

# Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier



# Inhaltsverzeichnis

- 1 Einstieg — Metrische Räume • 5
  - 1.1 Vorbemerkungen • 5
  - 1.2 Definitionen zu metrischen Räumen • 5
  - 1.3 Beispiele zu metrischen Räumen • 6
- 2 Längenmetriken • 9
  - 2.1 Graphen • 9
  - 2.2 Euklidische Metrik • 10
  - 2.3 Sphärische Geometrie • 13
  - 2.4 Wozu sind Metriken gut? • 15
- 3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie • 17
  - 3.1 Topologische Räume • 17
  - 3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom • 22
  - 3.3 Stetigkeit • 22
  - 3.4 Zusammenhang • 26
  - 3.5 Kompaktheit • 29



# 1

## Einstieg — Metrische Räume

### 1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

**Bemerkung 1** (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

### 1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

**Definition 1.1** (Metrik). Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls  $\forall x, y, z \in X$  gilt:

1. **Positivität:**  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie:**  $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Definition 1.2** (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$  aus einer Menge und einer **Metrik** auf dieser.

**Definition 1.3** (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine **Metrik**, außer  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  — die Umkehrung gilt.

**Definition 1.4** (Abgeschlossener  $r$ -Ball um  $x$ ). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener  $r$ -Ball um  $x$** .

**Definition 1.5** (Abstandserhaltende Abbildung). Sind  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  **metrische Räume**, so heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Definition 1.6** (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive **abstandserhaltende Abbildung**. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen  $X$  und  $Y$  *isometrisch*.

### 1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

**Beispiel 1.7** (Triviale Metrik). Menge  $X$ ,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem **metrischen Raum** verwursten.

**Beispiel 1.8** (Simple **Metriken**). Sei  $X = \mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

- $d_1(s, t) := |s - t|$  ist Metrik.
- $d_2(s, t) := \log(|s - t| + 1)$  ist Metrik.

**Beispiel 1.9** (Euklidische Standardmetrik).  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

ist die (**euklidische**) **Standardmetrik** auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung<sup>2</sup>.

**Bemerkung 2** (aus LA II). **Isometrien** von  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

**Beispiel 1.10** (Maximumsmetrik).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

ist **Metrik**.

**Beispiel 1.11** (**Standardmetrik** und **Maximumsmetrik** allgemein: Norm).  $V$  sei  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0},$$

so dass  $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ :

1. **Definitheit**:  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**:  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. **Dreiecksungleichung**:  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Eine Norm definiert eine **Metrik** durch  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

<sup>1</sup> **Anmerkung**: Wenn  $d(x, y)$  eine **Metrik** ist, so ist auch  $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Metrik.

<sup>2</sup> **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

**Beispiel 1.12** (Einheitssphäre).

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

ist die  $n$ -te **Einheitssphäre**.

Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

**Beispiel 1.13.** (Hamming-Metrik) Es ist  $\mathbb{F}_2$  der Körper mit zwei Elementen  $\{0, 1\}$ ,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge  $n$ . Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$



# 2

## Längenmetriken

### 2.1 Graphen

**Definition 2.1** (Graph). Ein **Graph**  $G = (E, K)$  besteht aus einer *Ecken-Menge*  $E$  und einer Menge von Paaren  $\{u, v\}$  ( $u, v \in E$ ), genannt *Kanten*.

**Definition 2.2** (Erreichbarkeit). Seien  $p, q \in E$  von  $G = (E, K)$ .  $q$  ist **erreichbar** von  $p$  aus, falls ein *Kantenzug* von  $p$  nach  $q$  existiert.

**Definition 2.3** (Zusammenhängend).  $G = (E, K)$  heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.  
Ist  $G$  ein zusammenhängender **Graph**, so ist  $d(p, q)$  = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von  $p$  nach  $q$  eine **Metrik**.

**Beispiel 2.4** (Wortmetrik). Sei  $\Gamma := \langle S \rangle$  vom endlichen Erzeugendensystem  $S$  erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \quad (2.1)$$

z.B.  $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$ .

Dann lässt sich über die Länge von  $g \in \Gamma$  (minimales  $n$  in **Gleichung 2.1**) eine **Metrik** definieren:

**Definition 2.5** (Wortmetrik).

$$d_S(g, k) := |g^{-1}k|$$

ist eine **Metrik** mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g, h), \end{aligned}$$

also ist  $d_s$  linksmultiplikativ mit  $k \in \Gamma$  und damit eine **Isometrie**.

**Definition 2.6** (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph**  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  von  $\Gamma$  bezüglich  $S$  ist der Graph  $G = (E, K)$  mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die **Graphen-Metrik** auf  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  ist **isometrisch** zur **Wortmetrik**.

## 2.2 Euklidische Metrik

**Beispiel 2.7** (Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  als Standardmetrik). Sei

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare<sup>1</sup> Kurve.

Die **euklidische Länge** von  $C$  ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad (\text{via Polynom-Approximation}) \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

*Beispiel:* Geraden-Segment.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

---

<sup>1</sup> **Hinweis:** Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer  $C^\infty$ -differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}}(g) = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e}(p, q).$$

**Lemma 2.8** (Unabhängigkeit von  $L_{\text{euk}}$ ).

1.  $L_{\text{euk}}(c)$  ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2.  $L_{\text{euk}}(c)$  ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

*Beweis.*

1. Zu zeigen: Für  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto c(t)$  und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus<sup>2</sup>  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $s \mapsto t(s)$  gilt:

$$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{dc(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.

Für  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$  sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von  $p$  verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \|(T_p \circ c)'\| dt = \int_a^b \|c'\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen.

□

- Drehung.

Für  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  sei

$$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos \vartheta x(t) - \sin \vartheta y(t), \sin \vartheta x(t) + \cos \vartheta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel  $\vartheta$  gedrehte Kurve.

Da  $D_\vartheta$  eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c'(t)$$

---

<sup>2</sup> **Diffeomorphismus:** Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

und damit

$$\|(D_{\vartheta} \circ c(t))'\| = \|D_{\vartheta} \cdot c'\| \stackrel{\text{orth.}}{=} \|c'\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen.  $\square$

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

**Lemma 2.9** (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in  $\mathbb{R}^2$  sind genau die Geradensegmente.

*Beweis.* Seien  $p, q \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man  $(p, q)$  überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der **Invarianz von  $L_{\text{euk}}$**  ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.

Sei jetzt  $c(t) := (x(t), y(t))$  eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen  $p'$  und  $q'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

$l$  ist die Länge des Geradensegmentes zwischen  $p'$  und  $q'$ .

$\Rightarrow$  **Infimum** der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.

Gilt für eine Kurve  $c$ , dass  $L_{\text{euk}}(c) = l$ , so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere  $x'(t) = 0$  ( $\forall t$ ), also  $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$  und somit  $\tilde{c} = (0, y(t))$ . Also ist  $\tilde{c}$  auch (parametrisiertes) Geradensegment.

**Definition 2.10** (Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ -Kurven). Für  $p, q \in \mathbb{R}^2$  sei  $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$  die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen  $p$  und  $q$ . Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

**Satz 2.11** ("Neuer" metrischer  $\mathbb{R}^2$ ).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein **metrischer Raum** und **isometrisch** zu  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ .

*Beweis.* Direkter Beweis nach dem **Lemma über Geradensegmente**.

Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

*Beweis.* Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*

Sei

$$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.

Es ist  $d_e = d_{\text{euk}}$ , denn ist  $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$  (mit gleicher Länge wie  $c$ ) und die Abbildung  $c \mapsto \tilde{c}$  ist bijektiv. Dann  $L(\tilde{c}) = L(c)$ , und damit

$$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

- *Dreiecksungleichung.*

Zu zeigen:  $d_{\text{euk}}(p, q) \leq d_{\text{euk}}(p, r) + d_{\text{euk}}(r, q)$  ( $\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2$ ).

Verknüpfen von Wegen von  $p$  nach  $r$  mit solchen von  $r$  nach  $q$  liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von  $p$  nach  $q$ :

$$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \not\subseteq \Omega_{pq}.$$

Infimumbildung liefert die Behauptung.

- *Positivität.*

Zu zeigen:  $d_{\text{euk}}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

- Falls  $p = q$ .

Die konstante Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$  hat

$$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{euk}}(p, p) = 0.$$

- Falls  $p \neq q$ .

Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment<sup>3</sup>

$$t \mapsto (1 - t)p + tq$$

mit der Länge  $d_{\text{euk}} = \|p - q\| = 0$ .

## 2.3 Sphärische Geometrie

**Beispiel 2.12** (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^3$  ist

$$S_{\mathbb{R}}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

---

<sup>3</sup> **Anmerkung:** nur an dieser Stelle wird die Geometrie des  $\mathbb{R}^2$  benötigt!

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \rightarrow S_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p, q) := \inf L_S(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S_{\mathbb{R}}^2)).$$

**Lemma 2.13** (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf  $S_{\mathbb{R}}^2$  ist invariant unter Rotationen von  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Eine orthogonale Matrix im  $\mathbb{R}^2$  ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Da  $\|D(x)\| = \|x\|$  für  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt, ist  $D(S_{\mathbb{R}}^2) = S_{\mathbb{R}}^2$ . Insbesondere ist für eine Kurve  $c$  in  $S_{\mathbb{R}}^2$  auch das Bild  $D \circ c \subset S_{\mathbb{R}}^2$ .

Weiter folgt aus  $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$ :

$$\begin{aligned} L_S(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

**Lemma 2.14** (Großkreise sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in  $S_{\mathbb{R}}^2$  sind **Großkreise**, also Schnitte von  $S_{\mathbb{R}}^2$  und zweidimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Seien zwei beliebige Punkte  $p, q$  auf  $S_{\mathbb{R}}^2$ . Dann finden wir eine Rotation von  $\mathbb{R}^3$ , die  $p$  auf  $p' = (0, 0, R)$  — also den “Nordpol” — und  $q$  auf  $q' = (0, y, z) \in S_{\mathbb{R}}^2$  abbildet. Aufgrund der **Rotationsinvarianz der Kurvenlängen** und der Definition ist  $d_s(p, q) = d_s(p', q')$ . Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen  $p'$  und  $q'$  zu finden.

*Idee:* Mittels “geographischer Koordinaten”  $\varphi$  und  $\vartheta$ . Nun kann eine Verbindung zwischen  $p'$  und  $q'$  geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin \vartheta(t) \cos \varphi(t), \sin \vartheta(t) \sin \varphi(t), \cos \vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi - \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi, \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi + \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi, -\vartheta' \sin \vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned}
L_s(c) &= R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta} dt \geq R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2} dt \\
&= R \int_a^b |\vartheta'(t)| dt \geq R \int_a^b \vartheta'(t) dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a))
\end{aligned}$$

mit oBdA  $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$ .

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.

Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere  $\varphi' = 0$ , also wäre  $\varphi$  konstant  $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$ . Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

**Satz 2.15** (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch).  $(S_{\mathbb{R}}^2, d_s)$  ist ein metrischer Raum und isometrisch zu  $(S_{\mathbb{R}}^2, R \cdot d_W)$ .

*Beweis.* Analog zu  $(R^2, d_{\text{euk}})$ .

## 2.4 Wozu sind Metriken gut?

**Bemerkung 3** (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *konvergent*, wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

**Bemerkung 4** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $X$  heißt **konvergent**, wenn

$$\exists x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also  $x_n \in B_\varepsilon(x)$  ( $\forall n \geq N$ ).

**Bemerkung 5** (Erinnerung: Stetigkeit).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig* in  $t_0 \in \mathbb{R}$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

$f$  heißt *stetig*, wenn sie stetig ist  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 6** (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ . Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig** in  $x_0 \in X$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn  $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0))$  falls  $x \in B_\delta^X(x_0)$ .

$f$  heißt *stetig*, falls  $f$  stetig ist  $\forall x \in X$ .

**Bemerkung 7** (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \rightarrow Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.

Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.



# 3

## Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

### 3.1 Topologische Räume

**Definition 3.1** (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt

1.  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  sind wieder in  $\mathcal{O}$ .

Ein solches System  $\mathcal{O}$  heißt **Topologie** von  $X$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

**Beispiel 3.2** (Extrembeispiele).

1. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$  ist die **triviale Topologie**.
2. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$  ist die **diskrete Topologie**.

**Beispiel 3.3** (Standard-**Topologie** auf  $\mathbb{R}$ ).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{s(\text{standard})} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf  $\mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

**Beispiel 3.4** (Zariski-**Topologie** auf  $\mathbb{R}$ ).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{Z(\text{ariski})} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf  $\mathbb{R}$ .

Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen,  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$ .

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

**Definition 3.5** (Metrischer Raum  $\rightarrow$  topologischer Raum). Metrische Räume (z.B.  $(X, d)$ ) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } d\text{-offen} \Leftrightarrow \forall p \in U \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball  $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$  um  $p$  mit Radius  $\varepsilon$  ganz in  $U$  liegt:  $B_\varepsilon(p) \subset U$ .

Die  $d$ -offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik  $d$  **induzierte Topologie**.<sup>2</sup>

**Definition 3.6** (Basis). Eine **Basis** für die **Topologie**  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , sodass für jede offene Menge  $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$  gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

---

<sup>1</sup> **Offenes Intervall:**  $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,  
 $a$  und  $b$  beliebig

<sup>2</sup> **Übungsaufgabe:** Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel:  $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$  für **Standard-Topologie** auf  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 3.7** (Komplexität einer Topologie).  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben eine abzählbare Basis bezüglich **Standard-Metrik**  $d(x, y) = |x - y|$  (beziehungsweise **Standard-Topologie**):

Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

**Bemerkung 8** (Gleichheit von **Topologien**). Verschiedene **Metriken** können die gleiche Topologie induzieren:

Sind  $d, d'$  Metriken auf  $X$  und enthält jeder Ball um  $x \in X$  bezüglich  $d$  einen Ball um  $x$  bezüglich  $d'$  ( $B_\varepsilon^d(x) \subset B_\varepsilon^{d'}(x)$ ), dann ist jede  $d$ -offene Menge auch  $d'$ -offen und somit  $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$ .

Gilt auch die Umkehrung ( $\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$ ), so sind die Topologien gleich:  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

**Beispiel 3.8** (Bälle und Würfel sind gleich).  $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ .

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Die induzierten **Topologien** sind gleich.

**Beispiel 3.9** (Metrische Information sagt nichts über **Topologie**).  $(X, d)$  sei ein beliebiger **metrischer Raum**,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist **Metrik** mit  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

Für  $d'$  gilt:  $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$ , insbesondere ist der Durchmesser von  $X$  bezüglich  $d'$ :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

**Definition 3.10** (Umgebung).  $(X, \mathcal{O})$  sei ein **topologischer Raum**.  $U \subset X$  heißt **Umgebung** von  $A \subset X$ , falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

**Definition 3.11** (Innerer und äußerer Punkt). Für  $A \subset X$ ,  $p \in X$  heißt  $p$  ein **innerer Punkt** von  $A$  (bzw. **äußerer Punkt** von  $A$ ), falls  $A$  (bzw.  $X \setminus A$ ) **Umgebung** von  $\{p\}$  ist. Das **Innere** von  $A$  ist die Menge  $\overset{\circ}{A}$  der inneren Punkte von  $A$ .

**Definition 3.12** (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von  $A$  ist die Menge  $\overline{A} \subset X$ , die nicht **äußere Punkte** sind.

*Beispiel:*  $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,

$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ .

**Bemerkung 9** (Drei konstruierte **topologische Räume**). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie:**  $(X, \mathcal{O}_X)$  topologischer Raum,  $Y \subseteq X$  Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

definiert eine Topologie auf  $Y$ , die sogenannte *Teilraum-Topologie*.<sup>3</sup>

**Achtung!**  $U \in \mathcal{O}_Y$  ist i.A. nicht offen in  $X$ , z.B.  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = [0, 1]$ ,  $V = (-1, 2)$ , also  $U = V \cap Y = Y$ .

2. **Produktträume:**  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  zwei topologische Räume. Eine Teilmenge  $W \subseteq X \times Y$  ist *offen* in der *Produkt-Topologie*  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$  **Umgebung**  $U$  von  $x$  in  $X$  und  $V$  von  $y$  in  $Y$  sodass das "Kästchen"  $U \times V \subseteq W$ .

**Achtung!** Nicht jede offene Menge in  $X \times Y$  ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotientenräume:**  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum,  $\sim$  Äquivalenzrelation<sup>4</sup> auf  $X$ . Für  $x \in X$  sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

<sup>3</sup> Zu überprüfen!

<sup>4</sup> Impliziert Partitionierung von  $X$  in disjunkte Teilmengen

die Äquivalenzklasse von  $x$ ,

$$X / \sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned}\pi : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x]\end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).

Die *Quotienten-Topologie* auf  $X / \sim$  nutzt:

$U \subset X / \sim$  ist offen  $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ .

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit **Standard-Topologie** (induziert durch **Standard-Metrik**

$$d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|).$$

Seien  $s, t \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$s \sim t \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R} / \sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S^1 = \text{Einheitskreis}.$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}.\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.

$G = (\mathbb{Z}, +)$  operiert auf  $X = \mathbb{R}$ .

*Bahnen-Raum*  $= \mathbb{R} / \sim$  mit

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, t) &\mapsto t + 2\pi m.\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse  $[t]$  ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

## 3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

**Bemerkung 10** (Hausdorffsches Trennungsaxiom  $T_2$ ). Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{O})$  heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q \in X$  disjunkte **Umgebungen** finden kann, also Umgebungen  $U \ni p$  und  $V \ni q$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

*Beispiel:*

1. **Metrische Räume** sind **hausdorffsch**.

*Beweis.* Sei  $d(p, q) =: \varepsilon$ .

Behauptung:  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \emptyset$ .

Sei  $z$  in  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$ . Dann gilt

$$d(p, q) \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} > \varepsilon \quad \text{!}$$

2.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$  ist hausdorffsch, da die **Standard-Topologie** von der **Metrik** induziert wird.
3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$  ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p \neq q$ :

$$U_p = \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$U_q = \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\},$$

also  $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ .

**Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch":** In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.<sup>5</sup>

**Bemerkung 11** (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit **Teilraum-Topologie**) eines **Hausdorff-Raumes** ist hausdorffsch.
2.  $X, Y$  Hausdorff-Räume  $\Rightarrow X \times Y$  ist Hausdorff-Raum bezüglich **Produkt-Topologie**.

## 3.3 Stetigkeit

**Definition 3.13.** Stetigkeit  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, falls die Urbilder von offenen Mengen in  $Y$  offen sind in  $X$ .

<sup>5</sup> **Erinnerung — Konvergenz:**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  (**top. Raum**).  $X \ni a$  heißt **Limes** um  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  falls es zu jeder **Umgebung**  $U$  von  $a$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $x_n \in U \ \forall n \geq n_0$ .

**Beispiel 3.14.** Einfache Stetigkeiten

1.  $\text{Id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$  ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für  $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$  gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.

Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition und zur Folgenstetigkeit<sup>6</sup>.

**Definition 3.15.** Homöomorphismus

- Eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind.
- $X$  und  $Y$  heißen *homöomorph*, falls ein Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  existiert (notiere  $X \cong Y$ ).

**Bemerkung 12.** Bemerkung — Homöomorphismengruppe

- $\text{Id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$  ist Homöomorphismus.
  - Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
  - Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.
- Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

**Beispiel 3.16.** Einfache Homöomorphismen

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$  mit  $a < b \in \mathbb{R}$  (via  $f(t) = a + t(b - a)$ ).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$  mit  $a < b$  beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$  (z.B. via  $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ ).
- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus!  
 $f : [0, 1) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$  ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B.  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ :  
Für  $U$  offen in  $X_1$  ist  $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$  offen bezüglich der Produkttopologie.

---

<sup>6</sup> Übungsaufgabe!

- Metrische Räume  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  und Isometrie  $f : X \rightarrow Y$ , also eine bijektive Abbildung, so dass

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Behauptung:**  $f$  ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metriken definierten Topologien).

**Beweis** (über  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition):  $\delta := \varepsilon$ .

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon, \text{ also ist } f \text{ stetig.}$$

Analog für  $f^{-1}$ .

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$  ist die  $n$ -dimensionale Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  
 $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  sei der "Nordpol" von  $S_n$ .

**Behauptung:**  $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$ .

**Beweis** (via stereographische Projektion):

$$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

$$f(x) := \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \text{ stetig,}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n, \quad y \mapsto \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right) \text{ auch stetig.}$$

Also ist  $f$  homöomorph.

**Achtung:**  $S^n$  ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (da  $S^n$  kompakt und  $\mathbb{R}^n$  nicht kompakt ist, mehr dazu später).

**Bemerkung 13.** Bemerkung — Isometrien-Untergruppe Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von  $X$  (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\text{Isom}(X, d) \subseteq \text{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \text{Bij}(X).$$

**Bemerkung 14.** Exkurs 1 — Kurven Was ist eine Kurve?

*Naive Definition:* Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.

**Problem:**  $\exists$  stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen  $I = [0, 1] \rightarrow I^2$  ("Peano-Kurven", "space-filling curves")<sup>7</sup>.

**Ausweg 1:** *Jordan-Kurven* (bzw. geschlossene J-Kurven).

$\cong$  top. Raum, homöomorph zu  $I = [0, 1]$  (J-Kurve)

<sup>7</sup> Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.



$:=$  top. Raum, homöomorph zu  $S^1$  (geschlossene J-Kurve)

**Ausweg 2:** reguläre stetig differenzierbare Kurven (lokal injektiv).

**Verwendung:** z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ :

$$\exists f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^3$ .

Zwei Knoten  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$  sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus  $h$  von  $\mathbb{R}^3$  gibt mit  $h(K_1) = K_2$ .<sup>8</sup>

**Bemerkung 15.** Exkurs 2 — Topologische Gruppen Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

**Beispiel 3.17.** Topologische Gruppen

1.  $G$  beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2.  $\mathbb{R}^n$  mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind multiplikative topologische Gruppen.
4.  $H \subset G$  Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6.  $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$  allg. reelle lineare Gruppe.

$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  versehen mit Teilraum-Topologie induziert von  $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$  ist topologische Gruppe:

- Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung  $(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2})$ ,
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für  $A^{-1}$ ).

---

<sup>8</sup> **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

7.  $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = E_n, \det A = 1\}$  ist die *spezielle orthogonale Gruppe*. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.

Insbesondere ist

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S^1$$

eine abelsche topologische Gruppe.

### 3.4 Zusammenhang

**Definition 3.18.** Zusammenhängend Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt *zusammenhängend*, falls  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  sind.

**Äquivalent:**  $X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow X$  ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

*Beweis:*  $A \subset X$  offen und abgeschlossen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  offen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  abgeschlossen.

#### Beispiel 3.19. Zusammenhang

1.  $\mathbb{R}$  (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist *nicht* zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.

*Annahme:*  $I \neq U \neq \emptyset$ , sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von  $I$ . Dann gibt es mindestens einen Punkt  $u \in U$  und  $v \in I \setminus U$ . OBdA  $u < v$ . Setze  $U_0 := \{x \in U : x < v\}$  und  $c := \sup U_0$ . Also  $u \leq c \leq v$ . Weiter ist  $c \in U$ , da  $U$  abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von  $c$  gehört auch zu  $U$ , da  $U$  offen ist.

Damit gehört eine ganze Umgebung von  $c$  auch zu  $U_0$  ⚡

**Bemerkung 16.** Ergänzung — Zusammenhang von Teilmengen Allgemein: Eine *Teilmenge*  $B \subset X$  heißt *zusammenhängend*, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

**Bemerkung 17.** Bemerkung — Einpunktige Mengen Einpunktige Mengen sind zu-

sammenhängend:  $\{x\}$  mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind  $\{x\}$  und  $\emptyset$  die einzigen offenen Mengen).

**Definition 3.20.** Zusammenhangskomponente Sei  $x \in X$ . Die *Zusammenhangskomponente*  $Z(x)$  ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die  $x$  enthalten.

**Lemma 3.21.** Eigenschaften zusammenhängender Mengen

1.  $A$  ist zusammenhängend  $\Rightarrow \bar{A}$  (abgeschlossene Hülle von  $A$ ) ist zusammenhängend.
2.  $A, B$  zusammenhängend,  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$  zusammenhängend.<sup>9</sup>

**Bemerkung 18.** Folgerung Zusammenhangskomponenten von  $X$  sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von  $X$ .

*Beweis.* Definiere eine Äquivalenzrelation (für  $x, y \in X$ ):

$$x \sim y \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$  ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität:**  $x \sim x$ , denn die einpunktige Menge  $\{x\}$  ist zusammenhängend.
- **Symmetrie:**  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  nach Definition.
- **Transitivität:**  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ :  
 $x \sim y : \exists A \text{ zusammenhängend mit } x, y \in A.$   
 $y \sim z : \exists B \text{ zusammenhängend mit } y, z \in B.$   
 Also  $y \in A \cap B \stackrel{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B \text{ zusammenhängend.}$

**Beispiel 3.22.** Zusammenhangskomponenten

1.  $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$  hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2.  $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$  mit Teilraum-Topologie von  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$  ist *total unzusammenhängend*, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

**Beweis.** Annahme:  $A \subset \mathbb{Q}$  mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.

*Behauptung:*  $A$  ist nicht zusammenhängend.

Sei  $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$  mit  $q_1 \neq q_2$  (oBdA  $q_1 < q_2$ ). Sei  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $q_1 < s < q_2$ ,  
 $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$ ,  $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$ ,  $\widetilde{O}_1 = O_1 \cap A$ ,  $\widetilde{O}_2 = O_2 \cap A$ .  
 $\widetilde{O}_1$  und  $\widetilde{O}_2$  sind offen in  $A$  oder in  $\mathbb{Q}$  bezüglich der Teilraumtopologie. Es ist  $A = \widetilde{O}_1 \cup \widetilde{O}_2$  mit  $\widetilde{O}_1 \cap \widetilde{O}_2 \neq \emptyset$ , d.h.  $A$  ist *nicht* zusammenhängend.

<sup>9</sup> Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

**Definition 3.23.** Weg-Zusammenhängend Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *weg-zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten  $p, q \in X$  einen Weg (d.h. stetige Abbildung  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ ) zwischen  $p$  und  $q$  gibt.

**Lemma 3.24.** Weg-Zusammenhang  $X$  ist wegzusammenhängend  $\Rightarrow X$  ist zusammenhängend.

*Beweis.* Wäre  $X$  nicht zusammenhängend, dann  $\exists$  eine disjunkte Zerlegung  $X = A \cup B$  mit  $A, B$  offen und nicht-leer,  $A \cap B = \emptyset$  mit  $p \in A$  und  $q \in B$ . Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  ein (stetiger) Weg zwischen  $p$  und  $q$ , also  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ . Daraus folgt, dass  $[0, 1] = \alpha^{-1}(\alpha([0, 1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0, 1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0, 1])) \Rightarrow [0, 1]$  ist nicht zusammenhängend  $\nexists$

**Achtung:** Umkehrung gilt nicht! Z.B. "topologische Sinuskurve":  $X := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{(0, y) : |y| < 1\}$ .<sup>10</sup>  $X$  ist zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend.

**Lemma 3.25.** Weg-Zusammenhang von Bildern Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

*Beweis.* 1. Sei  $f : X \rightarrow X$  stetig und  $f(X) = A \cup B$  eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.

Dann ist  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  eine disjunkte Zerlegung.

2. Seien  $x = f(p), y = f(q)$  zwei Punkte in  $f(X)$ . Es ist  $p = f^{-1}(x), q = f^{-1}(y)$ .

Dann existiert  $a : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $a(0) = p$  und  $a(1) = q$  und somit ist  $f \circ a : [0, 1] \rightarrow f(X)$  ein stetiger Weg in  $f(X)$ .

**Korollar 3.26.** Zwischenwertsatz Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

**Bemerkung 19.** Test auf Homöomorphie via Zusammenhang **Beispiel:**  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$  nur falls  $n = 1$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$  für  $n \geq 1$ . Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \geq 2} \quad \nexists$$

Ebenso:  $[0, 1] \cong [0, 1]^n$  nur für  $n = 1$ .

**Satz 3.27.** von Brouwer  $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$  für  $m \neq n$ .

*Beweis.* Der Beweis benutzt den Satz von Gebietstreue (Brouwer):

Ist  $U \subseteq \text{offen}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive stetige Abbildung, so ist  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

<sup>10</sup> Details: Singer-Thorpe p.52

*Beweisidee:* Ist  $m < n$ , so ist

$$j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^m$  auf eine *nicht* offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Wäre  $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ , so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.<sup>11</sup>

### 3.5 Kompaktheit

**Definition 3.28.** (Lokal) kompakt Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k \in I :$$

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

- $A \subseteq X$  heißt *kompakt*, wenn  $A$  bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.
- $X$  heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von  $X$  eine kompakte Umgebung besitzt.

**Bemerkung 20.** Bemerkung — Verwendung kompakter Räume Kompakte Räume sind oft “einfacher” als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.

**Begründung:**  $\forall x \in X \exists U_x : f|_{U_x} \leq c_x$ . Schreibe  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ . Da  $X$  kompakt ist existieren  $x_1, \dots, x_k \in X$ , sodass  $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$ .  
 $\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \dots, c_{x_k}\}$ .

**Beispiel 3.29.** Beschränktheit im Kompakten Ist  $X$  kompakt und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal beschränkt (d.h. jeder Punkt von  $X$  hat eine Umgebung, in der  $f$  beschränkt ist — z.B. wahr für stetige Funktionen), dann ist  $f$  beschränkt.

**Beispiel 3.30.** Kompaktheit von Intervallen  $I = [0, 1]$  ist kompakt (ebenso  $[a, b]$ ).

*Beweis.* Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Dann existiert eine sogenannte *Lebesgue-Zahl*  $\delta > 0$ , sodass jedes Teilintervall  $I_\delta \subset I$  der Länge  $\delta$  in einem  $U_i$  liegt. Da  $[0, 1]$  mit endlich vielen Intervallen der Länge  $\delta$  überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen  $U_i$ .

<sup>11</sup> siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

**Bemerkung 21.** Hinweise zur Lebesgue-Zahl Gäbe es ein solches  $\delta > 0$  nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n \subset [0, 1]$  der Länge  $\frac{1}{n}$ , die jeweils in keiner Überdeckungsmenge  $U_i$  liegen. Nach Bolzano Weierstraß ("jede konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  hath konvergente Teilfolgen") folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte  $m_n$  von  $I_n$  konvergiert gegen ein  $t \in I$ . Dieses  $t$  liegt aber in einem  $U_i$ . Also, da  $U_i$  offen ist, liegen auch die  $m_n$  in  $U_j$  für genügend großes  $n$   $\nmid$

**Satz 3.31.** Sätze über kompakte Räume

1. Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.
2. Abgeschlossene TR von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

*Beweis.* 1. Sei  $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass  $(F^{-1}(U_i))_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist.  $X$  ist kompakt, also

$$X = F^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup F^{-1}(U_{i_k})$$

und schließlich

$$f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei  $X$  kompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen.

$A = \bigcup_{i \in I} U_i$  ist offene Überdeckung, also ist  $U_i = V_i \cap A$  für  $V_i$  offen in  $X$ .

$A$  ist abgeschlossen, also ist  $X \setminus A$  offen und  $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$  ist offene Überdeckung von  $X$ .

Da  $X$  kompakt ist gilt:

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

also

$$A = X \cap A = (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) \cap A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (Satz von Tichonow<sup>12</sup>) benutzt das Lemma von Zorn<sup>13</sup>.

Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Räume.

**Behauptung:**  $X \times Y$  ist kompakt.

Sei  $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$  offene Überdeckung. Für jedes  $(x, y) \in X \times Y$  existiert  $\lambda(x, y)$  sodass  $(x, y) \in W_{\lambda(x, y)}$ . Da  $W_{\lambda(x, y)}$  offen ist existiert  $U_{(x, y)} \subset X$  und  $V_{(x, y)} \subset Y$  sodass

$$(x, y) \in U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subset W_{\lambda(x, y)}.$$

<sup>12</sup> Ist  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.

<sup>13</sup> Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

Für festes  $x$  ist  $\bigcup_{y \in Y} V_{(x,y)}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , also — da  $Y$  kompakt ist — existieren  $y_1(x), \dots, y_{m_x}(x)$  sodass

$$Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Setze

$$U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Da  $X$  kompakt ist existieren  $x_1, \dots, x_n$  sodass  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ . Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m_x}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

### Beispiel 3.32. Weitere Beispiele

#### 1. Produkte kompakter Mengen:

$[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ Faktoren}}$  ist kompakt (Würfel — allgemein  $[a, b]^n$  ist kompakt)

#### 2. Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen:

Abgeschlossene Teilräume des  $n$ -dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbesondere: jede abgeschlossene beschränkte<sup>14</sup> Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge  $2c$  liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius  $c$  liegt).

**Satz 3.33.** Heine-Borel Die kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind genau die abgeschlossen-beschränkten Teilmengen.

*Beweis.* •  $\Leftarrow$ . Siehe obiges Beispiel 2.

•  $\Rightarrow$ . Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.

Die Norm  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = d(0, x)$  ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.

Dass  $K$  abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

**Lemma 3.34.** Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen Sei  $X$  ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

*Beweis.* Es ist zu zeigen dass  $X \setminus K$  offen ist in  $X$ .

Sei dafür  $x_0 \in X \setminus K$ . Für jedes  $x \in K$  wähle eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x_0$  und  $V_x$  von  $x$ , sodass  $U_x \cap V_x = \emptyset$  (das geht, weil  $X$  hausdorffsch ist).

Da  $K$  kompakt ist, existieren Punkte  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

<sup>14</sup> Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls  $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

$K$  kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.

Setze  $U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \emptyset, \end{aligned}$$

also  $x_0 \in U \subset X \setminus K$ .

**Bemerkung 22.** Korollar — Min. und Max. von Teilmengen Jede stetige Funktion  $f : K \rightarrow C$  auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.<sup>15</sup>

**Satz 3.35.** Homöomorphismen Eine stetige, bijektive Abbildung  $f : K \rightarrow Y$  von einem kompakten Raum  $K$  auf einen Hausdorff-Raum  $Y$  ist ein Homöomorphismus.

**Bemerkung:** Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre  $[0, 1) \cong S^1$  (da  $S^1$  kompakt ist, aber  $[0, 1)$  nicht)

*Beweis.* Zu zeigen: Inverse Abbildung  $f^{-1}$  ist stetig.

Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von  $f = (f^{-1})^{-1}$  offen (bzw. abgeschlossen) sind.

Sei  $A \subseteq K$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist  $f(A)$  kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in  $Y$  und somit ist  $f(A) \subset Y$  abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

---

<sup>15</sup> Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)