

## 加配重复摆振动周期的实验研究

安爱芳,王玉清,任新成,王延凤

(延安大学 物理与电子信息学院,陕西 延安 716000)

**摘要:**分别测量复摆在未加配重与加上配重时相应的周期,揭示了加配重复摆周期的变化规律.**关键词:**复摆;振动周期;回转半径**中图分类号:**O 313.3**文献标识码:**A**文章编号:**1000-0712(2003) 10-0028-04

在复摆的某一位置加一配重时,其振动周期将如何变化?这是一个十分复杂但又非常重要的问题.加配重复摆与未加配重的复摆相比较,其周期并不是简单的增大、减小、不变.为此,我们进行了实验测量和分析研究,并用图解法和最小二乘法处理数据,揭示了加配重复摆周期的变化规律.

## 1 实验仪器

复摆、米尺、停表(最小分度值  $1/10\text{s}$ )、物理天平(最小分度值  $0.05\text{g}$ )、测量重心位置支架和配重.

## 2 实验原理

一个围绕定轴摆动的刚体就是复摆,当摆的振幅甚小时,其振动周期  $T$  为<sup>[1]</sup>

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$

式中  $I$  为复摆对回转轴  $O$  的转动惯量,  $m$  为复摆的质量,  $g$  为当地的重力加速度,  $h$  为摆的支点到摆的质心的距离,如图 1 所示.

又设复摆对通过质心  $C$  且平行于  $O$  轴的转动惯量为  $I_C$ , 则

$$I = I_C + mh^2 \quad (2)$$

而  $I_C = mk^2$ ,  $k$  是复摆对  $C$  轴的回转半径,因此式(1)可改写为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}} \quad (3)$$

式(3)即为复摆未加配重时的周期公式.

由式(3)求  $\frac{dT}{dh}$ , 令  $\frac{dT}{dh} = 0$ , 得  $h = k$  时,  $T$  最小.

若在复摆的  $aC$  一边的某一位置加一配重  $P$ , 则复摆的质心由  $C$  点移至  $C_1$  点, 如图 2 和图 3 所示,  $CC_1$  为二质心的间距,  $h_1$ 、 $h'_1$  为两种情况下支点到新质心的距离.

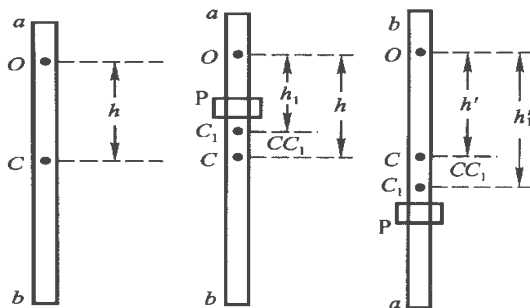


图 1

图 2

图 3

当支点在  $aC$  一边时, 由图 2 知  $h_1 = h - CC_1$ , 则式(3)变为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{k_1^2 + h_1^2}{gh_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_1^2 + (h - CC_1)^2}{g(h - CC_1)}} \quad (4)$$

$k_1$  为复摆对  $C_1$  轴的回转半径, 由式(4)求  $\frac{dT_1}{dh_1}$ , 令  $\frac{dT_1}{dh_1} = 0$ , 得  $h_1 = k_1 = h - CC_1$  时,  $T_1$  最小.

当支点在  $bC$  一边时, 由图 3 知  $h'_1 = h' + CC_1$ , 则式(3)变为

$$T'_1 = 2\pi \sqrt{\frac{k_1'^2 + h_1'^2}{gh_1'}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_1'^2 + (h' + CC_1)^2}{g(h' + CC_1)}} \quad (5)$$

收稿日期:2002-08-05

**作者简介:**安爱芳(1942-),女,陕西绥德人,延安大学物理与电子信息学院副教授,主要从事实验物理的教学与研究.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

$k_1'$ 为复摆对  $C_1$  轴的回转半径,由式(5)求 $\frac{dT_1'}{dh_1'}$ ,令 $\frac{dT_1'}{dh_1'}=0$ ,得 $h_1'=k_1'=h'+CC_1$ 时, $T_1'$ 最小.  
式(4)和(5)即为复摆加配重时的周期公式.

3 实验内容

3.1 未加配重之情形

- 1) 测量复摆质心  $C$  的位置  $h_C$ .将复摆水平放在测重心支架的刀刃上,利用杠杆原理寻找  $C$  点的位置  $h_C$ ,则  $h_C$  为 0.
- 2) 测量不同支点的相应周期.用米尺测出各支点的位置,以支点到  $C$  的距离  $h_i$  来表示,将支点由靠近  $a$  端开始移动到  $b$  端,测量周期  $T_i$ ,改变支点位置 10 次以上.

3.2 加配重之情形

- 1) 将配重  $P$  套在复摆的某一位置( $aC$  一边),如图 2、图 3 所示,并固定之.
- 2) 用 3.1 节方法 1 测复摆新的质心  $C_1$  的位置,测出  $CC_1$ .
- 3) 将支点由  $a$  端逐渐移到  $C_1$ ,按 3.1 节方法 2 测周期.
- 4) 将支点由  $b$  端逐渐移到  $C_1$ ,按 3.1 节方法 2 测周期.

表 1 未加配重时复摆的周期

$h_i/\text{cm}$	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
$\overline{T_i}/\text{s}$	1.260	1.252	1.245	1.237	1.230	1.223	1.212	1.207	1.200	1.195
$h_i/\text{cm}$	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
$\overline{T_i}/\text{s}$	1.192	1.187	1.190	1.193	1.198	1.203	1.218	1.238	1.255	1.282
$h_i/\text{cm}$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\overline{T_i}/\text{s}$	1.322	1.365	1.430	1.515	1.635	1.800	2.060	2.500	3.520	无法测

表 2 支点在配重  $aC$  一边复摆的周期

$h_{i_1}/\text{cm}$	23.4	22.4	21.4	20.4	19.4	18.4	17.4	16.4
$\overline{T_{i_1}}/\text{s}$	1.143	1.135	1.117	1.110	1.102	1.092	1.090	1.085
$h_{i_1}/\text{cm}$	15.4	14.4	13.4	12.4	11.4	2.4	1.4	0.4
$\overline{T_{i_1}}/\text{s}$	1.080	1.077	1.080	1.087	1.092	1.908	2.480	无法测

表 3 支点与配重未在一边( $bC$ )复摆的周期

$h'_{i_2}/\text{cm}$	34.6	33.6	32.6	31.6	30.6	29.6	28.6	27.6	26.6	25.6	24.6	23.6
$\overline{T'_{i_2}}/\text{s}$	1.283	1.273	1.257	1.250	1.230	1.218	1.203	1.195	1.183	1.175	1.157	1.147
$h'_{i_2}/\text{cm}$	22.6	21.6	20.6	19.6	18.6	17.6	16.6	15.6	14.6	13.6	12.6	11.6
$\overline{T'_{i_2}}/\text{s}$	1.138	1.128	1.113	1.105	1.097	1.092	1.083	1.080	1.078	1.082	1.083	1.090
$h'_{i_2}/\text{cm}$	10.6	9.6	8.6	7.6	6.6	5.6	4.6	3.6	2.6	1.6	0.6	
$\overline{T'_{i_2}}/\text{s}$	1.100	1.115	1.137	1.178	1.230	1.308	1.435	1.585	1.838	2.320	无法测	

5) 将所测数据分别列表如表 1、表 2、表 3 所示.

4 注意事项

- 1) 复摆摆角应小于  $5^\circ$ .
- 2) 应保证复摆在一个平面内摆动,不可使其扭动或转动.
- 3) 测复摆周期时振动次数应数对,计时应准确.

5 数据处理方法

5.1 图解法

- 1) 未加配重时,以  $h$  值为横坐标(均取正值),  $T$  为纵坐标,作  $T-h$  图,即为图 4 中的(1-1)曲线,因我们所用的复摆均匀,摆上的孔也对称,因而摆两侧变化规律也对称,同法可画出另一边的  $T-h'$  图,如图 4 中的(1'-1')曲线,作直线  $EE'$  平行于轴  $hh'$ ,交(1-1)曲线于  $E$ ,交(1'-1')曲线于  $E'$ ,则  $EE'=2k$ ,得出  $k$  值,即  $T$  的最小值所对应的  $h$  值.
- 2) 画出加配重时支点在配重一边( $aC$ )的  $T-h$  图,如图 4(2-2)曲线,用同样方法求出  $k_1$  值.
- 3) 画出加配重时支点不在配重一边( $bC$ )的  $T-h$  图,如图 4(2'-2')曲线,用同样方法求出  $k_1'$  值.
- 4) 找出曲线(1-1)与(2-2)的交点  $Q$ .

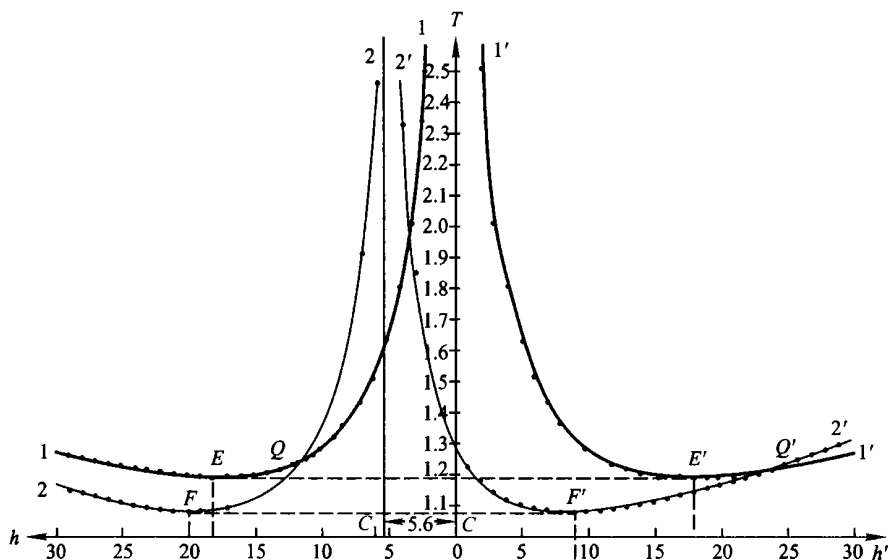


图4

5) 找出曲线  $(1'-1')$  与  $(2'-2')$  的交点  $Q'$ 。

## 5.2 最小二乘法

将式(3)改写成<sup>[1]</sup>

$$T^2 h = \frac{4\pi^2}{g} k^2 + \frac{4\pi^2}{g} h^2$$

令  $y = T^2 h$ ,  $x = h^2$ , 则上式为

$$y = \frac{4\pi^2}{g} k^2 + \frac{4\pi^2}{g} x \quad (6)$$

从测量结果可得到  $n$  组  $(x, y)$  值, 用最小二乘法求出拟合直线方程  $y = A + Bx$  中的  $A = \frac{4\pi^2}{g} k^2$ ,  $B = \frac{4\pi^2}{g}$ , 由  $A, B$  可求出  $k$  值:

$$k = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (7)$$

下面分别计算未加配重与加上配重时的周期相同点。

当支点在  $aC$  一边时, 式(3)与式(4)联立, 当  $T = T_1$  时有

$$\frac{k^2 + h^2}{h} = \frac{k_1^2 (h - CC_1)^2}{h - CC_1} \quad (8)$$

将  $k_1, k, CC_1$  值代入式(8), 并解此方程, 得其有用解为  $h = h_Q$  时,  $T = T_1$ 。

当支点在  $bC$  边时, 式(3)与式(5)联立, 当  $T' = T'_1$  时, 有

$$\frac{k'^2 + h'^2}{h'} = \frac{k_1'^2 (h' + CC_1)^2}{h' + CC_1} \quad (9)$$

求式(9)解, 运用相同的方法, 得出  $h' = h'_Q$  时,  $T' = T'_1$ 。

## 6 数据记录与处理

### 6.1 数据记录

在我们所做实验中, 复摆质量为  $412.76\text{g}$ , 配重  $P$  的质量为  $351.42\text{g}$ ,  $P$  所在位置:  $aC$  一边  $9.4 \sim 15.5\text{cm}$  处,  $CC_1 = 5.6\text{cm}$ 。

1) 未加配重时复摆的周期, 如表1所示。

2) 支点在配重  $aC$  一边复摆的周期, 如表2所示, 其中  $h_i = h_i - CC_1$ 。

3) 支点与配重未在一边 ( $bC$ ) 复摆的周期, 如表3所示, 其中  $h'_i = h'_i + CC_1$ 。

### 6.2 数据处理

1) 用图解法处理数据。

从图4可得  $k = k' = 18.00\text{cm}$ ,  $k_1 = h_1 - CC_1 = (20.00 - 5.6)\text{cm} = 14.4\text{cm}$ ,  $k'_1 = h'_1 + CC_1 = (9.00 + 5.6)\text{cm} = 14.60\text{cm}$ 。

支点在  $aC$  一边, 二曲线交点  $h_Q = 12.30\text{cm}$ , 因此可得结论: 复摆加配重时, 当  $h > h_Q = 12.30\text{cm}$  时, 周期缩短; 当  $h = 12.30\text{cm}$  时, 周期不变; 当  $h < 12.30\text{cm}$  时, 周期增大。

支点在  $bC$  一边, 二曲线交点  $h'_Q = 25.00\text{cm}$ , 因此可得结论: 当  $h' > 25.00\text{cm}$  时, 周期增大; 当  $h' = 25.00\text{cm}$  时, 周期不变; 当  $h' < 25.00\text{cm}$  时, 周期缩短。

2) 用最小二乘法处理数据。

① 令  $x = h^2$ ,  $y = T^2 h$ , 利用表1的数据, 用最小二乘法求出拟合直线方程  $y = A + Bx$  中的  $A = 12.39580$ ,  $B = 0.04039$ ,  $r = 0.99995$ , 说明直线拟合

得很好, 同时得  $k = \sqrt{\frac{A}{B}} = 17.52\text{cm}$ , 因为复摆对称,

所以  $k' = k = 17.52\text{cm}$ .

② 利用表 2 数据,用方法①求得拟合直线方程  $y = A + Bx$  中的  $A = 8.437\ 35$ ,  $B = 0.040\ 25$ ,  $r =$

$0.999\ 89$ , 得  $k_1 = \sqrt{\frac{A}{B}} = 14.48\text{cm}$ .

③ 利用表 3 数据,用方法①求得拟合直线方程  $y = A + Bx$  中的  $A = 8.341\ 86$ ,  $B = 0.040\ 78$ ,  $r =$

$0.999\ 94$ , 得  $k'_1 = \sqrt{\frac{A}{B}} = 14.30\text{cm}$ .

将  $k = 17.52\text{cm}$ ,  $k_1 = 14.48\text{cm}$ ,  $CC_1 = 5.6\text{cm}$  代入式 (8), 解此方程得其有用解为  $h_Q = 12.60\text{cm}$ . 将表 1 与表 2 数据加以比较, 不难得出结论: 复摆加配重时, 当  $h > 12.60\text{cm}$  时,  $T_1 < T$ , 周期缩短; 当  $h = 12.60\text{cm}$  时,  $T_1 = T$ , 周期不变; 当  $h < 12.60\text{cm}$  时,  $T_1 > T$ , 周期增大.

将  $k' = 17.52\text{cm}$ ,  $k'_1 = 14.30\text{cm}$ ,  $CC_1 = 5.6\text{cm}$  代入式 (9), 解此方程得其解为  $h'_Q = 25.02\text{cm}$ . 对照表 1 与表 3 得出结论: 复摆加配重时, 当  $h' > 25.02\text{cm}$  时,  $T'_1 > T'$ , 周期增大; 当  $h' = 25.02\text{cm}$  时,  $T'_1 = T'$ , 周期不变; 当  $h' < 25.02\text{cm}$  时,  $T'_1 < T'$ , 周期缩短.

## 7 结论

综上所述, 加配重复摆的周期变化十分复杂, 但并非无章可循. 当支点在加配重一边,  $h > h_Q$  时, 周期缩短;  $h = h_Q$  时, 周期不变;  $h < h_Q$  时, 周期增大. 当支点在未加配重一边,  $h' > h'_Q$  时, 周期增大;  $h' = h'_Q$  时, 周期不变;  $h' < h'_Q$  时, 周期缩短. 因此, 复摆加配重时周期不能一概而论为增大、减小、相等, 而应根据具体情况, 得出正确的结论.

## 8 讨论

## 8.1 两种方法的比较

图解法和最小二乘法这两种方法均可得出相同的结论.

1) 图解法较简单、直观、便于分析, 但准确度较后者相对差些, 尤其在加配重这一边受配重位置的影响, 测量数据相对少些, 曲线的弯曲度不易准确掌握. 同时要用大篇幅的坐标纸才准确.

2) 最小二乘法计算结果准确, 但较烦琐, 没有图解法直观, 只有将二者结合起来才是最好的数据处理方法.

## 8.2 建议

建议用数字毫秒计等精度较高的计时器代替秒表, 提高实验速度和测量准确度.

物理学是一门实验科学, 任何新概念的确立和物理规律的发现, 都必须以严格的科学实验为基础, 否则就可能得出有偏差的甚至是错误的结论. 物理实验教学能使生潜移默化地受到这种熏陶和教育, 在培养学生实事求是的态度、严谨的科学作风、创新意识和创造能力等方面具有其他教学形式所不可替代的重要作用. 实验的这种作用较之于使学生掌握一些具体的知识和技能更为重要, 对于提高学生的素质具有重大意义.

## 参考文献:

- [ 1 ] 杨述武. 普通物理实验( 一、力学及热学部分)[ M ]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2000. 148~150.
- [ 2 ] 杨述武. 普通物理实验( 一、力学及热学部分)[ M ]. 北京: 高等教育出版社, 1987. 101~102.

# Research of vibration period for over weighted compound pendulum

AN Ai fang , WANG Yu qing , REN Xin cheng , WANG Yan feng

( College of Physics and Electronic Information , Yan ' an University , Yan ' an , Shaanxi , 716000 , China )

**Abstract :** The vibration periods of compound pendulum are measured for normal and over weighted modes , and the changing rule of vibration period of over weighted compound pendulum are obtained .

**Key words** compound pendulum ; vibration period ; turning radius