Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

Bemerkung 1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

Definition 1.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Definition 1.4 (Abgeschlossener r-Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} \coloneqq \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r-Ball um x**.

Definition 1.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.7 (Triviale Metrik). Menge X,

$$d(x, y) \coloneqq \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem metrischen Raum verwursten.

Beispiel 1.8 (Simple Metriken). Sei $X = \mathbb{R}$.[1]

- $d_1(s,t) \coloneqq |s-t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) \coloneqq \log(|s-t|+1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.9 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

$$d_e(x,y) \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = ||x-y||$$

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[2].

Bemerkung 2 (aus LA II). Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.10 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) \coloneqq \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

ist Metrik.

Beispiel 1.11 (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm). V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v,w) \coloneqq ||v-w||$.

---

[1] **Anmerkung**: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) \coloneqq \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

[2] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x,y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Beispiel 1.12 (Einheitssphäre).

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

ist die n-te **Einheitssphäre**.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

Beispiel 1.13. (Hamming-Metrik) Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \; (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

2

Längenmetriken

2.1 Graphen

Definition 2.1 (Graph). Ein **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

Definition 2.2 (Erreichbarkeit). Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist **erreichbar** von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

Definition 2.3 (Zusammenhängend). $G = (E, K)$ heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.
Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

Beispiel 2.4 (Wortmetrik). Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

Definition 2.5 (Wortmetrik).

$$d_S(g,k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg,kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

Definition 2.6 (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph** $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die *Graphen-Metrik* auf $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

Beispiel 2.7 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik). Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve.
Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad \text{(via \textit{Polynom-Approximation})} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

Dann:

$$g^{'}(t) = -p + q, \quad \|g^{'}(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}(g)} = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e(p, q)}.$$

Lemma 2.8 (Unabhängigkeit von L_{euk}).

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c, d] \to [a, b], s \mapsto t(s)$ gilt:

   $$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

   Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

   $$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

   □

2. • Translation.
   Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

   $$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

   die von p verschobene Kurve. Es gilt

   $$(T_p \circ c)(t) = c^{'}(t) \Rightarrow \int_a^b \left\| (T_p \circ c)^{'} \right\| dt = \int_a^b \left\| c^{'} \right\| dt$$

   und damit gilt das Lemma für Translationen. □

   • Drehung.
   Für $\vartheta \in [0, 2\pi]$ sei

   $$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\vartheta x(t) - \sin\vartheta y(t), \sin\vartheta x(t) + \cos\vartheta y(t)) \end{aligned}$$

   die um Winkel ϑ gedrehte Kurve.
   Da D_ϑ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

   $$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c^{'}(t)$$

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

und damit

$$\left\|(D_\vartheta \circ c(t))'\right\| = \left\|D_\vartheta \cdot c'\right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\|c'\right\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen. □

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

Lemma 2.9 (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der Invarianz von L_{euk} ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \geq \int_a^b |y'|dt \geq \int_a^b y'(t)dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.
$\Longrightarrow$ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ $(\forall t)$, also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment.

Definition 2.10 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven). Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

Satz 2.11 (“Neuer” metrischer $\mathbb{R}^2$).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.

Beweis. Direkter Beweis nach dem Lemma über Geradensegmente.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p,q) = ||p-q|| = d_e(p,q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

Beweis. Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*
  Sei
  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$
  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_{\text{e}} = d_{\text{euk}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a+b-t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv. Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit
  $$d(q,p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p,q).$$
- *Dreiecksungleichung.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p,q) \leq d_{\text{euk}}(p,r) + d_{\text{euk}}(r,q)$ $(\forall p,q,r \in \mathbb{R}^2)$.
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:
  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$
  Infimumbildung liefert die Behauptung.
- *Positivität.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p,q) = 0 \iff p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Longrightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{euk}}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_{\text{euk}} = ||p-q|| = 0$.

2.3 Sphärische Geometrie

Beispiel 2.12 (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S^2_{\mathbb{R}} := \{x \in R^3 : ||x|| = R\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \to S^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3} dt$$

und

$$d_s(p, q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S^2_{\mathbb{R}})).$$

Lemma 2.13 (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S^2_{\mathbb{R}}$ ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S^2_{\mathbb{R}}) = S^2_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S^2_{\mathbb{R}}$ auch das Bild $D \circ c \subset S^2_{\mathbb{R}}$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_s(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

Lemma 2.14 (Großkreise sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S^2_{\mathbb{R}}$ sind **Großkreise**, also Schnitte von $S^2_{\mathbb{R}}$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S^2_{\mathbb{R}}$. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den "Nordpol" — und q auf $q' = (0, y, z) \in S^2_{\mathbb{R}}$ abbildet. Aufgrund der Rotationsinvarianz der Kurvenlängen und der Definition ist $d_s(p, q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels "geographischer Koordinaten" φ und ϑ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin \vartheta(t) \cos \varphi(t),\ \sin \vartheta(t) \sin \varphi(t),\ \cos \vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi - \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi,\ \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi + \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi,\ -\vartheta' \sin \vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)$$

und somit

$$
\begin{aligned}
L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}dt \geq R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2(t)}dt \\
&= R\int_a^b |\vartheta'(t)|dt \geq R\int_a^b \vartheta'(t)dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a))
\end{aligned}
$$

mit oBdA $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$.
Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

Satz 2.15 (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch). $(S^2_{\mathbb{R}}, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_{\mathbb{R}}, R \cdot d_W)$.

Beweis. Analog zu (R^2, d_{euk}).

2.4 Wozu sind Metriken gut?

Bemerkung 3 (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Bemerkung 4 (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt **konvergent**, wenn

$$\exists\, x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\varepsilon(x)$ $(\forall n \geq N)$.

Bemerkung 5 (Erinnerung: Stetigkeit). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x))$ falls $x \in B_\delta^X(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

Bemerkung 7 (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \to Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

3

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

3.1 Toplogische Räume

Definition 3.1 (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt **Topologie** von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen **offene Teilmengen** von X.
$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel 3.2 (Extrembeispiele).

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die **triviale Topologie**.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die **diskrete Topologie**.

Beispiel 3.3 (Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\text{ (standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.[1]

Beispiel 3.4 (Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus,\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

Definition 3.5 (Metrischer Raum → topologischer Raum). Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } d\text{-}\textbf{offen} \iff \forall p \in U\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$ um p mit Radius ε ganz in U liegt: $B_\varepsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d **induzierte Topologie**[2].

Definition 3.6 (Basis). Eine **Basis** für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

[1] **Offenes Intervall**: $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

[2] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7 (Komplexität einer Topologie). $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie): Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

Bemerkung 8 (Gleichheit von Topologien). Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\varepsilon'}(x) \subset B^d_\varepsilon(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Beispiel 3.8 (Bälle und Würfel sind gleich). $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$
$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}.$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

Beispiel 3.9 (Metrische Information sagt nichts über Topologie). (X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

Definition 3.10 (Umgebung). $(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $A \subset X$, falls

$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$

Definition 3.11 (Innerer und äußerer Punkt). Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein **innerer Punkt** von A (bzw. **äußerer Punkt** von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist. Das **Innere** von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

Definition 3.12 (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die nicht äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

Bemerkung 9 (Drei konstruierte topologische Räume). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

   $$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[3]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.A. nicht offen in X, z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.
2. **Produkttopologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Longleftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

   $$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.
3. **Quotiententopologie**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[4] auf X. Für $x \in X$ sei

   $$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

[3] Zu überprüfen!
[4] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

die Äquivalenzklasse von x,

$$X/\sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).
Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
$U \subset X/\sim$ ist <u>offen</u> $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s,t) = |s-t|$).
Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S' = \text{ Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum = $\mathbb{R}/\sim$ mit

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(m, t) \mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

Bemerkung 10 (Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \varnothing$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

   Beweis. Sei $d(p, q) =: \varepsilon$.
   Behauptung: $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \varnothing$.
   Sei z in $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$. Dann gilt

   $$d(p, q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} > \varepsilon \quad \lightning$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:

   $$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\}, \end{aligned}$$

   also $U_p \cap U_q \neq \varnothing$.

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.[5]

Bemerkung 11 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit Teilraum-Topologie) eines Hausdorff-Raumes ist hausdorffsch.
2. X, Y Hausdorff-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hausdorff-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

[5] **Erinnerung: Konvergenz**: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U\ \forall n \geq n_0$.

3.3 Stetigkeit

Definition 3.13 (Stetigkeit). $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X.

Beispiel 3.14 (Einfache Stetigkeiten).

1. $\mathrm{Id} : X \to X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
   Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ε-δ-Definition und zur Folgenstetigkeit[6].

Definition 3.15 (Homöomorphismus).

- Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

Bemerkung 12 (Homöomorphismengruppe).

- $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.

Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

Beispiel 3.16 (Einfache Homöomorphismen).

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
  (via $f(t) = a + t(b - a)$).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$
  (z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).

[6] Übungsaufgabe!

- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus!
  $f : [0,1) \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) und Isometrie $f : X \to Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass

  $$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

  Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metrik definierten Topologien).

  Beweis. (über ε-δ-Definition): $\delta := \varepsilon$.
  $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) < \delta = \varepsilon$, also ist f stetig.
  Analog für f^{-1}.

- $S^n = \{x \in R^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.
  $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S_n.
  Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.

  Beweis. (via stereographische Projektion):

  $$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

  $$f(x) := \left(\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \text{ stetig,}$$

  $$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \ldots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right) \text{ auch stetig.}$$

  Also ist f homöomorph.

  Achtung: S^n ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (da S^n kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, mehr dazu später).

Bemerkung 13 (Isometrien-Untergruppe). Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\mathrm{Isom}(X, d) \subseteq \mathrm{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \mathrm{Bij}(X).$$

Bemerkung 14 (Exkurs 1: Kurven). Was ist eine Kurve?
Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.
Problem: $\exists$ stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0,1] \to I^2$

(“Peano-Kurven”, “space-filling curves”)[7].

Ausweg 1: *Jordan-Kuven* (bzw. geschlossene J-Kurven).

:= top. Raum, homöomorph zu $I = [0, 1]$ (J-Kurve)

:= top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)

Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).

Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

$$\exists\, f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von R^3.

Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$.[8]

Bemerkung 15 (Exkurs 2: Topologische Gruppen). Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Beispiel 3.17 (Topologische Gruppen).

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

   $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist topologische Gruppe:

[7] Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

[8] **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung ($\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$),
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).

7. $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.
   Insbesondere ist
   $$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S'$$
   eine abelsche topologische Gruppe.

3.4 Zusammenhang

Definition 3.18 (Zusammenhängend). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, falls $\varnothing$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenenen Teilmengen von X sind.
Äquivalent: X ist zusammenhängend $\iff$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

Beweis. $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\iff$ A und $X \setminus A$ offen $\iff$ A und $X \setminus A$ abgeschlossen.

Beispiel 3.19 (Zusammenhang).

1. $\mathbb{R}$ (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.

   Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.
   Annahme: $I \neq U \neq \varnothing$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I. Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \le c \le v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U, da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 $\lightning$

Bemerkung 16 (Ergänzung: Zusammenhang von Teilmengen). *Allgemein*: Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Bemerkung 17 (Einpunktige Mengen). Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und $\varnothing$ die einzigen offenen Mengen).

Definition 3.20 (Zusammenhangskomponente). Sei $x \in X$. Die **Zusammenhangskomponente** $Z(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten.

Lemma 3.21 (Eigenschaften zusammenhängender Mengen).

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.
2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.[9]

Bemerkung 18 (Zusammenhängende Mengen bilden disjunkte Zerlegung).
Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.

Beweis. Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- **Symmetrie**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.
- **Transitivität**: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:
  $x \sim y : \exists\, A$ zusammenhängend mit $x, y \in A$.
  $y \sim z : \exists\, B$ zusammenhängend mit $y, z \in B$.
  Also $y \in A \cap B \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B$ zusammenhängend.

Beispiel 3.22 (Zusammenhangskomponenten).

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit Teilraum-Topologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist **total unzusammenhängend**, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

   Beweis. Annahme: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.
   Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.
   Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}, O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}, \widetilde{O_1} = O_1 \cap A, \widetilde{O_2} = O_2 \cap A$. $\widetilde{O_1}$ und $\widetilde{O_2}$ sind offen in A oder in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Teilraumtopoogie. Es ist $A = \widetilde{O_1} \cup \widetilde{O_2}$ mit $\widetilde{O_1} \cap \widetilde{O_2} \neq \emptyset$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.

Definition 3.23 (Weg-Zusammenhängend). Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (d.h.

[9] Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$) zwischen p und q gibt.

Lemma 3.24 (Weg-Zusammenhang). X ist weg-zusammenhängend $\Rightarrow$ X ist zusammenhängend.

Beweis. Wäre X *nicht* zusammenhängend, dann $\exists$ eine disjunkte Zerlegung $X = A \cup B$ mit A, B offen und nicht-leer, $A \cap B = \varnothing$ mit $p \in A$ und $q \in B$. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein (stetiger) Weg zwischen p und q, also $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$. Daraus folgt, dass $[0,1] = \alpha^{-1}(\alpha([0,1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0,1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0,1])) \Rightarrow [0,1]$ ist nicht zusammenhängend $\lightning$

Achtung: Umkehrung gilt nicht! Z.B. "topologische Sinuskurve"[10] X ist zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend:

$$X := \left\{\left(x, \sin\tfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1\right\} \cup \{(0,y) : |y| < 1\}.$$

Lemma 3.25 (Weg-Zusammenhang von Bildern). Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

Beweis.

1. Sei $f : X \to X$ stetig und $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.
   Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung.
2. Seien $x = f(p)$, $y = f(q)$ zwei Punkte in $f(X)$. Es ist $p = f^{-1}(x)$, $q = f^{-1}(y)$.
   Dann existiert $a : [0,1] \to X$ mit $a(0) = p$ und $a(1) = q$ und somit ist $f \circ a : [0,1] \to f(X)$ ein stetiger Weg in $f(X)$.

Korollar 3.26 (Zwischenwertsatz). Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Bemerkung 19 (Test auf Homöomorphie via Zusammenhang).
Beispiel: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ nur falls $n = 1$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $R \cong \mathbb{R}^n$ für $n \ge 1$. Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \quad \cong \quad \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \ge 2} \qquad \lightning$$

Ebenso: $[0,1] \cong [0,1]^n$ nur für $n = 1$.

Satz 3.27 (von Brouwer). $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ für $m \neq n$.

[10] **Details**: Singer-Thorpe p.52

Beweis. Der Beweis benutzt den **Satz von Gebietstreue** (Brouwer):

Ist $U \subseteq$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung, so ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Beweisidee: Ist $m < n$, so ist

$$j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}^m$ auf eine *nicht* offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wäre $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.[11]

3.5 Kompaktheit

Definition 3.28 ((Lokal) kompakt). Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i \text{ offen } \Rightarrow \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I :$$
$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$$

- $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn A bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.
- X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 20 (Verwendung kompakter Räume). Kompakte Räume sind oft "einfacher" als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.
Begründung: $\forall x \in X\ \exists\, U_x : f|_{U_x} \leq c_x$. Schreibe $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_k \in X$, sodass $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$.
$\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \ldots, c_{x_k}\}$.

Beispiel 3.29 (Beschränktheit im Kompakten). Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ **lokal beschränkt** (d.h. jeder Punkt von X hat eine Umgebung, in der f beschränkt ist — z.B. wahr für stetige Funktionen), dann ist f beschränkt.

Beispiel 3.30 (Kompaktheit von Intervallen). $I = [0, 1]$ ist kompakt (ebenso $[a, b]$).

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Dann existiert eine sogenannte **Lebesgue-Zahl** $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I_\delta \subset I$ der Länge δ in einem U_i liegt. Da $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen der Länge δ überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen U_i.

[11] siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

Bemerkung 21 (Hinweise zur Lebesgue-Zahl). Gäbe es ein solches $\delta > 0$ nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n \subset [0,1]$ der Länge $\frac{1}{n}$, die jeweils in keiner Überdeckungsmenge U_i liegen. Nach Bolzano Weierstraß[12] folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte m_n von I_n konvergiert gegen ein $t \in I$. Dieses t liegt aber in einem U_i. Also, da U_i offen ist, liegen auch die m_n in U_j für genügend großes n ↯

Satz 3.31 (Sätze über kompakte Räume).

1. Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.
2. Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

Beweis.

1. Sei $f(X) = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass $\left(F^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. X ist kompakt, also

$$X = F^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup F^{-1}(U_{i_k})$$

und schließlich

$$f(X) = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen.
$A = \bigcup_{i\in I} U_i$ ist offene Überdeckung, also ist $U_i = V_i \cap A$ für V_i offen in X.
A ist abgeschlossen, also ist $X \setminus A$ offen und $X = (X\setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} V_i$ ist offene Überdeckung von X.
Da X kompakt ist gilt:

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

also

$$A = X \cap A = \left(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}\right) \cap A = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (*Satz von Tichonow*[13]) benutzt das *Lemma von Zorn*[14].
Seien X und Y kompakte Räume.
Behauptung: $X \times Y$ ist kompakt.
Sei $X \times Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ offene Überdeckung. Für jedes $(x,y) \in X \times Y$ existiert $\lambda(x,y)$ sodass $(x,y) \in W_{\lambda(x,y)}$. Da $W_{\lambda(x,y)}$ offen ist existiert $U_{(x,y)} \subset X$ und $V_{(x,y)} \subset Y$ sodass

$$(x,y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{\lambda(x,y)}.$$

[12] "jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ hat konvergente Teilfolgen"

[13] Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.

[14] Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

Für festes x ist $\bigcup_{y\in Y} V_{(x,y)}$ eine offene Überdeckung von Y, also — da Y kompakt ist — existieren $y_1(x), \ldots, y_{m_x}(x)$ sodass

$$Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \cdots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Setze

$$U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \cdots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_n$ sodass $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m_x}} W_{\lambda(x_k,y_j(x_k))}.$$

Beispiel 3.32 (Weitere kompakte Mengen).

1. **Produkte kompakter Mengen**:

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n \text{ Faktoren}}$$

ist kompakt (Würfel — allgemein $[a,b]^n$ ist kompakt)

2. **Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen**:
Abgeschlossene Teilräume des n-dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbesondere: jede abgeschlossene beschränkte[15] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge $2c$ liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius c liegt).

Satz 3.33 (Heine-Borel). Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossenen-beschränkten Teilmengen.

Beweis.

- $\Leftarrow$. Siehe obiges Beispiel.
- $\Rightarrow$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
Die Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = d(0,x)$ ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.
Dass K abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.34 (Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen). Sei X ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. Es ist zu zeigen dass $X \setminus K$ offen ist in X.
Sei dafür $x_0 \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x_0 und V_x von x,

[15] Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

sodass $U_x \cap V_x = \varnothing$ (das geht, weil X hausdorffsch ist).
Da K kompakt ist, existieren Punkte $x_1 \ldots, x_n \in K$ mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

K kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.
Setze $U := U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \varnothing, \end{aligned}$$

also $x_0 \in U \subset X \setminus K$.

Korollar 3.35 (Minimum und Maximum von Teilmengen). Jede stetige Funktion $f : K \to C$ auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.[16]

Satz 3.36 (Homöomorphismen auf Hausdorff-Räumen). Eine stetige, bijektive Abbildung $f : K \to Y$ von einem kompakten Raum K auf einen Hausdorff-Raum Y ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre $[0, 1) \cong S^1$ $\lightning$ (da S^1 kompakt ist, aber $[0, 1)$ nicht)

Beweis. Zu zeigen: Inverse Abbildung f^{-1} ist stetig.
Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.
Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist $f(A)$ kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in Y und somit ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

[16] Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)

4

Spezielle Klassen von topologischen Räumen

4.1 Übersicht

Folgende spezielle Klassen sollen diskutiert werden:

- metrische Räume $\rightsquigarrow$ metrische Geometrie
- Mannigfaltigkeiten (Grundobjekte in Differenzialgeometrie, Physik,...)
- Polyeder, Simplizialkomplexe (Kombinatorik, algebraische Topologie)
- Bahnen-Räume von Gruppenaktionen (geometrische Gruppentheorie)

4.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 4.1 (Topologische Mannigfaltigkeit). Eine **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:

1. M ist **lokal euklidisch**, d.h. $\forall p \in M$ $\exists$ offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit festem n. Das Paar (φ, U) heißt **Karte**[1] und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ mit $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ heißt **Atlas**.
2. M ist hausdorffsch und besitzt abzählbare Basis der Topologie.

[1] Eine mathematische Karte ist einer echten Karte ähnlich. Man nehme einen Punkt, zum Beispiel Karlsruhe, und beschreibt die Umgebung von Karlsruhe in Form einer Karte auf einer DIN A4-Karte. Das ist natürlich nicht bijektiv, aber man versucht es möglichst bijektiv zu machen.

Bemerkung:

- Die zweite Eigenschaft ist "technisch" und garantiert , dass eine "Zerlegung der Eins" existiert (braucht man z.B. für die Existenz von Riemannschen Metriken).
- Die Zahl n heißt **Dimension** von M (eindeutig, wenn M zusammenhängend ist, siehe Satz von Gebietstreue).

Beispiel 4.2 (Topologische Mannigfaltigkeiten).

0. Eine abzählbare Menge mit diskreter Topologie (jeder Punkt ist offen) ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit
1. S^1 ist eine kompakte, zusammenhängenge 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.
   $\mathbb{R}$ ist nichtkompakte, zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit.