Normalform für Endomorphismen

Polynomring

- **Teiler**: $f \in K[X]$ Teiler von $g \in K[X] \Leftrightarrow \exists h \in K[X] : g = f * h$
- **Teilerfremdheit**: f, g teilerfremd $\Leftrightarrow \forall h \in K[X]$, h teilt g, f : $0 \neq h \in K$ (h konstant)
- **Irreduzibel**: $f \neq 0$ irreduzibel $\Leftrightarrow \forall h \in K[X]$, h teilt f : $h \in K \vee \exists a \in K : h = a^{-1} f$ (da dann $f = ah$)
- **Polynomdivision**: $f, g \in K[X]$, $g \neq 0 \Rightarrow \exists h, r \in K[X]$: $f = gh + r \wedge \text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$
- **Euklidischer Algorithmus**: $\text{Grad}(f_0) \geq \text{Grad}(f_1)$, $f_1 \neq 0$.
  1. $f_0 = h_1 f_1 + f_2$ ($\text{Grad}(f_2) \geq \text{Grad}(f_1)$)
     F1: $f_2 = 0$ Fertig.
     F2: $f_2 \neq 0 : f_{i-1} = h_i f_i + f_{i+1}$. Rekursion.
  2. $f_{i+1} = 0 \Rightarrow f_i$ teilt $f_{i-1}, \ldots, f_1, f_0$
     $\rightsquigarrow f_i$ größter gemeinsamer Teiler von f, g
     $\rightsquigarrow f, g$ teilerfremd $\Rightarrow \exists k, l \in K[X] : 1 = k * f + l * g$.
- $\varphi \in \text{End}(V)$, $C \in K[X]$, $C(\varphi) = 0$, $C = f * g$, f, g teilerfremd
  $\Rightarrow V = \text{Kern}(f(\varphi)) \oplus \text{Kern}(g(\varphi))$.

Haupträume

- **Hauptraum**: $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in K \rightsquigarrow H(\varphi, \lambda)$
  $= \text{Kern}((\varphi - \lambda \text{Id}_V)^{\mu_a(\varphi, \lambda)})$ Hauptraum von φ zu λ, $H(\varphi, \lambda) \leq V$
  $\lambda \in \text{spec}(\varphi) \Leftrightarrow H(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$
  $\rightsquigarrow \dim(H(\varphi, \lambda)) = \mu_a(\varphi, \lambda)$
- Direkte Summe: V endl.-dim. K-VR, $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K (\lambda_i \neq \lambda_j)$
  $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^k H(\varphi, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^k H(\varphi, \lambda)$
- Äquivalent:
  1. $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(\varphi)} H(\varphi, \lambda)$
  2. $\text{CP}_\varphi(X) = \prod_{\lambda \in \text{spec}(\varphi)} (X - \lambda)^{\dim(H(\varphi, \lambda))}$

Nilpotente Endomorphismen

- $= \Phi \in \text{End}(V) \exists n \in \mathbb{N} : \Phi^n = 0$ ($\rightsquigarrow V = \text{Kern}(\Phi^n)$)
- Φ nilpotent $\Rightarrow V$ direkte Summe von zyklischen UVR

Jordansche Normalform

- **Jordankästchen**:
  $= \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_d(\lambda) \in K^{d \times d}$ (Länge d, Eigenwert λ)
- **Jordanblock** (zu EW λ_i – ggf. $d_{j,i} = d_{j+1,i}$):
  $= \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k,i}}(\lambda) \end{pmatrix} = D_i \in K^{\mu_a(\Phi, \lambda_i) \times \mu_a(\Phi, \lambda_i)}$
- **JNF**: V endl.-dim. K-VR, $\Phi \in \text{End}(V)$ zerfalle in Linearfaktoren, $\text{Spec}(\Phi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$
  $\Rightarrow \forall \lambda_i \in \text{Spec}(\Phi) \exists k_i, d_{1,i}, \ldots, d_{k_i,i} \in \mathbb{N}, d_{1,i} \geq \cdots \geq d_{k_i,i} \geq 1$:
  $D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix}$ (mit Basis B von V)
- **JNF-Eigenschaften** (für EW λ):
  Länge JB: $\mu_a(\Phi, \lambda)$
  Anzahl JK: $\mu_g(\Phi, \lambda)$
  Länge längstes JK:
  $\min\{e \in \mathbb{N} \mid \text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^e) = \text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{e+1})\}$
  Anzahl JK Größe i: $2 \dim(\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^i))$
  $- \dim(\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{i-1})) - \dim(\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{i+1}))$
- **Transformationsmatrix**: $= S \in K^{n \times n} : S^{-1} A S = A'$ JNF
  1. $\forall \lambda \in \text{Spec}(\Phi)$: Bestimme Basisvektoren für $\text{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$, $\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^2), \ldots$ bis Dimension sich nicht mehr ändert ($:= p \cong$ Länge längstes JK)
  2. Bestimme die Basisvektoren von $\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^p)$, die nicht in $\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{p-1})$ liegen ($=: v_1, \ldots$)
  3. Füge $v_1, (\Phi - \lambda I_n) v_1, (\Phi - \lambda I_n)^2 v_1, \ldots, v_2, (\Phi - \lambda I_n) v_2, \ldots$ S hinzu (Potenzen bis p)
     Achtung: Zu JK mit Länge k gehören Basisvektoren aus $\text{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^k)$!
  4. Wiederhole 2.-3. für $p - 1$ (Potenzen dann nur bis $p - 1$)
  5. Angekommen bei $\text{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$: Ggf. S um zu S lin. unabh. Vektoren aus $\text{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$ ergänzen
  6. 2.-5. für alle $\lambda \in \text{Spec}(\Phi)$ durchführen

Bilinearformen

Bilineare Abbildung

- $= \beta : V \times W \to U$ (U, V, W K-VRe) mit
  1. $\forall v \in V : W \ni w \mapsto \beta(v, w) \in U$ linear
  2. $\forall w \in W : V \ni v \mapsto \beta(v, w) \in U$ linear
- **Paarung**: = bilineare Abb. mit $U = K$
  nicht ausgeartet $\Leftrightarrow (\forall 0 \neq v \in V \exists w \in W : \beta(v, w) \neq 0)$
  $\wedge (\forall 0 \neq w \in W \exists v \in V : \beta(v, w) \neq 0)$
- **Bilinearform**: = bilineare Abb. der Form $\beta : V \times V \to W$
- **BLF im Dualraum**: nicht ausgeartete Paarung der Form $\beta : V \times V^* \to K$ mit $\beta(v, \lambda) \mapsto \lambda(v)$
- **Zusammenhang Abb.**:
  1. $\varphi \in \text{Abb}(V, W^*)$
     $\Rightarrow \beta_\varphi : V \times W \ni (v, w) \mapsto (\varphi(v))(w) \in K$ Paarung
  2. $\beta : V \times V^*(v, \lambda) \mapsto \lambda(v) \in K$ nicht ausgeartete Paarung
  $\rightsquigarrow \text{hom}(V, W^*) \cong \{\text{Paarungen auf } V \times W\}$

Fundamentalmatrix

- $\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle =: V$, $\langle \{c_1, \ldots, c_n\} \rangle =: W$, $\beta : V \times W \to U$ bilin.
  $\rightsquigarrow u_{i,j} := \beta(b_i, c_j)$
- $U = K \Rightarrow D_{BC} := (u_{ij}) \in K^{n \times n}$
  β-Fundamentalmatrix bezüglich B und C
- $v := \sum_{i=1}^n x_i b_i$, $w := \sum_{j=1}^m y_j c_j$: $\beta(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j u_{i,j}$
- $\Rightarrow \beta(v, w) = (x_1, \ldots, x_n)^\top D_{BC}(\beta)(y_1, \ldots, y_m)$
  $\rightsquigarrow \beta(v, w) = D_B(v)^\top D_{BC}(\beta) D_C(w)$

Bilineare Fortsetzung

- $\forall (f_{i,j}) \in K^{n \times m} \exists$ Paarung $\beta(b_i, c_j) = f_{i,j}(i, j)$
  = bilineare Fortsetzung v. $g : B \times C \ni (b_i, c_j) \mapsto f_{i,j} \in K$
- $\beta : V \times W \to K$ nicht ausgeartet $\Leftrightarrow D_{BC}(\beta)$ invertierbar
  ($\rightsquigarrow \dim(V) = \dim(W) = \text{Rang}(D_{BC}(\beta))$)

Skalarprodukte

Längen und Abstände

- **Skalarprodukt**: = BLF $F : V \times V \to K$ mit
  1. *symmetrisch*: $F(x, y) = F(y, x)$
  2. *positiv definit*: $x \neq 0 \Rightarrow F(x, x) > 0$
- **Standard-SKP**: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x^\top y$
- **Euklidischer Standardraum**: $= (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
- **Norm**: $= ||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
- **Abstand**: $= \text{d}(v, w) = ||v - w||$
- Rechenregeln:
  1. *Dreiecksungleichung*: $\langle v, v \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle * \langle w, w \rangle$
     wenn =, dann v, w lin. abh.
  2. *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*
     $||u - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v||$
- **Normierter VR**: $= (V, N)$, $N : V \to \mathbb{R}$ mit
  1. $\forall\, 0 \neq v \in V : N(v) > 0$
  2. $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
  3. $N(v) + N(w) \geq N(v + w)$
- **Metrischer VR**: $= (M, d)$, $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit
  1. *Symmetrie*: $d(m, n) = d(n, m)$
  2. *Positivität*: $d(m, n) \geq 0 \wedge (d(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n)$
  3. *Dreiecksugl.*: $d(m, 0) \leq d(m, n) + d(n, 0)$
  (V, N) normierter VR $\rightsquigarrow d_N(v, w) = N(v - w)$ Metrik
- **Winkel**: $\angle(v, w) = \alpha \in [0, \pi] : \cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| * ||w||}$
- **Orthogonalität**: v, w orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \rightsquigarrow v \perp w$
- **Pythagoras**: $v \perp w \Leftrightarrow ||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2$

Orthonormalbasen

- **Orthogonalsystem**: $= S \subseteq V$ (eukl. VR): $0 \notin S \wedge s, s' \in S : s \perp s'$
- **Orthonormalsystem**: = OGS mit $\forall s \in \text{OGS} : ||s|| = 1$
  $\rightsquigarrow$ OGS und ONS sind lin. unabh.
- **Orthogonalbasis**: $= S \subseteq V : \langle S \rangle = V \wedge S$ ist OGS
- **Orthonormalbasis**: $= S \subseteq V : \langle S \rangle = V \wedge S$ ist ONS
- **Fourierformel**: V eukl. VR, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ V-ONB
  $\rightsquigarrow V \ni v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$
  $\rightsquigarrow D_B(v) = (\langle v, b_i \rangle)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$
  $\rightsquigarrow \langle v, w \rangle = D_B(v)^\top D_B(w)$

- **Orthogonale Matrix**: $= A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^\top A = I_n$
  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB $\Rightarrow A = (v_1, \dots, v_n)$ OGM
- **Orthogonale Gruppe**: $= O(n)$
  $= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top A = I_n\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
  $\rightsquigarrow \det(A^\top A) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
- **Spezielle orthogonale Gruppe**: $= SO(n)$
  $= \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$
- **Orthogonalisierung**: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von eukl. VR V
  $\rightsquigarrow S = \{w_1, \dots, w_n\}$ OGB mit:
  1. $w_1 = v_1$
  2. $w_l = v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{\langle v_l, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i\right)$ $(l = 1, \dots, n)$

  $\rightsquigarrow \widetilde{S} := \{\frac{w_1}{||w_1||}, \dots, \frac{w_n}{||w_n||}\}$ ist ONB
- **Iwasawa-Zerlegung**: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) * \mathcal{B}(n)$
  ($\mathcal{B}(n)$ = {obere $n \times n$ – $\triangle$-Matrizen mit pos. Diagonaleinträgen})
- **Orthogonale Polynome**: Eukl. VR $\mathbb{R}[X]_{\mathrm{Grad}\leq n}$ mit SKP
  $\rightsquigarrow$ ONB bauen aus $\{1, x, \dots, x_n\}$
  $\rightsquigarrow$ orthogonale Polynome
- **Positiv definit**: $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann äquivalent:
  1. F positiv definit
  2. $\exists\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (obere $\triangle$-Matrix) $: F = A^\top A$
  3. $\forall\, 1 \leq k \leq n : \det((f_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}) > 0$

  3.-1.: *Hurwitz-Kriterium*
- **Hauptminoren**: Matrizen aus Bedingung v. Hurwitzkriterium
- **Minoren**: Determinanten der Matrizen, die durch Streichen von Zeilen/Spalten von A entstehen

Orthogonale Komplemente, Abstände

- **Orthogonalraum**: $M \subseteq V$ (eukl. VR)
  $\rightsquigarrow M^\perp = \{v \in V \mid \forall m \in M : m \perp v\}$
  $= \{v \in V \mid \forall m \in M : \langle v, m\rangle = 0\}$
  $\rightsquigarrow N \subseteq M \Rightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$, $M^\perp = \langle M\rangle^\perp$
- **Orthogonales Komplement**: $U \leq V$ (eukl. VR)
  $\rightsquigarrow U^\perp$ orthogonales Komplement zu U
  $V = U \oplus U^\perp$
- **Orthogonale Projektion**: $u \in U$, $u' \in U^\perp$.
  $\Pi_U : V \ni (u + u') \mapsto u \in U$ orthogonale Projektion
  (von V auf U längs $U^\perp$)
- **Abstand**: $\mathrm{d}(A, B) = \inf(\{\mathrm{d}(a, b) \mid a \in A, b \in B\})$
  Abstand von A und B ($\emptyset \neq A, B \subseteq V$)
  $\rightsquigarrow \mathrm{d}(a, B) = \mathrm{d}(\{a\}, B)$
- **Abstand UVRe**: $U, W \subseteq V$ (eukl. VR)
  1. $\forall a \in V : \mathrm{d}(a, U) = ||\Pi_{U^\perp}(a)||$
  2. $\forall A \subseteq V : \mathrm{d}(A, U) = ||\Pi_{U^\perp}(A), 0)||$
  3. $\mathrm{d}(v + W, U) = ||\Pi_{(U+W)^\perp}(v)||$
- **Affiner Teilraum**: $= v + W$ $(W \leq V, v \in V)$
- **Affine Gerade** (durch $a, b \in V$): $= \overline{a, b} = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in K\}$
  $(= a + K(b - a))$
- **Strecke**: $= [a, b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$
  (zwischen $a, b \in V$, $K = \mathbb{R}$)
- **Lot**: $= [u, v - w]$ Lot zwischen U und $v + W$
  (Lotfußpunkte $u \in U$, $v - w \in V + W$)

SKP & Homomorphismen

Isometrien

- **Isometrie**: $= f : (M, d) \to (N, e)$, $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$
- **Isometriegruppe**: $= \mathrm{Iso}(M, d)$
  $= \{f : M \to M \mid f$ ist symmetrische Isometrie$\}$
- **lineare Isometrie**: $= \Phi : V \to W : \Phi \in \mathrm{Abb}(V, W) \wedge \Phi$ ist Isometrie
- **Polarisierungsformel**: SKP aus Metrik:
  $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle)$
  $\rightsquigarrow \Phi$ ist lin. Iso $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_W$
- **Koordinatenabb.**: B V-ONB $\rightsquigarrow D_B : V \to \mathbb{R}^{\dim(V)}$ lin. Iso.
- **Drehkästchen**: $\Phi \in \mathrm{Aut}((\mathbb{R}^2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ lin. Iso.
  $\rightsquigarrow$ Beschreibung bzgl. Standardbasis S: $D_{SS}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
  mit $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$
  $\rightsquigarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi] : a = \cos(\varphi)$, $c = \sin(\varphi)$
  $\Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
  $D_{SS}(\Phi) = D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ Drehkästchen zu Winkel φ
- **Kriterium lin. Iso.**: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V, W eukl. $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \mathrm{Abb}(V, W)$
  $\rightsquigarrow \Phi \in \mathrm{Iso}(V, W) \Leftrightarrow \forall V$-ONB injektiv auf W-ONB abgebildet
  $\rightsquigarrow \dim(V) < \infty$: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V, W)$
  $\Leftrightarrow \exists$ ONB, die injektiv auf ONS abgebildet wird
  $\rightsquigarrow \Phi \in \mathrm{Iso}(V, W) \Leftrightarrow D_{BB}(\Phi)$ ist orthogonal/unitär
- **Eigentliche Bewegung**: = lineare Isometrie mit Determinante 1
- **Häufigkeit lin. Iso.**: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V) \Rightarrow \exists \delta \in V$, lin. Iso. $\Phi_0 \forall v \in V : \Phi(v) = \Phi_0(v) + \delta$
- **Darstellung Iso.**: Jede V-W-Isometrie kann als lineare V-W-Isometrie mit W-Translation dargestellt werden
- **Spiegelung**: $= \sigma_v : V \ni x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \in V$
  (Spiegelung an Hyperebene $v^\perp$, $0 \neq v \in V$)
  Jede lin. Iso. ist Produkt von höchstens $\dim(V)$ Spiegelungen
- **Iso. + inv. Komplement**: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$, $U \leq V$ Φ-invariant
  $\Rightarrow U^\perp$ Φ-invariant
- **Eigenwerte**: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V eukl. $\mathbb{K}$-VR
  1. $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ linear $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : |\lambda| = 1$
  2. $\alpha \in K$, $|\alpha| = 1$, $V \neq \{0\} \Rightarrow \exists\, \Phi \in \mathrm{Iso}(V) : \alpha \in \mathrm{Spec}(\Phi)$
- **Isometrienormalform**: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ linear:
  1. V hat ONB aus EV ($\cong \Phi$ orthogonal diagonalisierbar)
  2. V = direkte $\sum$ zueinander orthogonaler Φ-inv., ein-/zweidim. UVR
     $\rightsquigarrow \Phi$ wirkt auf 2-dim. Summanden als Drehung
- **Iso-NF: Matrizen**: $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in O(n)$
  $\Rightarrow \exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_l \in (0, \pi)$, $S \in O(n)$:
  $$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I_{d_+} & & & & \\ & -I_{d_-} & & & \\ & & D_{\varphi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\varphi_l} \end{pmatrix}$$
  (d_+: $\dim(\mathrm{Eig}(A, 1))$, d_-: $\dim(\mathrm{Eig}(A, -1))$, l: $\frac{1}{2}(n - d_+ - d_-)$)
- **Klausurmatrizen**: Es sei $B := A + A^\top$.
  1. Bestimme $\mathrm{CP}_B(\lambda)$
  2. $\mu_a(B, 2)$ = # 1er in Iso-NF
  3. $\mu_a(B, -2)$ = # -1er in Iso-NF
  4. Restliche $\lambda_i \in \mathrm{Spec}(B)$: Drehkästchen
     (mit $\cos(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{2}$, $\sin(\lambda_i) = \sqrt{1 - \frac{\lambda_i^2}{4}}$)
  5. *Transformationsmatrix*: Alle $\mathrm{Eig}(\lambda_i)$ berechnen, für jeden ER ONB aus EV berechnen (Gram-Schmmidt)

Selbstadjungierte Endomorphismen

- $= \Phi \in \mathrm{End}(V) \forall v, w \in V : \langle v, \Phi(w)\rangle = \langle \Phi(v), w\rangle$
  $\rightsquigarrow \Phi$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow D_{BB}(\Phi) = \overline{D_{BB}(\Phi)}^\top$ (ONB B)
- **Eigenwerte**: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann:
  1. $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : \lambda \in \mathbb{R}$
  2. $\forall U \leq V$ Φ-inv.: $U^\perp$ Φ-inv.
- **Spektralsatz**: $\{0\} \neq V$ endl.-dim. eukl. VR, $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ selbstadj.
  $\Leftrightarrow V$ hat ONB aus Φ-EV, $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : \lambda \in \mathbb{R}$
  $\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. $\Rightarrow \exists\, S \in O(n) : S^{-1}AS$ Diagonalmatrix
  $\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. positiv definit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) : \lambda > 0$
- **Trägheitssatz**: $P : V \times V \to \mathbb{R}$ symm. BLF. Dann:
  1. $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ mit
     (a) P auf V_+ positiv definit
     (b) P auf V_- negativ definit
     (c) P auf V_0 konstant 0
     (d) $P(v_o, v_+) = P(v_0, v_-) = P(v_-, v_+) = 0$
  2. $\dim(V_0)$, $\dim(V_-)$, $\dim(V_+)$ nur von P abhängig

Normale Endomorphismen

- **Adjungiert**: $\Phi : V \to W$ linear $\rightsquigarrow \Phi^* : W \to V$ zu Φ adjungiert
  $\Leftrightarrow \forall v \in V, w \in W : \langle \Phi(v), w\rangle_W = \langle v, \Phi^*(w)\rangle_V$
- **Normal**: $V = W$ und Φ^* ex. $\Rightarrow \Phi$ normal, wenn $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$
  (Matrizen: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal $\Leftrightarrow AA^\top = A^\top A$)
  $\rightsquigarrow \Phi$ selbstadjungiert $\Rightarrow \Phi = \Phi^*$, Φ normal
  $\rightsquigarrow \Phi$ Isometrie $\Rightarrow \Phi^{-1} = \Phi^*$, Φ normal
  $\rightsquigarrow D_{BC}(\Phi^*) = (D_{CB}(\Phi))^*$ (ONB B, C von V, W)
  Blockdiagonalmatrix mit $(1\times 1)/(2\times 2)$-Matrizen ist normal
- **Invariante Komplemente**: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal, $U \leq V$ Φ-inv.
  $\Rightarrow U^\perp$ Φ-invariant
  $\rightsquigarrow \Phi|_U \in \mathrm{End}(U)$ normal
- **Spektralsatz**: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ (V eukl. $\mathbb{K}$-VR) normal. Dann:
  1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: es gibt eine ONB aus Φ-EV
     $\rightsquigarrow A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal
     $\Rightarrow \exists\, S \in U(n) : S^{-1}AS$ Diagonalmatrix
  2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: V ist orthogonale $\sum$ aus ein-/zweidim. Φ-inv. UVR
     $\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal
     $\Rightarrow \exists\, S \in O(N) : S^{-1}AS$ Blockdiagonalmatrix
     (Diagonale entweder reelle Eigenwerte oder Matrizen
     der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$)