Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

1.1 Toplogischer Räume

1.1.1 Definition — Topologischer Raum.
Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} \coloneqq \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} \coloneqq \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.
$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\text{ (standard)}} \coloneqq \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) \coloneqq \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus, \ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned} (a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n) \\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom} \\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1 \end{aligned}$$

1.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist d-*offen* $\Leftrightarrow$ $\forall p \in U \ \exists \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

1.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\epsilon'}(x) \subset B^d_\epsilon(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.
$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d'(x,y) &:= \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

1.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.
(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \le (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x,y) \le 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes (“metrische Information”) sagt nichts über die Topologie aus.

1.1.11 Definition — Umgebung.
$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

1.1.12 Definition — Innerer Punkt.
Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.
Das *Innere* von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.
Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die <u>nicht</u> äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a,b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a,b)} = [a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \le t \le b\}$.

1.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[2]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.a. nicht offen in X. Z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produkträume**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\iff$ $\forall (x, y) \in W\, \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[3] auf X. Für $x \in X$ sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

   die Äquivalenzklasse von x,

$$X/\sim$$

   die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

   die kanonische Projektion (surjektiv!).
   Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
   $U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\iff}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$).
   Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

[2] Zu überprüfen!

[3] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S^1 = \text{ Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum $= \mathbb{R}/\sim$ mit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (m,t) &\mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

1.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

1.2.1 Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *hausdorffsch*, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \varnothing$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.
   Beweis: Sei $d(p,q) =: \epsilon$.
   Behauptung: $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q) = \varnothing$.
   Sei z in $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q)$. Dann gilt

   $$d(p,q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p,z) + d(z,q) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} > \epsilon \quad ↯$$

   ■

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist <u>nicht</u> hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:

   $$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}, \end{aligned}$$

   also $U_p \cap U_q \neq \varnothing$.

Erinnerung — Konvergenz. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U\ \forall n \geq n_0$.

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hd-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.

1.2.2 Bemerkung.

1. Jeder Teilraum (mit TR-Topologie) eines Hd-Raumes ist Hd.
2. X, Y Hd-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hd-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

1.3 Stetigkeit

1.3.1 Definition — Stetigkeit.

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X.

1.3.2 Beispiel — Einfache Stetigkeiten.

1. $\mathrm{Id} : X \to X$, $x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
   Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ϵ-δ-Definition und zur Folgenstetigkeit[4].

[4] Übungsaufgabe!

1.3.3 Definition — Homöomorphismus.

- Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen *homöomorph*, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

1.3.4 Bemerkung — Homöomorphismengruppe.

- $\mathrm{Id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.
  Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

1.3.5 Beispiel — Einfache Homöomorphismen.

- $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \le t \le 1\} \cong [a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ (via $f(t) = a + t(b-a)$).
- $(0,1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a,b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1,1) \cong (0,1)$ (z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).
- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus! $f : [0,1) \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) und Isometrie $f : X \to Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass
$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y).$$
Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metriken definierten Topologien).
Beweis (über ϵ-δ-Definition): $\delta := \epsilon$.
$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) < \delta = \epsilon$, also ist f stetig.
Analog für f^{-1}.
- $S^n = \{x \in R^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.
$e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S_n.
Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.
Beweis (via stereographische Projektion):
$$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$
$$f(x) := \left(\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \text{ stetig,}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right) \text{ auch stetig.}$$
Also ist f homöomorph.
Achtung: S^n ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (da S^n kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, mehr dazu später).

1.3.6 Bemerkung — Isometrien-Untergruppe.

Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):
$$\mathrm{Isom}(X,d) \subseteq \mathrm{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \mathrm{Bij}(X).$$

1.3.7 Exkurs 1 — Kurven.

Was ist eine Kurve?
Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.
Problem: $\exists$ stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0,1] \to I^2$ ("Peano-Kurven", "space-filling curves")[5].
Ausweg 1: *Jordan-Kuven* (bzw. geschlossene J-Kurven).
:= top. Raum, homöomorph zu $I = [0,1]$ (J-Kurve)
:= top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)
Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).
Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

$$\exists\, f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von R^3.
Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$.[6]

[5] Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

[6] **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

1.3.8 Exkurs 2 — Topologische Gruppen.

Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

1.3.9 Beispiel — Topologische Gruppen.

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

   $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist topologische Gruppe:

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung ($\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$),
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).

7. $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die *spezielle orthogonale Gruppe*. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.
   Insbesondere ist
   $$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S'$$
   eine abelsche topologische Gruppe.

1.4 Zusammenhang

1.4.1 Definition — Zusammenhängend.
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *zusammenhängend*, falls $\varnothing$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenenen Teilmengen von X sind.
Äquivalent: X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.
Beweis: $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A und $X \setminus A$ offen $\Leftrightarrow$ A und $X \setminus A$ abgeschlossen.

1.4.2 Beispiel — Zusammenhang.

1. $\mathbb{R}$ (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.
   Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.
   Annahme: $I \neq U \neq \varnothing$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I. Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \leq c \leq v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U, da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 $\lightning$

1.4.3 Ergänzung — Zusammenhang von Teilmengen.
Allgemein: Eine *Teilmenge* $B \subset X$ heißt *zusammenhängend*, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

1.4.4 Bemerkung — Einpunktige Mengen.

Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraum-topologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und $\varnothing$ die einzigen offenen Mengen).

1.4.5 Definition — Zusammenhangskomponente.

Sei $x \in X$. Die *Zusammenhangskomponente* $Z(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten.

1.4.6 Lemma — Eigenschaften zusammenhängender Mengen.

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow$ $\overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.

2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.[7]

[7] Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

1.4.7 Folgerung.

Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.
Beweis: Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.

- **Symmetrie**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.

- **Transitivität**: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:
  $x \sim y : \exists\, A$ zusammenhängend mit $x, y \in A$.
  $y \sim z : \exists\, B$ zusammenhängend mit $y, z \in B$.
  Also $y \in A \cap B \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B$ zusammenhängend.

■

1.4.8 Beispiel — Zusammenhangskomponenten.

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.

2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit Teilraum-Topologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist *total unzusammenhängend*, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

Beweis. *Annahme*: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.
Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.
Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$, $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$, $\widetilde{O_1} = O_1 \cap A$, $\widetilde{O_2} = O_2 \cap A$. $\widetilde{O_1}$ und $\widetilde{O_2}$ sind offen in A oder in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Teilraumtopoogie. Es ist $A = \widetilde{O_1} \cup \widetilde{O_2}$ mit $\widetilde{O_1} \cap \widetilde{O_2} \neq \emptyset$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.