Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

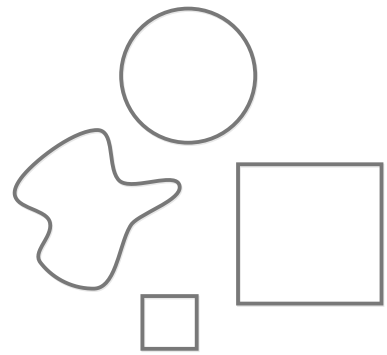

Abbildung 1.1: Diese Objekte sind "topologisch äquivalent"(später mehr zur genauen Definition), aus Sicht der metrischen Geometrie allerdings nicht.

1.1.1 Kartographieproblem.
Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

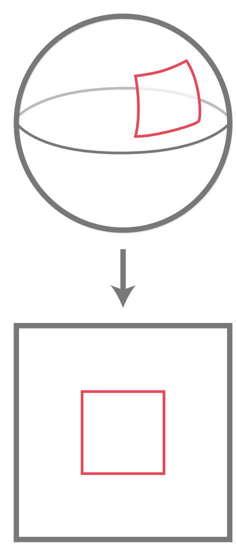

Abbildung 1.2: Die Projektion einer Fläche auf einer Kugel auf Papier — nicht längentreu möglich!

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

1.2.1 Definition — Metrik.
Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ ist eine *Metrik* (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2.2 Definition — Metrischer Raum.
Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

1.2.3 Definition — Pseudometrik.
Eine *Pseudometrik* erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

1.2.4 Definition — Abgeschlossener r-Ball um x.
Eine Teilmenge $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossener r-Ball um x*.

1.2.5 Definition — Abstandserhaltende Abbildung.
Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *abstandserhaltend*, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

1.2.6 Definition — Isometrie.
Eine *Isometrie* ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

1.3.1 Beispiel — Triviale Metrik.
Menge X, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ jede Menge lässt sich zu einer Metrik verwursten.

Anmerkung: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

1.3.2 Beispiel — Simple Metriken.
Sei $X = \mathbb{R}$.

- $d_1(s,t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

1.3.3 Beispiel — Standardmetrik.
$X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = ||x - y||$ ist die (euklidische) Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[1].

[1] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bemerkung (aus LA II): Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

1.3.4 Beispiel — Maximumsmetrik.

$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ist Metrik.

1.3.5 Beispiel — ?? und ?? allgemein: Norm.

V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) := ||v - w||$.

1.3.6 Beispiel — Einheitssphären.

$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ ist die n-te *Einheitssphäre*.
Auf dieser ist mit $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$ die *Winkel-Metrik* definiert.

1.3.7 Beispiel — Hamming-Metrik.

Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \ldots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die *Hamming-Metrik* ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

Längenmetriken

2.1 Graphen — Definitionen

2.1.1 Definition — Graph.
Ein *Graph* $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ $(u, v \in E)$, genannt *Kanten*.

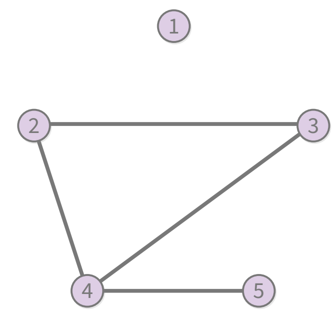

Abbildung 2.1: Ein einfacher Graph. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da die Ecke 1 nicht von den anderen Ecken aus erreicht werden kann.

2.1.2 Definition — Erreichbarkeit.
Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist *erreichbar* von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

2.1.3 Definition — Zusammenhängend.
$G = (E, K)$ heißt *zusammenhängend*, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q) =$ minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

2.1.4 Beispiel — Wortmetrik.
Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Sigma$ (minimales n in **??**) eine Metrik definieren:

2.1.5 Definition — Wortmetrik.

$$d_S(g, k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

2.1.6 Definition — Cayley-Graph.

Der *Cayley-Graph* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die Graphen-Metrik auf $\mathrm{Cay}(\Sigma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 *Euklidische Metrik*

2.2.1 Beispiel — Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik.

Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve.
Die *euklidische Länge* von C ist

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

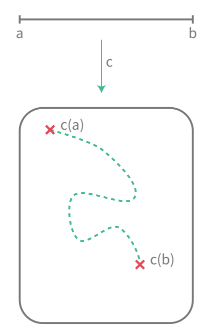

Abbildung 2.2: c bildet ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ auf eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ ab.

$$\begin{aligned} L_{\text{eukl}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad \text{(via \textit{Polynom-Approximation})} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

<u>Beispiel</u>: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{eukl}}(g)} = \int_0^1 \|p-q\| dt = \|p-q\| = \underline{d_e(p,q)}.$$

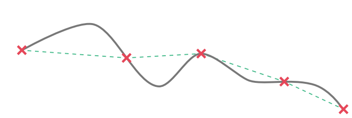

Abbildung 2.3: Durch *Polynom-Approximation* wird eine Kurve sukzessive angenähert.

2.2.2 Lemma — Unabhängigkeit von L_{eukl}.

1. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.

2. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis:

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c, d] \to [a, b], s \mapsto t(s)$ gilt:

$$L_{\text{eukl}}(c(t(s))) = L_{\text{eukl}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.
Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von p verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \left\| (T_p \circ c)' \right\| dt = \int_a^b \left\| c' \right\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen. □

• Drehung.
Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\theta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\theta x(t) - \sin\theta y(t), \sin\theta x(t) + \cos\theta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel θ gedrehte Kurve.
Da D_θ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\theta \circ c(t))' = D_\theta \cdot c'(t)$$

und damit

$$\left\| (D_\theta \circ c(t))' \right\| = \left\| D_\theta \cdot c' \right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\| c' \right\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen. □

• Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

■

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

2.2.3 Lemma — Geraden sind am kürzesten.

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

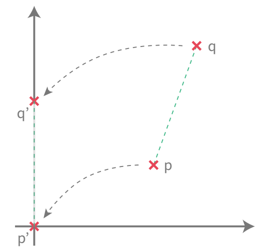

Abbildung 2.4: Verschiebung von p und q auf p' und q'.

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen **??** ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) \coloneqq (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

$$L_{\text{eukl}}(c) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt \geq \int_a^b |y'|dt \geq \int_a^b y'(t)dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy$$
$$= l.$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.
$\Rightarrow$ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{eukl}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ $(\forall t)$, also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment. ■

2.2.4 Definition — Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven.

Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{eukl}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

2.2.5 Satz — "Neuer" metrischer $\mathbb{R}^2$.

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.
Beweis: Direkter Beweis nach **??**.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{eukl}}(p, q) = ||p - q|| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie. ■

Beweis: Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie*.
  Sei
  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$
  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_{\text{eukl}} = d_{\text{eukl}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a+b-t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv.
  Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit
  $$d(q,p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p,q).$$

- *Dreiecksungleichung*.
  Zu zeigen: $d_{\text{eukl}}(p,q) \leq d_{\text{euk}}(p,r) + d_{\text{euk}}(r,q)$ ($\forall p,q,r \in \mathbb{R}^2$).
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:
  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$
  Infimumbildung liefert die Behauptung.

- *Positivität*.
  Zu zeigen: $d_{\text{eukl}}(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{eukl}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{eukl}}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_{\text{eukl}} = ||p-q|| = 0$.

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

■

2.3 *Sphärische Geometrie*

2.3.1 Beispiel — 2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum.

Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S^2_{\mathbb{R}} := \{x \in R^3 : ||x|| = R\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a,b] \to S^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die *sphärische Länge* durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p,q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S^2_{\mathbb{R}})).$$

2.3.2 Lemma — Kurvenlängen rotationsinvariant.
Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S^2_{\mathbb{R}}$ ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.
Beweis: Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S^2_{\mathbb{R}}) = S^2_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S^2_{\mathbb{R}}$ auch das Bild $D \circ c \subset S^2_{\mathbb{R}}$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_s(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

■

2.3.3 Lemma — Großkreise sind am kürzesten.
Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S^2_{\mathbb{R}}$ sind Großkreise, also Schnitte von $S^2_{\mathbb{R}}$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.
Beweis: Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S^2_{\mathbb{R}}$. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den “Nordpol” — und q auf $q' = (0, y, z) \in S^2_{\mathbb{R}}$ abbildet. Nach Lemma **??** und der Definition ist $d_s(p,q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels “geographischer Koordinaten” φ und θ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin\theta(t)\cos\varphi(t),\ \sin\theta(t)\sin\varphi(t),\ \cos\theta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\theta'\cos\theta\cos\varphi - \varphi'\sin\theta\sin\varphi,\ \theta'\cos\theta\sin\varphi + \varphi'\sin\theta\cos\varphi,\ -\theta'\sin\theta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta)$$

und somit

$$\begin{aligned} L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta} dt \geq R\int_a^b \sqrt{\theta'^2(t)} dt \\ &= R\int_a^b |\theta'(t)| dt \geq R\int_a^b \theta'(t) dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = R(\theta(b) - \theta(a)) \end{aligned}$$

mit oBdA $\theta(b) \geq \theta(a)$.
Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis. ■

2.3.4 Satz — Infimums- & Winkelmetrik isometrisch.
$(S^2_{\mathbb{R}}, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_{\mathbb{R}}, R \cdot d_W)$.
Beweis: Analog zu (R^2, d_{eukl}). ■

Wozu sind Metriken gut?

3.1 Einleitendes

3.1.1 In Analysis I.

In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

3.1.2 Analogie zu metrischen Räumen.

Sei (X, d) metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt *konvergent*, wenn

$$\exists\, x \in X \forall \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) : d(x_n, x) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\epsilon(x)$ ($\forall n \geq N$).

3.1.3 Erinnerung — Stetigkeit.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls $\forall s > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert und $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$ falls $|t - t_0| < \delta$.
f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

3.1.4 Verallgemeinerung.

Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y).
Eine Abbildung

$$f : X \to Y$$

heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B^Y_\epsilon(f(x))$ falls $x \in B^X_\delta(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

3.1.5 Bemerkung.

$f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

4.1 Toplogischer Räume

4.1.1 Definition — Topologischer Raum.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \quad (= \text{Menge aller Teilmengen von } X),$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt *Topologie* von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X.
$A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

4.1.2 Beispiel — Extrembeispiele.

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die *triviale Topologie*.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die *diskrete Topologie*.

4.1.3 Beispiel — Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s\,\text{(standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{ Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.

Offenes Intervall:
$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

4.1.4 Beispiel — Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$.

$X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus,\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
(Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.)
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1)\cdots(X - a_n)\\ \mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom}\\ \varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1\end{aligned}$$

4.1.5 Definition — Metrischer → topologischer Raum.
Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:
$U \subset X$ ist *d-offen* $\Longleftrightarrow$ $\forall p \in U\ \exists\, \epsilon = \epsilon(p) > 0$, sodass der offene Ball $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ um p mit Radius ϵ ganz in U liegt: $B_\epsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d *induzierte Topologie*[1].

[1] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

4.1.6 Definition — Basis.
Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

<u>Beispiel</u>: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

4.1.7 Beispiel — Komplexität einer Topologie.
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x - y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie):
Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

4.1.8 Bemerkung — Gleichheit von Topologien.
Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\epsilon'}(x) \subset B^d_\epsilon(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

4.1.9 Beispiel — Bälle und Würfel sind gleich.

$X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

4.1.10 Beispiel — asd.

(X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \leq$ ($\forall x, y$), insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y \in X} d'(x,y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

4.1.11 Definition — Umgebung.

$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

4.1.12 Definition — Innerer Punkt.

Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein *innerer Punkt* von A (bzw. äußerer Punkt von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist.
Das *Innere* von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

4.1.13 Definition — Abgeschlossene Hülle.

Die *abgeschlossene Hülle* von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die <u>nicht</u> äußere Punkte sind.
<u>Beispiel</u>: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.