui-quan[1], LIU Cui-hong[2], ZHENG Qing[3]

(1. College of Computer and Information Engineering, Hehai University, Changzhou 213022, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Hehai University, Changzhou 213022, China;
3. College of Bioscience and Biotechnology, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract: The moment of inertia of object can be measured by the compound pendulum. The moment of inertia is expressed by energy and time using Laplace transformation, and the measurement methods of moment of inertia of irregular objects are enriched.

Key words: moment of inertia; compound pendulum; Laplace transformation

[责任编辑:郭 伟]