

# 复摆运动状态的研究

曲光伟 王艳辉 邹德滨 张天洋

(大连理工大学物理与光电工程学院, 辽宁 大连 116023)

(收稿日期: 2008-07-02)

**摘要** 从复摆的运动方程出发, 利用计算机对其各种运动情况进行模拟, 研究复摆从周期运动转化到混沌运动的过程, 深化复摆实验内容, 拓宽复摆实验的研究空间.

**关键词** 复摆; 倍周期; 混沌; 相空间

## STUDY ON THE MOTION BEHAVIORS OF THE COMPOUND PENDULUM

Qu Guangwei Wang Yanhui Zou Debin Zhang Tianyang

(School of Physics and Optoelectronic Technology of Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023)

**Abstract** Based on the motion equation of the compound pendulum, various typical motion cases are simulated by means of a computer, and the process from periodic behaviors to chaos is investigated. These studies can further expand the experimental contents of the compound pendulum and widen the research space.

**Key Words** compound pendulum; period doubling; chaos; phase space

### 1 引言

将先进的科学技术引进物理实验, 使学生在实验教学中经历与科研工作相似的过程, 培养学生从事科学研究的能力, 是开展研究性物理实验教学的主要目的. 复摆实验是大学物理实验中基本的力学实验之一, 在教学中通常只考虑其简谐振动的情况, 内容比较单一, 没有太多的研究空间. 实际上, 当复摆在驱动力矩及阻尼力矩的作用下, 将出现复杂的非线性运动, 而且在一定的条件下可通过倍周期分岔逐渐进入到混沌运动状态.

混沌运动是确定性非线性动力学系统所特有的复杂运动状态, 是一种貌似随机的不规则运动, 混沌的发现被誉为继相对论和量子力学后的第三次物理学革命, 混沌的研究一直备受学术界的关注. 如果将复摆的这些非线性振动特性引入物理实验, 不仅可以加深学生对复摆运动规律的认识, 给学生提供一个宽阔的研究空间, 而且还有助于学生了解物理学的发展前沿, 开阔学生的视野. 本文从

复摆的运动方程出发, 利用计算机进行数值求解, 研究复摆从周期运动转化为混沌运动的过程.

### 2 运动方程

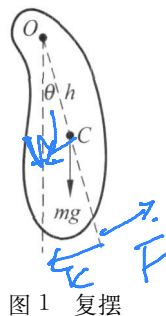
对如图 1 所示的复摆, 设其质量为  $m$ ; 对转轴  $O$  的转动惯量为  $I$ ; 质心  $C$  到转轴的距离为  $h$ . 如果复摆振动时受到的阻尼力矩是  $-k \frac{d\theta}{dt}$ ; 周期性驱动力矩为  $F \cos \omega t$ ; 重力矩为  $-mgh \sin \theta$ , 则复摆的运动方程可以写为

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + mgh \sin \theta = F \cos \omega t \quad (1)$$

对式 (1) 进行无量纲化得

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2\beta \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta = f \cos \omega \tau \quad (2)$$

其中,  $\beta = \frac{k}{2I\omega}$ , 称为无量纲阻尼系数;  $\omega = \sqrt{mgh/I}$  是复摆的固有频率;  $f = F/I\omega^2$  是无量纲



驱动力振幅;  $\omega = \omega_f / \omega_0$  是无量纲驱动力频率;  $\tau = \omega t$  是无量纲时间.

方程 (2) 用解析法求解很困难, 我们采用龙格-库塔法对其进行数值求解, 并用 Origin 软件作图来显示计算结果. 通过对  $\beta$  和  $f$  参数的调节, 我们分别模拟研究复摆的简谐振动、阻尼振动、有外力驱动时的周期运动和混沌运动.

### 3 运动状态的模拟研究

#### (1) 简谐振动

当无量纲阻尼系数  $\beta=0$ ; 无量纲驱动力振幅  $f=0$  时, 复摆处于理想振动状态, 在摆角较小时, 通过数值计算可得复摆的振动曲线及其在  $\theta$  和  $\frac{d\theta}{d\tau}$  构成的相空间的运动轨迹, 如图 2 所示. 可以看出, 数值结果与解析结果完全相同. 其相图是一闭合曲线, 进一步表明复摆运动的周期性.

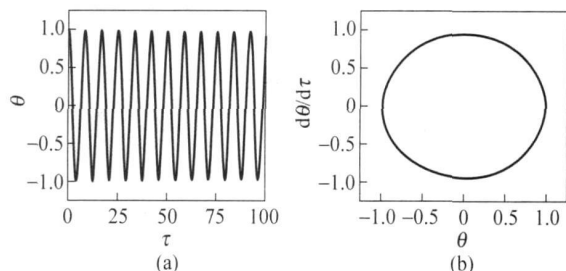


图 2 复摆作简谐振动时的振动曲线和相轨迹

#### (2) 阻尼振动

无阻尼的保守系统只是一种理想情况, 实际的系统总是或多或少地存在阻尼, 阻尼的存在将使保守系统封闭的相图遭到破坏. 模拟时取无量纲阻尼系数  $\beta=0.1$ , 无量纲驱动力振幅  $f=0$ , 结果显示在图 3 中.

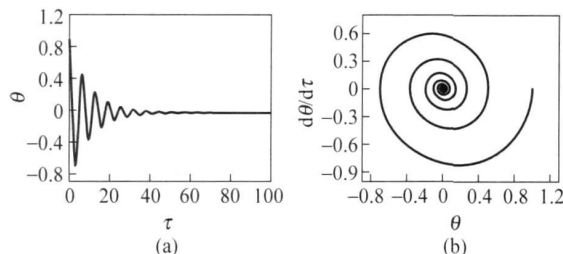


图 3  $f=0, \beta=0.1$  的振动曲线和相轨迹

由图 3(a) 可以看出, 由于阻尼的存在, 能量耗散, 复摆的振幅越来越小, 直到停止在复摆的平衡

位置. 这种正阻尼的振荡的相图为一根内旋的螺旋线 (见图 3(b)), 曲线不再闭合, 随着振幅逐渐减小, 速度越来越慢, 直至停摆. 无论初始的位置如何, 复摆最终都会趋向螺旋线的中心. 相图上螺旋线的中心为阻尼复摆运动的吸引点, 称为吸引子. 由于中心点是不动点, 所以又称不动点吸引子或者定常吸引子.

#### (3) 受迫振动

当复摆受一周期性驱动力作用时, 随着驱动力幅度的变化, 复摆的运动情况也将变得非常复杂. 取无量纲阻尼系数  $\beta=0.3$ , 无量纲驱动力频率  $\omega=2/3$ , 模拟结果显示, 在  $f$  较小时, 相空间的轨迹接近圆形, 且正负半周比较对称, 如图 4(a) 所示, 此时复摆仍然是稳定的单倍周期运动, 即振动周期与驱动力的周期相同. 随着  $f$  增大, 相空间的轨迹变得越来越扁且左右不对称, 一端明显突出, 但仍然是单周期运动, 如图 4(b) 所示.

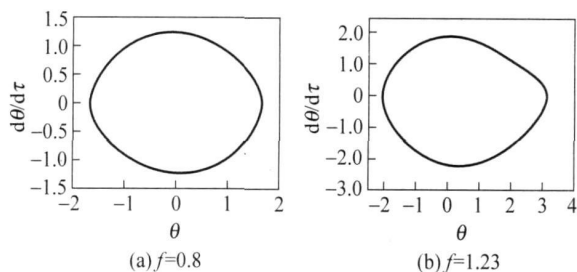


图 4 在受迫阻尼状态复摆单周期运动的相轨迹

$f$  继续慢慢增大, 运动更加复杂, 当  $f$  增加到 1.26 时, 系统发生第一次倍周期分岔, 复摆由一倍周期运动进入二倍周期运动, 即在驱动力的两个周期内运动才恢复原状, 如此周而复始地运动下去, 如图 5(a) 和 (b) 所示. 如果驱动力的振动周

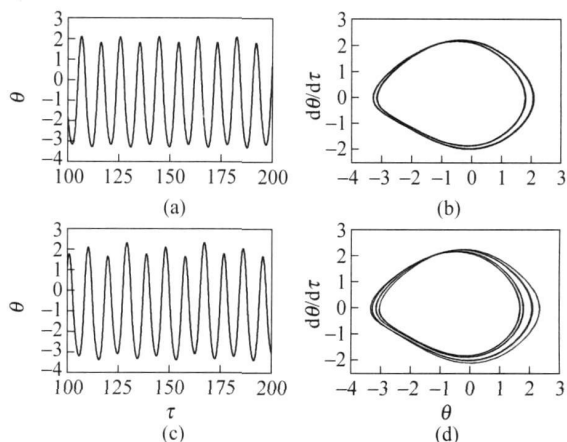


图 5 倍周期分岔时的振动曲线和相轨迹

期用  $T_F$  表示,则此时复摆的运动周期为  $2T_F$ ,此时相空间的运动轨迹为环绕两圈后才闭合的圆环.在  $f = 1.265$  时,再次发生倍周期分岔,二周期运动进入四倍周期运动,见图 5(c) 和 (d),复摆运动每隔 4 个驱动周期重复一次,相轨迹在二维环面上转 4 圈后闭合.由此可见,随着驱动幅度的增加,复摆运动出现倍周期分岔现象,由  $1T_F \rightarrow 2T_F \rightarrow 4T_F$ ,相空间的环面由 1 环分岔到 2 环,2 环再分岔到 4 环.

如果进一步增加驱动幅度,在  $f = 1.275$  时,系统出现三倍周期运动,如图 6 所示.根据 Li-Yorke 定理和 Li-Yorke 的混沌定义可知,如果系统存在周期三的解,那么该系统就一定存在周期为任何正整数的周期解,则一定会出现混沌,亦即“周期三意味着混沌”.我们模拟发现,周期三过后,当  $f$  大于 1.285 时,复摆逐渐脱离周期运动,其运动也不再是纯粹的振动,而是开始出现了小幅转动,相空间的轨线在特定的区域无规则地绕来绕去,开始出现混沌运动的趋势.当驱动幅度增加到 1.30 时,系统对初始条件非常敏感,完全进入混沌运动状态,如图 7(a) 所示,由它的运动曲线可以清楚地看出,此时复摆已不是在平衡位置附近的周期振动,而是一会儿做振动,一会儿做转动,而且振动和转动的时间、地点、次数是完全不确定的,具有随机性.此时的相轨迹在某一位置缠绕多圈后又转入到另一处缠绕,轨线不再封闭.为了说明对初值的高度敏感性,图 7(b) 中给出了初始相位改变了 0.01 时的运动曲线和相轨迹,与图 7(a) 比较出现了巨大的差异,这种“差之毫厘,失之千里”的现象是混沌的显著特征,被称作“蝴蝶效应”.这种“貌似无规”的混沌运动实际是确定性系统中内在的随机行为,它反映了某种内在的结构特征.

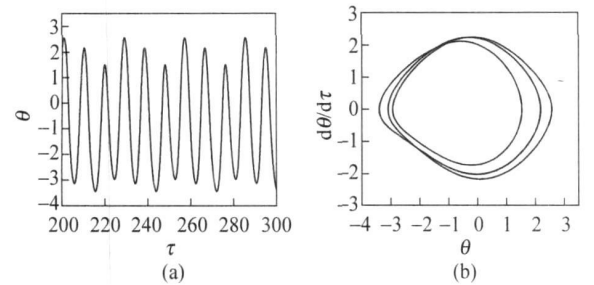


图 6 三周期态振动曲线和相轨迹

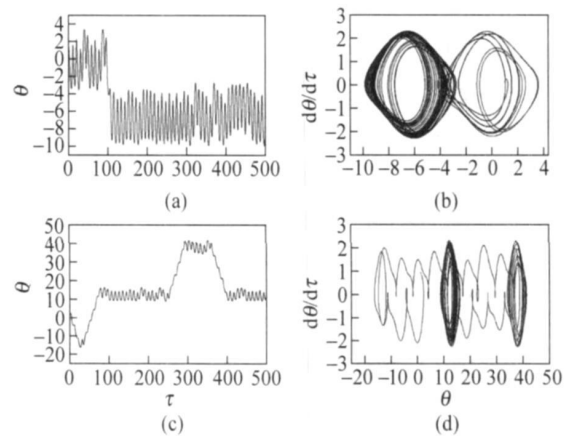


图 7 混沌运动曲线和相轨迹

随着  $f$  的继续增加,系统又恢复到简单的运动状态,但此时的运动不再是往复摆动,而是规则的单向旋转,如图 8 所示.当  $f$  增大到 1.66 时,出现了貌似无规的旋转运动,见图 9(a) 中的曲线 1,其相应的相空间轨线显示在图 9(b) 中.它对初值非常敏感,当初始相位改变 0.01 时,表现出截然不同的结果,见图 9(a) 中的曲线 2,这样的现象说明,系统此时又进入混沌运动.不过,与图 7 中的混沌轨迹明显不同,它的相空间轨迹是由旋转轨线来回缠绕而成的.

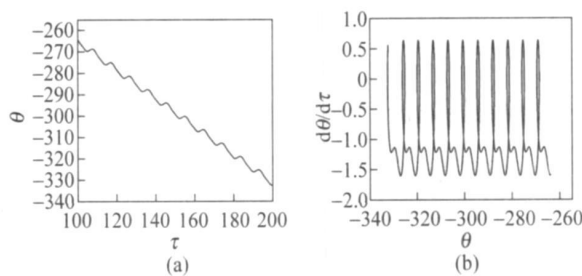


图 8 转动曲线和相轨迹

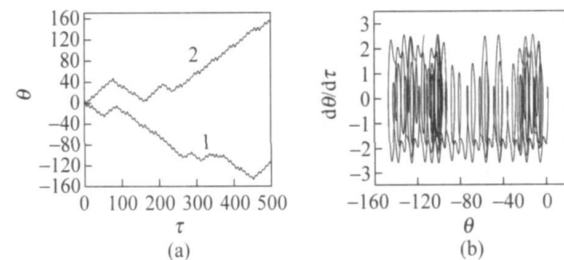


图 9 旋转混沌运动曲线和相轨迹

我们的模拟还发现,如果继续增加  $f$ ,系统还会出现周期运动状态(单周期或多倍周期),即混沌运动和周期运动可以交替出现.

4 结束语

综上所述,对于复摆系统,除了我们熟悉的简谐振动、阻尼振动,当有周期性驱动力作用时,还存在复杂的运动形式.如果保持其他条件不变,随着驱动幅度增加,复摆可以由稳定的周期运动通过倍周期分岔进入混沌状态,可以由混沌过渡到单方向的旋转,还可以由旋转再进入混沌运动.在复摆实验中,如果让学生在观测复摆线性运动的同时,还能通过理论分析和计算机模拟观察复摆

的非线性运动及混沌现象,这不仅可以使实验内容现代化,还可以有效地培养学生的科研能力.

参 考 文 献

[ 1 ] 赵凯华. 从单摆到混沌[J]. 现代物理知识, 1993, 5( 5 ): 25~28  
[ 2 ] 符五九, 饶黄云. 单摆系统通向混沌的道路[J]. 大学物理, 2008, 27( 1 ): 5~10  
[ 3 ] 李文胜. 复摆运动中的混沌现象及其计算机模拟[J]. 物理与工程, 2001, 11( 1 ): 26~31  
[ 4 ] 余虹. 大学物理实验[ M ]. 北京: 科学出版社, 2007. 152~161

( 上接第 10 页)

转换成 EXE 文件<sup>[ 1 ]</sup>, 这样即使没有安装 Matlab 软件也能运行, 可以方便地用于量子力学等课程的课堂教学, 能使学生对相关抽象的概念有直观的认识, 有助于提高教学效果, 因此具有一定的实用价值.

参 考 文 献

[ 2 ] 赵凯华. 量子物理[ M ]. 北京: 高等教育出版社, 2001  
[ 3 ] 李金海, 方恒忠, 李子良. 氢原子电子云密度分布分析[J]. 大学物理, 2004, 23( 3 ): 14~17  
[ 4 ] 马德明, 仇海强, 施卫. 氢原子电子云分布的可视化分析[J]. 西安理工大学学报, 2007, 23( 2 ): 149~152  
[ 5 ] 赵旭光, 刘晓军. 用 Matlab 获得氢原子的电子云图像[J]. 齐齐哈尔大学学报, 2006, 22( 5 ): 98~100  
[ 6 ] 张志涌. 精通 Matlab 6.5 版[ M ]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003

[ 1 ] 曾谨言. 量子力学[ M ]. 北京: 科学出版社, 2007

征 登 广 告

本刊承办刊登关于教学仪器、高新技术产品和新书出版等广告, 欢迎有关公司、厂家及各界人士与我刊联系, 商洽广告业务, 我们一定信守合同, 并以优惠价格收取费用. 联系办法详见封四.