Allgemeine Grundlagen

Menge

- "Ansammlung von Objekten"
- Wichtige Mengen: $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(M)$ (Potenzmenge)
- Operationen: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, A^n, $|A|$

Abbildung

- "Vorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet"
- $f : M \ni m \mapsto n \in N$
- $\text{Abb}(M, N) = \{f : M \to N\}$
- **Identität**: $Id_m : M \ni m \mapsto m \in M$
- **Komposition**: $f : M \to N$, $g : N \to O; g \circ f : M \to O$ $(= g(f(m)))$
- **Einschränkung**: $f : M \to N$, $T \subset M; f\mid_T : T \to N$
- **Bild**: $f(U) = \{y \in N \mid \exists m \in U : f(m) = y\}$
- **Urbild**: $f^{-1}(V) = \{m \in M \mid f(m) \in V\}$
- **Injektivität**: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (kein $n \in N$ wird mehrfach getroffen, z.B. $f(x) = x^3$)
- **Surjektivität**: $\forall n \in N\ \exists m \in M : f(m) = n$ (f trifft jedes $n \in N$, z.B. $f(x) = x^3$)
- **Bijektivität**: Injektiv und Surjektiv ($\exists g : N \to M : g \circ f = Id_M \wedge f \circ g = Id_N \rightsquigarrow g =: f^{-1}$ Umkehrabbildung)

Relation

- $R \subseteq M \times M$
- xRy statt $(x, y) \in R$
- **Reflexivität**: $\forall x \in M : xRx$
- **Symmetrie**: $\forall x, y \in M : xRy \Leftrightarrow yRx$
- **Transitivität**: $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- **Äquivalenzrelation**: reflexiv, transitiv, symmetrisch (z.B. =)
- **Antisymmetrisch**: $\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- **Halbordnung**: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch (z.B. $\leq$ auf $\mathbb{R}$)
- **Ordnung**: totale Halbordnung ($\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$)

Gruppen

Fundamentales

- **Verknüpfung**: $\star : M \times M \to M$
- **Gruppe**: $(M, \star)$ mit:
  1. $\star$ assoziativ
  2. neutrales Element e ($\forall m \in M : m \star e = e \star m = m$)
  3. inverse Elemente m^{-1} ($\forall m \in M : m \star m^{-1} = m^{-1} \star m = e$)
- **abelsche Gruppe**: $\star$ kommutativ (auch kommutative Gruppe)

Untergruppe

- $(H \subseteq G, \circ)$ Untergruppe von $(G, \star)$, wenn
  1. $(H, \circ)$ Gruppe
  2. $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \circ h_2 = h_1 \star h_2$
- **Untergruppenkriterium**: $H \neq \emptyset \wedge \forall h_1, h_2 \in H : h_1 \star h_2^{-1} \in H$
- **Gruppendurchschnitt**: G Gruppe, $I \neq \emptyset, \forall i \in I : U_i$ Untergruppe von G $\rightsquigarrow \bigcap_{i \in I} U_i$ Untergruppe von G
- **Gruppenerzeugnis**: $M \subseteq G, I = \{X : X \text{ Untergruppe von } G \wedge X \text{ enthält } M\}$, $\langle M \rangle = \bigcap_{X \in I} X$ Gruppenerzeugnis von M
- **zyklische Gruppe**: $\exists a \in G : G = \langle a \rangle$
- **Ordnung**:
  1. Gruppe: Kardinalität von G
  2. $g \in G$: $|\langle g \rangle|$
- H Untergruppe von $G \Rightarrow |H|$ teilt $|G|$

Gruppenhomomorphismus

- $= f : G \to H\ \forall x, y \in G : f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$
- Eigenschaften:
  1. $f(e_G) = e_H$
  2. $\forall g \in G : f(g)^{-1} = f(g^{-1})$
  3. $f^{-1}(\{e_H\})$ Untergruppe von G
  4. f injektiv $\Leftrightarrow f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_g\}$
- **Hom**(G, H): Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach H
- **Kern**: $= f^{-1}(\{e_H\})$
- **Endomorphismus**: $f \in \text{Hom}(G, G) \Leftrightarrow f \in \text{End}(G)$
- **Isomorphismus**: $f \in \text{Hom}(G, H) \wedge f$ bijektiv $\rightsquigarrow f \in \text{Iso}(G, H)$ ($\text{Iso}(G, H) \neq \emptyset \Rightarrow G, H$ isomorph)
- **Automorphismus**: $f \in \text{End}(G) \wedge f$ bijektiv $\rightsquigarrow f \in \text{Aut}(G)$

Symmetrische Gruppe

- D Menge, $M := \{f \in \text{Abb}(D, D) : f \text{ bijektiv}\}$ Gruppe mit Komposition $\rightsquigarrow$ symmetrische Gruppe $\text{Sym}_D = (M, \circ)$
- $D = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \text{Sym}_D =: S_n$ Permutationen der ersten n Zahlen aus $\mathbb{N}$, $|S_n| = n!$
- **d-Zykel**: $d \leq n$ Elemente aus S_n werden im Kreis getauscht
- **Transposition**: Zwei Elemente werden vertauscht (2-Zykel)
- **Zerlegung**: Permutation zerlegbar in Transpositionen (durch Komposition): $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$
- **Signum**:
  1. Transposition: $\text{sgn}(\tau) = -1$
  2. Permutation: $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \rightsquigarrow \text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$

Ringe und Körper

Ring

- $(R, +, *)$ mit
  1. $(R, +)$ abelsche Gruppe
  2. $*$ assoziativ
  3. neutrales Element 1_R von $*$
  4. $*$ distributiv
- **kommutativer Ring**: $*$ kommutativ
- **Teilring**: $T \subseteq R$ mit
  1. $1_R \in T$
  2. $\forall t_1, t_2 \in T : t_1 + t_2, t_1 t_2 \in T$
  3. $(T, +, *)$ Ring
- **Ringhomomorphismus**: $\varphi : R \Rightarrow S$ mit
  1. $\varphi(x +_R y) = \varphi(x) +_S \varphi(y)$
  2. $\varphi(x *_R y) = \varphi(x) *_S \varphi(y)$
  3. $\varphi(1_R) = 1_S$
- **Einheit**: $= x \in R\ \exists y \in R : xy = yx = 1_R$ $(y = x^{-1})$ $\rightsquigarrow R^\times$ Menge aller R-Einheiten
- kleiner Fermat: p prim $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : p$ teilt $a^p - a$
- $\varphi : R \to S$ Ringhom. $\Rightarrow \Psi : R^\times \to S^\times$ Gruppenhom.

Körper

- = kommutativer Ring, $0_K \neq 1_K$, $K^\times = K \setminus \{0_K\}$
- K Körper, R Ring mit $0_R \neq 1_R \Rightarrow$ jeder Ringhom. $K \to R$ ist injektiv

komplexe Zahlen

- $= \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
- Eigenschaften:
  1. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  2. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + cb)i$ (3. binomische Formel)
  3. $\overline{a + bi} = a - bi$ (komplex konjugiertes)
- **Polarkoordinaten**:
  1. $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
  2. $u = c + di = s(\cos(\beta) + i \sin(\beta))$
     $\rightsquigarrow z * u = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$

Polynomring

- $= \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, a_i \in R \text{ mit } N \in \mathbb{N}_0\ \forall j \geq N : a_j = 0\} = R[X]$ (Veränderliche X, Abbruchsbedingung N)
- Eigenschaften:
  1. $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$
  2. $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} * (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i})_{k \in \mathbb{N}_0}$
  3. Einselement $(1, 0, \ldots)$
- $\rightsquigarrow R[X] = \{\sum_{i=0}^d r_i X^i : d \in \mathbb{N}_0, r_0, \ldots, r_d \in R\}$
- $R \subset R[X]$ mittels $R \ni r \mapsto rX^0 \in R[X]$
- **Grad**: $\text{Grad}(\sum_{i=0}^d r_i X^i) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \sum_{i=0}^d r_i X^i = 0 \\ \max(\{i \in \mathbb{N}_0 : r_i \neq 0\}) & \text{sonst} \end{cases}$
- Eigenschaften Grad:
  1. $\text{Grad}(f + g) \leq \max(\{\text{Grad}(f), \text{Grad}(g)\})$
  2. $\text{Grad}(f * g) \leq \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$
     =, falls $\forall a, b \in R \setminus \{0\} : ab \neq 0$
- **Leitkoeffizient**: $= r_{\text{Grad}(f)}$ $(f = \sum_{i=0}^d r_i X^i \neq 0)$
- **Potenzen**: A Ring, $a \in A$; $a^n = \underbrace{a * \cdots * a}_{n \text{ mal}}$

- **Zentrum**: $Z(A) = \{a \in A : \forall x \in A : ax = xa\}$
  (kommutativer A-Teilring)
- **Einsetzabbildung**: R Teilring von $Z(A)$,
  $E_a : R[X] \to A, f \mapsto E_a(f) = f(a)$
  $\rightsquigarrow E_a(f+g) = E_a(f) + E_a(g), E_a(f * g) = E_a(f)E_a(g)$
- **Teiler**: $f, g \in R[X]$. g Teiler von $f \Leftrightarrow \exists h \in R[X] : f = gh$

LGS und Matrizen

Grundlegendes — LGS

- p Gleichungen mit q Unbekannten über kommutativem Ring R
- Kurzschreibweise $\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j = b_i$ $(1 \le i \le p)$ $\qquad (\star)$
- **Lösungsmenge**: $\mathcal{L}(\star)$
- **homogenes LGS**: $\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j = 0$ $(1 \le i \le p)$

Grundlegendes — Matrix

- $= A : \{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, q\} \to R$
  (R kommutativer Ring, $p, q \in \mathbb{N}$, p = #Zeilen, q = #Spalten)
- $a_{ij} = A(i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$
- $R^{p \times q}$ = Menge der $p \times q$-Matrizen über R
- **Produkt**: $A \in R^{p\times q}, B \in R^{q \times r}$. $A * B =: C \in R^{p \times r}$:
  c_{ij} $i$te Zeile von A * $j$te Spalte von B
  $D(A + B) = DA + DB, (A + B)D' = AD' + BD'$ (Distributivität)
  i.A.: $AB \neq BA$ (keine Kommutativität)
- **Summe**: $A \in R^{p\times q}, B \in R^{p\times q}$. $A + B =: C \in R^{p\times q}$:
  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- **Nullmatrix**: $\forall i, j : a_{ij} = 0 (=: 0)$
- **Einheitsmatrix**: $\forall i, j : a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} =: I_p \in R^{p\times p}$
- **Skalare**: $= r \in R : A * r = r * A = (r * a_{ij})_{i,j}$
- **Transponierte Matrix**: $A^T(j, i) = A(i, j)$ (gedreht um Diagonale)
  $\rightsquigarrow (A * B)^T = B^T * A^T$
- $\rightsquigarrow (R^{p\times p}, +, *)$ ist Ring (Einselement I_p, Nullelement 0)
- **Symmetrische Matrix**: $= A \in K^{n\times n} : A^\top = A$

Invertierbare Matrix

- $GL_p(R) = \{A \in R^{p\times p} \mid \exists B \in R^{p\times p} : AB = BA = I_p\}$
  ($= (R^{p\times p})^\times$, $B =: A^{-1}$, Menge der invertierbaren Matrizen)
- **Elementarmatrix**: $E_{ij}(k, l) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \wedge j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Umformungsmatrizen**:
  1. Addition: $A_{i,j}(\alpha) = I_p + \alpha E_{i,j} \in GL_p(R)$
     $\rightsquigarrow$ α-mal $j$te Zeile zur $i$ten Zeile addieren
  2. Vertauschung: $V_{i,j} = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \in GL_p(R)$
     $\rightsquigarrow$ tauschen der $i$ten und $j$ten Zeile
  3. Diagonal: $\text{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E_{i,i} \in GL_p(R)$
     $\rightsquigarrow$ $i$te Zeile mit α_i multiplizieren
- **Gauss-Normalform**: = LGS in Treppenform
  $\rightsquigarrow$ Lösen durch Anwenden von Umformungsmatrizen
- **Rang**: = # nichtleerer Zeilen in Gauß-Normalform
- **Spur**: = Summe der Diagonaleinträge
- **Gauß-Algorithmus**: A^{-1} für $A \in K^{p\times p}$ bestimmen:
  1. $(A \mid Id_p)$ aufschreiben
  2. A zu Id_p umformen, Umformungen auch auf Id_p anwenden
  3. Man erhält $(Id_p \mid A^{-1})$. Klappt nicht $\Rightarrow A \notin GL_p(K)$
- **Reguläre Matrix**: $A \in K^{p\times p}$ regulär $\Leftrightarrow$ A invertierbar $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$
  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = p$
- Rechenregeln:
  1. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$
  2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  3. $(A^{-1})^{-1} = A$
  4. $(k * A)^{-1} = k^{-1} * A^{-1}$
- **Äquivalente Matrizen**: $A, B \in K^{p\times q}$ äquivalent
  $\Leftrightarrow \exists S \in \text{GL}_q(K), T \in \text{GL}_p(K) : B = T * A * S$
- **Ähnliche Matrizen**: $A, \tilde{A} \in K^{d\times d}$ ähnlich
  $\Leftrightarrow \exists S \in \text{GL}_d(K) : \tilde{A} = S^{-1} * A * S$
  $\rightsquigarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\tilde{A}),\ \text{Spur}(A) = \text{Spur}(\tilde{A})$

Vektorräume

Grundlagen

- **Vektorraum** (über Körper K):
  $= (V, \oplus, \odot)$, $\oplus : V \times V \to V$, $\odot : K \times V \to V$ mit
  1. $(V, \oplus)$ kommutative Gruppe
  2. $\forall v \in V : 1_K * v = v$
  3. $\oplus$ assoziativ
  4. Distributivität
- **Untervektorraum**: $= (U, \oplus, \odot) \le (V, \oplus, \odot)$ mit
  1. $(U, \oplus)$ Untergruppe von $(V, \oplus)$
  2. $\forall a \in K, u \in U : a * u \in U$
- **UVR-Kriterium**: $U \le V$
  $\Leftrightarrow U \neq \emptyset \wedge \forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U \wedge \forall a \in K, u \in U : a * u \in U$
- **UVR-Durchschnitt**: V K-VR, $\forall i \in I : U_i \le V \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \le V$
- **Linearkombination**: $= \sum_{m\in M} \alpha(m) * m \in V$
  ($M \subseteq$ K-VR V, $\alpha : M \to K = 0$ ffa $m \in M$)
- **Aufspann**: $= \langle M \rangle$, Menge aller Linearkombinationen in M
  = Hülle von M
- **Erzeugendensystem**: M ist Erzeugendensystem von $\langle M \rangle$
- **Träger**: $\text{Träger}(\alpha \in \text{Abb}(M, K)) = \{m \in M \mid \alpha(m) \neq 0\}$
  $\rightsquigarrow \text{Abb}(M, K)_0 = \{f \in \text{Abb}(M, k) \mid \text{Träger}(f) < \infty\}$
- **UVR-Summe**: $\forall i \in I : U_i \le V$. $\sum_{i\in I} U_i = \langle \bigcup_{i\in I} U_i \rangle$
- **direkte UVR-Summe**: $\Leftrightarrow \forall u_i \in U_i$:
  $(u_1 + \cdots + u_n = 0 \Leftrightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0)$
  $\rightsquigarrow U_i \cap U_j = \{0\}$ $(i \neq j)$
  $\rightsquigarrow \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ statt $\sum_{i=1}^{n} U_i$

VR-Homomorphismus

- $= \varphi : V \to W$ mit
  1. $\forall u, v \in V : \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
  2. $\forall \alpha \in K, v \in V : \varphi(\alpha * v) = \alpha * \varphi(v)$
- **lineare Abbildung**: = VR-Hom.
- **Aut, End, Iso**: Wie Gruppenhom.
- **Kern**: $\text{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$
- φ injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi) = \{0\}$
- $\text{Hom}(V, W) \le \text{Abb}(V, W)$
- $K^{p\times q} \ni A \mapsto \varphi_A \in \text{Hom}(K^q, K^p)$ ist K-VR-Iso.
  $(A \in K^{p\times q}, \varphi_A : K^q \to K^p, v \mapsto \varphi_A(v) = A * v)$

Basis

- $= B \subseteq V\ \forall v \in V : \exists! \lambda \in \text{Abb}(B, K)_0 : v = \sum_{b\in B} \lambda(b) * b$
  (jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von B-Vektoren schreiben, B ist *minimales Erzeugendensystem*)
- $\mid$ Basis von $K^p \mid= p$
- **Koordinatenabbildung**: $D_B(v) : V \to \text{Abb}(M, K)_0$
  Koordinatenvektor von v bzgl. B
- **Lineare Unabhängigkeit**: $M \subset V$ lin. unabh.
  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Abb}(M, K)_0 : (\sum_{m\in M} \lambda(m) * m = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0)$
  ($\Leftrightarrow$ 0 kann nicht linearkombiniert werden, sonst lin. abh.)
- B Basis
  $\Leftrightarrow$ B maximal linear unabhängig
  $\Leftrightarrow$ B minimales Erzeugendensystem
  $\Leftrightarrow$ B linear unabhängiges Erzeugendensystem
- **Existenz**: V K-VR mit endlichem Erzeugendensystem
  $\Leftrightarrow$ V hat Basis
  $\Leftrightarrow$ Basis in jedem endl. V-Erzeugendensystem enthalten
  $\Leftrightarrow$ jedes lin. unabh. $M \subset V$ lässt sich zu Basis *ergänzen*
  $\Leftrightarrow$ alle V-Basen haben gleich viele Elemente

Dimension

- $= \dim_K(V) = |B|$ (B Basis von V)
- **Dimension UVR**: $U \le V \Rightarrow \dim_K(U) \le \dim_K(V)$
  $\rightsquigarrow \dim_K(U) = \dim_K(V) \Leftrightarrow U = V$
  direkte Summe: $\dim_K(\bigoplus_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(U_i)$
- $U, W \le V \Rightarrow \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
- **komplementärer UVR**: W komplementär zu $U \Leftrightarrow V = U \oplus W$
  $\rightsquigarrow \dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$

Faktorraum

- $\sim$: $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$ $(U \le V)$
  $\rightsquigarrow$ v_1 und v_2 unterscheiden sich um $u \in U$
- $[v]$: $= v + U = \{v + u \mid u \in U\}$

- $V/U := \{[v] \mid v \in V\}$ ist VR:
  1. $[v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2]$
  2. $\lambda[v] = [\lambda v]$
- **Faktorraum**: $= V/U$
- **kanonische Projektion**: $\Pi_{V/U} : V \to V/U,\ v \mapsto [v]$
  $\rightsquigarrow \mathrm{Kern}(\Pi_{V/U}) = U$
- **Homomorphiesatz**: V, W K-VRe, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $U \le \mathrm{Kern}(\varphi)$
  1. $\exists! \tilde{\varphi} : V/U \to \varphi(V) \le W\ \forall v \in V : \varphi(v) = \tilde{\varphi}([v])$
  2. $U = \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathrm{Iso}(V/U, \varphi(V))$
- **Basis**: $U \le V$, $\langle B\rangle = V$, $\langle B_U\rangle = U$, $B_U \subset B$.
  $\rightsquigarrow C = \{b + U \mid b \in B \setminus B_U\}$ Basis von V/U
  $\rightsquigarrow \dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$
  $\rightsquigarrow \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$
- **Rang**: $\mathrm{Rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$

Basen und lineare Abbildungen

Lineare Fortsetzung

- V, W K-VRe, $\langle B\rangle = V$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
  $\rightsquigarrow \varphi$ durch $\varphi|_B : V \to W$ eindeutig festgelegt
  $(\varphi(v) = \sum_{b\in B} \lambda(b) * \varphi|_B(b))$
- V, W, B s.o., $f \in \mathrm{Abb}(B, W) \Rightarrow \exists! \varphi : V \to W : \varphi|_B = f$
  $\rightsquigarrow (\mathrm{Hom}(V, W) \ni \varphi \mapsto \varphi|_B \in \mathrm{Abb}(B, W))$
  $\in \mathrm{Iso}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Abb}(B, W))$

Dualraum

- **Linearform** (auf V): $= \chi \in \mathrm{Hom}(V, K)$
- **Dualraum**: $= V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$
- $V^* \cong \mathrm{Abb}(B, K) \Rightarrow \dim(V^*) = \dim(V)$
- $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(V^*) = \dim(V)$
- **duale Basis**: $\langle\{b_1, \ldots, b_n\}\rangle = V \Rightarrow \langle\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}\rangle = V^*$ mit
  $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **duale Abbildung**: V, W K-VRe, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
  $\forall \kappa \in W^* : (\kappa \circ \varphi : V \to K) \in \mathrm{Hom}(V, K)$
  $\rightsquigarrow \varphi^* : W^* \to V^*$, $\varphi^*(\kappa) = \kappa \circ \varphi$ linear. Es gilt:
  1. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv $\Rightarrow \varphi^* \in \mathrm{Hom}(V, K)$ injektiv
  2. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ injektiv $\Rightarrow \varphi^* \in \mathrm{Hom}(V, K)$ surjektiv
- **Bidualraum**: $\dim(V) < \infty \Rightarrow V \cong V^{**}$

Abbildungsmatrix

- V, W endl.-dim. K-VRe, $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$,
  $\langle B\rangle = V$, $\langle C\rangle = W$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
  $\rightsquigarrow \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} c_i\ (1 \le j \le q)$
  $\rightsquigarrow K^{p\times q} \ni A =: D_{CB}(\varphi)$ ($\varphi(b_j)$ berechnen $\rightsquigarrow a_{1j}, \ldots, a_{pj}$)
  C Standardbasis $\Rightarrow$ "Die Spalten von $D_{CB}(\varphi)$ sind die Bilder der Basisvektoren in B"
- **Abbildungsmatrix** (von φ bzgl. B und C): $= D_{CB}(\varphi)$
  $\rightsquigarrow \varphi(v) = D_{CB}(\varphi) * v$
- **Koordinatenabbildung**: $D_B : V \to K^q$, $D_C : V \to K^p$:
  $D_C(\varphi(v)) = D_{CB}(\varphi) * D_B(v)$
- **duale Basis**: $D_{B^*C^*}(\varphi^*) = D_{CB}(\varphi)^T$

Basiswechsel

- $D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\varphi) = D_{\tilde{C}C}(\varphi) * D_{CB}(\varphi) * D_{B\tilde{B}}(\varphi)$
- U, V, W K-VRe, $\langle A\rangle = U$, $\langle B\rangle = V$, $\langle C\rangle = W$,
  $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\Psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
  $\rightsquigarrow D_{CA}(\Psi \circ \varphi) = D_{CB}(\Psi) * D_{BA}(\varphi)$

Endomorphismen

$= \varphi : V \to V. \quad A := D_{BB}(\varphi)$

Basiswechsel

- $S = D_{B\tilde{B}}(Id_V)$, $T := S^{-1} = D_{\tilde{B}B}(Id_V)$
  $\rightsquigarrow D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\varphi) = \tilde{A} = T * A * S = S^{-1} * A * S$

Invariante UVR

- V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.
  $U \le V$ ist φ-invarianter UVR $\Leftrightarrow \varphi(U) \subseteq U$
  $\Rightarrow \varphi|_U \in \mathrm{End}(U)$
- **zyklischer UVR**: V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $U \le V$ φ-invariant
  U zyklisch $\Leftrightarrow \exists u \in U : \langle\{u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{\dim_K(U)-1}(u)\}\rangle = U$
  $\rightsquigarrow U$ kleinster UVR, der u enthält

Eigenraum

- **Eigenvektor** (von φ): $= v \in V : \langle v\rangle = K * v$ 1-dim. φ-inv. UVR
  $\rightsquigarrow v \ne 0 \wedge \exists \lambda \in K : \varphi(v) = \lambda v$
- **Eigenwert** (von φ): $= \lambda \in K$ von oben
- **Spektrum**: $= \mathrm{spec}(\varphi) = \{\lambda \in K \mid \lambda$ EW von $\varphi\}$
- **Eigenraum**: $= \mathrm{Eig}(\varphi, \alpha) = \mathrm{Kern}(\varphi - \alpha * \mathrm{Id}_V)$
  $(v \in \mathrm{Kern}(\varphi - \alpha * \mathrm{Id}_V) \Leftrightarrow \varphi(v) = \alpha * v)$
  $\rightsquigarrow \alpha \in \mathrm{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \alpha) \ne \{0\}$
- $D_{BB}(\varphi)$ Diagonalmatrix $\Rightarrow \mathrm{spec}(\varphi) = \mathrm{diag}(\varphi)$
- Eigenräume sind invariante UVR
- $|\mathrm{spec}(\varphi)| \le \dim(V)$

Eigenwerte und Polynome

- V K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $f \in K[X]$
  $\rightsquigarrow \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Rightarrow f(\lambda) \in \mathrm{spec}(f(\varphi))$
- **annulierendes Polynom**: $= f \in K[X] : f(\varphi) = 0$
- **Verschwindungsideal**: $= K[X] \supseteq I(\varphi) = \{f \in K[X] \mid f(\varphi) = 0\}$
- V endl.-dim. K-VR. Dann:
  1. $I(\varphi) \ne \{0\}$
  2. $\exists M \in I(\varphi) : \mathrm{grad}(M) \ge 0$ minimal, Leitkoeff. 1
  3. $\forall f \in I(\varphi)\ \exists g \in K[X] : f = M * g$
- **Minimalpolynom**: $= \mathrm{MP}_\varphi(X) = M$
- $\mathrm{MP}_\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)$
  $\rightsquigarrow \mathrm{spec}(\varphi) = \{\lambda \in K \mid \mathrm{MP}_\varphi(\lambda) = 0\}$
- **Diagonalisierbarkeit**: φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow V$ hat Basis aus φ-EW
  $\Leftrightarrow \mathrm{MP}_\varphi(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$

Determinanten

Determinantenform

- $= D : (K^n)^n \to K$ mit:
  1. $D(e_1, \ldots, e_n) = 1$
  2. $D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + w, v_{i+1}, \ldots, v_n)$
     $= D(v_1, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)$
  3. $D(v_1, \ldots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \alpha D(v_1, \ldots, v_n)$
  4. $v_i = v_j\ (i \ne j) \Rightarrow D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$
- Eigenschaften:
  1. D ist n-fache Multilinearform (siehe LAII)
  2. $D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_n)$
  3. $i < j : D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$
     $= -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$
  4. $D(\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n) = \alpha_1 \ldots \alpha_n D(v_1, \ldots, v_n)$

Determinante einer Matrix

- $v_1, \ldots, v_n \rightsquigarrow M \in K^{n\times n}$, $D \rightsquigarrow K^{n\times n} \to K$
- Einheitsmatrix: $D(I_n) = 1$
- Additionsmatrix: $D(A_{ij}(\alpha)) = 1$
- Vertauschungsmatrix: $D(V_{ij}) = -1$
- Diagonalmatrix: $D(M) = \mathrm{spur}(M)$ (M Diagonalmatrix)
- **spezielle Matrix**: Menge der obigen vier Matrizentypen
- Eigenschaften der Determinantenform:
  1. $D(M * A_{ij}(\alpha)) = D(M)$ (entspricht 2.)
  2. $D(M * V_{ij}) = -D(M)$ (entspricht 3.)
  3. $D(M * \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \alpha_1 \ldots \alpha_n D(M)$ (entspricht 4.)
- **Gauss**: $\exists$ spezielle Matrizen $X_1, \ldots, X_d$:
  $M * X_1 * \cdots * X_d$ in Treppenform
  $\rightsquigarrow D(M) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{d} D(X_i)^{-1}, & \text{falls } M \text{ regulär} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Wichtige Eigenschaften der Determinante einer Matrix:
  1. $D(M) \ne 0 \Leftrightarrow M \in \mathrm{GL}_n(K)$
  2. $D(M * N) = D(M) * D(N)$
  3. $D(M) = D(M^T)$
  4. M obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow D(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
  5. M, N ähnlich $\Rightarrow D(M) = D(N)$
  6. $D\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right) = D(A) * D(C)$

Leibniz-Formel

- $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ unpraktisch!
  $\rightsquigarrow \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

Laplace-Entwicklung

- $M_{ij} := M$ ohne $i$te Zeile und $j$te Spalte
- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj})$
  (Entwicklung nach $k$ter Zeile)
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$
  (Entwicklung nach $k$ter Spalte)
- Praktische Berechnung:
  1. Im Kopf "1, (−1)-Schachbrett" über Matrix legen (l.o. 1)
  2. Nach Zeile/Spalte mit meisten Nullen entwickeln
- **adjunkte Matrix** (von A): $= A^{\#}$ mit $a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$
  $\rightsquigarrow A^{-1} = (\det(A))^{-1} A^{\#}$

Determinante eines Endomorphismus

:

- $\det(\varphi) = \det(D_{BB}(\varphi))$ (unabhängig von B)
- $\lambda \in \operatorname{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V) = 0$
- **charakteristisches Polynom**: $\mathrm{CP}_\varphi(X) = \det(XI_n - D_{BB}(\varphi))$
  $\rightsquigarrow \lambda \in \operatorname{spec}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{CP}_\varphi(\lambda) = 0$
- **geometrische Vielfachheit**: $\mu_g(\varphi, \lambda) = \dim(\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda))$
- **algebraische Vielfachheit**: $\mu_a(\varphi, \lambda) = e \mid (X - \lambda)^e$ teilt $\mathrm{CP}_\varphi(X)$
- Eigenschaften:
  1. $\mathrm{CP}_\varphi(X)$ ist Ähnlichkeitsinvariante
  2. $\mathrm{CP}_\varphi(\varphi) = 0$
  3. $\mathrm{MP}_\varphi(X)$ teilt $\mathrm{CP}_\varphi(X)$
  4. $\lambda \in \operatorname{spec}(\varphi) \Rightarrow 1 \leq \mu_g(\varphi, \lambda) \leq \mu_a(\varphi, \lambda)$
  5. φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow \mathrm{CP}_\varphi(X)$ zerfällt in Linearfaktoren und $\forall \lambda \in \operatorname{spec}(\varphi)$: $\mu_g(\varphi, \lambda) = \mu_a(\varphi, \lambda)$
  6. $\mathrm{CP}(\varphi)$ zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow$ $\sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(\varphi)} \mu_a(\varphi, \lambda) = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(\varphi)} \mu_g(\varphi, \lambda) = \dim(V)$