Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie **5**
1.1 Toplogischer Räume 5

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

1.1 Toplogischer Räume

1.1.1 Definition — Topologischer Raum.
Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.
$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\,\text{(standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus, \ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

1.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist d-*offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U \ \exists \, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

1.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^{d}_{\epsilon'}(x) \subset B^{d}_{\epsilon}(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.

$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d'(x,y) &:= \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

1.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.

(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x,y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

1.1.11 Definition — Umgebung.

$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

1.1.12 Definition — Innerer Punkt.

Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.

Das *Innere* von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.

Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die <u>nicht</u> äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a,b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a,b)} = [a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

1.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[2]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.a. nicht offen in X. Z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$, $V = (-1,2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produkträume**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[3] auf X. Für $x \in X$ sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

   die Äquivalenzklasse von x,

$$X/\sim$$

   die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

   die kanonische Projektion (surjektiv!).
   Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
   $U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s,t) = |s-t|$).
   Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

[2] Zu überprüfen!

[3] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Dann ist
$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S' = \text{ Einheitskreis.}$$
Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum $= \mathbb{R}/\sim$ mit
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (m,t) &\mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$
Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von
$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$
mehr dazu später.

1.1.15 Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *hausdorffsch*, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \varnothing$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.
   Beweis: Sei $d(p,q) =: \epsilon$.
   Behauptung: $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q) = \varnothing$.
   Sei z in $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q)$. Dann gilt
   $$d(p,q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p,z) + d(z,q) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} > \epsilon \quad \lightning$$
   ■
2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist <u>nicht</u> hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:
   $$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}, \end{aligned}$$
   also $U_p \cap U_q \neq \varnothing$.