Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Übungen

1.1 2017-10-27

1.1.1 Aufgabe 1.

Zeigen Sie: $(\mathbb{R}^2, d)$ *mit* $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$ *ist pseudometrischer Raum.*

- **Positivität**. Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x) = 0$.
  $d(x, x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0$.

- **Symmetrie**. Zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$.
  $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y, x)$.

- **Dreiecksungleichung**. Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
  $d(x, y) + d(y, z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \geq |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x, z)$.

1.1.2 Aufgabe 2.

Gegeben:

- $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $||x|| \geq 0 \forall x$, $x = 0 \Leftrightarrow ||x|| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.
Sublinearität:

1.

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle - \langle y,y \rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ &\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

1.1.3 Aufgabe 3.

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:
   (a) Falls $d(x,y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
   Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2$ ↯ □
   (b) Falls $d(x,y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x,z) \geq r_1 &= (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x,y) + d(z,y) \quad ↯ \quad \square \end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:
   (a) Sei $X = \{0,1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0,1) = 1$.
   Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen keine Elemente.
   Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben $B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0,1)$.
   (b) Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0,1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100 - 100$.

1.1.4 Aufgabe 4.

1. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^2, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *isometrisch sind.*
   Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
   Behauptung: $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.
   f ist linear mit Rang 2, also bijektiv.
   Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

   $$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p, q).$$

   Es ist

   $$\begin{aligned} d_1(p,q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|,\ |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= \text{(undeutlich)} = d_\infty(f(p), f(q)). \qquad \square \end{aligned}$$

2. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ***nicht*** *isometrisch sind für* $n > 2$.
   Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1 : (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2 : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.
   Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. φ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.
   Die Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p, q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.
   Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p, q) = 2$ und $d_1(p, 0) = 1$. Da φ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$).
   Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.
   Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).
   Es gilt $d_1(p, q) = \sum_{j=1}^{n} |p_j - q_j| \underset{\text{da beide} > 0}{<} \sum_{j=1}^{n} |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2$ ↯

1.2 2017-11-03

Nachtragen

1.3 2017-11-10

1.3.1 Aufgabe 1.

$d-$ **offen**: $U \subset X$ heißt d-offen, falls $\forall x \in U \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq U$.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu zeigen: Die Menge O aller d-offenen Teilmengen von X ist Topologie. Wir zeigen die Eigenschaften einer Topologie.

1. $\emptyset \in O, X \in O \quad \checkmark$

2. Zu zeigen: beliebige Vereinigungen von d-offenen Mengen sind wieder d-offen.
   Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von d-offenen Mengen. Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist d-offen.
   Beweis: Sei $x \in A$ beliebig. Dann $\exists\, i \in I$ mit $x \in A_i$. Da A_i d-offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq A_i \subseteq A$.
   Damit ist A d-offen.

3. Zu zeigen: endliche Durchschnitte d-offener Mengen sind wieder d-offen.
   Seien A, B d-offen. Zu zeigen: $A \cap B$ ist wieder d-offen.
   Sei $x \in A \cap B$. Da A und B d-offen sind, gibt es $\epsilon, \epsilon' > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq A$ und $B_{\epsilon'}(x) \subseteq B$. Wähle $\epsilon'' = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$. Dann ist $B_{\epsilon''}(x) = B_\epsilon(x) \cap B_{\epsilon'}(x) \subseteq A \cap B$ und $A \cap B$ ist d-offen.

Es ist immer nur der Schnitt zweier Mengen zu zeigen, da $A_1 \cap \dots \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cdots)$. Also ist sukzessive der gesamte Schnitt offen.

1.3.2 Aufgabe 2.

Seien X, Y_1, Y_2 topologische Räume, seien

$$\begin{aligned} p_i : Y_1 \times Y_2 &\to Y_i \\ (y_1, y_2) &\mapsto y_i \quad (\text{für } i = 1, 2). \end{aligned}$$

1. Zu zeigen: f ist stetig $\Leftrightarrow f_1 := p_1 \circ f$, $f_2 := p_2 \circ f$ stetig.
   Beweis:

   - $\Rightarrow$. Sei f stetig. Zu zeigen (oBdA): f_1 ist stetig, i.e. die Urbilder offener Mengen sind wieder offen.
     Sei $U \subseteq Y_1$. Zu zeigen: $f_1^{-1}(U)$ offen.
     Es gilt[1]:
     $$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times Y_2).$$
     Diese Menge ist offen, da f stetig ist.
   - $\Leftarrow$. Seien f_1, f_2 stetig. Zu zeigen: f ist stetig. Wir zeigen wieder, dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.
     Sei $U \in Y_1 \times Y_2$ offen. Zu zeigen: $f^{-1}(U)$ ist wieder offen.
     Sei $x \in f^{-1}(U)$. Zu zeigen: Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq f^{-1}(U)$ sodass $x \in U'$.
     Es ist $f(x) \in U$. Da U offen ist in $Y_1 \times Y_2$ gibt es offene $V_1 \subseteq Y_1$, $V_2 \subseteq Y_2$, sodass $f(x) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$.
     Jetzt sei $U_1 := f_1^{-1}(U_1)$, $U_2 := f_2^{-1}(U_2)$. Da f_1, f_2 stetig sind, sind U_1 und U_2 offen, also auch $U_1 \cap U_2 =: U'$ offen.

[1] $p_1^{-1}(U) = U \times Y_2$

Da $f(x) \in V_1 \times V_2$, ist $f_1(x) = p_1(f(x)) \in V_1$, $f_2(x) = p_2(f(x)) \in V_2$, also $x \in U_1 \cap U_2 = U'$.

2. Sind p_1, p_2 immer offen?
   Ja — sei $U \subseteq Y_1 \times Y_2$ offen. Dann ist

$$U = \bigcup \{V_1 \times V_2 : V_1 \subseteq Y_1 \text{ offen}, V_2 \subseteq Y_2 \text{ offen}, V_1 \times V_2 \subseteq U\}\,.$$

   Dann ist $p_1(U) = \bigcup \{V_1 : \text{ analog zu } U, V_2 \neq \emptyset\}$ eine Vereinigung offener Mengen, also wieder offen — p_2 analog.

Offene + geschlossene Abbildungen.
$f : X \to Y$ heißt *offen*, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ offen ist.
$f : X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle abgeschlossenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ abgeschlossen ist.