

# 空气阻力对复摆振动周期的影响

张天洋, 王艳辉, 曲光伟, 邹德滨

(大连理工大学 物理与光电工程学院, 辽宁 大连 116023)

**摘要:**采用2种空气阻力模型, 推导出考虑空气阻力时复摆振动周期的表达式. 将理论结果与实验测量相结合, 分析比较2种情况下空气阻力对复摆周期的影响.

**关键词:**复摆; 空气阻力; 振动周期; 阻力系数

**中图分类号:** O321

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1005-4642(2008)11-0042-04

## 1 引言

复摆实验通常是在不计空气阻力的理想情况下, 研究复摆的运动规律<sup>[1-2]</sup>. 而实际复摆振动时, 总要或多或少受到空气的阻尼作用, 因此研究空气阻力对复摆振动的影响是十分必要的. 物体所受空气阻力与空气的性质(流速、密度等)、物体的形状、大小及表面状况等因素有关, 从理论上计算阻力的大小比较复杂, 但在讨论空气阻尼作用时, 常采用2种简化模型<sup>[3-5]</sup>, 一是假设振动物体所受的阻力与物体的速度成正比, 另一种是假设阻力与速度的平方成正比. 本文分别采用2种空气阻力模型, 推导出考虑空气阻力时复摆的振动周期公式, 并结合实验测量结果, 分析比较2种情况下空气的阻力对复摆周期的影响.

## 2 2种空气阻力模型下的复摆振动周期

### 2.1 空气阻力与速度一次方成正比

如图1所示的复摆, 设其质量为  $M$ , 绕通过某点  $O$  的水平轴在竖直平面内摆动. 轴  $O$  到质心  $C$  的距离为  $L$ , 复摆以角速度  $\omega$  摆动时  $OC$  与铅垂线的夹角为  $\theta$ . 由于空气阻力的存在, 复摆的运动不再是理想的无耗散运动, 在运动速度不大的情况下, 复摆所受空气阻力与速度成正比, 即

$$f_r = -k_1 v = -k_1 L \omega, \quad (1)$$

其中  $k_1$  为空气阻力系数. 空气阻力对复摆做负功, 根据功能原理可得:

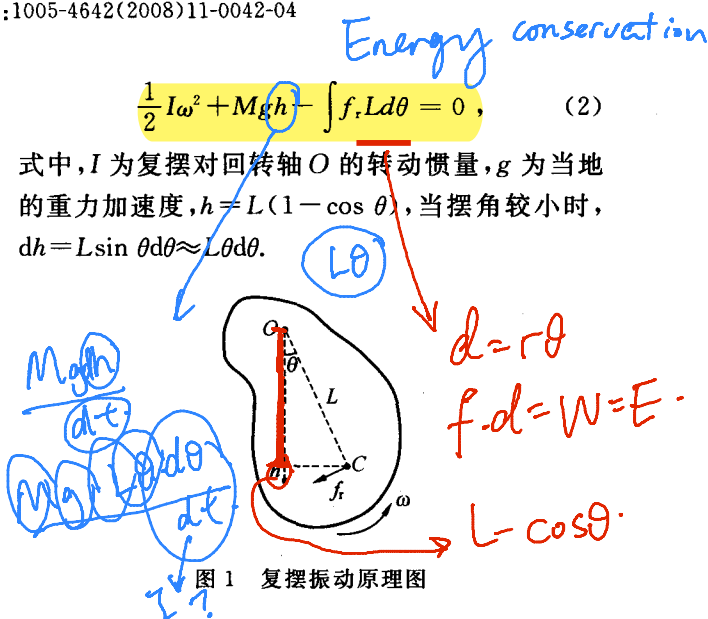


图1 复摆振动原理图

将(1)式代入(2)式, 并对时间  $t$  求得:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{k_1 L^2}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{MgL}{I} \theta = 0. \quad (3)$$

令  $r_1 = \frac{k_1 L^2}{I}$ ,  $r_2 = \frac{MgL}{I}$ , 则  $MgL(1 - \cos \theta)$ .

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + r_1 \frac{d\theta}{dt} + r_2 \theta = 0. \quad (4)$$

令  $\theta = e^{\alpha t}$ , 代入上式得

$$\alpha^2 + r_1 \alpha + r_2 = 0, \quad (5)$$

解方程(5)得

$$\alpha = \frac{-r_1 \pm i\sqrt{4r_2 - r_1^2}}{2},$$

则

$$\theta = e^{-r_1 t} [c_1 e^{(\frac{i}{2}\sqrt{4r_2 - r_1^2})t} + c_2 e^{(-\frac{i}{2}\sqrt{4r_2 - r_1^2})t}] =$$

收稿日期: 2008-05-31; 修改日期: 2008-08-29

作者简介: 张天洋(1986—), 男, 吉林图们人, 大连理工大学物理与光电工程学院 2005 级本科生.

指导教师: 王艳辉(1964—), 女, 辽宁阜新, 大连理工大学物理与光电工程学院副教授, 博士, 主要从事大学物理实验教学及等离子体物理研究工作.

$$e^{-\gamma_1 t} \left[ (c_1 + c_2) \cos \frac{\sqrt{4r_2 - r_1^2}}{2} t + i(c_1 - c_2) \sin \frac{\sqrt{4r_2 - r_1^2}}{2} t \right],$$

因为  $\theta$  是实数, 即有

$$\theta = ce^{-\gamma_1 t} \cos \frac{\sqrt{4r_2 - r_1^2}}{2} t, \quad (6)$$

式(6)中  $c$  为积分常数, 可以看出, 复摆振动的角频率为

$$\omega = \frac{\sqrt{4r_2 - r_1^2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \sqrt{\frac{MgL}{I} - \frac{k_1^2 L^4}{I^2}}. \quad (7)$$

此时复摆的振动周期为

$$T_1 = \frac{4\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{k_1^2 L^3}{4MgL}}}, \quad (8)$$

其中  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}}$  是不考虑空气阻力时复摆在理想条件下的周期公式. 在(8)式中, 由于分母小于 1, 所以  $T_1 > T_0$ .

## 2.2 空气阻力与速度平方成正比

假设复摆受到的空气阻力与运动速度的平方成正比, 即

$$f_r = -k_2 v^2 = -k_2 L^2 \omega^2, \quad (9)$$

其中  $k_2$  为此时的空气阻力系数. 将(9)式代入(2)式, 并对时间  $t$  进行求导得:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k_2 L^3}{I} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{MgL}{I} \theta = 0, \quad (10)$$

令  $y = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  则有

$$\frac{dy}{d\theta} + \frac{2k_2 L^3}{I} y + \frac{2MgL}{I} \theta = 0,$$

求解上式得

$$y = c_0 e^{-\frac{2k_2 L^3}{I} \theta} + \frac{MgL}{2k_2 L^5} - \frac{Mg\theta}{aL^2},$$

其中  $c_0$  为积分常数. 当  $\theta = \theta_0$  时(最大振幅时),

角速度  $\left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{\theta=\theta_0} = 0$ , 将其代入上式得

$$c_0 = \frac{\frac{MgL}{2k_2 L^5} \left( \frac{2k_2 L^3 \theta_0}{I} - 1 \right)}{e^{-\frac{2k_2 L^3}{I} \theta_0}}.$$

由  $y = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  可得:

$$t = t_0 + \int \frac{d\theta}{\sqrt{y}} = t_0 + \int \left( c_0 e^{-\frac{2k_2 L^3}{I} \theta} + \frac{MgL}{2k_2 L^5} - \frac{Mg\theta}{k_2 L^2} \right)^{-1/2} d\theta, \quad (11)$$

式中  $t_0$  为积分常数. 由于  $\theta_0$  和  $k_2$  都较小, 对

$e^{-\frac{2k_2 L^3}{I} \theta}$  进行 Taylor 展开

$$e^{-\frac{2k_2 L^3}{I} \theta} \approx 1 - \frac{2k_2 L^3}{I} \theta + \frac{2k_2^2 L^6}{I^2} \theta^2,$$

将其代入(11)式求得

$$t - t_0 = -\frac{I}{2k_2 L^3} \sqrt{-\frac{2}{c_0}} \arcsin \left[ \frac{\frac{2c_0 k_2 L^3}{I} \theta - \left( c_0 + \frac{MgI}{2k_2 L^5} \right)}{\sqrt{\left( \frac{MgI}{2k_2 L^5} \right)^2 - c_0^2}} \right],$$

将上式整理得

$$\theta = \frac{c_0 I + \frac{MgI^2}{2k_2 L^5}}{2c_0 k_2 L^3} - \frac{I \sqrt{\left( \frac{MgI}{2k_2 L^5} \right)^2 - c_0^2}}{2c_0 k_2 L^3} \cdot \sin \left[ \frac{2k_2 L^3}{I} \sqrt{-\frac{c_0}{2}} (t - t_0) \right].$$

可以看出复摆的角频率为

$$\omega = \frac{2k_2 L^3}{I} \sqrt{-\frac{c_0}{2}}.$$

将  $c_0$  代入上式有

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{MgL}{I} \left( 1 - \frac{2k_2 L^3 \theta_0}{I} \right)}{1 - \frac{2k_2 L^3}{I} \theta_0 + \frac{2k_2^2 L^6}{I^2} \theta_0}},$$

因此, 此时复摆的振动周期为

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{1 - \frac{2k_2 L^3}{I} \theta_0 + \frac{2k_2^2 L^6}{I^2} \theta_0}{\frac{MgL}{I} \left( 1 - \frac{2k_2 L^3 \theta_0}{I} \right)}} = T_0 \sqrt{1 + \frac{2k_2^2 L^6 \theta_0}{I^2 - 2k_2 L^3 I \theta_0}}. \quad (12)$$

显然, 考虑空气阻力后, 复摆的振动周期变长.

## 3 结果讨论

由上面的结果可知, 空气阻力的存在, 使复摆的周期增加. 由于转动惯量  $I = M(R^2 + L^2)$ , 其中  $R$  为复摆对质心的回转半径, 将其代入(8)和(12)式得

$$T_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4gL}{R^2 + L^2} - k_1^2} M^2 \left( 1 + \frac{R^2}{L^2} \right)^2}, \quad (13)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + L^2}{gL} + \frac{2k_2^2 L^5 \theta_0}{Mg(R^2 + L^2 - 2k_2 L^3 \theta_0)}}. \quad (14)$$

可见, 在小角度摆动时,  $T_1$  和  $T_2$  的大小主要取决于质心到转轴的距离  $L$  和阻尼系数. 当阻尼系数

为零时,  $T_1 = T_2 = T_0$ . 为了进一步分析在2种模型下空气阻力对复摆周期的影响, 以西安教学仪器厂生产的复摆为例, 将实际数据分别代入(8)式和(12)式进行计算比较. 已知  $M = 0.45 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $\theta_0 = 5^\circ$ , 实验测得  $R = 0.19 \text{ m}$ , 结果如图2和图3所示.

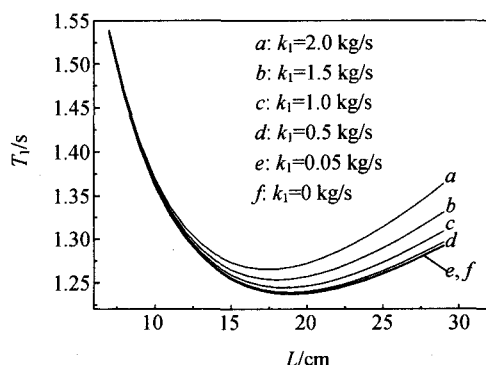


图2 不同阻尼系数下  $T_1$  随  $L$  的变化

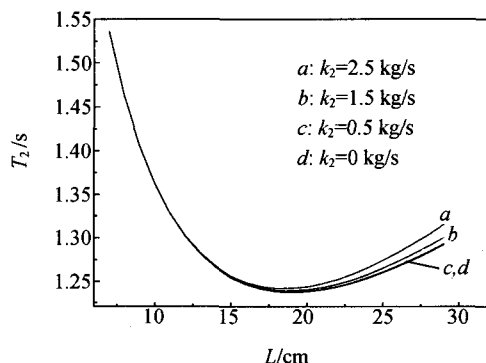


图3 不同阻尼系数下  $T_2$  随  $L$  的变化

图2给出了空气阻力与速度一次方成正比时, 在不同阻尼系数下复摆周期随质心到轴的距离  $L$  的变化情况. 由图2可以看出当  $L$  较小(大约  $L < 10 \text{ cm}$ )时, 曲线  $a \sim e$  几乎与理想曲线  $f$  重合在一起, 空气阻力对复摆的周期没有明显的影响, 此时空气阻力可以忽略不计. 随着  $L$  的增加, 曲线  $a \sim e$  偏离曲线  $f$  也越来越大, 说明空气阻力对复摆周期的影响随  $L$  的增加而增加, 因此, 在实验中可以通过减小  $L$  来减小空气阻力带来的影响. 另外, 图2还显示出, 随着阻尼系数的减小, 空气阻尼作用也减小, 当  $k_1 = 0.5 \text{ kg/s}$  时, 空气阻尼对复摆周期的影响很小, 当  $k_1 = 0.05 \text{ kg/s}$  时, 曲线  $e$  与理想曲线  $f$  重合.

图3给出了空气阻力与速度平方成正比时, 在不同阻力系数下复摆周期随  $L$  的变化情况. 与图2比较, 对于相同的阻力系数, 空气阻力与速度平方成正比时对复摆周期的影响明显比阻力与速度一次方成正比时的影响小. 在图3中, 直到质心到轴的距离  $L$  大于  $17 \text{ cm}$  时, 空气阻力才显示出一定的作用, 而且当阻力系数小于  $1.5 \text{ kg/s}$  时, 空气阻尼的影响已经减到很小,  $k_2 = 0.5 \text{ kg/s}$  时的曲线  $c$  已与理想曲线  $d$  重合. 可见, 在给定参数下, 如果采用二次方模型, 当阻力系数小于  $0.5 \text{ kg/s}$  时, 空气阻力的影响即可忽略.

图4给出了阻力系数为  $1.5 \text{ kg/s}$  时2种模型的计算结果、理想情况下的计算结果及实验测量结果. 由图4可以看出, 当  $L < 12 \text{ cm}$  时, 曲线  $T_1$ ,  $T_2$  和  $T_0$  几乎重合在一起, 此时空气阻力可以忽略不计, 2种模型的结果没有什么区别. 但此时实验测得的周期要略大于理论计算结果, 主要是因为实际测量时, 除了空气阻力外还有其他因素的影响. 随着  $L$  的增加, 空气阻力的影响越来越大, 在  $12 \text{ cm} < L < 18 \text{ cm}$  区间, 一次方模型与实验结果更接近些. 当  $L > 18 \text{ cm}$  时, 二次方模型与实验结果符合较好. 由此可见, 在实际测量当中, 当复摆的悬挂点到质心的距离较小时, 可以采用一次方模型对振动周期进行修正, 相反应采用二次方模型进行修正.

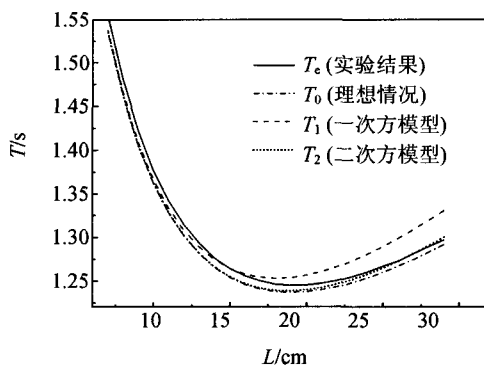


图4 2种模型与实验结果及理想情况的比较

为了进一步比较2种模型, 在  $k_1 = k_2 = 1.5 \text{ kg/s}$  时, 将相关数据代入(13)式和(14)式, 对重力加速度  $g$  进行了计算, 结果显示, 如果采用一次方模型, 在  $L = 15 \text{ cm}$  时,  $g = 9.8045 \text{ m/s}^2$ , 而且在  $12 \text{ cm} < L < 18 \text{ cm}$  区间内计算结果的偏差都比较小; 当采用二次方模型时,  $L = 21 \text{ cm}$  时,

$g=9.797\ 8\ \text{m/s}^2$ , 且当  $L>18\ \text{cm}$  时结果的偏差很小, 这与图 4 得到的结论相同.

#### 4 结束语

将理论推导和实验测量相结合, 分析比较了 2 种空气阻力模型下, 空气阻力对复摆振动周期的影响. 结果表明, 当悬挂点到质心的距离较小时, 空气阻力采用一次方模型比较合适, 反之, 二次方模型更接近实验结果. 只有当悬挂点到质心的距离很小或阻力系数很小时, 空气阻力才能忽略不计.

#### 参考文献:

- [1] 余红. 大学物理实验[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 152-161.
- [2] 毛瑞全, 刘翠红, 郑卿. 复摆方程的一种求解方法[J]. 物理实验, 2008, 28(3): 45-46.
- [3] 吕金钟. 大学物理简明教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 71-74.
- [4] 林祥龙, 陈贤隆. 复摆的空气阻力修正[J]. 大学物理, 1991, 10(2): 24-25.
- [5] 戚明. 单摆测重力加速度的阻尼修正[J]. 大学物理, 1987, 6(12): 41-44.

## Influence of air resistance on the vibration period of compound pendulum

ZHANG Tian-yang, WANG Yan-hui, QU Guang-wei, ZOU De-bin

(School of Physics and Optoelectronic Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract:** The vibration period formulae for compound pendulum are deduced using two kinds of air resistance models. Combining with experimental results, the influences of two kinds of air resistance on the vibration period of compound pendulum are analyzed and compared.

**Key words:** compound pendulum; air resistance; vibration period; resistance coefficient

[责任编辑: 郭 伟]

(上接第 36 页)

## Measuring the velocity of ultrasonic wave in liquid based on Talbot effect

ZHANG Cheng-yi, LI Chuan-qi, CHENG Guo-sheng

(Department of Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

**Abstract:** The order of self-imaging is adjusted in the longitudinal direction by simply changing the location of positive lens. The ultrasonic wavelength in liquid is given by measuring the distance between two Talbot images, the velocity of ultrasonic waves in liquid is then computed with the wavelength obtained. It is concluded that quasi-Talbot-effect can be used to measuring the velocity of ultrasonic waves in liquid. The results extend the application of self-imaging.

**Key words:** ultrasonic grating; velocity of ultrasonic wave; Talbot effect; Doppler frequency shift; self-imaging

[责任编辑: 任德香]