Metrische Räume

Norm

- **Definition**: Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
  - *Definitheit*: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  - *Absolute Homogenität*: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
  - *Dreiecksungleichung*: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

  ($\mathbb{R}$-Vektorraum V)

Metrik

- **Definition**: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Menge X) sodass $\forall x, y, z \in X$:
  - *Positivität*: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - *Symmetrie*: $d(x, y) = d(y, x)$
  - *Dreiecksungleichung*: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- **Wichtige Metriken**:
  - *Triviale Metrik*: $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
  - *Euklidische Metrik*: $X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$
  - *Induzierte Metrik*: $d(v, w) := \|v - w\|$ (Norm $\|\cdot\|$)
  - *Winkelmetrik*: $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$
- **Pseudometrik**: Metrik, aber $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt nicht
- **Metrischer Raum**: (X, d) (Menge X, Metrik d auf X)

Konstruktionen

- **Einheitssphäre**: $S_1^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ n-te Einheitssphäre
- **Abgeschlossener Ball**: abgeschlossener r-Ball um x

  $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$
- **Offener Ball**: offener r-Ball um x

  $B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$
- **Abstandserhaltende Abbildung**: $f : X \to Y$ sodass

  $\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$.

  (metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y))
- **Isometrie**: bijektive abstandserhaltende Abbildung

  $\to$ X, Y isometrisch $\Leftrightarrow$ $\exists$ Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

Längenmetriken

Graphen

- **Graph**: $G = (E, K)$
  - Eckenmenge E
  - Kantenmenge $K \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v \in E\}$
- **Erreichbarkeit**: $p, q \in E$ erreichbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Kantenzug zwischen p und q
- **Zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ alle Ecken von beliebiger, fester Ecke aus erreichbar

  $\to$ $d(p, q)$ = kürzester Kantenzug zwischen p und q definiert Metrik

Euklidische Metrik

- **Kurvenmenge**: $\Omega_{pq}(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ Menge der stetig db. Kurven zwischen p und q
- **Euklidische Länge**: $L_{\text{euk}}(c) = \int_a^b \left\|c'(t)\right\| dt$ ($c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$)
  - unabhängig von Kurvenparametrisierung
  - invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen
- **Euklidische Metrik** auf $\mathbb{R}^2$-Kurven: $d_{\text{euk}}(p, q) := \inf L_{\text{euk}}(c)$

  ($p, q \in \mathbb{R}^2$, $c \in$ Menge der stetig differenzierbaren Kurven zwischen p und q)

  $\to$ $(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) = (\mathbb{R}^2, d_e)$

Sphärische Geometrie

- **Sphärische Länge**: $L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$

  (für $c : [a, b] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$)
  - invariant unter $\mathbb{R}^2$-Rotationen
- **Großkreis**: Schnitt von S_R^2 und und 2-dimensionalen UVR des $\mathbb{R}^2$
- **Sphärenmetrik**: $d_S(p, q) := \inf L_s(c)$ ($c \in \Omega_{pq}(S_R^2)$)
  - Großkreise sind kürzeste Verbindungkurven zwischen Punkten in S_R^2
  - (S_R^2, D_S) ist metrischer Raum und isometrisch zu $(S_R^2, R \cdot d_W)$

Grundbegriffe allg. Topologie

Topologische Räume

- **Topologie**: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (Menge X) sodass
  - $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
  - Durchschnitte *endlich* & Vereinigungen *beliebig* vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$
- **Topologischer Raum**: $(X, \mathcal{O})$
  - *Offene Teilmengen* von X: Elemente von $\mathcal{O}$
  - *Abgeschlossene Teilmengen* $A \subset X$: $X \setminus A$ offen
- **Wichtige Topologien**:
  - *Triviale Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$
  - *Diskrete Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
  - *Standard-Topologie* auf $\mathbb{R}$: $\mathcal{O}_s := \{I \subset \mathbb{R} : I =$ Vereinigung offener Intervalle$\}$
  - *Zariski-Topologie*: $\mathcal{O}_Z := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R}$ endlich$\} \cup \{\varnothing\}$
  - *Induzierte Topologie* (Metrik):
    - $U \subset X$ *d-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U\ \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0 : B_\varepsilon(p) \subset U$
    - d-offene Mengen bilden *induzierte Topologie*
  - *Teilraum-Topologie*: $\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X : U = V \cap Y\}$

    (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, Teilmenge $Y \subseteq X$)
  - *Produkttopologie*: Topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$

    $W \subseteq X \times Y$ *offen* in *Produkttopologie* $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y, sodass $U \times V \subseteq W$
  - *Quotiententopologie*: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$ kanonische Projektion

    $\to$ $U \subset X/\sim$ ist offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
- **Basis** für Topologie $\mathcal{O}$: $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt

  $V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}$
- **Umgebung** $U \subset X$ von $A \subset X$, falls $\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U$

  (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$)
- **Innerer, äußerer Punkt** $p \in X$ von $A \subset X$, falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist

  $\to$ *Inneres* von $A \subset X$: Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A
- **Abgeschlossene Hülle** von A: Menge $\overline{A} \subset X$, die *nicht* äußere Punkte sind
- **Triangulierbar**: falls $\exists$ Simplizialkomplex K und Homö $K \to X$
  - $\chi(X) := \chi(K)$

Hausdorffsches Trennungsaxiom

- **Hausdorffsch** (top. Raum $(X, \mathcal{O})$): $\forall p \neq q \in X\ \exists\, U \ni p, V \ni q : U \cap V = \varnothing$

  (*Umgebungen* U, V)
- **Hausdorffsche Räume**:
  - Metrische Räume (über Dreiecks-Ugl.)
  - $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$, weil $\mathcal{O}_s$ von Metrik induziert wird
  - Teilraum von Hausdorff-Raum
  - Produkt von Hausdorff-Räumen bzgl. Produkttopologie

Stetigkeit

- **Stetigkeit** (zwischen top. Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$): $f : X \to Y$ stetig falls Urbilder offener Mengen in Y offen sind in X
- **Homöomorphismus** (zw. top. Räumen): $f : X \to Y$ bijektiv mit f, f^{-1} stetig

  $\to$ X, Y *homöomorph*, falls $\exists$ Homö $f : X \to Y$ (schreibe $X \cong Y$)
  - *Homöomorphismengruppe*: Identität, Verkettungen, Inverse von Homö sind Homö

    $\to$ Gruppe
- **Wichtige Homöomorphismen**:
  - $[0, 1] \cong [a, b]$ ($a < b \in \mathbb{R}$)
  - $S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n$ (also S^n ohne "Nordpol")

Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend, falls $\varnothing$ und X die einzigen offen-abgeschlossenen Teilmengen sind

  $\Leftrightarrow$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Mengen
- **Eigenschaften**:
  - A zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ ist zusammenhängend
  - A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend

Zusammenhangskomponente

- **Definition**: $Z(x)$ = Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen, die x enthalten
- **Eigenschaften**:
  - $Z(X)$ = disjunkte Zerlegung von X
  - Elemente von $Z(X)$ = zusammenhängend

Weg-Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ weg-zusammenhängend
  $\Leftrightarrow \forall p, q \in X \; \exists$ Weg $\alpha : [0,1] \to X : \alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
- **Eigenschaften**:
  - X weg-zusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend
  - Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind es auch
  - Ein (nicht) zusammenhängender Raum kann nur zu einem (nicht) zusammenhängenden Raum homöomorph sein

Kompaktheit

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ kompakt $\Leftrightarrow$ jede offene X-Überdeckung besitzt *endliche* Teilüberdeckung:
  $$X = \bigcup_{i \in I} U_i,\; U_i \text{ offen } \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k \in I : X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$
- **Lokal kompakt**: Jeder Punkt von X besitzt kompakte Umgebung
- **Eigenschaften**:
  - Man kann von lokale auf globale Eigenschaften schließen
  - $\to$ X kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt $\Rightarrow f$ beschränkt
  - Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt
  - Abgeschlossene Teilräume kompakter Räume sind kompakt
  - Produkte kompakter Räume sind kompakt
  - Kompakte Mengen in Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen

Spezielle Topologien

Topologische Mannigfaltigkeit

- **Definition**: topologischer Raum M mit
  1. *lokal euklidisch*: $\forall p \in M \; \exists$ offene Umgebung U von p und Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit festem n
     $\to$ **Karte** (φ, U)
     $\to$ **Atlas** $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ (mit $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$)
  2. M ist hausdorffsch
  3. M-Topologie besitzt abzählbare Basis
- **Eigenschaften**:
  - **Dimension** der Mannigfaltigkeit = n
  - **Geschlecht** der Mannigfaltigkeit = Anzahl
  - Offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit sind auch Mannigfaltigkeiten
- **Produkt-Mannigfaltigkeit**: Produkt zweier MF ist auch MF
  - Dimension Produkt-MF = Summe der Dimensionen der beiden MF

Differenzierbare Mannigfaltigkeit

- **Kartenwechsel**: Homöomorphismus
  $$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\psi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$
  (topologische MF $M, p \in M$)
- C^∞**-Atlas** $\mathcal{A}$ von M: alle möglichen Kartenwechsel sind C^∞-Abbildungen ($\mathbb{R}^n$)
- C^∞**-Struktur**: maximaler C^∞-Atlas für topologische MF
- **Differenzierbare Mannigfaltigkeit**: topologische MF mit C^∞-Struktur
  - *orientierbar*, falls $\exists$ Atlas S, sodass alle Kartenwechsel positive Funktionaldeterminante haben
- **Punkt-Differenzierbarkeit**: $F : M^m \to N^n$ differenzierbar in $p \in M$, falls
  $$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n} \text{ ist } C^\infty \text{ in } \varphi(p)$$
  (M^m, N^n d-bare M; F stetig; $(U, \varphi), (V, \psi)$ Karten um p und $F(p)$)
- **Differenzierbarkeit**: F differenzierbar, falls F in allen $p \in M$ d-bar ist
- **Diffeomorphismus** zwischen dMF: F bijektiv, F d-bar, F^{-1} d-bar
- **Fläche**: 2-dimensionale MF
- **Produkt-Mannigfaltigkeit**: M^m, N^n dMF-en $\to$ $M \times N$ ist $(m+n)$-dimensionale dMF
- **Lie-Gruppe**: Gruppe mit C^∞-Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass
  $$G \times G \to G,\; (g, h) \mapsto gh^{-1} \quad \text{in } C^\infty \text{ ist}$$
  - Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind auch Lie-Gruppen

Simplizialkomplexe

- **Simplex** (k-dimensional): konvexe Hülle von $k+1$ Punkten in $\mathbb{R}^n$:
  $$s(v_0, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$
  ($v_0 - v_1, \dots, v_0 - v_k$ linear unabhängig)
- **Teilsimplex, Seite**: konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, \dots, v_k\}$
- **Simplizialkomplex**: endliche Menge K von Simplices in $\mathbb{R}^n$, sodass
  1. Für jeden Simplex enthält K auch alle Teilsimplices
  2. Durchschnitt zweier Simplices ist $\varnothing$ oder gemeinsamer Teilsimplex
  - *Dimension*: maximale Dimension seiner Simplices
  - *Euler-Charakteristik*: $\chi(K) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha_i$ ($\alpha_i = \#i$-Simplices in K)
- **Endlicher Graph**: endlicher, 0- oder 1-dimensionaler Simplizialkomplex
  - *zusammenhängend*: $\forall p, p' \in G \; \exists\, p = p_0, p_1, \dots, p_n = p'$, sodass p_{i-1} und p_i durch Kante verbunden sind
  - *Baum*: zusammenhängender Graph T, sodass für jeden 1-Simplex $s \in T$: $T \setminus \mathring{s}$ ist nicht zusammenhängend ($\mathring{s}$ = Kante ohne Endpunkte, offener 1-Simplex)
- **Euler-Charakteristik**: $\chi(G) = \#$Ecken $- \#$Kanten
  - *Baum*: $\chi(T) = 1$
  - *Zusammenhängender Graph*: $\chi(G) = 1 - n$ ($n = \#$ Kanten, die man aus G entfernen kann, sodass G zusammenhängend bleibt)
- **Spannender Baum** (von zusammenhängendem Graph): Komplement aller Kanten, die man entfernen kann, sodass G zusammenhängend bleibt
- **Ebener Graph**: realisiert durch Punkte und Geraden in $\mathbb{R}^2$, sodass Kanten sich nicht schneiden
  - *Seiten*: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$
- **Planarer Graph**: Graph, der isomorph zu einem ebenen Graphen ist
- **Euler-Formel**: für zusammenhängende, ebene Graphen G gilt:
  $$\chi(G) = e(G) - k(G) + s(G) = 2$$
- **Polyeder**: $P \subset \mathbb{R}^3$ mit
  1. P ist Durchschnitt endlich vieler affiner Halbräume von $\mathbb{R}^3$
     (affine Halbräume gegeben durch $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i, i = 1, \dots, k$)
  2. P ist beschränkt und nicht in einer Ebene enthalten
  - *Rand*: Gegeben durch (Seiten-)Flächen, Kanten und Ecken
  - *1-Skelett*: Menge der Ecken und Kanten, ist Graph in $\mathbb{R}^3$
  - *Schlegel-Diagramm*: Projektion von Punkt nahe bei einem Seitenmittelpunkt auf geeignete Ebene; 1-Skelett $\to$ ebener Graph
  - *Eulersche Polyeder-Formel*: $e(P) - k(P) - s(P) = 2$
  - *regulär*: falls
    1. alle Seitenflächen kongruente reguläre n-Ecke sind und
    2. in jeder Ecke m solcher n-Ecke zusammentreffen

Verkleben

- **Verklebung**: X, Y topologische Räume, $A \subset X$ Teilraum, $f : A \to Y$. Äquivalenzrelation auf $X \cup Y$ via f:
  $$x\, x' \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} & x = x' \\ \text{oder} & f(x) = x' \;\; (x \in A) \\ \text{oder} & f(x') = x \;\; (x' \in A) \\ \text{oder} & f(x) = f(x') \;\; (x, x' \in A) \end{cases}$$
  $\Rightarrow$ Quotientenraum $X \cup_f Y = X \cup Y / \sim$ ist *Verklebung* von X an Y via f
- **Selbstverklebung**: Topologischer Raum X, Teilraum $A \subset X$, $f : A \to X$, $X_f := X / \sim$ mit Äquivalenzrelation wie oben

Flächengeometrie

Reguläre $\mathbb{R}^3$-Flächen

- **Reguläre Fläche**: $S \subset \mathbb{R}^3$ (mit Teilraum-Topologie von $\mathbb{R}^3$), falls $\forall p \in S$ eine Umgebung V von p und eine Abbildung
  $$F : \underset{\text{offen}}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \underset{\text{offene TM von S}}{V \cap S} \subset \mathbb{R}^3$$
  $$(u, v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$
  existiert, sodass
  1. F ist differenzierbarer Homöomorphismus
  2. das Differenzial (Jacobi-Matrix) von F,
     $\mathrm{d}F_q : \mathbb{R}^2 \supseteq T_q U \to T_{F(q)} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$
     ist injektiv (hat Rang 2) ($\forall q \in U$)
- **Lokale Parametrisierung** von reg. Fläche S: F von der regulären Fläche
- **Vektorprodukt**: $a \wedge b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
  - $(a \wedge b) \perp a,\; (a \wedge b) \perp b$
  - $\|a \wedge b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \alpha$
- **Tangentialraum** in $p \in \mathbb{R}^3$: affiner Unterraum $T_p \mathbb{R}^3 = \{p\} \times \mathbb{R}^3$
- **Tangentialebene** für $p = x(u,v) \in S$ (reguläre Fläche):
  $$T_p S = \mathrm{d}x_{(u,v)}(T_{(u,v)} \mathbb{R}^2) = \{p\} \times [x_u(u,v), x_v(u,v)] \subset T_p \mathbb{R}^3$$

Erste Fundamentalform

- **Erste Fundamentalform** einer regulären Fläche S:
  $\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}$ mit

$$E(u,v) = \langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle$$
$$F(u,v) = \langle x_u(u,v), x_v(u,v)\rangle$$
$$G(u,v) = \langle x_v(u,v), x_v(u,v)\rangle$$

- **Längen**: Flächenkurve $x : [\alpha,\beta] \ni t \mapsto x(u(t), v(t)) =: c(t) \in S$.
$$L(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{E(u,v)(u')^2 + F(u,v)2u'v' + G(u,v)(v')^2}\mathrm{d}t$$
- **Winkel**: Flächenkurven
$$c_1 : (-\varepsilon,\varepsilon) \ni t \mapsto (u_1(t), v_1(t)) \in S,$$
$$c_2 : (-\varepsilon,\varepsilon) \ni t \mapsto (u_2(t), v_2(t)) \in S,$$
$c_1(0) = c_2(0)$. $\cos\measuredangle(c_1'(0), c_2'(0)) =$
$$\frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + v_1'u_2') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1^{2\prime} + 2Fu_1'v_1' + Gv_1^{2\prime}}\sqrt{Eu_2^{2\prime} + 2Fu_2'v_2' + Gv_2^{2\prime}}}$$
- **Flächeninhalt** von $x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^2$:
$$A(x(U)) = \iint_U \sqrt{\det \mathrm{I}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(Lokale) Flächenisometrien

- **Reguläre Fläche = metrischer Raum**: Längenmetrik auf S durch
$$d_S(p,q) = \inf L(c)$$
- **(Flächen-)Isometrie** $f : S \to \tilde{S}$, falls
  1. f ist Diffeomorphismus und
  2. $\forall(c : I \to S) : L(f \circ c) = L(c)$ ("f ist längenerhaltend")
- **Lokale Isometrie** $f : S \to \tilde{S}$, falls $\forall p \in S\ \exists$ offene Umgebungen A von p und B von $f(p)$, sodass f Isometrie von A nach B ist
- **Kriterium lokale Isometrie**: $x : U \to x(U) \subset S, \tilde{x} : U \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ sodass
$$\forall(u,v) \in U : \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{smallmatrix}\right)(u,v),$$
so sind $x(U)$ und $\tilde{x}(U)$ isometrisch

Zweite Fundamentalform

- **Normalenvektor**: für Parametrisierung $x : U \ni (u,v) \mapsto x(u,v) \in S$
$$n(p) = n(x(u,v)) = n(u,v) = \frac{x_u(u,v) \wedge x_v(u,v)}{\|x_u(u,v) \wedge x_v(u,v)\|}$$
ist Einheitsvektor senkrecht zu T_pS ($\forall p \in x(U) \subset S$)
- **Zweite Fundamentalform** für Parametrisierung $x : U \to S$:
$\left(\begin{smallmatrix} L(u,v) & M(u,v) \\ M(u,v) & N(u,v) \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} \langle x_{uu},n\rangle & \langle x_{uv},n\rangle \\ \langle x_{vu},n\rangle & \langle x_{vv},n\rangle \end{smallmatrix}\right)$

Gauß-Krümmung

- **Gauß-Krümmung**: $K : S \ni p \mapsto K(p) = \frac{\det \mathrm{II}_p}{\det \mathrm{I}_p}$
  - K ist Größe der inneren Geometrie von S
- **Bertrand-Puiseux** ($p \in S$): Für hinreichend kleine $r > 0$ ist
$$S_r(p) = \{q \in S : d(p,q) = r\}$$
eine geschlossene, d-bare Kurve, Länge $L(S_r(p))$. Dann gilt:
$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(S_r(p)))$$

Gauß-Bonnet — lokal

- **Kovariante Ableitung** von a nach u:
$$D_u a = a_u - \langle n, a_u\rangle\, n \ \ (= a_u + \langle n_u, a\rangle\, n)$$
(lokale Parametrisierung $x : U \to S$, tangentiales Vektorfeld $a : U \to \mathbb{R}^3$ auf S)
$\Rightarrow$ Komponente von a_u in Tangentialrichtung
- **Geodätische Krümmung** $\kappa_g(s)$: Krümmung der in Tangentialebene projizierten Kurve
$$c''(s) \underset{c''\perp c'}{=} 0 \cdot c'(s) + \kappa_g(s)(n(s) \wedge c'(s)) + \alpha(s)n(s)$$
- **Satz von Gauß-Bonnet — lokal**:
$$\int_{\delta G} \kappa_g(s)\mathrm{d}s + \iint_G K\mathrm{d}A = 2\pi$$
mit
  1. S reguläre Fläche
  2. $x : U \to S$ lokale Parametrisierung
  3. $G \subseteq x(U) \subset S$ einfach zusammenhängendes Gebiet mit d-barem Rand δG
  4. $s \mapsto (u(s), v(s))$ beschreibe $x^{-1}(\delta G) \subset U$
- **Geodätische**: Flächenkurve mit $\kappa_g = 0$ ("Gerade" auf krummer Fläche)

Gauß-Bonnet — mit Ecken

$$\iint_G K\mathrm{d}A + \int_{\delta G} \kappa_g \mathrm{d}s = \pi(2-m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i$$
(Ecken $1, \ldots, m$ mit Innenwinkel α_i)

Gauß-Bonnet — global

- **Klassifikationssatz für 2-MF**: Kompakte randlose 2-MF ist homöomorph zu
  1. einer Sphäre S^2 oder
  2. einer zusammenhängenden Summe von g Tori (falls M orientierbar) oder
  3. einer zusammenhängenden Summe von g projektiven Ebenen (sonst)
- **Geschlecht**: g von oben
- **Euler-Charakteristik** von M-Triangulierung:
$$\chi_T(M) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}$$
  - $\chi(M) = \chi_T(M)$ unabhängig von Triangulierung
  - $\chi_T(M) = 2 - 2g$
- **Globaler Satz von Gauß-Bonnet**:
$$\iint_S K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(S)$$
($S \subset \mathbb{R}^3$ kompakte randlose orientierbare Fläche)

Hyperbolische Ebene

Obere Halbebene

- **Definition**: $H^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$
- **Punkte**: Elemente in H^2
- **Geraden**:
  - Halbkreise mit Zentrum auf x_1-Achse und
  - Parallelen zur x_2-Achse

Riemannsche Metrik

- **Tangentialraum**: T_pM = Menge von Äquivalenzklassen von d-baren Kurven durch $p \in M$
- **Riemannsche Metrik** auf d-barer MF: Familie von Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ auf T_pM, die d-bar von p abhängt

Ebene hyperbolische Geometrie

- **Modell**: $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ mit hyperbolischer riemannscher Metrik $g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$
- **Hyperbolische Länge** (mit $c(t) = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$):
$$L_h(c) = \int_a^b \left\|c'\right\|_H \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \frac{\left|z'(t)\right|}{y(t)}$$
- **Möbius-Transformation** von $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$:
$$T_A : H^2 \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in H^2$$
  - hyperbolische Länge einer d-baren H^2-Kurve ist invariant unter MT
- **Hyperbolische Längenmetrik**: (Ω_{pq} stückw. db Kurven in H^2 zw p und q)
$$d_h(p,q) = \inf_{c\in\Omega} L_k(c)$$
  - (H^2, d_h) ist metrischer Raum
  - Möbius-Transformationen $\{T_A : A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\}$ sind Isom. von (H^2, d_h)
  - (H^2, d_h) ist *homogen*: $\forall p, q \in H^2\ \exists$ Iso $T_A : T_A(p) = q$
  - Streckungen sind Isometrien in H^2 (mit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$)
$$\Rightarrow d_h(z,w) = d_h(\lambda z, \lambda w)$$

Geodätische

- **Geodätische** zwischen Punkten in H^2, d_h: parametrisierte Halbkreise und Geraden orthogonal zur reellen Achse $\Rightarrow$ Halbkreise haben Zentrum auf reeller Achse

$\Rightarrow$ $\forall p, q \in H^2$ können durch eindeutige Geodätische verbunden werden; $d_h(p,q)$ = hyp. Länge dieser Geodätischen

Gauß-Bonnet

- **Hyperbolischer Flächeninhalt** für $A \subset H^2$:
$$\mu(a) = \iint_A \sqrt{\det(g_{ij}(z))}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq x$$
  - Flächeninhalt invariant unter Isometrien (also Möbius-Transformationen)
- **Hyperbolisches Polygon** mit n Seiten: Abgeschlossene Teilmenge von $\overline{H^2} = H^2 \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$
  - *Seiten*: geodätische Segmente, die Polygon begrenzen
  - *Ecken*: Stelle, an der sich genau zwei Seiten schneiden
- **Hyperbolische Winkelmessung**: wie im Euklidischen
- **Gauß-Bonnet**: Flächeninhalt eines hyp. $\triangle$ ist durch Winkel vollständig bestimmt:
$$\mu(\triangle) = \pi - \alpha - \beta - \gamma \leq \pi$$

Krümmung

- **Einheitsscheibe**: $D^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

- *Metrik* auf D^2 mit
  $M : H^2 \ni z \mapsto \frac{\mathrm{i}z + 1}{z + \mathrm{i}} \in D^2$
  durch
  $d_h^*(z, w) = d_h(M^{-1}(z), M^{-1}(w))$

- **Krümmung** für Längenraum:
  $K(p) = \lim_{\rho \to 0} \frac{3}{\pi p^3}(2\pi\rho - L(S_\rho(0)))$
  - Krümmung von D^2 (und damit auch H^2) ist konstant -1 (nutzt $L_{h^*}(S_\rho(0)) = 2\pi \sinh(\rho)$ für hyp. Kreis mit Radius ρ, Zentrum 0)