Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

Bemerkung 1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

Definition 1.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Definition 1.4 (Abgeschlossener r-Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r-Ball um x**.

Definition 1.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.7 (Triviale Metrik). Menge X,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem metrischen Raum verwursten.

Beispiel 1.8 (Simple Metriken). Sei $X = \mathbb{R}$.[1]

[1] **Anmerkung**: Wenn $d(x, y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

- $d_1(s,t) := |s-t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s-t|+1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.9 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

$$d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \|x-y\|$$

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[2].

Bemerkung 2 (aus LA II). Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.10 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

ist Metrik.

Beispiel 1.11 (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm). V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| * ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v,w) := ||v-w||$.

Beispiel 1.12 (Einheitssphäre).

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

[2] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x,y\rangle \leq ||x|| * ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

ist die n-te **Einheitssphäre**.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) \coloneqq \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

Beispiel 1.13. (Hamming-Metrik) Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X \coloneqq \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \; (i \in 1, \ldots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$