

Elementare Geometrie

Mitschrieb, gehört bei Prof. Leuzinger im WS17/18

Jens Ochsenmeier

Inhaltsverzeichnis

1	Einstieg — Metrische Räume	5
1.1	Vorbemerkungen	5
1.2	Definitionen zu metrischen Räumen	5
1.3	Beispiele zu metrischen Räumen	6
2	Längenmetriken	9
2.1	Graphen — Definitionen	9
2.2	Euklidische Metrik	10
2.3	Sphärische Geometrie	13
3	Wozu sind Metriken gut?	17
3.1	Einleitendes	17

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die seitlich abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

1.1.1 Kartographieproblem.

Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

1.2.1 Definition — Metrik.

Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist eine *Metrik* (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität:** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2.2 Definition — Metrischer Raum.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

1.2.3 Definition — Pseudometrik.

Eine *Pseudometrik* erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

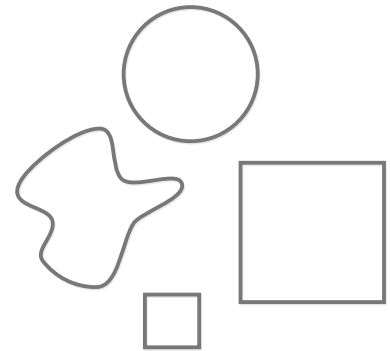


Abbildung 1.1: Diese Objekte sind "topologisch äquivalent" (später mehr zur genauen Definition), aus Sicht der metrischen Geometrie allerdings nicht.

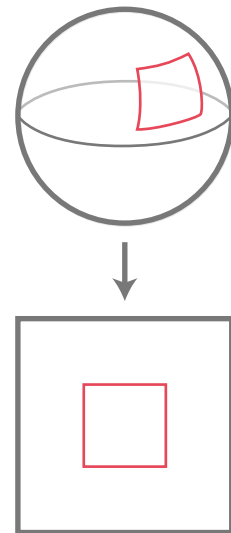


Abbildung 1.2: Die Projektion einer Fläche auf einer Kugel auf Papier — nicht längentreu möglich!

1.2.4 Definition — Abgeschlossener r -Ball um x .

Eine Teilmenge $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossener r -Ball um x* .

1.2.5 Definition — Abstandserhaltende Abbildung.

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *abstandserhaltend*, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

1.2.6 Definition — Isometrie.

Eine *Isometrie* ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen**1.3.1 Beispiel — Triviale Metrik.**

Menge X , $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \rightsquigarrow$ jede Menge lässt sich zu einer Metrik verwursten.

1.3.2 Beispiel — Simple Metriken.

Sei $X = \mathbb{R}$.

- $d_1(s, t) := |s - t|$ ist Metrik.
- $d_2(s, t) := \log(|s - t| + 1)$ ist Metrik.

1.3.3 Beispiel — Standardmetrik.

$X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = ||x - y||$ ist die (euklidische) Standardmetrik auf dem \mathbb{R}^n . Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung¹.

Bemerkung (aus LA II): Isometrien von (\mathbb{R}^n, d_e) sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Anmerkung: Wenn $d(x, y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik.

¹ **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

1.3.4 Beispiel — Maximumsmetrik.

$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ist Metrik.

1.3.5 Beispiel — 1.3.3 und 1.3.4 allgemein: Norm.

V sei \mathbb{R} -Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit:** $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität:** $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung:** $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) := ||v - w||$.

1.3.6 Beispiel — Einheitssphären.

$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ ist die n -te *Einheitssphäre*.

Auf dieser ist mit $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$ die *Winkel-Metrik* definiert.

1.3.7 Beispiel — Hamming-Metrik.

Es ist \mathbb{F}_2 der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n . Die *Hamming-Metrik* ist definiert als

$$d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

Längenmetriken

2.1 Graphen — Definitionen

2.1.1 Definition — Graph.

Ein Graph $G = (E, K)$ besteht aus einer Ecken-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ ($u, v \in E$), genannt *Kanten*.

2.1.2 Definition — Erreichbarkeit.

Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist *erreichbar* von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

2.1.3 Definition — Zusammenhängend.

$G = (E, K)$ heißt *zusammenhängend*, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

2.1.4 Beispiel — Wortmetrik.

Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \quad (2.1)$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.

Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Sigma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

2.1.5 Definition — Wortmetrik.

$$d_S(g, k) := |g^{-1}k|$$

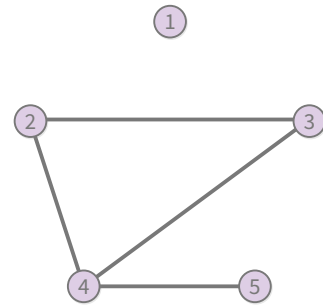


Abbildung 2.1: Ein einfacher Graph. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da die Ecke 1 nicht von den anderen Ecken aus erreicht werden kann.

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g, h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

2.1.6 Definition — Cayley-Graph.

Der *Cayley-Graph* $\text{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die Graphen-Metrik auf $\text{Cay}(\Sigma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

2.2.1 Beispiel — Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 als Standardmetrik.

Sei

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare¹ Kurve.

Die *euklidische Länge* von C ist

$$\begin{aligned} L_{\text{eukl}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad (\text{via Polynom-Approximation}) \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{eukl}}(g)} = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d_e(p, q)}.$$

2.2.2 Lemma — Unabhängigkeit von L_{eukl} .

1. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.

¹ **Hinweis:** Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞ -differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

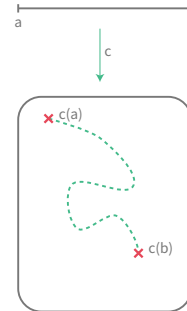


Abbildung 2.2: c bildet ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ auf eine Kurve im \mathbb{R}^2 ab.

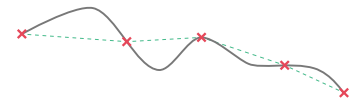


Abbildung 2.3: Durch *Polynom-Approximation* wird eine Kurve sukzessive angenähert.

2. $L_{\text{eukl}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis:

1. Zu zeigen: Für $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus² $t : [c, d] \rightarrow [a, b], s \mapsto t(s)$ gilt:

$$L_{\text{eukl}}(c(t(s))) = L_{\text{eukl}}(c(t)).$$

² **Diffeomorphismus:** Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.

Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von p verschobene Kurve. Es gilt

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \|(T_p \circ c)'\| dt = \int_a^b \|c'\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen.

□

- Drehung.

Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\theta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos \theta x(t) - \sin \theta y(t), \sin \theta x(t) + \cos \theta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel θ gedrehte Kurve.

Da D_θ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\theta \circ c(t))' = D_\theta \cdot c'(t)$$

und damit

$$\|(D_\theta \circ c(t))'\| = \|D_\theta \cdot c'\| \stackrel{\text{orth.}}{=} \|c'\|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen.

□

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

■

2.2.3 Lemma — Geraden sind am kürzesten.

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in \mathbb{R}^2 sind genau die Geradensegmente.

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen 2.2.2 ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.

Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q' . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{eukl}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q' .

⇒ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.

Gilt für eine Kurve c , dass $L_{\text{eukl}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0$ ($\forall t$), also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist \tilde{c} auch (parametrisiertes) Geradensegment. ■

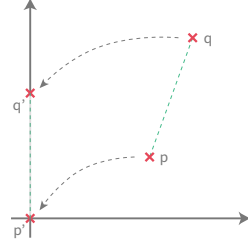


Abbildung 2.4: Verschiebung von p und q auf p' und q' .

2.2.4 Definition — Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 -Kurven.

Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q . Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{eukl}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

2.2.5 Satz — “Neuer” metrischer \mathbb{R}^2 .

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu (\mathbb{R}^2, d_e) .

Beweis: Direkter Beweis nach 2.2.3.

Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{eukl}}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie. ■

Beweis: Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*

Sei

$$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.

Es ist $d_{\text{eukl}} = d_{\text{eukl}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv.

Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit

$$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

- *Dreiecksungleichung.*

Zu zeigen: $d_{\text{eukl}}(p, q) \leq d_{\text{eukl}}(p, r) + d_{\text{eukl}}(r, q)$ ($\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2$).

Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q :

$$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$

Infimumbildung liefert die Behauptung.

- *Positivität.*

Zu zeigen: $d_{\text{eukl}}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

– Falls $p = q$.

Die konstante Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat

$$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{eukl}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{eukl}}(p, p) = 0.$$

– Falls $p \neq q$.

Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment³

$$t \mapsto (1 - t)p + tq$$

mit der Länge $d_{\text{eukl}} = \|p - q\| = 0$.

³ **Anmerkung:** nur an dieser Stelle wird die Geometrie des \mathbb{R}^2 benötigt!



2.3 Sphärische Geometrie

2.3.1 Beispiel — 2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum.

Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in \mathbb{R}^3 ist

$$S_{\mathbb{R}}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \rightarrow S_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{R}^3, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die *sphärische Länge* durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p, q) := \inf L_S(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S_{\mathbb{R}}^2)).$$

2.3.2 Lemma — Kurvenlängen rotationsinvariant.

Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf $S_{\mathbb{R}}^2$ ist invariant unter Rotationen von \mathbb{R}^2 .

Beweis: Eine orthogonale Matrix im \mathbb{R}^2 ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, ist $D(S_{\mathbb{R}}^2) = S_{\mathbb{R}}^2$. Insbesondere ist für eine Kurve c in $S_{\mathbb{R}}^2$ auch das Bild $D \circ c \subset S_{\mathbb{R}}^2$.

Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

$$\begin{aligned} L_S(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

■

2.3.3 Lemma — Großkreise sind am kürzesten.

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in $S_{\mathbb{R}}^2$ sind Großkreise, also Schnitte von $S_{\mathbb{R}}^2$ und zweidimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^3 .

Beweis: Seien zwei beliebige Punkte p, q auf $S_{\mathbb{R}}^2$. Dann finden wir eine Rotation von \mathbb{R}^3 , die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den “Nordpol” — und q auf $q' = (0, y, z) \in S_{\mathbb{R}}^2$ abbildet. Nach Lemma 2.3.2 und der Definition ist $d_s(p, q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.

Idee: Mittels “geographischer Koordinaten” φ und θ . Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

$$c(t) = R(\sin \theta(t) \cos \varphi(t), \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \cos \theta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\theta' \cos \theta \cos \varphi - \varphi' \sin \theta \sin \varphi, \theta' \cos \theta \sin \varphi + \varphi' \sin \theta \cos \varphi, -\theta' \sin \theta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta)$$

und somit

$$\begin{aligned} L_S(c) &= R \int_a^b \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta} dt \geq R \int_a^b \sqrt{\theta'^2} dt \\ &= R \int_a^b |\theta'(t)| dt \geq R \int_a^b \theta'(t) dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = R(\theta(b) - \theta(a)) \end{aligned}$$

mit oBdA $\theta(b) \geq \theta(a)$.

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.

Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant = $\varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis. ■

2.3.4 Satz — Infimums- & Winkelmetrik isometrisch.

$(S_{\mathbb{R}}^2, d_s)$ ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S_{\mathbb{R}}^2, R \cdot d_W)$.

Beweis: Analog zu (R^2, d_{eukl}) . ■

Wozu sind Metriken gut?

3.1 Einleitendes

3.1.1 In Analysis I.

In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

3.1.2 Analogie zu metrischen Räumen.

Sei (X, d) metrischer Raum.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X heißt *konvergent*, wenn

$$\exists x \in X \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : d(x_n, x) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\epsilon(x)$ $(\forall n \geq N)$.