

Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einstieg — Metrische Räume • 5
 - 1.1 Vorbemerkungen • 5
 - 1.2 Definitionen zu metrischen Räumen • 5
 - 1.3 Beispiele zu metrischen Räumen • 6
- 2 Längenmetriken • 9
 - 2.1 Graphen • 9
 - 2.2 Euklidische Metrik • 10
 - 2.3 Sphärische Geometrie • 13
 - 2.4 Wozu sind Metriken gut? • 15
- 3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie • 17
 - 3.1 Topologische Räume • 17
 - 3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom • 22
 - 3.3 Stetigkeit • 23
 - 3.4 Zusammenhang • 26
 - 3.5 Kompaktheit • 29

1

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

Bemerkung 1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität:** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer **Metrik** auf dieser.

Definition 1.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine **Metrik**, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Definition 1.4 (Abgeschlossener r -Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r -Ball um x** .

Definition 1.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) **metrische Räume**, so heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive **abstandserhaltende Abbildung**. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.7 (Triviale Metrik). Menge X ,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem **metrischen Raum** verwursten.

Beispiel 1.8 (Simple **Metriken**). Sei $X = \mathbb{R}$.¹

- $d_1(s, t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s, t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.9 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

$$d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

ist die (**euklidische**) **Standardmetrik** auf dem \mathbb{R}^n . Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung².

Bemerkung 2 (aus LA II). **Isometrien** von (\mathbb{R}^n, d_e) sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.10 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

ist **Metrik**.

Beispiel 1.11 (**Standardmetrik** und **Maximumsmetrik** allgemein: Norm). V sei \mathbb{R} -Vektorraum.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. **Dreiecksungleichung**: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Eine Norm definiert eine **Metrik** durch $d(v, w) := \|v - w\|$.

¹ **Anmerkung**: Wenn $d(x, y)$ eine **Metrik** ist, so ist auch $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

² **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Beispiel 1.12 (Einheitssphäre).

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

ist die n -te **Einheitssphäre**.

Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

Beispiel 1.13. (Hamming-Metrik) Es ist \mathbb{F}_2 der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n . Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

2

Längenmetriken

2.1 Graphen

Definition 2.1 (Graph). Ein **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken-Menge* E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ ($u, v \in E$), genannt *Kanten*.

Definition 2.2 (Erreichbarkeit). Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist **erreichbar** von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

Definition 2.3 (Zusammenhängend). $G = (E, K)$ heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.
Ist G ein zusammenhängender **Graph**, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine **Metrik**.

Beispiel 2.4 (Wortmetrik). Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \quad (2.1)$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.

Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in **Gleichung 2.1**) eine **Metrik** definieren:

Definition 2.5 (Wortmetrik).

$$d_S(g, k) := |g^{-1}k|$$

ist eine **Metrik** mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g, h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine **Isometrie**.

Definition 2.6 (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph** $\text{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die **Graphen-Metrik** auf $\text{Cay}(\Gamma, S)$ ist **isometrisch** zur **Wortmetrik**.

2.2 Euklidische Metrik

Beispiel 2.7 (Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 als Standardmetrik). Sei

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare¹ Kurve.

Die **euklidische Länge** von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad (\text{via Polynom-Approximation}) \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

¹ **Hinweis:** Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞ -differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}}(g) = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e}(p, q).$$

Lemma 2.8 (Unabhängigkeit von L_{euk}).

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus² $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$, $s \mapsto t(s)$ gilt:

$$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{dc(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.

Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von p verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \|(T_p \circ c)'\| dt = \int_a^b \|c'\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen.

□

- Drehung.

Für $\vartheta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos \vartheta x(t) - \sin \vartheta y(t), \sin \vartheta x(t) + \cos \vartheta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel ϑ gedrehte Kurve.

Da D_ϑ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c'(t)$$

² **Diffeomorphismus:** Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

und damit

$$\|(D_{\vartheta} \circ c(t))'\| = \|D_{\vartheta} \cdot c'\| \stackrel{\text{orth.}}{=} \|c'\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen. \square

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

Lemma 2.9 (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in \mathbb{R}^2 sind genau die Geradensegmente.

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der **Invarianz von L_{euk}** ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.

Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q' . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q' .

\Rightarrow **Infimum** der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.

Gilt für eine Kurve c , dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ ($\forall t$), also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist \tilde{c} auch (parametrisiertes) Geradensegment.

Definition 2.10 (Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 -Kurven). Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q . Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

Satz 2.11 ("Neuer" metrischer \mathbb{R}^2).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein **metrischer Raum** und **isometrisch** zu (\mathbb{R}^2, d_e) .

Beweis. Direkter Beweis nach dem **Lemma über Geradensegmente**.

Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

Beweis. Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*

Sei

$$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.

Es ist $d_e = d_{\text{euk}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv. Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit

$$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

- *Dreiecksungleichung.*

Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p, q) \leq d_{\text{euk}}(p, r) + d_{\text{euk}}(r, q)$ ($\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2$).

Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q :

$$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \not\subset \Omega_{pq}.$$

Infimumbildung liefert die Behauptung.

- *Positivität.*

Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

– Falls $p = q$.

Die konstante Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat

$$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{euk}}(p, p) = 0.$$

– Falls $p \neq q$.

Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment³

$$t \mapsto (1 - t)p + tq$$

mit der Länge $d_{\text{euk}} = \|p - q\| = 0$.

2.3 Sphärische Geometrie

Beispiel 2.12 (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in \mathbb{R}^3 ist

$$S_{\mathbb{R}}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

³ **Anmerkung:** nur an dieser Stelle wird die Geometrie des \mathbb{R}^2 benötigt!

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \rightarrow S_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p, q) := \inf L_S(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S_{\mathbb{R}}^2)).$$

Lemma 2.13 (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S_{\mathbb{R}}^2$ ist invariant unter Rotationen von \mathbb{R}^2 .

Beweis. Eine orthogonale Matrix im \mathbb{R}^2 ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, ist $D(S_{\mathbb{R}}^2) = S_{\mathbb{R}}^2$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S_{\mathbb{R}}^2$ auch das Bild $D \circ c \subset S_{\mathbb{R}}^2$.

Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_S(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

Lemma 2.14 (Großkreise sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S_{\mathbb{R}}^2$ sind **Großkreise**, also Schnitte von $S_{\mathbb{R}}^2$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^3 .

Beweis. Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S_{\mathbb{R}}^2$. Dann finden wir eine Rotation von \mathbb{R}^3 , die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den “Nordpol” — und q auf $q' = (0, y, z) \in S_{\mathbb{R}}^2$ abbildet. Aufgrund der **Rotationsinvarianz der Kurvenlängen** und der Definition ist $d_s(p, q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.

Idee: Mittels “geographischer Koordinaten” φ und ϑ . Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin \vartheta(t) \cos \varphi(t), \sin \vartheta(t) \sin \varphi(t), \cos \vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi - \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi, \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi + \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi, -\vartheta' \sin \vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned}
L_s(c) &= R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta} dt \geq R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2(t)} dt \\
&= R \int_a^b |\vartheta'(t)| dt \geq R \int_a^b \vartheta'(t) dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a))
\end{aligned}$$

mit oBdA $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$.

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.

Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant = $\varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

Satz 2.15 (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch). $(S_{\mathbb{R}}^2, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S_{\mathbb{R}}^2, R \cdot d_W)$.

Beweis. Analog zu (R^2, d_{euk}) .

2.4 Wozu sind Metriken gut?

Bemerkung 3 (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Bemerkung 4 (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X heißt **konvergent**, wenn

$$\exists x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\varepsilon(x)$ ($\forall n \geq N$).

Bemerkung 5 (Erinnerung: Stetigkeit). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume (X, d_X) , (Y, d_Y) . Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig** in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0))$ falls $x \in B_\delta^X(x_0)$.

f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

Bemerkung 7 (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \rightarrow Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.

Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

3

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

3.1 Topologische Räume

Definition 3.1 (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{O}) bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X , so dass gilt

1. $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus \mathcal{O} sind wieder in \mathcal{O} .

Ein solches System \mathcal{O} heißt **Topologie** von X . Die Elemente von \mathcal{O} heißen **offene Teilmengen** von X .

$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel 3.2 (Extrembeispiele).

1. Menge X , $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$ ist die **triviale Topologie**.
2. Menge X , $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die **diskrete Topologie**.

Beispiel 3.3 (Standard-**Topologie** auf \mathbb{R}). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s(\text{standard})} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf \mathbb{R} .¹

Beispiel 3.4 (Zariski-**Topologie** auf \mathbb{R}). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{Z(\text{ariski})} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf \mathbb{R} .

Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, \emptyset und \mathbb{R} .

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1 \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

Definition 3.5 (Metrischer Raum \rightarrow topologischer Raum). Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } d\text{-offen} \Leftrightarrow \forall p \in U \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$ um p mit Radius ε ganz in U liegt: $B_\varepsilon(p) \subset U$.

Die d -offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d **induzierte Topologie**.²

Definition 3.6 (Basis). Eine **Basis** für die **Topologie** \mathcal{O} ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

¹ **Offenes Intervall:** $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
 a und b beliebig

² **Übungsaufgabe:** Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für **Standard-Topologie** auf \mathbb{R} .

Beispiel 3.7 (Komplexität einer **Topologie**). \mathbb{R}, \mathbb{C} haben eine abzählbare Basis bezüglich **Standard-Metrik** $d(x, y) = |x - y|$ (beziehungsweise **Standard-Topologie**):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

Bemerkung 8 (Gleichheit von **Topologien**). Verschiedene **Metriken** können die gleiche Topologie induzieren:

Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B_\varepsilon^d(x) \subset B_\varepsilon^{d'}(x)$), dann ist jede d -offene Menge auch d' -offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.

Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Beispiel 3.8 (Bälle und Würfel sind gleich). $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Die **induzierten Topologien** sind gleich.

Beispiel 3.9 (Metrische Information sagt nichts über **Topologie**). (X, d) sei ein beliebiger **metrischer Raum**,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist **Metrik** mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Für d' gilt: $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$, insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d' :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

Definition 3.10 (Umgebung). (X, \mathcal{O}) sei ein **topologischer Raum**. $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $A \subset X$, falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

Definition 3.11 (Innerer und äußerer Punkt). Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein **innerer Punkt** von A (bzw. **äußerer Punkt** von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) **Umgebung** von $\{p\}$ ist. Das **Innere** von A ist die Menge $\overset{\circ}{A}$ der inneren Punkte von A .

Definition 3.12 (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die **nicht äußere Punkte** sind.

Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,

$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

Bemerkung 9 (Drei konstruierte topologische Räume). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie:** (X, \mathcal{O}_X) topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

definiert eine Topologie auf Y , die sogenannte *Teilraum-Topologie*.³

Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.A. nicht offen in X , z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produkttopologie:** (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$ **Umgebung** U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$. **Achtung!** Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotiententopologie:** (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, \sim Äquivalenzrelation⁴ auf X . Für $x \in X$ sei

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

³ Zu überprüfen!

⁴ Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

die Äquivalenzklasse von x ,

$$X / \sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned}\pi : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x]\end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).

Die *Quotienten-Topologie* auf X / \sim nutzt:

$U \subset X / \sim$ ist offen $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U)$ ist offen in X .

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit **Standard-Topologie** (induziert durch **Standard-Metrik**

$$d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|).$$

Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R} / \sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S^1 = \text{Einheitskreis}.$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.

$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.

Bahnen-Raum $= \mathbb{R} / \sim$ mit

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, t) &\mapsto t + 2\pi m.\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

Bemerkung 10 (Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2). Ein **topologischer Raum** (X, \mathcal{O}) heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte **Umgebungen** finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Beispiel:

1. **Metrische Räume** sind **hausdorffsch**.

Beweis. Sei $d(p, q) =: \varepsilon$.

Behauptung: $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \emptyset$.

Sei z in $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$. Dann gilt

$$d(p, q) \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} > \varepsilon \quad \text{!}$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der **Metrik** induziert wird.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq q$:

$$U_p = \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$U_q = \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\},$$

$$\text{also } U_p \cap U_q \neq \emptyset.$$

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.⁵

Bemerkung 11 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit **Teilraum-Topologie**) eines **Hausdorff-Raumes** ist hausdorffsch.
2. X, Y Hausdorff-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hausdorff-Raum bezüglich **Produkt-Topologie**.

⁵ **Erinnerung: Konvergenz:** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ (**top. Raum**). $X \ni a$ heißt **Limes** um $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es zu jeder **Umgebung** U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U \quad \forall n \geq n_0$.

3.3 Stetigkeit

Definition 3.13 (Stetigkeit). $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ **topologische Räume**. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X .

Beispiel 3.14 (Einfache Stetigkeiten).

1. $\text{Id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.

Für **metrische Räume** ist diese Definition äquivalent zur ε - δ -Definition und zur Folgenstetigkeit⁶.

Definition 3.15 (Homöomorphismus).

- Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen **topologischen Räumen** heißt **Homöomorphismus**, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

Bemerkung 12 (Homöomorphismengruppe).

- $\text{Id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist **Homöomorphismus**.
- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.

Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

Beispiel 3.16 (Einfache Homöomorphismen).

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
(via $f(t) = a + t(b - a)$).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$
(z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).

⁶ Übungsaufgabe!

- **Stetig** und injektiv, aber kein Homöomorphismus!

$f : [0, 1) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.

- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der **Produkttopologie**.
- **Metrische Räume** $(X, d_X), (Y, d_Y)$ und **Isometrie** $f : X \rightarrow Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch **Metrik** definierten **Topologien**).

Beweis. (über ε - δ -Definition): $\delta := \varepsilon$.

$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon$, also ist f stetig.

Analog für f^{-1} .

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$ ist die n -dimensionale **Einheitssphäre** in \mathbb{R}^{n+1} . $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S^n .

Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.

Beweis. (via stereographische Projektion):

$$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

$$f(x) := \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \text{ stetig,}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right) \text{ auch stetig.}$$

Also ist f homöomorph.

Achtung: S^n ist nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n (da S^n **kompakt** und \mathbb{R}^n nicht kompakt ist, mehr dazu später).

Bemerkung 13 (**Isometrien**-Untergruppe). Isometrien bilden eine Untergruppe der **Homöomorphismen** von X (versehen mit von der **Metrik** induzierten Topologie):

$$\text{Isom}(X, d) \subseteq \text{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \text{Bij}(X).$$

Bemerkung 14 (Exkurs 1: Kurven). Was ist eine Kurve?

Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.

Problem: \exists stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0, 1] \rightarrow I^2$

(“Peano-Kurven”, “space-filling curves”)⁷.

Ausweg 1: Jordan-Kuven (bzw. geschlossene J-Kurven).

$\text{:= top. Raum, homöomorph zu } I = [0, 1] \text{ (J-Kurve)}$

$\text{:= top. Raum, homöomorph zu } S^1 \text{ (geschlossene J-Kurve)}$

Ausweg 2: reguläre stetig differenzierbare Kurven (lokal injektiv).

Verwendung: z.B. Knoten — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von \mathbb{R}^3 :

$$\exists f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

mit **Teilraumtopologie** von \mathbb{R}^3 .

Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von \mathbb{R}^3 gibt mit $h(K_1) = K_2$.⁸

Bemerkung 15 (Exkurs 2: Topologische Gruppen). Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe versehen mit einer **Topologie**, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit **Produkt-Topologie** und die Inversenbildung

$$i : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Beispiel 3.17 (Topologische Gruppen).

1. G beliebige Gruppe mit **diskreter Topologie** ist **topologische Gruppe**.
2. \mathbb{R}^n mit **Standard-Topologie** ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. **Teilraumtopologie**.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit **Produkttopologie** ist eine topologische Gruppe.
6. $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{= \mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit **Teilraum-Topologie** induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$ ist topologische Gruppe:

⁷ Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

⁸ **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

- Matrizenmultiplikation ist **stetige** Abbildung $(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2})$,
- Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).

7. $\text{SO}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.

Insbesondere ist

$$\text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S^1$$

eine abelsche topologische Gruppe.

3.4 Zusammenhang

Definition 3.18 (Zusammenhängend). Ein **topologischer Raum** (X, \mathcal{O}) heißt **zusammenhängend**, falls \emptyset und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X sind.

Äquivalent: X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow X$ ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

Beweis. $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ offen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ abgeschlossen.

Beispiel 3.19 (Zusammenhang).

1. \mathbb{R} (und ebenso beliebige Intervalle) ist **zusammenhängend**, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.

Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.

Annahme: $I \neq U \neq \emptyset$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I . Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \leq c \leq v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze **Umgebung** von c gehört auch zu U , da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 \nrightarrow

Bemerkung 16 (Ergänzung: Zusammenhang von Teilmengen). *Allgemein:* Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der **Teilraumtopologie** zusammenhängend ist.

Bemerkung 17 (Einpunktige Mengen). Einpunktige Mengen sind **zusammenhängend**: $\{x\}$ mit **Teilraumtopologie** ist diskret (also sind $\{x\}$ und \emptyset die einzigen offenen Mengen).

Definition 3.20 (Zusammenhangskomponente). Sei $x \in X$. Die **Zusammenhangskomponente** $Z(x)$ ist die Vereinigung aller **zusammenhängenden** Teilmengen, die x enthalten.

Lemma 3.21 (Eigenschaften **zusammenhängender** Mengen).

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.
2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.⁹

Bemerkung 18 (Zusammenhängende Mengen bilden disjunkte Zerlegung).

Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X .

Beweis. Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

\sim ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität:** $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- **Symmetrie:** $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.
- **Transitivität:** $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:

$$x \sim y : \exists A \text{ zusammenhängend mit } x, y \in A.$$

$$y \sim z : \exists B \text{ zusammenhängend mit } y, z \in B.$$

$$\text{Also } y \in A \cap B \stackrel{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B \text{ zusammenhängend.}$$

Beispiel 3.22 (Zusammenhangskomponenten).

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit **Teilraum-Topologie** von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist **total unzusammenhängend**, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

Beweis. Annahme: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.

Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.

Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$, $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$, $\widetilde{O}_1 = O_1 \cap A$, $\widetilde{O}_2 = O_2 \cap A$. \widetilde{O}_1 und \widetilde{O}_2 sind offen in A oder in \mathbb{Q} bezüglich der Teilraumtopologie. Es ist $A = \widetilde{O}_1 \cup \widetilde{O}_2$ mit $\widetilde{O}_1 \cap \widetilde{O}_2 \neq \emptyset$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.

Definition 3.23 (Weg-Zusammenhängend). Sei (X, \mathcal{O}) ein **topologischer Raum**. X heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (d.h.

⁹ Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$ zwischen p und q gibt.

Lemma 3.24 (Weg-Zusammenhang). X ist **weg-zusammenhängend** $\Rightarrow X$ ist **zusammenhängend**.

Beweis. Wäre X nicht zusammenhängend, dann \exists eine disjunkte Zerlegung $X = A \cup B$ mit A, B offen und nicht-leer, $A \cap B = \emptyset$ mit $p \in A$ und $q \in B$. Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ein (stetiger) Weg zwischen p und q , also $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$. Daraus folgt, dass $[0, 1] = \alpha^{-1}(\alpha([0, 1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0, 1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0, 1])) \Rightarrow [0, 1]$ ist nicht zusammenhängend \nexists

Achtung: Umkehrung gilt nicht! Z.B. "topologische Sinuskurve"¹⁰ X ist zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend:

$$X := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{ (0, y) : |y| < 1 \}.$$

Lemma 3.25 (Weg-Zusammenhang von Bildern). **Stetige** Bilder von **(weg-)zusammenhängenden** Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

Beweis.

1. Sei $f : X \rightarrow X$ stetig und $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.
Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung.
2. Seien $x = f(p), y = f(q)$ zwei Punkte in $f(X)$. Es ist $p = f^{-1}(x), q = f^{-1}(y)$.
Dann existiert $a : [0, 1] \rightarrow X$ mit $a(0) = p$ und $a(1) = q$ und somit ist $f \circ a : [0, 1] \rightarrow f(X)$ ein **stetiger Weg** in $f(X)$.

Korollar 3.26 (Zwischenwertsatz). Eine **stetige Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Bemerkung 19 (Test auf **Homöomorphie** via **Zusammenhang**).

Beispiel: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ nur falls $n = 1$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $R \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$. Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \geq 2} \quad \nexists$$

Ebenso: $[0, 1] \cong [0, 1]^n$ nur für $n = 1$.

Satz 3.27 (von Brouwer). $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ für $m \neq n$.

¹⁰ **Details:** Singer-Thorpe p.52

Beweis. Der Beweis benutzt den **Satz von Gebietstreue** (Brouwer):

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive *stetige* Abbildung, so ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Beweisidee: Ist $m < n$, so ist

$$j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von \mathbb{R}^m auf eine *nicht* offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Wäre $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.¹¹

3.5 Kompaktheit

Definition 3.28 ((Lokal) kompakt). Ein **topologischer Raum** heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k \in I :$$

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

- $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn A bezüglich der **Teilraumtopologie** kompakt ist.
- X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 20 (Verwendung **kompakter Räume**). Kompakte Räume sind oft “einfacher” als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.

Begründung: $\forall x \in X \exists U_x : f|_{U_x} \leq c_x$. Schreibe $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist existieren $x_1, \dots, x_k \in X$, sodass $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$.
 $\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \dots, c_{x_k}\}$.

Beispiel 3.29 (Beschränktheit im Kompakten). Ist X kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **lokal beschränkt** (d.h. jeder Punkt von X hat eine Umgebung, in der f beschränkt ist — z.B. wahr für *stetige* Funktionen), dann ist f beschränkt.

Beispiel 3.30 (**Kompaktheit** von Intervallen). $I = [0, 1]$ ist kompakt (ebenso $[a, b]$).

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Dann existiert eine sogenannte **Lebesgue-Zahl** $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I_\delta \subset I$ der Länge δ in einem U_i liegt. Da $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen der Länge δ überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen U_i .

¹¹ siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

Bemerkung 21 (Hinweise zur **Lebesgue-Zahl**). Gäbe es ein solches $\delta > 0$ nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n \subset [0, 1]$ der Länge $\frac{1}{n}$, die jeweils in keiner Überdeckungsmenge U_i liegen. Nach Bolzano Weierstraß¹² folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte m_n von I_n konvergiert gegen ein $t \in I$. Dieses t liegt aber in einem U_i . Also, da U_i offen ist, liegen auch die m_n in U_j für genügend großes n \nmid

Satz 3.31 (Sätze über kompakte Räume).

1. **Stetige Bilder von kompakten Räumen** sind kompakt.
2. Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

Beweis.

1. Sei $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass $(F^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. X ist kompakt, also

$$X = F^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup F^{-1}(U_{i_k})$$

und schließlich

$$f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen.

$A = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offene Überdeckung, also ist $U_i = V_i \cap A$ für V_i offen in X .

A ist abgeschlossen, also ist $X \setminus A$ offen und $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ ist offene Überdeckung von X .

Da X kompakt ist gilt:

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

also

$$A = X \cap A = (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) \cap A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (**Satz von Tichonow**¹³) benutzt das **Lemma von Zorn**¹⁴.

Seien X und Y kompakte Räume.

Behauptung: $X \times Y$ ist kompakt.

Sei $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ offene Überdeckung. Für jedes $(x, y) \in X \times Y$ existiert $\lambda(x, y)$ sodass $(x, y) \in W_{\lambda(x, y)}$. Da $W_{\lambda(x, y)}$ offen ist existiert $U_{(x, y)} \subset X$ und $V_{(x, y)} \subset Y$ sodass

$$(x, y) \in U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subset W_{\lambda(x, y)}.$$

¹² "jede konvergente Folge in \mathbb{C} hat konvergente Teilfolgen"

¹³ Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.

¹⁴ Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

Für festes x ist $\bigcup_{y \in Y} V_{(x,y)}$ eine offene Überdeckung von Y , also — da Y kompakt ist — existieren $y_1(x), \dots, y_{m_x}(x)$ sodass

$$Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Setze

$$U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

Da X kompakt ist existieren x_1, \dots, x_n sodass $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m_x}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

Beispiel 3.32 (Weitere **kompakte Mengen**).

1. Produkte kompakter Mengen:

$$[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ Faktoren}}$$

ist kompakt (Würfel — allgemein $[a, b]^n$ ist kompakt)

2. Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen:

Abgeschlossene Teilräume des n -dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbesondere: jede abgeschlossene beschränkte¹⁵ Teilmenge von \mathbb{R}^n (mit **Standard-Topologie**) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge $2c$ liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius c liegt).

Satz 3.33 (Heine-Borel). Die **kompakten Teilmengen** von \mathbb{R}^n sind genau die abgeschlossen-beschränkten Teilmengen.

Beweis.

- \Leftarrow . Siehe **obiges Beispiel**.
- \Rightarrow . Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Die **Norm** $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = d(0, x)$ ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.

Dass K abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.34 (**Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen**). Sei X ein **topologischer Raum**, der hausdorffsch ist, und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. Es ist zu zeigen dass $X \setminus K$ offen ist in X .

Sei dafür $x_0 \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x_0 und V_x von x ,

¹⁵ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

sodass $U_x \cap V_x = \emptyset$ (das geht, weil X hausdorffsch ist).

Da K kompakt ist, existieren Punkte $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

K kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.

Setze $U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \emptyset, \end{aligned}$$

also $x_0 \in U \subset X \setminus K$.

Korollar 3.35 (Minimum und Maximum von Teilmengen). Jede **stetige** Funktion $f : K \rightarrow C$ auf einer **kompakten** Teilmenge eines **Hausdorffraums** nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.¹⁶

Satz 3.36 (Homöomorphismen auf Hausdorff-Räumen). Eine stetige, bijektive Abbildung $f : K \rightarrow Y$ von einem **kompakten** Raum K auf einen Hausdorff-Raum Y ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre $[0, 1) \cong S^1$ (da S^1 kompakt ist, aber $[0, 1)$ nicht)

Beweis. Zu zeigen: Inverse Abbildung f^{-1} ist **stetig**.

Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von $f = (f^{-1})^{-1}$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.

Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist $f(A)$ kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in Y und somit ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

¹⁶ Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)