LA I

1. Aufgabe 1

1.1 Frühjahr 2007

1.1.1 Aufgabe

Es sei $G,\cdot$ eine Gruppe, in der für jedes Element $x \in G$ genau ein Element $y \in G$ existiert, sodass $y \cdot y = x$ gilt. Dadurch wird eine Abbildung

$$\varphi : G \to G, x \mapsto y$$

definiert. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung φ ist bijektiv.
2. Wenn G abelsch ist, dann ist φ ein Gruppenhomomorphismus von G nach G.
3. Wenn φ ein Gruppenhomomorphismus von G nach G ist, dann ist G abelsch.

1.1.2 Ansatz

1. Zeige Injektivität und Surjektivität für beliebige Elemente aus G.
2. Zeige, dass $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$ und nutze aus, dass $\varphi(x) \cdot \varphi(x) = x$.
3. Nutze Injektivität und Homomorphie von φ aus, um zu zeigen, dass $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_2 \cdot x_1)$.

1.1.3 Lösung

1. Injektivität und Surjektivität werden getrennt nachgewiesen:
   (a) Injektivität: Für $x_1, x_2 \in G$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ gilt:

   $$x_1 = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_2) = x_2.$$

   (b) Surjektivität: Für $y \in G$ und $x := y \cdot y$ folgt $y = \varphi(x)$ aus der Definition von φ.

   Also ist φ bijektiv.
2. Es ist:

   $$\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_2) = x_1 \cdot x_2 = \varphi(x_1 \cdot x_2) \cdot \varphi(x_1 \cdot x_2),$$

   womit φ homomorph ist.
3. Nun gilt $\forall x_1, x_2 \in G : \varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$. Daraus folgt:

   $$\begin{aligned}\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_1 \cdot x_2) \cdot \varphi(x_2) &= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_2) \\ &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \varphi(x_1 \cdot x_2) \cdot \varphi(x_1 \cdot x_2) \\ &= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2 \cdot x_1) \cdot \varphi(x_2)\end{aligned}$$

   Also ist $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_2 \cdot x_1)$.
   Aufgrund der Injektivität von φ ist $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ und G abelsch.

1.2 Herbst 2007

1.2.1 Aufgabe

Es seien $(G,\star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und $(H,\cdot)$ eine weitere Gruppe.

1. Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ an unt beweisen Sie, dass für solche einen Gruppenhomomorphismus $\varphi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.
2. Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl existiert mit $g^n = e_G$.
   Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \{1,-1\}$ gibt.

1.2.2 Ansatz

1. Gebe die Definition an. Betrachte $\varphi(e_G) = \varphi(e_G \star e_g) = \varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G)$ und erweitere geschickt (nutze aus, dass $\varphi(e_G)^{-1}\cdot\varphi(e_G) = e_H$).
2. Wähle $g \in G, n$ ungerade mit $g^n = e_G$ und zeige, dass φ nicht surjektiv sein kann.

1.2.3 Lösung

1. Ein Gruppenhomomorphismus von G nach H ist $\varphi : G \to H$ mit
   $$\forall g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1 \star g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2).$$
   Es ist $\varphi(e_G) = \varphi(e_G \star e_G) = \varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G)$ und damit
   $$e_H = \varphi(e_G)^{-1}\cdot\varphi(e_G) = \varphi(e_G)^{-1}\cdot(\varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G)) = \varphi(e_G).$$
2. Sei $\varphi : G \to \{1,-1\}$ ein Gruppenhomomorphismus, $g \in G$ und n eine ungerade Zahl mit $g^n = e_G$ (welches nach Vorraussetzung existiert). Dann gilt:
   $$1 = e_H = \varphi(e_G) = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n.$$
   Also muss $\varphi(g) = 1$ sein, da $(-1)^n = -1$. Damit ist φ konstant 1 und damit nicht surjektiv.

1.3 Herbst 2010

1.3.1 Aufgabe

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, S_n die Gruppe der Permutationen von M. Zeigen Sie:

1. $\forall a \in M : H_a := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(a) = a\}$ ist Untergruppe von S_n.
2. $\forall a \in M, b, c \in M \setminus \{a\}\ \exists \tau \in H_a : \tau(b) = c$.
3. Wenn $\tau \in S_n$ eine Permutation mit $\tau(1) = a$ ist, dann gilt:

$$H_a = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \sigma \in H_1\}$$

1.3.2 Ansatz

1. Zeige, dass H_a die für das Untergruppenkriterium nötigen Eigenschaften erfüllt.
2. Definiere eine Abbildung mit den nötigen Eigenschaften und zeige, dass es sich um eine Permutation handelt, die in H_a liegt.
3. Untersuche das Verhalten von τ und τ^{-1} und argumentiere, warum $\sigma \in H_1$ "ausreicht".

1.3.3 Lösung

1. Mit dem Untergruppenkriterium:
   (a) <u>Nicht leer</u>: $\mathrm{Id}_M(a) = a$, also $\mathrm{Id}_M \in H_a \neq \varnothing$.
   (b) <u>Abgeschlossenheit Inversion</u>: Ist $\sigma \in H_a$, so ist $\sigma^{-1} = a$, also $\sigma^{-1} \in H_a$.
   (c) <u>Abgeschlossenheit Verknüpfung</u>: Sind $\sigma, \tau \in H_a$, so ist $\sigma\tau(a) = \sigma(a) = a$, also $\sigma\tau \in H_a$.

   Also ist H_a eine Untergruppe von S_n.
2. Definiere $\tau : M \to M$ als

$$m \mapsto \begin{cases} m, \text{ falls } m \neq b \wedge m \neq c \\ c, \text{ falls } m = b \\ b, \text{ falls } m = c \end{cases}$$

   Es ist $\tau\tau = \mathrm{Id}_M$, also $\tau \in S_n$. $\tau \in H_a$, da $a \mapsto a$ wegen $a \neq c \wedge a \neq b$.
3. Gegeben sei $\tau \in S_n$ mit $\tau(1) = a$ (also $\tau^{-1}(a) = 1$). Ist $\rho \in H_a$ beliebig, so gilt:

$$\rho = \tau \underbrace{\tau^{-1}\rho\tau}_{:=\sigma \in H_1,\text{ da } \tau^{-1}\rho\tau(1) = \tau^{-1}\rho(a) = \tau^{-1}(a) = 1} = \tau\sigma\tau^{-1} \in H_1, \text{ also } H_a \subseteq \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \sigma \in H_1\}$$

$$\forall \sigma \in H_1 : \tau\sigma\tau^{-1}(a) = \tau\sigma(1) = \tau(1) = a, \text{ also } \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \sigma \in H_1\} \subseteq H_a$$

A Ich nehme an, dass eine Argumentation über die Auswirkungen der einzelnen Permutationen auch reichen würde (à la "τ^{-1} verschiebt a auf 1, σ lässt a bei 1, τ verschiebt a zurück, die restlichen Elemente werden beliebig permutiert")

1.4 Frühjahr 2013

1.4.1 Aufgabe

Gegeben sei die Menge

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass N eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ist. Ist N kommutativ?
2. Bestimmen Sie alle $Z \in N$ mit der Eigenschaft

$$\forall A \in N : Z \cdot A = A \cdot Z.$$

1.4.2 Ansatz

1. Zeige, dass N die für das Untergruppenkriterium nötigen Eigenschaften erfüllt (nicht leer, Abgeschlossenheit für Inversion und Multiplikation). Suche ein Gegenbeispiel für Kommutativität oder folgere, dass N nicht kommutativ ist, aus dem zweiten Aufgabenteil.
2. Untersuche $Z \cdot A = A \cdot Z$ für $A, Z \in N$ (Z fest, A beliebig) und bestimme, welche Eigenschaften A haben muss, damit die Gleichung erfüllt ist.

1.4.3 Lösung

1. Wir weisen die Eigenschaften getrennt nach.
   (a) nicht leer: $I_3 \in N \neq \varnothing$.
   (b) Abgeschlossenheit Mult.: $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+bx+z \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$
   (c) Abgeschlossenheit Inversion: $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -z+xy \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$
2. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ beliebig (Z fest). Es ist

$$ZA = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+bx+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AZ = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+ay+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit $AZ = ZA$ gilt, muss $ax + by$ gelten. Das ist genau für die $Z \in N$ der Fall, bei denen $x = y = 0$.

1.5 Herbst 2013

1.5.1 Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1,\dots,n\} \subset \mathbb{N}$, $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit:

$$\forall x,y \in M : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Es bezeichne S_n die Gruppe aller Permutationen von M und

$$G := \{\sigma : M \to M \mid \forall x,y \in M : d(x,y) = d(\sigma(x),\sigma(y))\}.$$

Zeigen Sie:

1. Jedes $\sigma \in G$ ist injektiv.
2. G ist eine Untergruppe von S_n.

1.5.2 Ansatz

1. Zeige, dass $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$ gilt.
2. Zeige, dass G die für das Untergruppenkriterium nötigen Eigenschaften erfüllt.

1.5.3 Lösung

1. Für $x,y \in M$, $\sigma \in G$:

   $$\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow d(\sigma(x),\sigma(y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

   Also ist σ injektiv.
2. Mit dem Untergruppenkriterium:
   (a) <u>Nicht leer</u>: $\mathrm{Id}_M \in G$, also ist G nicht leer.
   (b) <u>Abgeschlossenheit</u>: $\forall \sigma, \tau \in G$:

   $$\begin{aligned}\forall x,y \in M : d((\sigma\circ\tau^{-1})(x),(\sigma\circ\tau^{-1})(y)) &= d(\sigma(\tau^{-1}(x)),\sigma(\tau^{-1}(y)))\\ &\overset{\sigma\in G}{=} d(\tau^{-1}(x),\tau^{-1}(y))\\ &\overset{\tau\in G}{=} d(\tau(\tau^{-1}(x)),\tau(\tau^{-1}(y)))\\ &= d(x,y)\end{aligned}$$

   Also liegt auch $\sigma\circ\tau^{-1}$ in G

   Also ist G eine Untergruppe von S_n.

1.6 Frühjahr 2014

1.6.1 Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass auf $M = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ die folgende Verknüpfung $*$ eine Gruppenstruktur definiert:
$$(a,b,c)*(x,y,z) := (a+x, b+y, c+z+ay)$$
2. Entscheiden Sie, ob die so definierte Gruppe $(M,*)$ kommutativ ist.
3. Weisen Sie nach, dass die Abbildung
$$\varphi : (M,*) \to (\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}),\cdot), \varphi((a,b,c)) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ein Gruppenhomomorphismus ist.

1.6.2 Ansatz

1. Zeigen, dass $M \neq \varnothing$ und Gruppenkriterien nachweisen (Assoziativität von $*$, Existenz neutrales Element, Existenz inverse Elemente)
2. Überprüfen, ob $(a,b,c)*(x,y,z) = (x,y,z)*(a,b,c)$. Ggf. Gegenbeispiel finden.
3. Zeigen, dass $\varphi((a,b,c)*(x,y,z)) = \varphi((a,b,c)) \cdot \varphi((x,y,z))$

1.6.3 Lösung

1. Offensichtlich ist M nicht leer.
Es gilt:
$$((a,b,c)*(u,v,w))*(x,y,z) = (a+u+x, b+v+y, c+w+av+z+ay+uy)$$
$$(a,b,c)*((u,v,w)*(x,y,z)) = (a+u+x, b+v+y, c+w+av+z+ay+uy)$$
Damit ist die Assoziativität gezeigt.
Das neutrale Element ist $(0,0,0)$, denn
$$(a,b,c)*(0,0,0) = (a+0, b+0, c+0+a\cdot 0) = (a,b,c)$$
$$(0,0,0)*(a,b,c) = (0+a, 0+b, 0+c+0\cdot b) = (a,b,c)$$
Das zu (a,b,c) inverse Element ist $(-a,-b,ab-c)$, denn
$$(a,b,c)*(-a,-b,ab-c) = (a-a, b-b, c+ab-c-ab) = (0,0,0)$$
Also ist $M,*$ eine Gruppe.
2. $M,*$ ist nicht kommutativ, denn z.B.:
$$(1,0,0)*(0,1,0) = (1,1,1) \neq (1,1,0) = (0,1,0)*(1,0,0)$$
3. Zu zeigen: $\varphi((a,b,c)*(x,y,z)) = \varphi((a,b,c)) \cdot \varphi((x,y,z))$:
$$\varphi((a,b,c)*(x,y,z)) = \varphi((a+x, b+y, c+z+ay)) = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+z+ay \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi((a,b,c)) \cdot \varphi((x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+ay+c \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Herbst 2014

1.7.1 Aufgabe

Gegeben sei die Teilmenge

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

der Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ sowie die Abbildung

$$f : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto A.$$

Zeigen Sie:

1. Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.
2. Die Abbildung $f : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
3. $\mathrm{Kern}(f)$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^2$ mit komponentenweiser Addition.

1.7.2 Ansatz

1. Zeige, dass G die nötigen Eigenschaften des Untergruppenkriteriums erfüllt (nicht leer, Abgeschlossenheit bezüglich Inversion und Verknüpfung).
2. Zeige, dass $\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$ gilt.
3. Bestimme $\mathrm{Kern}(f)$ und untersuche, ob es $i : \mathrm{Kern}(f) \to \mathbb{Q}^2$ derart gibt, dass i ein Gruppenisomorphismus ist (also ein surjektiver, injektiver Gruppenhomomorphismus).

1.7.3 Lösung

1. Wir weisen die für das Untergruppenkriterium nötigen Eigenschaften nach:
   (a) <u>nicht leer</u>: $G \neq \varnothing$, da $I_3 \in G$.
   (b) <u>Abgeschlossenheit Verknüpfung</u>: Es gilt:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{:=g} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{:=h} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A \cdot C} & \begin{array}{c} e \\ f \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in G, \text{ da } \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

   (c) <u>Abgeschlossenheit Inversion</u>: $g, h \in G$ wie oben mit $g \cdot h = I_3$. Das ist der Fall, wenn:

$$\begin{aligned} A \cdot C = I_2 \quad &\wedge \quad \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also :} \\ C = A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \quad &\wedge \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

   Also ist $g^{-1} = h \in G$ und G somit eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.
2. Zu zeigen: $\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$. Für g, h wie oben:

$$f(g \cdot h) = A \cdot C = f(g) \cdot f(h).$$

3. Es ist

$$\mathrm{Kern}(f) = \{g \in G | f(g) = I_2\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a,b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Die Abbildung

$$i : \mathrm{Kern}(f) \to \mathbb{Q}^2, \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto (a,b)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus (mit $A = B = I_2, g, h$ wie oben):

$$i(g \cdot h) = (a+c, b+d) = i(g) + i(h)$$

Außerdem ist i isomorph:

$$\mathrm{Kern}(i) = \{g \in \mathrm{Kern}(f) \mid i(g) = (0,0)\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\} \quad \text{(Injektivität)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 : i \left(\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & x \\ & & y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{\in \mathrm{Kern}(f)} \right) = (x,y) \quad \text{(Surjektivität)}$$

1.8 Frühjahr 2015

1.8.1 Aufgabe

Gegeben sei die Teilmenge

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$$

der 3×3-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen.

1. Zeigen Sie, dass G zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.
2. Ist G abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Bestimmen Sie alle $X \in G$ mit $\forall M \in G : X \cdot M = M \cdot X$.

1.8.2 Ansatz

1. Handelt es sich um eine Gruppe, so ist sie Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Also kann der Nachweis über das Untergruppenkriterium ($G \neq \varnothing \wedge \forall g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot g_2^{-1} \in G$) erfolgen.
2. Zeigen, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$ oder Gegenbeispiel angeben
3. Beliebige, feste Matrix X betrachten und bestimmen, unter welchen Bedingungen $M \cdot X = X \cdot M$ für beliebige $M \in G$ gilt.

1.8.3 Lösung

1. Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so ist sie Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Mit dem Untergruppenkriterium:
   (a) $G \neq \varnothing$, denn z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
   (b) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$, so ist

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xy - z & -y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a - x & 1 & 0 \\ c - bx + xy - z & b - y & 1 \end{pmatrix} \in G$$

   Also ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe.
2. $(G, \cdot)$ ist nicht abelsch, denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$ $XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x + a & 1 & 0 \\ z + ya + c & y + b & 1 \end{pmatrix}$ $MX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a + x & 1 & 0 \\ c + bx + z & b + y & 1 \end{pmatrix}$

   Damit $MX = XM$ gilt, muss $ya = bx$ gelten. Das ist genau für die $X \in G$ der Fall, bei denen $x = y = 0$.

1.9 Herbst 2015

1.9.1 Aufgabe

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $M = \{x \in G \mid x \circ x = e\}$. Zeigen Sie:

1. Ist G kommutativ, so ist M eine Untergruppe von G.
2. Ist $n \geq 3$ und G die symmetrische Gruppe S_n, so ist M keine Untergruppe mehr.

1.9.2 Ansatz

1. Über Untergruppenkriterium zeigen (nicht leer, abgeschlossen bei Inversíon und Verknüpfung)
2. Über die Darstellung von Permutationen durch Transpositionen (wie stellt man mit Transpositionen einen Dreierzyklus dar?)

1.9.3 Lösung

1. Wir zeigen die für das Untergruppenkriterium nötigen Eigenschaften:
   (a) Nicht leer: $e \circ e = e$, also $e \in M$.
   (b) Abgeschlossenheit Inversion: Ist $x \in M$, so ist $x \circ x = e$, also $x = x^{-1} \in M$.
   (c) Abgeschlossenheit Verknüpfung: Für $x, y \in M$ gilt $x \circ x = y \circ y = e$, also gilt (mit Kommutativität):

   $$x \circ y \circ x \circ y = x \circ x \circ y \circ y = e \circ e = e,$$

   womit die Abgeschlossenheit gezeigt ist.

   Also ist M eine Untergruppe von G.
2. Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. Diese liegen in M, aber z.B. ein Dreierzyklus nicht. Also ist M keine Untergruppe.

2. Aufgabe 2

2.1 Frühjahr 2007

2.1.1 Aufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der $\mathbb{R}^4$-Standardbasis und der $\mathbb{R}^3$-Standardbasis die Abbildungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

habe. Bestimmen Sie eine geordnete Basis B des $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis C des $\mathbb{R}^3$ derart, dass φ bezüglich B und C die folgende Abbildungsmatrix besitzt:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Ansatz

Bestimme zuerst eine neue Basis des $\mathbb{R}^3$ aus der Abbildungsmatrix. Bestimme anschließend eine Basis des $\mathbb{R}^4$ derart, dass die Abbildungsmatrix A' entsteht (bestimme den vierten Vektor durch $A \cdot x = 0$).

2.1.3 Lösung

Es ist

$$\text{Bild}(\varphi) = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\text{lin. unabh.}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \mathbb{R}^3,$$

also wählen wir als neue $\mathbb{R}^3$-Basis

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für die neue $\mathbb{R}^4$-Basis $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ muss gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(b_i) = c_i, \text{ also } Ab_i = c_i, \text{ also z.B. } b_i = e_i \quad & \text{für } i = 1,2,3 \\ \varphi(b_i) = 0, \text{ also } Ab_i = 0 \quad & \text{für } i = 4 \end{aligned}$$

Wir bestimmen b_4 indem wir auf das LGS $A \cdot x = 0$ den Gauß-Algorithmus anwenden und erhalten

$$b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als mögliche Wahl für b_4.

2.2 Herbst 2007

2.2.1 Aufgabe

Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, \dots, v_p \in V$ gegeben und $w_i := \varphi(v_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ ihre Bildvektoren in W.

1. Zeigen Sie: Wenn $w_1, \dots, w_p$ linear unabhängig sind, dann auch $v_1, \dots, v_p$.
2. Zeigen Sie: Ist φ injektiv und sind $v_1, \dots, v_p$ linear unabhängig, dann auch $w_1, \dots, w_p$.
3. Gilt die Implikation in 2. auch, wenn φ nicht als injektiv vorausgesetzt wird? Beweis oder Gegenbeispiel.

2.2.2 Ansatz

1. Zeige, dass für $a_1, \dots, a_p \in K$ aus $\sum_i a_i v_i = 0$ folgt, dass alle $a_i = 0$. Nutze hierfür die Linearität von φ.
2. Betrachte $\varphi\left(\sum_i a_i v_i\right)$ und nutze die Injektivität.
3. Betrachte $\text{Kern}(\varphi)$ unter der Annahme, dass φ nicht injektiv ist (mit $p := 1$).

2.2.3 Lösung

1. Zu zeigen $(a_1, \dots, a_p \in K)$:
$$\sum_i a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_p = 0.$$
Es gilt:
$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(\sum_i a_i v_i\right) = \sum_i a_i \varphi(v_i) = \sum_i a_i w_i$$
Daraus folgt, dass $a_1 = \dots = a_p = 0$, da die w_i linear unabhängig sind.
2. Wenn $\sum_i a_i w_i = 0$, so gilt:
$$\sum_i a_i w_i = \varphi\left(a_i v_i\right) = 0 = \varphi(0).$$
Da φ hier Injektiv sein muss, ist $\sum_i a_i v_i = 0$. Also sind alle a_i Null und somit $w_1, \dots, w_p$ linear unabhängig.
3. Setze $p = 1$ und wähle $0 \neq v_1 \in \text{Kern}(\varphi)$ (Annahme: φ nicht injektiv). Somit ist $\{v_1\}$ linear unabhängig, aber $\varphi(v_1) = 0$ nicht. Also benötigt man die Injektivität von φ für die Implikation in 2.

2.3 Herbst 2010

2.3.1 Aufgabe

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

1. $V = U_1 \cup U_2 \Leftrightarrow V = U_1 \wedge V = U_2$
2. $U_1 \subseteq U_3 \Leftrightarrow U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$

2.3.2 Ansatz

1. Zeige die Richtungen einzeln:
   (a) $\Leftarrow$: ziemlich trivial
   (b) $\Rightarrow$: nehme an, dass $V \neq U_1$ und zeige, dass dann $V = U_2$ gelten muss.
2. Zeige die Richtungen einzeln:
   (a) $\Leftarrow$: ziemlich trivial
   (b) $\Rightarrow$: Zeige zuerst $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$ und dann $(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

2.3.3 Lösung

1. Es werden beide Richtungen einzeln gezeigt.
   (a) $\Leftarrow$: Ist $V = U_1$ oder $V = U_2$, so ist $U_1 \cup U_2 \subseteq V \subseteq U_1 \cup U_2$, also $V = U_1 \cup U_2$.
   (b) $\Rightarrow$: Sei $V = U_1 \cup U_2$. Annahme: $V \neq U_1$ (sonst fertig). Zu zeigen: $V = U_2$.
   Wir zeigen, dass $\forall b \in V : b \in U_2$.
   Nach Annahme: $\exists a \in (V \setminus U_1) = (U_1 \cup U_2) \setminus U_1 = U_2 \setminus (U_1 \cap U_2) \subseteq U_2$.
      i. 1. Fall: $b \in U_1$. Dann ist $a + b \notin U_1$, sonst wäre $a + b \in U_1$ und damit $a \in U_1$ (ausgeschlossen) – also muss $b \in U_2$ sein.
      ii. 2. Fall: $b \notin U_1$. Dann ist $b \in U_2$ nach Voraussetzung.
   Da $b \in V$ beliebig war und in U_2 liegt, ist $V \subseteq U_2$ und somit $V = U_2$.
   Insgesamt erhält man: $V = U_1 \wedge V = U_2$.
2. Es werden beide Richtungen einzeln gezeigt.
   (a) $\Leftarrow$: Es gilt $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$. Es gilt:
   $$U_1 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_3$$
   (b) $\Rightarrow$: Es gilt $U_1 \subseteq U_3$. Dann gilt:
   $$U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq U_1 + U_2 \quad \wedge \quad U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq U_3 + U_3 = U_3$$
   Also $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.
   Ist nun $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$, so ist $u_1 + u_2 = x \in U_3$ ($u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$), also $u_2 = x - u_1 \in U_3 + U_1 \subseteq U_3$, also $x = u_1 + u_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$ und somit
   $$(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3).$$
   Man erhält insgesamt also die Gleichheit.

2.4 Frühjahr 2013

2.4.1 Aufgabe

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von **??** über dem Körper $\mathbb{R}$.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von **??** über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.4.2 Ansatz

1. Bestimmen der Lösungsmenge durch Umformen.
2. Minimiere das LGS und forme unter Beachtung der Besonderheiten in Quotientenräumen um.

2.4.3 Lösung

1. Wir schreiben die dritte Zeile als erste Zeile und ziehen sie von den anderen Zeilen ab. Zieht man die zweite Zeile dreimal von der dritten Zeile ab, so erhält man

   $$0 = -3.$$

   Also hat das LGS über $\mathbb{R}$ keine Lösungen.
2. Wir schreiben erneut die dritte Zeile als erste und ziehen sie von allen anderen Gleichungen ab. Danach lässt sich das LGS wie folgt schreiben:

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

   Entfernt man die dritte Zeile (sie ist offensichtlich überflüssig) und addiert die zweite zur letzten, so erhält man:

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

   Wir setzen $t := x_3$ und erhalten somit als Lösungsmenge

   $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.5 Herbst 2013

2.5.1 Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \rangle \qquad W = \langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \rangle$$

Bestimmen Sie für jeden der Vektorräume $U, W, U \cap W, U + W$ eine Basis und seine Dimension.

2.5.2 Ansatz

1. U, W: Schreibe die Basisvektoren als Zeilen in eine Matrix und wende den Gauß-Algorithmus an.
2. $U \cap W$: Betrachte die Basisvektoren von U und W und bestimme, welche in beiden Untervektorräumen liegen.
3. $U + W$: Wende die Dimensionsformel an und bestimme aus den Basisvektoren von U und W eine Basis.

2.5.3 Lösung

1. U: Wir schreiben die Basisvektoren von U als Zeilen einer Matrix und formen mit dem Gauß-Algorithmus um:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&2\\1&1&1&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left| \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \right| = U, \dim(U) = 3$$

2. W: Wir gehen wie bei U vor:

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\1&2&3&2\\1&1&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left| \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \right| = W, \dim(W) = 2$$

3. $U \cap W$: Der zweite Basisvektor von W liegt nicht in U, da die vierte Komponente eines Vektors in U stehts das doppelte der zweiten Komponente ist. Der erste Basisvektor von W ist die Summe des ersten und dritten Basisvektors von U, also liegt er in $U \cap W$.
4. $U + W$: Es ist $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$, also $\dim(U+W) = 4$, also ist die $\mathbb{R}^4$-Standardbasis eine Basis von $U + W$.

2.6 Frühjahr 2014

2.6.1 Aufgabe

Seien K ein Körper, V,W endlichdimensionale K-Vektorräume, $\varphi: V \to W$ ein K-Vektorraumhomomorphismus und U ein Untervektorraum von W.

1. Formulieren Sie die Dimensionsformel für φ.
2. Zeigen Sie: Die Urbildmenge $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V.
3. Zeigen Sie: Ist φ surjektiv, so gilt: $\dim(\varphi^{-1}(U)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$.

2.6.2 Ansatz

1. Klar.
2. Weise die für das Untervektorraumkriterium nötigen Eigenschaften nach (nicht leer, $v_1 + \lambda v_2 \in U$).
3. Betrachte die Einschränkung $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}$ und verwende die Dimensionsformel.

2.6.3 Lösung

1. Es gilt:

$$\dim(V) = \mathrm{Rang}(\varphi) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$$

2. Wir weisen die Eigenschaften einzeln nach:
   (a) nicht leer: U ist ein Untervektorraum, also $0 \in U$. φ ist ein Homomorphismus, also $\varphi(0) = 0$. Damit ist $0 \in \varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ und $\varphi^{-1}(U) \neq \varnothing$.
   (b) Abgeschlossenheit Linearität: Es seien $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(U), \lambda \in K$. Dann gilt:

$$\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda\varphi(v_2) \in U, \text{ also } v_1 + \lambda v_2 \in \varphi^{-1}(U)$$

   Also ist $\varphi^{-1}(U)$ ein Untervektorraum.
3. Wir betrachten die Einschränkung $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \to W$ von φ auf $\varphi^{-1}(U)$. Es ist $0 \in U$, also ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(U)$, also ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)})$. Die Dimensionsformel besagt also:

$$\begin{aligned}\dim(\varphi^{-1(U)}) &= \mathrm{Rang}(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}))\\ &= \dim(\mathrm{Bild}(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)})) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))\\ &= \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))\end{aligned}$$

2.7 Herbst 2014

A Diese Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe im Frühjahr 2015.
Diese taucht deswegen nachfolgend nicht auf.

2.7.1 Aufgabe

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n$ linear abhängige Vektoren in V, von denen je $n-1$ linear unabhängig sind.

1. Weisen Sie nach, dass es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.
2. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ wie oben und $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$. Zeigen Sie, dass $\exists \lambda \in K \ \forall i \in \{1, \dots, n\} : \beta_i = \lambda \alpha_i$.

2.7.2 Ansatz

1. Konstruiere einen der Vektoren aus den anderen und anulliere diese gegenseitig. Zeige $\alpha_i \neq 0$ durch Widerspruch.
2. Stelle v_1 als Linearkombination der anderen Vektoren dar (unter Ausnutzung der Ergebnisse der ersten Teilaufgabe). Verwende das in $0 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ und ermittle so λ.

2.7.3 Lösung

1. $\exists j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in K \setminus \{j\} : v_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n \lambda_i v_i$, da $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind. Setzt man nun $\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} : \alpha_i := \lambda_i$ und $\alpha_j = -1$, so erhält man $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Nun ist noch zu zeigen, dass alle $\alpha_i \neq 0$. Nehmen wir an, dass ein $\alpha_l = 0$ $(l \in \{1, \dots, n\})$, so folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $n-1$ Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_l\}$ auch $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}$. Widerspruch zu $\alpha_j = -1$.
2. Nach 1. gilt

$$v_1 = \sum_{i=2}^n \frac{-\alpha_i}{\alpha_1} v_i, \text{ also:}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \beta_1 \cdot \left(\sum_{i=2}^n \frac{-\alpha_i}{\alpha_1} v_i \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i = \sum_{i=2}^n \left(\beta_i - \alpha_i \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) v_i$$

Da $v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, filt $\beta_i = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_i$ $(i \in \{2, \dots, n\})$ und somit $\lambda = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

2.8 Herbst 2015

2.8.1 Aufgabe

Es seien V ein Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   (a) $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$
   (b) $\forall x \in V, \varphi^2(x) = 0 : \varphi(x) = 0$
2. Gilt außerdem $\dim(V) < \infty$, so ist zu den beiden Aussagen äquivalent:
   $V = \text{Kern}(\varphi) \oplus \text{Bild}(\varphi)$

2.8.2 Ansatz

1. Zeige die beiden Richtungen einzeln.
   (a) (a) $\Rightarrow$ (b): Betrachte ein $x \in V$ mit $\varphi^2(x) = 0$.
   (b) (b) $\Rightarrow$ (a): Zeige $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) \subseteq \{0\}$ und $\{0\} \subseteq \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)$ getrennt.
2. Zeige (i) $\Rightarrow$ (iii) und (i) $\Rightarrow$ (iii) und nutze Dimensionssatz und die Ergebnisse aus der ersten Teilaufgabe.

2.8.3 Lösung

1. Wir zeigen die beiden Richtungen einzeln:
   (a) (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $x \in V$ mit $\varphi^2(x) = 0$. Damit ist $\varphi(x) \in \text{Kern}(\varphi)$ und $\varphi(x) \in \text{Bild}(\varphi)$. Somit ist $\varphi(x) = 0$.
   (b) (b) $\Rightarrow$ (a): $\supseteq$ klar. $\subseteq$: Es sei $y \in \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)$. Dann ist $\varphi(y) = 0$ und $\exists x \in V :$ $y = \varphi(x)$. Daraus folgt $\varphi^2(x) = \varphi(y) = 0$, also $\varphi(x) = 0$ und somit $y = 0$.
2. Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i):
   (a) (i) $\Rightarrow$ (iii): Wir müssen nur $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$ zeigen, denn zusammen mit (i) ist die Summe direkt.
   Offensichtlich ist $V \supset \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$. Wegen

$$\begin{aligned}\dim(\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)) &= \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) - \dim(\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)) \\ &= \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) \\ &= \dim(V)\end{aligned}$$

   folgt $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$.
   (b) (iii) $\Rightarrow$ (i): Da die Summe direkt ist folgt automatisch $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

3. Aufgabe 3

3.1 Frühjahr 2007

3.1.1 Aufgabe

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gibt, für die gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\varphi\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-7\\2\\3\end{pmatrix},$$
$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix},\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3.1.2 Ansatz

Benutze den Satz über lineare Fortsetzung um zu zeigen, dass vier der abgebildeten Vektoren zusammen eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ergeben. Weise dann nach, dass der fünfte Vektor auch korrekt abgebildet wird, indem du den Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren schreibst.

3.1.3 Lösung

Wir zeigen, dass

$$B := \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist, indexm wir die Vektoren als Zeilen in eine Matrix eintragen, den Gauß-Algorithmus anwenden und zeigen, dass die entstandene Matrix Rang 4 hat:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&1&0&0\\1&-1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Also ist $\langle B\rangle=\mathbb{R}^4$. Es gibt also nach dem Satz über die lineare Fortsetzung genau ein $\varphi\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$, der auf den vier Basisvektoren die vorgeschriebenen Werte annimmt.
Wir überprüfen noch, ob φ den verbleibenden Vektor korrekt abbildet. Wir schreiben diesen dazu als Linearkombination der anderen Vektoren und nutzen die Linearität von φ aus, um zu zeigen, dass sich das Bild des Vektors aus den Bildern der anderen Vektoren konstruieren lässt:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)&=\varphi\left(-\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\&=-\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+2\cdot\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-7\\2\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.2 Herbst 2007

3.2.1 Aufgabe

Im reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}^5$ seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\\6\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\\9\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}3\\6\\9\\11\\12\end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei $U = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$ und $W = \langle\{w_1, w_2, w_3\}\rangle$.
Berechnen Sie Basen der Vektorräume $U + W$ und $U \cap W$.

3.2.2 Ansatz

1. $U + W$: Betrachte $\{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3\}$ als Erzeugendensystem von $U + W$ und minimiere es zu einer Basis von $U + W$.
2. U, W: Verwende die Ergebnisse von $U + W$, um die einzelnen Basen und Dimensionen zu ermitteln.
3. $U \cap W$: Verwende den Dimensionssatz, um die Dimension von $U \cap W$ zu bestimmen und ermittle schließlich aus den Basisvektoren von U und W eine Basis von $U \cap W$.

3.2.3 Lösung

1. $U + W$: Wir schreiben die Vektoren als Spalten in eine Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an. So erhalten wir aus den Vektoren eine Basis von $U + W$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&2&2&2&4&6\\1&2&3&3&6&9\\1&2&3&5&8&11\\1&2&3&6&9&12\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&1&2&3\\0&0&1&1&2&3\\0&0&0&2&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   Diese Matrix hat Rang 4 und die ersten vier Spalten sind linear unabhängig, also ist $\dim(U + W) = 4$ und $\{u_1, u_2, u_3, w_1\}$ eine Basis von $U + W$.
2. U: Die ersten drei Spalten der oberen Matrix sind linear unabhängig, also ist $\dim(U) = 3$ und $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U.
3. W: Die letzten drei Spalten der oberen Matrix erzeugen einen zweidimensionalen Untervektorraum, also ist $\dim(W) = 2$ und $\{w_1, w_2\}$ eine Basis von W.
4. $U \cap W$: Es gilt: $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$ erhalten wir $\dim(U \cap W) = 1$. Die Differenz der vierten und fünften Spalte ist eine Linearkombination $\neq 0$ der ersten drei Spalten (nämlich gleich der dritten Spalte), deshalb ist $w_2 - w_1 = u_3$ ein Erzeuger von $U \cap W$ und somit $\{u_3\}$ eine Basis von $U \cap W$.

3.3 Herbst 2010

3.3.1 Aufgabe

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \alpha x \qquad + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \qquad \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Geben Sie die reelle Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β an.

3.3.2 Ansatz

Führe eine zweistufige Fallunterscheidung durch (zuerst für α, dann für β).

3.3.3 Lösung

1. Fall $\alpha = 0$: Hier ist die erweiterte Matrix

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \end{array}\right).$$

   (a) Fall $\beta \neq 2$: $\mathscr{L} = \varnothing$

   (b) Fall $\beta = 2$: $\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

2. Fall $\alpha \neq 0$: Hier ist die erweiterte Matrix

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right).$$

   (a) Fall $\beta \neq 2$: A' ist invertierbar, deswegen $|\mathscr{L}| = 1$ und $\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2-\beta}{\alpha} & \frac{\beta-2}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}^{\top} \right\}$.

   (b) Fall $\beta = 2$: Hier ist z beliebig, deswegen

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} \\ \frac{2}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} \\ \frac{2}{\alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.4 Frühjahr 2013

A Diese Aufgabe ist identisch zur Aufgabe vom Herbst 2015.
Diese taucht hier deswegen nicht auf.

3.4.1 Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 := \langle \begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \rangle \qquad U_2 := \langle \begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$$

Bestimmen Sie für $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

3.4.2 Ansatz

1. U_1, U_2: Schreibe die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und wende den Gauß-Alorithmus an.
2. $U_1 + U_2$ Ergänze die Basisvektoren von U_1 um die Vektoren aus der U_2-Basis, die nicht in U_1 liegen.
3. $U_1 \cap U_2$: Berechne mithilfe des Dimensionssatzes die Dimension von $U_1 \cap U_2$ und konstruiere dann eine Basis von $U_1 \cap U_2$ aus den Basisvektoren von U_1 und U_2.

3.4.3 Lösung

1. U_1: Wir schreiben die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix}3&2&2&1\\0&1&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

   Die Vektoren sind also linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U_1 ($\dim(U_1) = 3$).
2. U_2: Verfahren wie bei U_1:

$$\begin{pmatrix}1&0&4&0\\2&3&2&3\\1&2&0&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&0&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   Diese zwei Vektoren bilden also eine Basis von U_2 ($\dim(U_2) = 2$).
3. $U_1 + U_2$: Es ist

$$U_2 \ni \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} \notin U_1,$$

   somit ist $\dim(U_1 + U_2) \geq 4$. Da wir uns in Unterräumen des $\mathbb{R}^4$ befinden kann die Dimension nicht größer als 4 werden. Somit ist $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ eine Basis von $U_1 + U_2$.

3.5 Herbst 2013

3.5.1 Aufgabe

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 9y + 6z = 8 \\ x + (\alpha-1)z = 1 \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.
2. Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

3.5.2 Ansatz

Führe zuerst Schritte an, die sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erlaubt sind. Mache anschließend eine Fallunterscheidung für α durch.

3.5.3 Lösung

Wir schreiben das LGS in erweiterter Matrixdarstellung und führen anschließend Schritte durch, die sowohl auf $\mathbb{R}$ als auch auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erlaubt sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & \alpha-1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right)$$

1. <u>Fall $\alpha = 1$</u>: Die letzte Zeile verschwindet:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

   (a) <u>Über $\mathbb{R}$</u>: Setzen wir $t := -\frac{y}{2}$, so erhalten wir als Lösungsmenge:

   $$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (b) <u>Über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$</u>: $\mathscr{L}$ wie oben, nur mit $t \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Also ist hier $|\mathscr{L}| = 3$.
2. <u>Fall $\alpha \neq 1$</u>: Wir erhalten die Matrix

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

   (a) <u>Über $\mathbb{R}$</u>: Die Matrix hat Rang 3 und somit eine Lösung: $\mathscr{L} = \left\{ \left(1\ \frac{2}{3}\ 0\right)^\top \right\}$.

   (b) <u>Über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$</u>: Wir erhalten $0 = 2$ als zweite Zeile, somit ist hier $\mathscr{L} = \varnothing$.

3.6 Frühjahr 2014

3.6.1 Aufgabe

In Abhängigkeit von Parameter α sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{cases} 2x+\alpha y+\ z=7 \\ \ x+\ 2y+2z=8 \\ -x+\ \ y+\ z=1 \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.
2. Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ jeweils?

3.6.2 Ansatz

Führe zuerst Schritte durch, die auf beiden Körpern erlaubt sind und mache anschließend eine zweistufige Fallunterscheidung (Körper, α).

3.6.3 Lösung

Wir schreiben das LGS in erweiterter Matrixdarstellung und führen anschließend Schritte durch, die auf beiden Körpern erlaubt sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

1. <u>Über $\mathbb{R}$</u>:
   (a) <u>Fall $\alpha = 1$</u>: Wir formen weiter um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ also ist } \mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (b) <u>Fall $\alpha \neq 1$</u>: Wir formen weiter um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \text{ also ist } \mathscr{L} = \left\{ (2\ 0\ 3)^\top \right\}.$$

2. <u>Über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$</u>: Wir schreiben -1 statt 2 und formen weiter um zu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
   (a) <u>Fall $\alpha = 1$</u>: $\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t,u \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (b) <u>Fall $\alpha \neq 1$</u>: Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ also ist } \mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.7 Herbst 2014

3.7.1 Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 := \langle \begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \rangle \qquad U_2 := \langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$$

Bestimmen Sie für die Vektorräume $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

3.7.2 Ansatz

1. U_1, U_2: Schreibe die jeweiligen Vektoren des Erzeugendensystems als Zeilen in eine Matrix und wende den Gauß-Algorithmus an.
2. $U_1 + U_2$: Vergleiche die Basen von U_1 und U_2 und ermittle so eine Basis von $U_1 + U_2$.
3. $U_1 \cap U_2$: Wende den Dimensionssatz an und bestimme aus den beiden Basen die nötige Anzahl an Vektoren für eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

3.7.3 Lösung

1. U_1: Wir schreiben die Vektoren des Erzeugendensystems als Zeilen in eine Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an:
$$\begin{pmatrix}2&3&3&6\\1&2&2&4\\0&1&1&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
also ist $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U_1 ($\dim(U_1) = 2$).
2. U_2: Vorgehen wie bei U_1:
$$\begin{pmatrix}2&2&2&4\\2&1&2&3\\1&0&1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}, \text{ also ist } \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ eine Basis von } U_2\ (\dim(U_2) = 2).$$
3. $U_1 + U_2$: Wir minimieren den Schnitt der beiden Erzeugendensysteme mit dem Gauß-Algorithmus:
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&2\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \text{also ist } \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } U_1 + U_2\ (\dim(U_1 + U_2) = 3).$$
4. $U_1 \cap U_2$: Mit dem Dimensionssatz erhalten wir $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) = 1$. Also müssen wir nur einen Vektor finden, der in U_1 und U_2 liegt. Die Summe der Basisvektoren ist jeweils dieselbe, deswegen ist $\{(1\ 1\ 1\ 2)^\top\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

3.8 Frühjahr 2015

3.8.1 Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\forall A,B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
2. Sind

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

so gilt für U aus dem ersten Teil:

$$U = \{0\} \Leftrightarrow \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset$$

3.8.2 Ansatz

1. Weise die Untervektorraumkriterien für U nach.
2. Stelle $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AX = XB$ explizit dar und verwende diese Darstellung, um ein LGS zu konstruieren.

3.8.3 Lösung

1. Wir weisen die Untervektorraumkriterien einzeln nach:
   (a) nicht leer: Es ist $0 \in U$, denn $A \cdot 0 = 0 \cdot B = 0$.
   (b) Abgeschlossenheit Addition: Für $X, Y \in U$ gilt:
   $A(X+Y) = AX + AY = XB + YB = (X+Y)B$.
   (c) Abgeschlossenheit Multiplikation: Für $X \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
   $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(XB) = (\lambda X)B$.

   Also ist U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
2. Es sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. $AX = XB$ ist dann explizit ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_3 & a_1x_2 + a_2x_4 \\ a_4x_3 & a_4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1b_1 + x_2b_3 & x_2b_4 \\ x_3b_1 + x_4b_3 & x_4b_4 \end{pmatrix}$$

Indem man die vier Gleichheiten zu Nullgleichheiten umformt erhält man ein LGS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 - b_1 & -b_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 - b_4 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 - b_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 - b_4 & 0 \end{array}\right)$$

Da $U = \{0\}$ gerade dann, wenn die Koeffizenzenmatrix regulär ist, also wenn die Diagonaleinträge alle $\neq 0$, also wenn $a_1 \notin \{b_1, b_4\}$ und $a_4 \notin \{b_1, b_4\}$, ist die Behauptung gezeigt.

4. Aufgabe 4

4.1 Frühjahr 2007

4.1.1 Aufgabe

Es seien V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\psi \in V^*$ eine von der Nullabbildung verschiedene Linearform. Weiter sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\psi \circ \varphi = \psi.$$

Zeigen Sie:

1. φ besitzt den Eigenwert 1.
2. Ist W ein Untervektorraum von V mit $V = \mathrm{Kern}(\psi) \oplus W$ und $\varphi(W) \subset W$, so wird W von einem Eigenvektor zum Eigenwert 1 erzeugt.

4.1.2 Ansatz

1. Führe einen Widerspruchsbeweis durch unter Untersuchung der Injektivität von $\varphi - \mathrm{Id}$.
2. Untersuche die Dimensionen der beteiligten Unterräume. Zeige, dass $\varphi(w) = c \cdot w$ und anschließend, dass $c = 1$.

4.1.3 Lösung

1. Es gilt:

   $$1 \in \mathrm{Spec}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\varphi - \mathrm{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \varphi - \mathrm{Id} \text{ ist nicht injektiv.}$$

   Da $\dim(V) = n < \infty$ ist das äquivalent dazu, dass $\varphi - \mathrm{Id}$ nicht bijektiv ist.
   Wir folgern:

   $$\psi \circ \varphi = \psi = \psi \circ \mathrm{Id} \rightsquigarrow \psi \circ (\varphi - \mathrm{Id}) = 0.$$

   Wäre $\varphi - \mathrm{Id}$ bijektiv, so würde $\psi = 0$ folgen. Widerspruch!
   Also ist $\varphi - \mathrm{Id}$ nicht injektiv und somit $1 \in \mathrm{Spec}(\varphi)$.
2. Sei W wie gefordert ein φ-invarianter Komplementärraum zu $U := \mathrm{Kern}(\psi)$. Wegen $\dim(U) = n - 1$ folgt aus der Dimensionsformel $\dim(W) = 1$.
   Sei nun $W = \langle w \rangle$, $w \neq 0$. Wegen $\varphi(W) \subset W$ ist $\varphi(w) = cw$. Zu zeigen ist noch, dass $c = 1$.
   Es gilt:

   $$\psi \circ \varphi(w) = c\psi(w) \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi(w) = \psi(w),$$

   also muss $c = 1$ sein, da $w \notin \mathrm{Kern}(\psi)$.

4.2 Herbst 2007

4.2.1 Aufgabe

Es seien V ein dreidimensionaler K-Vektorraum und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Linearformen auf V.
Zeigen Sie, dass diese Linearformen genau dann linear abhängig sind, wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \varphi_i(v) = 0.$$

4.2.2 Ansatz

Nehme zuerst an, dass die Linearformen linear unabhängig sind und zeige, dass dann ein solcher Vektor nicht existiert. Weise anschließend nach, dass ein solcher Vektor existiert, wenn die Linearformen linear abhängig sind.

4.2.3 Lösung

1. Annahme: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear unabhängig. $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle = V^*$, da $\dim(V) = 3$. Es gibt zu jedem $v \neq 0$ eine Linearform ψ mit $\psi(v) \neq 0$, also kann nicht $\varphi_i(v) = 0$ für $i = 1,2,3$ sein, denn das ψ lässt sich als Linearkombination von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ darstellen.
2. Annahme: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear abhängig: Es existieren $a_1, a_2, a_3 \in K$ die nicht alle $= 0$ sind, sodass $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = 0$. Die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to K^3,\ \varphi(v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \end{pmatrix}$$

ist dann nicht surjektiv, denn für alle $v \in V$ gilt:

$$(a_1, a_2, a_3)\varphi(v) = a_1\varphi_1(v) + a_2\varphi_2(v) + a_3\varphi_3(v) = 0,$$

daher können nicht alle Vektoren der Standardbasis im Bild von φ liegen.
Wegen der Dimensionsformel ist

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 3 - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) > 0,$$

also $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$. Daher gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$, oder auch

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \varphi_i(v) = 0.$$

4.3 Herbst 2010

4.3.1 Aufgabe

Im Vektorraum $V := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq 4\}$ sei der Untervektorraum

$$U := \{f \in V \mid f(1) = f(-1) = 0\}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis B von U und stellen Sie die Linearformen

$$\varphi : U \to \mathbb{R}, f \mapsto -f(0) \qquad \Psi : U \to \mathbb{R}, f \mapsto f'(1)$$

als Linearkombinationen der zu B dualen Basis dar.

4.3.2 Ansatz

Finde für $f \in V$ eine möglichst explizite Darstellung und konstruiere einen Isomorphismus, der den unbestimmten Teil von f auf f abbildet. Nutze den Isomorphismus, um die Basis von $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq 2\}$ auf eine Basis von U abzubilden. Konstruiere anschließend Linearkombinationen aus Basisvektoren der Dualbasis für die beiden Linearformen.

4.3.3 Lösung

Ein Polynom f liegt in U genau dann, wenn es von $(X+1)(X-1) = (X^2-1)$ geteilt wird und $\mathrm{Grad}(f) \leq 4$ ist, also wenn $f = (X^2-1)g$ mit $g \in \mathbb{R}[X] \wedge \mathrm{Grad}(g) \leq 2$.
Die Abbildung $g \mapsto (X^2-1)g$ ist also ein Vektorraumisomorphismus von $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq 2\}$ nach U. Das Bild der Basis $\{1, X, X^2\}$ von $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq 2\}$ ist also eine Basis von U. Es gilt

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} \text{ mit } b_1 = X^2 - 1,\ b_2 = (X^2-1)X,\ b_3 = (X^2-1)X^2.$$

Sei nun $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ die zu B duale Basis von U^*. Wegen

$$\varphi(b_1) = 1, \quad \varphi(b_2) = 0, \quad \varphi(b_3) = 0$$

erfüllt φ genau die definierende Gleichung für b_1^*:

$$\varphi(b_i) = \delta_{1i}, \text{ also } \varphi = b_1^*.$$

Es gilt:

$$b_1' = 2X, \quad b_2' = 3X^2 - 1, \quad b_3' = 4X^3 - 2X,$$

also

$$\Psi(b_1) = 2, \quad \Psi(b_2) = 2, \quad \Psi(b_3) = 2,$$

somit ist $\varphi = 2(b_1^* + b_2^* + b_3^*)$.

4.4 Frühjahr 2013

4.4.1 Aufgabe

Gegeben seien die n Linearformen

$$\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j - x_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$
$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n.$$

Zeigen Sie, dass $B^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Basis des Dualraums von $\mathbb{R}^n$ ist und geben Sie eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ an, die B^* als Dualbasis hat.

4.4.2 Ansatz

Untersuche die Anforderungen der φ_j an die b_i. Bestimme so B.

4.4.3 Lösung

Nach Definition der Dualbasis muss gelten:

$$\varphi_j(b_i) = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \text{ (siehe auch Kronecker-Delta)}$$

Damit $b_i = (x_1, \dots, x_n)$ das erfüllt sind laut Definition der φ_j notwendig und hinreichend:

1. $x_1 = \dots = x_i$ (damit $\varphi_j(b_i) = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$),
2. $x_{i+1} = \dots = x_n$ (damit $\varphi_j(b_i) = 0$ für $n > j > i$ bzw. $x_n = 0$ bei $i < j = n$),
3. $x_i + x_{i+1} = 1$ (damit $\varphi_j(b_i) = 1$ für $j = i < n$ bzw. $x_n = 1$ bei $j = i = n$).

Offensichtlich sind diese Bedingungen erfüllt, wenn $x_i = \dots = x_i = 1$ und $x_{i+1} = \dots = 0$.
Diese b_i sind offensichtlich linear unabhängig und bilden damit eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Damit ist gezeigt, dass $B^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die Dualbasis zu B, also Basis des Dualraums ist.

4.5 Herbst 2013

4.5.1 Aufgabe

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Seien weiter V^* der Dualraum von V sowie U^* der Dualraum von U.

1. Geben Sie eine Definition von V^* an.
2. Zeigen Sie, dass $U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U : \varphi(u) = 0\}$ ein Untervektorraum von V^* ist.
3. Geben Sie einen surjektiven Vektorraumhomomorphismus von V^* nach U^* an, der U^0 als Kern hat.
4. Begründen Sie, wieso die Vektorräume V^*/U^0 und U^* isomorph sind.

4.5.2 Ansatz

1. Gib die Definition eines Dualraums an.
2. Weise die für das Untervektorraumkriterium nötigen Eigenschaften nach.
3. Betrachte eine Abbildung, die Linearformen aus V^* auf U einschränkt.
4. Wende den Homomorphiesatz an.

4.5.3 Lösung

1. Es ist $V^* = \mathrm{Hom}_{K-\mathrm{VR}}(V,K)$ der Vektorraum aller Linearformen auf V.
2. Wir weisen die für das Untervektorraumkriterium nötigen Eigenschaften nach:
   (a) nicht leer: Die Nullabbildung liegt in U^0.
   (b) Abgeschlossenheit Addition: mit $\varphi, \psi \in U^0$:
   $$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0 \rightsquigarrow \varphi + \psi \in U$$
   (c) Abgeschlossenheit Multiplikation: mit $\varphi \in U^0$ und $a \in K$:
   $$(a\varphi)(u) = a\varphi(u) = a \cdot 0 = 0 \rightsquigarrow a\varphi \in U$$
   Damit ist $U^0 \leq V^*$.
3. Eine solche Abbildung ist
   $$\rho : V^* \to U^*, \quad \varphi \mapsto \varphi|_U.$$
   - Nachweis K-Linearität:
     Für alle $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ und $u \in U$ gilt:
     $$\begin{aligned} \rho(\varphi + \psi) = \rho(\varphi) + \rho(\psi), &\quad \text{da } \rho(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) = \rho(\varphi)(u) + \rho(\psi)(u) \\ \rho(a\varphi) = a\rho(\varphi), &\quad \text{da } \rho(a\varphi)(u) = a(\varphi(u)) = a(\rho(\varphi)(u)) \end{aligned}$$
   - Nachweis $\mathrm{Kern}(\rho) = U^0$: Der Kern von ρ ist:
     $$\{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\} = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U : \varphi(u) = 0\} = U^0$$
   - Nachweis Surjektivität: ρ ist surjektiv, da sich jede Linearform auf U zu einer Linearform auf V fortsetzen lässt:
     $$V^* \ni \varphi(b) = \begin{cases} \psi(b), \text{ falls } b \in B_U \\ 0 \text{ sonst} \end{cases},$$
     wobei B_U U-Basis, B zu V-Basis ergänzte B_U, $b \in B$
4. Laut Homomorphiesatz:
   $$U^* \cong V^*/\mathrm{Kern}(\rho) = V^*/U^0.$$

4.6 Frühjahr 2014

4.6.1 Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq n\}$ der Vektorraum der reellen Polynome mit Grad $\leq n$. Weiter sei $D \in \mathrm{End}(V)$ der Endomorphismus, der $f \in V$ auf seine Ableitung abbildet ($D(f) = f'$). Für $0 \leq i \leq n$ setzen wir $\varphi_i(f) = \frac{1}{i!}D^i(f)(0)$. Die Abbildung $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf V.

1. Bestimmen Sie $D^i(X^k)$ für $i, k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Weisen Sie nach, dass $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ die zur Basis $\{1, X, \dots, X^n\}$ duale Basis des Dualraums V^* von V ist.
   Folgern Sie für $f \in V$ die Gleichheit $f = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)X^i$.
3. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\lambda : V \to \mathbb{R}, \lambda(f) = f(t)$$

eine Linearform auf V. Schreiben Sie λ als Linearkombination von $\varphi_0, \dots, \varphi_n$.

4.6.2 Ansatz

1. Finde eine explizite Darstellung für $D^i(X^k)$ und beweise sie durch vollständige Induktion.
2. Nutze die Ergebnisse aus dem ersten Teil und betrachte $\varphi_i(X^k)$ für $i < k$, $i = k$ und $i > k$. Zeige, dass $\varphi_j(f) = a_j$ unter Ausnutzung der Linearität von φ_j.
3. Zeige die Behauptung an $f \in V$, indem du die Ergebnisse aus dem zweiten Teil und die Linearität von λ benutzt.

4.6.3 Lösung

1. Behauptung:

$$D^i(X^k) = \begin{cases} \prod_{l=0}^{i-1}(k-l)X^{k-i}, & k-i \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über i:

- Induktionsanfang: $D^0 = \mathrm{Id}_V$, also ist $D^0(X^k) = X^k$.
- Induktionsschritt: Es gelte die Beh. für festes $i \in \{0, \dots, n-1\}$, wir zeigen für $n+1$:

$$\begin{aligned} D^{i+1}(X^k) = D(D^i(X^k)) &= \begin{cases} D(\prod_{l=0}^{i-1}(k-l)X^{k-i}), \ k-i \geq 0 \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \prod_{l=0}^{i-1}(k-l)(k-i)X^{k-i-1}, \ k-i-1 \geq 0 \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \prod_{l=0}^{i}(k-l)X^{k-(i+1)}, \ k-(i+1) \geq 0 \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Wir folgern mithilfe des ersten Teils:
   - $i < k$: $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = \frac{1}{i!}\prod_{l=0}^{i-1}(k-l)0^{k-i} = 0$
   - $i = k$: $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = \frac{1}{i!}\prod_{l=0}^{i-1}(i-1)0^0 = \frac{i!}{i!} = 1$
   - $i > k$: $D^i(X^k) = 0$, also $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = 0$

   Somit gilt $\varphi_i(X^k) = \delta_{i,k}$, also ist $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ die zu $\{1, X, \dots, X^n\}$ duale Basis von X^*.
   Für $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in V$ gilt

   $$\varphi_j(f) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_j(X^i) = a_j$$

   Dabei wird die Linearität von φ_j genutzt und dass $\varphi_j(X^i) = \delta_{j,i}$. Somit ist $f = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f) X^i$.
3. Für jedes $f \in V$ gilt

   $$\lambda(f) = \lambda\left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(f)X^i\right) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)\lambda(X^i) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)t^i = \left(\sum_{i=0}^n t^i\varphi_i\right)(f),$$

   somit gilt $\lambda = \sum_{i=0}^n t^i \varphi_i$.

4.7 Herbst 2014

4.7.1 Aufgabe

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Im Dualraum V^* von V sei die Teilmenge

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U : \varphi(u) = 0\}$$

gegeben. Zeigen Sie:
1. U^0 ist ein Untervektorraum von V^*.
2. Für jedes $\varphi \in U^0$ ist die Abbildung

   $$\widetilde{\varphi} : V/U \to K, \quad v + U \mapsto \varphi(v)$$

   wohldefiniert, und es gilt $\widetilde{\varphi} \in (V/U)^*$.
3. Die lineare Abbildung $f : U^0 \ni \varphi \mapsto \widetilde{\varphi} \in (V/U)^*$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

4.7.2 Ansatz

1. Weise die für das Untervektorraumkriterium nötigen Eigenschaften nach.
2. Weise nach, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist. Zeige anschließend, dass $\widetilde{\varphi}$ linear ist.
3. Zeige, dass die Abbildung injektiv und surjektiv ist.

4.7.3 Lösung

1. Wir zeigen die nötigen Eigenschaften einzeln:
   - nicht leer: Die Nullabbildung liegt in U^0, also ist $U^0 \neq \varnothing$.
   - Abgeschlossenheit Addition: Seien $\varphi, \psi \in U^0$, $u \in U$ beliebig.

     $$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0, \text{ also } \varphi + \psi \in U^0.$$

   - Abgeschlossenheit Multiplikation: Seien $\alpha \in K$, $\varphi \in U^0$, $u \in U$ beliebig.

     $$(\alpha\varphi)(u) = \alpha(\varphi(u)) = \alpha \cdot 0 = 0, \text{ also } \alpha\varphi \in U^0.$$

   Also ist U^0 ein Untervektorraum von V^*.
2. Wir zeigen die Wohldefiniertheit von $\widetilde{\varphi}$ und anschließend die Linearität.
   - Wohldefiniert: Ist $v + U = v' + U$, so ist $u := (v' - v) \in U$, und somit

     $$\varphi(v') = \varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v), \text{ da } u \in U^0$$

   - Linearität: Seien $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in K$. Da φ linear ist gilt:

     $$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((v_1 + U) + (v_2 + U)) &= \widetilde{\varphi}((v_1 + v_2) + U) = \varphi(v_1 + v_2) \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \widetilde{\varphi}(v_1 + U) + \widetilde{\varphi}(v_2 + U) \end{aligned}$$

     $$\widetilde{\varphi}(\alpha(v_1 + U)) = \widetilde{\varphi}((\alpha v_1) + U) = \varphi(\alpha v_1) = \alpha\widetilde{\varphi}(v_1 + U)$$

3. Wir zeigen Injektivität und Surjektivität.
   - Injektivität: Für $\varphi \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt:

     $$f(\varphi) = \widetilde{\varphi} = 0, \text{ also } \forall v \in V : \phi(v) = \varphi(v + U) = 0 \rightsquigarrow \varphi = 0.$$

   - Surjektivität: Für $l \in (V/U)^*$ betrachte

     $$\varphi : V \ni v \mapsto l(v + U) \in K.$$

     Diese Abbildung ist linear (direktes Nachrechnen oder Rückführen auf $\varphi = l \circ \pi$ mit kanonischer Projektion π) und für $u \in U$ gilt:

     $$\varphi(u) = l(u + U) = l(U) = 0, \text{ also } \varphi = U^0.$$

4.8 Frühjahr 2015

4.8.1 Aufgabe

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$. Weiter seien $U \subset V$ ein Untervektorraum und $\pi : V \to V/U$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

1. Es existiert genau dann ein Endomorphismus $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(V/U)$ mit $\widetilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$, wenn $f(U) \subset U$.
2. Im Fall $U = \mathrm{Kern}(f)$ gilt $\widetilde{f} = \mathrm{Id}_{V/U}$ genau dann, wenn $f^2 = f$.

4.8.2 Ansatz

1. Zeige beide Richtungen getrennt und betrachte dabei $\widetilde{f} : V/U \ni v+U \mapsto f(v)+U \in V/U$.
2.

4.8.3 Lösung

1. Wir zeigen die beiden Richtungen einzeln.
   - $\Leftarrow$: Es gelte $f(U) \subset U$. Betrachte die Abbildung
   $$\widetilde{f} : V/U \ni v+U \mapsto f(v)+U \in V/U.$$
     - Wohldefiniertheit: Seien $v, w \in V$ mit $v+U = w+U$, also $v-w \in U$. Mit der Linearität von f gilt $f(v)-f(w) = f(v-w) \in U$, also
     $$\widetilde{f}(v+U) = f(v)+U = f(w)+U = \widetilde{f}(w+U).$$
     Damit gilt
     $$(\widetilde{f} \circ \pi)(v) = \widetilde{f}(v+U) = f(v)+U = (\pi \circ f)(v) \quad (v \in V).$$
     - Linearität: Seien $v+U, w+U \in V/U$ und $\lambda \in K$ beliebig. Es gilt:
     $$\begin{aligned} \widetilde{f}((v+U)+(w+U)) &= f(v+w)+U = (f(v)+U)+(f(w)+U) \\ &= \widetilde{f}(v+U)+\widetilde{f}(w+U) \\ \widetilde{f}(\lambda(v+U)) &= \widetilde{f}(\lambda v+U) = \lambda f(v)+U = \lambda(f(v)+U) \\ &= \lambda \widetilde{f}(v+U) \end{aligned}$$
   - $\Rightarrow$: Sei $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(V/U)$ mit $\widetilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Dann gilt für $u \in U$ beliebig:
   $$f(u)+U = (\pi \circ f)(u) = (\widetilde{f} \circ \pi)(u) = \widetilde{f}(u+U) = \widetilde{f}(0+U) = 0+U \rightsquigarrow f(u) \in U$$
2. Es ist nun $U = \mathrm{Kern}(f)$. $\widetilde{f} = \mathrm{Id}_{V/U} \Leftrightarrow \forall v \in U : f(v)+U = \widetilde{f}(v+U) = v+U$, also wenn
$$f(v)-v \in U = \mathrm{Kern}(f)$$
gilt. Das ist der Fall gdw $\forall v \in V : 0 = f(f(v)-v) = f^2(v)-f(v)$, also gdw $f^2 = f$.

4.9 Herbst 2015

4.9.1 Aufgabe

Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Weiter bezeichne V^* den Dualraum von V.

1. Durch welche Bedingung ist die zu B duale Basis $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ von V^* definiert?
2. Zeigen Sie: Wenn $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und B aus Eigenvektoren von Φ besteht, dann besteht B^* aus Eigenvektoren der dualen Abbildung $\Phi^* : V^* \to V^*$.
3. Geben Sie im Fall $n = 2$ ein Beispiel an, bei dem b_1 ein Eigenvektor von Φ ist, aber b_1^* kein Eigenvektor von Φ^*.

4.9.2 Ansatz

1. Gib die Definition von B^* an.
2. B ist Basis aus Eigenvektoren, also existiert für jedes $b_i \in B$ ein $\lambda_i \in K$, sodass $\Phi(b_i) = \lambda_i b_i$. Zeige damit, dass $\Phi^*(b_i^*)(v) = \lambda_i b_i^*(v)$ für beliebiges $v \in V$.
3. Betrachte Φ als die lineare Fortsetzung von $\Phi(b_1) = b_1$, $\Phi(b_2) = b_1 + b_2$ mit $\langle \{b_1, b_2\} \rangle = V$.

4.9.3 Lösung

1. Die zu B duale Basis $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ besteht aus den linearen Fortsetzungen $b_i^* : V \to K$ der Vorschriften $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$.
2. Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und B eine Basis aus Eigenvektoren von Φ. Für jedes $i \leq n$ existiert also ein $\lambda_i \in K$ mit $\Phi(b_i) = \lambda_i b_i$.
   Dann ist b_i^* Eigenvektor von Φ^* zum Eigenwert λ_i, denn für beliebiges $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi^*(b_i^*)(v) &= (b_i^* \circ \Phi)\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k b_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k b_i^*(\Phi(b_k)) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k b_i^*(\lambda_k b_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \delta_{ik} \\
&= \lambda_i \alpha_i \\
&= \lambda_i b_i^*\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k b_k\right) \\
&= \lambda_i b_i^*(v)
\end{aligned}$$

3. Es sei $\{b_1, b_2\}$ Basis von V und Φ die lineare Fortsetzung von $\Phi(b_1) = b_1$, $\Phi(b_2) = b_1 + b_2$. Dann ist b_1^* kein Eigenvektor von Φ^*, denn es gilt:

$$\Phi^*(b_1^*)(b_2) = b_1^*(b_1 + b_2) = 1 \neq 0 = b_1^*(b_2)$$

5. Aufgabe 5

5.1 Frühjahr 2007

5.1.1 Aufgabe

Es seien $V = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$ der reelle Vektorraum der reellen Folgen und $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ der durch $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ definierte Endomorphismus.
Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume von Φ.

5.1.2 Ansatz

Stelle eine Bedingung für die Eigenwerte auf (hierbei kann vollständige Induktion benutzt werden).
Finde eine Darstellung für die zu einem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren (= Folge).

5.1.3 Lösung

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt: $c \in \operatorname{Spec}(\Phi)$, falls eine von der Nullfolge verschiedene Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$\Phi((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = c(x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Das ist nach Definition von Φ der Fall gdw $\forall k \in \mathbb{N} : x_{k+1} = cx_k$. Durch Induktion erhalten wir

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{k+1} = c^k x_1 \tag{5.1}$$

Setzen wir $x_1 = 1$, so sehen wir, dass jedes $c \in \mathbb{R}$ Eigenwert von Φ ist.
Ein zum Eigenwert $c \in \mathbb{R}$ gehörender Eigenvektor ist die Folge $(1, c, c_2, \dots)$.
Andererseits folgt aus 5.1, dass jeder Eigenvektor zum Eigenwert c die Form $(ac^{k-1})_{k\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{R}$ hat. Damit folgt für den zugehörigen Eigenraum:

$$E_c = \left[(c^{k-1})_{k\in\mathbb{N}}\right] = [(1, c, c^2, \dots)]$$

5.2 Herbst 2007

5.2.1 Aufgabe

In Abhängigkeit vom $t \in \mathbb{R}$ sei folgende Matrix gegeben:

$$A_t := \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.
2. Berechnen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, für die $S^{-1}A_0S$ diagonal ist.

5.2.2 Ansatz

1. Damit A_t diagonalisierbar ist muss $\mathrm{CP}(A_t, X)$ in Linearfaktoren zerfallen und für jeden Eigenwert geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.
2. Betrachte die Matrix als Abbildung und transformiere sie durch eine Basiswechselmatrix S so, dass sie Diagonalform hat.

5.2.3 Lösung

1. Damit A_t diagonalisierbar ist, muss das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfallen und für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.
   - Charakteristisches Polynom: Entwickelt man $\det(XI_4 - A_t)$ nach der letzten Zeile und dann nochmal nach der letzten Zeile, so erhält man

     $$\mathrm{CP}(A_t, X) = (X-2)^2((X-t-5)(X-t)-5) = (X-2)^2(X^2-(2t+4)X+t^2+4t-5)$$

     Mit der Mitternachtsformel formt man um zu

     $$\mathrm{CP}(A_t, X) = (X-2)^2(X-(t+5))(X-(t-1))$$

   - Vielfachheiten: Es muss nur die geometrische Vielfachheit von $X = 2$ bestimmt werden, da für die anderen Nullstellen offensichtlich $\mu_a = \mu_g$.
     $\mu_a(2) \geq 2$, also muss auch $\mu_g(2) \geq 2$ sein, also $\mathrm{Rang}(A_t - 2I_4) \leq 4-2 = 2$:

     $$A_t - 2I_4 = \begin{pmatrix} t+2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9-t^2 & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     Es ist also $\mathrm{Rang}(A_t - 2I_4) = 2$, wenn $t \in \{0, 3, -3\}$, also ist A_t höchstens für diese t diagonalisierbar.
     - $t = 0$: A_t ist diagonalisierbar, da hier $\mu_g(2) = \mu_a(2)$.
     - $t = \pm 3$: A_t ist nicht diagonalisierbar, da hier $\mu_a(2) = 3$, aber $\mu_g(2) = 2$.

   Also ist A_t nur für $t = 0$ diagonalisierbar.
2. Es ist $t = 0$. Wir bestimmen Basen für alle Eigenräume:
   - $\lambda = 2$: Wir lösen $(A_0 - 2I_4)v = 0$ und erhalten $b_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $b_2 := \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}^\top$.
   - $\lambda = 5$: Wir verfahren analog zu $\lambda = 2$ und erhalten $b_3 := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$.
   - $\lambda = -1$: Wir verfahren analog zu $\lambda = 2$ und erhalten $b_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\top$.

   Daher ist $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis aus Eigenvektoren. Die Matrix $S := (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ist regulär und erfüllt die geforderte Bedingung: $S^{-1}A_0S = \mathrm{diag}(2, 2, 5, -1)$.

5.3 Herbst 2010

5.3.1 Aufgabe

Gegeben seien die zwei reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass A und B dasselbe charakteristische Polynom haben.
2. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?
3. Bestimmen Sie für eine der Matrizen eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren besteht.

5.3.2 Ansatz

1. Bestimme $\mathrm{CP}_A(X)$ und $\mathrm{CP}_B(X)$.
2. Eine Matrix ist dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
3. Löse je Eigenwert $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$: $\mathrm{Kern}(M - \lambda I_3)$ $(M \in \{A,B\})$.

5.3.3 Lösung

1. Wir bestimmen jeweils das charakteristische Polynom:
   - A: $\mathrm{CP}_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 2 & X-2 & -1 \\ 2 & -1 & X-2 \end{pmatrix} = (X-1)^2(X-3)$.
   - B: $\mathrm{CP}_B(X) = \det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 2 & X-1 & -2 \\ 2 & 0 & X-3 \end{pmatrix} = (X-1)^2(X-3)$.
2. Es ist $\mathrm{Spec}(M) = \{1,3\}$, $\mu_a(1) = 2$, $\mu_a(3) = 1$ für $M \in \{A,B\}$.
   - A: Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist:

     $$\mathrm{Kern}(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

     Diese Matrix hat Rang 2, also ist $\dim(\mathrm{Eig}(A,1)) = 1$, also $\mu_a(1) \neq \mu_g(1)$. Also ist A nicht diagonalisierbar.
   - B:
     – $\lambda = 1$: $\mathrm{Kern}(B - I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
     – $\lambda = 3$: $\mathrm{Kern}(B - 3I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

     Also ist B diagonalisierbar.
3. Nur für diagonalisierbare Matrizen kann eine solche Basis besimmt werden, also nur für B. Eine solche Basis ist nach Rechnung oben

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.4 Frühjahr 2013

5.4.1 Aufgabe

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei für $t \in \mathbb{R}$ ein Endomorphismus $\Phi_t : \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto A_t x \in \mathbb{R}^4$ gegeben mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie alle Eigenwerte von Φ_t.
2. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die Φ_t diagonalisierbar ist.
3. Berechnen Sie für $t = 2$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von Φ_t.

5.4.2 Ansatz

1. Bestimme das charakteristische Polynom von Φ_t.
2. Bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die $\mathrm{CP}_{\Phi_t}(X)$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.
3. Nutze hierfür die Basisvektoren der Eigenräume aus dem zweiten Teil.

5.4.3 Lösung

1. Wir bestimmen $\mathrm{CP}_{\Phi_t}(X)$:

$$\mathrm{CP}_{\Phi_t}(X) = \det(A_t - XI_4) = (X-2t)(X-4)^2(X+4)$$

   Es ist also $\mathrm{Spec}(\Phi_t) = \{2t, -4, 4\}$.
2. Das charakteristische Polynom zerfällt offensichtlich in Linearfaktoren. Wir betrachten die Vielfachheiten vom Eigenwert 4:

$$\mathrm{Rang}(A_t - 4I_4) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} -2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ 0 & -8 & -8 & -4-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4+2t \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{falls } t = 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   - $t \neq 2$: $\dim(\mathrm{Eig}(A_t, 4)) = 4 - 3 = 1 < 2$, also ist A_t für $t \neq 2$ nicht diagonalisierbar.
   - $t = 2$: $\dim(\mathrm{Eig}(A_t, 4)) = 4 - 1 = 3 = \mu_a(4) \quad \checkmark$

   Es ist $\dim(\mathrm{Eig}(A_2, -4)) = 1 = \mu_a(-4)$. Also ist A_2 diagonalisierbar.
3. Wir berechnen zu den beiden Eigenwerten Basen der zugehörigen Eigenräume:
   - $X = 4$: $\mathrm{Eig}(A_2, 4) = \mathrm{Kern}(A_2 - 4I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$
   - $X = -4$: $\mathrm{Eig}(A_2, -4) = \mathrm{Kern}(A_2 + 4I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

   Eine Basis aus Eigenvektoren von A_2 ist also

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

5.5 Herbst 2013

5.5.1 Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, für die es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A_k = I_n$ gibt.

1. Geben Sie ein von Null verschiedenes annullierendes Polynom für A an.
2. Weisen Sie nach, dass A diagonalisierbar ist.

A Hinweis:
Jedes nicht konstante komplexe Polynom ist ein Produkt von Linearfaktoren.

5.5.2 Ansatz

1. Finde ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$, sodass $p(A) = 0$.
2. A ist diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom in einfache Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass das der Fall ist, indem du eine Nullstelle z annimmst, das annullierende Polynom aus dem ersten Teil durch $(X - z)$ teilst und zeigst, dass bei Einsetzen von z in das resultierende Polynom ein Ergebnis $\neq 0$ vorliegt.

5.5.3 Lösung

1. Wegen $A^k = I_n$ ist $X^k - 1$ ein annullierendes Polynom vom Grad $k > 0$, also $\neq 0$.
2. $\mathrm{MP}_A(\lambda)$ teilt $X^k - 1$ und zerfällt in Linearfaktoren. Damit A diagonalisierbar ist darf also keine mehrfache Nullstelle in $\mathrm{MP}_A(\lambda)$ vorkommen.
   Sei z Nullstelle des Minimalpolynoms ($z^k = 1 \rightsquigarrow z \neq 0$). Wenn z mehrfache Nullstelle von $\mathrm{MP}_A(\lambda)$ wäre, dann auch von $X^k - 1$. Wir teilen $X^k - 1$ durch $X - z$:
   $$(X^k - 1) : (X - z) = X^{k-1} + zX^{k-2} + \cdots + z^{k-2}X + z^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} z^i X^{k-1-i}$$
   Setzt man rechts z ein, so erhält man $k \cdot z^{k-1} \neq 0$, also ist z einfache Nullstelle von $\mathrm{MP}_A(\lambda)$.

5.6 Frühjahr 2014

5.6.1 Aufgabe

In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A_b = \begin{pmatrix} b & b-1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ b+1 & b-1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist A_b diagonalisierbar?
2. Bestimmen Sie für $b = 2$ eine invertierbare reelle Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = S^{-1}A_2S$.

5.6.2 Ansatz

1. Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.
2. Konstruiere S aus Basisvektoren der Eigenräume der Eigenwerte von A_2.

5.6.3 Lösung

1. Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A_b:

$$\mathrm{CP}_{A_b}(\lambda) = -\det(A_b - \lambda I_3) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-(b-3))$$

   - $b \notin \{2,4\}$: A_b hat drei verschiedene Eigenwerte $\rightsquigarrow$ A_b diagonalisierbar.
   - $b = 2$: $\mu_a(-1) = 2$. Wir berechnen $\mu_g(-1)$:

$$\mathrm{Kern}(A_2 + I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

     Also ist hier $\mu_a(-1) = \mu_g(-1)$ und A_2 somit diagonalieierbar.
   - $b = 4$: $\mu_a(1) = 2$. Wir berechnen $\mu_g(1)$:

$$\mathrm{Kern}(A_4 - I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

     Da $\mu_g(1) = 1$ ist A_4 nicht diagonalisierbar.
2. Wir können S und D direkt angeben, da wir eben schon alle Basen der Eigenräume von A_2 berechnet haben:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.7 Herbst 2014

5.7.1 Aufgabe

Für $s \in \mathbb{R}$ sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & s+1 & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

1. Berechne $\operatorname{Spec}(A_s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.
2. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar?
3. Bestimme eine $\mathbb{R}^4$-Basis aus A_2-Eigenvektoren.

5.7.2 Ansatz

1. Bestimme das charakteristische Polynom von A_s und lese die Eigenwerte ab.
2. Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
3. Konstruiere die Basis aus Basisvektoren der Eigenräume.

5.7.3 Lösung

1. Wir berechnen $\mathrm{CP}_{A_s}(\lambda)$:
$$\mathrm{CP}_{A_s}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} s-\lambda & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & 2+1-\lambda & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -s-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & s-\lambda \end{pmatrix} = X(X-1)(X-s)^2$$
Also ist $\operatorname{Spec}(A_s) = \{0,1,s\}$.
2. Offensichtlich zerfällt $\mathrm{CP}_{A_s}(\lambda)$ in Linearfaktoren. Es bleibt zu bestimmen, für welche $s \in \mathbb{R}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich sind.
   - $\lambda = s$: Wir bestimmen $\dim(\operatorname{Kern}(A_s - sI_4))$:
   $$\operatorname{Kern}(A_s - sI_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -2s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & s^2 & -s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix}$$
   Es ist also $\dim(\operatorname{Eig}(A_s, s)) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s \in \{0,2\} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$.
   Somit ist A_s höchstens für $s \in \{0,2\}$ diagonalisierbar.

   Ist $s = 0$, so ist $\mu_a(s) = 3$ und A_s somit nicht diagonalisierbar.
   Ist $s = 2$, so ist $\mu_a(s) = \mu_g(s)$. Für die anderen Eigenwerte gilt das sowieso, also ist A_s genau für $s = 2$ diagonalisierbar.
3. Wir berechnen eine Basis für jeden Eigenraum $E_\lambda = \operatorname{Kern}(A_2 - \lambda I_4)$, indem wir jeweils $(A_2 - \lambda I_4)v = 0$ lösen. Wir erhalten die Vektoren
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Diese bilden eine $\mathbb{R}^4$-Basis aus A_2-Eigenvektoren.

5.8 Frühjahr 2015

5.8.1 Aufgabe

Für $s \in \mathbb{R}$ sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A_s = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & s \\ s-2 & 1 & s \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimme $\operatorname{Spec}(A_s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.
2. Bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die A_s diagonalisierbar ist.
3. Bestimme für $s = -1$ eine $\mathbb{R}^3$-Basis aus A_{-1}-Eigenvektoren.

5.8.2 Ansatz

1. Bestimme das charakteristische Polynom von A_s und lese die Eigenwerte ab.
2. Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
3. Eine solche Basis besteht aus den Basisvektoren der Eigenräume.

5.8.3 Lösung

1. Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A_s:

$$\mathrm{CP}_{A_s}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} s-1-\lambda & 0 & s \\ s-2 & 1-\lambda & s \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)((2+s)-\lambda)$$

   Es ist also $\operatorname{Spec}(A_s) = \{1, -1, 2+s\}$.
2. Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$ hat A_s drei verschiedene Eigenwerte und ist also diagonalisierbar.
   - $s = -1$: Hier ist $\mu_a(1) = 2$. Wir bestimmen $\mu_g(1)$:

$$\mu_g(1) = \dim(\operatorname{Kern}(A_{-1} - I_3)) = \dim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

     Also ist A_{-1} diagonalisierbar.
   - $s = -3$: Hier ist $\mu_a(-1) = 2$. Wir bestimmen $\mu_g(-1)$:

$$\mu_g(-1) = \dim(\operatorname{Kern}(A_{-3} + I_3)) = \dim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

     Also ist A_{-3} nicht diagonalisierbar.

   Insgesamt ist A_s für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ diagonalisierbar.
3. Eine solche Basis ist die Basis aus den Basisvektoren der Eigenräume, die man aus den beiden obigen Matrizen erhält:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^3$$

5.9 Herbst 2015

5.9.1 Aufgabe

In Abhänigkeit von $t \in \mathbb{R}$ sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 1 & 1-t \\ -1 & t-1 & t-1 \\ 1 & 2-2t & 2-2t \end{pmatrix}$$

1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t diagonalisierbar?
2. Gebe für $t = \frac{1}{2}$ eine $\mathbb{R}^3$-Basis aus A_t-Eigenvektoren an.

5.9.2 Ansatz

1. Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
2. Eine solche Basis besteht beispielsweise aus den Basisvektoren der Eigenräume.

5.9.3 Lösung

1. Wir bestimmen die Eigenwerte von A_t über das charakteristische Polynom:

$$\mathrm{CP}_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - I_3) = (t-\lambda)((1-t)-\lambda)(1-\lambda)$$

Also ist $\mathrm{Spec}(A_t) = \{t, 1-t, 1\}$ und A_t diagonalisierbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0, \frac{1}{2}\}$.

- $t = 1$: Es ist hier $\mu_a(1) = 2$. Wir berechnen $\mu_g(1)$:

$$\mu_g(1) = 3 - \mathrm{Rang}(A_1 - I_3) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Also ist A_1 nicht diagonalisierbar.

- $t = 0$: Es ist hier $\mu_a(1) = 2$. Wie oben:

$$\mu_g(1) = 3 - \mathrm{Rang}(A_0 - I_3) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Also ist auch A_0 nicht diagonalisierbar.

- $t = \frac{1}{2}$: $\mu_a(\frac{1}{2}) = 2$. Wir berechnen $\mu_g(\frac{1}{2}) = \dim(\mathrm{Kern}(A_{1/2} - \frac{1}{2}I_3))$:

$$\dim(\mathrm{Kern}(A_{1/2} - \tfrac{1}{2}I_3)) = \dim\left(\mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left|\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2$$

Wir verfahren analog für den $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^\top \rangle$ und erhalten so die Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$ Insgesamt ist also $A_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}}$ diagonalisierbar.

6. Aufgabe 6

6.1 Frühjahr 2007

6.1.1 Aufgabe

Es seien V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \geq 2$ und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Weiter sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ so definiert:

$$\Phi(b_i) := \sum_{k=1, k\neq i}^{n} b_k \quad (i = 1, \dots, n).$$

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von Φ.
2. Zeigen Sie, dass Φ diagonalisierbar ist und geben Sie eine Abbildungsmatrix von Φ in Diagonalform an.

6.1.2 Ansatz

1. Forme die Matrix bei Bestimmung von $\mathrm{CP}_\Phi(\lambda)$ so um, dass eine Dreiecksmatrix entsteht.
2. Zeige, dass $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : \mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

6.1.3 Lösung

1. Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich obiger Basis ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristiche Polynom ist

$$\mathrm{CP}_\Phi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (n-1)-x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1-x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^n (x-(n-1))(x+1)^{n-1}.$$

Dazu wurde die erste Zeile von allen abgezogen und dann alle Spalten auf die erste aufaddiert.

2. Um zu zeigen, dass Φ diagonalisierbar ist, müssen wir zeigen, dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen.
   - $(n-1)$: Für die Abbildungsmatrix A ist $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top$ ein Eigenvektor für $\lambda = n-1$, also ist $b_1 + \cdots + b_n$ ein Eigenvektor von Φ zu $\lambda = n-1$. Also ist $\mu_a(n-1) = \mu_g(n-1)$.
   - -1: Wir bestimmen $\mu_g(-1)$:

$$\mu_g(-1) = \dim(\mathrm{Kern}(\Phi + \mathrm{Id})) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \dim(\langle b_1 - b_2, \dots, b_1 - b_n \rangle) = n-1$$

Φ ist also diagonalisierbar und besitzt bezüglich der Basis aus den Basisvektoren der Eigenräume die Abbildungsmatrix

$$A' := \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Herbst 2007

6.2.1 Aufgabe

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechne $\det(A)$.

6.2.2 Ansatz

Bestimme die Determinante von A für kleine n und konstruiere anschließend eine Rekursionsformel.

6.2.3 Lösung

Wir bestimmen die Determinante von A für $n = 0, 1, 2, 3$ und erhalten so $1, 0 - \alpha^2, 0$.
Sei nun $n \geq 2$. Bestimmt man $\det(A)$ durch Entwicklung nach der letzten Zeile, so erhält man:

$$\det(A) = -\alpha \cdot \det \left(\begin{array}{cccc|c} & & A' & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha & \alpha \end{array} \right) = -\alpha^2 \det(A').$$

$A' \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ ist gebildet wie A. Also kann die Determinante von A rekursiv auf $n = 0$ oder $n = 1$ zurückgeführt werden. Wir erhalten:

$$\det(A) = \begin{cases} (-\alpha^2)^k & \text{falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

6.3 Herbst 2010

6.3.1 Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } |i-j| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

1. Finden Sie eine Rekursionsformel für $\det(A_n)$.
2. Berechnen Sie $\det(A_n)$ für $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
3. Verifizieren Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\det(A_{n+6}) = \det(A_n)$$

6.3.2 Ansatz

1. Versuche, beim Entwickeln von $\det(A_n)$ auf $\det(A_{n-1})$ und $\det(A_{n-2})$ zurückzugreifen.
2. Berechne $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$ von Hand und verwende die Rekursionsformel aus dem ersten Teil, um die restlichen Determinanten zu bestimmen.
3. Betrachte die Rekursionsformel für $\det(A_{n+6})$ und verwende die Rekursion so lange, bis du bei $\det(A_n)$ ankommst.

6.3.3 Lösung

1. A_n hat folgende Gestalt:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sei $n \ge 3$. Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - \det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{array} \right) = \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

2. Wir berechnen $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$ von Hand und erhalten die Werte 1 und 0. Somit ist $d_3 = d_2 - d_1 = -1$ usw.
3. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \det(A_{n+6}) &= \det(A_{n+5}) - \det(A_{n+4}) \\ &= \det(A_{n+4}) - \det(A_{n+3}) - \det(A_{n+4}) \\ &= -\det(A_{n+3}) \\ &= -(\det(A_{n+2}) - \det(A_{n+1})) \\ &= -(\det(A_{n+1}) - \det(A_n) - \det(A_{n+1})) \\ &= \det(A_n) \end{aligned}$$

A **Hinweis**:
In der Musterlösung wird ein Beweis durch vollständige Induktion geführt, der wesentlich hässlicher ist. Keine Ahnung wieso...

6.4 Frühjahr 2013

6.4.1 Aufgabe

Für $1 \leq n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls } i = j-1 \\ 1 & \text{falls } i = j \\ j^2 & \text{falls } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = n!$.

6.4.2 Ansatz

Berechne $\det(A_n)$ für ein paar kleine n und führe dann einen Induktionsbeweis.

6.4.3 Lösung

A_n hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\det(A_1) = |1| = 1!$ und $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = 2!$.
Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion.

1. **IA**: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelten die Aussagen
$$\det(A_{n-2}) = (n-2)! \quad \text{und} \quad \det(A_{n-1}) = (n-1)!$$
2. **IV**: Es gilt $\det(A_n) = n!$.
3. **IS**: Wir entwickeln nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= -(n-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (n-2)^2 & -1 \end{pmatrix} + \det(A_{n-1}) \\ &= (n-1)^2 \det(A_{n-2}) + \det(A_{n-1}) \\ &\overset{\text{IV}}{=} (n-1)^2 (n-2)! + (n-1)! \\ &= (n-1)(n-1)! + (n-1)! \\ &= (n-1)!((n-1)+1) \\ &= n! \end{aligned}$$

6.5 Herbst 2013

6.5.1 Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \vee j = 1 \\ a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.
2. Berechnen Sie $\det(A_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

6.5.2 Ansatz

1. Rechne die Determinanten aus.
2. Versuche eine Umformungsregel zu finden (Spalten von anderen Spalten abziehen), sodass A_n zu einer unteren Dreiecksmatrix umgeformt werden kann.

6.5.3 Lösung

1. Es ist $\det(A_1) = |1| = 1$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$.
2. Wir formen A_n um.
   (a) **Schritt 1**: Wir ziehen die $(j-1)$-te Spalte von der j-ten Spalte ab (für alle $2 \le j \le n$).
   (b) **Schritt 2**: Wir ziehen die $(j-1)$-te Spalte von der j-ten Spalte ab (für alle $3 \le j \le n$).
   (c) ...

   Dabei wird die Matrix jeweils um eine Zeile nach unten geschoben, es kommen Nullen von oben nach (außer für die Spalten, die von der Umformung nicht betroffen waren) und die unterste Zeile fällt weg.
   Wir erhalten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}$$

   und es gilt offensichtlich $\det(A_n) = 1$.

6.6 Frühjahr 2014

6.6.1 Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei gegeben durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq j \\ x_j & \text{falls } i > j \end{cases}.$$

1. Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.
2. Berechnen Sie $\det(A_n)$ allgemein.

6.6.2 Ansatz

1. Berechne die Determinanten.
2. Nutze die Ergebnisse aus dem ersten Teil, um eine Vermutung über $\det(A_n)$ aufzustellen und zeige diese durch vollständige Induktion.

6.6.3 Lösung

1. Es ist

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= |x_1| = x_1, \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1(x_2 - x_1), \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ 0 & x_2-x_2 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

2. Allgemein hat A_n die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ \vdots & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten aufgrund der Ergebnisse aus dem ersten Teil:

$$\det(A_n) = x_1 \prod_{i=2}^{n-1} (x_i - x_{i-1})$$

Wir beweisen diese Behauptung durch vollständige Induktion.

(a) **IA**: Das wurde im ersten Teil erledigt.
(b) **IV**: Es gelte obige Behauptung.
(c) **IS**: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ \vdots & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rceil^{-1} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} = \det \left(\begin{array}{ccc|c} & A_{n-1} & & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & x_n - x_{n-1} \end{array} \right) \\ &= (x_n - x_{n-1}) \det(A_{n-1}) \\ &\overset{\text{IV}}{=} x_1 \prod_{i=2}^{n-1} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

6.7 Herbst 2014

6.7.1 Aufgabe

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times(n+1)}$ eine Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n$.
Für $j \in 1,\dots,n+1$ sei $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, die man durch Streichen der j-ten Spalte erhält.
Weiter sei $w \in K^{n+1}$ der Vektor mit den Komponenten

$$w_j := (-1)^j \det(A_j) \quad j \in \{1,\dots,n+1\}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$ gleich $\langle w \rangle \leq K^{n+1}$ ist.

6.7.2 Ansatz

6.7.3 Lösung

Für die Lösungsmenge $\mathscr{L} = \mathrm{Kern}(A)$ gilt:

$$\dim(\mathscr{L}) = \dim(\mathrm{Kern}(A)) = \dim(K^{n+1}) - \mathrm{Rang}(A) = (n+1) - n = 1.$$

Wir müssen also nur zeigen, dass w das LGS $Ax = 0$ löst.
Wir rechnen die i-te Gleichung des LGS aus:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} w_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} (-1)^j \det(A_j)$$

Da dieser Term einer Laplace-Entwicklung ähnelt ergänzen wir:

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A'_{i,j})$$

Wir müssen also eine Matrix A' konstruieren mit $\det(A') = 0$ und $A'_{i,j} = A_j$. Eine solche Matrix ist

$$A' := A'(i) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n+1} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Offensichtlich ist $\det(A') = 0$, da zwei Zeilen übereinstimmen. Obige Gleichung entspricht nun der Entwicklung nach der i-ten Zeile mit $A_j = A'_{i,j}$.
Insgesamt ist also $0 \neq w \in \mathscr{L}$, also $\langle w \rangle = \mathscr{L}$.

6.8 Frühjahr 2015

6.8.1 Aufgabe

Für $1 \geq n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} t^2+1 & \text{falls } i = j \\ t & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$.
2. Bestimmen Sie über vollständige Induktion die Determinante $\det(A_n)$.

6.8.2 Ansatz

1. Berechne die Determinanten.
2. Stelle anhand der Ergebnisse aus dem ersten Teil eine Vermutung für $\det(A_n)$ auf und zeige diese Vermutung durch vollständige Induktion.

6.8.3 Lösung

1. Es ist $\det(A_1) = |t^2-1| = t^2-1$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} t^2+1 & t \\ t & t^2+1 \end{vmatrix} = t^4+t^2+1$
2. Wir behaupten:

$$\det(A_n) = \sum_{i=0}^{n} t^{2i}$$

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion:

(a) **IA**: Das wurde im ersten Teil erledigt.

(b) **IV**: Es gelte $A_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} t^{2k}$ und $A_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} t^{2k}$ für ein $\mathbb{N} \ni n \geq 3$.

(c) **IS**: Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A_n) &= \begin{vmatrix} t^2+1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ t & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & t^2+1 \end{vmatrix} = (t^2+1)A_{n-1} - t \begin{vmatrix} t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+t^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & t & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & t^2+1 \end{vmatrix} \\
&= (t^2+1)A_{n-1} - t^2 A_{n-2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} + t^2 \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} - t^2 \sum_{k=0}^{n-2} t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^{2k}
\end{aligned}$$

6.9 Herbst 2015

6.9.1 Aufgabe

Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ $\det(A_n)$ wobei $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert ist durch

$$a_{i,j} = \min(i,j)^2.$$

6.9.2 Ansatz

Berechne $\det(A_n)$ für ein paar kleine $n \in \mathbb{N}$, stelle eine Vermutung für $\det(A_n)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ auf und zeige die Behauptung durch vollständige Induktion.

6.9.3 Lösung

A **Hinweis**: Ich fande die in der Lösung vorgestellten Wege nicht instruktiv, deswegen hier mein Lösungsweg.

Wir berechnen

$$\det(A_1) = |1| = 1$$
$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\det(A_1) = 3$$
$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_2) = 15$$

Behauptung: $\det(A_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(2k+1)$. Wir zeigen diese Behauptung durch vollständige Induktion:

1. **IA**: Das wurde bereits erledigt.
2. **IV**: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\det(A_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(2k+1)$.
3. **IS**: Wir berechnen $\det(A_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
\det(A_{n+1}) &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 4 & \cdots & (n+1)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {}^{-1} \\ {}_{+} \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A_n & & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n^2 \end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & (n+1)^2 - n^2 \end{array}\right) \\
&= ((n+1)^2 - n^2)\det(A_n) \\
&= (n^2 + 2n + 1 - n^2)\det(A_n) \\
&\overset{\text{IV}}{=} (2n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(2k+1) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(2k+1)
\end{aligned}$$

LA II

7. Aufgabe 1

7.1 Frühjahr 2007

7.1.1 Aufgabe

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die JNF von A.
2. Zeigen Sie, dass es keine Matrix B mit folgenden Eigenschaften gibt:
   (a) A und B sind ähnlich.
   (b) Es ist $B^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

7.1.2 Ansatz

1. Berechne $\mathrm{CP}_A(\lambda)$. Berechne $\mu_a(\lambda)$ und $\mu_g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und konstruiere so $A' := \mathrm{JNF}(A)$.
2. Für eine solche Matrix B muss $\mathrm{JNF}(A'^2) \sim \mathrm{JNF}(B^2)$ gelten (dies ist zuerst zu zeigen). Zeige, dass die Anzahl der Jordankästchen zu einem Eigenwert unterschiedlich ist.

7.1.3 Lösung

1. Es ist

$$\mathrm{CP}_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3(1-\lambda).$$

Wir bestimmen $\mu_g(-1)$:

$$\mu_g(-1) = \dim(\mathrm{Eig}(A,-1)) = \dim(\mathrm{Kern}(A+I_4)) = \dim\left(\mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 1&0&1&2 \\ 1&0&2&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Also gibt es zu $\lambda = -1$ genau ein Jordankästchen und wir erhalten die JNF:

$$A' := \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 1&-1&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

2. Existiert ein solches B, so gilt

$$A \sim B \Rightarrow A'^2 \sim B^2 \Rightarrow \mathrm{JNF}(A'^2) \sim \mathrm{JNF}(B^2) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist aber $\mu_g(1) = 2$ in $A'^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -2&1&0&0 \\ 1&-2&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, also hat $\mathrm{JNF}(A'^2)$ genau zwei Jordankästchen zum Eigenwert 1, $\mathrm{JNF}(B^2)$ aber drei, also kann es eine solche Matrix B nicht geben.

7.2 Herbst 2007

7.2.1 Aufgabe

Es seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\Phi \in \text{End}(\Phi)$.

1. Zeigen Sie, dass V die direkte Summe der Untervektorräume $\text{Kern}(\Phi^n)$ und $\text{Bild}(\Phi^n)$ ist.
2. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass V i.A. nicht die direkte Summe von $\text{Kern}(\Phi)$ und $\text{Bild}(\Phi)$ ist.

7.2.2 Ansatz

1. Betrachte den Dimensionssatz und $\text{Kern}(\Phi^n) \cap \text{Bild}(\Phi^n)$.
2. Konstruiere ein $\Phi \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$, für die $\text{Kern}(\Phi) = \text{Bild}(\Phi)$ gilt.

7.2.3 Lösung

1. Wir müssen zeigen, dass $\text{Kern}(\Phi^n) \cap \text{Bild}(\Phi^n) = \{0\}$, denn dann folgt aus der Dimensionsformel, dass $\text{Bild}(\Phi^n) + \text{Kern}(\Phi^n) = \text{Bild}(\Phi^n) \oplus \text{Kern}(\Phi^n) = V$.
   Es ist $\text{Kern}(\Phi^n) = \text{Hau}(\Phi, 0) = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : \Phi^k(v) = 0\}$. Es liege $v \in \text{Kern}(\Phi^n) \cap \text{Bild}(\Phi^n)$. Also gilt

   $$\exists w \in V : \Phi^n(w) = v \wedge \Phi^n(v) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi^n(\Phi^n(w)) = \Phi^{2n}(w) = 0$$

   Daraus folgt

   $$\Phi^n(w) = 0 = v \in \text{Kern}(\Phi^n)$$

   und damit ist die Behauptung gezeigt.
2. Betrachte die Abbildung

   $$\text{End}(\mathbb{C}^2) \ni \Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Es gilt

   $$\text{Kern}(\Phi) = \mathbb{C}e_1 = \text{Bild}(\Phi),$$

   also kann die Summe nicht direkt sein.

7.3 Herbst 2010

7.3.1 Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben und $M \in \mathbb{C}^{(2n)\times(2n)}$ die Blockmatrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme $\mathrm{Spec}(M)$.
2. Wie lang sind die längsten Jordankästchen in $\mathrm{JNF}(M)$?
3. Bestimme $\mathrm{JNF}(M)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Rang}(A)$.
4. Bestimme für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $S^{-1}MS = \mathrm{JNF}(M)$.

7.3.2 Ansatz

1. Betrachte die Diagonale der Matrix.
2. Die länge p des längsten Jordankästchens zum Eigenwert λ ist $\min\{e \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Kern}((M-\lambda I_{2n})^e) = \mathrm{Kern}((M-\lambda I_{2n})^{e+1})\}$.
3. Verwende $\mu_g(\lambda) = 2n - \mathrm{Rang}(M-\lambda I_{2n})$.
4. Bestimme für jeden Eigenwert eine Basis der Kerne von $(M-\lambda I_{2n})^k$ $(1 \le k \le p$, siehe 2.) und füge die Vektoren $(M-\lambda I_{2n})^k v$ $(1 \le k \le p, v \in (\mathrm{Kern}((M-\lambda I_{2n})^p) \setminus \mathrm{Kern}((M-\lambda I_{2n})^{p-1}))$ der Matrix hinzu.

7.3.3 Lösung

1. M ist eine strikte untere Dreiecksmatrix, also ist $\mathrm{Spec}(M) = \{0\}$.
2. Da $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert ist, ist die Länge des größten Jordankästchens das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $M^k = 0$. Es ist
$$k = \begin{cases} 2 & \text{falls } A \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
3. Die Anzahl der Jordankästchen zu 0 ist $\mu_g(0)$. Es ist
$$\mu_g(0) = \dim(\mathrm{Eig}(M,0)) = 2n - \mathrm{Rang}(M - 0\cdot I_{2n}) = 2n - \mathrm{Rang}(A).$$
Die Summe der Kästchenlängen ist offensichtlich $2n$.
   - Anzahl 2er-Kästchen: $= \mathrm{Rang}(A)$ (damit $2n - \mathrm{Rang}(M) = 2n - \mathrm{Rang}(A)$ Kästchen eine Gesamtlänge von $2n$ haben)
   - Anzahl 1er-Kästchen: $= \underbrace{2n - \mathrm{Rang}(A)}_{= \text{\# Kästchen ges.}} - \underbrace{\mathrm{Rang}(A)}_{\text{\#2er-Kästchen}} = 2n - 2\mathrm{Rang}(A)$

   Also ist $\mathrm{JNF}(M)$ bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.
4. Wir bestimmen Basen für folgende Kerne ($\lambda = 0$ ist einziger Eigenwert und $M^2 = 0$, deswegen nur die zwei):
$$\mathrm{Kern}(M - 0\cdot I_4) = \mathrm{Kern}(M), \quad \mathrm{Kern}((M - 0\cdot I_4)^2) = \mathrm{Kern}(M^2).$$
Wir erhalten
$$\mathrm{Kern}(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Kern}(M^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Wir wählen die Basisvektoren von $\mathrm{Kern}(M^2) \setminus \mathrm{Kern}(M)$, also $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$.
$$S = (v_1, (A - 0\cdot I_4)v_1, v_2, (A - 0\cdot I_4)v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix} \right).$$

7.4 Frühjahr 2013

7.4.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimme $\widetilde{A} := \mathrm{JNF}(A)$.
2. Geben Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

7.4.2 Ansatz

1. Berechne $\mathrm{CP}_A(\lambda)$, dann $\mu_a(\lambda)$ und $\mu_g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und konstruiere so $\mathrm{JNF}(A)$.
2. Füge für das k große Kästchen zu λ Basisvektoren $b_1, \dots$ aus $\mathrm{Kern}((A-\lambda I_4)^k)$ (bzw. $(A-\lambda I_4)^l b_i$, $0 \le l \le (k-1)$) zur Basis hinzu.

7.4.3 Lösung

1. Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\mathrm{CP}_A(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1-X \end{pmatrix} = (X-1)^4.$$

Es ist also $\mathrm{Spec}(A) = \{1\}$. Die Anzahl an Jordankästchen für den Eigenwert $\lambda = 1$ ist

$$\mu_g(1) = \dim(\mathrm{Eig}(A,1)) = 4 - \mathrm{Rang}(A - I_4) = 4 - 2 = 2.$$

Um das größte Jordankästchen zu bestimmen berechnen wir

$$\dim \mathrm{Kern}(A-I_4) = \dim \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 2,$$

$$\dim \mathrm{Kern}((A-I_4)^2) = \dim \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 3,$$

$$\dim \mathrm{Kern}((A-I_4)^3) = \dim \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim(\mathbb{R}^4) = 4.$$

Das größte Jordankästchen hat also die Größe 3 und somit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Für das 3er-Kästchen nehmen wir einen Vektor aus $\mathrm{Kern}((A-I_4)^3) \setminus \mathrm{Kern}((A-I_4)^2)$, also z.B. e_1, und fügen e_1, $(A-I_4)e_1$ und $(A-I_4)^2 e_1$ der Basis hinzu.
Für das 1er-Kästchen nehmen wir einen Vektor aus $\mathrm{Kern}(A-I_4)$, der noch nicht in der Basis liegt, also z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.5 Herbst 2013

7.5.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimmem Sie $\widetilde{A} := \mathrm{JNF}(A)$.
2. Geben Sie $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ an, sodass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

7.5.2 Ansatz

1. Berechne $\mathrm{CP}_A(\lambda)$, dann $\mu_a(\lambda)$ und $\mu_g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und konstruiere so $\mathrm{JNF}(A)$.
2. Füge für das k große Kästchen zu λ Basisvektoren $b_1, \ldots$ aus $\mathrm{Kern}((A-\lambda I_4)^k)$ (bzw. $(A-\lambda I_4)^l b_i$, $0 \leq l \leq (k-1)$) zur Basis hinzu.

7.5.3 Lösung

1. Wir bestimmen

$$\mathrm{CP}_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^3 \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A) = \{-2,1\},\ \mu_a(-2) = \mu_g(-2) = 1,\ \mu_a(1) = 3,$$

anschließend noch

$$\mu_g(1) = \dim \mathrm{Kern}(A - I_4) = \dim \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1.$$

Es gibt zu jedem Eigenwert also genau ein Jordankästchen und wir erhalten

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

2. Das größte Jordankästchen zu $\lambda = 1$ ist 3 groß, also berechnen Basen folgender Kerne:

$$\mathrm{Kern}((A-I_4)^2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 10 & 0 \\ -9 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathrm{Kern}((A-I_4)^3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & -27 & 0 \\ 27 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Wir fügen für das 3er-Jordankästchen $b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(A-I_4)b_1$ und $(A-I_4)^2 b_1$ zur Basis hinzu. Für -2 wählen wir einen Vektor aus $\mathrm{Kern}(A+2I_4)$:

$$\mathrm{Kern}(A+2I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir erhalten somit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6 Frühjahr 2014

7.6.1 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Spur}(A) = 3$ und höchstens zwei Eigenwerten. Es sei $J = \mathrm{JNF}(A)$.

1. Wie viele Jordankästchen zum Eigenwert 0 besitzt J?
2. Wieso hat A einen Eigenwert $\neq 0$?
3. Welche Zahlen können als Dimension des Hauptraums zum von 0 verschiedenen Eigenwert auftreten?
4. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für J unter den gegebenen Einschränkungen.

7.6.2 Ansatz

1. Benutze die Dimensionsformel.
2. Betrachte die Spur von A und J.
3. Ermittle die Dimension des Hauptraums von 0 und beachte, dass die Summe der Haupträume 5 sein muss.
4. Gehe die verschiedenen Möglichkeiten für die Dimensionen der Haupträume (oder der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte) durch.

7.6.3 Lösung

1. Die Anzahl an Jordankästchen ist

$$\begin{aligned}\mu_g(0) &= \dim(\mathrm{Eig}(A,0)) = \dim \mathrm{Kern}(A - 0I_5) = \dim \mathrm{Kern}(A) = 5 - \dim \mathrm{Bild}(A) \\ &= 5 - \mathrm{Rang}(A) = 2.\end{aligned}$$

2. Es ist $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(J) = 3$. Da bei J (Dreiecksmatrix) die Spur aus den Eigenwerten besteht, muss es einen Eigenwert $\neq 0$ geben.
3. Der Hauptraum zum Eigenwert 0 ist mindestens zweidimensional (weil es zwei Jordankästchen gibt), also muss der Hauptraum zum verbleibenden Eigenwert λ zwischen 1 und 3 Dimensionen haben.
4. Wir gehen die verschiedenen Möglichkeiten für die algebraischen Vielfachheiten durch.
   (a) Fall 1: $\mu_a(1) = 4$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$J = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 3 \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad J = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 3 \end{array}\right)$$

   (b) Fall 2: $\mu_a(1) = 3$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline & & & \frac{3}{2} & 0 \\ & & & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline & & & \frac{3}{2} & \\ & & & & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

   (c) Fall 3: $\mu_a(1) = 2$. Es gibt drei Möglichkeiten:

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{array}\right), \quad J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

7.7 Herbst 2014

7.7.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimmen Sie $\widetilde{A} := \mathrm{JNF}(A)$.
2. Geben Sie $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ an, sodass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

7.7.2 Ansatz

1. Berechne $\mathrm{CP}_A(\lambda)$, dann $\mu_a(\lambda)$ und $\mu_g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und konstruiere so $\mathrm{JNF}(A)$.
2. Füge für das k große Kästchen zu λ Basisvektoren $b_1, \ldots$ aus $\mathrm{Kern}((A-\lambda I_4)^k)$ (bzw. $(A-\lambda I_4)^l b_i$, $0 \le l \le (k-1)$) zur Basis hinzu.

7.7.3 Lösung

1. Wir berechnen

$$\mathrm{CP}_A(\lambda) = (2-\lambda)^4 \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A) = \{2\},\ \mu_a(2) = 4$$

und anschließend

$$\mu_g(2) = \dim(\mathrm{Eig}(A,2)) = \dim(\mathrm{Kern}(A-2I_4)) = \dim\ker\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2.$$

Es gibt also 2 Jordankästchen. Um das größte Jordankästchen zu ermitteln berechnen wir

$$\dim(\mathrm{Kern}((A-I_4)^2)) = \dim \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim(\mathbb{R}^4) = 4,$$

also ist das größte Kästchen ein 2er-Kästchen und wir erhalten

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Wir wählen für die beiden 2er-Kästchen Basisvektoren aus $\mathrm{Kern}((A-2I_4)^2) = \mathbb{R}^4$. Da $(A-2I_4)e_1 = (A-2I_4)e_2$ und $(A-2I_4)e_3 = 0$ ist

$$C = \{e_1,\ (A-2I_4)e_1,\ e_4, (A-2I_4)e_4\}$$

eine mögliche Jordanbasis und wir erhalten

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.8 Frühjahr 2015

7.8.1 Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit höchstens zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\widetilde{A} = \mathrm{JNF}(A)$. Weiter gelte $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\mathrm{Spur}(A) = 6$.

1. Wie viele Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt $\widetilde{A}$?
2. Wieso hat A einen Eigenwert $\mu \neq 0$?
3. Welche Zahlen können als Dimension des Hauptraums zum Eigenwert μ auftreten?
4. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für $\widetilde{A}$ unter den gegebenen Einschränkungen.

7.8.2 Ansatz

1. Nutze die Dimensionsformel.
2. Betrachte die Spur von A und $\widetilde{A}$.
3. Ermittle die Möglichkeiten für $\dim(\mathrm{Hau}(A,0))$ und beachte, dass die Summe der Dimensionen der Haupträume 5 sein muss.
4. Gehe die möglichen Kombinationsmöglichkeiten für die Hauptraumdimensionen durch.

7.8.3 Lösung

1. Die Anzahl an Jordankästchen ist $\mu_g(0)$, also
$$\begin{aligned}\mu_g(0) &= \dim(\mathrm{Eig}(A,0)) = \dim(\mathrm{Kern}(A - 0I_5)) = \dim(\mathrm{Kern}(A)) = 5 - \dim(\mathrm{Bild}(A)) \\ &= 5 - \mathrm{Rang}(A) = 2.\end{aligned}$$
2. Es ist $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(\widetilde{A})$. Da auf der Diagonalen von $\widetilde{A}$ die Eigenwerte stehen muss es einen weiteren Eigenwert $\neq 0$ geben.
3. Die Matrix hat zwei Eigenwerte und die Dimension des Hauptraums zu 0 ist mindestens 2, also ist die Dimension des Hauptraums zu μ zwischen 1 und 3.
4. Wir gehen die verschiedenen Möglichkeiten für die Dimensionen der Haupträume durch:
   (a) Fall 1: $\dim(\mathrm{Hau}(A,0)) = 4$. Es gibt zwei Möglichkeiten:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & \\ \hline & & & & 6 \end{array}\right), \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 6 \end{array}\right)$$
   (b) Fall 2: $\dim(\mathrm{Hau}(A,0)) = 3$. Es gibt zwei Möglichkeiten:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ \hline & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 3 \end{array}\right), \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)$$
   (c) Fall 3: $\dim(\mathrm{Hau}(A,0)) = 2$. Es gibt drei Möglichkeiten:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 2 & 0 & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & & 2 \end{array}\right), \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{array}\right).$$

7.9 Herbst 2015

7.9.1 Aufgabe

Es sei Φ ein Endomorphismus eines fünfdimensionalen komplexen Vektorraums V mit

$$\mathrm{CP}_\Phi(X) = X^5 - 9X^3.$$

Ferner sei $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = 1$. Bestimmen Sie $\mathrm{JNF}(\Phi \circ \Phi)$.

7.9.2 Ansatz

Ermittle $\mathrm{JNF}(\Phi)$ und nutze $(\mathrm{JNF}(\Phi))^2$ als Abbildungsmatrix von Φ^2. Bestimme anschließend $\mathrm{JNF}(\Phi \circ \Phi) = \mathrm{JNF}((\mathrm{JNF}(\Phi))^2)$.

7.9.3 Lösung

Wir formen um:

$$\mathrm{CP}_\Phi(X) = X^5 - 9X^3 = X^3(X-3)(X+3) \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(\Phi) = \{0, 3, -3\},\ \mu_a(0) = 3,\ \mu_a(\pm 3) = \mu_g(\pm 3) = 1$$

Wir ermitteln die Anzahl an Jordankästchen zum Eigenwert 0:

$$\mu_g(0) = \dim(\mathrm{Eig}(\Phi, 0)) = \dim(\mathrm{Kern}(\Phi - 0I_5)) = \dim \mathrm{Kern}(\Phi) = 1$$

und somit

$$A := \mathrm{JNF}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & -3 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also hat Φ^2 die Abbildungsmatrix $A^2 = \begin{pmatrix} 9&0&0&0&0 \\ 0&9&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$. Wir ermitteln wie oben $\mathrm{CP}_{A^2}(X) = (X-9)^2X^3$ und anschließend $\mu_g(9) = \dim(\mathrm{Kern}(A^2 - 9I_5)) = 2$, $\mu_g(0) = \dim(\mathrm{Kern}(A^2)) = 2$. Somit ist

$$\mathrm{JNF}(\Phi \circ \Phi) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 9 & 0 & & & \\ 1 & 9 & & & \\ \hline & & 0 & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

8. Aufgabe 2

8.1 Frühjahr 2007

8.1.1 Aufgabe

Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ sei mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Bilinearform F durch $F(x,y) = x^\top Ay$ definiert.

1. Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von V. Zeigen Sie, dass zwar die Einschränkung von F auf die zweidimensionalen Unterräume

$$\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_3\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle$$

ein Skalarprodukt ist, aber F selbst nicht.

2. Sei $U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset V$. Zeigen Sie, dass durch $\widetilde{F}(x+U, y+U) := F(x,y)$ ein Skalarprodukt auf dem Faktorraum V/U definiert wird. Vergessen Sie nicht, die Wohldefiniertheit zu überprüfen!

8.1.2 Ansatz

1. Weise Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit von F auf den Unterräumen nach. Finde außerhalb der Unterräume ein Gegenbeispiel für eine der Eigenschaften.
2. Wähle x, x', y, y' derart, dass $x+U = x'+U$ und $y+U = y'+U$. Zeige, dass $\widetilde{F}(x'+U, y'+U) = \widetilde{F}(x+U, y+U)$. Betrachte dabei $\mathrm{Kern}(A)$.

8.1.3 Lösung

1. Wir zeigen Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit auf den Unterräumen:
   (a) Symmetrie: Klar, da A symmetrisch ist.
   (b) Bilinearität: Klar, da A bilinear ist.
   (c) positive Definitheit: Wir berechnen die Fundamentalmatrizen von F auf den Unterräumen:

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_{13} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad G_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

   wobei G_{ij} die Fundamentalmatrix zu F auf $\langle e_i, e_j\rangle$ ist. Diese Matrizen sind alle nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit.

   Also ist F ein Skalarprodukt auf den Unterräumen. Auf V ist F aber kein Skalarprodukt, denn für $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ ist $F(x,x) = 0$.

2. Zuerst überprüfen wir die Wohldefiniertheit. Dazu gelte $x+U = x'+U$, $y+U = y'+U$, also existieren $u_x, u_y \in U$ sodass $x' = u_x + x$ und $y' = u_y + y$. Da $U = \mathrm{Kern}(A)$ gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x'+U, y'+U) &= F(x', y') = (x')^\top Ay' = (x+u_x)^\top A(y+u_y) = x^\top Ay + u_x^\top Ay + x^\top Au_y + u_x^\top Au_y \\ &= x^\top Ay = \widetilde{F}(x+U, y+U). \end{aligned}$$

   Nun zeigen wir, dass $\widetilde{F}$ ein Skalarprodukt auf dem Faktorraum ist.
   (a) Symmetrie, Bilinearität: Folgen aus der von F.
   (b) positive Definitheit: Bezüglich der Basis $\{e_1+U, e_2+U\}$ hat $\widetilde{F}$ die Fundamentalmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, welche positiv definit ist (nach Teil 1).

8.2 Herbst 2007

8.2.1 Aufgabe

Auf $V = \mathbb{R}^3$ sei mit

$$F := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch die Formel $\langle v,w\rangle := v^\top F w$ eine symmetrische Bilinearform festgelegt.

1. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.
2. Normieren Sie e_1 bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ergänzen Sie den so entstandenen Vektor zu einer Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
3. Bestimmen Sie den bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthogonalen Komplementärraum zu $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\rangle \leq V$.

8.2.2 Ansatz

1. Weise die Eigenschaften nach, die eine symmetrische Bilinearform haben muss, um ein Skalarprodukt zu sein.
2. Normiere e_1 bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und bestimme mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens die übrigen Vektoren.
3. Für jeden Vektor v des Komplementärraums muss gelten:
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} F v = 0$.

8.2.3 Lösung

1. F legt eine symmetrische Bilinearform fest, also muss nur noch die positive Definitheit nachgewiesen werden, um zu zeigen, dass F ein Skalarprodukt auf V ist. F ist nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, also legt F ein Skalarprodukt auf V fest.
2. Es ist $\widetilde{e}_1 := \frac{1}{||e_1||}e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1$ der zu e_1 normierte Vektor. Mit dem Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt erhalten wir

   $$\begin{aligned} b_1 &= e_1 \\ b_2 &= e_2 - \tfrac{\langle b_1,e_2\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 = e_2 - \tfrac{1}{3}e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ b_3 &= e_3 - \tfrac{\langle b_1,e_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \tfrac{\langle b_2,e_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2 = e_3 \end{aligned}$$

   Zu normieren ist nur noch b_2. Es ist $||b_2|| = \sqrt{\langle b_2,b_2\rangle} = \sqrt{\frac{5}{3}}$, also ist $\widetilde{b}_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}b_2$ der zu b_2 gehörende normierte Vektor.
3. Für jeden Vektor v im Komplementärraum muss gelten:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} F v = 0, \text{ also } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} v = 0.$$

   Der Raum dieser Vektoren ist $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.

8.3 Herbst 2010

8.3.1 Aufgabe

Es sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. Durch
$$P(v,w) := \sum_{i=1}^{n} (b_i^\top v)(b_i^\top w)$$
wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert.
2. Wenn B eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes ist, dann ist P das Standardskalarprodukt.

8.3.2 Ansatz

1. Zeige, dass P symmetrisch, bilinear und positiv definit ist.
2. Betrachte die Fundamentalmatrix von P bezüglich B und zeige, dass es dieselbe Matrix ist wie die Fundamentalmatrix des Standardskalarprodukts bezüglich B.

8.3.3 Lösung

1. Wir zeigen die nötigen Eigenschaften:
   (a) Symmetrie: Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist P symmetrisch.
   (b) Bilinearität: Es reicht die Linearität im ersten Argument zu zeigen.
   Dafür seien $w \in \mathbb{R}^n$ fest, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} P(v_1 + \alpha v_2, w) &= \sum_{i=1}^{n} (b_i^\top (v_1 + \alpha v_2))(b_i^\top w) = \sum_{i=1}^{n} \Big((b_i^\top v_1) + (b_i^\top \alpha v_2) \Big) (b_i^\top w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big((b_i^\top v_1)(b_i^\top w) \Big) \Big(\alpha (b_i^\top v_2)(b_i^\top w) \Big) = P(v_1, w) + \alpha P(v_2, w) \end{aligned}$$
   (c) Positive Definitheit: Es ist
$$P(v,v) = \sum_{i=1}^{n} (b_i^\top v)^2.$$
   Für jedes $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ existiert nun ein $i' \in \{1, \dots, n\}$, sodass $b_{i'}^\top v \neq 0$, da v eine Linearkombination der Basisvektoren ist. Also ist $(b_{i'}^\top v)^2 > 0$ und somit $P(v,v) > 0$.
2. Die Fundamentalmatrix von P bezüglich B ist
$$P(b_k, b_l),\ 1 \leq k, l \leq n \quad \text{mit} \quad P(b_k, b_l) = \sum_{i=1}^{n} (b_i^\top b_k)(b_i^\top b_l).$$
   Da B Orthonormalbasis ist, sind alle Einträge $= 0$, außer für $i = k = l$, in welchem Fall der Summand $1 \cdot 1 = 1$ ist. Folglich ist die Matrix die Einheitsmatrix, was aber auch die Fundamentalmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich B ist.
   Also stimmen die beiden Skalarprodukte überein.

8.4 Frühjahr 2013

8.4.1 Aufgabe

Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.

1. Geben Sie die Definition der adjungierten Abbildung Φ^* von Φ an.
2. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Die adjungierte Abbildung Φ^* existiert, und es gilt $\Phi^* = -\Phi$.
   (b) $\forall x \in V : \langle \Phi(x), x \rangle = 0$

8.4.2 Ansatz

1. Gib die Definition an.
2. Zeige beide Richtungen einzeln.
   Berücksichtige bei der Rückrichtung, dass $\langle x+y, \Phi(x+y) \rangle = 0$.

8.4.3 Lösung

1. Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$, so heißt Φ^* die zu Φ adjungierte Abbildung, falls gilt:

$$\forall x, y \in V : \langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi^*(y) \rangle.$$

2. $\underline{\Rightarrow}$: $\langle \Phi(x), x \rangle = \langle x, \Phi^*(x) \rangle = -\langle x, \Phi(x) \rangle = -\langle \Phi(x), x \rangle$.
   Somit gilt die zweite Aussage.
3. $\underline{\Leftarrow}$: Zu zeigen ist: $\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, (-\Phi)(y) \rangle$. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, (-\Phi)(y) \rangle \\
\Leftrightarrow &\langle \Phi(x), y \rangle = -\langle x, \Phi(y) \rangle \\
\Leftrightarrow &\langle \Phi(x), y \rangle + \langle x, \Phi(y) \rangle = 0 \\
\Leftrightarrow &\underbrace{\langle \Phi(x), x \rangle}_{=0} + \langle \Phi(x), y \rangle + \langle x, \Phi(y) \rangle + \underbrace{\langle y, \Phi(y) \rangle}_{=0} = 0 \\
\Leftrightarrow &\langle x+y, \Phi(x+y) \rangle = 0
\end{aligned}$$

   Das ist gegeben, somit gilt die erste Aussage.

8.5 Herbst 2013

8.5.1 Aufgabe

Sei $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = A\}$. Dies ist ein reeller Vektorraum der Dimension 6. Wir definieren auf $V \times V$ die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \ni (A,B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB) \in \mathbb{R}.$$

1. Weisen Sie nach, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.
2. Es sei $U \leq V$ der aus Diagonalmatrizen bestehende Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

8.5.2 Ansatz

1. Weise Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit nach.
2. Wie sieht $U^\perp$ aus? Bestimme eine Basis von $U^\perp$ und bestimme daraus eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

8.5.3 Lösung

1. Wir weisen Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit nach:
   (a) Symmetrie: $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ ist bekannt.
   (b) Bilinearität: Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \forall A_1, A_2, B \in V: \quad & \langle A_1 + A_2, B\rangle = \mathrm{Spur}((A_1+A_2)B) = \mathrm{Spur}(A_1B + A_2B) \\ & = \mathrm{Spur}(A_1B) + \mathrm{Spur}(A_2B) = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle \\ \forall A, B \in V, c \in \mathbb{R}: \quad & \langle cA, B\rangle = \mathrm{Spur}(cAB) = c\mathrm{Spur}(AB) = c\langle A, B\rangle \end{aligned}$$

   (c) Positive Definitheit: Es sei $0 \neq A = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann ist

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Spur}(A^2) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & * & * \\ * & b^2+d^2+e^2 & * \\ * & * & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} > 0$$

2. $D := \mathrm{diag}(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Damit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{smallmatrix}\right) \perp D$ muss gelten:

$$0 = \langle D, A\rangle = \mathrm{Spur}(DA) = xa + yd + zf$$

   Damit diese Bedingung für alle D erfüllt ist, muss $a = d = f = 0$ gelten. Also ist

$$U^\perp = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & e \\ c & e & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid b, c, e \in \mathbb{R} \right\} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

   Das Skalarprodukt zweier Matrizen aus $U^\perp$ ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ b_1 & 0 & e_1 \\ c_1 & e_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_2 & c_2 \\ b_2 & 0 & e_2 \\ c_2 & e_2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2(b_1b_2 + c_1c_2 + e_1e_2),$$

   also bildet die Basis oben bereits eine Orthogonalbasis. Man erhält als Orthonormalbasis

$$\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

8.6 Frühjahr 2014

8.6.1 Aufgabe

Für $a,b \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix $F_{a,b} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben:

$$F_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Für welche $a,b \in \mathbb{R}$ ist $F_{a,b}$ die Fundamtentalmatrix eines Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$?
2. Sei nun $a = 3$ und $b = 1$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Skslarprodukts, das für $x,y \in \mathbb{R}^4$ durch

   $$\langle x,y\rangle = x^\top F_{3,1} y$$

   definiert ist.

8.6.2 Ansatz

1. Bestimme, für welche $a,b \in \mathbb{R}$ F die für ein Skalarprodukt nötigen Eigenschaften erfüllt.
2. Orthogonalisiere die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren und normiere sie.

8.6.3 Lösung

1. Jede Matrix $F \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$. Diese ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn F positiv definit und symmetrisch ist.
   (a) Symmetrisch: F ist genau dann symmetrisch, wenn $b = 1$.
   (b) Positive Definitheit: Wir verwenden das Hurwitz-Kriterium und bestimmen die Determinanten der Hauptminoren:
      i. $\det((1)) = 1 > 0$
      ii. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 > 0$
      iii. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = 2(a-1) > 0 \Leftrightarrow a > 1$
      iv. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 8(a-2) > 0 \Leftrightarrow a > 2$

      Also ist $F_{a,b}$ genau dann positiv definit, wenn $b = 1$ und $a > 2$.
2. Wir wählen die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und orthogonalisieren sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren:
   (a) $b_1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) $b_2 := e_2 - \frac{\langle b_1,e_2\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 = e_2$
   (c) $b_3 := e_3 - \frac{\langle b_1,e_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2,e_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2 = e_3 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (d) $b_4 := e_4 - \frac{\langle b_1,e_4\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2,e_4\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} - \frac{\langle b_3,e_4\rangle}{\langle b_3,b_3\rangle} b_3 = e_4 - b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Durch Normierung erhalten wir die Orthonormalbasis

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.7 Herbst 2014

8.7.1 Aufgabe

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$. Für $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ sei

$$s(p,q) = 3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2 \in \mathbb{R}$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $s : V \times V \ni (p,q) \mapsto s(p,q) \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist und geben Sie dessen Fundamentalmatrix bezüglich der Basis $C = (1, X, X^2)$ von V an.
2. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $p = X^2$ auf $U = \langle\{1, X\}\rangle \subset V$ sowie den Abstand von p zu U (je bezüglich s).
3. Geben Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich s an.

8.7.2 Ansatz

1. Weise Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit nach.
2. Berechne eine Orthonormalbasis bezüglich s auf dem Unterraum und berechne anschließend die Orthogonalprojektion und den Abstand.
3. Ergänze die Basis aus dem zweiten Teil um einen dritten Vektor mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

8.7.3 Lösung

1. Bilinearität und Symmetrie sieht man aufgrund der Struktur von s leicht ein, da $s(\lambda(p+r), q)$ sich in Teile zerteilen lässt, die man auch durch Zerteilung von $\lambda s(p,q) + \lambda s(r,q)$ erhält. Für die positive Definitheit bestimmen wir die Fundamentalmatrix

$$F_C(s) = \begin{pmatrix} s(1,1) & s(1,X) & s(1,X^2) \\ s(X,1) & s(X,X) & s(X,X^2) \\ s(X^2,1) & s(X^2,X) & s(X^2,X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir nutzen das Hurwitz-Kriterium und bestimmen deswegen die Determinanten der Hauptminoren:

(a) $\det((3)) = 3 > 0$

(b) $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$

(c) $\det(F_C(s)) = 4 > 0$

2. Es ist $F_{\{1,X\}}(s) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also ist $\{1, X\}$ bereits eine Orthogonalbasis. Um später weniger Aufwand betreiben zu müssen normieren wir die Basis noch und erhalten so $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}X\}$. Also ist die Orthogonalprojektion von $p \in V$ auf U:

$$\Pi_U(p) = s(p, \tfrac{1}{\sqrt{3}})\tfrac{1}{\sqrt{3}} + s(p, \tfrac{1}{\sqrt{2}}X)\tfrac{1}{\sqrt{2}}X$$

Wir erhalten so $\Pi_U(X^2) = \frac{2}{3}$.
Für den Abstand $d(p,U)$ gilt:

$$d(p,U)^2 = ||p - \Pi_U(p)||^2 = s(X^2 - \tfrac{2}{3}, X^2 - \tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3} \rightsquigarrow d(p,U) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

3. Wir ergänzen die Orthonormalbasis aus dem zweiten Teil um einen dritten Vektor:

$$v_3 = X^2 - \tfrac{\langle v_1, X^2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \tfrac{\langle v_2, X^2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = X^2 - \tfrac{2}{3}$$

Die ersten beiden Vektoren sind bereits normiert, durch Normierung des dritten Vektors erhalten wir die Orthonormalbasis

$$\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}X, \sqrt{\tfrac{3}{2}}X^2 - \sqrt{\tfrac{2}{3}} \right\}.$$

8.8 Frühjahr 2015

8.8.1 Aufgabe

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ setzt man

$$s(x,y) := \tfrac{1}{3}(x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) + \tfrac{1}{5}x_2y_2 + x_3y_3.$$

Die Vorschrift definiert eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass s positiv definit und damit ein Skalarprodukt ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =: U \subset V$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U bzgl. s.
4. Berechnen Sie den Abstand $d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, U \right)$ bezüglich s.

8.8.2 Ansatz

1. Zeige dass $\forall x \in \mathbb{R}^3 : s(x,x) > 0$.
2. Berechne eine Orghogonalbasis mit dem Gram-Schmidt-Verfahren und normiere sie.
3. Bestimme, wie $U^\perp$ aussieht, bestimme eine Basis, orthogonalisiere sie wie in 2. und normiere sie.
4. Beachte die Dimenśion von $U^\perp$, durch welche die Berechnung des Abstands sehr einfach wird.

8.8.3 Lösung

1. Es ist für $x \in \mathbb{R}^3$

   $$s(x,x) = \tfrac{1}{3}x_1^2 + \tfrac{4}{45}x_2^2 + (\tfrac{1}{3}x_2 + x_3)^2 \geq 0,$$

   außerdem ist $s(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist s positiv definit.
2. Wir bestimmen eine Orthogonalbasis mittels Gram-Schmidt-Verfahren:
   (a) $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) $b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle b_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Durch Normierung erhalten wir die Orthonormalbasis

   $$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Nach dem Dimensionssatz ist $U^\perp$ eindimensional. Für alle $x \in U^\perp$ muss gelten:

   $$s(b_1, x) = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}x_1 = 0$$
   $$s(b_2, x) = \tfrac{1}{3}\sqrt{5}x_3 + \tfrac{1}{5}\sqrt{5}x_2 = 0$$

   Wir erhalten somit $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Basisvektor von $U^\perp$. Durch Normierung erhalten wir

   $$U^\perp = \langle \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle.$$

4. Da $U^\perp$ eindimensional ist gilt

   $$d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, U \right) = |s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right)| = 10.$$

8.9 Herbst 2015

8.9.1 Aufgabe

Es sei $V = C^0([-1,1])$ der reelle Vektorraum der auf dem Intervall $[-1,1]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Weiter sei U der Untervektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $f : [-1,1] \ni x \mapsto x^3 + 1 \in \mathbb{R}$ auf U und den Abstand von f und U.

8.9.2 Ansatz

Bestimme eine Orthonormalbasis von U mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens, wodurch die Berechnung von $\Pi_U(f)$ vereinfacht wird. Nutze anschließend $\Pi_U(f)$, um $d(f,U)$ zu bestimmen.

8.9.3 Lösung

Es gilt

$$\Pi_U(x^3+1) = \Pi_U(x^3) + \Pi_U(\underbrace{1}_{\in U}) = \Pi_U(x^3) + 1.$$

Wir bestimmen nun eine Orthonormalbasis von U, damit wir $\Pi_U(x^3)$ bequem bestimmen können. Dazu orthogonalisieren wir die gegebene Basis von U mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (wobei $p_i : [-1,1] \ni x \mapsto x^i \in \mathbb{R}$):

1. $v_1 = p_0$
2. $v_2 = p_1 - \frac{\langle v_1,p_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 = p_1$
3. $v_3 = p_2 - \frac{\langle v_1,p_2\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle v_2,p_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle} v_2 =: *$

Wir normieren v_1 und v_2 und erhalten so $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{\frac{3}{2}}x$. Also ist

$$\Pi_U(x^3) = \underbrace{\langle x^3, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle x^3, \sqrt{\tfrac{3}{2}}x\rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x + \underbrace{\langle x^3, \tfrac{1}{||*||}*\rangle}_{=0} \frac{1}{||*||}* = \frac{3}{5}x$$

und somit

$$\Pi_U(f) = \frac{3}{5}x + 1.$$

Somit ist

$$d(f,U) = ||f - \Pi_U(f)|| = ||x^3 - \tfrac{3}{5}x|| = \frac{2}{35}\sqrt{14}.$$

9. Aufgabe 3

9.1 Frühjahr 2007

9.1.1 Aufgabe

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass es einen selbstadjungierten Endomorphismus $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ gibt, sodass

$$\Psi^3 = \Phi.$$

9.1.2 Ansatz

Φ ist selbstadjungiert, also existiert eine Orthonormalbasis aus Φ-Eigenvektoren. Betrachte die Abbildungsmatrix von Φ bzgl. dieser Basis.

9.1.3 Lösung

Φ ist selbstadjungiert, also existiert eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ aus Φ-Eigenvektoren. Bezüglich B hat Φ dann eine Abbildungsmatrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $n = \dim(V)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von Φ sind. Wir setzen $\mu_i = \sqrt[3]{\lambda_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ und definieren $\Psi : V \to V$ durch die lineare Fortsetzung der auf B definierten Bilder:

$$\Psi(b_i) = \mu_i b_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ψ hat also bzgl. B die Abbildungsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Da A und C Abbildungsmatrizen bzgl. derselben Orthonormalbasis B sind, folgt aus $C^3 = A$

$$\Psi^3 = \Phi.$$

Ψ ist selbstadjungiert, denn mit C existiert eine diagonale Abbildungsmatrix mit reellen Einträgen.

9.2 Herbst 2007

9.2.1 Aufgabe

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie:

1. $\Phi \circ \Psi$ ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.
2. Ist $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert, so besitzt jeder Eigenraum von Φ eine Basis, die aus Ψ-Eigenvektoren besteht.
3. Ist $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert, so ist jeder Eigenwert von $\Phi \circ \Psi$ ein Produkt eines Eigenwerts von Φ und eines Eigenwerts von Ψ.

9.2.2 Ansatz

1. Zeige, dass $\Phi \circ \Psi$ zu $\Psi \circ \Phi$ adjungiert ist. Damit lassen sich beide Richtungen zeigen.
2. Zeige, dass die Einschränkung von Ψ auf einen Eigenraum von Φ selbstadjungiert ist.
3. Zeige, dass es eine V-Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von Φ und Ψ gibt.

9.2.3 Lösung

1. Φ und Ψ sind selbstadjungiert, also gilt

$$\langle \Phi \circ \Psi(v), w \rangle = \langle \Phi(\Psi(v)), w \rangle = \langle \Psi(v), \Phi(w) \rangle = \langle v, \Psi(\Phi(v)) \rangle = \langle v, \Psi \circ \Phi(w) \rangle.$$

   Damit ist $\Psi \circ \Phi$ zu $\Phi \circ \Psi$ adjungiert. Da nach Definition $\Psi \circ \Phi$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn es mit seinem adjungierten übereinstimmt, folgt die Behauptung.
2. Wir zeigen, dass die Behauptung gilt, indem wir zeigen, dass die Einschränkung von Ψ auf einen Φ-Eigenraum selbstadjungiert ist (dann existiert die gesuchte Basis nach dem Spektralsatz). Das ist genau dann der Fall, wenn jeder Eigenraum Ψ-invariant ist. Sei also $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ und $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$. Es ist

$$\Phi(\Psi(v)) \overset{1.}{=} \Psi(\Phi(v)) = \Psi(\lambda v) = \lambda \Psi(v),$$

   also ist auch $\Psi(v) \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ und somit die Behauptung gezeigt.
3. Nach dem zweiten Teil gibt es für die Eigenräume von Φ jeweils eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von Φ und Ψ, nach dem Spektralsatz also eine Basis von V aus gemeinsamen Eigenvektoren von Φ und Ψ. Für einen Eigenvektor von $\Phi \circ \Psi$ gibt es also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\Phi \circ \Psi(v) = \Phi(\mu v) = \lambda \mu v.$$

   Somit ist jeder Eigenwert von $\Phi \circ \Psi$ ein Produkt aus Eigenwerten von Φ und Ψ.

9.3 Herbst 2010

9.3.1 Aufgabe

Hinweis:
Diese Aufgabe stimmt mit Aufgabe 4 aus dem Herbst 2015 überein, weswegen diese im Folgenden nicht auftaucht.

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie: Es gibt eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B^2 = A$.

9.3.2 Ansatz

Verwende, dass A symmetrisch und somit orthogonal diagonalisierbar ist. Konstruiere B aus der Diagonalmatrix und weise schließlich nach, dass B symmetrisch ist ($B^\top = B$).

9.3.3 Lösung

A ist symmmetrisch, also nach dem Spektralsatz orthogonal diagonalisierbar. Also existiert $T \in O(3)$ derart, dass

$$T^\top A T = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{:=D}.$$

Mit dem Hurwitz-Kriterium sehen wir, dass A positiv definit ist, also sind die drei Eigenwerte positiv und somit $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}$. Sei nun

$$S := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $A = TT^\top ATT^\top = TDT^\top = TS^2T^\top = \underbrace{TST^\top}_{:=B} TST^\top$ und somit $B^2 = A$.

B ist symmetrisch, denn $B^\top = (TST^\top)^\top = TS^\top T^\top = TST^\top = B$.

9.4 Frühjahr 2013

9.4.1 Aufgabe

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \ni (p,q) \mapsto p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) \in \mathbb{R}$$
ein Skalarprodukt ist.
2. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $p := X^2 + 1$ auf $U := \langle \{1, X\} \rangle$ sowie den Abstand von p zu U.

9.4.2 Ansatz

1. Weise Symmetrie, Bilinearität und positive Definitheit nach.
2. Orthogonalisiere die Standardbasis von V mittels Gram-Schmidt und normiere sie anschließend.
3. Berechne die orthogonale Projektion (was sehr einfach ist, da ja bereits eine Orthonormalbasis bestimmt wurde) und anschließend den Abstand (was sehr einfach ist, da die orthogonale Projektion bereits berechnet wurde).

9.4.3 Lösung

Achtung: Das hier ist meine eigene Lösung.
Das liegt daran, dass die Musterlösung meiner Meinung nach sehr unnötig kompliziert ist.

1. Symmetrie und Bilinearität folgen direkt aus der Kommutativität der Multiplikation und der Distributivität über $\mathbb{R}$. Für die positive Definitheit berechnen wir $\langle p, p \rangle$ mit $p = aX^2 + bX + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$:
$$\langle p, p \rangle = (a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c)^2 + (2a \cdot 0 + b)^2 + (2a)^2 = c^2 + b^2 + 4a^2 > 0.$$
2. Wir nehmen die Standardbasis $1, X, X^2$ und berechnen die Fundamentalmatrix:
$$F = \begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,X \rangle & \langle 1,X^2 \rangle \\ \langle X,1 \rangle & \langle X,X \rangle & \langle X,X^2 \rangle \\ \langle X^2,1 \rangle & \langle X^2,X \rangle & \langle X^2,X^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Wir sehen, dass die Basis bereits orthogonal ist. Durch Normierung erhalten wir die Orthonormalbasis $\{1, X, \frac{1}{2}X^2\}$.
3. Die Basis $\{1, X\}$ ist nach 2. bereits Orthonormalbasis von U, also ist
$$\Pi_U(X^2+1) = \langle X^2+1, 1 \rangle \cdot 1 + \langle X^2+1, X \rangle \cdot X = 1,$$
und weiter
$$d(X^2+1, U) = ||\Pi_U(X^2+1) - X^2 + 1|| = || - X^2|| = \sqrt{\langle -X^2, -X^2 \rangle} = \sqrt{4} = 2.$$

9.5 Herbst 2013

9.5.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -\sqrt{14} \\ 7 & 1 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -\sqrt{14} & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Zeigen Sie, dass die lineare Abblidung $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni v \mapsto Av \in \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums in $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Bestimmen sie die Isometrienormalform B von A.
3. Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, sodass $B = S^{-1}AS$ gilt.

9.5.2 Ansatz

1. Zeige, dass $A^\top A = I_n$.
2. Betrachte Determinante und Spur von A, denn diese sind ähnlichkeitsinvariant.
3. Bestimme Orthonormalbasen für die Eigenräume.

9.5.3 Lösung

1. Es ist $A^\top A = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = I_3 \rightsquigarrow A \in (3)$, also ist Φ eine Isometrie.
2. Es ist $\det(A) = 1$ und $\operatorname{Spur}(A) = -\frac{1}{2}$. Determinante und Spur sind ähnlichkeitsinvariant, also hat die Isometrie-Normalform B von A die Form

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

   mit $1 + 2b = -\frac{1}{2}$, $b^2 + c^2 = 1$ und $c > 0$. Somit erhalten wir $b = -\frac{3}{4}$ und $c = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
3. Wir bestimmen einen normierten Eigenvektor zu $1 =: \lambda \in \operatorname{Spec}(A)$:

   $$v_1 \in \operatorname{Kern}(8A - 8I_4) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -7 & 7 & -\sqrt{14} \\ 7 & -7 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -\sqrt{14} & -14 \end{pmatrix}, \text{ also z.B. } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Wir ergänzen v_1 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$:

   $$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   und erhalten so die Matrix

   $$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.6 Frühjahr 2014

9.6.1 Aufgabe

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^3$, für die $\det(\Phi) = -1$ gilt. Weiter gelten

$$\Phi\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \Phi\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right).$$

1. Geben Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ an, sodass die Abbildungsmatrix $D_{BB}(\Phi)$ in Isometrienormalform ist.
2. Geben Sie $D_{BB}(\Phi)$ an.

9.6.2 Ansatz

1. Finde ein $\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi)$ und einen zugehörigen Eigenvektor v_1. Zerlege so den Raum in $\langle v_1\rangle$ und $\langle v_1\rangle\top$. Betrachte die Determinante von $\Phi_{\langle v_1\rangle^\top}$ und konstruiere so die gewünschte Basis.
2. Nutze die angegebenen Bilder, um die Bilder der Basisvektoren für $D_{BB}(\Phi)$ zu konstruieren.

9.6.3 Lösung

1. Offensichtlich ist $v_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ Eigenvektor zu $-1 \in \operatorname{Spec}(\Phi)$, also ist $\langle v_1\rangle$ Φ-invariant und sein orthogonales Komplement auch. Da $\det(\Phi) = -1$ muss $\Phi|_{\langle v_1\rangle^\top}$ Determinante 1 haben, also eine Drehung sein. Es reicht also, v_1 zu einer orthogonalen Basis zu ergänzen und diese zu normieren, um eine Basis B zu erhalten, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

$$v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right),\ v_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right),\ v_3 = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$$

Durch Normieren erhält man

$$b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}v_1,\ b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_2,\ b_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}v_3$$

2. Wir berechnen $\Phi\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$:

$$\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) + \Phi\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \Phi\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

Da die drei Baisvektoren orthogonal und normiert sind, gilt

$$\Phi(b_2) = b_2^\top \Phi(b_2) b_2 + b_3^\top \Phi(b_2) b_3 = \tfrac{1}{2} b_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2} b_3$$

Wir erhalten also

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & a & -b\\ 0 & b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

9.7 Herbst 2014

9.7.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}-2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist.
2. Bestimmen Sie die Isometrienormalform $\widetilde{A}$ von A.
3. Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $S^\top AS = \widetilde{A}$.

9.7.2 Ansatz

1. Überprüfe, ob $A^\top A = I_3$.
2. Bestimme $\mathrm{CP}_A(X)$, daraus $\mathrm{Spec}(A)$ und daraus die Isometrienormalform.
3. Bestimme einen normierten Eigenvektor b_1 zum Eigenwert -1, konstruiere anschließend zu seinem orthogonalen Komplementärraum eine Orthonormalbasis $\{b_2, b_3\}$. Überprüfe die Reihenfolge von b_2 und b_3. Dann kann die gesuchte Matrix angegeben werden.

9.7.3 Lösung

1. f ist eine Isometrie genau dann, wenn A orthogonal ist, also wenn $A^\top A = I_3$, was der Fall ist.
2. Wir bestimmen zuerst $CP_A(X) = -(X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$, also

   $$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\},$$

   also ist die Isometrienormalform $\widetilde{A}$ von A

   $$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Wir berechnen zunächst einen normierten Eigenvektor b_1 zu $-1 \in \mathrm{Spec}(A)$. Den erhalten wir aus

   $$(A + I_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Wir wählen noch b_2, b_3 aus dem orthogonalen Komplement von $\langle b_1\rangle$, also z.B. $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = Ab_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Durch Gram-Schmidt erhält man als Orthogonalbasis von $\langle b_1\rangle^\perp = \langle\{b_2, b_3\}\rangle$

   $$\widetilde{b}_2 = b_2, \quad \widetilde{b}_3 = Ab_2 - \langle Ab_2, b_2\rangle b_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\text{normieren}}{\rightsquigarrow} b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Wir überprüfen, ob die Reihenfolge der Basisvektoren in (b_2, b_3) richtig ist, indem wir überprüfen, ob $Ab_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3$, was der Fall ist. Also ist die gesuchte Matrix

   $$S = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

9.8 Frühjahr 2015

9.8.1 Aufgabe

Gegeben sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2 & -2 \\ -2 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ 2 & -\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Zeigen Sie, dass A eine orthogonale Matrix ist.
2. Bestimmen Sie die Isometrienormalform $\widetilde{A}$ von A.
3. Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $S^\top A S = \widetilde{A}$.

9.8.2 Ansatz

1. Zeige, dass $A^\top A = I_3$.
2. Bestimme zunächst $\mathrm{CP}_A(X)$ und daraus $\mathrm{Spec}(A)$. Leite daraus $\widetilde{A}$ ab.
3. Bestimme einen normierten Eigenvektor b_1 zum Eigenwert -1, konstruiere anschließend zu seinem orthogonalen Komplementärraum eine Orthonormalbasis $\{b_2, b_3\}$. Überprüfe die Reihenfolge von b_2 und b_3. Dann kann die gesuchte Matrix angegeben werden.

9.8.3 Lösung

1. A ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn $A^\top A = I_3$, was der Fall ist.
2. Wir bestimmen zunächst

   $$\mathrm{CP}_A(X) = -(X+1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A) = \{-1, \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

   Also ist die Isometrienormalform von A:

   $$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Wir berechnen zunächst einen normierten Eigenvektor zu $-1 \in \mathrm{Spec}(A)$. Den erhalten wir aus

   $$(A + I_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Wir wählen noch b_2, b_3 aus dem orthogonalen Komplement von $\langle b_1 \rangle$, also z.B. $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = Ab_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Durch Gram-Schmidt erhält man als Orthogonalbasis von $\langle b_1 \rangle^\perp = \langle \{b_2, b_3\} \rangle$

   $$\widetilde{b}_2 = b_2, \quad \widetilde{b}_3 = Ab_2 - \langle Ab_2, b_2 \rangle b_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{normieren}}{\rightsquigarrow} b_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Wir überprüfen, ob die Reihenfolge der Basisvektoren in (b_2, b_3) richtig ist, indem wir überprüfen, ob $Ab_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} b_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} b_3$, was der Fall ist. Also ist die gesuchte Matrix

   $$S = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

9.9 Herbst 2015

9.9.1 Aufgabe

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $||\cdot||$. Weiter sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\Phi(U^\perp) = \Phi(U)^\perp$ für alle Untervektorräume $U \leq V$. Zeigen Sie:

1. $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = 0$
2. $\forall x, y \in V : ||x|| = ||y|| \Rightarrow ||\Phi(x)|| = ||\Phi(y)||$
3. $\exists\, \Psi \in \mathrm{Iso}(V), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \Phi = \lambda \Psi$.

9.9.2 Ansatz

1. Beachte, dass $\langle x, y \rangle = 0$ und damit $y \in \langle x \rangle^\perp$.
2. Forme die Bedingung $||\Phi(x)|| = ||\Phi(y)||$ um. Zeige unter Verwendung von Teil 1 und $||x|| = ||y||$, dass $\langle x - y, x + y \rangle = 0$ und verwende das in der umgeformten Bedingung.
3. Zeige zunächst, dass $\lambda > 0$ existiert, sodass $||\Phi(x)|| = \lambda ||x||$. Setze anschließend $\Psi := \lambda^{-1}\Phi$ und zeige, dass Ψ Isometrie ist.

9.9.3 Lösung

1. Seien $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$, also $y \in \langle x \rangle^\perp$, nach Vorraussetzung also $\Phi(y) \in \langle \Phi(x) \rangle^\perp$ und somit $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = 0$.
2. Seien $x, y \in V$ mit $||x|| = ||y||$. Es ist

$$\begin{aligned} & ||\Phi(x)|| = ||\Phi(y)|| \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = ||\Phi(x)||^2 - ||\Phi(y)||^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle - \langle \Phi(y), \Phi(y) \rangle \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle - \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle + \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle - \langle \Phi(y), \Phi(y) \rangle \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = \langle \Phi(x+y), \Phi(x-y) \rangle \end{aligned}$$

   Nun ist

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = ||x||^2 - ||y||^2 = 0,$$

   also gilt mit dem ersten Teil die Behauptung.
3. Wir zeigen zunächst, dass ein $\lambda > 0$ existiert, sodass $||\Phi(x)|| = \lambda ||x||$ für alle $x \in V$:
   Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ existieren λ_x, λ_y mit $||\Phi(x)|| = \lambda_x ||x||$ und $||\Phi(y)|| = \lambda_y ||y||$. $\lambda_x > 0$ und $\lambda_y > 0$, denn Φ ist injektiv, was man so zeigt:

$$\Phi(V) = \Phi(\langle 0 \rangle^\perp) = \Phi(\langle 0 \rangle)^\perp = \langle 0 \rangle^\perp = V,$$

   also ist Φ surjektiv und da $\dim(V) < \infty$ auch injektiv.
   Mit dem zweiten Teil gilt

$$\left|\left| \tfrac{1}{||x||} x \right|\right| = 1 = \left|\left| \tfrac{1}{||y||} y \right|\right| \rightsquigarrow \left|\left| \Phi\left(\tfrac{1}{||x||} x \right) \right|\right| = \left|\left| \Phi\left(\tfrac{1}{||y||} y \right) \right|\right|$$

   Daraus folgt, dass $\lambda := \lambda_x = \frac{||\Phi(x)||}{||x||} = \frac{||\Phi(y)||}{||y||} = \lambda_y$.
   Sei nun $\Psi := \lambda^{-1}\Phi$. Ψ ist Isometrie, denn

$$||\Psi(x)|| = \lambda^{-1} ||\Phi(x)|| = \lambda^{-1} \lambda ||x|| = ||x||.$$

10. Aufgabe 4

10.1 Frühjahr 2007

10.1.1 Aufgabe

Im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ sei bezüglich der Standardbasis eine Isometrie gegeben durch ihre Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Isometrienormalform $\widetilde{A}$ von A.
2. Bestimme $S \in O(4)$ derart, dass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

10.1.2 Ansatz

1. Betrachte $B := A + A^\top$, berechne $\mathrm{CP}_B(X)$ und bestimme daraus die Normalform.
2. Bestimme Orthonormalbasen der Eigenräume von B. Überprüfe noch die Reihenfolge der letzten beiden Vektoren und gebe anschließend $S = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ an.

10.1.3 Lösung

1. Wir berechnen

$$\mathrm{CP}_{A+A^\top}(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2 \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A+A^\top) = \{1,2\}.$$

Wir erhalten also

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos(\omega_1) & -\sin(\omega_1) \\ & & \sin(\omega_1) & \cos(\omega_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Wir berechnen

$$\mathrm{Eig}(A+A^\top,2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle =: \langle c_1, c_2 \rangle, \quad \mathrm{Eig}(A+A^\top,1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle =: \langle c_3, c_4 \rangle,$$

also sind $\{\frac{1}{\sqrt{2}}c_1, \frac{1}{\sqrt{2}}c_2\} =: \{b_1, b_2\}$ und $\{\frac{1}{\sqrt{2}}c_3, \frac{1}{\sqrt{2}}c_4\} =: \{b_3, b_4\}$ Orthonormalbasen von des jeweiligen Eigenraums.
Es ist $Ab_3 = \frac{1}{2}b_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_4$, also passt die Reihenfolge von b_3 und b_4 und wir erhalten

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.2 Herbst 2007

10.2.1 Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass für

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Bestimmen Sie die Isometrienormalform B von A.
3. Bestimmen Sie $S \in O(3)$ derart, dass $B = S^{-1}AS$.

10.2.2 Ansatz

1. Zeige, dass $A^\top A = I_3$.
2. Bestimme, welche Struktur B haben muss und beachte, dass die Spur ähnlichkeitsinvariant ist.
3. Bestimme einen normierten Eigenvektor b_1 zu $1 \in \operatorname{Spec}(A)$ und zwei weitere normierte Vektoren aus $\langle b_1\rangle^\perp$, sodass diese eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Konstruiere aus ihnen S.

10.2.3 Lösung

1. Φ ist eine Isometrie genau dann wenn $A^\top A = I_3$, was der Fall ist.
2. Es ist $\operatorname{Spur}(A) = 1+\sqrt{3}$, also muss das auch die Spur von B sein. B sieht folgendermaßen aus:

$$B = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & b & -c \\ & c & b \end{pmatrix} \text{ mit } 2b \pm 1 = 1+\sqrt{3},\ b^2+c^2 = 1.$$

Stünde -1 auf der Diagonalen, so müsste $b > 1$ sein, was wegen $b^2+c^2 = 1$ nicht geht, also ist mit $(\frac{\sqrt{3}}{2}) + c^2 = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Wir bestimmen einen normierten Eigenvektor zu $1 \in \operatorname{Spec}(\Phi)$:

$$(A - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dem orthogonalen Komplementärraum wählen wir

$$b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b}_3 := Ab_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_3 := 2(Ab_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $Ab_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_3$, also passt die Reihenfolge der Basisvektoren und es ist

$$S = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.3 Herbst 2010

10.3.1 Aufgabe

Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Spiegelung an der von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Ebene durch den Ursprung.

1. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
2. Bestimmen Sie $\Phi\left(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

10.3.2 Ansatz

1. Bestimme einen Normalenvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$ und verwende diesen in $\Phi(x) = x - 2\frac{\langle x,n\rangle}{\langle n,n\rangle}n$. Bestimme so das Bild eines beliebigen $x \in \mathbb{R}^3$, woraus man die Abbildungsmatrix gewinnt.
2. Es ist $\Phi(v) = D_{BB}(\Phi)v$ mit der Abbildungsmatrix aus dem ersten Teil.

10.3.3 Lösung

1. Sei $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$ ein Normalenvektor der Ebene. Dann ist die Spiegelung beschrieben durch

   $$\Phi(x) = x - 2\tfrac{\langle x,n\rangle}{\langle n,n\rangle}n.$$

   Zur Bestimmung von n löst man das LGS $a^\top n = b^\top n = 0$. Eine mögliche Lösung ist $n = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$. Durch Einsetzen von $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ in $\Phi(x)$ erhält man

   $$\Phi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \tfrac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix} 6x_1-2x_2+3x_3 \\ -2x_1+3x_2+6x_3 \\ 3x_1+6x_2-2x_3 \end{smallmatrix}\right),$$

   also ist die Abbildungsmatrix von Φ (bzgl. Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$):

   $$D_{BB}\Phi = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Es ist

   $$\Phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = D_{BB}(\Phi)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.4 Frühjahr 2013

10.4.1 Aufgabe

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^3$ mit $\det(\Phi) = -1$.

1. Zeigen Sie, dass $-1 \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ und dass für jeden Eigenvektor v zum Eigenwert -1 gilt:
$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : v \perp (\Phi(x) + x).$$
2. Für Φ gelte zusätzlich
$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+12\\ 6\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$
Bestimme die Isometrienormalform von Φ.

10.4.2 Ansatz

1. Weise $-1 \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ über die Struktur der Isometrienormalform und der Spur von Φ, die ähnlichkeitsinvariant ist, nach. Zeige, dass $\langle v, \Phi(x) + x\rangle = 0$ gelten muss.
2. Bestimme den Eigenraum zu -1 darüber, dass die beiden angegebenen Vektoren offensichtlich im orthogonalen Komplement liegen. Bestimme anschließend $\angle(y, \Phi(y))$ und darüber die Isometrienormalform.

10.4.3 Lösung

1. Es ist $-1 \in \mathrm{Spec}(\Phi)$, denn wegen $\det(\Phi) = -1$ hat auch die Isometrienormalform von Φ Determinante -1 und damit die Gestalt $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \cos(\omega) & -\sin(\omega)\\ & \sin(\omega) & \cos(\omega)\end{pmatrix}$.
Sei v Eigenvektor zu -1, also $\Phi(v) = -v$. Es ist zu zeigen
$$\begin{aligned} & \langle v, \Phi(x) + x\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \langle v, x\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = 0 \\ \overset{\Phi \text{ Iso}}{\Leftrightarrow}\ & \langle \Phi(v), \Phi(x)\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\langle v, \Phi(x)\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = 0. \end{aligned}$$
Also gilt die Behauptung.
2. Offensichtlich liegen $y_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $y_2 := \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ nicht im Eigenraum zu -1 gilt für alle $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, -1)$:
$$\langle v, \Phi(y_1) + y_1\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle v, \Phi(y_2) + y_2\rangle = 0.$$
Als Lösung des LGS erhalten wir
$$v \in \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle.$$
Wir bestimen nun noch $\omega = \angle(y, \Phi(y))$ für $y \in \langle v\rangle^{\perp}$:
$$y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$
Also ist
$$\cos\angle(y, \Phi(y)) = \frac{\langle y, \Phi(y)\rangle}{||y||\ ||\Phi(y)||} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Also ist die Isometrienormalform von A:
$$\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

10.5 Herbst 2013

10.5.1 Aufgabe

Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$. Für diese gelte $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Zeigen Sie:

1. Jeder Φ-Eigenraum ist Ψ-invariant.
2. Wenn Φ und Ψ selbstadjungiert sind, dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von Φ und Ψ besteht.

10.5.2 Ansatz

1. Zeige, dass für alle $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ auch $\Psi(v) \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$.
2. Zeige, dass jeder Φ-Eigenraum eine Orthonormalbasis aus Ψ-Eigenvektoren besitzt und die Summe dieser Basen eine Basis von V ist.

10.5.3 Lösung

1. Sei $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$. Für alle $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ gilt dann

$$\Phi(\Psi(v)) = \Psi(\Phi(v)) = \Psi(\lambda v) = \lambda \Psi(v),$$

also ist auch $\Psi(v) \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ und damit $\mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ Ψ-invariant.

2. Da Φ selbstadjungiert ist lässt sich V als orthogonale Summe von Φ-Eigenräumen darstellen, welche nach dem ersten Teil Ψ-invariant sind.
Es ist $\Psi|_{\mathrm{Eig}(\Phi,\lambda)}$ selbstadjungiert, also besitzt jeder Eigenraum eine Orthonormalbasis aus Ψ-Eigenvektoren, welche auch Eigenvektoren von Φ sind. Die Summe dieser Orthonormalbasen ist eine Orthonormalbasis von V.

10.6 Frühjahr 2014

10.6.1 Aufgabe

Seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $w_1, w_2 \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle w_1, w_2 \rangle \neq 0$. Weiter sei der Endomorphismus Φ gegeben:

$$\Phi : V \ni v \mapsto \langle v, w_1 \rangle w_2 \in V$$

1. Geben Sie $\mathrm{Bild}(\Phi)$ und $\mathrm{Rang}(\Phi)$ an.
2. Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ sowie die zugehörigen Eigenräume.
3. Bestimmen Sie die zu Φ adjungierte Abbildung Φ^*.
4. Zeigen Sie: Φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ w_1 und w_2 sind linear abhängig.

10.6.2 Ansatz

1. Zeige, dass $\mathrm{Bild}(\Phi)$ nicht leer ist und von w_2 erzeugt wird. Beachte, dass $\mathrm{Rang}(\Phi) = \dim(\mathrm{Bild}(\Phi))$.
2. Berechne $\mathrm{Kern}(\Phi)$, woraus man $0 \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ erhält. Bestimme die übrigen Eigenwerte aus der Abbildungsvorschrift.
3. Forme $\langle v_1, \Phi(v_2) \rangle$ um und konstruiere daraus eine Abbildung Φ^*.
4. Zeige die beiden Richtungen einzeln: Verwende von links nach rechts $\Phi \overset{!}{=} \Phi^*$ aus Teil 3 und für die Rückrichtung $w_1 = \lambda w_2$ in $\langle v, w_1 \rangle w_2$.

10.6.3 Lösung

1. Wir können ablesen, dass $\mathrm{Bild}(\Phi)$ in $\langle w_2 \rangle$ enthalten ist und $0 \neq \langle w_2, w_1 \rangle \in \mathrm{Bild}(\Phi)$, also $\mathrm{Bild}(\Phi) = \langle w_2 \rangle$ und $\mathrm{Rang}(\Phi) = \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)) = 1$.
2. Es ist $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(\Phi) = n-1$, also ist $0 \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ $(n-1)$-facher Eigenwert. Außerdem ist $\Phi(w_2) = \langle w_2, w_1 \rangle w_2$, also ist $\langle w_1, w_2 \rangle$ einfacher Eigenwert von Φ. Wir erhalten $\mathrm{Eig}(\Phi, 0) = \langle w_1 \rangle^{\perp}$, $\mathrm{Eig}(\Phi, \langle w_1, w_2 \rangle) = \langle w_2 \rangle$.
3. Für $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\langle v_1, \Phi(v_2) \rangle = \langle v_1, \langle v_2, w_1 \rangle w_2 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle \langle v_1, w_2 \rangle = \langle v_2, w_1 \langle v_1, w_2 \rangle \rangle = \langle \langle v_1, w_2 \rangle w_1, v_2 \rangle.$$

   Also ist $\Phi^* : V \ni v \mapsto \langle v, w_2 \rangle w_1 \in V$ die zu Φ adjungierte Abbildung.
4. $\Rightarrow$: Φ ist selbstadjungiert genau dann, wenn $\langle v, w_1 \rangle w_2 = \langle v, w_2 \rangle w_1$, also muss dann $w_1 = \frac{\langle w_1, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_2 \rangle} w_2$ sein, also sind w_1 und w_2 linear abhängig.
   $\Leftarrow$: Ist $w_1 = \lambda w_2$, dann ist $\langle v, w_1 \rangle w_2 = \lambda \langle v, w_2 \rangle w_2 = \langle v, w_2 \rangle w_1$ und somit ist Φ selbstadjungiert.

10.7 Herbst 2014

10.7.1 Aufgabe

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$, und $f \in \operatorname{End}(V)$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in V : \langle f(x), x\rangle = 0.$$

Zeigen Sie:

1. $\forall x, y \in V : \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Ist $U \leq V$ f-invariant, so ist auch $U^\perp$ f-invariant.
3. Besitzt f einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist f nicht invertierbar.
4. Der Endomorphismus $f^2 : V \ni x \mapsto f(f(x)) \in V$ ist selbstadjungiert.
5. Es gibt eine Orthonormalbasis B von V und reelle Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n \leq 0$, sodass die Abbildungsmatrix von f^2 bezüglich B gegeben ist durch

$$D_{BB}(f^2) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

10.7.2 Ansatz

1. Zeige durch Umformen, dass $\langle f(y), x\rangle + \langle f(x), y\rangle = 0$.
2. Zeige, dass für $y \in U^\perp, u \in U$ gilt: $\langle u, f(y)\rangle = 0$.
3. Zeige, dass f nicht injektiv und somit nicht invertierbar ist.
4. Zeige $\langle f^2(x), y\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle$ durch Umformen.
5. Offensichtlich existiert eine V-ONB aus f^2-Eigenvektoren, da f^2 selbstadjungiert ist. Zeige, dass die zugehörigen Eigenwerte ≤ 0 sind.

10.7.3 Lösung

1. Sei $x, y \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \langle f(y), x\rangle = \langle f(x), y\rangle \\ \Leftrightarrow\quad & \langle f(y), x\rangle + \langle f(x), y\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \langle f(y), x\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \langle f(x+y), x+y\rangle = 0, \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung.

2. Sei $y \in U^\perp$, dann gilt für alle $u \in U$, dass $0 = \langle f(u), y\rangle = -\langle u, f(y)\rangle$, also $f(y) \in U^\perp$.
3. Sei $0 \neq x \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$. Dann

$$0 = \langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle,$$

also muss $\lambda = 0$ sein und damit $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Eig}(f, 0) \neq \{0\}$, also ist f nicht injektiv und damit insbesondere nicht invertierbar.

4. Seien $x, y \in V$. Dann

$$\langle f^2(x), y\rangle = \langle f(f(x)), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = (-1)^2\langle x, f(f(y))\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle$$

und somit ist f selbstadjungiert.

5. f^2 ist selbadjungiert, also existiert eine ONB $B = (b_1, \ldots, b_n)$ aus f^2-Eigenvektoren. Für die zugehörigen Eigenwerte gilt

$$\mu_i = \langle \mu_i b_i, b_i\rangle = \langle f^2(b_i), b_i\rangle - \langle f(b_i), f(b_i)\rangle \leq 0.$$

10.8 Frühjahr 2015

10.8.1 Aufgabe

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Weiter seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.

1. Geben Sie die Definition von “selbstadjungiert” an.
2. Zeigen Sie, dass sowohl $\Phi + \Psi$ als auch $\Phi - \Psi$ selbstadjungiert sind.
3. Zeigen Sie: $\Phi \circ \Psi$ ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

10.8.2 Ansatz

1. Gib die Definition an.
2. Zeige, durch Umformungen, dass $\langle(\Phi + a\Psi)(v), w\rangle = \langle v, (\Phi + a\Psi)w\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, gilt.
3. Zeige beide Richtungen einzeln jeweils durch Umformen.

10.8.3 Lösung

1. Ein Endomorphismus Φ eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt selbstadjungiert, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle\Phi(v), w\rangle = \langle v, \Phi(w)\rangle$.
2. Wir zeigen, dass $\Phi + a\Psi$ mit $a \in \mathbb{R}$ selbstadjungiert ist:

$$\begin{aligned}\langle(\Phi + a\Psi)(v), w\rangle &= \langle\Phi(v), w\rangle + a\langle\Psi(v), w\rangle\\ &= \langle v, \Phi(w)\rangle + a\langle v, \Psi(w)\rangle\\ &= \langle v, (\Psi + a\Psi)(w)\rangle.\end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$: Es ist

$$\begin{aligned}&\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle - \langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle - \langle\Phi(v), \Psi(w)\rangle = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle - \langle\Psi(\Phi(v)), w\rangle = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\langle\Phi(\Psi(v)) - \Psi(\Phi(v)), w\rangle = 0\end{aligned}$$

   Also muss $\Phi(\Psi(v)) = \Psi(\Phi(v))$ sein.
   $\Leftarrow$: Es ist

$$\begin{aligned}&\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle = \langle\Psi(\Phi(v), w)\rangle\\ \Leftrightarrow\quad &\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle = \langle\Phi(v), \Psi(w)\rangle\\ \Leftrightarrow\quad &\langle\Phi(\Psi(v)), w\rangle = \langle v, \Phi(\Psi(w))\rangle\end{aligned}$$

   Alsi ist $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert.