

Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1	Einstieg — Metrische Räume	5
1.1	Vorbemerkungen	5
1.2	Definitionen zu metrischen Räumen	5
1.3	Beispiele zu metrischen Räumen	6
2	Längenmetriken	9
2.1	Graphen — Definitionen	9

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

1.1.1 Kartographieproblem.

Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

1.2.1 Definition — Metrik.

Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist eine *Metrik* (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität:** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2.2 Definition — Metrischer Raum.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

1.2.3 Definition — Pseudometrik.

Eine *Pseudometrik* erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

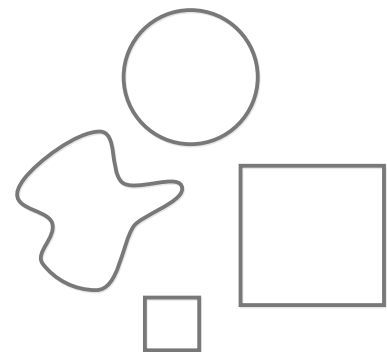


Abbildung 1.1: Diese Objekte sind "topologisch äquivalent" (später mehr zur genauen Definition), aus Sicht der metrischen Geometrie allerdings nicht.

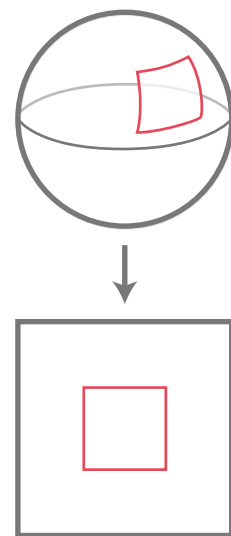


Abbildung 1.2: Die Projektion einer Fläche auf einer Kugel auf Papier — nicht längentreu möglich!

1.2.4 Definition — Abgeschlossener k -Ball von x .

Eine Teilmenge $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossener r -Ball um x* .

1.2.5 Definition — Abstandserhaltende Abbildung.

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *abstandserhaltend*, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

1.2.6 Definition — Isometrie.

Eine *Isometrie* ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen**1.3.1 Beispiel — Triviale Metrik.**

Menge X , $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \rightsquigarrow$ jede Menge lässt sich zu einer Metrik verwursten.

1.3.2 Beispiel — Simple Metriken.

Sei $X = \mathbb{R}$.

- $d_1(s, t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s, t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

1.3.3 Beispiel — Standardmetrik.

$X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$ ist die (euklidische) Standardmetrik auf dem \mathbb{R}^n . Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung¹.

Bemerkung (aus LA II): Isometrien von (\mathbb{R}^n, d_e) sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Anmerkung: Wenn $d(x, y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

¹ **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

1.3.4 Beispiel — Maximumsmetrik.

$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ist Metrik.

1.3.5 Beispiel — 1.3.3 und 1.3.4 allgemein: Norm.

V sei \mathbb{R} -Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit:** $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität:** $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung:** $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) := ||v - w||$.

1.3.6 Beispiel — Einheitssphären.

$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ ist die n -te *Einheitssphäre*.

Auf dieser ist mit $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$ die *Winkel-Metrik* definiert.

1.3.7 Beispiel — Hamming-Metrik.

Es ist \mathbb{F}_2 der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n . Die *Hamming-Metrik* ist definiert als

$$d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

Längenmetriken

2.1 Graphen — Definitionen

2.1.1 Definition — Graph.

Ein Graph $G = (E, K)$ besteht aus einer Ecken-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ ($u, v \in E$), genannt *Kanten*.

2.1.2 Definition — Erreichbarkeit.

Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist *erreichbar* von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

2.1.3 Definition — Zusammenhängend.

$G = (E, K)$ heißt *zusammenhängend*, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

2.1.4 Beispiel — Wortmetrik.

Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \quad (2.1)$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.

Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Sigma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

2.1.5 Definition — Wortmetrik.

$$d_S(g, k) := |g^{-1}k|$$

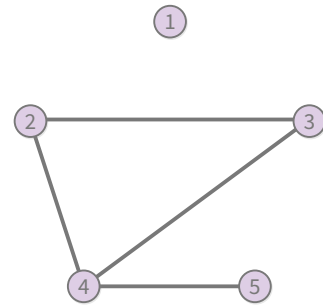


Abbildung 2.1: Ein einfacher Graph. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da die Ecke 1 nicht von den anderen Ecken aus erreicht werden kann.

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g, h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

2.1.6 Definition — Cayley-Graph.

Der *Cayley-Graph* $\text{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die Graphen-Metrik auf $\text{Cay}(\Sigma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.1.7 Beispiel — Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 als Standardmetrik.

Sei

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare¹ Kurve.

Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{eukl}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad (\text{via Polygon-Approximation}) \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{eukl}}(g)} = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e(p, q)}.$$

2.1.8 Lemma — Unabhängigkeit von L_{eukl} .

1. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis:

¹ **Hinweis:** Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞ -differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus² $t : [c, d] \rightarrow [a, b], s \mapsto t(s)$ gilt:

$$L_{\text{eukl}}(c(t(s))) = L_{\text{eukl}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.

Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von p verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \|(T_p \circ c)'\| dt = \int_a^b \|c'\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen.

□

- Drehung.

Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\theta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos \theta x(t) - \sin \theta y(t), \sin \theta x(t) + \cos \theta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel θ gedrehte Kurve.

Da D_θ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\theta \circ c(t))' = D_\theta \cdot c'(t)$$

und damit

$$\|(D_\theta \circ c(t))'\| = \|D_\theta \cdot c'\| \stackrel{\text{orth.}}{=} \|c'\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen.

□

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

■

2.1.9 Lemma — Geraden sind am kürzesten.

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in \mathbb{R}^2 sind genau die Geradensegmente.

² **Diffeomorphismus:** Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen 2.1.8 ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.

Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q' . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{eukl}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q' .

\Rightarrow Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.

Gilt für eine Kurve c , dass $L_{\text{eukl}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ ($\forall t$), also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist \tilde{c} auch (parametrisiertes) Geradensegment. ■

2.1.10 Definition — Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 -Kurven.

Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q . Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{eukl}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

2.1.11 Satz — "Neuer" metrischer \mathbb{R}^2 .

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu (\mathbb{R}^2, d_e) .