

# 大角度复摆的运动分析

邹芳红 崔百宁

(青海师范高等专科学校物理系 810007)

## 1 引言

在国内一些力学教材中<sup>[1],[2],[3]</sup>,复摆常被用来作为典型例子,说明简谐振动.教学中教师也特别强调,摆角小于 $5^\circ$ 时,复摆作简谐振动,这时摆的角加速度、角速度和角位移均是时间的正弦或余弦函数.当摆角大于 $5^\circ$ 时,复摆的振动已不属简谐振动,大角度复摆的运动微分方程不存在解析解,因此在许多教材中避而不谈大角度振动,这不能不说是教学中的缺憾.而且学生也常常问到,当摆角大于 $5^\circ$ 时,复摆的运动是怎样的.为帮助学生全面了解复摆的运动,加深对振动的理解,我们通过计算机模拟,较好地显示了大角度复摆的振动情况.

## 2 解决办法和结果

当复摆不受阻力作用时,其自由运动的运动微分方程为

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin\theta$$

若摆角大于 $5^\circ$ 时,只能用数值解法求解这一方程.将上述方程简化为两个一阶微分方程,即

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{mgl \sin\theta}{I} \end{aligned}$$

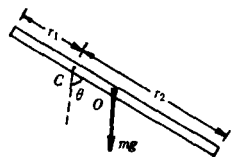


图1

然后用计算精度较高的龙格-库塔法求解.以图1所示复摆模型,可用QBASIC编写程序.

由 Windows 画

板所输出的结果如图2、图3.

## 3 分析与讨论

a.当初值 $\theta_0 = \frac{3}{\pi} \times 180^\circ$ 时,复摆的运动情况如图2所示.这时振动虽具有周期性,但已不属于简谐振动.与简谐振动相比,在半个周期中( $\theta = 0 \rightarrow \theta = -\theta_{\max} \rightarrow \theta = 0$ ),角加速度不是只有一个极值,而是有两个极大值和一个极小值.当摆角 $\theta$ 由

零度变化至 $-90^\circ$ 时,作用在复摆上的恢复力矩 $-mgl \sin\theta$ ,由零增大至 $mgl$ ,故角加速度增至 $\frac{mgl}{I}$ ,达到最大值. $\theta$ 由 $-90^\circ$ 向 $-\theta_{\max}$ 变化时,则力矩减小,角加速度也减小.在 $\theta = -\theta_{\max}$ 处,角加速度达到极小值.此后,复摆往复运动,再次经过 $\theta = -90^\circ$ 处,使角加速度再次达到极大值 $\frac{mgl}{I}$ .因而在半个周期里,形成了双峰波形.从图2中可以观察到,在复摆的平衡位置附近很小的区域内,角速度曲线与简谐振动时相同,在 $\theta = 0^\circ$ 处,角速度具有极值.当偏离较大时,角速度不再是时间 $t$ 的余弦函数.在与双峰波形相对应的时间里,角速度值单调上升,除了在 $\theta = -\theta_{\max}$ 处,曲线上有一拐点外,还有两个明显的拐点,它们都出现在 $\theta = -90^\circ$ 处,此处角加速度最大.并且角速度在 $\theta = 0 \rightarrow \theta = -90^\circ$ 区域内的变化较 $\theta = 90^\circ \rightarrow \theta = -\theta_{\max}$ 区域内的变化快.拐点的出现是由于在 $\theta = 0 \rightarrow \theta = -90^\circ$ 区域内角加速度的变化较 $\theta = 90^\circ \rightarrow \theta = -\theta_{\max}$ 区域内的变化快.角位移曲线与简谐振动相比也有明显不同,特别是当处于 $\theta_{\max}$ 附近时,因角速度很小,故使 $\theta$ 曲线顶部变得平坦,几乎是一条直线.

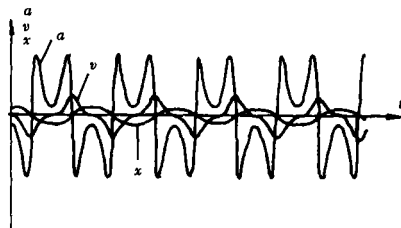


图2 初值 $\theta_0 > 90^\circ$ 时, $a-t$ 、 $v-t$ 、 $x-t$ 图

b.随着初值 $\theta_0$ 的减小,角加速度曲线中的极大值与极小值之间的差距不断缩小,角速度曲线中的拐点逐渐模糊.角位移曲线顶部也逐渐隆起.当 $\theta_0 = \frac{1.5}{\pi} \times 180^\circ$ 时,复摆振动情况如图3所示.振动仍具有周期性,这时,在半个周期中,角加速度曲线在

# 提高实验要求 实现能力的多层次培养

陈金苗

(浙江上虞市东关中学 312352)

1998年高考物理实验试题给师生的感觉是“新、活,能力要求的层次高”。其实,纵观近几年的高考实验试题,不难发现,不光是考查的内容已经超出了《大纲》中的实验内容,而且对能力的考查也由原来的记忆、理解、计算、操作、推理向多层次(较高层次)的方向发展。主要表现在以下三个较高层次上:a.设计物理实验的能力;b.分析实验误差的能力;c.处理实验数据,得出正确结论的能力。而实现实验能力的多层次培养,是我们平时的实验教学中的责任。

下面以学生实验“测电源的电动势和内电阻”的教学为例,论述在平时的实验教学中通过拓宽、深化、改进实验内容,提高实验要求来实施对上述三个较高层次能力的培养。

## 1 设计物理实验的能力

利用学过的基本实验(包括演示实验)的原理和方法来设计实验方案,要求所设计的方案具有较

好的规范性、创造性和可行性,是在实验教学中培养学生应具有的一种较高层次的实验能力。主要体现在以下三点:a.实验的原理和方法;b.实验的要求;c.仪器的选择及组合。

【问题1】如果要测量一个电池的电动势和内电阻,可以设计哪些电路进行测量?

我在新课“闭合电路欧姆定律”的教学中,针对教材中的例题向学生提出了这个问题。然后引导学生进行以下的思维过程:a.实验的原理——闭合电路的欧姆定律  $E = U + Ir$ ,从公式可知要测出  $E$  和  $r$ ,必须求出路端电压  $U$  和总电流  $I$ ,利用多组数据列方程求解;b.实验的方法——伏安法(指出电流表可以内外接);c.既然例题中只有电流表和定值电阻可以测量  $E$  和  $r$ ,那么只有电压表能不能测量呢?d.为了测量多组数据,可以把两个定值电阻用电阻箱来代替,以利于测多组数据;e.实验的原则——力求使设计的电路能满足方便、准确、安

$|\theta| = \theta_{\max}$ 处有一极大值,且顶部较为平坦;角速度曲线除顶部类似于简谐振动外,几乎随时间按直线变化。角位移曲线顶部隆起。随着初值  $\theta_0$  的进一步减小;复摆的振动趋向于简谐振动。

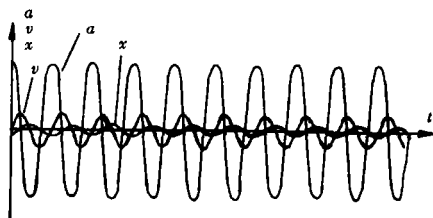


图3 初值  $\theta_0 < 90^\circ$  时,  $a-t$ 、 $v-t$ 、 $x-t$  图

## 4 结束语

对于大角度复摆的运动,我们虽不能精确地建立角加速度、角速度、角位移随时间变化的定量关系式,但通过模拟曲线,依然能了解大角度复摆的运动情况。即大角度复摆的运动不是简谐振动。在

$\theta_0 > 90^\circ$  时,在半个周期内,角加速度有三个极值,角速度曲线有三个拐点,角位移曲线顶部平坦。而当  $\theta_0 < 90^\circ$  时,角加速度顶部平坦,角速度曲线近似于三角波形,角位移曲线顶部隆起。

## 参考文献

- 王正清. 普通物理. 力学. 高等教育出版社, 1990年, 296 ~ 298.
- 梁绍荣等. 普通物理学. 第一分册. 力学. 高等教育出版社, 1995. 第二版, 234 ~ 235.
- 须和兴. 力学. 华东师范大学出版社, 1996. 216 ~ 217.
- [美]C. 基特等, 力学. 伯克利教程. 第一册. 科技出版社, 1979. 346 ~ 348.
- Dieter Heuer. Anharmonische Schwingungen——qualitatives Argumentieren, angeregt durch Experimentieren und Modellieren. PdN—Ph, 1993, 42(7): 6 ~ 11.
- 王维琪. 徐尚昭. BASIC 与物理学. 科学技术文献出版社重庆分社, 1998.