

Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe der allgemeinen Topologie	5
1.1	Topologischer Räume	5
1.2	Hausdorffsches Trennungsaxiom	9
1.3	Stetigkeit	10
1.4	Zusammenhang	13

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

1.1 Topologischer Räume

1.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}) bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X , so dass gilt

1. $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus \mathcal{O} sind wieder in \mathcal{O} .

Ein solches System \mathcal{O} heißt *Topologie* von X . Die Elemente von \mathcal{O} heißen *offene Teilmengen* von X .

$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X , $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X , $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf \mathbb{R} .

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{s (standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf \mathbb{R} .

Offenes Intervall:

$$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},$$

a und b beliebig

1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf \mathbb{R} .

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf \mathbb{R} .

(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, \emptyset und \mathbb{R} .)

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

1.1.5 Definition — Metrischer \rightarrow topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:

$U \subset X$ ist *d-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U \exists \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball

$B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt:

$B_\epsilon(p) \subset U$.

Die *d-offenen* Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d induzierte Topologie¹.

¹ **Übungsaufgabe:** Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

1.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie \mathcal{O} ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf \mathbb{R} .

1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

\mathbb{R}, \mathbb{C} haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik

$d(x, y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):

Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:

Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B_\epsilon^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$), dann ist jede d -offene Menge auch d' -offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.

Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.

$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

1.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.

(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Für d' gilt: $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d' :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes (“metrische Information”) sagt nichts über die Topologie aus.

1.1.11 Definition — Umgebung.

(X, \mathcal{O}) sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

1.1.12 Definition — Innerer Punkt.

Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.

Das *Innere* von A ist die Menge $\overset{\circ}{A}$ der inneren Punkte von A .

1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.

Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die nicht äußere Punkte sind.

Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,

$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

1.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie:** (X, \mathcal{O}_X) topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

definiert eine Topologie auf Y , die sogenannte *Teilraum-Topologie*.²

² Zu überprüfen!

Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.a. nicht offen in X . Z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produktträume:** (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.

Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten:** (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, \sim Äquivalenzrelation³ auf X . Für $x \in X$ sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse von x ,

$$X / \sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).

Die *Quotienten-Topologie* auf X / \sim nutzt:

$U \subset X / \sim$ ist offen $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U)$ ist offen in X .

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$).

Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

³ Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Dann ist

$$\mathbb{R} / \sim_{\text{bijektiv}} = S' = \text{Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.

$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.

Bahnen-Raum $= \mathbb{R} / \sim$ mit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, t) &\mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

1.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

1.2.1 Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2 .

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt *hausdorffsch*, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

Beweis: Sei $d(p, q) =: \epsilon$.

Behauptung: $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q) = \emptyset$.

Sei z in $B_{\epsilon/3}(p) \cap B_{\epsilon/3}(q)$. Dann gilt

$$d(p, q) \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} > \epsilon \quad \text{!}$$

■

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq q$:

$$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\}, \end{aligned}$$

also $U_p \cap U_q \neq \emptyset$.

Wichtige Konsequenz von “hausdorffsch”: In einem Hd-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.

Erinnerung — Konvergenz.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U \forall n \geq n_0$.

1.2.2 Bemerkung.

1. Jeder Teilraum (mit TR-Topologie) eines Hd-Raumes ist Hd.
2. X, Y Hd-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hd-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

1.3 Stetigkeit

1.3.1 Definition — Stetigkeit.

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *stetig*, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X .

1.3.2 Beispiel — Einfache Stetigkeiten.

1. $\text{Id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ϵ - δ -Definition und zur Folgenstetigkeit⁴.

⁴ Übungsaufgabe!

1.3.3 Definition — Homöomorphismus.

- Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen *homöomorph*, falls ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

1.3.4 Bemerkung — Homöomorphismengruppe.

- $\text{Id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.
Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

1.3.5 Beispiel — Einfache Homöomorphismen.

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
(via $f(t) = a + t(b - a)$).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$
(z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).
- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus!
 $f : [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$,
 $(x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$ offen
bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume $(X, d_X), (Y, d_Y)$ und Isometrie $f : X \rightarrow Y$, also
eine bijektive Abbildung, so dass

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metriken definierten Topologien).

Beweis (über ϵ - δ -Definition): $\delta := \epsilon$.

$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \epsilon$, also ist f stetig.
Analog für f^{-1} .

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$ ist die n -dimensionale Einheitskugel in \mathbb{R}^{n+1} .

$e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S^n .

Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.

Beweis (via stereographische Projektion):

$$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

$$f(x) := \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \text{ stetig,}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right) \text{ auch stetig.}$$

Also ist f homöomorph.

Achtung: S^n ist nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n (da S^n kompakt und \mathbb{R}^n nicht kompakt ist, mehr dazu später).

1.3.6 Bemerkung — Isometrien-Untergruppe.

Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\text{Isom}(X, d) \subseteq \text{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \text{Bij}(X).$$

1.3.7 Exkurs 1 — Kurven.

Was ist eine Kurve?

Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.

Problem: \exists stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0, 1] \rightarrow I^2$ (“Peano-Kurven”, “space-filling curves”)⁵.

⁵ Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

Ausweg 1: *Jordan-Kurven* (bzw. geschlossene J-Kurven).

\equiv top. Raum, homöomorph zu $I = [0, 1]$ (J-Kurve)

\equiv top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)

Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).

Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von \mathbb{R}^3 :

$$\exists f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von \mathbb{R}^3 .

Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von \mathbb{R}^3 gibt mit $h(K_1) = K_2$.⁶

⁶ **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

1.3.8 Exkurs 2 — Topologische Gruppen.

Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

1.3.9 Beispiel — Topologische Gruppen.

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. \mathbb{R}^n mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$ ist topologische Gruppe:

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung $(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2})$,
 - Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).
7. $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = E_n, \det A = 1\}$ ist die *spezielle orthogonale Gruppe*. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.
Insbesondere ist

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S^1$$

eine abelsche topologische Gruppe.

1.4 Zusammenhang

1.4.1 Definition — Zusammenhängend.

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt *zusammenhängend*, falls \emptyset und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X sind.

Äquivalent: X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow X$ ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

Beweis: $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ offen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ abgeschlossen.

1.4.2 Beispiel — Zusammenhang.

1. \mathbb{R} (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.

Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.

Annahme: $I \neq U \neq \emptyset$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I . Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \leq c \leq v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U , da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 \nmid

1.4.3 Ergänzung — Zusammenhang von Teilmengen.

Allgemein: Eine *Teilmenge* $B \subset X$ heißt *zusammenhängend*, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

1.4.4 Bemerkung — Einpunktige Mengen.

Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und \emptyset die einzigen offenen Mengen).