Metrische Räume

Definitionen

- **Norm**: Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
  - *Definitheit*: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  - *Absolute Homogenität*: $||\lambda v|| = |\lambda| * ||v||$
  - *Dreiecksungleichung*: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

  ($\mathbb{R}$-Vektorraum V)
- **Einheitssphäre**: $S_1^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\right\}$ n-te Einheitssphäre
- **Metrik**: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Menge X) sodass $\forall x, y, z \in X :$
  - *Positivität*: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - *Symmetrie*: $d(x, y) = d(y, x)$
  - *Dreiecksungleichung*: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- **Wichtige Metriken**:
  - *Triviale Metrik*: $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
  - *Euklidische Metrik*: $X = \mathbb{R}^n, d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = ||x - y||$
  - *Induzierte Metrik*: $d(v, w) := ||v - w||$ (Norm $||\cdot||$)
  - *Winkelmetrik*: $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y\rangle)$
- **Pseudometrik**: Metrik, aber $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt nicht
- **Metrischer Raum**: (X, d) (Menge X, Metrik d auf X)
- **Abgeschlossener Ball**: abgeschlossener r-Ball um x

  $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$
- **Abstandserhaltende Abbildung**: $f : X \to Y$ sodass

  $\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$.

  (metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y))
- **Isometrie**: bijektive abstandserhaltende Abbildung

  $\to$ X, Y isometrisch $\Leftrightarrow$ $\exists$ Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

Längenmetriken

Graphen

- **Graph**: $G = (E, K)$
  - Eckenmenge E
  - Kantenmenge $K \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v \in E\}$
- **Erreichbarkeit**: $p, q \in E$ erreichbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Kantenzug zwischen p und q
- **Zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ alle Ecken von beliebiger, fester Ecke aus erreichbar

  $\to$ $d(p, q)$ = kürzester Kantenzug zwischen p und q definiert Metrik

Euklidische Metrik

- **Kurvenmenge**: $\Omega_{pq}(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ Menge der stetig db. Kurven zwischen p und q
- **Euklidische Länge**: $L_{\text{euk}}(c) = \int_a^b \left\|c'(t)\right\| \mathrm{d}t$ ($c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$)
  - unabhängig von Kurvenparametrisierung
  - invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen
- **Euklidische Metrik** auf $\mathbb{R}^2$-Kurven: $d_{\text{euk}}(p, q) := \inf L_{\text{euk}}(c)$

  ($p, q \in \mathbb{R}^2$, $c \in$ Menge der stetig differenzierbaren Kurven zwischen p und q)

  $\to$ $(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) = (\mathbb{R}^2, d_e)$

Sphärische Geometrie

- **Sphärische Länge**: $L_S(c) := \int_a^b ||c'(t)|| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3} dt$

  (für $c : [a, b] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$)
  - invariant unter $\mathbb{R}^2$-Rotationen
- **Sphärenmetrik**: $d_S(p, q) := \inf L_s(c)$ ($c \in \Omega_{pq}(S_R^2)$)
  - Großkreise sind kürzeste Verbindungkurven zwischen Punkten in S_R^2
  - (S_R^2, D_S) ist metrischer Raum und isometrisch zu $(S_R^2, R * d_W)$