# Metrische Räume

## Norm

- **Definition**: Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
  - *Definitheit*: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  - *Absolute Homogenität*: $\|\lambda v\| = |\lambda| * \|v\|$
  - *Dreiecksungleichung*: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

  ($\mathbb{R}$-Vektorraum $V$)

## Metrik

- **Definition**: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Menge $X$) sodass $\forall x, y, z \in X$ :
  - *Positivität*: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - *Symmetrie*: $d(x, y) = d(y, x)$
  - *Dreiecksungleichung*: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- **Wichtige Metriken**:
  - *Triviale Metrik*: $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
  - *Euklidische Metrik*: $X = \mathbb{R}^n$, $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$
  - *Induzierte Metrik*: $d(v, w) := \|v - w\|$ (Norm $\|\cdot\|$)
  - *Winkelmetrik*: $d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$
- **Pseudometrik**: Metrik, aber $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt nicht
- **Metrischer Raum**: $(X, d)$ (Menge $X$, Metrik $d$ auf $X$)

## Konstruktionen

- **Einheitssphäre**: $S_1^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ $n$-te Einheitssphäre
- **Abgeschlossener Ball**: abgeschlossener $r$-Ball um $x$

  $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$
- **Offener Ball**: offener $r$-Ball um $x$

  $B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$
- **Abstandserhaltende Abbildung**: $f : X \to Y$ sodass

  $\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$

  (metrische Räume $(X, d_X), (Y, d_Y)$)
- **Isometrie**: bijektive abstandserhaltende Abbildung

→ $X, Y$ isometrisch $\Leftrightarrow$ $\exists$ Isometrie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

# Längenmetriken

## Graphen

- **Graph**: $G = (E, K)$
  - Eckenmenge $E$
  - Kantenmenge $K \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v \in E\}$
- **Erreichbarkeit**: $p, q \in E$ erreichbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Kantenzug zwischen $p$ und $q$
- **Zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ alle Ecken von beliebiger, fester Ecke aus erreichbar

→ $d(p, q)$ = kürzester Kantenzug zwischen $p$ und $q$ definiert Metrik

## Euklidische Metrik

- **Kurvenmenge**: $\Omega_{pq}(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ Menge der stetig db. Kurven zwischen $p$ und $q$
- **Euklidische Länge**: $L_{\text{euk}}(c) = \int_a^b \left\|c'(t)\right\| \mathrm{d}t$ ($c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$)
  - unabhängig von Kurvenparametrisierung
  - invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen
- **Euklidische Metrik** auf $\mathbb{R}^2$-Kurven: $d_{\text{euk}}(p, q) := \inf L_{\text{euk}}(c)$

  ($p, q \in \mathbb{R}^2$, $c \in$ Menge der stetig differenzierbaren Kurven zwischen $p$ und $q$)

→ $(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) = (\mathbb{R}^2, d_e)$

## Sphärische Geometrie

- **Sphärische Länge**: $L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$

  (für $c : [a, b] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$)
  - invariant unter $\mathbb{R}^2$-Rotationen
- **Großkreis**: Schnitt von $S_R^2$ und und 2-dimensionalen UVR des $\mathbb{R}^2$
- **Sphärenmetrik**: $d_S(p, q) := \inf L_s(c)$ ($c \in \Omega_{pq}(S_R^2)$)
  - Großkreise sind kürzeste Verbindungkurven zwischen Punkten in $S_R^2$
  - $(S_R^2, D_S)$ ist metrischer Raum und isometrisch zu $(S_R^2, R * d_W)$

# Grundbegriffe allg. Topologie

## Topologische Räume

- **Topologie**: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (Menge $X$) sodass
  - $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
  - Durchschnitte *endlich* & Vereinigungen *beliebig* vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$
- **Topologischer Raum**: $(X, \mathcal{O})$
  - *Offene Teilmengen* von $X$: Elemente von $\mathcal{O}$
  - *Abgeschlossene Teilmengen* $A \subset X$: $X \setminus A$ offen
- **Wichtige Topologien**:
  - *Triviale Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$
  - *Diskrete Topologie*: $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$
  - *Standard-Topologie* auf $\mathbb{R}$: $\mathcal{O}_s := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{ Vereinigung offener Intervalle}\}$
  - *Zariski-Topologie*: $\mathcal{O}_Z := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$
  - *Induzierte Topologie* (Metrik):
    - $U \subset X$ *d-offen* $\Leftrightarrow \forall p \in U\ \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0 : B_\varepsilon(p) \subset U$
    - $d$-offene Mengen bilden *induzierte Topologie*
  - *Teilraum-Topologie*: $\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X : U = V \cap Y\}$

    (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, Teilmenge $Y \subseteq X$)
  - *Produkttopologie*: Topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$

    $W \subseteq X \times Y$ *offen* in *Produkttopologie* $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W\ \exists$ Umgebung $U$ von $x$ in $X$ und $V$ von $y$ in $Y$, sodass $U \times V \subseteq W$
  - *Quotiententopologie*: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$ kanonische Projektion

    → $U \subset X/\sim$ ist offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in $X$.
- **Basis** für Topologie $\mathcal{O}$: $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ sodass für jede offene Menge $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$ gilt

  $V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}$
- **Umgebung** $U \subset X$ von $A \subset X$, falls $\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U$

  (Topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$)
- **Innerer, äußerer Punkt** $p \in X$ von $A \subset X$, falls $A$ (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist

→ *Inneres* von $A \subset X$: Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von $A$
- **Abgeschlossene Hülle** von $A$: Menge $\overline{A} \subset X$, die *nicht* äußere Punkte sind
- **Triangulierbar**: falls $\exists$ Simplizialkomplex $K$ und Homö $K \to X$
  - $\chi(X) := \chi(K)$

## Hausdorffsches Trennungsaxiom

- **Hausdorffsch** (top. Raum $(X, \mathcal{O})$): $\forall p \neq q \in X\ \exists\, U \ni p, V \ni q : U \cap V = \emptyset$

  (*Umgebungen* $U, V$)
- **Hausdorffsche Räume**:
  - Metrische Räume (über Dreiecks-Ugl.)
  - $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$, weil $\mathcal{O}_s$ von Metrik induziert wird
  - Teilraum von Hausdorff-Raum
  - Produkt von Hausdorff-Räumen bzgl. Produkttopologie

## Stetigkeit

- **Stetigkeit** (zwischen top. Räumen $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$): $f : X \to Y$ stetig falls Urbilder offener Mengen in $Y$ offen sind in $X$
- **Homöomorphismus** (zw. top. Räumen): $f : X \to Y$ bijektiv mit $f, f^{-1}$ stetig

→ $X, Y$ *homöomorph*, falls $\exists$ Homö $f : X \to Y$ (schreibe $X \cong Y$)
  - *Homöomorphismengruppe*: Identität, Verkettungen, Inverse von Homö sind Homö

    → Gruppe
- **Wichtige Homöomorphismen**:
  - $[0, 1] \cong [a, b]$ ($a < b \in \mathbb{R}$)
  - $S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n$ (also $S^n$ ohne "Nordpol")

## Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend, falls $\emptyset$ und $X$ die einzigen offen-abgeschlossenen Teilmengen sind

$\Leftrightarrow$ $X$ ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Mengen
- **Eigenschaften**:
  - $A$ zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ ist zusammenhängend
  - $A$, $B$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend

## Zusammenhangskomponente

- **Definition**: $Z(x)$ = Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen, die $x$ enthalten
- **Eigenschaften**:
  - $Z(X)$ = disjunkte Zerlegung von $X$
  - Elemente von $Z(X)$ = zusammenhängend

### Weg-Zusammenhang

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ weg-zusammenhängend
  $\Leftrightarrow \forall p, q \in X \; \exists$ Weg $\alpha : [0,1] \to X : \alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
- **Eigenschaften**:
  - $X$ weg-zusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend
  - Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind es auch
  - Ein (nicht) zusammenhängender Raum kann nur zu einem (nicht) zusammenhängenden Raum homöomorph sein

### Kompaktheit

- **Definition**: $(X, \mathcal{O})$ kompakt $\Leftrightarrow$ jede offene $X$-Überdeckung besitzt *endliche* Teilüberdeckung:
  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i$ offen $\Rightarrow \exists i_1, \ldots, i_k \in I : X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$
- **Lokal kompakt**: Jeder Punkt von $X$ besitzt kompakte Umgebung
- **Eigenschaften**:
  - Man kann von lokale auf globale Eigenschaften schließen
  - → $X$ kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt $\Rightarrow f$ beschränkt
  - Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt
  - Abgeschlossene Teilräume kompakter Räume sind kompakt
  - Produkte kompakter Räume sind kompakt
  - Kompakte Mengen in Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen

# Spezielle Topologien

### Topologische Mannigfaltigkeit

- **Definition**: topologischer Raum $M$ mit
  1. *lokal euklidisch*: $\forall p \in M \, \exists$ offene Umgebung $U$ von $p$ und Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit festem $n$
     → **Karte** $(\varphi, U)$
     → **Atlas** $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ (mit $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$)
  2. $M$ ist hausdorffsch
  3. $M$-Topologie besitzt abzählbare Basis
- **Eigenschaften**:
  - **Dimension** der Mannigfaltigkeit = $n$
  - **Geschlecht** der Mannigfaltigkeit = Anzahl
  - Offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit sind auch Mannigfaltigkeiten
- **Produkt-Mannigfaltigkeit**: Produkt zweier MF ist auch MF
  - Dimension Produkt-MF = Summe der Dimensionen der beiden MF

### Differenzierbare Mannigfaltigkeit

- **Kartenwechsel**: Homöomorphismus
  $$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\psi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$
  (topologische MF $M$, $p \in M$)
- $C^\infty$**-Atlas** $\mathcal{A}$ von $M$: alle möglichen Kartenwechsel sind $C^\infty$-Abbildungen ($\mathbb{R}^n$)
- $C^\infty$**-Struktur**: maximaler $C^\infty$-Atlas für topologische MF
- **Differenzierbare Mannigfaltigkeit**: topologische MF mit $C^\infty$-Struktur
- **Punkt-Differenzierbarkeit**: $F : M^m \to N^n$ differenzierbar in $p \in M$, falls
  $$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n} \text{ ist } C^\infty \text{ in } \varphi(p)$$
  ($M^m$, $N^n$ d-bare M; $F$ stetig; $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ Karten um $p$ und $F(p)$)
- **Differenzierbarkeit**: $F$ differenzierbar, falls $F$ in allen $p \in M$ d-bar ist
- **Diffeomorphismus** zwischen dMF: $F$ bijektiv, $F$ d-bar, $F^{-1}$ d-bar
- **Fläche**: 2-dimensionale MF
- **Reguläre Fläche**: $S \subset \mathbb{R}^3$ (mit Teilraum-Topologie von $\mathbb{R}^3$), falls $\forall p \in S$ eine Umgebung $V$ von $p$ und eine Abbildung
  $$F : \underset{\text{offen}}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \underset{\text{offene TM von S}}{V \cap S} \subset \mathbb{R}^3$$
  $$(u, v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$
  existiert, sodass
  1. $F$ ist differenzierbarer Homöomorphismus
  2. das Differenzial (Jacobi-Matrix) von $F$,
     $\mathrm{d}F_q : \mathbb{R}^2 \supseteq T_q U \to T_{F(q)} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$
     ist injektiv (hat Rang 2) ($\forall q \in U$)
- **Lokale Parametrisierung** von reg. Fläche $S$: $F$ von der regulären Fläche
- **Produkt-Mannigfaltigkeit**: $M^m$, $N^n$ dMF-en → $M \times N$ ist $(m+n)$-dimensionale dMF
- **Lie-Gruppe**: Gruppe mit $C^\infty$-Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass
  $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ in $C^\infty$ ist
  - Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind auch Lie-Gruppen

### Simplizialkomplexe

- **Simplex** ($k$-dimensional): konvexe Hülle von $k+1$ Punkten in $\mathbb{R}^n$:
  $$s(v_0, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$
  ($v_0 - v_1, \ldots, v_0 - v_k$ linear unabhängig)
- **Teilsimplex**, **Seite**: konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, \ldots, v_k\}$
- **Simplizialkomplex**: endliche Menge $K$ von Simplices in $\mathbb{R}^n$, sodass
  1. Für jeden Simplex enthält $K$ auch alle Teilsimplices
  2. Durchschnitt zweier Simplices ist $\emptyset$ oder gemeinsamer Teilsimplex
  - *Dimension*: maximale Dimension seiner Simplices
  - *Euler-Charakteristik*: $\chi(K) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha_i$ ($\alpha_i = \#i$-Simplices in $K$)
- **Endlicher Graph**: endlicher, 0- oder 1-dimensionaler Simplizialkomplex
  - *zusammenhängend*: $\forall p, p' \in G \, \exists \, p = p_0, p_1, \ldots, p_n = p'$, sodass $p_{i-1}$ und $p_i$ durch Kante verbunden sind
  - *Baum*: zusammenhängender Graph $T$, sodass für jeden 1-Simplex $s \in T$: $T \setminus \mathring{s}$ ist nicht zusammenhängend ($\mathring{s}$ = Kante ohne Endpunkte, offener 1-Simplex)
- **Euler-Charakteristik**: $\chi(G) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten}$
  - *Baum*: $\chi(T) = 1$
  - *Zusammenhängender Graph*: $\chi(G) = 1 - n$ ($n = \#$ Kanten, die man aus $G$ entfernen kann, sodass $G$ zusammenhängend bleibt)
- **Spannender Baum** (von zusammenhängendem Graph): Komplement aller Kanten, die man entfernen kann, sodass $G$ zusammenhängend bleibt
- **Ebener Graph**: realisiert durch Punkte und Geraden in $\mathbb{R}^2$, sodass Kanten sich nicht schneiden
  - *Seiten*: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$
- **Planarer Graph**: Graph, der isomorph zu einem ebenen Graphen ist
- **Euler-Formel**: für zusammenhängende, ebene Graphen $G$ gilt:
  $\chi(G) = e(G) - k(G) + s(G) = 2$
- **Polyeder**: $P \subset \mathbb{R}^3$ mit
  1. $P$ ist Durchschnitt endlich vieler affiner Halbräume von $\mathbb{R}^3$
     (affine Halbräume gegeben durch $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i$, $i = 1, \ldots, k$)
  2. $P$ ist beschränkt und nicht in einer Ebene enthalten
  - *Rand*: Gegeben durch (Seiten-)Flächen, Kanten und Ecken
  - *1-Skelett*: Menge der Ecken und Kanten, ist Graph in $\mathbb{R}^3$
  - *Schlegel-Diagramm*: Projektion von Punkt nahe bei einem Seitenmittelpunkt auf geeignete Ebene; 1-Skelett → ebener Graph
  - *Eulersche Polyeder-Formel*: $e(P) - k(P) - s(P) = 2$
  - *regulär*: falls
    1. alle Seitenflächen kongruente reguläre $n$-Ecke sind und
    2. in jeder Ecke $m$ solcher $n$-Ecke zusammentreffen

### Verkleben

- **Verklebung**: $X, Y$ topologische Räume, $A \subset X$ Teilraum, $f : A \to Y$.
  Äquivalenzrelation auf $X \dot\cup Y$ via $f$:
  $$x \, x' \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} & x = x' \\ \text{oder} & f(x) = x' \;\; (x \in A) \\ \text{oder} & f(x') = x \;\; (x' \in A) \\ \text{oder} & f(x) = f(x') \;\; (x, x' \in A) \end{cases}$$
  $\Rightarrow$ Quotientenraum $X \cup_f Y = X \dot\cup Y / \sim$ ist *Verklebung* von $X$ an $Y$ via $f$
- **Selbstverklebung**: Topologischer Raum $X$, Teilraum $A \subset X$, $f : A \to X$, $X_f := X / \sim$ mit Äquivalenzrelation wie oben