Diffential forms in $\mathbb{R}^n$

Defintion 1.

A field of linear forms (or exterior form of degree 1) in $\mathbb{R}^3$ is a map w that associates to each $p \in \mathbb{R}^3$ an element $w(p) \in (\mathbb{R}^3_p)^*$; w can be written as

$$w(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$
$$w = \sum_{i=1}^{3} a_i(p)dx_i$$

Let $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be a **bilinear (i.e. φ is a linearin each variable)** and **alternate (i.e. $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$).**

For $\varphi_k \in (\mathbb{R}^3_p)^*$ and $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$, by setting

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j))$$

이 경우 $w(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$, $p \in \mathbb{R}^3$에 대하여 이렇게 쓸 수 있다.

$$w(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2) + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3) + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)$$

$$w = \sum_{i<j} a_{ij}(dx_i \wedge dx_j) \quad \because dx_i \wedge dx_i = 0,\ dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

- 간단한 증명 Let $\varphi_1(v_1) = \sum_{i=1} a_i dx_i,\ \varphi_2(v_2) = \sum_{j=1} b_j dx_j$ ($a_i = \frac{\partial v_1}{\partial x_i}, b_j = \frac{\partial v_2}{\partial x_j}$ 로 보자. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$)
  Then

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) &= (a_1 dx_1 + a_2 dx_2) \wedge (b_1 dx_1 + b_2 dx_2) \\
&= a_1 b_1 dx_1 \wedge dx_1 + a_1 b_2 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 b_1 dx_2 \wedge dx_1 + a_2 b_2 dx_2 \wedge dx_2 \\
&= a_1 b_2 dx_1 \wedge dx_2 - a_2 b_1 dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \det(\varphi_i(v_j)) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \det(\varphi_i(v_j))
\end{aligned}
$$

- 일반적으로 $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ 에 대하여 $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times \cdots \mathbb{R}^n_p}_{\text{k times}} \to \mathbb{R}$

$$
(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \cdots v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \cdots, k
$$

- Differential form의 중요한 기능은 Differential Maps하에서 하나의 연산으로 기능한다는 것이다.
  - Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a differentiable map.
  - Then f **induces a map f^* that takes k-forms in $\mathbb{R}^m$ into a k-forms in $\mathbb{R}^n$**
    - 마치 **역함수** 처럼 기능한다. i.e. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f^* : (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$
    - 위 첨자에 별표가 붙는 것으로서 역함수 처럼 기능한다는 것을 알 수 있다.

$$
(f^* w)(p)(v_1, \cdots v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), \cdots, df_p(v_k))
$$

- 위에서 공학적인 응용에서는 주로 $m = 1$ 즉, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 보는 응용이 대단히 많다. (최적화 문제등에서)
- 위 Operation을 다시 생각해보면,

$$
\begin{aligned}
f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \cdots v_k) &= (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(df(v_1), \cdots, df(v_k)) \\
&= \det(\varphi_i(df(v_j))) \\
&= \det(f^* \varphi_i(v_j)) \\
&= (f^* \varphi_1, \wedge, \cdots, \wedge f^* \varphi_k)(v_1, \cdots, v_k)
\end{aligned}
$$

- 위에서 $v_1, \cdots v_k$ 를 굳이 벡터로 보지 않는 것이 좋다. 오히려 위의 Differential Form의 정의상 점 p로 보는 것이 좋다. (벡터가 맞지만.. $df_p(v_k)$ 이기 때문에..)
  - v_k 까지 있는 것은 **k-form** 이기 때문이다. 즉,
    $w(v_1, \cdots, v_k) = (\varphi_1 \wedge \cdots \varphi_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$

Note

$v(f)$는 표기이고 실제는 $df(v) = \langle \nabla f, v \rangle$ 인 것 처럼 Differential Map에 대한 Form 연산도 마찬가지이다. 즉, $f^* w$는 표기이고 실제는 $w(df)$ 즉 Differential Form의 Inner Product 다시말해 Determinent를 의미한다.

- 표기법

$p \in \mathbb{R}^n,\ v_1 \cdots v_k \in \mathbb{R}^n_p$ 에 대하여 the differential of the map f가 p에서 다음과 같이 주어지고,

$$
df_p : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}
$$

g가 0-form 이면

$$f^*(g) = g \circ f = g(f)$$

- An exterior k-form in $\mathbb{R}^n$ is a map w that associates to each $p \in \mathbb{R}^n$ an element $w(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ 는 다음과 같이 표시된다. **Differential k-form**

$$w(p) = \sum_{i_1 < \cdots i_k} a_{i_1 \cdots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \cdots, n\}$$

위 식의 간략한 표기는 다음과 같다.

$$w = \sum_I a_I dx_I$$

- Differentiable 0-form은 다음과 같은 Differentiable function 을 의미한다.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- Elemental differential form such as $dx_i, dy_j \in (\mathbb{R}^n)^*$
  에 대한 f^*dx_i 의 경우는 (y로 치환해도 같다.) 다음과 같다.

$$f^*dx_i(v) = dx_i(df(v)) = d(x_i \circ f)(v) = df_i(v)$$

Proposition

Let a differentiable map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and w, φ be k-forms on $\mathbb{R}^m$ and $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ be a 0-form on $\mathbb{R}^m$. Then:

1. $f^*(w + \varphi) = f^*w + f^*\varphi$
2. $f^*(gw) = f^*(g)f^*(w)$
3. If $\varphi_1 \cdots \varphi_k$ are 1-forms in $\mathbb{R}^m$, then

$$f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = f^*\varphi_1 \wedge \cdots \wedge f^*\varphi_k$$

Example : compute f^*w

Let w be the 1-form in $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ by

$$w = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy$$

Let U be the set in the plane (r, θ) given by

$$U = \{r > 0 : 0 < \theta < 2\pi\}$$

and let $f : U \to \mathbb{R}^2$ be the map

$$f(r, \theta) = \begin{cases} x & = r\cos\theta \\ y & = r\sin\theta \end{cases}$$

그러므로 $f^* w$ 는 $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ 를 U로 가져온다.

How to

Let $w = \sum_i a_i dx_i$ then

$$a_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad a_2 = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad dx_1 = dx, \quad dx_2 = dy$$

Thus

$$f^* w = \sum_i f^* a_i f^* dx_i = \sum_i (a_i \circ f)(dx_i(df))$$

f 는 Corrdination Transform이므로 a_i의 (x,y)를 (r,θ)로 변경시켜야 한다.

$$\begin{aligned} a_1 \circ f &= (-\frac{y}{x^2+y^2}) \circ f(r,\theta) = -\frac{1}{r}\sin\theta \\ a_2 \circ f &= (\frac{x}{x^2+y^2}) \circ f(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos\theta \end{aligned}$$

그리고 Elementary Differential의 변화는 $dx_i(df) = d(x_i \circ f) = df_i$ 이므로

$$\begin{aligned} df_1 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ df_2 &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f^* w &= (a_1 \circ f)df_1 + (a_2 \circ f)df_2 \\ &= -\frac{1}{r}\sin\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= d\theta \end{aligned}$$

Note 1.

$f^* w = w(df)$ 로 생각하면

$$f^* w = w(df) = \sum_i^2 (a_i dx_i)(df) = \sum_i^2 (a_i \circ f)(dx_i(df)) = \sum_i^2 (a_i \circ f) df_i$$

$f^* w$는 $f : U \to \mathbb{R}^2$ 이므로 U위의 Differential로 정의되어야 하므로 최종적인 형태는 df_i의 선형 결합으로 나타나야 한다.

Note 2. : 1-form w가 저렇게 주어진 이유

먼저 원호의 길이에 대한 것을 생각해보자 원호의 길이는 보통 **ArcTan**를 사용하여 구하는 것이 일반적이다 왜냐하면, 원호의 각도가 아닌 임의 벡터의 각도를 측정해야 하기 때문이다.

따라서 다음과 같다.

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

그러므로 **ArcTan**의 미분을 정의해야 위 예제의 원호에서의 1-form을 우선 계산할 수 있다. $y = \tan(x)$의 역함수는 $x = \tan^{-1}(y)$ 이므로 $x = \tan(y)$ 로 놓고 x에 대하여 미분해보면

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\tan(y)\frac{dy}{dx} = \sec^2(y)\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)} &= \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}(x)
\end{aligned}
$$

따라서 1-form w를 다음과 같이 정의한다.

$$
w = \frac{d}{d(x,y)}\tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}(\frac{y}{x})dx + \frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}(\frac{y}{x})dy
$$

여기에서 $u = \frac{y}{x}$ 로 놓으면

$$
w = \frac{d}{du}\tan^{-1}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}(u)dx + \frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}(u)dy
$$

이기 때문에 u에 대한 x, y의 미분을 구하면

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{1}{x}u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}
$$

그러므로

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(\tan^{-1} u)\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1+u^2}(-\frac{y}{x^2}) = \frac{x^2}{x^2+y^2}(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial}{\partial u}(\tan^{-1} u)\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{1+u^2}(\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^2+y^2}(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}(u)dx + \frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}(u)dy \\
&= -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy
\end{aligned}
$$

Note 3.

반대로 $g : \mathbb{R}^2 \to U$ 로 보내는 함수를 생각해 보자. 그리고 이에 의해 pullback $g^* d\theta$ 에 대한 것을 생각해 보자.

이러한 함수의 가장 일반적인 형태는 **Note 2** 에서 다룬 $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ 이다. 이것을 Example 처럼 해보자. (즉, w 를 유도 하는 것)

Proposition 4

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a differential map. Then

1. $f^*(w \wedge \varphi) = (f^* w) \wedge (f^* \varphi)$
   - where w and φ any two forms in $\mathbb{R}^m$.
2. $(f \circ g)^* w = g^*(f^* w)$,
   - where $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ is a differentiable map.

Sketch of proof

Only for 2. Let $w = \sum_I a_I dy_I$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)^* w &= \sum_I a_I((f \circ g)_1, \cdots, (f \circ g)_m) d(f \circ g)_I \\
&= \sum_I a_I(f_1(g_1, \cdots, g_n), \cdots, f_m(g_1, \cdots, g_n)) df_I(dg_1, \cdots, dg_n) \\
&= g^*(f^* w)
\end{aligned}
$$

Q.E.D 쉽게 생각하면 $h = (f \circ g) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 그리고 w is defined on $\mathbb{R}^m$ 따라서 $h^* w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ 단계적으로 생각하면 $\varphi = f^* w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 그리고 $g^* \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Differential of 0-form

Let $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a 0-form. Then the differential

$$
dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i
$$

is a 1-form.

Note

여기에서 이렇게 생각할 수 있다.

$$
d = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i
$$

이렇게 생각하면 이후의 Definition 5를 비롯하여 Differential 0-form과 이후의 내용들도 이해하기 편하다. 즉, 편미분항은 계수에, Differential은 Differential의 Wedge Product혹은 Exterior derivative가 정의된다.

Definition 5

Let $w = \sum a_I dx_I$ be a k-form in $\mathbb{R}^n$. The **exterior differential** dw of w is defined by

$$
dw = \sum_I da_I \wedge dx_I
$$

- - 즉, differential에 Differential 이 붙는 것이 아니라, 계수에 해당하는 함수에 붙는 다는 것.

Proposition 5

1. $d(w_q + w_2) = dw_1 + dw_2$ where w_1 and w_2 are k-forms.
2. $d(w \wedge \varphi) = dw \wedge \varphi + (-1)^k w \wedge d\varphi$ where w is k-form and φ is an s-form
3. $d(dw) = d^2 w = 0$
4. $d(f^* w) = f^*(dw)$, where w is a k-form in $\mathbb{R}^m$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is a differential map.

Proof of 3,4

- For 3

$$
\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \quad \because \text{by definition 5} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j \quad \because \text{by the definition of differential for 0-form} \\
&= \sum_{i \leq j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \quad \because \text{by the Proposition 5 -2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- For 4
  Let $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ so that $(y_1, \cdots y_m) \in \mathbb{R}^m$. Then

$$
\begin{aligned}
f^*(dg) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) \\
&= \sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad \because f^* dy_i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\
&= \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^* g)
\end{aligned}
$$

and Let $\varphi = \sum_I a_I dx_I$ be a k-form. Then

$$
\begin{aligned}
d(f^*\varphi) &= d(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I)) \\
&= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx_I) \\
&= \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \quad \because \text{The result of the above equation} \\
&= f^*\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) = f^*(d\varphi)
\end{aligned}
$$

Note

다음을 살펴보자

$$
f^* dy_i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j
$$

그리고 이것을 살펴보자 (위에 있는 Note)

$$
f^* dy_i(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v)
$$

좀 더 자세하게 보면

$$
d(y_i \circ f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k = df_i
$$

여기서 주의할 것은 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 이렇게 생각할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
f^*(dg) &= f^*\left(\sum_i a_i dy_i\right) \quad \text{where } a_i = \frac{\partial g}{\partial dy_i} \\
&= \sum_i f^*(a_i) f^* dy_i = \sum_i (a_i \circ f) dy_i(df) = \sum_i (a_i \circ f) df_i \\
&= \sum_i (\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial (g \circ f)}{\partial f_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\
&= \sum_i \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} dx_i = d(g \circ f) = d(f^* g)
\end{aligned}
$$

Problem- 8

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a differentiabkle map given by

$$f(x_1, \cdots x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$$

and let $w = dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ Show that

$$f^* w = \det(df) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Solve

Let $df_i = d(y_i \circ f)$

$$
\begin{aligned}
f^* w &= f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = f^* dy_1 \wedge \cdots \wedge f^* dy_n \\
&= dy_1(df) \wedge \cdots \wedge dy_n(df) = df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dx_k \wedge \cdots \wedge \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} dx_k \quad \cdots (1) \\
&= \det(df) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \cdots (2)
\end{aligned}
$$

(1)에서 (2)의 경우는 수학적 귀납법으로 풀거나. 다른 방법을 모색해보자.