Ch 2.

Affine set: $\forall \theta \in R$. $x_1, x_2 \in C$. $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$. 可以是不过原点的直线

是子空间加一个偏移 ⟶ 可以谈维数

线性方程组的解集是一个仿射集。

Affine hull 仿射包: $\mathrm{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$.

relative interior: 集合C在其仿射维数的空间上的~~相~~内部（可降维） relint C.

↓

relative boundary: 闭包/相对内部. $\mathrm{cl}\, C \setminus \mathrm{relint}\, C$.

convex set: ~~θx~~ $\theta \in (0,1)$. $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$.

↓

类似仿射包定义凸包. convex hull. [含C的最小凸集]

凸集的收敛定理. $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i \in C$ 和 $\int_C p(x) x\, dx \in C$ 条件都是 well defined.

Farkas' lemma: $\forall b \in R^m$. $A \in R^{m \times n}$. b要么在A span的锥包中. 要么可以在A锥包附近找到向量与b形成钝角.

子空间一定是锥

cone: $\theta \geq 0$ $\theta x \in C$. 凸锥: 凸的锥 ⟹ 类似地定义锥包

非凸锥: 想象一个双面锥.

半空间是子空间的不自然分割. 所以不是仿射的 $\{x : a^T x \leq b\}$ 由超平面 $\{x : a^T x = b\}$ 划分而成

偏移后

balls. Euclid ~~norm~~ balls $\{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\}$ Ellipsoid $\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$. $P \in S$ & $P \succ 0$

norm cone ~~balls~~: $\|\cdot\|$ 任意范数. $\{(x,t) \mid \|x\| \leq t\}$. intuition: 1个随t线性扩大而扩大的球的重叠

convex cones ~~subspaces~~ of matrices: $S^n = \{X \in R^{n \times n} \mid X = X^T\}$ $S^n_+ = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\}$. $S^n_{++} = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$ they're not subspaces.

polyhedron 多面体: 有限~~的半空~~个半空间和超平面交成的. (是凸集)

↓

simplexes 单纯形. (定义)

保凸运算: ① intersection.

② affine function: 定义: $f(x) = Ax + b$. $A_{m \times n}$. x_n b_m. 双向保凸.

~~②~~. ↓ scaling & translation. / projection (移除一些维). / sum / partial sum.

③. perspective function: scale by last dimension. $P: R^n \times R_{++} \to R^n$ $P(z,t) = \frac{z}{t}$. 双向保凸.

④ linear fractional (线性分式函数). $f = p \circ g$ 透视和仿射的复合.

广义不等式 [基于正常锥的定义]. proper cone: R^n中 ① 凸 ② 闭 ③ solid (有非空内点). ④ 尖 (pointed) 不含直线.

偏序关系：partial ordering $K \subset R^n \Rightarrow x, y \in R^n$. $x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$.

strict partial ordering $\Rightarrow x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$.

几条要注意的 property：① 非负数乘保序 [负的时会发生什么?]

② 反对称：antisymmetric $x \preceq_K y$, $y \preceq_K x \Rightarrow x = y$.

③ $x \prec_K y$, then for u, v small enough. $x + u \prec_K y + v$.

③ $\preceq_K$ 极限 (limit) 运算保序

通过广义不等式定义$\boxed{\text{最小元}}$和$\boxed{\text{极小元}}$.

minimum 最小元：x. $\forall y \in S$. $x \preceq_K y$ [S中所有其他元素都偏序可比且比之大] $\Leftrightarrow S \subseteq x + K$.

minimal 极小元：x. if $y \in S$ s.t. $y \preceq_K x$, then $y = x$. [S中与x可比的元素都比x大]. [不一定全部可比] $\Leftrightarrow (x - K) \cap S = \{x\}$

重要例子：S_{++} 定义的椭圆集没有最小元.

Seperating hyperplane. thm. 分离超平面. C, D 凸 $C \cap D = \emptyset \Rightarrow \exists\, a \neq 0, b$ ~~$a^T x \le b$~~ s.t. $x \in C$. $a^T x \le b$.
$x \in D$. $a^T x \ge b$.

一个残缺的逆命题：C, D 凸 至少1个开：$C \cap D = \emptyset \Leftrightarrow \exists$ sperating hyperplane.

supporting hyperplane： $x_0 \in \text{bd}\, C$. $\forall x \in C$. $a^T(x - x_0) \le 0$

非空凸的边界点上一定有支撑超平面.

dual cone 对偶锥： K^* for cone K. $K^* = \{y : x^T y \ge 0,\ \forall x \in K\}$.

① K^* 闭 & 凸 ② $K_1 \subseteq K_2 \rightarrow K_2^* \subseteq K_1^*$

③ $\text{int } K \neq \emptyset \rightarrow K^*$ pointed.

④ $\bar{K}$ 尖 $\rightarrow \text{int } K^* \neq \emptyset$

⑤ $K^{**} = \overline{\text{conv } K} \Rightarrow$ 如果K本身凸且闭 $\rightarrow K^{**} = K$.

K proper $\rightarrow K^*$ proper 且 $K^{**} = K$.

对偶广义不等式 (dual generalized inequality).

$x \preceq_K y \Leftrightarrow \forall \lambda \succeq_{K^*} 0 \quad \lambda^T x \le \lambda^T y$.

$x \prec_K y \Leftrightarrow \forall \lambda \succeq_{K^*} 0,\ \lambda \neq 0,\ \lambda^T x < \lambda^T y$.

minimum 和 minimal 的对偶锥叙述： x is minimum $\Leftrightarrow \forall \lambda \succ_{K^*} 0$. x is unique minizer of $\lambda^T z$, $z \in S$.

x is minimal $\Leftarrow \exists\, \lambda \succ_{K^*} 0$, x minimizes $\lambda^T z$. $z \in S$