Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Wozu sind Metriken gut?

1.1 Einleitendes

1.1.1 In Analysis I.

In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

1.1.2 Analogie zu metrischen Räumen.

Sei (X, d) metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt *konvergent*, wenn

$$\exists\, x \in X \forall \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : d(x_n, x) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\epsilon(x)$ ($\forall n \geq N$).

1.1.3 Erinnerung — Stetigkeit.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls $\forall s > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert und $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$ falls $|t - t_0| < \delta$.
f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

1.1.4 Verallgemeinerung.

Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y).
Eine Abbildung

$$f : X \to Y$$

heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B_\epsilon^Y(f(x))$ falls $x \in B_\delta^X(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

1.1.5 Bemerkung.

$f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

2.1 Toplogischer Räume

2.1.1 Definition — Topologischer Raum.
Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \quad (= \text{Menge aller Teilmengen von } X),$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

2.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

2.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.
$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\,\text{(standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{ Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

2.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.
$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus,\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \dots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

2.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist d*-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U \; \exists \, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

2.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

2.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

2.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\epsilon'}(x) \subset B^d_\epsilon(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

2.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.

$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

2.1.10 Beispiel — asd.

(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

$\frac{t}{1+t} \leq 1 \rightsquigarrow$ Abstand zweier Punkte ist immer ≤ 1!