Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Übungen

1.1 2017-10-27

1.1.1 Aufgabe 2.

Gegeben:

- $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $||x||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $||x|| \geq 0 \forall x$, $x = 0 \Leftrightarrow ||x|| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.
Sublinearität:

1.

$$\begin{aligned} ||x + y||_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ &= ||x||_1 + ||y||_1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} ||x + y||_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= ||x||_\infty + ||y||_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} ||x + y||_2^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} ||x||_2^2 + 2||x||_2||y||_2 + ||y||_2^2 = (||x||_2 + ||y||_2)^2 \\ &\Rightarrow ||x + y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2 \end{aligned}$$

1.1.2 Aufgabe 3.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:

   (a) Falls $d(x,y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
   <u>Beweis</u>: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
   Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2$ ↯ □

   (b) Falls $d(x,y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
   <u>Beweis</u>: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

   $$\begin{aligned} d(x,z) &\geq r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x,y) + d(z,y) \quad ↯ \quad \square \end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

   (a) Sei $X = \{0, 1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0,1) = 1$.
   Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen keine Elemente.
   Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben
   $B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0,1)$.

   (b) Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0,1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100 - 100$.