Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier

28. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1
Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die unten abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

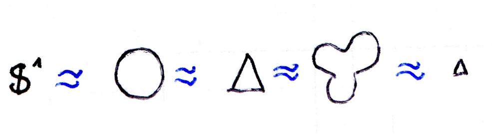

Abbildung 1.1. Diese Objekte sind topologisch äquivalent, metrisch allerdings nicht.

Bemerkung 1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

Definition 1.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Definition 1.4 (Abgeschlossener r-Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r-Ball um x**.

Definition 1.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.7 (Triviale Metrik). Menge X,

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem metrischen Raum verwursten.

Beispiel 1.8 (Simple Metriken). Sei $X = \mathbb{R}$.[1]

- $d_1(s,t) := |s-t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s-t|+1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.9 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

$$d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = ||x-y||$$

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[2].

Bemerkung 2 (aus LA II). Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.10 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

ist Metrik.

Beispiel 1.11 (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm). V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

[1] **Anmerkung**: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

[2] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) \coloneqq ||v - w||$.

Beispiel 1.12 (Einheitssphäre).

$$S_1^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

ist die n-te **Einheitssphäre**.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) \coloneqq \arccos(\langle x, y\rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

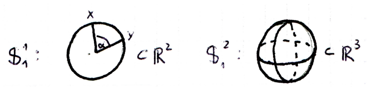

Abbildung 1.2. Die erste und zweite Einheitssphäre.

Beispiel 1.13. (Hamming-Metrik) Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X \coloneqq \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

2

Längenmetriken

2.1 Graphen

Definition 2.1 (Graph). Ein **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

Definition 2.2 (Erreichbarkeit). Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist **erreichbar** von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

Definition 2.3 (Zusammenhängend). $G = (E, K)$ heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.
Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

Beispiel 2.4 (Wortmetrik). Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

Definition 2.5 (Wortmetrik).

$$d_S(g,k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg,kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

Definition 2.6 (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph** $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die *Graphen-Metrik* auf $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

Beispiel 2.7 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik). Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve. Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b ||C'(t)||dt \quad \text{(via } \textit{Polynom-Approximation}\text{)} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

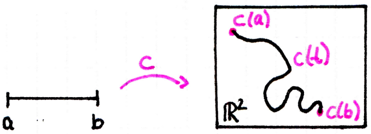

Abbildung 2.1. Eine stückweise differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad ||g'(t)|| = ||p - q||$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}(g)} = \int_0^1 ||p-q|| dt = ||p-q|| = \underline{d_e(p,q)}.$$

Lemma 2.8 (Unabhängigkeit von L_{euk}).

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c,d] \to [a,b]$, $s \mapsto t(s)$ gilt:

   $$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

   Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

   $$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

   □

2. • Translation.
   Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

   $$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

   die von p verschobene Kurve. Es gilt

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \left\|(T_p \circ c)'\right\| dt = \int_a^b \left\|c'\right\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen. □

- Drehung.
  Für $\vartheta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\vartheta x(t) - \sin\vartheta y(t), \sin\vartheta x(t) + \cos\vartheta y(t)) \end{aligned}$$

  die um Winkel ϑ gedrehte Kurve.
  Da D_ϑ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c'(t)$$

  und damit

$$\left\|(D_\vartheta \circ c(t))'\right\| = \left\|D_\vartheta \cdot c'\right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\|c'\right\|$$

  und damit gilt das Lemma für Drehungen. □

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

Lemma 2.9 (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

Beweis.

Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der Invarianz von L_{euk} ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

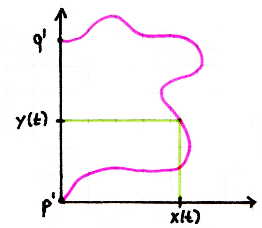

Abbildung 2.2. Die "geeignete" Rotation einer Kurve, sodass Start- und Endpunkt auf einer Achse liegen.

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.

$\Rightarrow$ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ ($\forall t$), also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment. ☐

Definition 2.10 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven). Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

Satz 2.11 ("Neuer" metrischer $\mathbb{R}^2$).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.

Beweis. Direkter Beweis nach dem Lemma über Geradensegmente.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

Beweis. Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*
  Sei

  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \to \mathbb{R}^2.$$

  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_e = d_{\text{euk}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv. Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit

  $$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

- *Dreiecksungleichung.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p, q) \leq d_{\text{euk}}(p, r) + d_{\text{euk}}(r, q)$ ($\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2$).
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:

  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$

  Infimumbildung liefert die Behauptung.

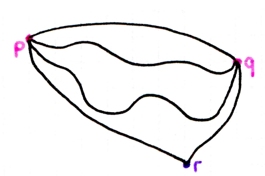

Abbildung 2.3. Betrachte Wege von p nach q über r und nicht über r.

- *Positivität.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{euk}}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_{\text{euk}} = ||p-q|| = 0$.

Abbildung 2.4. "Schleifen".

2.3 Sphärische Geometrie

Beispiel 2.12 (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S^2_{\mathbb{R}} := \{x \in R^3 : ||x|| = R\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a,b] \to S^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b ||c'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}dt$$

und

$$d_s(p,q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S^2_{\mathbb{R}})).$$

Lemma 2.13 (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S^2_{\mathbb{R}}$ ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $||D(x)|| = ||x||$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S^2_{\mathbb{R}}) = S^2_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S^2_{\mathbb{R}}$ auch das Bild $D \circ c \subset S^2_{\mathbb{R}}$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

$$\begin{aligned}L_s(D\circ c) &= \int_a^b \|(D\circ c(t))'\|dt = \int_a^b \|D(c'(t))\|dt\\ &= \int_a^b \|c'(t)\|dt = L_S(c).\end{aligned}$$

Lemma 2.14 (Großkreise sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S^2_{\mathbb{R}}$ sind **Großkreise**, also Schnitte von $S^2_{\mathbb{R}}$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S^2_{\mathbb{R}}$. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den "Nordpol" — und q auf $q' = (0, y, z) \in S^2_{\mathbb{R}}$ abbildet. Aufgrund der Rotationsinvarianz der Kurvenlängen und der Definition ist $d_s(p, q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels "geographischer Koordinaten" φ und ϑ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t),\ \sin\vartheta(t)\sin\varphi(t),\ \cos\vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta'\cos\vartheta\cos\varphi - \varphi'\sin\vartheta\sin\varphi,\ \vartheta'\cos\vartheta\sin\varphi + \varphi'\sin\vartheta\cos\varphi,\ -\vartheta'\sin\vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned}L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}dt \geq R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2(t)}dt\\ &= R\int_a^b |\vartheta'(t)|dt \geq R\int_a^b \vartheta'(t)dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a))\end{aligned}$$

mit oBdA $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$.
Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

Satz 2.15 (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch). $(S^2_{\mathbb{R}}, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_{\mathbb{R}}, R\cdot d_W)$.

Beweis. Analog zu (R^2, d_{euk}).

2.4 Wozu sind Metriken gut?

Bemerkung 3 (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Bemerkung 4 (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt **konvergent**, wenn

$$\exists\, x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\varepsilon(x)$ ($\forall n \geq N$).

Bemerkung 5 (Erinnerung: Stetigkeit). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(x))$ falls $x \in B^X_\delta(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

Bemerkung 7 (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \to Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

3

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

3.1 Toplogische Räume

Definition 3.1 (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt **Topologie** von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen **offene Teilmengen** von X.
$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel 3.2 (Extrembeispiele).

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die **triviale Topologie**.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die **diskrete Topologie**.

Beispiel 3.3 (Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\,\text{(standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.[1]

Beispiel 3.4 (Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\setminus,\ E \subset \mathbb{R}\ \text{endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}
(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\
\mathbb{R} &\leftrightarrow \ \text{Nullpolynom}\\
\varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1
\end{aligned}$$

Definition 3.5 (Metrischer Raum → topologischer Raum). Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } \boldsymbol{d}\textbf{-offen} \iff \forall p \in U\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$ um p mit Radius ε ganz in U liegt: $B_\varepsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d **induzierte Topologie**[2].

Definition 3.6 (Basis). Eine **Basis** für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

[1] **Offenes Intervall**: $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

[2] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel: $\mathcal{B}$ = {offene Intervalle} für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7 (Komplexität einer Topologie). $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie): Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

Bemerkung 8 (Gleichheit von Topologien). Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\varepsilon'}(x) \subset B^d_{\varepsilon}(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Beispiel 3.8 (Bälle und Würfel sind gleich). $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d'(x, y) &:= \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

Beispiel 3.9 (Metrische Information sagt nichts über Topologie). (X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

Definition 3.10 (Umgebung). $(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

Definition 3.11 (Innerer und äußerer Punkt). Für $A \subset X, p \in X$ heißt p ein **innerer Punkt** von A (bzw. **äußerer Punkt** von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist. Das **Innere** von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

Definition 3.12 (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die nicht äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

Bemerkung 9 (Drei konstruierte topologische Räume). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

   $$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[3]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.A. nicht offen in X, z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.
2. **Produkttopologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Leftrightarrow\ \forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

   $$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.
3. **Quotiententopologie**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[4] auf X. Für $x \in X$ sei

   $$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

[3] Zu überprüfen!
[4] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

die Äquivalenzklasse von x,

$$X/\sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned}\pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x]\end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).
Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
$U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s,t) = |s-t|$).
Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S' = \text{ Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{\mathrm{it}}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum = $\mathbb{R}/\sim$ mit

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(m,t) \mapsto t + 2\pi m.\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

Bemerkung 10 (Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \emptyset$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

   Beweis. Sei $d(p,q) =: \varepsilon$.
   Behauptung: $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \emptyset$.
   Sei z in $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$. Dann gilt

   $$d(p,q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p,z) + d(z,q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} > \varepsilon \quad \lightning$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:

   $$U_p = \mathbb{R} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$$
   $$U_q = \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\},$$

   also $U_p \cap U_q \neq \emptyset$.

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.[5]

Bemerkung 11 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit Teilraum-Topologie) eines Hausdorff-Raumes ist hausdorffsch.
2. X, Y Hausdorff-Räume $\Rightarrow$ $X \times Y$ ist Hausdorff-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

[5] **Erinnerung: Konvergenz**: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U\ \forall n \geq n_0$.

3.3 Stetigkeit

Definition 3.13 (Stetigkeit). $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X.

Beispiel 3.14 (Einfache Stetigkeiten).

1. $\mathrm{Id} : X \to X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
   Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ε-δ-Definition und zur Folgenstetigkeit[6].

Definition 3.15 (Homöomorphismus).

- Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

Bemerkung 12 (Homöomorphismengruppe).

- $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.

Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

Beispiel 3.16 (Einfache Homöomorphismen).

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
  (via $f(t) = a + t(b - a)$).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$
  (z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).

[6] Übungsaufgabe!

- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus!
  $f : [0,1) \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) und Isometrie $f : X \to Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass

  $$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

  Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metrik definierten Topologien).

  Beweis. (über ε-δ-Definition): $\delta := \varepsilon$.
  $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon$, also ist f stetig.
  Analog für f^{-1}.

- $S^n = \{x \in R^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.
  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S_n.
  Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.

  Beweis. (via stereographische Projektion):

  $$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

  $$f(x) := \left(\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \text{ stetig,}$$

  $$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right) \text{ auch stetig.}$$

  Also ist f homöomorph.

  Achtung: S^n ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (da S^n kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, mehr dazu später).

Bemerkung 13 (Isometrien-Untergruppe). Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\text{Isom}(X, d) \subseteq \text{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \text{Bij}(X).$$

Bemerkung 14 (Exkurs 1: Kurven). Was ist eine Kurve?
Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.
Problem: $\exists$ stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0,1] \to I^2$

("Peano-Kurven", "space-filling curves")[7].

Ausweg 1: *Jordan-Kuven* (bzw. geschlossene J-Kurven).

:= top. Raum, homöomorph zu $I = [0, 1]$ (J-Kurve)

:= top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)

Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).

Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

$$\exists\, f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von R^3.

Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$.[8]

Bemerkung 15 (Exkurs 2: Topologische Gruppen). Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Beispiel 3.17 (Topologische Gruppen).

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

   $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist topologische Gruppe:

[7] Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

[8] **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung ($\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$),
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).

7. $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.
   Insbesondere ist
   $$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S'$$
   eine abelsche topologische Gruppe.

3.4 Zusammenhang

Definition 3.18 (Zusammenhängend). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, falls $\varnothing$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X sind.
Äquivalent: X ist zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

Beweis. $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ A und $X \setminus A$ offen $\Longleftrightarrow$ A und $X \setminus A$ abgeschlossen.

Beispiel 3.19 (Zusammenhang).

1. $\mathbb{R}$ (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.

   Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.
   Annahme: $I \neq U \neq \varnothing$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I. Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \leq c \leq v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U, da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 $\lightning$

Bemerkung 16 (Ergänzung: Zusammenhang von Teilmengen). *Allgemein*: Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Bemerkung 17 (Einpunktige Mengen). Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und $\varnothing$ die einzigen offenen Mengen).

Definition 3.20 (Zusammenhangskomponente). Sei $x \in X$. Die **Zusammenhangskomponente** $Z(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten.

Lemma 3.21 (Eigenschaften zusammenhängender Mengen).

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow$ $\overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.
2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.[9]

Bemerkung 18 (Zusammenhängende Mengen bilden disjunkte Zerlegung).
Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.

Beweis. Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- **Symmetrie**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.
- **Transitivität**: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:
  $x \sim y : \exists\, A$ zusammenhängend mit $x, y \in A$.
  $y \sim z : \exists\, B$ zusammenhängend mit $y, z \in B$.
  Also $y \in A \cap B \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} A \cup B$ zusammenhängend.

Beispiel 3.22 (Zusammenhangskomponenten).

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit Teilraum-Topologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist **total unzusammenhängend**, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

   Beweis. Annahme: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.
   Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.
   Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$, $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$, $\widetilde{O_1} = O_1 \cap A$, $\widetilde{O_2} = O_2 \cap A$. $\widetilde{O_1}$ und $\widetilde{O_2}$ sind offen in A oder in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Teilraumtopoogie. Es ist $A = \widetilde{O_1} \cup \widetilde{O_2}$ mit $\widetilde{O_1} \cap \widetilde{O_2} \neq \emptyset$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.

[9] Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

Definition 3.23 (Weg-Zusammenhängend). Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (d.h. stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$) zwischen p und q gibt.

Lemma 3.24 (Weg-Zusammenhang). X ist weg-zusammenhängend $\Rightarrow X$ ist zusammenhängend.

Beweis. Wäre X *nicht* zusammenhängend, dann $\exists$ eine disjunkte Zerlegung $X = A \cup B$ mit A, B offen und nicht-leer, $A \cap B = \emptyset$ mit $p \in A$ und $q \in B$. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein (stetiger) Weg zwischen p und q, also $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$. Daraus folgt, dass $[0,1] = \alpha^{-1}(\alpha([0,1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0,1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0,1])) \Rightarrow [0,1]$ ist nicht zusammenhängend $\lightning$

Achtung: Umkehrung gilt nicht! Z.B. "topologische Sinuskurve"[10] X ist zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend:

$$X := \left\{\left(x, \sin\tfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,y) : |y| < 1\}.$$

Lemma 3.25 (Weg-Zusammenhang von Bildern). Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

Beweis.

1. Sei $f : X \to X$ stetig und $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.
   Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung.
2. Seien $x = f(p), y = f(q)$ zwei Punkte in $f(X)$. Es ist $p = f^{-1}(x), q = f^{-1}(y)$.
   Dann existiert $a : [0,1] \to X$ mit $a(0) = p$ und $a(1) = q$ und somit ist $f \circ a : [0,1] \to f(X)$ ein stetiger Weg in $f(X)$.

Korollar 3.26 (Zwischenwertsatz). Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Bemerkung 19 (Test auf Homöomorphie via Zusammenhang).
Beispiel: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ nur falls $n = 1$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $R \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$. Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \geq 2} \quad \lightning$$

Ebenso: $[0,1] \cong [0,1]^n$ nur für $n = 1$.

[10] **Details**: Singer-Thorpe p.52

Satz 3.27 (von Brouwer). $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ für $m \neq n$.

Beweis. Der Beweis benutzt den **Satz von Gebietstreue** (Brouwer):

Ist $U \subseteq$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung, so ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Beweisidee: Ist $m < n$, so ist

$$j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}^m$ auf eine *nicht* offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wäre $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.[11]

3.5 Kompaktheit

Definition 3.28 ((Lokal) kompakt). Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$\begin{aligned} &X = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_k \in I : \\ &X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \end{aligned}$$

- $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn A bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.
- X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 20 (Verwendung kompakter Räume). Kompakte Räume sind oft "einfacher" als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.
Begründung: $\forall x \in X\ \exists\, U_x : f|_{U_x} \leq c_x$. Schreibe $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist existieren $x_1, \dots, x_k \in X$, sodass $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$.
$\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \dots, c_{x_k}\}$.

Beispiel 3.29 (Beschränktheit im Kompakten). Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ **lokal beschränkt** (d.h. jeder Punkt von X hat eine Umgebung, in der f beschränkt ist — z.B. wahr für stetige Funktionen), dann ist f beschränkt.

Beispiel 3.30 (Kompaktheit von Intervallen). $I = [0, 1]$ ist kompakt (ebenso $[a, b]$).

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Dann existiert eine sogenannte **Lebesgue-Zahl** $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I_\delta \subset I$ der Länge δ in einem U_i liegt. Da

[11] siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

$[0,1]$ mit endlich vielen Intervallen der Länge δ überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen U_i.

Bemerkung 21 (Hinweise zur Lebesgue-Zahl). Gäbe es ein solches $\delta > 0$ nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n \subset [0,1]$ der Länge $\frac{1}{n}$, die jeweils in keiner Überdeckungsmenge U_i liegen. Nach Bolzano Weierstraß[12] folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte m_n von I_n konvergiert gegen ein $t \in I$. Dieses t liegt aber in einem U_i. Also, da U_i offen ist, liegen auch die m_n in U_j für genügend großes n $\lightning$

Satz 3.31 (Sätze über kompakte Räume).

1. Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.
2. Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

Beweis.

1. Sei $f(X) = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass $\left(F^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. X ist kompakt, also

   $$X = F^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup F^{-1}(U_{i_k})$$

   und schließlich

   $$f(X) = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen.
   $A = \bigcup_{i\in I} U_i$ ist offene Überdeckung, also ist $U_i = V_i \cap A$ für V_i offen in X.
   A ist abgeschlossen, also ist $X \setminus A$ offen und $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} V_i$ ist offene Überdeckung von X.
   Da X kompakt ist gilt:

   $$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

   also

   $$A = X \cap A = \left(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}\right) \cap A = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (*Satz von Tichonow*[13]) benutzt das *Lemma von Zorn*[14].
   Seien X und Y kompakte Räume.
   Behauptung: $X \times Y$ ist kompakt.
   Sei $X \times Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ offene Überdeckung. Für jedes $(x,y) \in X \times Y$ existiert $\lambda(x,y)$

[12] "jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ hat konvergente Teilfolgen"

[13] Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.

[14] Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

sodass $(x, y) \in W_{\lambda(x,y)}$. Da $W_{\lambda(x,y)}$ offen ist existiert $U_{(x,y)} \subset X$ und $V_{(x,y)} \subset Y$ sodass

$$(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{\lambda(x,y)}.$$

Für festes x ist $\bigcup_{y \in Y} V_{(x,y)}$ eine offene Überdeckung von Y, also — da Y kompakt ist — existieren $y_1(x), \ldots, y_{m_x}(x)$ sodass

$$Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \cdots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Setze

$$U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \cdots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_n$ sodass $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m_x}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

Beispiel 3.32 (Weitere kompakte Mengen).

1. **Produkte kompakter Mengen**:

   $$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n \text{ Faktoren}}$$

   ist kompakt (Würfel — allgemein $[a, b]^n$ ist kompakt)
2. **Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen**:
   Abgeschlossene Teilräume des n-dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbesondere: jede abgeschlossene beschränkte[15] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge $2c$ liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius c liegt).

Satz 3.33 (Heine-Borel). Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossen-beschränkten Teilmengen.

Beweis.

- $\Leftarrow$. Siehe obiges Beispiel.
- $\Rightarrow$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
  Die Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = d(0, x)$ ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.
  Dass K abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

[15] Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

Lemma 3.34 (Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen). Sei X ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. Es ist zu zeigen dass $X \setminus K$ offen ist in X.
Sei dafür $x_0 \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x_0 und V_x von x, sodass $U_x \cap V_x = \varnothing$ (das geht, weil X hausdorffsch ist).
Da K kompakt ist, existieren Punkte $x_1 \ldots, x_n \in K$ mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

K kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.
Setze $U := U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \varnothing, \end{aligned}$$

also $x_0 \in U \subset X \setminus K$.

Korollar 3.35 (Minimum und Maximum von Teilmengen). Jede stetige Funktion $f : K \to C$ auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.[16]

Satz 3.36 (Homöomorphismen auf Hausdorff-Räumen). Eine stetige, bijektive Abbildung $f : K \to Y$ von einem kompakten Raum K auf einen Hausdorff-Raum Y ist ein Homöomorphismus.
Bemerkung: Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre $[0, 1) \cong S^1$ $\lightning$ (da S^1 kompakt ist, aber $[0, 1)$ nicht)

Beweis. Zu zeigen: Inverse Abbildung f^{-1} ist stetig.
Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.
Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist $f(A)$ kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in Y und somit ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

[16] Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)

4 Spezielle Klassen von topologischen Räumen

4.1 Übersicht

Folgende spezielle Klassen sollen diskutiert werden:

- metrische Räume $\rightsquigarrow$ metrische Geometrie
- Mannigfaltigkeiten (Grundobjekte in Differenzialgeometrie, Physik,...)
- Polyeder, Simplizialkomplexe (Kombinatorik, algebraische Topologie)
- Bahnen-Räume von Gruppenaktionen (geometrische Gruppentheorie)

4.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 4.1 (Topologische Mannigfaltigkeit). Eine **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:

1. M ist **lokal euklidisch**, d.h. $\forall p \in M$ $\exists$ offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit festem n. Das Paar (φ, U) heißt **Karte**[1] und $\mathcal{A} = \{(\varphi_a, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ mit $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ heißt **Atlas**.
2. M ist hausdorffsch und besitzt abzählbare Basis der Topologie.

[1] Eine mathematische Karte ist einer echten Karte ähnlich. Man nehme einen Punkt, zum Beispiel Karlsruhe, und beschreibt die Umgebung von Karlsruhe in Form einer Karte auf einer DIN A4-Karte. Das ist natürlich nicht bijektiv, aber man versucht es möglichst bijektiv zu machen.

Bemerkung:

- Die zweite Eigenschaft ist "technisch" und garantiert , dass eine "Zerlegung der Eins" existiert (braucht man z.B. für die Existenz von Riemannschen Metriken).
- Die Zahl n heißt **Dimension** von M (eindeutig, wenn M zusammenhängend ist, siehe Satz von Gebietstreue).

Beispiel 4.2 (Topologische Mannigfaltigkeiten).

0. Eine abzählbare Menge mit diskreter Topologie (jeder Punkt ist offen) ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.
1. S^1 ist eine kompakte, zusammenhängenge 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.
   $\mathbb{R}$ ist nichtkompakte, zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit.
2. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit, z.B. ist jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit (hier ist Karte = Einschränkung der Identität).
   Spezialfall: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$, also eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit, denn:
   - $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig
   - $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$
   - $\det^{-1}\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$
   - $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \det^{-1}\{0\} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$
3. Die n-dimensionale Sphäre mit Radius $R > 0$,

$$S^n_R = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : ||x|| = R\},$$

   ist n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

   Beweis. Sei $(x_1, \dots, x_{n+1}) = p \in S^n_R$, oBdA $x_{n+1} > 0$. Man betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D^n_R := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < R\} &\to \varphi(D^n_R) \subset S^n_R \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{R^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) \end{aligned}$$

   d.h. φ ist Einschränkung der Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0) \end{aligned}$$

   auf S^n_R.
   Alternativ kann via stereographischer Projektion mit 2 Karten ausgekommen werden. Ein Atlas mit einer Karte existiert nicht.

4. Das Produkt von n_1-dimensionaler Mannigfaltigkeit M_1 und n_2-dimensionaler Mannigfaltigkeit M_2 ist $(n_1 + n_2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.
   Karten: $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$,

   $$\tilde{\varphi} : U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

   mit (U_1, φ_1) Karte von M_1 um p_1 und (U_2, φ_2) Karte von M_2 um p_2.

Bemerkung 22 ("Wieviele topologische Mannigfaltigkeiten gibt es?").

- *Dimension* $n = 1$: Im wesentlichen $\mathbb{R}$ (nicht kompakt) oder S^1 (kompakt).
- *Dimension* $n = 2$: Liste für zusammenhängende, kompakte, "orientierbare", "randlose" Mannigfaltigkeiten:
  - $g = 0$: S^2 Einheitssphäre
  - $g = 1$: $T^2 = S^1 \times S^1$ Torus
  - $g = 2$: Brezel
  - …

  g ist das **Geschlecht** der Mannigfaltigkeit.
- *Dimension* $n = 3$: Thurston's **Geometrisierungs-Vermutung** (~ 1978)
  Bewiesen von Perelman (2002), ein Milleniumsproblem.
- *Dimension* $n \geq 4$: Allgemeine Klassifikation unmöglich, weil das Homöomorphieproblem hier nicht entscheidbar ist (Markov, 1960).

4.3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 4.3 (Kartenwechsel, differenzierbare Mannigfaltigkeit). Sei M topologische Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Ein **Kartenwechsel** ist ein Homöomorphismus

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\psi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n}.$$

Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M ist ein **C^∞-Atlas**, falls alle möglichen Kartenwechsel C^∞-Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ sind, also alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Ein maximaler C^∞-Atlas heißt **C^∞-Struktur** auf der topologischen Mannigfaltigkeit M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer C^∞-Struktur (auch **glatte** oder **differenzierbare Mannigfaltigkeit**).

Bemerkung 23.

1. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur[2].
2. Auf $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$[3], existiert genau eine differenzierbare Struktur.
3. Auf S^7 existieren 28 differenzierbare Strukturen[4].

Frage: Wozu die Differenzierbarkeitsbedingung für Kartenwechsel? Beispielsweise für die Definition von differenzierbaren Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.4 (Differenzierbarkeit). Seien M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F : M^m \to N^n$ stetig. F heißt **differenzierbar in** $p \in M$, falls für Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $F(p)$ gilt:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

ist C^∞-Abbildung in $\varphi(p)$.
So kommt man von einem abstrakten F zwischen den Mannigfaltigkeiten zu einer konkreten Darstellung von F.
F heißt **differenzierbar** (C^∞), falls F differenzierbar ist für alle $p \in M$.

Bemerkung 24 (Wohldefiniertheit der Differenzierbarkeit). Differenzierbarkeit in p ist wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl der Karten)

Beweis. Erster Test: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, *zweiter Test* $\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}$
Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi \circ F \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ \underbrace{\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi}}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ F \circ \underbrace{\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \varphi^{-1} \\ &= \underbrace{\left(\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}\right)}_{C^\infty} \circ \left(\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right) \circ \underbrace{\left(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}\right)}_{\text{Kartenwechsel}}\end{aligned}$$

Also: Abbildung in Test 1 ist $C^\infty \iff$ Abbildung in Test 2 ist C^∞.

[2] Kerraire 1960
[3] Kirby, Friedman 1980
[4] Milnor 1956

Bemerkung 25.

- $N = \mathbb{R}$, $F : M \to \mathbb{R}$ (differenzierbar) heißt **differenzierbare Funktion**.
- $M = \mathbb{R}$ (oder $I \subset \mathbb{R}$), $F : I \to N$ heißt **differenzierbare Kuve**.
- Eine Abbildung $F : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **Diffeomorphismus**, falls F bijektiv und F und F^{-1} differenzierbar sind (also C^∞).
- Ein Homöomorphismus ist nicht unbedingt ein Diffeomorphismus. Beispielsweise $\mathbb{R}$ mit Id als Karte, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist Homöomorphismus, aber kein Diffeomorphismus, da $F^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist nicht C^∞.
- Die Menge der Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Gruppe mit der Verkettung von Abbildungen.

Beispiel 4.5.

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (bzgl. Standard-Topologie).
   $\varphi_0 := \mathrm{Id}\,|_U$ mit zugehörigem maximalen Atlas definiert C^∞-Struktur auf U, die kanonische differenzierbare Struktur.
2. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch **Flächen**, speziell *regulär parametrisierte Flächen*[5].

Definition 4.6 (Reguläre Fläche). Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ (mit Teilraum-Topologie von $\mathbb{R}^3$) heißt **reguläre Fläche**, falls für jeden Punkt $p \in S$ eine Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Abbildung

$$F : \underset{\text{offen}}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \underset{\text{offene TM von S}}{V \cap S} \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

existiert, so dass gilt:

1. F ist ein differenzierbar Homöomorphismus
2. das Differential (Jacobi-Matrix) von F,

   $$\mathrm{d}F_q : \mathbb{R}^2 \supseteq T_q U \to T_{F(q)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$$

   ist *injektiv* (d.h. Jacobi-Matrix hat Rang 2) für $\forall q \in U$.

F heißt **lokale Parametrisierung** von S.

[5] Gegenstand der klassischen Differentialgeometrie, siehe auch Kapitel 5

Beispiel 4.7 (Rotationsfläche). Gegeben ist eine ebene Kurve $c(v) = (r(v), 0, h(v))$, $v \in [a, b]$ mit $r(v) > 0$, $c'(v) = \big(r'(v), 0, h'(v)\big)$ Tangentialvektor (mit C^∞-Funktionen r, h).[6]

$$F(u, v) := \begin{pmatrix} r(v)\cos u \\ r(v)\sin u \\ h(v) \end{pmatrix}$$

ist reguläre Fläche.[7]

Beispiel: 2-Sphäre von Radius R:

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos v\cos u \\ R\cos v\sin u \\ R\sin v \end{pmatrix}.$$

Es gibt andere Parametrisierungen, beispielsweise

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung 26 (Geometrische Eigenschaften parametrisierungsunabhängig).
Geometrische Eigenschaften sollten unabhängig sein von Parametrisierung. Das wird durch Eigenschaft 2 von regulären Flächen garantiert. Genauer gilt: Parameterwechsel sind differenzierbar ($\rightsquigarrow$ reguläre Flächen sind differenzierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit F^{-1} (Umkehr-Abbildung der Parametrisierung) als Karten):
Sei $p \in S$ und $F_1 : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to S$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \supseteq V \to S$ zwei Parametrisierungen, sodass $p \in F_1(U) \cap F_2(V) =: W$.
Behauptung: Der Parameterwechsel

$$H := F_1^{-1} \circ F_2 : \mathbb{R}^2 \supset F_2^{-1}(W) \to F_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$$

ist Diffeomorphismus.

Beweis. H ist Homöomorphismus, da F_1 und F_2 Homöomorphismen sind.
Problem: F_1^{-1} ist auf einer offenen Teilmenge von S definiert und und da weiß man nicht was

[6] $\|c'(v)\| \neq 0 \Leftrightarrow (r')^2 + (h')^2 \neq 0$
[7] Übung!

differenzierbar heißt.
Ausweg: Erweiterung von F. Sei $r \in F_2^{-1}(W)$ und $q := H(r)$. Da

$$F_1(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

reguläre Parametrisierung ist können wir oBdA (erst Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^3$ umbenennen) annehmen, dass

$$\frac{J(x,y)}{J(u,v)}(q) \neq 0 \quad \text{(Jacobi-Determinante).}$$

Trick: Erweitere F_1 zu Abbildung

$$\widetilde{F_1} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$\widetilde{F_1}(u,v,t) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + \boldsymbol{t}).$$

$\widetilde{F_1}$ ist differenzierbar und $\widetilde{F_1}|_{U\times\{0\}} = F_1$.
Die Jacobi-Determinante von $\widetilde{F_1}$ in $(q,0)$,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} & 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} & 0 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} & 1 \end{pmatrix}(q,0) = \det\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \end{pmatrix}(q) \neq 0.$$

Nach dem Umkehrsatz (Analysis II) existiert eine Umgebung A von $\widetilde{F_1}(q,0) = F_1(q)$ in $\mathbb{R}^3$ sodass $\widetilde{F_1}^{-1}$ auf A existiert und differenzierbar (C^∞) ist. Da F_2 stetig ist existiert Umgebung B von v in V, sodass $F_2(B) \subset A$. Und nun ist $H|_B = \widetilde{F_1}^{-1} \circ F_2|_B$ ist Verkettung von differenzierbaren Abbildungen, also differenzierbar in r und da r beliebig ist ist H differenzierbar auf $F_2^{-1}(W)$.

Beispiel 4.8 (Weitere Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten).

1. **n-Sphäre** von Radius R (und Zentrum 0):

   $$S_R^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = R\}.$$

   Karten via stereographischer Projektion.

   $$N := (0,\dots,0,R), \qquad S := (0,\dots,0,-R)$$
   $$U_1 := S_R^n \setminus \{N\}, \qquad U_2 := S_R^n \setminus \{S\}$$

   Stereographische Projektion bzgl N:

   $$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n,\ p = (p_1,\dots,p_{n+1}) \mapsto (x_1(p),\dots,x_n(p)),\ x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

Stereographische Projektion bzgl. S:[8]

$$\varphi_1 : U_2 \to \mathbb{R}^n,\ p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p))\,,\ x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

Kartenwechsel:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|} R^2$$

ist C^∞.
$\Rightarrow \mathcal{A} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ist ein differenzierbarer Atlas für S^n_R.
$\rightsquigarrow$ max. Atlas aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten (also allen (U, φ)) mit $\varphi \circ \psi^{-1}$ ist C^∞ für ψ aus $\mathcal{A}$ sofern Verkettung definiert ist) definiert differenzierbare Struktur auf S^n_R, also ist S^n_R eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Dimension n.

2. n-dimensionaler reell projektiver Raum

$$P^n\mathbb{R} := \{\text{1-dim. UVR von } \mathbb{R}^{n+1}\} \equiv \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$

mit $x \sim y \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists\, \mathbb{R} \ni \lambda \neq 0 : x = \lambda y$ (1-dimensionaler UVR = Äquivalenzklasse) $\equiv S^n / \sim$ mit $x \sim y \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} x = -y$.
Wir sehen:
1. Definition: Eindimensionale Untervektorräume
2. Definition: Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
3. Definition: Äquivalenzklassen in S^n
Es ist leicht zu sehen, dass diese Definitionen äquivalent sind.
Aus der 3. Definition sieht man

$$P^n\mathbb{R} = S^n / \sim$$

ist kompakt als Quotientenraum von S^n (Quotiententopologie $X \xrightarrow{\pi} Y = X/\sim$ mit topologischem Raum X und Quotiententopologie: U offen in $Y \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X). Diese Abbildung ist stetig, und ein stetiges Bild von einer kompakten Menge ist wieder kompapkt.
Karten:

$$\tilde{U}_i := \{x \in S^n : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1$$
$$U_i := \pi(\tilde{U}_i) \text{ mit } \pi : S^n \to S^n / \sim = P^n\mathbb{R}.$$

[8] **Übung**: φ_1 und φ_2 sind Homöomorphismen.

Projektion:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i([x]) := \left(\frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{i}, \frac{x_{i+1}}{i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

sind Homöomorphismen.[9]

Bemerkung 27. Man kann zeigen: $P^n\mathbb{R}$ ist hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie. Also ist $P^n\mathbb{R}$ eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.
Analog: $P^n\mathbb{C} := \{$komplexe 1-dim. UVR von $C^{n+1}\}$ ist kompakte $2n$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 4.9 (Produkt-Mannigfaltigkeiten). Für M^m und N^n m- bzw. n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist die **Produkt-Mannigfaltigkeit** $M \times N$ eine $(m+n)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.[10]

Exkurs 1 (Lie-Gruppen). Eine **Lie-Gruppe** ist eine Gruppe mit einer C^∞-Mannigfaltigkeitstruktur, so dass die Abbildung

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

C^∞ ist.

Beispiel 4.10 (zu Lie-Gruppen).

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine 0-dimensionale Lie-Gruppe.
- $SO(2) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi]\right\} \underset{\text{homö}}{\cong} S^1$ ist kompakte 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und Lie-Gruppe.[11]
- $SU(2) := \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in C,\ \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1\right\} \underset{\text{homö}}{\cong} S^3$ ist kompakte 3-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.[12]
- $GL(n, \mathbb{R})$ (offene) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2} \rightsquigarrow n^2$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

[9] **Übung**: Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sind C^∞.
[10] **Übung**!
[11] **Übung**: Wieso?
[12] $1 = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ mit $\alpha = x_1 + ix_2$ und $\beta = x_3 + ix_4$.

Bemerkung 28 (Fakt von Cartan). Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind Lie-Gruppen sind auch Lie-Gruppen.

Beispiel 4.11 (Fakt von Cartan benutzen).

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^\top = E,\ \det A = 1\} \text{ und}$$
$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

sind Lie-Gruppen: Benutze, dass

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \text{ und } X \text{ ist hausdorffsch}$$

$\Rightarrow$ A abgeschlossen, f, g stetige Abbildungen

4.4 Simplizialkomplexe

Simplizialkomplexe sind Objekte der algebraischen Topologie. Mittels Kombinatorik sollen topologische Invarianten bestimmt werden.

Definition 4.12 (Simplex). Ein k-dimensionales **Simplex** im $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von $k+1$ Punkten $v_0, \ldots, v_k$ in allgemeiner Lage:

$$s(v_0, \ldots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \forall \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

für $v_0 - v_1, \ldots, v_0 - v_k$ linear unabhängig.

Beispiel 4.13 (Einfache Simplices).

- **0-Simplex**: v_0 (Punkt)
- **1-Simplex**: $v_0 — v_1$ (Strecke, $s(v_0, v_1) = \{\lambda v_0 + (1 - \lambda) v_1 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$)
- **2-Simplex**: $\triangle v_0, v_1, v_2$ (Dreicksfläche)
- **3-Simplex**: v_0, v_1, v_2, v_3 ((volles) Tetraeder)

Definition 4.14 (Teilsimplex, Seite). Die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, \ldots, v_k\}$ heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von $s(v_0, \ldots, v_k)$.

Definition 4.15 (Simplizialkomplex). Eine endliche Menge K von Simplices in $\mathbb{R}^n$ heißt **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

1. Mit jedem seiner Simplices enthält K auch dessen sämtliche Teilsimplices.
2. Der Durchschnitt von je zwei Simplices ist entweder leer oder ein gemeinsamer Teilsimplex.

Definition 4.16 (Geometrische Realisierung).

$$|K| := \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$$

mit Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^n$ heißt der dem Simplizialkomplex K zugrunde liegende topologische Raum.
Achtung: Verschiedene Simplizialkomplexe K, K' können das gleiche $|K| = |K'|$ haben.

Bemerkung 29 (Vorteil von Simplizialkomplexen). Kennt man von einem (endlichen) Simplizialkomplex die **wesentlichen Simplices** (also solche, die nicht Seiten von anderen sind) in jeder Dimension und ihre **Inzidenzen** (also welche Ecken sie gemeinsam haben), so kennt man $|K|$ (bis auf Homöomorphie).

Beweis (Konstruktionsidee von $|K|$ aus diesen Daten).

1. Wähle in jeder Dimension einen *Standard-Simplex* $\Delta_k := s(\underbrace{e_1, \dots, e_{k+1}}_{\text{Std.-Basis-Vek.}})$
2. Bilde disjunkte Vereinigung von solchen Δ_k in jeder Dimension k soviele wie es wesentliche k-Simplices gibt:
$$X := \underbrace{\Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_0}_{\#\text{ wesentliche } 0\text{-Simp.}} \cup \dots \cup \underbrace{\Delta_n \cup \dots \cup \Delta_n}_{\#\text{ wesentliche } n\text{-Simp.}}$$
3. Identifiziere Inzidenzen (via Äquivalenzrelation) gemäß Inzidenz-Angaben für Ecken

Diese drei Schritte liefern dann eine stetige Bijektion des (kompakten) Quotientenraumes $X/\sim$ auf Hausdorff-Raum $|K|$, also ein Homöomorphismus.

Definition 4.17 (Dimension). Die **Dimension** eines Simplizialkomplexes K ist die maximale Dimension seiner Simplices.

Bemerkung 30 (Spezialfall — Graph). Ein **endlicher Graph** ist ein endlicher, 0- oder 1-dimensionaler Simplizialkomplex,[13] gebaut aus 1-dimensionalen (*Kanten*) und

[13] Aufgrund der Eindimensionalität haben beispielsweise die Dreiecke in einem Graph keine Füllung!

0-dimensionalen (*Ecken*) Simplices.

Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, falls zu je zwei Ecken $p, p' \in G$ eine Folge $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = p'$ paarweise verschiedener Ecken von G existiert, sodass p_{i-1} und p_i durch eine Kante verbunden sind.

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph T, so dass für jedes 1-Simplex (*Kante*) $s \in T$ gilt: $|T| \setminus \mathring{s}$ ist nicht zusammenhängend (mit $\mathring{s}$ = *offener* 1-Simplex, also Kante ohne Endpunkte).

Definition 4.18 (Euler-Charakteristik). Sei G ein endlicher Graph,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \text{Anzahl Ecken in } G, \\ \alpha_1 &:= \text{Anzahl Kanten in G.} \end{aligned}$$

Die **Euler-Charakteristik** von G ist

$$\chi(G) := \alpha_0 - \alpha_1$$

Bemerkung: $\chi(G)$ ist invariant unter Unterteilung (also dem Hinzufügen von neuen Ecken auf einer Kante).

Satz 4.19 (χ von Bäumen). Sei T ein (endlicher) Baum. Dann gilt $\chi(T) = 1$.

Beweis. Induktion nach α_0 = Anzahl Ecken.

- $n = 1$. Dann ist G ein Punkt, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \chi(T) = \alpha_0 - \alpha_1 = 1$ ✓
- $n = 2$. Dann ist G eine Kante mit Endpunkten, $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1, \chi(T) = 1$ ✓
- **Induktionsannahme**: Satz gilt für alle Bäume mit n Ecken.
- **Induktionsschritt**: $\chi(T) = 1$ für Bäume mit $n + 1$ Ecken.
  Sei T ein Baum mit $n + 1$ Ecken und v_0 ein **Ende** von T (also eine Ecke die zu genau einer Kante gehört). Ein solches Ende existiert.[14]
  Sei $|T_1| := |T| \setminus \{\mathring{s}_1 \cup v_0\}$. T_1 ist wieder ein Baum, sonst existiert s_2 sodass $T_1 \setminus \{\mathring{s}_2\}$ zusammenhängend ist, also auch $T \setminus \{\mathring{s}_2\}$ zusammenhängend ↯.
  T_1 hat n Ecken, also nach IV: $\chi(T_1) = 1$.
  Da $\alpha_0(T) = \alpha_0(T_1) + 1$ und $\alpha_1(T) = \alpha_1(T_1) + 1$ ist $\chi(T_1) = 1$. □

Satz 4.20 (χ von zusammenhängenden Graphen). Sei G ein zusammenhängender, endlicher Graph. Sei n die Anzahl von offenen 1-Simplices (*Kanten*), die man aus G entfernen kann, sodass G zusammenhängend bleibt. Dann ist $\chi(G) = 1 - n$.[15]

[14] vgl. Übung

[15] Die Aussage aus dem vorhergehenden Satz folgt aus diesem direkt.

Beweis. Ist G ein Baum, so ist $n = 0$ und die Behauptung gilt.
Ist G kein Baum, so existiert ein offenes 1-Simplex $\mathring{s}_1$, sodass $|G_1| = |G| \setminus \{\mathring{s}_1\}$ zusammenhängend ist. Ist G_1 ein Baum, so hält man an. Ist G_1 kein Baum, so entfernt man eine Kante $\mathring{s}_2$ usw.
G hat endlich viele Kanten, also existiert ein max. n, so dass $|G| \setminus \{\mathring{s}_1 \cup \cdots \cup \mathring{s}_n\}$ ein Baum ist.
Es gilt dann $\chi(G) = \chi(T) - n = 1 - n$. □

Bemerkung: Das Komplement T aller offenen Kanten die man aus G entfernen kann (wie im Beweis) ist ein sog. **spannender Baum** für G, der alle Ecken in G enthält (nicht eindeutig).

Definition 4.21 (Ebene und planare Graphen). Ein Graph heißt **eben**, falls er durch Punkte und Geradenstücke in der Ebene (also $\mathbb{R}^2$) realisiert ist, so dass sich die Kanten nicht schneiden (außer in den Ecken).
Ein (abstrakter) Graph (also gegeben durch Ecken-Mengen und Inzidenzen) heißt **planar**, falls er *isomorph* zu einem ebenen Graphen ist.

Beispiel 4.22.

1. K_4 = vollständiger Graph mit 4 Ecken (d.h. alle Ecken-Paare sind durch Kanten verbunden). Zeichnet man diesen Graphen als Quadrat, so ist dieser nicht eben. Man kann aber K_4 so zeichnen, dass der Graph eben ist. Also ist K_4 planar.
2. K_5 = vollständiger Graph mit 5 Ecken. Dieser Graph ist nicht isomorph zu einem ebenen Graphen, also ist K_5 nicht planar.

Definition 4.23 (Seiten). Die **Seiten** eines ebenen Graphen G sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Satz 4.24 (Euler-Formel). Für einen zusammenhängenden, ebenen Graphen G gilt:

$$\chi(G) := e(G) - k(G) + s(G) = 2,$$

wobei $e(G)$ die Anzahl Ecken von G, $k(G)$ die Anzahl Kanten von G und $s(G)$ die Anzahl Seiten von G ist.
$\chi(G)$ ist die **Euler-Charakteristik** von G.

Beweis. Sei T ein **aufspannender Baum** für G (also ein Baum der alle Ecken von G enthält). Dann gilt $e(T) - k(T) = 1$ und $s(T) = 1$. Also gilt die Behauptung für T.
G erhält man aus T durch Hinzufügen von Kanten. Für jede neue Kante entsteht auch eine neue

Seite, welche sich in der Summe aus der Behauptung aufheben. Also

$$\chi(G) = e(G) - k(G) + s(G) = 2.$$

□

Definition 4.25 (Polyeder). Eine Teilmenge P von $\mathbb{R}^3$ heißt **(konvexes) Polyeder**, falls

1. P ist Durchschnitt von endlich vielen **affinen Halbräumen** von $\mathbb{R}^3$ (d.h. gegeben durch Ungleichungen $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i$, $i = 1, \ldots, k$)
2. P ist beschränkt und nicht in einer Ebene enthalten.

Der **Rand** von P besteht dann aus Seiten(flächen), Kanten und Ecken (gegeben als 2-dimensionale, 1-dimensionale und 0-dimensionale Schnitte von Ebenen).

Bemerkung 31 (Bezug von Polyedern zu Graphen). Das **1-Skelett** von P (also die Menge der Ecken und Kanten) von P ist ein Graph in $\mathbb{R}^3$.
Man kann zeigen (Resultat der konvexen Geometrie): durch Zentralprojektion von einem Punkt nahe bei einem "Seitenmittelpunkt" auf eine geeignete Ebene wird das 1-Skelett $p^{(1)}$ von P auf einen *ebenen* Graphen G_p abgebildet (sog. **Schlegel-Diagramm**). Es gilt dann: $s(P) = s(G_p)$, $k(P) = k(G_p)$, $e(P) = e(G_p)$.

Folgerung 1 (Eulersche Polyeder-Formel).

$$e(P) - k(P) + s(P) = 2.$$

Definition 4.26 (Regulärer Polyeder). Ein Polyeder in $\mathbb{R}^3$ heißt **regulär**, falls alle Seitenflächen kongruente reguläre n-Ecke (d.h. sie haben gleich lange Kanten) sind und in jeder Ecke m solche n-Ecke zusammentreffen (insbesondere gehen von jeder Ecke m Kanten aus).

Satz 4.27 (Platonische Körper). Es gibt genau 5 reguläre Polyeder in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(m,n) &= (3,3) \quad \text{Tetraeder}\\ &= (3,4) \quad \text{Würfel}\\ &= (4,3) \quad \text{Oktaeder}\\ &= (3,5) \quad \text{Dodekaeder}\end{aligned}$$

$$= (5,3) \quad \text{Ikosaeder}$$

Beweis.

- **Existenz**: Explizite Konstruktion, siehe Euklid (oder Tutorium (oder basteln (oder Google))).
- **Vollständigkeit**: Sei s = Anzahl an Seitenflächen. Dann gilt: $s \cdot n = 2k$, ebenso $m \cdot e = 2k$ und damit

  $$n \cdot s = 2k = m \cdot e \Rightarrow k = \frac{me}{2} \quad s = \frac{me}{n}$$

  Euler-Polyeder-Formel für P bzw. G_p ergibt:

  $$2 = e - k + s = e - \frac{me}{2} + \frac{me}{n} \Leftrightarrow 4n = e\,(2n - nm + 2m)\,.$$

  Da $n > 0$ und $e > 0$ folgt:

  $$2n - nm + 2m > 0 \Leftrightarrow nm - 2n - 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow (n-2)(m-2) < 4.$$

  Man sieht, dass es nur obenstehende Möglichkeiten gibt. □

Definition 4.28 (Euler-Charakteristik von Simplizialkomplexen). Sei K ein Simplizialkomplex. Dann ist die **Euler-Charakteristik**[def:eulercharakteristikSimplizialkomplex] von K:

$$\chi(K) \coloneqq \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \mp \cdots \pm \alpha_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha_i,$$

wobei α_i = Anzahl von i-Simplices in K.
Die sogenannten "**Betti-Zahlen**" lassen sich berechnen mit Methoden aus der algebraischen Topologie (als Dimension von gewissen Vektorräumen, die man zu K konstruiert).
Man zeigt: $\chi(K)$ ist eine topologische Invariante, also

$$|K| \underset{\text{homö}}{\cong} |\widetilde{K}| \Rightarrow \chi(K) = \chi(\widetilde{K}).$$

Ein topologischer Raum X heißt **triangulierbar**, falls ein (endlicher) Simplizialkomplex K existiert und ein Homöomorphismus $|K| \xrightarrow{\sim} X$.
Ist X (via K) triangulierbar, so definiert man $\chi(X) \coloneqq \chi(K)$ (und zeigt, dass $\chi(X)$ unabhängig von der gewählten Triangulierung ist).
Nun ist $\chi(S^2) = \chi(\text{Tetraeder}) = 2$ und jeder (reguläre) Polyeder homöomorph zu S^2, also $\chi(P) = \chi(S^2) = 2$.

4.5 Spezielle Konstruktion von Quotientenräumen ("Verkleben")

Definition 4.29 (Verklebung). X und Y seien topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum und $f : A \to Y$ eine Abbildung (nicht notwendigerweise stetig). Sei $X \sqcup Y$ die disjunkte Vereinigung. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$ via f wie folgt:

$$x \sim x' \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} & x = x' \\ \text{oder} & f(x) = x' \quad (x \in A) \\ \text{oder} & f(x') = x \quad (x' \in A) \\ \text{oder} & f(x) = f(x') \quad (x, x' \in A) \end{cases}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation.
Der Quotientenraum $X \cup_f Y := X \sqcup Y/_\sim$ heißt **Verklebung** von Y an Y via f.

Beispiel 4.30.

1. $X = Y = S^1$, $A = \{x_0\}$, $f(x_0) := x_0$
2. $X = [0,1]$, $Y = [2,5]$, $A = \{0,1\} \subset X$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$
3. *Zusammenhängende Summe* von 2-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2.
   Konstruktion:
   1. Entferne geeignet kleine abgeschlossene "Kreisscheiben" von $p_1 \in M_1$ und $p_2 \in M_2$ mit Rändern δB_1 und δB_2 homöomorph zu S^1.
   2. Wähle Homöomorphismus $f : \delta B_1 \to \delta B_2$.
   3. Verklebe M_1 und M_2 mittels $f : M_1 \cup_f M_2 =: M_1 \# M_2$

   Alle kompakten geschlossenen Flächen kann man aus S^2 konstruieren durch Verkleben Tori.

Bemerkung 32 (Selbstverklebungen). "**Selbst-Verklebungen**" sind analog definiert: X = topologischer Raum, $A \subset X$ Teilraum, $f : A \to X$, $X_f := X/_\sim$ mit Äquivalenzrelation wie oben.

Beispiel 4.31.

1. $X = [0,1] \times [0,1]$ = Einheitsquadrat,

$$A \subset \delta X = \underbrace{(\{0\} \times [0,1])}_{=:A_1} \cup \underbrace{(\{1\} \times [0,1])}_{=:B_2} \cup \underbrace{([0,1] \times \{0\})}_{=:A_2} \cup \underbrace{([0,1] \times \{1\})}_{=:B_2},$$

$A \coloneqq A_1 \cup A_2$,

$$\begin{aligned} f : A_1 &\to B_1, \quad (0,t) \mapsto (1,t) \\ A_2 &\to B_2, \quad (t,0) \mapsto (t,1) \end{aligned}$$

Man erhält letztendlich einen Torus.

2. *Möbiusband*: $X = [0,1] \times [0,1]$, $A = A_1$, $f : A_1 \ni (0,1) \mapsto (1, 1-t) \in B_1$
3. *Projektive Ebene*: $P^2\mathbb{R}$ entsteht durch Verkleben einer Kreisscheibe und eines Möbiusbandes längs der Ränder.

5

Geometrie von Flächen

Ziel dieses Kapitels ist es, auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (beziehungsweise Flächen im $\mathbb{R}^3$) "Geometrie" zu betreiben (also beispielsweise Längen und Winkel messen und so weiter).[1]

5.1 Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 33 (Erinnerung an reguläre Flächen). Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine **reguläre Fläche**, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine C^∞-Abbildung

$$x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

gibt mit:

1. $x(U) = S \cap V$ und $x : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
2. Das Differenzial $\mathrm{d}x|_{(u,v)} : \underbrace{T_{(u,v)}\mathbb{R}^2}_{\cong\mathbb{R}^2} \to \underbrace{T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3}_{\cong\mathbb{R}^3}$ ist injektiv ($\forall (u, v) \in U$)

   $\Longleftrightarrow$ Die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \end{pmatrix}$$

[1] Für mehr Informationen: **Gauß** (1827) vgl. **Spirak**: *A comprehensive introduction to differential geometry* Vol. III — how to read Gauß

hat Rang 2 ($\forall (u,v) \in U$).

$\Leftrightarrow$ $x_u(u,v), x_v(u,v)$ sind linear unabhängig ($\forall (u,v) \in U$).

$\Leftrightarrow$ Vektorprodukt $x_u(u,v) \times x_v(u,v) \neq 0$ ($\forall (u,v) \in U$).

Bemerkung 34 (Erinnerung an das Kreuz-/Vektorprodukt).
$a := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $b := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$a \wedge b \, (\cong a \times b) \; := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Eigenschaften:

1. $a \wedge b \perp a \qquad a \wedge b \perp b$
2. $\det(a, b, a \wedge b) \geq 0$
3. $a \wedge (-b) = -(a \wedge b)$
4. $||a \wedge b|| = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \sin \alpha$ (Winkel zwischen den Vektoren), Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms

Definition 5.1 (Tangentialraum). Der **Tangentialraum** in Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ ist der affine Unterraum

$$T_p\mathbb{R}^3 := \{p\} \times \mathbb{R}^3 = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Für eine reguläre Fläche S und $p = x(u,v) \in S$ ist die **Tangentialebene** in $p \in S$ definiert als

$$T_pS := \mathrm{d}x_{(u,v)}\left(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\right) := \{p\} \times [x_u(u,v), x_v(u,v)] \subset T_p\mathbb{R}^3$$

2-dimensionaler, affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 35 (Geometrische Interpretation des Tangentialraums).

$$x_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} x(u_0 + t, v_0) = \mathrm{d}x|_{(u_0,v_0)}(e_1)$$

Allgemein:
Sei $c(t) := x(u(t), v(t))$ eine **Flächenkurve** in $x(U)$ durch den Punkt $x(u(0), v(0)) = x(u_0, v_0)$.
Tangentialvektor an c im Punkt $x(u_0, v_0)$:

$$c'(0) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(u(t), v(t))|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}(u(0), v(0))u'(0) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(0) = x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0)$$

Also: Tangentialebene in $x(u_0, v_0)$ = Menge aller Tangentialvektoren als Flächenkurven.

Bemerkung 36 (Parameterisierungsunabhängigkeit obiger Definitionen).
Sei $\overline{x} : \overline{U} \to \overline{x}(\overline{U}) = x(U)$ eine andere Parametrisierung von S um $p = x(u_0, v_0) = \overline{x}(\overline{u_0}, \overline{v_0})$.
Zu zeigen: Die lineare Hüllen sind gleich: $[\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}] = [x_u, x_v]$.
Es ist $k := \overline{x}^{-1} \cdot x : U \to \overline{U}$ die Koordinatentransformation:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \overline{x}(\overline{x}^{-1} \circ x)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \overline{x}}{\partial u}(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{u}}(\overline{u}, \overline{v}) \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{v}} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} x_u &= \overline{x}_{\overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{x}_{\overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \quad \text{d.h. } x_u \text{ ist Linearkombination von } \overline{x}_{\overline{u}} \text{ und } \overline{x}_{\overline{v}} \\ x_v &= \overline{x}_{\overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{x}_{\overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \quad \text{d.h. } x_v \text{ ist Linearkombination von } \overline{x}_{\overline{u}} \text{ und } \overline{x}_{\overline{v}} \end{aligned}$$

Also $[x_u, x_v] = [\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}]$, verschiedene Basen von T_pS mit Basis-Transformations-Matrix

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Das ist die Funktionalmatrix der Parametertransformation. Insb. ist $\det D(u, v) \neq 0$.

Beispiel 5.2.

1. *affine Ebene*: $a_0, a, b \in \mathbb{R}^3$, $S := \{a_0 + ua + vb : u, v \in \mathbb{R}\}$ ist reguläre Fläche, falls a und b linear unabhängig sind. Mit

$$U := \mathbb{R}^2,\ V := \mathbb{R}^3,\ x : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb \in \mathbb{R}^3,$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a,\ x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b,\ T_{x(u,v)}S = \{x(u, v)\} \times [a, b] \cong S.$$

2. $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktion, $S :=$ Graph von $f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in U,\ x_3 = f(x_1, x_2)\}$.
   Behauptung: S ist reguläre Fläche.

$U = U, V = \mathbb{R}^3, x : U \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3$.
$x(U) = S = S \cap V$, $x : U \to S$ stetig und $x^{-1} : S \ni (u, v, f(u,v)) \mapsto (u,v) \in U$ ist als Projektion auch stetig. Also ist x ein Homöomorphismus.
Weiter ist

$$\begin{aligned} x_u &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \\ x_v &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

also sind x_u und x_v linear unabhängig.

Bemerkung 37. Ist S reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$, so existiert zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $O \subset \mathbb{R}^3$, so dass $S \cap O$ Graph einer C^∞-Funktion ist (beispielsweise S^2 = 2-Sphäre vom Radius 1).

5.2 Erste Fundamentalform einer regulären Fläche

Bemerkung 38 (Erinnerung an LA). Modell der euklidischen Geometrie:
$\mathbb{R}$-Vektorraum + Skalarprodukt = euklidischer $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$-Vektorraum
$\rightsquigarrow ||a|| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ **Länge** eines Vektors $a \in V$
$\rightsquigarrow \cos \measuredangle(a,b) = \frac{\langle a,b \rangle}{||a|| \cdot ||b||} = \left\langle \frac{a}{||a||}, \frac{b}{||b||} \right\rangle$ **Winkel**

Bemerkung 39 (Übertragung auf gekrümmte Flächen (Gauß)). Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Betrachte die bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pS \times T_pS \to T_pS, \quad \langle a, b \rangle_p := \langle a, b \rangle$$

(identifiziere affine Ebene mit VR R^2, $\langle a, b \rangle$ ist Standard-SKP in $\mathbb{R}^3$).
Die Zuordnung $I : p \mapsto I_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heißt **1. Fundamentalform der Fläche S**.
Ist $x : U \ni (u,v) \mapsto x(u,v) \in S$ eine lokale Parametrisierung von S (um $p \in S$), so bilden $x_u(u,v)$ und $x_v(u,v)$ eine Basis von $T_{x(u,v)}S$. Bezüglich dieser können wir $I_p, p \in x(U) \subset S$ durch eine positiv definite symmetrische 2×2-Matrix darstellen:

$$\Big(\underbrace{g_{ij}(u,v)}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}\Big) = \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{21}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}}_{\text{Originalnotation Gauß}}$$

mit

$$\begin{aligned} g_{11}(u,v) = E(u,v) = \langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle_p &= \underbrace{\langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle}_{\text{Standard-SKP von } \mathbb{R}^3} \\ g_{12}(u,v) = \langle x_u, x_v\rangle_p &= \langle x_v, x_u\rangle = g_{21}(u,v) \\ g_{22}(u,v) = \langle x_v, x_v\rangle_p &= \langle x_v, x_v\rangle \end{aligned}$$

insbesondere sind die $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen.
Also: $(g_{ij}(u,v))$ ist eine Familie $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von Skalarprodukten, die differenzierbar von (u,v) abhängig ist. (Riemannsche Metrik)

Bemerkung 40 (Bedingungen an obige Matrix).

1. *Hurwitz*: I_p ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $E = g_{11} > 0$, $E \cdot G - F^2 = \det(g_{ij}) > 0$.
2. *andere Parametrisierung*: $\overline{x}(\overline{u},\overline{v}) \rightsquigarrow$ neue Basis $\{\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}\}$, Matrix von I bezüglich dieser Basis $\Big(\underbrace{\overline{g}_{ij}(\overline{u},\overline{v})}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}\Big)$ mit

   $$(g_{ij}(u,v)) = D(u,v)^\top (\overline{g}_{ij}(\overline{u},\overline{v})) D(u,v)$$

   mit

   $$D(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix},$$

   siehe auch Basiswechselmatrix.

Beispiel 5.3 (Beispiele zur 1. Fundamentalform).

1. $S :=$ affine Ebene $\subset \mathbb{R}^3$: a, b: $\|a\| = \|b\| = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$ (also $a \perp b$)
   Parametrisierung: $x(u,v) = a_0 + ua + vb$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2 = U$.

   $$\begin{aligned} &x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b, \\ &E = \langle x_u, x_u\rangle = \langle a, a\rangle = \|a\|^2 = 1 \\ &F = \langle x_u, x_v\rangle = \langle a, b\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = \langle b, b \rangle = \|b\|^2 = 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $S = \text{Zylinder} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\right\}$
   Lokale Parametrisierung (als Rotationsfläche):

$$x(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v), \quad (u,v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = r(-\sin u, \cos u, 0),$$
$$x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = r(0,0,1),$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ konstant}$$

   Bemerkung: Für $r = 1$ ist die erste Fundamentalform des Zylinders identisch mit der ersten Fundamentalform der Ebene.
   Grund: Ebene und Zylinder sind lokal isometrisch (haben im Kleinen die gleiche Geometrie): auf- und abwickeln. Insbesondere sagt die erste Fundamentalform nichts darüber aus, wie die Fläche in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.
3. $S = S_R^2$ = Sphäre vom Radius R
   Lokale Parametrisierung (mit geographischen Koordinaten):

$$(\vartheta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) = U$$
$$x(\vartheta, \varphi) = (R\cos\vartheta\cos\varphi, R\cos\vartheta\sin\varphi, R\sin\vartheta),$$
$$x_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = (-R\sin\vartheta\cos\varphi, -R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta),$$
$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (-R\cos\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta\cos\varphi, 0)$$

   Erste Fundamentalform: $I(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \langle x_\vartheta, x_\vartheta \rangle & \langle x_\vartheta, x_\varphi \rangle \\ \langle x_\varphi, x_\vartheta \rangle & \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\vartheta \end{pmatrix}$

Bemerkung 41 (Wozu ist die erste Fundamentalform gut?).

1. *Längen*: Mithilfe der ersten Fundamentalform können beispielsweise Längenmessungen von Flächenkurven durchgeführt werden:

$$x : [\alpha, \beta] \to S, \quad t \mapsto x(u(t), v(t)) =: c(t)$$

sei eine differenzierbare Flächenkurve in $x(U) \subset S$. Die Länge von c (also Kurve in $\mathbb{R}^3$) ist

$$L(c) = \int_\alpha^\beta \|c'(t)\| \mathrm{d}t, \quad \|c'(t)\|^2_{c(t)} = \langle c'(t), c'(t) \rangle$$

mit

$$c'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = x_u \cdot u' + x_v \cdot v'$$

ist also

$$\begin{aligned}\|c'(t)\|^2_{c(t)} &= \langle c'(t), c'(t) \rangle = (u')^2 \langle x_u, x_u \rangle + 2u'v' \langle x_u, x_v \rangle + (v')^2 \langle x_v, x_v \rangle \\ &= (u')^2 E(u,v) + 2u'v' F(u,v) + (v')^2 G(u,v)\end{aligned}$$

Man braucht also nur die erste Fundamentalform von S und die Beschreibung der Kurve $t \mapsto (u(t), v(t))$ in einem Parametergebiet U, um die Länge der Kurve ausrechnen zu können:

$$\Rightarrow L(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{E(u,v)(u')^2 + F(u,v) 2u'v' + G(u,v)(v')^2} \mathrm{d}t$$

Also: Länge einer Flächenkurve ist eine Größe der inneren Geometrie einer Fläche S (d.h. Eigenschaften/Größen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängig sind).

2. *Winkel*: Außer Längen können auch Winkel zwischen Flächenkurven als Winkel zwischen den entsprechenden Tangenten an diese Kurven gemessen werden: Seien $c_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ zwei Flächenkurven mit $c_1(0) = c_2(0)$.

$$\cos \measuredangle(c_1'(0), c_2'(0)) := \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle}{\|c_1'(0)\| \cdot \|c_2'(0)\|}$$

Explizite Rechnung via Parametrisierung:

$$\begin{aligned} c_1'(0) &= x_u(u_0, v_0) a + x_v(u_0, v_0) b \\ c_2'(0) &= x_u(u_0, v_0) c + x_v(u_0, v_0) d \end{aligned}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\cos \measuredangle(c_1'(0), c_2'(0)) = \frac{\langle x_u a + x_v b, x_u c + x_v d\rangle}{\|x_u a + x_v b\| \cdot \|x_u c + x_v d\|}$$
$$= \frac{acE + (bc + ad)F + bdG}{\sqrt{a^2E + 2abF + b^2G}\sqrt{c^2E + 2cdF + d^2G}}$$

also ist der Winkel zwischen Flächenkurven die Größe des Winkels zwischen zwei Geraden.

3. *Flächeninhalt* eines regulären parametrisierten Flächenstücks

$$x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^2$$

ist definiert als

$$A(x(U)) := \iint_U \|x_u \wedge x_v\|(u, v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Da $\|x_u \wedge x_v\|^2 = \langle x_u, x_u\rangle\langle x_v, x_v\rangle - \langle x_u, x_v\rangle^2 = EG - F^2 \underset{\text{aus 1. FF}}{=} \det(I)$ laut der Formel für das Vektorprodukt (Fläche Parallelogramm im Quadrat) ist A invariant unter Parameter-Transformationen (also wohldefiniert):
Denn für eine andere Parametrisierung $\overline{x} : \mathbb{R}^2 \supset \overline{U} \to \overline{x}(\overline{U}) = x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$ gilt:

$$I = D^\top \overline{I} D$$

wobei D = Funktionalmatrix des Kartenwechsels (= Parameter-Transformation $\overline{x} \circ x^{-1} : U \to \overline{U}$). Somit:

$$\det(I) = (\det D)^2 \det \overline{I} \quad (\star)$$

und die Behauptung folgt aus der Transformationsformel für Integrale:

$$\iint_{\overline{U}} \sqrt{\det \overline{I}}\, \mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}\overline{v} \underset{\text{TF}}{=} \iint_U \sqrt{\det \overline{I}}\, |\det D|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \underset{(\star)}{=} \iint_U \sqrt{\det I}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Beispiel 5.4 (Beispiel zur Flächeninhaltsberechnung). $S = S_R^2$ = Sphäre vom Radius S parametrisiert durch georgraphische Koordinaten (ϑ, φ).
Erste Fundamentalform:

$$I(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$
$$U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$

also

$$A(x(U)) \underset{\substack{x(U)\text{: die}\\ \text{ganze Sphäre bis auf}\\ \text{“Nullmengen” überdeckt}}}{=} A(S_R^2) = \iint_U \sqrt{\det I}\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^2 \cos\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta$$
$$= R^2 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$$
$$= 4\pi R^2$$

5.3 (Lokale) Isometrien von Flächen

Bemerkung 42 (Reguläre Fläche = Metrischer Raum). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir definieren eine *Längenmetrik* auf S durch

$$d_S(p,q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c)$$

mit $p, q \in S$, Ω_{pq} := Menge von differenzierbaren *Flächenkurven*, die p und q verbinden, $L(c)$:= Länge von x (gemessen in S).
Wir verifizieren die Metrik-Axiome:

- $d_S(p,q) = d_S(q,p)$ (Wege rückwärts durchlaufen):

  $$c : [0,1] \to S \rightsquigarrow \tilde{c} : [0,1] \to S,\ t \mapsto \tilde{c}(t) = c(1-t)$$

  $$c(0) = p,\ c(1) = q, \quad \tilde{c}(0) = c(1) = q,\ \tilde{c}(1) = p$$

  und $L(c) = L(\tilde{c})$.
- $d_S(p,q) \leq d_S(p,r) + d_S(r,q)$
- $d_S(p,p) = 0$: $c_0(t) = p \rightsquigarrow c_0'(t) = 0 \rightsquigarrow L(c_0) = 0$.

Die obigen Punkte gelten ganz allgemein und haben mit S nichts zu tun.

- $p \neq 1 \Longrightarrow d_S(p,q) > 0$:

  $$\exists\, \varepsilon > 0 \underset{\text{Def.}}{:} \underbrace{B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q)}_{\varepsilon\text{-Bälle in } \mathbb{R}^3} \cap S = \varnothing.$$

  Hier benutzt man, dass $\mathbb{R}^3$ mit Standard-Metrik hausdorffsch ist. Also

  $$d_S(p,q) \geq d_{\mathbb{R}^3}(p,q) \geq 2\varepsilon > 0.$$

Fazit: Jede reguläre Fläche ist metrischer Raum.

Definition 5.5. Seien S und $\tilde{S}$ reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$ und $f : S \to \tilde{S}$ eine Abbildung.

1. f heißt **(Flächen-)Isometrie**, wenn f ein Diffeomorphismus von S auf $\tilde{S}$ ist und für alle differenzierbaren Kurven $c : I \to S$ gilt:

$$L(f \circ c) = L(c) \quad \text{“}f \text{ ist Längen-erhaltend”.}$$

2. f heißt **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt $p \in S$ offene Umgebungen A von p und B von $f(p)$ existieren, so dass f eine Isometrie von A auf B ist.

Bemerkung 43 (Abstandserhaltend). Ist $f : S \to \tilde{S}$ eine Flächen-Isometrie, so ist f eine Isometrie zwischen den metrischen Räumen (S, d_S) und $(\tilde{S}, d_{\tilde{S}})$, d.h. es gilt:

$$\forall p, q \in S : d_{\tilde{S}}(f(p), f(q)) = d_S(p, q) \quad \text{“}f \text{ ist Abstands-erhaltend”.}$$

Satz 5.6 (Kriterium für lokale Isometrien). Sind S und $\tilde{S}$ reguläre Flächen und sind $x : U \to x(U) \subset S$ und $\tilde{x} : U \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ mit **gleichem** Parameterbereich U, sodass

$$\forall (u, v) \in U : \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{1. FF von } S}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}_{\text{1. FF von } \tilde{S}}(u, v),$$

d.h. stimmen die erste Fundamentalform von S und $\tilde{S}$ in entsprechenden Punkten überein, so sind $x(U)$ und $\tilde{x}(U)$ isometrisch.

Beweis. Die Abbildung $f := \tilde{x} \circ x^{-1} : S \supset x(U) \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ ist Diffeomorphismus. Sei dann

$$c : [a, b] \to S,\ c(t) = x(u(t), v(t)) \subset x(U) \subset S$$

eine differenzierbare (Test-)Kurve.
Dann filt:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{E^2(u(t), v(t))(u')^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G^2(u(t), v(t))(v')^2} \, \mathrm{d}t \\ &\underset{\text{Vorr.}}{=} \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Länge der Bildkurve

$$f \circ c(t) = (\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ x(u(t), v(t)) = \tilde{x}(u(t), v(t)):$$

$$L(f \circ c) = \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))}\, \mathrm{d}t.$$

□