# Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

# *Inhaltsverzeichnis*

# *Wozu sind Metriken gut?*

## *1.1 Einleitendes*

### 1.1.1 In Analysis I.

In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \;\exists\, N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

### 1.1.2 Analogie zu metrischen Räumen.

Sei $(X, d)$ metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $X$ heißt *konvergent*, wenn

$$\exists\, x \in X \forall \epsilon > 0 \;\exists\, N = N(\epsilon) : d(x_n, x) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\epsilon(x)$ ($\forall n \geq N$).

### 1.1.3 Erinnerung — Stetigkeit.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls $\forall s > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert und $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$ falls $|t - t_0| < \delta$.
$f$ heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

### 1.1.4 Verallgemeinerung.

Metrische Räume $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$.
Eine Abbildung

$$f : X \to Y$$

heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B^Y_\epsilon(f(x))$ falls $x \in B^X_\delta(x_0)$.
$f$ heißt *stetig*, falls $f$ stetig ist $\forall x \in X$.

### 1.1.5 Bemerkung.

$f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

# *Grundbegriffe der allgemeinen Topologie*

## *2.1 Toplogischer Räume*

### 2.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge $X$ und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \quad \text{(= Menge aller Teilmengen von } X\text{)},$$

von Teilmengen von $X$, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von $X$. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von $X$.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

### 2.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge $X$, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge $X$, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

### 2.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\text{ (standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{ Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

**Offenes Intervall**: $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$, $a$ und $b$ beliebig

### 2.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus, \ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \dots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

**2.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.**
Metrische Räume (z.B. $(X, d)$) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist *$d$-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U \; \exists \, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um $p$ mit Radius $\epsilon$ ganz in $U$ liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die $d$-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik $d$ *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

**2.1.6 Definition — Basis.**
Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

**2.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.**
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

**2.1.8 Bemerkung.**
Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind $d, d'$ Metriken auf $X$ und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich $d$