Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Übungen

1.1 2017-10-27

1.1.1 Aufgabe 2.

Gegeben:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $\|x\| \geq 0 \forall x$, $x = 0 \iff \|x\| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.
Sublinearität:

1.
$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ &\Rightarrow \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

1.1.2 Aufgabe 3.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:

   (a) Falls $d(x,y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
   Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2 \quad ↯ \quad \square$

   (b) Falls $d(x,y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
   Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x,z) \geq r_1 &= (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x,y) + d(z,y) \quad ↯ \quad \square \end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

   (a) Sei $X = \{0,1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0,1) = 1$.
   Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen keine Elemente.
   Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben
   $B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0,1)$.

   (b) Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0,1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100 - 100$.

1.1.3 Aufgabe 4.

1. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^2, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *isometrisch sind.*
   Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.
   Behauptung: $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.
   f ist linear mit Rang 2, also bijektiv.
   Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

$$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p,q).$$

   Es ist

$$\begin{aligned} d_1(p,q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|,\ |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= \text{(undeutlich)} = d_\infty(f(p), f(q)). \qquad \square \end{aligned}$$

2. *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *und* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ***nicht*** *isometrisch sind für* $n > 2$.

Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1 : (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2 : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.
Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. φ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.
Die Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p, q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.
Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p, q) = 2$ und $d_1(p, 0) = 1$. Da φ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$).
Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.
Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).
Es gilt $d_1(p, q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide} > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2$ ↯