Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhalt

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

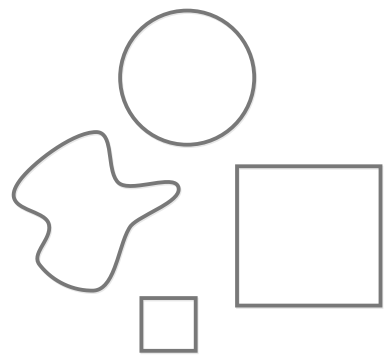

Abbildung 1.1: Diese Objekte sind "topologisch äquivalent" (später mehr zur genauen Definition), aus Sicht der metrischen Geometrie allerdings nicht.

1.1.1 Kartographieproblem.

Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

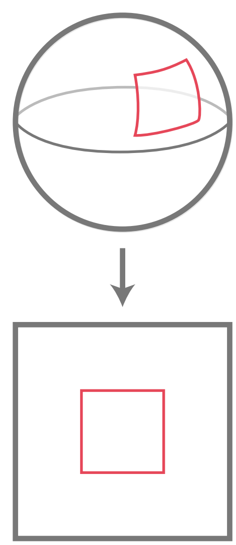

Abbildung 1.2: Die Projektion einer Fläche auf einer Kugel auf Papier — nicht längentreu möglich!

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

1.2.1 Definition — Metrik.

Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine *Metrik* (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2.2 Definition — Metrischer Raum.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

1.2.3 Definition — Pseudometrik.

Eine *Pseudometrik* erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

1.2.4 Definition — Abgeschlossener k-Ball von x.
Eine Teilmenge $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossener r-Ball um* x.

1.2.5 Definition — Abstandserhaltende Abbildung.
Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *abstandserhaltend*, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y).$$

1.2.6 Definition — Isometrie.
Eine *Isometrie* ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

1.3.1 Beispiel — Triviale Metrik.
Menge X, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ jede Menge lässt sich zu einer Metrik verwursten.

1.3.2 Beispiel — Simple Metriken.
Sei $X = \mathbb{R}$.

- $d_1(s,t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

Anmerkung: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

1.3.3 Beispiel — Standardmetrik.
$X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = ||x - y||$ ist die (euklidische) Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[1].

Bemerkung (aus LA II): Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

[1] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

1.3.4 Beispiel — Maximumsmetrik.
$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ ist Metrik.

1.3.5 Beispiel — 1.3.3 und 1.3.4 allgemein: Norm.
V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) := ||v - w||$.

1.3.6 Beispiel — Einheitssphären.
$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ ist die n-te *Einheitssphäre*.
Auf dieser ist mit $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y\rangle)$ die *Winkel-Metrik* definiert.

1.3.7 Beispiel — Hamming-Metrik.
Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$\mathrm{X} := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \ldots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die *Hamming-Metrik* ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

Längenmetriken

2.1 Graphen — Definitionen

2.1.1 Definition — Graph.
Ein *Graph* $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

2.1.2 Definition — Erreichbarkeit.
Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist *erreichbar* von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

2.1.3 Definition — Zusammenhängend.
$G = (E, K)$ heißt *zusammenhängend*, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

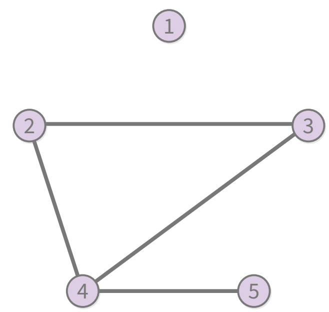

Abbildung 2.1: Ein einfacher Graph. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da die Ecke 1 nicht von den anderen Ecken aus erreicht werden kann.