# Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

# *Inhaltsverzeichnis*

**1 Übungen** **5**
1.1 2017-10-27 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

# *Übungen*

## *1.1 2017-10-27*

### 1.1.1 Aufgabe 1.

*Zeigen Sie:* $(\mathbb{R}^2, d)$ *mit* $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$ *ist pseudometrischer Raum.*

- **Positivität**. Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x) = 0$.
  $d(x, x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0$.

- **Symmetrie**. Zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$.
  $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y, x)$.

- **Dreiecksungleichung**. Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
  $d(x, y) + d(y, z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \geq |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x, z)$.

### 1.1.2 Aufgabe 2.

Gegeben:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $\|x\| \geq 0 \forall x$, $x = 0 \iff \|x\| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.
**Sublinearität**:

1.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i|+|y_i| \\ &= \|x\|_1+\|y\|_1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\le} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2+\|y\|_2)^2 \\ &\Rightarrow \|x+y\|_2 \le \|x\|_2+\|y\|_2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i+y_i| \le \max_{i=1,\dots,n}(|x_i|+|y_i|) \\ &\le \max_{i=1,\dots,n}\max_{j=1,\dots,n}(|x_i|+|y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

### 1.1.3 Aufgabe 3.

Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, $r_1,r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:
   (a) Falls $d(x,y) \ge r_1+r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
   Dann ist $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y) < r_1+r_2$ ↯ □
   (b) Falls $d(x,y) \le r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}d(x,z) \ge r_1 &= (r_1-r_2)+r_2 \\ &> d(x,y)+d(z,y) \quad ↯ \quad \square\end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:
   (a) Sei $X=\{0,1\}$ und $d$ Metrik auf $X$ mit $d(0,1)=1$.
   **Idee**: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen keine Elemente.
   Wir wählen $r_1=r_2=\frac{2}{3}$, $x=0$, $y=1$. Wir haben
   $B_{r_1}(0)=\{0\}$, $B_{r_2}(1)=\{1\}$, aber $r_1+r_2=\frac{4}{3} > d(0,1)$.
   (b) Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1=r_2=100$, $x=0$, $y=1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0)=\{0,1\}$, $B_{r_2}(1)=\{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100-100$.

### 1.1.4 Aufgabe 4.

1. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^2, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *isometrisch sind.*
   Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
   **Behauptung**: $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.
   $f$ ist linear mit Rang 2, also bijektiv.
   Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

   $$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p, q).$$

   Es ist

   $$\begin{aligned} d_1(p,q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|,\ |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= \text{(undeutlich)} = d_\infty(f(p), f(q)). \qquad \square \end{aligned}$$

2. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ***nicht*** *isometrisch sind für* $n > 2$.
   Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1 : (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2 : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.
   Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. $\varphi$ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.
   Die Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p, q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.
   Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p, q) = 2$ und $d_1(p, 0) = 1$. Da $\varphi$ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$).
   Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.
   Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).
   Es gilt $d_1(p, q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide} > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2$ ↯