Metrische Räume

Norm

- **Definition**: Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
  - *Definitheit*: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  - *Absolute Homogenität*: $\|\lambda v\| = |\lambda| * \|v\|$
  - *Dreiecksungleichung*: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

  ($\mathbb{R}$-Vektorraum V)

Metrik

- **Definition**: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Menge X) sodass $\forall x, y, z \in X$:
  - *Positivität*: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - *Symmetrie*: $d(x, y) = d(y, x)$
  - *Dreiecksungleichung*: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- **Wichtige Metriken**:
  - *Triviale Metrik*: $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
  - *Euklidische Metrik*: $X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$
  - *Induzierte Metrik*: $d(v, w) := \|v - w\|$ (Norm $\|\cdot\|$)
  - *Winkelmetrik*: $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$
- **Pseudometrik**: Metrik, aber $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt nicht
- **Metrischer Raum**: (X, d) (Menge X, Metrik d auf X)

Konstruktionen

- **Einheitssphäre**: $S_1^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ n-te Einheitssphäre
- **Abgeschlossener Ball**: abgeschlossener r-Ball um x
  $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$
- **Offener Ball**: offener r-Ball um x
  $B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$
- **Abstandserhaltende Abbildung**: $f : X \to Y$ sodass
  $\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$.
  (metrische Räume $(X, d_X), (Y, d_Y)$)
- **Isometrie**: bijektive abstandserhaltende Abbildung

  → X, Y isometrisch $\Leftrightarrow$ $\exists$ Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

Längenmetriken

Graphen

- **Graph**: $G = (E, K)$
  - Eckenmenge E
  - Kantenmenge $K \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v \in E\}$
- **Erreichbarkeit**: $p, q \in E$ erreichbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Kantenzug zwischen p und q
- **Zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ alle Ecken von beliebiger, fester Ecke aus erreichbar

  → $d(p, q)$ = kürzester Kantenzug zwischen p und q definiert Metrik

Euklidische Metrik

- **Kurvenmenge**: $\Omega_{pq}(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ Menge der stetig db. Kurven zwischen p und q
- **Euklidische Länge**: $L_{\text{euk}}(c) = \int_a^b \left\|c'(t)\right\| \mathrm{d}t$ ($c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$)
  - unabhängig von Kurvenparametrisierung
  - invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen
- **Euklidische Metrik** auf $\mathbb{R}^2$-Kurven: $d_{\text{euk}}(p, q) := \inf L_{\text{euk}}(c)$
  ($p, q \in \mathbb{R}^2$, $c \in$ Menge der stetig differenzierbaren Kurven zwischen p und q)

  → $(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) = (\mathbb{R}^2, d_e)$

Sphärische Geometrie

- **Sphärische Länge**: $L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$
  (für $c : [a, b] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$)
  - invariant unter $\mathbb{R}^2$-Rotationen
- **Großkreis**: Schnitt von S_R^2 und und 2-dimensionalen UVR des $\mathbb{R}^2$
- **Sphärenmetrik**: $d_S(p, q) := \inf L_s(c)$ ($c \in \Omega_{pq}(S_R^2)$)
  - Großkreise sind kürzeste Verbindungkurven zwischen Punkten in S_R^2
  - (S_R^2, D_S) ist metrischer Raum und isometrisch zu $(S_R^2, R * d_W)$

Grundbegriffe allg. Topologie

Topologische Räume

- **Topologie**: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (Menge X) sodass
  - $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
  - Durchschnitte *endlich* & Vereinigungen *beliebig* vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$
- **Topologischer Raum**: $(X, \mathcal{O})$
  - *Offene Teilmengen* von X: Elemente von $\mathcal{O}$
  - *Abgeschlossene Teilmengen* $A \subset X$: $X \setminus A$ offen
- **Wichtige Topologien**:
  - *Triviale Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$
  - *Diskrete Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
  - *Standard-Topologie* auf $\mathbb{R}$: $\mathcal{O}_s := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{ Vereinigung offener Intervalle}\}$
  - *Zariski-Topologie*: $\mathcal{O}_Z := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$
  - *Induzierte Topologie* (Metrik):
    - $U \subset X$ *d-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U\ \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0 : B_\varepsilon(p) \subset U$
    - d-offene Mengen bilden *induzierte Topologie*
  - *Teilraum-Topologie*: $\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X : U = V \cap Y\}$
    (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, Teilmenge $Y \subseteq X$)
  - *Produkttopologie*: Topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$
    $W \subseteq X \times Y$ *offen* in *Produkttopologie* $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y, sodass $U \times V \subseteq W$
  - *Quotiententopologie*: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$ kanonische Projektion

    → $U \subset X/\sim$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
- **Basis** für Topologie $\mathcal{O}$: $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt
  $V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}$
- **Umgebung** $U \subset X$ von $A \subset X$, falls $\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U$
  (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$)
- **Innerer, äußerer Punkt** $p \in X$ von $A \subset X$, falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist

  → *Inneres* von $A \subset X$: Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A
- **Abgeschlossene Hülle** von A: Menge $\overline{A} \subset X$, die *nicht* äußere Punkte sind

Hausdorffsches Trennungsaxiom

- **Hausdorffsch** (top. Raum $(X, \mathcal{O})$): $\forall p \neq q \in X\ \exists\, U \ni p, V \ni q : U \cap V = \varnothing$
  (*Umgebungen* U, V)
- **Hausdorffsche Räume**:
  - Metrische Räume (über Dreiecks-Ugl.)
  - $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$, weil $\mathcal{O}_s$ von Metrik induziert wird
  - Teilraum von Hausdorff-Raum
  - Produkt von Hausdorff-Räumen bzgl. Produkttopologie

Stetigkeit

- **Stetigkeit** (zwischen top. Räumen $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$): $f : X \to Y$ stetig falls Urbilder offener Mengen in Y offen sind in X
- **Homöomorphismus** (zw. top. Räumen): $f : X \to Y$ bijektiv mit f, f^{-1} stetig

  → X, Y *homöomorph*, falls $\exists$ Homö $f : X \to Y$ (schreibe $X \cong Y$)
  - *Homöomorphismengruppe*: Identität, Verkettungen, Inverse von Homö sind Homö
    → Gruppe
- **Wichtige Homöomorphismen**:
  - $[0, 1] \cong [a, b]$ ($a < b \in \mathbb{R}$)
  - $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n$ (also S^n ohne "Nordpol")

Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend, falls $\varnothing$ und X die einzigen offen-abgeschlossenen Teilmengen sind

  $\Leftrightarrow$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Mengen
- **Eigenschaften**:
  - A zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ ist zusammenhängend
  - A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend

Zusammenhangskomponente

- **Definition**: $Z(x)$ = Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen, die x enthalten
- **Eigenschaften**:
  - $Z(X)$ = disjunkte Zerlegung von X
  - Elemente von $Z(X)$ = zusammenhängend

Weg-Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ weg-zusammenhängend
  $\Leftrightarrow \forall p, q \in X \; \exists$ Weg $\alpha : [0,1] \to X : \alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
- **Eigenschaften**:
  - X weg-zusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend
  - Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind es auch
  - Ein (nicht) zusammenhängender Raum kann nur zu einem (nicht) zusammenhängenden Raum homöomorph sein

Kompaktheit

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ kompakt $\Leftrightarrow$ jede offene X-Überdeckung besitzt *endliche* Teilüberdeckung:
  $X = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i$ offen $\Rightarrow \exists i_1, \ldots, i_k \in I : X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$
- **Lokal kompakt**: Jeder Punkt von X besitzt kompakte Umgebung
- **Eigenschaften**:
  - Man kann von lokale auf globale Eigenschaften schließen
  - → X kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt $\Rightarrow f$ beschränkt
  - Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt
  - Abgeschlossene Teilräume kompakter Räume sind kompakt
  - Produkte kompakter Räume sind kompakt
  - Kompakte Mengen in Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen