Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg — Metrische Räume **5**
1.1 Vorbemerkungen 5
1.2 Definitionen zu metrischen Räumen 5
1.3 Beispiele zu metrischen Räumen 6

2 Längenmetriken **9**
2.1 Graphen — Definitionen 9
2.2 Euklidische Metrik 10
2.3 Sphärische Geometrie 13
2.4 Wozu sind Metriken gut? 15

3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie **17**
3.1 Toplogischer Räume 17
3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom 21
3.3 Stetigkeit 22
3.4 Zusammenhang 25
3.5 Kompaktheit 27

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

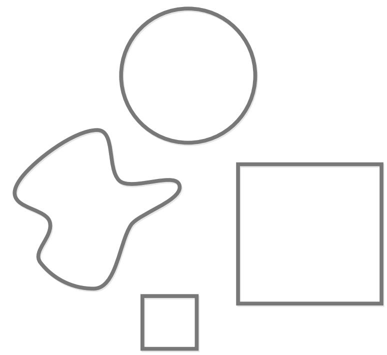

Abbildung 1.1: Diese Objekte sind "topologisch äquivalent"(später mehr zur genauen Definition), aus Sicht der metrischen Geometrie allerdings nicht.

1.1.1 Kartographieproblem.
Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

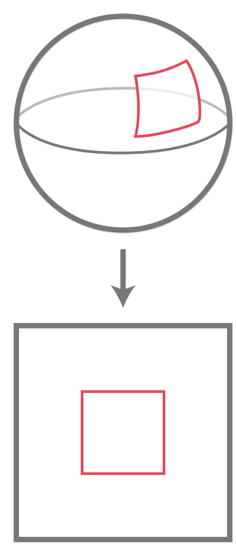

Abbildung 1.2: Die Projektion einer Fläche auf einer Kugel auf Papier — nicht längentreu möglich!

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

1.2.1 Definition — Metrik.
Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine *Metrik* (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x,y) = d(y,x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

1.2.2 Definition — Metrischer Raum.
Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

1.2.3 Definition — Pseudometrik.
Eine *Pseudometrik* erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

1.2.4 Definition — Abgeschlossener r-Ball um x.

Eine Teilmenge $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossener r-Ball um x*.

1.2.5 Definition — Abstandserhaltende Abbildung.

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *abstandserhaltend*, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

1.2.6 Definition — Isometrie.

Eine *Isometrie* ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

1.3.1 Beispiel — Triviale Metrik.

Menge X, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ jede Menge lässt sich zu einem metrischen Raum verwursten.

Anmerkung: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

1.3.2 Beispiel — Simple Metriken.

Sei $X = \mathbb{R}$.

- $d_1(s,t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

1.3.3 Beispiel — Euklidische Standardmetrik.

$X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = ||x - y||$ ist die (euklidische) Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[1].

[1] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bemerkung (aus LA II): Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

1.3.4 Beispiel — Maximumsmetrik.
$X = \mathbb{R}$, $d(x,y) := \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$ ist Metrik.

1.3.5 Beispiel — 1.3.3 und 1.3.4 allgemein: Norm.
V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v,w) := ||v - w||$.

1.3.6 Beispiel — Einheitssphären.
$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ ist die n-te *Einheitssphäre*.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x,y) := \arccos(\langle x,y\rangle)$$

die *Winkel-Metrik* definiert.

1.3.7 Beispiel — Hamming-Metrik.
Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0,1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1,\ldots,f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1,\ldots,n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die *Hamming-Metrik* ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u,v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

Längenmetriken

2.1 Graphen — Definitionen

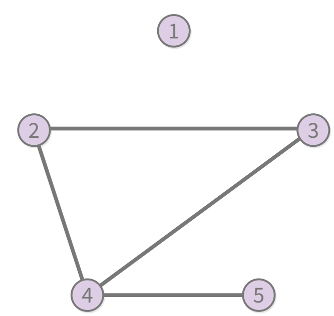

Abbildung 2.1: Ein einfacher Graph. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da die Ecke 1 nicht von den anderen Ecken aus erreicht werden kann.

2.1.1 Definition — Graph.
Ein *Graph* $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

2.1.2 Definition — Erreichbarkeit.
Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist *erreichbar* von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

2.1.3 Definition — Zusammenhängend.
$G = (E, K)$ heißt *zusammenhängend*, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

2.1.4 Beispiel — Wortmetrik.
Sei $\Gamma \coloneqq \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

2.1.5 Definition — Wortmetrik.

$$d_S(g,k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg,kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

2.1.6 Definition — Cayley-Graph.

Der *Cayley-Graph* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die Graphen-Metrik auf $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

2.2.1 Beispiel — Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik.

Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve.
Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad \text{(via \textit{Polynom-Approximation})} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}(g)} = \int_0^1 \|p-q\| dt = \|p-q\| = \underline{d_e(p,q)}.$$

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

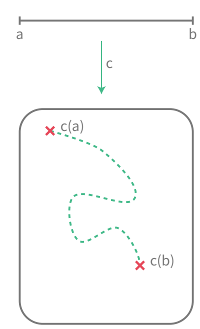

Abbildung 2.2: c bildet ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ auf eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ ab.

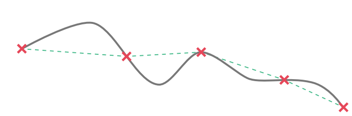

Abbildung 2.3: Durch *Polynom-Approximation* wird eine Kurve sukzessive angenähert.

2.2.2 Lemma — Unabhängigkeit von $\mathbf{L_{euk}}$.

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis:

1. Zu zeigen: Für $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c,d] \to [a,b], s \mapsto t(s)$ gilt:

$$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

2. • Translation.
   Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von p verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \left\| (T_p \circ c)' \right\| dt = \int_a^b \left\| c' \right\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen. □

• Drehung.
Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\theta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\theta x(t) - \sin\theta y(t), \sin\theta x(t) + \cos\theta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel θ gedrehte Kurve.
Da D_θ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\theta \circ c(t))' = D_\theta \cdot c'(t)$$

und damit

$$\left\| (D_\theta \circ c(t))' \right\| = \left\| D_\theta \cdot c' \right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\| c' \right\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen. □

• Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

■

2.2.3 Lemma — Geraden sind am kürzesten.

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0,0), \quad q' = (0,l).$$

Wegen 2.2.2 ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

$$L_{\text{euk}}(c) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \geq \int_a^b |y'|dt \geq \int_a^b y'(t)dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy$$
$$= l.$$

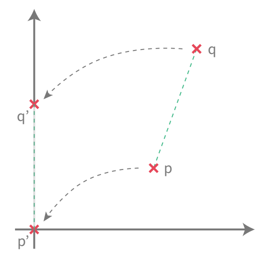

Abbildung 2.4: Verschiebung von p und q auf p' und q'.

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.
$\Rightarrow$ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ $(\forall t)$, also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment. ■

2.2.4 Definition — Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven.

Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p,q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

2.2.5 Satz — "Neuer" metrischer $\mathbb{R}^2$.

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.
Beweis: Direkter Beweis nach 2.2.3.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p,q) = ||p - q|| = d_e(p,q).$$

Die Identität ist eine Isometrie. ■

Beweis: Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie*.
  Sei
  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$
  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_e = d_{euk}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a+b-t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv.
  Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit
  $$d(q,p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p,q).$$
- *Dreiecksungleichung*.
  Zu zeigen: $d_{euk}(p,q) \leq d_{euk}(p,r) + d_{euk}(r,q)$ $(\forall p,q,r \in \mathbb{R}^2)$.
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:
  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$
  Infimumbildung liefert die Behauptung.
- *Positivität*.
  Zu zeigen: $d_{euk}(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{euk}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{euk}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_{euk} = ||p-q|| = 0$.

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

■

2.3 Sphärische Geometrie

2.3.1 Beispiel — 2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum.

Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S^2_{\mathbb{R}} := \{x \in R^3 : ||x|| = R\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a,b] \to S^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die *sphärische Länge* durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p,q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S^2_{\mathbb{R}})).$$

2.3.2 Lemma — Kurvenlängen rotationsinvariant.
Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S^2_{\mathbb{R}}$ ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.
Beweis: Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S^2_{\mathbb{R}}) = S^2_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S^2_{\mathbb{R}}$ auch das Bild $D \circ c \subset S^2_{\mathbb{R}}$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_s(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

■

2.3.3 Lemma — Großkreise sind am kürzesten.
Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S^2_{\mathbb{R}}$ sind Großkreise, also Schnitte von $S^2_{\mathbb{R}}$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.
Beweis: Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S^2_{\mathbb{R}}$. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den "Nordpol" — und q auf $q' = (0, y, z) \in S^2_{\mathbb{R}}$ abbildet. Nach Lemma 2.3.2 und der Definition ist $d_s(p,q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels "geographischer Koordinaten" φ und θ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin\theta(t)\cos\varphi(t),\ \sin\theta(t)\sin\varphi(t),\ \cos\theta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\theta'\cos\theta\cos\varphi - \varphi'\sin\theta\sin\varphi,\ \theta'\cos\theta\sin\varphi + \varphi'\sin\theta\cos\varphi,\ -\theta'\sin\theta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta)$$

und somit

$$\begin{aligned} L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta}dt \geq R\int_a^b \sqrt{\theta'^2(t)}dt \\ &= R\int_a^b |\theta'(t)|dt \geq R\int_a^b \theta'(t)dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = R(\theta(b) - \theta(a)) \end{aligned}$$

mit oBdA $\theta(b) \geq \theta(a)$.
Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis. ∎

2.3.4 Satz — Infimums- & Winkelmetrik isometrisch.
$(S^2_{\mathbb{R}}, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_{\mathbb{R}}, R \cdot d_W)$.
Beweis: Analog zu (R^2, d_{euk}). ∎

2.4 *Wozu sind Metriken gut?*

2.4.1 In Analysis I.
In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

2.4.2 Analogie zu metrischen Räumen.
Sei (X, d) metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt *konvergent*, wenn

$$\exists\, x \in X \forall \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : d(x_n, x) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\epsilon(x)$ $(\forall n \geq N)$.

2.4.3 Erinnerung — Stetigkeit.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls $\forall s > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert und $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$ falls $|t - t_0| < \delta$.
f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

2.4.4 Verallgemeinerung.
Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y).
Eine Abbildung

$$f : X \to Y$$

heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B^Y_\epsilon(f(x))$ falls $x \in B^X_\delta(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

2.4.5 Bemerkung.
$f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

3.1 Toplogischer Räume

3.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

3.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} \coloneqq \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} \coloneqq \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

3.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\,(\text{standard})} \coloneqq \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) \coloneqq \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

3.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus, \ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \dots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

3.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist *d-offen* $\Leftrightarrow$ $\forall p \in U \ \exists \, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

3.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

3.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

3.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^{d}_{\epsilon'}(x) \subset B^{d}_{\epsilon}(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

3.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.
$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

3.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.
(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x,y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

3.1.11 Definition — Umgebung.
$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

3.1.12 Definition — Innerer Punkt.
Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.
Das *Innere* von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

3.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.
Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die nicht äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a,b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

3.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

   $$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[2]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.a. nicht offen in X. Z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produkträume**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist ***offen*** in der ***Produkt-Topologie*** $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das “Kästchen” $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

   $$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[3] auf X. Für $x \in X$ sei

   $$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

   die Äquivalenzklasse von x,

   $$X/\sim$$

   die Menge der Äquivalenzklassen und

   $$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

   die kanonische Projektion (surjektiv!).
   Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
   $U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$).
   Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

   $$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

[2] Zu überprüfen!

[3] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S^{\prime} = \text{ Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S^{\prime} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum $= \mathbb{R}/\sim$ mit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (m,t) &\mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

3.2.1 Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *hausdorffsch*, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \emptyset$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.
   Beweis: Sei $d(p,q) =: \epsilon$.
   Behauptung: $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q) = \emptyset$.
   Sei z in $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q)$. Dann gilt

   $$d(p,q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p,z) + d(z,q) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} > \epsilon \quad \lightning$$

   ■

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist <u>nicht</u> hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:

   $$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}, \end{aligned}$$

   also $U_p \cap U_q \neq \emptyset$.

Erinnerung — Konvergenz. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U \; \forall n \geq n_0$.

Wichtige Konsequenz von “hausdorffsch”: In einem Hd-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.

3.2.2 Bemerkung.

1. Jeder Teilraum (mit TR-Topologie) eines Hd-Raumes ist Hd.
2. X, Y Hd-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hd-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

3.3 Stetigkeit

3.3.1 Definition — Stetigkeit.

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X.

3.3.2 Beispiel — Einfache Stetigkeiten.

1. $\mathrm{Id} : X \to X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
   Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ϵ-δ-Definition und zur Folgenstetigkeit[4].

[4] Übungsaufgabe!

3.3.3 Definition — Homöomorphismus.

- Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen *homöomorph*, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

3.3.4 Bemerkung — Homöomorphismengruppe.

- $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.
  Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

3.3.5 Beispiel — Einfache Homöomorphismen.

- $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
  (via $f(t) = a + t(b-a)$).
- $(0,1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a,b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1,1) \cong (0,1)$
  (z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).
- Stetig und injektiv, aber <u>kein</u> Homöomorphismus!
  $f : [0,1) \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) und Isometrie $f : X \to Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass

  $$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y).$$

  Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metriken definierten Topologien).
  Beweis (über ϵ-δ-Definition): $\delta \coloneqq \epsilon$.
  $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) < \delta = \epsilon$, also ist f stetig.
  Analog für f^{-1}.
- $S^n = \{x \in R^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.
  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S_n.
  Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.
  Beweis (via stereographische Projektion):

  $$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

  $$f(x) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \text{ stetig,}$$

  $$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right) \text{ auch stetig.}$$

  Also ist f homöomorph.
  Achtung: S^n ist <u>nicht</u> homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (da S^n kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, mehr dazu später).

3.3.6 Bemerkung — Isometrien-Untergruppe.
Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\mathrm{Isom}(X,d) \subseteq \mathrm{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \mathrm{Bij}(X).$$

3.3.7 Exkurs 1 — Kurven.

Was ist eine Kurve?
Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.
Problem: $\exists$ stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0,1] \to I^2$ ("Peano-Kurven", "space-filling curves")[5].
Ausweg 1: *Jordan-Kuven* (bzw. geschlossene J-Kurven).
$:=$ top. Raum, homöomorph zu $I = [0,1]$ (J-Kurve)
$:=$ top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)
Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).
Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

$$\exists\, f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von R^3.
Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$.[6]

[5] Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

[6] **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

3.3.8 Exkurs 2 — Topologische Gruppen.

Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

3.3.9 Beispiel — Topologische Gruppen.

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

   $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist topologische Gruppe:

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung ($\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$),
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).

7. $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die ***spezielle orthogonale Gruppe***. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.
   Insbesondere ist
   $$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S'$$
   eine abelsche topologische Gruppe.

3.4 Zusammenhang

3.4.1 Definition — Zusammenhängend.
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *zusammenhängend*, falls $\varnothing$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenenen Teilmengen von X sind.
Äquivalent: X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.
Beweis: $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A und $X \setminus A$ offen $\Leftrightarrow$ A und $X \setminus A$ abgeschlossen.

3.4.2 Beispiel — Zusammenhang.

1. $\mathbb{R}$ (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.
   Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.
   Annahme: $I \neq U \neq \varnothing$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I. Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \le c \le v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U, da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 $\lightning$

3.4.3 Ergänzung — Zusammenhang von Teilmengen.
Allgemein: Eine *Teilmenge* $B \subset X$ heißt *zusammenhängend*, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

3.4.4 Bemerkung — Einpunktige Mengen.

Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und $\varnothing$ die einzigen offenen Mengen).

3.4.5 Definition — Zusammenhangskomponente.

Sei $x \in X$. Die *Zusammenhangskomponente* $Z(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten.

3.4.6 Lemma — Eigenschaften zusammenhängender Mengen.

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow$ $\overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.

2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.[7]

[7] Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

3.4.7 Folgerung.

Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.
Beweis: Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.

- **Symmetrie**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.

- **Transitivität**: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:
  $x \sim y : \exists\, A$ zusammenhängend mit $x, y \in A$.
  $y \sim z : \exists\, B$ zusammenhängend mit $y, z \in B$.
  Also $y \in A \cap B \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B$ zusammenhängend.

■

3.4.8 Beispiel — Zusammenhangskomponenten.

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.

2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit Teilraum-Topologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist *total unzusammenhängend*, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

Beweis. *Annahme*: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.
Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.
Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$, $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$, $\widetilde{O_1} = O_1 \cap A$, $\widetilde{O_2} = O_2 \cap A$. $\widetilde{O_1}$ und $\widetilde{O_2}$ sind offen in A oder in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Teilraumtopoogie. Es ist $A = \widetilde{O_1} \cup \widetilde{O_2}$ mit $\widetilde{O_1} \cap \widetilde{O_2} \neq \varnothing$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.

3.4.9 Definition — Weg-Zusammenhängend.

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X heißt *weg-zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (d.h. stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$) zwischen p und q gibt.

3.4.10 Lemma — Weg-Zusammenhang.

X ist weg-zusammenhängend $\Rightarrow$ X ist zusammenhängend.
Beweis: Wäre X *nicht* zusammenhängend, dann $\exists$ eine disjunkte Zerlegung $X = A \cup B$ mit A, B offen und nicht-leer, $A \cap B = \varnothing$ mit $p \in A$ und $q \in B$. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein (stetiger) Weg zwischen p und q, also $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$. Daraus folgt, dass $[0,1] = \alpha^{-1}(\alpha([0,1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0,1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0,1])) \Rightarrow$ $[0,1]$ ist nicht zusammenhängend ↯
Achtung: Umkehrung gilt nicht! Z.B. “topologische Sinuskurve”: $X := \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,y) : |y| < 1\}$.[8] X ist zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend. ■

[8] **Details**: Singer-Thorpe p.52

Hinweis: Die Vorlesung vom 15.11. wird heute Nachmittag nachgetragen, ich konnte leider nicht anwesend sein.

3.5 Kompaktheit

3.5.1 Ergebnisse von gestern.

- stetige Bilder von kompakten Mengen sind kompakt
- abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt
- Produkte von kompakten Mengen sind kompakt.

3.5.2 Beispiel — Weitere Beipsiele.

1. **Produkte kompakter Mengen**:

$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n \text{ Faktoren}}$ ist kompakt (Würfel — allgemein $[a,b]^n$ ist kompakt)

2. **Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen**:
Abgeschlossene Teilräume des n-dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbesondere: jede abgeschlossene beschränkte[9] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge $2c$ liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius c liegt).

[9] Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls $\forall a \in A : ||a|| \leq x < \infty$

3.5.3 Satz — Heine-Borel.

Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossen-beschränkten Teilmengen.
Beweis:

- $\Leftarrow$. Siehe obiges Beispiel 2.
- $\Rightarrow$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
  Die Norm $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = d(0,x)$ ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.
  Dass K abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

■

3.5.4 Lemma — Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen.

Sei X ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.
Beweis: Es ist zu zeigen dass $X \setminus K$ offen ist in X.
Sei dafür $x_0 \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x_0 und V_x von x, sodass $U_x \cap V_x = \varnothing$ (das geht, weil X hausdorffsch ist).
Da K kompakt ist, existieren Punkte $x_1 \ldots, x_n \in K$ mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

K kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.
Setze $U := U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \varnothing, \end{aligned}$$

also $x_0 \in U \subset X \setminus K$. ■

3.5.5 Korollar — Min. und Max. von Teilmengen.

Jede stetige Funktion $f : K \to C$ auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.[10]

[10] Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)

3.5.6 Satz — Homöomorphismen.

Eine stetige, bijektive Abbildung $f : K \to Y$ von einem kompakten Raum K auf einen Hausdorff-Raum Y ist ein Homöomorphismus.
Bemerkung: Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0,1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre $[0,1) \cong S^1$ ↯ (da S^1 kompakt ist, aber $[0,1)$ nicht)