

# Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier



# *Inhaltsverzeichnis*

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe der allgemeinen Topologie</b>	<b>5</b>
1.1	Topologischer Räume . . . . .	5
1.2	Hausdorffsches Trennungsaxiom . . . . .	9
1.3	Stetigkeit . . . . .	10



# Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

## 1.1 Topologischer Räume

### 1.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt

1.  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  sind wieder in  $\mathcal{O}$ .

Ein solches System  $\mathcal{O}$  heißt *Topologie* von  $X$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen *offene Teilmengen* von  $X$ .

$A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

### 1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$  ist die *triviale Topologie*.
2. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$  ist die *diskrete Topologie*.

### 1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ .

$X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_s(\text{standard}) := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

**Offenes Intervall:**

$$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},$$

$a$  und  $b$  beliebig

**1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}$ .**

$X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf  $\mathbb{R}$ .

(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen,  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$ .)

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

**1.1.5 Definition — Metrischer  $\rightarrow$  topologischer Raum.**

Metrische Räume (z.B.  $(X, d)$ ) sind topologische Räume:

$U \subset X$  ist *d-offen*  $\Leftrightarrow \forall p \in U \exists \epsilon = \epsilon(p) > 0$ , sodass der offene Ball

$B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\}$  um  $p$  mit Radius  $\epsilon$  ganz in  $U$  liegt:

$B_\epsilon(p) \subset U$ .

Die *d-offenen* Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik  $d$  induzierte Topologie<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> **Übungsaufgabe:** Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

**1.1.6 Definition — Basis.**

Eine *Basis* für die Topologie  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , sodass für jede offene Menge  $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$  gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel:  $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$  für Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

**1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.**

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik

$d(x, y) = |x - y|$  (beziehungsweise Standard-Topologie):

Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

**1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.**

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:

Sind  $d, d'$  Metriken auf  $X$  und enthält jeder Ball um  $x \in X$  bezüglich  $d$  einen Ball um  $x$  bezüglich  $d'$  ( $B_\epsilon^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$ ), dann ist jede  $d$ -offene Menge auch  $d'$ -offen und somit  $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$ .

Gilt auch die Umkehrung ( $\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$ ), so sind die Topologien gleich:  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

**1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.**

$X = \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

**1.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.**

$(X, d)$  sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist Metrik mit  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

Für  $d'$  gilt:  $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$ , insbesondere ist der Durchmesser von  $X$  bezüglich  $d'$ :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes (“metrische Information”) sagt nichts über die Topologie aus.

**1.1.11 Definition — Umgebung.**

$(X, \mathcal{O})$  sei ein topologischer Raum.  $U \subset X$  heißt *Umgebung* von  $A \subset X$ , falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

**1.1.12 Definition — Innerer Punkt.**

Für  $A \subset X$ ,  $p \in X$  heißt  $p$  ein *innerer Punkt* von  $A$  (bzw. äußerer Punkt von  $A$ ), falls  $A$  (bzw.  $X \setminus A$ ) Umgebung von  $\{p\}$  ist.

Das *Innere* von  $A$  ist die Menge  $\overset{\circ}{A}$  der inneren Punkte von  $A$ .

**1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.**

Die *abgeschlossene Hülle* von  $A$  ist die Menge  $\overline{A} \subset X$ , die nicht äußere Punkte sind.

**Beispiel:**  $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,

$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ .

**1.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.**

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie:**  $(X, \mathcal{O}_X)$  topologischer Raum,  $Y \subseteq X$  Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

definiert eine Topologie auf  $Y$ , die sogenannte *Teilraum-Topologie*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Zu überprüfen!

**Achtung!**  $U \in \mathcal{O}_Y$  ist i.a. nicht offen in  $X$ . Z.B.  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = [0, 1]$ ,  $V = (-1, 2)$ , also  $U = V \cap Y = Y$ .

2. **Produktträume:**  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  zwei topologische Räume. Eine Teilmenge  $W \subseteq X \times Y$  ist *offen* in der *Produkt-Topologie*  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$  Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  und  $V$  von  $y$  in  $Y$  sodass das "Kästchen"  $U \times V \subseteq W$ .

**Achtung!** Nicht jede offene Menge in  $X \times Y$  ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten:**  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum,  $\sim$  Äquivalenzrelation<sup>3</sup> auf  $X$ . Für  $x \in X$  sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse von  $x$ ,

$$X / \sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).

Die *Quotienten-Topologie* auf  $X / \sim$  nutzt:

$U \subset X / \sim$  ist offen  $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ .

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik  $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$ ).

Seien  $s, t \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$s \sim t \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

<sup>3</sup> Impliziert Partitionierung von  $X$  in disjunkte Teilmengen



Dann ist

$$\mathbb{R} / \sim_{\text{bijektiv}} = S' = \text{Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \rightarrow S' &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.

$G = (\mathbb{Z}, +)$  operiert auf  $X = \mathbb{R}$ .

*Bahnen-Raum*  $= \mathbb{R} / \sim$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, t) &\mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse  $[t]$  ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

## 1.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

### 1.2.1 Hausdorffsches Trennungsaxiom $T_2$ .

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt *hausdorffsch*, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q \in X$  disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen  $U \ni p$  und  $V \ni q$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

**Beispiel:**

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

**Beweis:** Sei  $d(p, q) =: \epsilon$ .

Behauptung:  $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q) = \emptyset$ .

Sei  $z$  in  $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q)$ . Dann gilt

$$d(p, q) \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} > \epsilon \quad \text{!}$$

■

2.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$  ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.
3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$  ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p \neq q$ :

$$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\}, \end{aligned}$$

also  $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ .

**Wichtige Konsequenz von “hausdorffsch”:** In einem Hd-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.

**Erinnerung — Konvergenz.**

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  (top. Raum).  $X \ni a$  heißt *Limes* um  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  falls es zu jeder Umgebung  $U$  von  $a$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $x_n \in U \forall n \geq n_0$ .

### 1.2.2 Bemerkung.

1. Jeder Teilraum (mit TR-Topologie) eines Hd-Raumes ist Hd.
2.  $X, Y$  Hd-Räume  $\Rightarrow X \times Y$  ist Hd-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

## 1.3 Stetigkeit

### 1.3.1 Definition — Stetigkeit.

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, falls die Urbilder von offenen Mengen in  $Y$  offen sind in  $X$ .

### 1.3.2 Beispiel — asd.

1.  $\text{Id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$  ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für  $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$  gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.  
Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition und zur Folgenstetigkeit<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Übungsaufgabe!