

## 复摆的振动分析<sup>\*</sup>

龚善初<sup>\*\*</sup>

(广东揭阳学院机电工程系, 广东 揭阳 522000)

(收稿日期: 2004-05-23)

**摘要** 研究复摆的非线性振动, 从能量和摆角两个方面来分析它们对复摆运动的影响, 用第一类完全椭圆积分求出了复摆振动的解和周期, 对非线性特征进行了分析.

**关键词** 复摆; 非线性振动; 能量; 摆角; 完全椭圆积分; 周期

## ANALYSING THE VIBRATION OF COMPOUND PENDULUM

Gong Shanchu

(Dept. of Mechanical & Elect. Engr., Jieyang College, Jieyang, Guangdong 522000)

**Abstract** The vibration of compound pendulum is studied, the influence of energy and pendulum motion angle is analysed, the solution and the period of nonlinear vibration is obtained using the first kind ellipse integral, and its nonlinear characteristic is discussed in this paper.

**Key Words** compound pendulum; nonlinear vibration; energy; pendulum motion angle; complete elliptic integral; period

### 1 复摆的相轨迹

图 1 表示复摆的一个截面, 这个截面垂直于转轴且通过质心 C. 当质心 C 处于轴 O 正下方时, 复摆处于平衡位置. 令质心到转轴的距离为 l, 设在时刻 t, 这个系统的角坐标为  $\theta$ , 设复摆对转轴的转动惯量为 I, 忽略摩擦阻力, 依转动定律有<sup>[1]</sup>

$$I \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \quad (1)$$

利用机械能守恒得

$$T + V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E \quad (2)$$

(2) 式给出了  $\theta$  和  $\dot{\theta}$  之间的函数关系, 可见, 只需

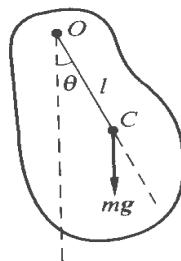


图 1 复摆

两个参量  $\theta$  和  $\dot{\theta}$  就可完全确定复摆的运动状态, 即复摆的相点是约束在支撑的二维相空间的. 复摆的相轨迹, 如图 2 所示<sup>[2]</sup>.

下面从能量和摆角两个方面来分析它们对复摆运动的影响.

\* 基金项目: 第二批新世纪广东省高等教育教学改革工程项目基金资助, 项目编号: YJG2002157.

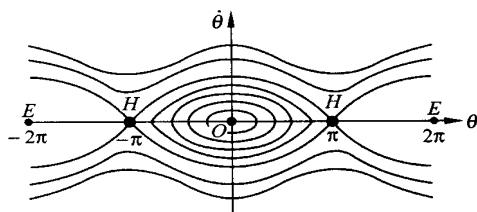


图 2 复摆的相轨迹

## 2 总能量对复摆运动的影响<sup>3</sup>

### 2.1 $0 < E < 2mgl$

由(2)式得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E - mgl(1 - \cos \theta)}{I} \quad (3)$$

因  $\dot{\theta}^2$  恒大于零, 故

$$\cos \theta \geqslant 1 - \frac{E}{mgl} \quad (4)$$

故复摆运动的最大摆角只能在  $-\pi < \theta_m = \arccos\left(1 - \frac{E}{mgl}\right) < \pi$  的势阱中作周期运动, 复摆不

可能达到  $\theta=\pi$  的最高点;  $\dot{\theta}$  则在  $-\sqrt{\frac{2E}{I}}$  与  $\sqrt{\frac{2E}{I}}$

之间变动. 可见  $\theta$  和  $\dot{\theta}$  都只能在相空间的有限范围内变化, 相轨迹必是围绕相空间坐标原点的闭合曲线, 它们通常可以用 Jacobi 椭圆函数表示. 若复摆仅作微小摆动, 即在运动过程中  $\theta$  为很小的数值, 则有近似:  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ , 令  $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$ . 此时(2)式可写为

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = \frac{2E}{I} \quad (5)$$

由(5)式知该方程为一个椭圆方程, 其相轨迹是围绕原点的椭圆曲线, 即我们所熟知的简谐运动相轨迹, 此时复摆在平衡位置附近作简谐运动. 相平面上有无数个中心  $\theta = \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$  和鞍点  $\theta = \pm(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ , 当复摆静止于铅直位置时, 处于稳定平衡状态, 与图 2 中的  $E$  点对应. 相空间中  $\theta$  轴上( $\dot{\theta}=0$ ),  $\theta = \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$  各点都是  $E$  点. 它们表示的都是复摆位于稳定平衡状态, 故这些  $E$  相点被称为稳定点. 稳定点邻近的相轨迹为椭圆曲线, 故  $E$  点又称为椭圆点. 由于转角  $\theta$  的周期,  $\theta = \pm 2n\pi$  代表空间中的同一位置, 因此可以只取包含在  $\theta = \pi$  和

$\theta = -\pi$  之间的带域, 使两条边线互相粘合卷成一个柱面, 称为相柱面, 如图 3 所示<sup>4,3</sup>.

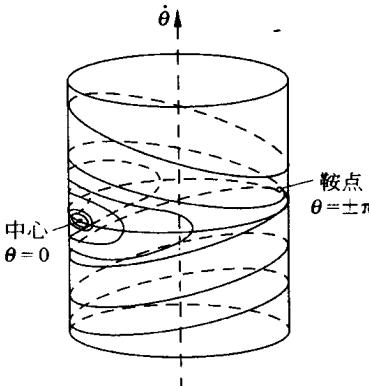


图 3 相柱面

在图 3 中, 中心和鞍点各只有一个, 在中心  $\theta=0$  处, 对应于复摆在平衡位置附近的摆动; 鞍点  $\theta=\pm\pi$  处, 对应于复摆绕悬挂点  $O$  朝同一方向的转动.

### 2.2 $E=2mgl$

由(2)式得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl(1 + \cos \theta)}{I}$$

显然,  $\theta$  为任何值时上式都能成立, 复摆可以达到最高点( $\theta=\pm\pi$ ). 但在最高点处  $\cos(\pm\pi) = -1$ ,  $\dot{\theta}=0$ , 摆锤就不可能继续转动了, 而  $\dot{\theta}$  的变动范围为  $0 \leqslant |\dot{\theta}| \leqslant 2\sqrt{\frac{mgl}{I}}$ . 这时质点的相轨迹如图 2 中的粗线, 称为分隔线. 图 2 中有两条分隔线, 分别描写复摆两种不同方向的转动, 它们通常可以用双曲正切或双曲正割函数表征, 相交于相空间的  $H$  点. 各  $H$  点位于相空间  $\theta$  轴上  $\theta = \pm(2n+1)\pi, (n=0, 1, 2, \dots)$  各点处. 它们表示复摆静止于最高点, 呈不稳定平衡状态, 故  $H$  点被称为不稳定点. 在点  $H$  邻近的相轨迹呈双曲线状, 故  $H$  又称双曲线点.

在机械能  $E=2mgl$  情形下, 复摆绕悬挂点的运动向最高点趋近, 但不会越过最高点.

### 2.3 $E>2mgl$

由(2)式得

$$\dot{\theta}^2 > \frac{2mgl(1 + \cos \theta)}{I}$$

由于  $E > 2mgl$ , 故无论  $\theta$  为何值上式都能成立.

$|\dot{\theta}^2| > 0$ , 恒成立, 表明复摆在势场中绕定点

转动, 相应的相轨迹如图 2 中的波浪线所示. 在上半平面,  $\dot{\theta} > 0$  的相轨迹表示复摆沿逆时针转动; 在下半平面,  $\dot{\theta} < 0$  的相轨迹表示复摆沿顺时针转动. 由图 2 可见, 分隔线 ( $E = 2mgl$  时的相轨迹) 将空间划分为两部分, 在其内部区域, 相轨迹为围绕椭圆点的闭合曲线, 复摆在往复摆动; 在分隔线外部区域的相轨迹则描写复摆绕定点转动.

### 3 摆角对复摆运动周期的影响

设复摆的初值为

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

由于

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \times \frac{d\theta}{d\dot{\theta}} \\ &= \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

将(7)代入方程(1)并令  $\tilde{\omega}_0^2 = \frac{mgl}{I}$  得

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -\tilde{\omega}_0^2 \sin \theta \quad (8)$$

(8)式两边积分得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= -2\tilde{\omega}_0^2 \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ &= 2\tilde{\omega}_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (9)$$

利用初始条件和复摆顺时针转动时  $\dot{\theta}^2 < 0$ , (9) 式变为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\tilde{\omega}_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)} \\ dt &= -\frac{d\theta}{\tilde{\omega}_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \\ &= -\frac{d\theta}{2\tilde{\omega}_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \end{aligned} \quad (10)$$

积分(10)式得

$$t = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (11)$$

令  $k = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$ , 则(11)式变为

$$t = -\frac{1}{\tilde{\omega}_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (12)$$

右端是第一类 Legendre 椭圆积分, 其模数为  $k$ . 当  $\varphi$  从  $\pi/2 \rightarrow 0$ , 相应的  $\theta$  从  $\theta_0 \rightarrow 0$ , 复摆经历了  $1/4$  周

期, 故有

$$\tilde{\omega}_0 \frac{T}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \equiv K(k) \quad (13)$$

$K(k)$  为第一类 Legendre 完全椭圆积分. 由此求得非线性复摆振动的周期为

$$T = \frac{4K(k)}{\tilde{\omega}_0} \quad (14)$$

将  $K(k)$  展开得<sup>④</sup>

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(2n)!}{2^{4n}(n!)^4} k^{2n} \\ &= \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{8} \frac{3\pi}{16} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{16} \frac{5\pi}{32} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

代入(14)式得

$$\begin{aligned} T &= \frac{4K(k)}{\tilde{\omega}_0} \\ &= \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{3^2}{8} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{5^2}{16} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

将  $\tilde{\omega}_0^2 = \frac{mgl}{I}$  代入上式得

$$\begin{aligned} T &= \frac{4K(k)}{\tilde{\omega}_0} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{3^2}{8} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{5^2}{16} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (15)$$

当  $\theta_0 \rightarrow 0$  时,  $\sin \frac{\theta_0}{2} \rightarrow 0$ , (15) 近似为  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ , 非线性复摆振动的周期变为线性复摆振动的周期  $T_0$ ,  $T$  与  $T_0$  的比值为

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{2K(k)}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(2n)!}{2^{4n}(n!)^4} k^{2n} \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{3^2}{8} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5^2}{16} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (16)$$

应用 Maple 对(16)式采用计算机作图,  $n$  取前 100 项,  $0 \leq \theta_0 \leq \pi = 3.14$ ,  $T/T_0$  随  $\theta_0$  变化曲线如图 4(a) 所示. 由图 4(a) 可知: 当  $\theta_0 = 0$  时,  $T/T_0 = 1$ , 随着  $\theta_0$  的增加,  $T/T_0$  也增加, 当  $\theta_0 = \pi = 3.14$  (下转第 27 页)

当  $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$  时,  $n_1, n_2 = \frac{1}{2} n_{\max}$ , 由此可见, 吸收曲线两个半高处的频率分别与色散曲线的极值点频率相对应。因而在  $\omega_0$  附近,  $n_1, n_2$  与  $\omega$  的关系曲线应如图 1 所示, 文献 [1] 给出的图(图 2)有误。顺便指出, 在其他参考书<sup>[3~9]</sup>中也存在与文献 [1] 类似的错误。

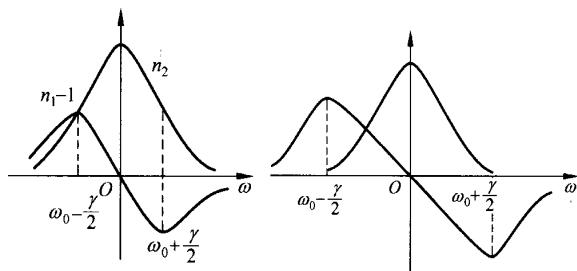


图 1  $n_1, n_2$  与  $\omega$  的关系曲线

图 2

## 参 考 文 献

- [1] 谭业武. 关于 X 光折射率小于 1 的讨论. 大学物理, 1994, (11): 22~23
- [2] 杰克逊著. 经典电动力学. 朱培豫译. 北京: 高等教育出版社, 1980
- [3] 蔡圣善, 朱耘. 经典电动力学. 上海: 复旦大学出版社, 1985. 298~302
- [4] 母国光等. 光学. 北京: 人民教育出版社, 1978. 545~551
- [5] 郭硕鸿. 电动力学. 北京: 人民教育出版社, 1979. 309~310

(上接第 22 页)

时,  $T/T_0 \rightarrow \infty$ 。为了得到更明显的  $\theta_0 = \pi = 3.14$  时  $T/T_0 \rightarrow \infty$  的非线性振动  $T/T_0$  随  $\theta_0$  变化曲线图, 取  $0 \leq \theta_0 \leq 100$ ,  $T/T_0$  随  $\theta_0$  变化曲线如图 4(b) 所示。当取  $0 \leq \theta_0 \leq 1000$  时,  $T/T_0$  随  $\theta_0$  变化曲线如图 4(c) 所示, 振动曲线出现混沌现象。

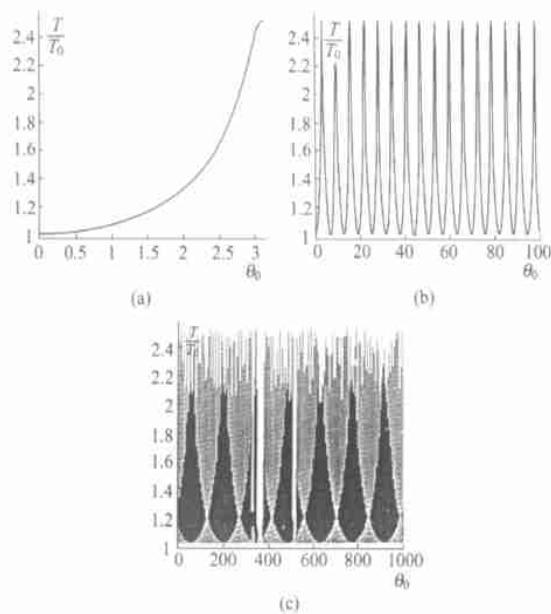


图 4  $T/T_0$  随  $\theta_0$  的变化曲线

## 4 结论

以上分析表明, 在摆角较小时复摆其相轨迹是围绕原点的椭圆曲线, 即我们所熟知的简谐运动相轨迹, 此时复摆在平衡位置附近作简谐运动; 随着摆角的增加, 复摆作非线性振动, 可用第一类完全椭圆积分表示, 周期与摆角  $\theta_0$  有关。复摆运动存在若干稳定点和鞍点(不稳定点), 振动曲线和周期是非线性振动的结果。

## 参 考 文 献

- [1] 梁绍荣, 刘昌华, 盛正华. 普通物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999. 233~235
- [2] 刘曾荣. 混沌研究中的解析方法[M]. 上海: 上海大学出版社, 2000. 56~59
- [3] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1995. 17~52
- [4] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. 15~20
- [5] 黄润生. 混沌及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2000. 55~60
- [6] 王梓坤. 常用数学公式大全[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991. 465~467