Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

Bemerkung 1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

Definition 1.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Definition 1.4 (Abgeschlossener r-Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r-Ball um x**.

Definition 1.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.7 (Triviale Metrik). Menge X,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem metrischen Raum verwursten.

Beispiel 1.8 (Simple Metriken). Sei $X = \mathbb{R}$.[1]

- $d_1(s,t) := |s-t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s-t|+1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.9 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

$$d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = ||x-y||$$

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[2].

Bemerkung 2 (aus LA II). Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.10 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

ist Metrik.

Beispiel 1.11 (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm). V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda|\cdot||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v,w) := ||v-w||$.

---

[1] **Anmerkung**: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.
[2] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x,y\rangle \leq ||x||\cdot||y|| \quad (x,y \in \mathbb{R})$

Beispiel 1.12 (Einheitssphäre).

$$S_1^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

ist die n-te **Einheitssphäre**.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) \coloneqq \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

Beispiel 1.13. (Hamming-Metrik) Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X \coloneqq \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \ldots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

2

Längenmetriken

2.1 Graphen

Definition 2.1 (Graph). Ein **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

Definition 2.2 (Erreichbarkeit). Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist **erreichbar** von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

Definition 2.3 (Zusammenhängend). $G = (E, K)$ heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.
Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

Beispiel 2.4 (Wortmetrik). Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

Definition 2.5 (Wortmetrik).

$$d_S(g,k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg,kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

Definition 2.6 (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph** $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die *Graphen-Metrik* auf $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

Beispiel 2.7 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik). Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve.
Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad \text{(via } \textit{Polynom-Approximation}\text{)} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}(g)} = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e(p, q)}.$$

Lemma 2.8 (Unabhängigkeit von L_{euk}).

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c, d] \to [a, b], s \mapsto t(s)$ gilt:

   $$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

   Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

   $$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

   □

2. • Translation.
   Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

   $$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

   die von p verschobene Kurve. Es gilt

   $$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \left\| (T_p \circ c)' \right\| dt = \int_a^b \left\| c' \right\| dt$$

   und damit gilt das Lemma für Translationen. □

   • Drehung.
   Für $\vartheta \in [0, 2\pi]$ sei

   $$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\vartheta x(t) - \sin\vartheta y(t), \sin\vartheta x(t) + \cos\vartheta y(t)) \end{aligned}$$

   die um Winkel ϑ gedrehte Kurve.
   Da D_ϑ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

   $$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c'(t)$$

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

und damit

$$\left\|(D_\vartheta \circ c(t))'\right\| = \left\|D_\vartheta \cdot c'\right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\|c'\right\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen. □

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

Lemma 2.9 (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0,0), \quad q' = (0,l).$$

Wegen der Invarianz von L_{euk} ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.
⟹ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ $(\forall t)$, also $x(t) =$ konstant $= x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment.

Definition 2.10 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven). Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

Satz 2.11 ("Neuer" metrischer $\mathbb{R}^2$).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.

Beweis. Direkter Beweis nach dem Lemma über Geradensegmente.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p,q) = ||p-q|| = d_e(p,q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

Beweis. Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*
  Sei
  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$
  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_\text{e} = d_\text{euk}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a+b-t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv. Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit
  $$d(q,p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p,q).$$
- *Dreiecksungleichung.*
  Zu zeigen: $d_\text{euk}(p,q) \leq d_\text{euk}(p,r) + d_\text{euk}(r,q)$ $(\forall p,q,r \in \mathbb{R}^2)$.
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:
  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$
  Infimumbildung liefert die Behauptung.
- *Positivität.*
  Zu zeigen: $d_\text{euk}(p,q) = 0 \iff p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Longrightarrow L_\text{euk}(c) = 0 \rightsquigarrow d_\text{euk}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_\text{euk} = ||p-q|| = 0$.

2.3 Sphärische Geometrie

Beispiel 2.12 (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S^2_\mathbb{R} := \{x \in R^3 : ||x|| = R\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a,b] \to S^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3} dt$$

und

$$d_s(p,q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S^2_{\mathbb{R}})).$$

Lemma 2.13 (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S^2_{\mathbb{R}}$ ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S^2_{\mathbb{R}}) = S^2_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S^2_{\mathbb{R}}$ auch das Bild $D \circ c \subset S^2_{\mathbb{R}}$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_s(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

Lemma 2.14 (Großkreise sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S^2_{\mathbb{R}}$ sind **Großkreise**, also Schnitte von $S^2_{\mathbb{R}}$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S^2_{\mathbb{R}}$. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0,0,R)$ — also den "Nordpol" — und q auf $q' = (0,y,z) \in S^2_{\mathbb{R}}$ abbildet. Aufgrund der Rotationsinvarianz der Kurvenlängen und der Definition ist $d_s(p,q) = d_s(p',q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels "geographischer Koordinaten" φ und ϑ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t),\ \sin\vartheta(t)\sin\varphi(t),\ \cos\vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta'\cos\vartheta\cos\varphi - \varphi'\sin\vartheta\sin\varphi,\ \vartheta'\cos\vartheta\sin\varphi + \varphi'\sin\vartheta\cos\varphi,\ -\vartheta'\sin\vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned}L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}\,dt \geq R\int_a^b \sqrt{\vartheta'^2(t)}\,dt \\ &= R\int_a^b |\vartheta'(t)|\,dt \geq R\int_a^b \vartheta'(t)\,dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a))\end{aligned}$$

mit oBdA $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$.
Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

Satz 2.15 (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch). $(S^2_{\mathbb{R}}, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_{\mathbb{R}}, R \cdot d_W)$.

Beweis. Analog zu (R^2, d_{euk}).

2.4 Wozu sind Metriken gut?

Bemerkung 3 (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Bemerkung 4 (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt **konvergent**, wenn

$$\exists\, x \in X\, \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\varepsilon(x)$ $(\forall n \geq N)$.

Bemerkung 5 (Erinnerung: Stetigkeit). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x))$ falls $x \in B_\delta^X(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

Bemerkung 7 (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \to Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.