Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier & Maximilian Franz & Nadine Schorpp

8. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

1

Nichteuklidische Geometrie — Hyperbolische Ebene

Die euklidische Geometrie verfolgt einen axiomatischen Zugang — es ist beispielsweise nicht näher definiert, was ein Punkt ist. Genauso gibt es das Parallelen-Axiom, welches besagt, dass es zu einer gegebenen Gerade g und einem Punkt P, der nicht auf dieser Geraden liegt, genau eine Gerade gibt, die parallel zu g ist und P beinhaltet. Es wurde lange versucht, das Parallelen-Axiom aus anderen Axiomen zu konstruieren, allerdings gelang das nicht.
Um 1900 wurde von Poincaré und Klein die hyperbolische Ebene formalisiert.

Definition 1.0.1 (Hyperbolische Ebene). Es sei $H^2 := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$ die obere Halbebene. Es seien

- **Punkte** die Elemente in H^2 und
- **Geraden** die Halbkreise mit Zentrum auf der x_1-Achse und die Parallelen zur x_2-Achse.

Leicht lässt sich zeigen, dass es wie in der euklidischen Geometrie auf der hyperbolischen Ebene eine Gerade zwischen zwei beliebiegen Punkten gibt. Allerdings ist diese Gerade hier im Allgemeinen nicht eindeutig. Das Parallelen-Axiom gilt auf der hyperbolischen Ebene nicht, da hier zu gegebener Gerade g und Punkt P mehrere Geraden $\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}, \ldots$ gefunden werden können, sodass

$$\widetilde{g_1} \cap g = \widetilde{g_2} \cap g = \cdots = \varnothing.$$

1.1 Von Gauß zu Riemann

Sei M eine m-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jedem $p \in M$ definiert man abstrakt einen Tangentialraum T_pM wie folgt:
Tangentialvektoren sind Äquivalenzklassen von differenzierbaren Kurven durch $p \in M$. Genauer: Ist (U, φ) eine Karte um p und $c_1, c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c_1(0) = c_2(0) = p$, so ist

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi \circ c_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi \circ c_2(t).$$

Man kann zeigen:

- T_pM ist n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- T_pM ist unabhängig von (U, φ).

Definition 1.1.1 (Riemannsche Metrik). Eine **Riemannsche Metrik** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Familie von Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf T_pM, die differenzierbar von p abhängt.
Dieses Konzept verallgemeinert die erste Fundamentalform von Flächen in $\mathbb{R}^3$ auf n-dimensionale Mannigfaltigkeiten[1].

Beispiel 1.1.2 (Einfache Beispiele Riemannscher Mannigfaltigkeiten $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$).

1. $M = U$ = offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
   Hier ist $T_pM = T_pU = T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
   Eine Riemannsche Metrik auf U ist gegeben durch eine Abbildung

$$\begin{aligned} g : U &\to \mathrm{Sym}(n) = \text{ pos. definite, symmetrische } n \times n\text{-Matrizen} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto (g_{ij}(u_1, \dots, u_n)) \end{aligned}$$

2. Spezialfall für $n = 2$:
   $U = \mathbb{R}^2$, $g_{ij}(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ = konstant.
   Das ist genau die euklidische Geometrie aus Kapitel 1. Das heißt, dass riemannsche Metriken die euklidische Geometrie verallgemeinern.
3. $M = H^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\right\}$ = obere Halbebene.
   Hier ist $g_{ij}(x, y) = \frac{\delta_{ij}}{y^2}$, also $(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$.

[1] Weiteres hierzu in der Vorlesung "Differentialgeometrie"

Bemerkung 1.1.3 (Wozu brauchen wir riemannsche Metriken?).
Sei $n = 2$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für das Skalarprodukt von zwei Tangentialvektoren in $T_{(u_1,u_2)}M \cong \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} g_{u_1 u_2}(a,b) &:= \langle a, b\rangle_{(u_1,u_2)} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_1,u_2) a_i b_j \\ &= g_{11}(u_1,u_2)a_1 b_1 + 2g_{12}(u_1,u_2)a_1 b_2 + 2g_{12}(u_1,u_2)a_2 b_1 + g_{22}(u_1,u_2)a_2 b_2 \end{aligned}$$

Insbesondere sind dadurch Längen von und Winkel zwischen Tangentialvektoren definiert:

$$\begin{aligned} \|a\|_{(u_1,u_2)} &= \sqrt{g(u_1,u_2)(a,a)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u_1,u_2)(a_i,a_j)} \\ \cos\angle(a,b) &= \frac{g(u_1,u_2)(a,b)}{\|a\|_{(u_1,u_2)}\,\|b\|_{(u_1,u_2)}} \end{aligned}$$

Damit kann man wie in der Flächentheorie Längen von differenzierbaren Kurven, Flächeninhalt von Gebieten in U und allgemeiner alle Größen der inneren Geometrie für riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

1.2 Ebene hyperbolische Geometrie

Definition 1.2.1 (Hyperbolische Länge). Sei $H^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene mit der hyperbolischen riemannschen Metrik $g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$.
Für eine differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} c : [a,b] &\to H^2, \\ t &\mapsto c(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

definieren wir die **hyperbolische Länge**:

$$L_h(c) := \int_a^b \left\|c'\right\|_H \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} \mathrm{d}t.$$

Alternativ in komplexer Schreibweise:

$$c(t) := z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad \text{mit} \quad L_h(c) = \int_a^b \frac{|z'(t)|}{\mathrm{Im} z(t)} \mathrm{d}t.$$

Beispiel 1.2.2. Sei $c : [a,b] \ni t \mapsto (0,t) \in H^2$ das Stück der imaginären Achse zwischen ia und ib. Dann gilt:

$$L_h(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \ln b - \ln a.$$

Bemerkung: Es gilt $\lim_{\mathrm{i}a \to \infty} L_h(c) = \infty$.

Wie die euklidische Ebene hat auch die hyperbolische Ebene viele Isometrien: Betrachte dazu die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, also die Menge aller reellen 2×2-Metrizen mit Determinante 1, versehen mit der Matrizen-Multiplikation.

Definition 1.2.3 (Möbius-Transformation). Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ betrachten wir die **Möbius-Transformation**:

$$T_A : H^2 \ni z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in H^2.$$

Wohldefiniertheit: Sei $w = T_A(z)$. Es ist

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(w - \overline{w}) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{z - \overline{z}}{|cz + d|} = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|cz + d|^2}.$$

Es gilt auch $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$, also ist T_A bijektiv bzw. $\det A = ad - bc$.

Lemma 1.2.4 (MT-Invarianz von Kurven). Die hyperbolische Länge einer differenzierbaren Kurve in H^2 ist invariant unter den Möbius-Transformationen

$$\{T_A : A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})\}$$

von H^2, also

$$\forall A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : L_h(T_a \cdot c) = L_h(c).$$

Beweis. Sei $z(t)$ eine Kurve in H^2 und $w(t) := T_a(z(t))$ die Bildkurve. Mit der Kettenregel und wegen $\det A = ad - bc = 1$ folgt:

$$w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2}z' = \frac{1}{(cz+d)^2}z'.$$

Weiter gilt:

$$\mathrm{Im}(w(t)) = \frac{1}{(cz(t)+d)^2}\mathrm{Im}(z(t))$$

und somit ist

$$\frac{\left|w'(t)\right|}{\mathrm{Im}(w(t))} = \frac{\left|z'(t)\right|}{\left|(cz+d)^2\right|}\frac{|cz+d|^2}{\mathrm{Im}(z(t))} = \frac{\left|z'(t)\right|}{\mathrm{Im}(z(t))}.$$

□

1.3 Geodätische

Satz 1.3.1 (Geodätische). Kürzeste Verbindungskurven (**Geodätische**) zwischen PUnkten von (H^2, d_h) sind geeignete parametrisierte Halbkreise und Geraden orthogonal zur reellen Achse.
Solche Halbkreise haben ihr Zentrum auf der reellen Achse.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.3.2. Sei K ein euklidischer Halbkreis oder eine Halbgerade, welche die reelle Achse in einem Punkt α orthogonal schneidet. Dann ist

$$T(z) = (z-\alpha)^{-1} + \beta$$

eine Möbius-Transformation (also $T = T_A$ für ein $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) und bildet K für ein geeignetes β auf die imaginäre Achse ab.

Hinweis: $T = T_\beta \circ J \circ T_\alpha$, wobei $J(z) = -\frac{1}{z}$ und generell ist $T_\gamma(t) = t + \gamma$ eine Translation um γ.

Wir beweisen nun den Satz.

Beweis. Seien z_1, z_2 zwei Punkte in H^2. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen z_1 und z_2.

1. **Fall 1**: $z_1 = ai$, $z_2 = bi$ mit $b > a$.
   Ist $c : [0,1] \ni t \mapsto c(t) = (x(t), y(t)) \in H^2$ ein Testweg zwischen ai und bi, so ist

$$L_h(c) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y(t)}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{y'^2}}{y(t)}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{\left|y'\right|}{y(t)}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{y(t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln(b) - \ln(a).$$

Also ist die hyperbolische Länge des Geradensegments auf der imaginären Achse zwischen z_1 und z_2.

2. **Fall 2**: $z_1, z_2 \in H^2$ beliebig. Dann existiert genau eine Gerade (falls $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$) bzw ein Halbkreis k mit Zentrum auf der reellen Achse, der z_1 und z_2 trifft.

   Nach dem Lemma existiert eine Möbius-Transformation — also eine Isometrie — T_A von H^2, sodass $T_A(K)$ = imaginäre Achse. Da T_A Abstände erhält, bildet sie kürzeste Verbindungen auf kürzeste Verbindungen ab. Daraus folgt die Behauptung.

Korollar 1.3.3. Je zwei Punkte $p, q \in H^2$ können durch eine eindeutige Geodätische verbunden werden und der hyperbolische Abstand ist genau gleich der hyperbolischen Länge des eindeutigen geodätischen Segments zwischen p und q.

1.4 Nochmals Gauß-Bonnet

Definition 1.4.1 (Hyperbolischer Flächeninhalt). Der **hyperbolische Flächeninhalt** für $A \subset H^2$ ist

$$\mu(A) := \iint_A \sqrt{\det(g_{ij}(z))}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq x \quad \text{(falls das Integral existiert).}$$

Satz 1.4.2 (Flächeninhalt invariant unter Isometrien). Der hyperbolische Flächeninhalt ist invariant unter Isometrien (also Möbius-Transformationen). Falls für $A \subset H^2$ $\mu(A)$ existiert ung T_B eine Möbius-Transformation für $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist, so gilt

$$\mu(T_B(A)) = \mu(A).$$

Beweis. Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $T(z) = \frac{dz+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$ und $w := T(z) = u + \mathrm{i}v$. Es gilt für die Jacobi-Determinante:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{|cz+d|^4}.$$

Also gilt mit der Transformation für Integrale:

$$\mu(T(A)) = \iint_{T(A)} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2} = \iint_A \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{v^2} = \iint_A \frac{1}{|cz+d|^4}\frac{|cz+d|^4}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu(A).$$

□

Definition 1.4.3 (Hyperbolisches Polygon). Ein **hyperbolisches Polygon** mit n Seiten ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{H^2} := H^2 \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, die durch n geodätische Segmente (≅ Seiten) begrenzt ist. Wenn sich 2 Segmente in genau einem Punkt schneiden, so heißt der Schnittpunkt **Ecke** einer Polygons. Wir lassen Ecken im "Rand und Unendlichen" $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu, aber keine Segmente.

Bemerkung 1.4.4 (Hyperbolische Winkelmessung). Die Messung von Winkeln erfolgt im Hyperbolischen über Tangenten an Kurven. Seien dazu $a, b \in T_B H^2$ zwei Tangentialvektoren an die geodätischen Segmente durch den Punkt z:

$$\cos \measuredangle_{\text{hyp}}(a,b) \overset{\substack{\text{Def. Riemann-}\\\text{Metrik}}}{=} \frac{\langle a,b\rangle_z}{\|a\|_z \, \|b\|_z} = \frac{\frac{\langle a,b\rangle_{\text{euk}}}{\text{Im}(z)^2}}{\frac{\|a\|_{\text{euk}}}{\text{Im}(z)} \frac{\|b\|_{\text{euk}}}{\text{Im}(z)}} = \frac{\langle a,b\rangle_{\text{euk}}}{\|a\|_{\text{euk}} \, \|b\|_{\text{euk}}} = \cos \measuredangle_{\text{euk}}(a,b)$$

Also entspricht der hyperbolische Winkel dem euklidischen Winkel.

Satz 1.4.5 (Gauß-Bonnet für hyperbolische Ebene). Der Flächeninhalt einer hyperbolischen Dreiecks ist durch die Winkel vollständig bestimmt:
Sei $\triangle$ ein hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ. Dann gilt:

$$\mu(\triangle) = \pi - \alpha - \beta - \gamma \leq \pi.$$

Bemerkung 1.4.6 (Bemerkungen zum Satz).

1. Ein analoger Satz gilt **nicht** in der euklidischen Ebene. Ein gleichseitiges Dreieck kann beliebig groß werden, die Innenwinkel bleiben trotzdem alle gleich.
2. Für nicht entartete Dreiecke gilt:

$$0 < \mu(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha + beta + \gamma < \pi.$$

3. Es existieren in der hyperbolischen Ebene Dreiecke mit $\mu(\triangle) = \pi$. Das ist der Fall, wenn alle Ecken in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind.

   Beweis.
   Fall 1: Eine Ecke E liegt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, der Winkel bei E ist also 0. Durch eine Möbius-Transformation T_A mit $A \in \text{SL}(2,\mathbb{R})$ können wir erreichen, dass E nach ∞ abgebildet wird (Ansatz: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $T(z) = \infty$, $ab - cd = 1$, Gleichungssystem).
   Dann hat man ein Dreieck der Gestalt $\triangle_2$. Dabei ändert sich der Flächeninhalt nicht. Es genügt also den Fall zu betrachten, dass 2 Seiten des Dreiecks vertikal sind.
   Durch eine weitere Möbius-Transformation der Form

$$z \mapsto z + k \ (k \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad z \mapsto \lambda z \ (\lambda > 0)$$

können wir die Seite c auf den Einheitskreis um 0 abbilden — wieder ohne Änderung des Flächeninhalts.
Wir haben also ohne Einschränkung folgende Situation:
Und nun ist

$$\mu(\triangle) = \iint_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \pi-\alpha-\beta.$$

Fall 2: $\triangle$ hat keine Ecken in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir führen diesen Fall auf den ersten Fall zurück, indem wir eine Ecke ins Unendliche führen. Dazu verlängern wir eine Seite:
Das neue Dreieck $BCD =: \widetilde{\triangle}$ mit Winkeln $\delta, 0, \pi - \beta$ entsteht. Nun ist

$$\mu(\triangle) = \underbrace{\mu(ACD)}_{=\triangle\cup\widetilde{\triangle}} - \mu(\widetilde{\triangle}) \overset{\text{F1}}{=} (\pi - \alpha - (\gamma + \delta)) - (\pi - \delta - (\pi - \beta)) = \pi-\alpha-\beta-\gamma.$$

□

1.5 Einheitsmodell für die hyperbolische Ebene, Krümmung

Sei $D^2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die (offene) **Einheitsscheibe** (eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$). Die Abbildung

$$M : H^2 \to D^2, z \mapsto \frac{\mathrm{i}z + 1}{z + \mathrm{i}}$$

ist eine injektive Abbildung von H^2 nach D^2.[2]
Wir definieren eine Metrik auf D^2 durch

$$d_h^*(z, w) := d_h\left(M^{-1}(z), M^{-1}(w)\right).$$

Wir verlangen also per Definition, dass M eine Isometrie ist.

Bemerkung 1.5.1. d_h^* ist die von der riemannschen Metrik

$$(g_{ij}(z)) := \left(\frac{4\delta_{ij}}{\left(1 - |z|^2\right)^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\left(1-|z|^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\left(1-|z|^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

auf D^2 induzierte Längenmetrik, für die gilt:

$$L_h^*(M(c)) = L_h(c).$$

[2] siehe Übungsblatt 11.4

Satz 1.5.2.

1. Die euklidischen Rotationen um $O \in D^2$ sind Isometrien von (D^2, d_h^*).
2. Für $0 < r < 1$ gilt

$$d_h^*(0, \mathrm{i}r) = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Beweis.

1. Wir benutzen die riemannsche Metrik auf D^2. Sei $z = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ eine Kurve in D^2 und $R(z(t))$ die Bildkurve einer Rotation:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Dann gilt:

$$|R(z(t))| = |z(t)| \quad \text{und} \quad R(z(t))' = R(z'(t)),$$

da R linear ist. Also gilt:

$$L_{h^*}(R(z(t))) = \int_a^b \frac{2\left|(R(z(t)))'\right| \mathrm{d}t}{1 - |R(z(t))|^2} = \int_a^b \frac{2\left|z'(t)\right| \mathrm{d}t}{1 - |z(t)|^2} = L_{h^*}(z(t)).$$

Daraus folgt die Behauptung.

2. Eine Abschätzung der Länge einer beliebigen Kurve in D^2, die 0 und ir verbindet, zeigt

$$L_{h^*}(c) = \int_0^r \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 2\operatorname{arctanh}(r) \quad \text{und}$$
$$h^* = \text{Länge des Geraden-Segments } [0, \mathrm{i}r] = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Folgerung 1.5.3.

1. Radiale Segmente durch 0 sind Geodätische in D^2.
   Ergänzung: Man kann zeigen, dass Geodätische in D^2 Kreis-Stücke (in D^2) sind, die den Randkreis orthogonal schneiden.
2. Die hyperbolischen Kreise in D^2 um 0 mit hyperbolischem Radius ρ,

$$S_\rho(0) := \left\{ z \in D^2 : d_h^*(0, z) = \rho \right\},$$

sind genau die euklidischen Kreise um 0 mit euklidischem Radius r so, dass

$$\rho = 2\operatorname{arctanh}(r) \iff r = \tanh \frac{\rho}{2}.$$