I. NORMALFORM FÜR ENDOMORPHISMEN

Polynomring:

Teiler: $f \in K[X]$ Teiler von $g \in K[X] \Leftrightarrow \exists h \in K[X] : g = f \cdot h$
Teilerfremdheit: f, g teilerfremd $\Leftrightarrow \forall h \in K[X], h$ teilt g, f : $0 \neq h \in K$ (h konstant)
Irreduzibel: $f \neq 0$ irreduzibel $\Leftrightarrow \forall h \in K[X], h$ teilt f : $h \in K \vee \exists a \in K : h = a^{-1} f$ (da dann $f = ah$)
Polynomdivision: $f, g \in K[X], g \neq 0 \Rightarrow \exists h, r \in K[X]$: $f = gh + r \wedge \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$
Euklidischer Algorithmus: $\mathrm{Grad}(f_0) \geq \mathrm{Grad}(f_1), f_1 \neq 0$.

1. $f_0 = h_1 f_1 + f_2$ ($\mathrm{Grad}(f_2) \geq \mathrm{Grad}(f_1)$)
   F1: $f_2 = 0$ Fertig.
   F2: $f_2 \neq 0 : f_{i-1} = h_i f_i + f_{i+1}$. Rekursion.
2. $f_{i+1} = 0 \Rightarrow f_i$ teilt $f_{i-1}, \ldots, f_1, f_0$
   $\rightsquigarrow f_i$ größter gemeinsamer Teiler von f, g
   $\rightsquigarrow f, g$ teilerfremd $\Rightarrow \exists k, l \in K[X] : 1 = k \cdot f + l \cdot g$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V), C \in K[X], C(\varphi) = 0, C = f \cdot g,\ f, g$ teilerfremd
$\Rightarrow V = \mathrm{Kern}(f(\varphi)) \oplus \mathrm{Kern}(g(\varphi))$.

Haupträume:

Hauptraum: $\varphi \in \mathrm{End}(V), \lambda \in K \rightsquigarrow H(\varphi, \lambda)$
$= \mathrm{Kern}((\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)^{\mu_a(\varphi,\lambda)})$ Hauptraum von φ zu λ, $H(\varphi, \lambda) \leq V$
$\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi) \Leftrightarrow H(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$
$\rightsquigarrow \dim(H(\varphi, \lambda)) = \mu_a(\varphi, \lambda)$
Direkte Summe: V endl.-dim. K-VR, $\varphi \in \mathrm{End}(V), \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K (\lambda_i \neq \lambda_j)$
$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^k H(\varphi, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^k H(\varphi, \lambda)$
Äquivalent:

1. $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)} H(\varphi, \lambda)$
2. $\mathrm{CP}_\varphi(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(\varphi)} (X - \lambda)^{\dim(H(\varphi,\lambda))}$

Nilpotente Endomorphismen:

$= \Phi \in \mathrm{End}(V) \exists n \in \mathbb{N} : \Phi^n = 0$ ($\rightsquigarrow V = \mathrm{Kern}(\Phi^n)$)
Φ nilpotent $\Rightarrow V$ direkte Summe von zyklischen UVR

Jordansche Normalform:

Jordankästchen:
$$= \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_d(\lambda) \in K^{d \times d} \text{ (Länge } d\text{, Eigenwert } \lambda)$$
Jordanblock (zu EW λ_i – ggf. $d_{j,i} = d_{j+1,i}$):
$$= \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k,i}}(\lambda) \end{pmatrix} = D_i \in K^{\mu_a(\Phi,\lambda_i) \times \mu_a(\Phi,\lambda_i)}$$
JNF: V endl.-dim. K-VR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ zerfalle in Linearfaktoren, $\mathrm{Spec}(\Phi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$
$\Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathrm{Spec}(\Phi) \exists k_i, d_{1,i}, ..., d_{k_i,i} \in \mathbb{N}, d_{1,i} \geq \cdots \geq d_{k_i,i} \geq 1$:
$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix} \text{ (mit Basis } B \text{ von } V)$$
JNF-Eigenschaften (für EW λ):
Länge JB: $\mu_a(\Phi, \lambda)$
Anzahl JK: $\mu_g(\Phi, \lambda)$
Länge längstes JK:
$\min\{e \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^e) = \mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{e+1})\}$
Anzahl JK Größe i: $2 \dim(\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^i))$
$- \dim(\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{i-1})) - \dim(\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{i+1}))$

Transformationsmatrix: $= S \in K^{n \times n} : S^{-1} A S = A'$ JNF

1. $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$: Bestimme Basisvektoren für $\mathrm{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$, $\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^2)$, ...
   bis Dimension sich nicht mehr ändert
   ($:= p \cong$ Länge längstes JK)
2. Bestimme die Basisvektoren von $\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^p)$, die nicht in $\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^{p-1})$ liegen ($=: v_1, \ldots$)
3. Füge $v_1, (\Phi - \lambda I_n) v_1, (\Phi - \lambda I_n)^2 v_1, \ldots, v_2, (\Phi - \lambda I_n) v_2, \ldots$ S hinzu (Potenzen bis p)
   Achtung: Zu JK mit Länge k gehören Basisvektoren aus $\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda I_n)^k)$!
4. Wiederhole 2.-3. für $p - 1$ (Potenzen dann nur bis $p - 1$)
5. Angekommen bei $\mathrm{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$: Ggf. S um zu S lin. unabh. Vektoren aus $\mathrm{Kern}(\Phi - \lambda I_n)$ ergänzen
6. 2.-5. für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ durchführen

II. BILINEARFORMEN

Bilineare Abbildung:

$= \beta : V \times W \to U$ (U, V, W K-VRe) mit

1. $\forall v \in V : W \ni w \mapsto \beta(v, w) \in U$ linear
2. $\forall w \in W : V \ni v \mapsto \beta(v, w) \in U$ linear

Paarung: $=$ bilineare Abb. mit $U = K$
nicht ausgeartet $\Leftrightarrow (\forall 0 \neq v \in V \exists w \in W : \beta(v, w) \neq 0)$
$\wedge (\forall 0 \neq w \in W \exists v \in V : \beta(v, w) \neq 0)$
Bilinearform: $=$ bilineare Abb. der Form $\beta : V \times V \to W$
BLF im Dualraum: nicht ausgeartete Paarung der Form $\beta : V \times V^* \to K$ mit $\beta(v, \lambda) \mapsto \lambda(v)$
Zusammenhang Abb.:

1. $\varphi \in \mathrm{Abb}(V, W^*)$
   $\Rightarrow \beta_\varphi : V \times W \ni (v, w) \mapsto (\varphi(v))(w) \in K$ Paarung
2. $\beta : V \times V^*(v, \lambda) \mapsto \lambda(v) \in K$ nicht ausgeartete Paarung

$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}(V, W^*) \cong \{$Paarungen auf $V \times W\}$

Fundamentalmatrix:

$\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle =: V$, $\langle \{c_1, \ldots, c_n\} \rangle =: W$, $\beta : V \times W \to U$ bilin.
$\rightsquigarrow u_{i,j} := \beta(b_i, c_j)$
$U = K \Rightarrow D_{BC} := (u_{ij}) \in K^{n \times n}$
β-*Fundamentalmatrix* bezüglich B und C
$v := \sum_{i=1}^n x_i b_i$, $w := \sum_{j=1}^m y_j c_j$: $\beta(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j u_{i,j}$
$\Rightarrow \beta(v, w) = (x_1, \ldots, x_n)^\top D_{BC}(\beta)(y_1, \ldots, y_m)$
$\rightsquigarrow \beta(v, w) = D_B(v)^\top D_{BC}(\beta) D_C(w)$

Bilineare Fortsetzung:

$\forall (f_{i,j}) \in K^{n \times m} \exists$ Paarung $\beta(b_i, c_j) = f_{i,j}(i, j)$
$=$ bilineare Fortsetzung v. $g : B \times C \ni (b_i, c_j) \mapsto f_{i,j} \in K$
$\beta : V \times W \to K$ nicht ausgeartet $\Leftrightarrow D_{BC}(\beta)$ invertierbar
($\rightsquigarrow \dim(V) = \dim(W) = \mathrm{Rang}(D_{BC}(\beta))$)

III. SKALARPRODUKTE

Längen und Abstände:

Skalarprodukt: $=$ BLF $F : V \times V \to K$ mit

1. **symmetrisch**: $F(x, y) = F(y, x)$
2. **positiv definit**: $x \neq 0 \Rightarrow F(x, x) > 0$

Standard-SKP: $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x^\top y$
Euklidischer Standardraum: $= (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
Norm: $= ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
Abstand: $= \mathrm{d}(v, w) = ||v - w||$
Rechenregeln:

1. **Dreiecksungleichung**: $\langle v, v\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$
   wenn $=$, dann v, w lin. abh.
2. **Cauchy-Schwartzsche Ungleichung**
   $||u - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v||$

Normierter VR: $= (V, N)$, $N : V \to \mathbb{R}$ mit

1. $\forall\ 0 \neq v \in V : N(v) > 0$
2. $N(\alpha v) = |\alpha|N(v)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
3. $N(v) + N(w) \geq N(v + w)$

Metrischer VR: $= (M, d)$, $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit

1. **Symmetrie**: $d(m, n) = d(n, m)$
2. **Positivität**: $d(m, n) \geq 0 \wedge (d(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n)$
3. **Dreiecksugl.**: $d(m, 0) \leq d(m, n) + d(n, 0)$

(V, N) normierter VR $\rightsquigarrow d_N(v, w) = N(v - w)$ Metrik
Winkel: $\angle(v, w) = \alpha \in [0, \pi] : \cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||}$
Orthogonalität: v, w orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0 \rightsquigarrow v \perp w$
Pythagoras: $v \perp w \Leftrightarrow ||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2$

Orthonormalbasen:

Orthogonalsystem: $= S \subseteq V$ (eukl. VR): $0 \notin S \wedge s, s' \in S : s \perp s'$
Orthonormalsystem: $=$ OGS mit $\forall s \in$ OGS $: ||s|| = 1$
$\rightsquigarrow$ OGS und ONS sind lin. unabh.
Orthogonalbasis: $= S \subseteq V : \langle S\rangle = V \wedge S$ ist OGS
Orthonormalbasis: $= S \subseteq V : \langle S\rangle = V \wedge S$ ist ONS
Fourierformel: V eukl. VR, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ V-ONB
$\rightsquigarrow V \ni v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i\rangle b_i$
$\rightsquigarrow D_B(v) = (\langle v, b_i\rangle)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$
$\rightsquigarrow \langle v, w\rangle = D_B(v)^\top D_B(w)$
Orthogonale Matrix: $= A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^\top A = I_n$
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ONB $\Rightarrow A = (v_1, \ldots, v_n)$ OGM
Orthogonale Gruppe: $= O(n)$
$= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top A = I_n\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
$\rightsquigarrow \det(A^\top A) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
Spezielle orthogonale Gruppe: $= SO(n)$
$= \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$
Orthogonalisierung: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von eukl. VR V
$\rightsquigarrow S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ OGB mit:

1. $w_1 = v_1$
2. $w_l = v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{\langle v_l, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i\right)$ $(l = 1, \ldots, n)$

$\rightsquigarrow \widetilde{S} := \{\frac{w_1}{||w_1||}, \ldots, \frac{w_n}{||w_n||}\}$ ist ONB
Iwasawa-Zerlegung: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot \mathcal{B}(n)$
$(\mathcal{B}(n) = \{$obere $n\times n-\triangle$-Matrizen mit pos. Diagonaleinträgen$\})$
Orthogonale Polynome: Eukl. VR $\mathbb{R}[X]_{\mathrm{Grad}\leq n}$ mit SKP
$\rightsquigarrow$ ONB bauen aus $\{1, x, \ldots, x_n\}$
$\rightsquigarrow$ orthogonale Polynome
Positiv definit: $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann äquivalent:

1. F positiv definit
2. $\exists\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (obere $\triangle$-Matrix) $: F = A^\top A$
3. $\forall\ 1 \leq k \leq n : \det((f_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}) > 0$

3.-1.: **Hurwitz-Kriterium**
Hauptminoren: Matrizen aus Bedingung v. Hurwitzkriterium
Minoren: Determinanten der Matrizen, die durch Streichen von Zeilen/Spalten von A entstehen

Orthogonale Komplemente, Abstände

Orthogonalraum: $M \subseteq V$ (eukl. VR)
$\rightsquigarrow M^\perp = \{v \in V \mid \forall m \in M : m \perp v\}$
$= \{v \in V \mid \forall m \in M : \langle v, m\rangle = 0\}$
$\rightsquigarrow N \subseteq M \Rightarrow M^\perp \subseteq N^\perp, M^\perp = \langle M\rangle^\perp$
Orthogonales Komplement: $U \leq V$ (eukl. VR)
$\rightsquigarrow U^\perp$ orthogonales Komplement zu U
$V = U \oplus U^\perp$
Orthogonale Projektion: $u \in U, u' \in U^\perp$.
$\Pi_U : V \ni (u + u') \mapsto u \in U$ orthogonale Projektion
(von V auf U längs $U^\perp$)
Abstand: $\mathrm{d}(A, B) = \inf(\{\mathrm{d}(a, b) \mid a \in A, b \in B\})$
Abstand von A und B $(\varnothing \neq A, B \subseteq V)$
$\rightsquigarrow \mathrm{d}(a, B) = \mathrm{d}(\{a\}, B)$
Abstand UVRe: $U, W \subseteq V$ (eukl. VR)

1. $\forall a \in V : \mathrm{d}(a, U) = ||\Pi_{U^\perp}(a)||$
2. $\forall A \subseteq V : \mathrm{d}(A, U) = ||\Pi_{U^\perp}(A), 0)||$
3. $\mathrm{d}(v + W, U) = ||\Pi_{(U+W)^\perp}(v)||$

Affiner Teilraum: $= v + W$ $(W \leq V, v \in V)$
Affine Gerade (durch $a, b \in V$): $= \overline{a, b} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in K\}$
$(= a + K(b - a))$
Strecke: $= [a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$
(zwischen $a, b \in V$, $K = \mathbb{R}$)
Lot: $= [u, v - w]$ Lot zwischen U und $v + W$
(Lotfußpunkte $u \in U$, $v - w \in V + W$)

IV. SKALARPRODUKTE UND HOMOMORPHISMEN

Isometrien

Isometrie: $= f : (M, d) \to (N, e)$, $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$
Isometriegruppe: $= \mathrm{Iso}(M, d)$
$= \{f : M \to M \mid f$ ist symmetrische Isometrie$\}$
lineare Isometrie: $= \Phi : V \to W : \Phi \in \mathrm{Abb}(V, W) \wedge \Phi$ ist Isometrie
Polarisierungsformel: SKP aus Metrik:
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle)$
$\rightsquigarrow \Phi$ ist lin. Iso $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle_V = \langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle_W$
Koordinatenabb.: B V-ONB $\rightsquigarrow D_B : V \to \mathbb{R}^{\dim(V)}$ lin. Iso.
Drehkästchen: $\Phi \in \mathrm{Aut}((\mathbb{R}^2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ lin. Iso.
$\rightsquigarrow$ Beschreibung bzgl. Standardbasis S: $D_{SS}(\Phi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$
mit $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$
$\rightsquigarrow \exists\varphi \in [0, 2\pi] : a = \cos(\varphi), c = \sin(\varphi)$
$\Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) = \pm\left(\begin{smallmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$
$D_{SS}(\Phi) = D_\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$ Drehkästchen zu Winkel φ
Kriterium lin. Iso.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V, W eukl. $\mathbb{K}$-VR, $\Phi \in \mathrm{Abb}(V, W)$
$\rightsquigarrow \Phi \in \mathrm{Iso}(V, W) \Leftrightarrow \forall V$-ONB injektiv auf W-ONB abgebildet
$\rightsquigarrow \dim(V) < \infty$: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V, W)$
$\Leftrightarrow \exists$ ONB, die injektiv auf ONS abgebildet wird
$\rightsquigarrow \Phi \in \mathrm{Iso}(V, W) \Leftrightarrow D_{BB}(\Phi)$ ist orthogonal/unitär
Eigentliche Bewegung: $=$ lineare Isometrie mit Determinante 1
Häufigkeit lin. Iso.: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V) \Rightarrow \exists\delta \in V$, lin. Iso. $\Phi_0 \forall v \in V$: $\Phi(v) = \Phi_0(v) + \delta$
Darstellung Iso.: Jede V-W-Isometrie kann als lineare V-W-Isometrie mit W-Translation dargestellt werden
Spiegelung: $= \sigma_v : V \ni x \mapsto x - 2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v \in V$
(Spiegelung an Hyperebene $v^\perp, 0 \neq v \in V$)
Jede lin. Iso. ist Produkt von höchstens $\dim(V)$ Spiegelungen
Iso. $+$ inv. Komplement: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$, $U \leq V$ Φ-invariant
$\Rightarrow U^\perp$ Φ-invariant
Eigenwerte: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V eukl. $\mathbb{K}$-VR

1. $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ linear $\Rightarrow \forall\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : |\lambda| = 1$
2. $\alpha \in K, |\alpha| = 1, V \neq \{0\} \Rightarrow \exists\ \Phi \in \mathrm{Iso}(V) : \alpha \in \mathrm{Spec}(\Phi)$

Isometrienormalform: $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ linear:

1. V hat ONB aus EV ($\cong \Phi$ orthogonal diagonalisierbar)
2. $V =$ direkte $\sum$ zueinander orthogonaler Φ-inv., ein-/zweidim. UVR
   $\rightsquigarrow \Phi$ wirkt auf 2-dim. Summanden als Drehung

Iso-NF: Matrizen: $n \in \mathbb{N}_0,\ A \in O(n)$
$\Rightarrow \exists\ \phi_1, \ldots, \phi_l \in (0, \pi),\ S \in O(n)$:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I_{d_+} & & & & \\ & -I_{d_-} & & & \\ & & D_{\varphi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\varphi_l} \end{pmatrix}$$

(d_+: $\dim(\mathrm{Eig}(A,1))$, d_-: $\dim(\mathrm{Eig}(A,-1))$, l: $\frac{1}{2}(n - d_+ - d_-)$)

Klausurmatrizen: Es sei $B := A + A^\top$.

1. Bestimme $\mathrm{CP}_B(\lambda)$
2. $\mu_a(B, 2) = \#$ 1er in Iso-NF
3. $\mu_a(B, -2) = \#$ -1er in Iso-NF
4. Restliche $\lambda_i \in \mathrm{Spec}(B)$: Drehkästchen
   (mit $\cos(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{2}$, $\sin(\lambda_i) = \sqrt{1 - \frac{\lambda_i^2}{4}}$)
5. **Transformationsmatrix**: Alle $\mathrm{Eig}(\lambda_i)$ berechnen, für jeden ER ONB aus EV berechnen (Gram-Schmmidt)

Selbstadjungierte Endomorphismen

$= \Phi \in \mathrm{End}(V) \forall v, w \in V : \langle v, \Phi(w) \rangle = \overline{\langle \Phi(v), w \rangle}$
$\rightsquigarrow \Phi$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow D_{BB}(\Phi) = \overline{D_{BB}(\Phi)^\top}$ (ONB B)

Eigenwerte: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann:

1. $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\forall U \leq V$ Φ-inv.: $U^\perp$ Φ-inv.

Spektralsatz: $\{0\} \neq V$ endl.-dim. eukl. VR, $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$ selbstadj.
$\Leftrightarrow V$ hat ONB aus Φ-EV, $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : \lambda \in \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. $\Rightarrow \exists\ S \in O(n) : S^{-1}AS$ Diagonalmatrix
$\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. positiv definit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) : \lambda > 0$

Trägheitssatz: $P : V \times V \to \mathbb{R}$ symm. BLF. Dann:

1. $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ mit
   (a) P auf V_+ positiv definit
   (b) P auf V_- negativ definit
   (c) P auf V_0 konstant 0
   (d) $P(v_o, v_+) = P(v_0, v_-) = P(v_-, v_+) = 0$
2. $\dim(V_0), \dim(V_-), \dim(V_+)$ nur von P abhängig

Normale Endomorphismen

Adjungiert: $\Phi : V \to W$ linear $\rightsquigarrow \Phi^* : W \to V$ zu Φ adjungiert
$\Leftrightarrow \forall v \in V, w \in W : \langle \Phi(v), w \rangle_W = \langle v, \Phi^*(w) \rangle_V$

Normal: $V = W$ und Φ^* ex. $\Rightarrow \Phi$ normal, wenn $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$
(Matrizen: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal $\Leftrightarrow AA^\top = A^\top A$)
$\rightsquigarrow \Phi$ selbstadjungiert $\Rightarrow \Phi = \Phi^*$, Φ normal
$\rightsquigarrow \Phi$ Isometrie $\Rightarrow \Phi^{-1} = \Phi^*$, Φ normal
$\rightsquigarrow D_{BC}(\Phi^*) = (D_{CB}(\Phi))^*$ (ONB B, C von V, W)
Blockdiagonalmatrix mit $(1 \times 1)/(2 \times 2)$-Matrizen ist normal

Invariante Komplemente: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal, $U \leq V$ Φ-inv.
$\Rightarrow U^\perp$ Φ-invariant
$\rightsquigarrow \Phi|_U \in \mathrm{End}(U)$ normal

Spektralsatz: $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ (V eukl. $\mathbb{K}$-VR) normal. Dann:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: es gibt eine ONB aus Φ-EV
   $\rightsquigarrow A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal
   $\Rightarrow \exists\ S \in U(n) : S^{-1}AS$ Diagonalmatrix
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: V ist orthogonale $\sum$ aus ein-/zweidim. Φ-inv. UVR
   $\rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal
   $\Rightarrow \exists\ S \in O(N) : S^{-1}AS$ Blockdiagonalmatrix
   (Diagonale entweder reelle Eigenwerte oder Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, b \neq 0$)