Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

1.1 Toplogischer Räume

1.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\ (\text{standard})} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\backslash,\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

1.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.

Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist d-*offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U\ \exists\, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

1.1.6 Definition — Basis.

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

<u>Beispiel</u>: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\epsilon'}(x) \subset B^d_\epsilon(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.

$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

1.1.10 Beispiel — Metrische Information sagt nichts über Topologie.

(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \leq$ ($\forall x, y$), insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x,y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

1.1.11 Definition — Umgebung.

$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

1.1.12 Definition — Innerer Punkt.

Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.

Das *Innere* von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.

Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die <u>nicht</u> äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a,b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a,b)} = [a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

1.1.14 Drei konstruierte topologische Räume.

Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

   $$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists\, V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[2]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.a. nicht offen in X. Z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

2. **Produkträume**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist ***offen*** in der ***Produkt-Topologie*** $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W$ $\exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

   $$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

   induzierter topologischer Raum.

3. **Quotienten**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[3] auf X. Für $x \in X$ sei

   $$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

   die Äquivalenzklasse von x,

   $$X/\sim$$

   die Menge der Äquivalenzklassen und

   $$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

   die kanonische Projektion (surjektiv!).
   Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
   $U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
   Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$).
   Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

   $$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

[2] Zu überprüfen!

[3] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S' = \text{ Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$