

# Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier



*Inhaltsverzeichnis*

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe der allgemeinen Topologie</b>	<b>5</b>
1.1	Toplogischer Räume . . . . .	5



# Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

## 1.1 Topologischer Räume

### 1.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt

1.  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  sind wieder in  $\mathcal{O}$ .

Ein solches System  $\mathcal{O}$  heißt *Topologie* von  $X$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen *offene Teilmengen* von  $X$ .

$A \subset X$  heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

### 1.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$  ist die *triviale Topologie*.
2. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$  ist die *diskrete Topologie*.

### 1.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ .

$X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_s(\text{standard}) := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

**Offenes Intervall:**

$$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},$$

$a$  und  $b$  beliebig

**1.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}$ .**

$X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf  $\mathbb{R}$ .

(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen,  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$ .)

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

**1.1.5 Definition — Metrischer  $\rightarrow$  topologischer Raum.**

Metrische Räume (z.B.  $(X, d)$ ) sind topologische Räume:

$U \subset X$  ist *d-offen*  $\Leftrightarrow \forall p \in U \exists \epsilon = \epsilon(p) > 0$ , sodass der offene Ball

$B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\}$  um  $p$  mit Radius  $\epsilon$  ganz in  $U$  liegt:

$B_\epsilon(p) \subset U$ .

Die *d-offenen* Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik  $d$  induzierte Topologie<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> **Übungsaufgabe:** Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

**1.1.6 Definition — Basis.**

Eine *Basis* für die Topologie  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , sodass für jede offene Menge  $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$  gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

Beispiel:  $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$  für Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

**1.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.**

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik

$d(x, y) = |x - y|$  (beziehungsweise Standard-Topologie):

Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

**1.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.**

Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:

Sind  $d, d'$  Metriken auf  $X$  und enthält jeder Ball um  $x \in X$  bezüglich  $d$  einen Ball um  $x$  bezüglich  $d'$  ( $B_\epsilon^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$ ), dann ist jede  $d$ -offene Menge auch  $d'$ -offen und somit  $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$ .

Gilt auch die Umkehrung ( $\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$ ), so sind die Topologien gleich:  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

**1.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.**

$X = \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

**1.1.10 Beispiel — asd.**

$(X, d)$  sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist Metrik mit  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

Für  $d'$  gilt:  $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$ , insbesondere ist der Durchmesser von  $X$  bezüglich  $d'$ :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes (“metrische Information”) sagt nichts über die Topologie aus.

**1.1.11 Definition — Umgebung.**

$(X, \mathcal{O})$  sei ein topologischer Raum.  $U \subset X$  heißt *Umgebung* von  $A \subset X$ , falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

**1.1.12 Definition — Innerer Punkt.**

Für  $A \subset X$ ,  $p \in X$  heißt  $p$  ein *innerer Punkt* von  $A$  (bzw. äußerer Punkt von  $A$ ), falls  $A$  (bzw.  $X \setminus A$ ) Umgebung von  $\{p\}$  ist.

Das *Innere* von  $A$  ist die Menge  $\overset{\circ}{A}$  der inneren Punkte von  $A$ .

**1.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.**

Die *abgeschlossene Hülle* von  $A$  ist die Menge  $\overline{A} \subset X$ , die nicht äußere Punkte sind.

**Beispiel:**  $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,

$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ .