

复摆的空气阻尼修正

华东工学院 陈贤隆 林祥龙

摘要 本文对复摆的空气阻尼提出一个简化模型，当复摆作微摆动时，得出运动方程的近似解析解，从而导出一些新而有意义的结论，例如复摆质心至转轴的距离 l 对空气阻尼而言是一个起重要作用的参量。

一、引言

流行的文献讨论复摆空气阻尼时，往往采取唯象的方法，例如假设空气阻力正比于流速 v 或正比于角速度 ω ，也有假设正比于流速 v^2 的模型。这些讨论当然是可取的。然而有较大的缺点，就是说用这种模型无法发现复摆的几何参量，摆角幅度（最大摆角）以及空气物理参量对测量复摆周期时因空气阻尼引入的误差，因此是不能令人满意的。

本文提出一个新的简化物理模型，由此建立复摆的运动方程，得出近似解析解，从而得出一些新的结论。

二、简化物理模型

空气阻力是流体力学研究的重要课题，非常复杂，但是在复摆作微摆动的情况下^[1]，可提出如下的简化物理模型，假设

1. 最大摆角 θ_0 很小， $\sin \theta_0 \sim \theta_0$ ；
2. 空气在复摆未作摆动时，宏观流速为0，即原来没有流速。当摆动时才有流速；
3. 空气阻力作用在复摆的质心上；
4. 在通用的空气阻力公式中以复摆的质心速度 v_C 代替空气流速的平均速度 \bar{v} 或最大速度 v_{\max} 。

上述假设中的1、2两条是显而易见的，至于第3条，因为我们讨论的是微摆动，且无平动，因此阻力中心与质心基本上重合。第4条假设的合理性，将在下面讨论中加以说明。

上述四条假设组成了本文的简化物理模型，实质上空气阻力是空气流速、物体形状、空气密度等参数的函数，然而在气体动力学中通常采用近似公式^[2]

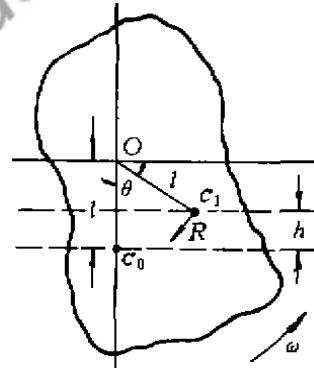
$$R(\text{空气阻力}) = \frac{1}{2} c \rho_a v^2 S$$

式中 c 称为阻力系数、无量纲（应与流速、形状有关），在一級近似下，可看作常数。 ρ_a 是空气密度，在复摆作微摆动情况下也可看作常数，与时空变化无关（也可用摆动区间内的平均空气密度）。至于 v 、在空气动力学中有二种近似取法，第一种是将 $v \approx \bar{v}$ （平均速度），第二种 $v \approx v_{\max}$ （最大流速）。在我们的模型中取 $v \approx v_C^{[3]}$ （复摆质心速度）。

三、运动方程的建立与解析解

参看图，复摆绕水平轴 O 摆动，摆角为 θ ，摆动时质心 C 由 C_0 升至 C_1 ，即质心位置升高 h ， l 是质心至转轴 O 的距离。由图可知

$$h = l(1 - \cos \theta), \quad \frac{dh}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$



空气阻力 R 为

$$R = \frac{1}{2} c \rho_a v_C^2 S \quad (2)$$

v_C 为质心速度， S 为复摆表面积。

而 R 对水平轴（转轴） O 产生的力矩 L 为

$$L = Rl \quad (2a)$$

因此空气阻力矩所作的功 A_R 为

$$A_R = \int L d\theta = \frac{S}{2} cl^3 \rho_a \int \omega^2 d\theta \quad (3)$$

式中 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 。

用功能原理 $-A_R = \Delta(E_{kc} + E_{pc})$ （ E_{kc} 是质心

动能， E_{pc} 是质心势能)即得

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + Mgh + \frac{1}{2} c l^3 \rho_a S \int \omega^2 d\theta = 0$$

将上式两边对 t 求导，得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a_1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{a_2}{2} \theta = 0 \quad (4)$$

(4)式即是由本文所提出简化模型为前提的条件下，考虑空气阻尼后，复摆的运动方程。

式中 $a_1 = \frac{c \rho_a l^3 S}{I_0}$ (I_0 为复摆对 O 轴的转动惯量)

$$a_2 = \frac{2Mgl}{I_0} \quad (M \text{ 为复摆的质量})$$

(4)式为非线性二阶常系数、常微分方程^[2]，有解析解。可以作如下的变量变换：

令 $u(\theta) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ 代入(4)式，即得

$$\frac{du}{d\theta} + a_1 u = -a_2 \theta \quad (5)$$

(5)式的解为

$$u = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = a_0 e^{-a_1 \theta} + \frac{a_2}{a_1^2} (1 - a_1 \theta) \quad (6)$$

式中 a_0 为积分常数。

因此，运动方程(4)式的解析解为

$$t = t_0 + \int \frac{d\theta}{\sqrt{a_0 e^{-a_1 \theta} + \frac{a_2}{a_1^2} (1 - a_1 \theta)}} \quad (7)$$

式中 t_0 为积分常数。

四、空气阻尼影响对复摆周期的修正

因为最大摆角 θ_0 很小(微摆动)，且空气阻尼不大，所以可作如下近似，将 $e^{-a_1 \theta}$ 按 Taylor 级数展开

$$e^{-a_1 \theta} \approx 1 - a_1 \theta + \frac{1}{2} a_1^2 \theta^2 \quad (\text{假设 } a_1 \theta < 1)$$

代入(7)式，得到

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(a_0 + \frac{a_2}{a_1^2}) - a_1(a_0 + \frac{a_2}{a_1^2})\theta + \frac{1}{2} a_0 a_1^2 \theta^2}} \quad (8)$$

上述积分的结果视系数 a_0 、 a_1 、 a_2 而定，当 $a_0 < 0$ 时有周期性。从(6)式看，当 $\theta = \theta_0$ 时其角速度 $(\frac{d\theta}{dt})_{\theta=\theta_0} = 0$ ，代入(6)式，得(注意， θ_0 是最大摆

角)

$$a_0 = -\frac{a_2}{a_1^2} + \frac{1 - a_1 \theta_0}{1 - a_1 \theta_0 + \frac{1}{2} a_1^2 \theta_0^2} \quad (9)$$

(这里已用了 $e^{-a_1 \theta_0} \approx 1 - a_1 \theta_0 + \frac{1}{2} a_1^2 \theta_0^2$)。因 a_2 与 a_1 都 > 0 ，而 $a_1 \theta_0 < 1$ (空气阻力不太大)，故有

$$a_0 < 0 \quad (9a)$$

(8)式的结果为

$$t - t_0 = -\frac{1}{a_1} \sqrt{-\frac{2}{a_0}} \sin^{-1} \left[\frac{a_0 a_1 \theta - (a_0 + \frac{a_2}{a_1^2})}{\sqrt{-[a_0^2 - (\frac{a_2}{a_1^2})^2]}} \right]$$

故

$$\theta = \frac{a_0 + \frac{a_2}{a_1^2}}{a_0 a_1} - \frac{\sqrt{-[a_0^2 - (\frac{a_2}{a_1^2})^2]}}{a_0 a_1} \cdot \sin \left[a_1 \sqrt{-\frac{a_0}{2}} (t - t_0) \right] \quad (10)$$

(10)式中 $(t - t_0)$ 前的系数 $a_1 \sqrt{-\frac{a_0}{2}}$ 即是考虑空气阻尼后，复摆的固有频率 ω_0 ，即

$$\omega_0 = a_1 \sqrt{-\frac{a_0}{2}}$$

将(9)式代入上式，得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - a_1 \theta_0}{1 - a_1 \theta_0 + \frac{1}{2} a_1^2 \theta_0^2}} \quad (11)$$

由于复摆的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 而不考虑空气阻尼时

$$\text{复摆的周期 } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgl}} \quad (11a)$$

综合(11)、(9)式并将 a_1 与 a_2 所代表的物理量代入，并考虑到 $a_1 \theta_0 < 1$ 最后得到

$$T \approx T_0 (1 + \frac{1}{4} a_1^2 \theta_0^2) \quad (12)$$

$$\text{其中 } a_1 = \frac{c \rho_a l^3 S}{I_0}$$

$\frac{1}{4} a_1^2 \theta_0^2$ 即为空气阻尼对复摆周期的修正项，由此可以求出相对误差 ϵ

$$\epsilon = \frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{1}{4} a_1^2 \theta_0^2$$

(下转 35 页)

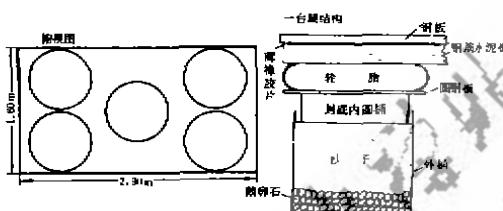
简易防震台的制作

石油大学 王江 张强

摘要 防震效果如何是影响制作全息图的重要因素。购买防震台一方面花销较大，另一方面运输与安装相当麻烦。这里介绍一下我们所自制的简易防震台及对影响防震效果的各种因素所进行的探索。

一、实验台结构及效果

下图是我们所制作的防震台示意图。右边表示一个台腿的结构，其中轮胎用一般吉普车内胎即可。气不宜打得太足。我们在工作面上设置了一长臂迈克耳孙干涉仪，用以检验防震台的性能，从而摸索影响防震台效果的各种因素。



购买的防震台除其他防震设施外，光学台本身是很重的，且为很好近似的刚性体（铸铁制造）。我们为方便加工，选用了一厘米厚的钢板作台面。但由于面积较大，形变问题就变得很突出，严重影响了防震台的防震性能。没有水泥板衬托时，干涉条纹晃动很厉害，几乎不能稳定下来。加上水泥板（板面要尽量平），

用螺丝将钢板、橡胶片和水泥板固定为一体，效果甚佳，可见“刚体”是重要因素之一。

我们的实验室在距一繁忙奔跑重型汽车的公路约30米的基础结构较差的一小楼中，这种装置在此恶劣环境中的抗震效果是完全满足制作全息图条件的。白天正常情况下干涉条纹的振动不超过五分之一个条纹，可与一购置的成品防震台媲美。

二、讨论

实验中明显看出，用钢板代替铸铁时，钢板的弹性形变是防震效果恶化的重要原因。根据弹性动力学理论，未变形状态下为各向同性的弹性固体若在发生无穷小形变之前就遭受了有限形变，则它对无穷小形变的响应就不再是各向同性的了^[1]。因此形变的钢板制光学台对周围震源的响应就是不均匀的，也就影响了其抗震性能。这就是用钢筋水泥板作光学台衬底的原因，钢板在钢筋水泥板上的较好防震状态应是使其形变尽量减小（响应均匀）且响应也尽量小的放置状态。水泥板与钢板间的薄橡胶片就是基于这一考虑而加上的。另外，轮胎起高频的缓冲淹没作用，这对适应恶劣环境下的工作也是很有效的。这样，将各种防震措施串联并联起来的综合效果就是很理想的了^[2]。

参 考 文 献

- [1] A.C.艾龙根，E.S.舒胡毕著，戈革译，《弹性动力学》，石油工业出版社，1983年。
- [2] 彭拾义，减振器，国防工业出版社，1979年。

(上接 25 页)

将 a_1 代表的参量代入

$$\varepsilon \cong \frac{1}{4} \frac{c^2 \rho_a^2 S^2 \theta_0^2}{I_0^2} l^6 \quad (13)$$

这是一个比较有意义的结果，当其它参量一定时，空气阻尼对复摆周期引入的相对误差 ε 正比于 l^6 ，即 l 越长引进的误差越大，由此得出结论，复摆质心到水平转轴 O 的距离 l 对误差起决定性作用。

参 考 文 献

- [1] L. Page, *Theoretical Physics*, McGraw First Edition, p. 131.
- [2] Pipes, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, Oxford Press, First Edition, p. 581—587.
- [3] W. 考夫曼，工程流体力学，上海科学技术出版社（1959），97页。