

任意摆角的复摆振动规律研究

朱 平

(普洱学院理工学院, 云南 普洱 665000)

[摘要] 复摆振动是一类最为基本和重要的振动, 也是研究其它复杂振动的基础。然而, 任意摆角的复摆振动由于涉及椭圆积分, 问题的讨论带来一定的困难, 通常仅局限于讨论摆角较小时的情况, 近似处理为简谐振动。如果不作这种近似处理, 对任意的摆角, 复摆的振动规律又如何, 是否是简谐振动, 振动又有什么特点, 运用椭圆积分函数的理论给出了问题的解析解, 并进行了深入的研究。

[关键词] 复摆; 任意摆角; 振动规律; 研究

[中图分类号] TP391.9; O321 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 2095-7734(2014)03-0019-03

在力学问题的研究中, 复摆振动是一类最为基本和重要的振动^[1], 也是研究其它复杂振动的基础。然而, 对这类振动的研究, 涉及椭圆积分, 给问题的求解带来困难^[2-6]。一般情况仅局限于讨论摆角较小时的情况, 近似处理简化为简谐振动。如果不作这种近似处理, 对任意的摆角, 这类问题的振动规律又如何, 是否是简谐振动, 振动又有什么特点, 本文将对这一问题展开研究。

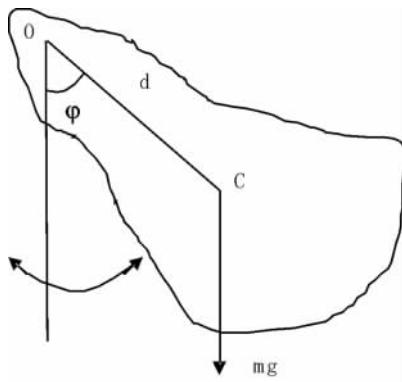


图 1 复摆

如图 1 所示, 一刚体复摆, 质量为 m , 转动惯量为 I , 过 O 点的垂直轴为转轴, 转轴到质心的距离为 d , 刚体可以绕过 O 点的垂直轴自由往复地振动。

对于一任意摆角 φ , 复摆受到的回复力矩为 $-mgd \sin\varphi$, 由定轴转动定理有

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd \sin\varphi \quad (1)$$

$$\text{令 } \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgd}{I}, t=0, \varphi=0, \omega=\omega_0 \text{ 则有}$$

$$\omega d\omega = -k_0^2 \sin\varphi d\varphi \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 (-\frac{1}{2}\omega_0^2) = k_0^2 (\cos\varphi - 1) \quad (3)$$

$$\omega^2 = 2k_0^2 (\cos\varphi - 1) + \omega_0^2$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{2k_0^2 (\cos\varphi - 1) + \omega_0^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2k_0^2 [\cos\varphi - (1 - \frac{\omega_0^2}{2k_0^2})]} \quad (4)$$

对于复摆的振动, 有 $\frac{1}{2}I\omega_0^2 < mgd$

① [收稿日期] 2014-05-18

[基金项目] 项目来源于“云南省高校力学开放重点实验室”。

[作者简介] 朱平(1956~), 男, 云南江城人, 博士, 教授, 研究方向: 力学、统计物理。

$$\text{故 } \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2k_0^2}\right) < 1 \quad (5)$$

$$\text{令 } \cos\alpha = 1 - \frac{\omega_0^2}{2k_0^2} \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2k_0^2(\cos\varphi - \cos\alpha)} \quad (7)$$

从微分方程(7)式有

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2k_0^2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} \quad (8)$$

(8)式为椭圆积分。为得到相应的解作变量变换

$$\text{令 } \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta,$$

$$\varphi = 0, \theta = 0; \varphi = \alpha, \theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \varphi, \theta = \theta.$$

$$\text{有 } d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta}} \quad (9)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2k_0^2}} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta}} \quad (10)$$

$$\text{令 } k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_0^2}{4k_0^2} < 1 \quad (11)$$

于是

$$t = \frac{1}{k_0} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (12)$$

方程(12)为椭圆积分,其解为^[7]

$$t = \frac{1}{k_0} F[\theta, k] = \frac{1}{k_0} F\left[\arcsin\left(\frac{4k_0^2}{\omega_0^2} \sin \frac{\varphi}{2}\right), \frac{\omega_0^2}{4k_0^2}\right]$$

(13)

为 $F[\theta, k]$ 第一类椭圆积分函数。从(13)式我们可以通过计算机数值计算得到角位移随时间的演化规律 $\theta = G(t)$ (14)

(13)或(14)就是任意摆角的复摆的振动规律的解。

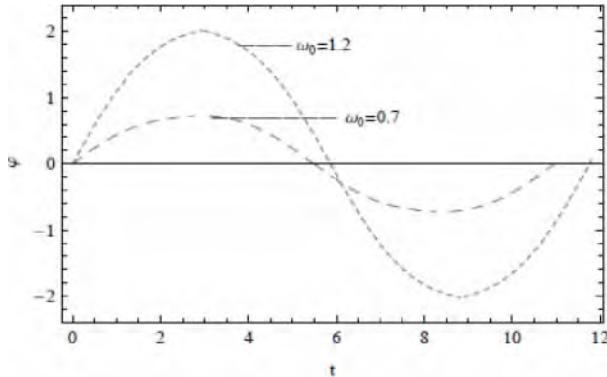


图 2 任意摆角复摆的振动图像

利用复摆微分方程的解析式(13),通过计算机数值计算的方法,在图 2 里给出了任意摆角的复摆振动角位移随时间的演化图 $\varphi = G(t)$ 。这里, $k_0 = 0.7$, 初角速度 ω_0 取不同的值。从图 2 看到, 任意摆角的振动是周期函数, 但振动的周期和振动的幅度与摆通过平衡位置时的初角速度有关, 在 ω_0 的取值范围里, 初角速度越大, 周期越大, 振动的幅度也越大。显然, 振动幅度越大, 振动周期越大, 振动周期与振动幅度有关, 任意摆角的振动不是简谐振动。

当 $\varphi = \alpha$ 时, 从(7)式有 $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, 复摆到达最大

摆角位置。此时, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。

于是, 可以得到任意摆角复摆的振动周期解析式^[7]

$$T = \frac{4}{k_0} F\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\omega_0^2}{4k_0^2}\right] = \frac{4}{k_0} K\left[\frac{\omega_0^2}{4k_0^2}\right] \quad (15)$$

这里, $K[k]$ 为第一类完全椭圆积分函数。

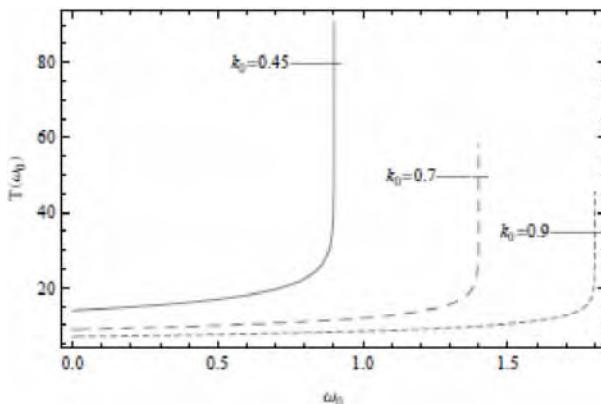


图 3 复摆的振动周期分布图

图 3 给出了复摆的振动周期与初角速度平方 ω_0^2 、系统固有属性 k_0 间的关系。当初角速度平方增加时, 即摆幅增大时, 系统的周期增大。当初角速度接近系统的限制值($2mgd/I$)时, 系统的周期迅速增大。在初角速度一定时, 系统固有频率越大, 复摆的振动周期就越大。

如果复摆作等价 $\sin\varphi \sim \varphi$ 近似处理, 为简谐振动。

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k_0^2\varphi \quad (15)$$

其解为

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k_0} \sin k_0 t \quad (16)$$

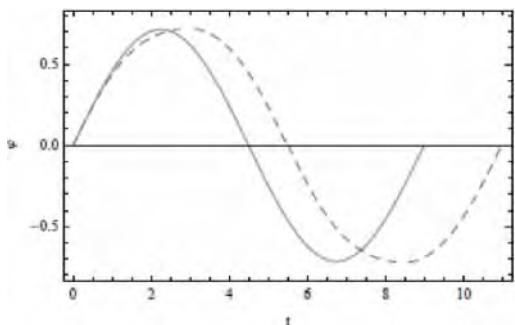


图 4 复摆振动图像与作等价近似处理的简谐振动图像的比较

在图 4 里给出了任意摆角的复摆振动图像与作等价近似处理为简谐振动图像的比较。这里, $k_0 = 0.5$, $\omega_0 = 0.7$ 。虚线为解析解(13)式给出的任意摆角的复摆振动图像。实线为复摆等价近似处理为简谐振动的振动图像。从图 4 看到, 对于一定的摆幅, 两者有较大的区别。实际复摆, 其振动周期比近似处理的简谐振动的周期更大, 振幅也有差异。

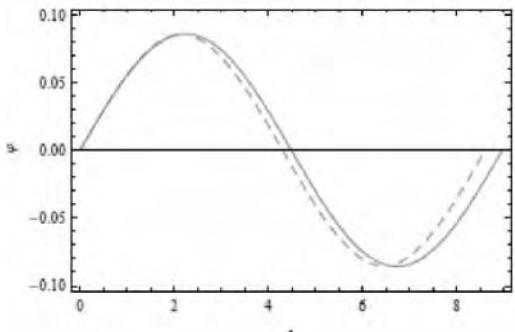


图 5 振幅角为 5° 时复摆振动图像与相应简谐振动图像比较

Research on Vibrations of Compound Pendulum for Arbitrary Angles

ZHU Ping

(School of Science and Technology of Pu'er Universiy, Pu'er Yunnan , 665000)

[Abstract] Because vibrations of a compound pendulum for arbitrary angles involve the elliptic integrals, it is difficult for us to investigate and to solve this problem. This paper investigates the problem and presents the angular displacement function and the period function of a compound pendulum for arbitrary angles by using the theory of elliptic integrals and the analytic method.

[Key words] Compound pendulum; Any angular; Law of vibration; research

图 5 给出了振动幅角为 5° 时简谐振动图像(实线)与解析式(13)给出的振动图像(虚线), 这里, $\omega_0 = 0.7$ 。显然, 当幅角较小时, 两者的振动周期、振幅都比较接近, 当幅角更小时, 复摆的振动可看作简谐振动。而实际的复摆, 幅角小于 5° 的振动不太容易实现, 因此, 实际的复摆多为非简谐振动, 它的振动规律可以由式(13)与式(14)给出。

[参考文献]

- [1] 漆安慎, 杜婵英. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 328—329.
- [2] 郭士堃. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982, 312—313.
- [3] Zhu P, Zhu Y J. Journal of Electrostatics. 2012, 70: 25—30.
- [4] Zhu P. Journal of Electrostatics. 2005, 63(5): 456—465.
- [5] 朱平. 研究椭圆积分物理问题的一种方法[J]. 大学物理. 2003, 22(5): 25—27.
- [6] 朱平, 赵永达. 两体振子问题的研究[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2003, 23(1): 25—30.
- [7] Byrd P F, Friedman M D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists [J]. second ed. Springer — Verlag, Berlin, 1971: 9—30.