Tensor Algebra and Analysis 2020-09-17

본 내용은 Tensor Algebra와 Analysis에 관련된 내용을 요약 정리한 것이다.

Curves and Surfaces in Three-Dimensional Euclidean Space

Curves and Surfaces in Three-Dimensional Euclidean Space

먼저 다음과 같은 vector field를 정의하자.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^3 \tag{1}$$

그리고 $\mathbf{r}$ 는 differentiable 로서 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$ over the whole definition domain.

An arbitrary coordinate system을 다음과 같이 놓자.

$$\theta^i = \theta^i(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

그러면 (2) 은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\theta^i = \theta^i(t), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

Example : Straight Line

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3 \tag{4}$$

Basis $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ 에 대한 linear coordinate 에 대해 (4) 는 다음과 같다.

$$r^i(t) = a^i + b^i(t), \quad i = 1, 2, 3 \tag{5}$$

where $\mathbf{r} = r^i \mathbf{h}_i$, $\mathbf{a} = a^i \mathbf{h}_i$, $\mathbf{b} = b^i \mathbf{h}_i$.

Example : Circular Helix

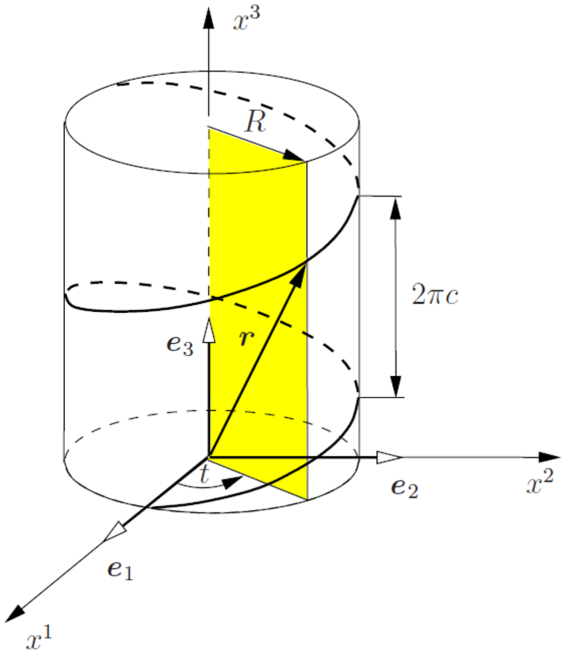

Fig. 3.1. Circular helix

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(t)\mathbf{e}_1 + R\sin(t)\mathbf{e}_2 + ct\mathbf{e}_3 \tag{6}$$

$\mathbf{e}_i$ 는 Orthonormal basis in $\mathbf{E}^3$ 이다. 여기에 대하여 $r = R, \varphi = t, z = ct$ 라 잡는다.

이때, (6) 로 정의된 curve (1) 에 대한 tangent vector를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{g}_t = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{7}$$

- **Length**

이를 사용하여 먼저 curve의 길이를 알아내자. curve의 길이를 $s(t)$ 라 하면 다음과 같다.

$$s(t) = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} \tag{8}$$

(7)에서 $d\mathbf{r} = \mathbf{g}_t dt$ 이므로 (8) 은

$$s(t) = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \sqrt{\mathbf{g}_t \cdot \mathbf{g}_t} dt = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \|\mathbf{g}_t\| dt = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \sqrt{g_{tt}(t)} dt \tag{9}$$

(9) 의 의미는 $\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{g_{tt}(t)} \neq 0$ 이 방정식을 그대로 이용하면 다음과 같이 s 에 대한 시간의 방정식을 얻을 수 있다.

$$t(s) = \int_{s(t_1)}^{s} \|g_t\|^{-1} ds = \int_{s(t_1)}^{s} \frac{ds}{\sqrt{g_{tt}(t)}} \tag{10}$$

- **Curvature**

  curve (1) 을 arc length s를 사용하여 다음과 같이 재정의하자.

$$\mathbf{r} = \mathbf{t}(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{r}}(s) \tag{11}$$

- 즉, 길이에 따라 시간을 정의할 수 있다.
- 당연히 $\hat{\mathbf{r}}(s)$ 의 s 에 대한 **tangent vector**를 구하면

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} \Rightarrow \|\mathbf{a}_1\| = 1 \tag{12}$$

- unit normal vector로 길이에 대한 tangent vector가 도출되어 효용이 더 났다. -> Covarinat diffentiation으로 이어진다.
- $\|\mathbf{a}_1\| = 1$ 에서 이를 s 에 대하여 다시 미분을 하면

$$1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 \Rightarrow 0 = 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{1,s}, \quad \therefore \mathbf{a}_{1,s} \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \tag{13}$$

- 여기에서 the length of the vector $\mathbf{a}_1, s$ 를 다음과 같이 정의한다. (s는 scalar 이므로 Dimension이 그대로 보존된다.)

$$\kappa(s) = \|\mathbf{a}_{1,s}\| \tag{14}$$

- 식 (14) 를 **curvature** 라고 한다.
- 결국 curvature는 curve의 2계 미분이며 2계 미분의 norm 이다. (가속도의 크기)
  - s가 scalar 이기 때문에 2계 미분을 하더라도 Parametric curve vector가 그대로 유지된다.
  - 최적화론에서/도 이 부분이 중요하다. (2계 미분이므로)
- Curvature의 Inverse value는

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \tag{15}$$

- 이것은 refered to as the radius of curvatire of the curve at the point $\hat{\mathbf{r}}(s)$
  - 따라서 curvature가 0이 되면 radius of curvature가 정의되지 않으므로 (평평하므로) 무의미하다.
- 또한 그러므로, non-zero curvature에 대해서만 생각할 것이다.

* **Normal, Bimormal**
  - **Principal normal vector**
    - **The unit vector in the direction of** $\mathbf{a}_{1,s}$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_{1,s}}{\|\mathbf{a}_{1,s}\|} = \frac{\mathbf{a}_{1,s}}{\kappa(s)} \tag{16}$$

    - 즉, curvature $\kappa(s)$는 $\mathbf{a}_2$ 방향 (**Principal normal vector 방향**) 으로의 $\mathbf{a}_{1,s}$ 의 값 (Inner product)
  - **unit binormal vector**
    - $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 는 상호 orthonormal (미분의 정의에 따라 당연). 따라서 또 하나의 Orthonormal basis $\mathbf{a}_3 \in \mathbb{E}^3$을 다음과 같이 정의

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \tag{17}$$

  - 기본적인 접근 방법은 다음 방정식에서 출발한다.

$$\mathbf{a}_{i,s} = \Gamma^k_{is}\mathbf{a}_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

where $\Gamma^k_{is} = \mathbf{a}_{i,s}\mathbf{a}_k$.

  - 여기서 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{1s} &= \kappa, \quad \because \kappa = \mathbf{a}_{1,s}\mathbf{a}_2 \text{ by } (16) \\
\Gamma^1_{1s} &= 0, \quad \because \Gamma^1_{1s} = \mathbf{a}_{1,s}\mathbf{a}_1 = 0 \text{ by } (16) \\
\Gamma^3_{1s} &= 0, \quad \because \Gamma^3_{1s} = \mathbf{a}_{1,s}\mathbf{a}_3 = 0 \text{ by } (16)
\end{aligned}$$

  - 즉 Principal normal vector에 대하여 orthonormal인 $\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_3$
* Torsion

$\mathbf{a}_1$ 은 Tangent Vector, $\mathbf{a}_2$ 는 Principal normal vector, 그럼 여기에 orthonormal인 $\mathbf{a}_3$ 은? Torsion.

- 정의에 의해 $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ 에서 orthonormal 이므로 $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$ 에서 s로 미분하므로

$$0 = \mathbf{a}_{3,s} \cdot \mathbf{a}_3 \tag{19}$$

- 그리고 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$ 에서

$$\mathbf{a}_{1,s} \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{3,s} = 0 \tag{20}$$

- 그러므로

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{3,s} = -\mathbf{a}_{1,s} \cdot \mathbf{a}_3 = -\kappa(s)\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \tag{21}$$

- 따라서 $\mathbf{a}_{3,s} \perp \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \Rightarrow \mathbf{a}_{3,s} // \mathbf{a}_2$ 이므로 다음과 같이 놓을 수 있다,

$$\mathbf{a}_{3,s} = -\tau(s)\mathbf{a}_2, \quad \tau(s) = -\mathbf{a}_{3,s} \cdot \mathbf{a}_2, \quad \Gamma^2_{3s} = -\tau(s) \tag{22}$$

- **Frenet Formula**
  - 이들을 모두 정리하면 다음과 같다.

$$\Gamma^2_{1s} = \kappa(s),\ \Gamma^1_{2s} = -\kappa(s),\ \Gamma^3_{2s} = \tau(s),\ \Gamma^2_{3s} = -\tau(s) \tag{23}$$

  - Γ^k_{ij} 에서 입력은 k, 출력은 i 그리고 j로 미분하는 것이므로 (미분에서 분모) (s가 고정 이므로 2차원 matrix 형태가 된다)

$$[\Gamma^j_{is}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

  - 이에 의해

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1,s} &= && \kappa\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_{2,s} &= -\kappa\mathbf{a}_1 && && +\tau\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_{3,s} &= && -\tau\mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Note $\otimes$

$$\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \tag{25}$$

Surface in Three-Dimensional Euclidean Space

A surface in three dimensional Euclidean space

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t^1, t^2), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^3 \tag{26}$$

이때, coordinate system은 다음과 같다고 하자.

$$\theta^i = \theta^i(t^1, t^2), \quad i = 1, 2, 3 \tag{27}$$

마찬가지로 $\mathbf{r}$은 t^i 에 대하여 over all definition domain에 대하여 다음과 같이 differentiable 하다고 가정하자.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt^\alpha} \neq 0, \quad \alpha = 1, 2 \tag{28}$$

Example 1 : plane

3 Linearly independent vectors - 3 point $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 를 가진 Plane에 대하여 다음과 같이 $(r)(t^1, t^2)$ 이 정의된다.

$$(r)(t^1, t^2) = \mathbf{x}_0 + t^1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + t^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \tag{29}$$

Example 2 : Cylinder

반지름 R을 가지고 주축이 e_3 을 따라 존재하는 Cylinder는 다음과 같다.

$$(r)(t^1,t^2) = R\cos t^1\mathbf{e}_1 + R\sin t^1\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3 \tag{30}$$

여기서 $\mathbf{e}_i,\ i=1,2,3$은 Orthonormal basis in $\mathbb{E}^3$.
특히 극좌표계를 사용하면 다음과 같이 표시 가능하다.

$$\varphi = t^1, \quad z = t^2, \quad r = R \tag{31}$$

Example 3 : Sphere

반지름 R with the center at $\mathbf{r}=0$ 를 가진 sphere는

$$\mathbf{r}(t^1,t^2) = R\sin t^1\sin t^2\mathbf{e}_1 + \tag{32}$$

구 좌표계에서는

$$\varphi = t^1, \quad \phi = t^2, \quad r = R \tag{33}$$

일반이론

Parameter t^1, t^2 가 다음과 같은 parametric representation을 가진다고 하면

$$t^1 = t^1(t), \quad t^2 = t^2(t) \tag{34}$$

여기에 대하여 일반적인 평면은 다음 그림과 같다.

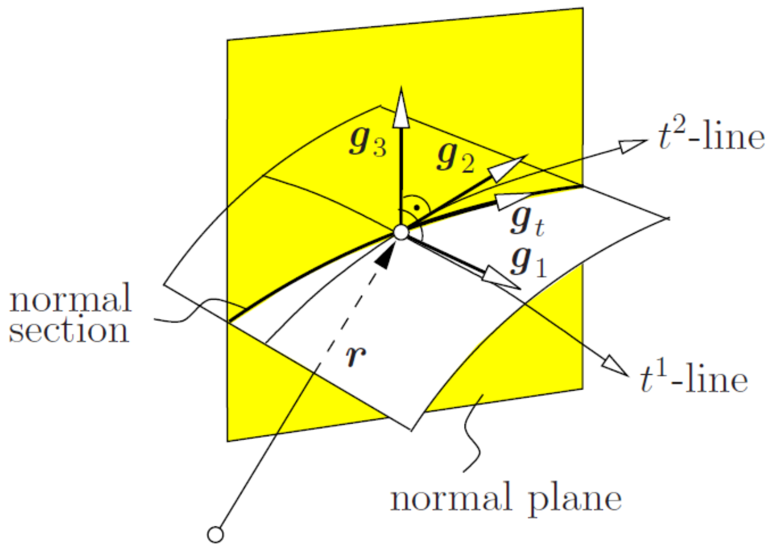

Fig. 3.3. Coordinate lines on the surface, normal section and tangent vectors

Tangent vector

(34) 와 같이 parametric representation이 되어 있다면.

$$\mathbf{g}_t = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t^1}\frac{dt^1}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t^2}\frac{dt^2}{dt} = \mathbf{g}_1\frac{dt^1}{dt} + \mathbf{g}_2\frac{dt^2}{dt} \tag{35}$$

where

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha}, \quad \alpha = 1,2 \tag{36}$$

- **Length of infinitesimal elements of the curve** : **First Fundamental Form**

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g}_t dt \cdot \mathbf{g}_t dt = (\mathbf{g}_1 dt^1 + \mathbf{g}_2 dt^2) \cdot (\mathbf{g}_1 dt^1 + \mathbf{g}_2 dt^2) \tag{37}$$

  with the aid of the abbreviation

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \tag{38}$$

  그러면 (37) 은

$$(ds)^2 = g_{11}(dt^1)^2 + 2g_{12}dt^1 dt^2 + g_{22}(dt^2)^2 \tag{39}$$

  (39)를 **first fundamental form of the surface** 라 한다. 이를 다음과 같이 간단하게 표시할 수도 있다.

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dt^\alpha dt^\beta \tag{40}$$

  이때, $\alpha, \beta = 1, 2$가 된다.

  - n-Dimensional Euclidean space 에서 $g_{\alpha\beta}$ 는 평면에서의 **metric** 이다.
  - 식 (40)과 같이 differential quadratic form 으로 이루어진 metric을 **Riemannian metric** 이라 한다.
    - 즉, Tangent vector의 Inner product가 Riemannian metric 이며, 이를 통해 metric Tensor가 이루어진다.
- **principal normal vector**

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g_1} \times \mathbf{g_2}}{\|\mathbf{g_1} \times \mathbf{g_2}\|} \tag{41}$$

  앞에서 구한 tangent vector $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ 와 principal normal vector를 통해 $\mathbb{E}^3$ basis를 구성하게 된다.

  - **Normal Section** : normal space를 의미한다. 이를 통해 평면에서의 curvature를 생각해 본다

Curvature on surface

Gauss Formula

곡선에서의 curvature를 생각할 수 있겠으나, 그렇게 되면 너무나 많은 평면상의 곡선을 모두 생각해야 할 것이다. 그러므로 Tangent vector와 수직인 Normal section 상에서 curvature를 생각한다.

- 곡선의 방정식에서 $\kappa(s) = \mathbf{a}_{1,s}\mathbf{a}_2$ 에서 $\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{g}_1$ 이고 $\mathbf{a}_{1,s}$ 의 $\mathbf{a}_2$ 를 curvature로 정의된다는 점에서. (원래 curvature $\kappa(s) = \frac{1}{\|\mathbf{a}_{1,s}\|}$ 이지만 $\mathbf{a}_2$의 정의에서 유도됨)
- Christoffel 기호를 사용하여 basis vector $\mathbf{g}_i$ 의 평면 좌표에 대하여 생각해 보면

$$\mathbf{g}_{i,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t^\alpha} = \Gamma_{i\alpha k}\mathbf{g}^k = \Gamma^k_{i\alpha}\mathbf{g}_k \tag{42}$$

  여기서 Christoffel 기호의 정의에 따라

$$\Gamma_{i\alpha k} = \mathbf{g}_{i,\alpha}\mathbf{g}_k, \quad \Gamma^k_{i\alpha} = \mathbf{g}_{i,\alpha}\mathbf{g}^k, \quad i = 1,2,3, \ k = 1,2 \tag{43}$$

  이때, (41) 에 의해 $\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3$ 이므로 $\Gamma_{i\alpha 3} = \Gamma^3_{i\alpha}$ 이다.

  먼저 $\mathbf{g}_\alpha \perp \mathbf{g}_3$ 이고 $\|\mathbf{g}_3\| = 1$ 이므로

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = 0 \Rightarrow \ \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} = 0 \Rightarrow \ \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 = -\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} \tag{44}$$

  그리고

$$\mathbf{g}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{g}_3 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{45}$$

  식 (44) 에서 $\Gamma^3_{\alpha\beta} = -\Gamma_{3\beta\alpha}$, 식 (45) 에서 $\Gamma^3_{3\alpha} = 0, \ \alpha.\beta = 0$ (뒤에 α가 밑으로 간 이유는 $\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3\beta} = \mathbf{g}_{3\beta} \cdot \mathbf{g}^\alpha$ 에서 $\mathbf{g}_{3\beta}$ 는 Matrix 이기 때문이다.)

  식 (42) 에서 다음과 같은 축약형을 얻을 수 있다.

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \Gamma^3_{\alpha\beta} = -\Gamma_{3\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{g}_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{46}$$

이를 통해 다음과 같은 Gauss Formula를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\mathbf{g}_\rho + b_{\alpha\beta}\mathbf{g}_3, \quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2 \tag{47}$$

Gauss Formula (47) 는 단순하게 생각하면 $\rho = 1, 2, 3$ 으로 생각하면 다음과 같이 볼 수 있다. 결국 index 3 만 다르게 빼 놓는 것.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha,\beta} &= \Gamma^k_{\alpha\beta}\mathbf{g}_k, & k = 1, 2, 3,\ \alpha, \beta = 1, 2 \\ &= \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\mathbf{g}_\rho + b_{\alpha,\beta}\mathbf{g}_3, & \rho = 1, 2\ \alpha, \beta = 1, 2 \end{aligned}$$

Covarinat derivative on the surface

Note

- $\mathbf{x}_{,j} = x^i|_j \mathbf{g}_i$ 이며 $\mathbf{A}_{,k} = A^{ij}|_k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ 이다.
- Covariant Derivation 의 정의는 아래에 설명되어 있다. (2장에 설명)

Covariant Derivation의 일반 방정식 (2.83) 부터 살펴보면서 (2.85), (2.86) , (2.87) 를 보면

For vector field $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n)$, The Covarinat derivation is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,j} = (x^i \mathbf{g}_i)_j &= x^i_{,j}\mathbf{g}_i + x^i \mathbf{g}_{i,j} \\ &= x^i_{,j}\mathbf{g}_i + x^i \Gamma^k_{ij}\mathbf{g}_k = (x^i_{,j} + x^k \Gamma^i_{kj})\mathbf{g}_i, \end{aligned}$$

and the contra variant is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,j} = (x^i \mathbf{g}_i)_j &= x_{i,j}\mathbf{g}^i + x_i \mathbf{g}^i_{,j} \\ &= x_{i,j}\mathbf{g}^i - x_i \Gamma^i_{kj}\mathbf{g}^k = (x_{i,j} - x_k \Gamma^k_{ij})\mathbf{g}^i \end{aligned}$$

따라서, (Vector 성분인 $x^i|$ 에 대한 j 성분 미분이면 "+", Differential 성분인 $x_i|$ 성분에 대한 j 성분 이분이면 contra 고로 "-")

$$x^i|_j = x^i_{,j} + x^k \Gamma^i_{kj}, \quad x_i|_j = x_{i,j} - x_k \Gamma^k_{ij} \tag{48}$$

이를 통해 다음과 같이 평면의 Covariant Derivation을 바로 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} f^\alpha|_\beta &= f^\alpha_{,\beta} + f^\rho \Gamma^\rho_{\alpha,\beta}, \quad f_\alpha|_\beta = f_{\alpha,\beta} - f_\rho \Gamma^\rho_{\alpha,\beta} \\ F^{\alpha\beta}|_\gamma &= F^{\alpha\beta}_{,\gamma} + F^{\rho\beta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} + F^{\alpha\rho}\Gamma^\beta_{\rho\gamma} \\ F_{\alpha\beta}|_\gamma &= F_{\alpha\beta,\gamma} - F_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\gamma} - F_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} \\ F^\alpha_{.\beta}|_\gamma &= F^\alpha_{.\beta,\gamma} + F^\rho_{.\beta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} - F^\alpha_{.\beta}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

따라서 (47) 에서 $\mathbf{g}_\alpha|_\beta$ 를 연산하면 에서 위 방정식들의 첫번쨰 방정식의 두번째 항 $f_\alpha|_\beta = f_{\alpha,\beta} - f_\rho \Gamma^\rho_{\alpha,\beta}$ 에서

$$\mathbf{g}_\alpha|_\beta = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha,\beta}\mathbf{g}_\rho = \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\mathbf{g}_\rho + b_{\alpha\beta}\mathbf{g}_3 - \Gamma^\rho_{\alpha,\beta}\mathbf{g}_\rho = b_{\alpha\beta}\mathbf{g}_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{49}$$

또한, (46)에 의해

$$b^\beta_\alpha = b_{\alpha\rho}g^{\rho\beta} = -\Gamma_{3\alpha\rho}g^{\rho\beta} = -\Gamma^\rho_{3\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{50}$$

이를 (42) 에 대입하면, (오직 $i = 3$ 인 경우, 1, 2인 경우는 해당 되지 않는다.)

$$\mathbf{g}_{3,\alpha} = \Gamma_{3\alpha\rho}\mathbf{g}^\rho = \Gamma^\rho_{3\alpha}\mathbf{g}_\rho = -b^\rho_\alpha \mathbf{g}_\rho = \mathbf{g}_3|_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \tag{51}$$

이를 **Weigngarten Formula** 라 한다.

Curvature of Normal Section : second fundamental form

- Normal curvature κ_n 으로 표시된다.
- $\mathbf{a}_2 = \pm g_3$ 으로 놓는다. 일단, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{g}_3$ 으로 가정한다.
- 식 (40) 에서 $(ds)^2 = (\mathbf{g}_t)^2 dtdt = g_{\alpha\beta} dt^\alpha dt^\beta$
- s는 길이로서 (10) 에서 $dt(s) = \|g_t\|^{-1} ds$ 그리고 t 자체는 _1평면인 관계로 t^1, t^2 에 대하여 생각해야 한다. 이를 종합하면

$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\mathbf{a}_{2,s} \cdot \mathbf{a}_1 = -\mathbf{g}_{3,s} \cdot \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} = -\left(\mathbf{g}_{3,t} \frac{dt}{ds}\right) \cdot \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} = -\mathbf{g}_{3,t} \cdot \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|^2} \\ &= -\left(\mathbf{g}_{3,\alpha} \frac{dt^\alpha}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{g}_\beta \frac{dt^\beta}{dt}\right) \|g_t\|^2 = b_{\alpha\beta} \frac{dt^\alpha}{dt} \frac{dt^\beta}{dt} \|g_t\|^2\end{aligned} \tag{52}$$

그러므로

$$\kappa_n = \frac{b_{\alpha\beta} dt^\alpha dt^\beta}{g_{\alpha\beta} dt^\alpha dt^\beta} \tag{53}$$

where the quadratic form

$$b_{\alpha\beta} dt^\alpha dt^\beta = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{g}_3 \tag{54}$$

식 (53) 을 **the second fundamental form of the surface** 라고 한다.

- 여기서 plus/minus 부호는 큰 의미가 없다.
- 만일, Coordinate Line을 지나는 Normal section 의 경우
  - 다시말해, t^1 , 혹은 t^2 중 하나가 constant, 그 경우 하나의 $dt^\rho = 0, \ \rho = 1, 2$ 따라서 $dt^1 dt^1$ 혹은 $dt^2 dt^2$ 만 유의미 하다.

$$\kappa_n|_{t^2=const} = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad \kappa_n|_{t^1=const} = \frac{b_{22}}{g_{22}} \tag{55}$$

  - 이 개념이 훨씬 실제 계산에 유용하다.

Directions of maximal and minimal curvature

- Extreme of the normal curvature condition

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial t^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \tag{56}$$

- 식 (53) 을 다시 쓰면

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) dt^\alpha dt^\beta = 0 \tag{57}$$

- 식 (57) 를 t^α 에 대해 미분하면 간단히 다음과 같다.

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) dt^\beta = 0, \quad \alpha = 1, 2 \tag{58}$$

- 식 (58) 에 $g^{\alpha\rho}$ 곱하고 더하면 위 (58) 은

$$(b^\rho_\beta - \kappa_n \delta^\rho_\beta) dt^\beta = 0, \quad \rho = 1, 2 \tag{59}$$

- 식 (59) 은 대수 방정식의 형태를 띄고 있지만, Tensor Notation에 의해 Matrix 형태이다. 고로 다음과 같이 Determinent를 0 으로 만드는 해를 구해야 한다.

$$\begin{vmatrix} b^1_1 - \kappa_n & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 - \kappa_n \end{vmatrix} = 0 \tag{60}$$

- 이것의 해는

$$(b^1_1 - \kappa_n)(b^2_2 - \kappa_n) - b^1_2 b^2_1 = b^1_1 b^2_2 - (b^1_1 + b^2_2)\kappa_n + \kappa_n^2 - b^1_2 b^2_1 = \kappa_n^2 - b^\alpha_\alpha \kappa_n + |b^\beta_\alpha| = 0 \tag{61}$$

- 식 (61) 에 의해 두개의 principal curvature의 Direction (maximal and minimal)이 나타나게 되고 이 Direction은 **Orthogonal** 하다.
  - 이때, $|b^\beta_\alpha|$는 단순히 절대값이 아니라 $b^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{3\alpha}$ 이므로 Matrix에 대한 Determinent가 된다.
  - 식 (61) 에서 보면 $b^1_1 b^2_2 - b^1_2 b^2_1 = |b^\beta_\alpha|$ 에서 이는 명백
- Normal Section을 생각해 보면 t^1 방향으로 하나의 Section, t^2 방향으로 또 하나의 Section이 존재하는 것이다. 그러므로 평면에서는 두개의 Curvature가 존재한다.

Vieta Theorem : the product of principal curvature

- **Gaussian Curvature**

식 (61) 에서 두 Principal curvature의 곱은 간단히

$$K = \kappa_1, \kappa_2 = |b^\alpha_\beta| = \frac{b}{g^2} \tag{62}$$

이때

$$b = |b_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2, \quad g^2 = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \tag{63}$$

- **Mean Curvature**

또한 principal curvature의 덧셈은

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} b^\alpha_\alpha \tag{64}$$

- Curvature 의 표현
  - 위에서 구한 Gaussian Curvature K와 Mean Curvature H 에서

$$\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K} \tag{65}$$

Sign of Curvature

- **Elliptic** : $b > 0$
  - 즉, 두 Curvature 의 Sign이 동일한 경우 이다.
  - $\mathbf{a}_2$ 가 $\mathbf{g}_3$ 가 같은 방향 ($\mathbf{a}_2 = \pm \mathbf{g}_3$ 에서)
  - 다시말해 어쨌든 볼록한 형태이고 최적화론에서는 우리는 이러한 형태만 관심이 있다 (Hessian이 Positive Definite)
- **Hyperbolic or Saddle** : $b < 0$
- **Parabolic point** : $b = 0$

Note

$b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{g}_\beta = \Gamma_{3\alpha\beta} = \Gamma^\beta_{3\alpha}$ 혹은 식 (46) 이다. 식 (46) 은 $\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3$ 으로 정의되는 방식이다. 어쨌든, 3번째 Normal section쪽의 벡터와 연관되는 2차 편미분이라는 것은 변함이 없다.

Example : Torus

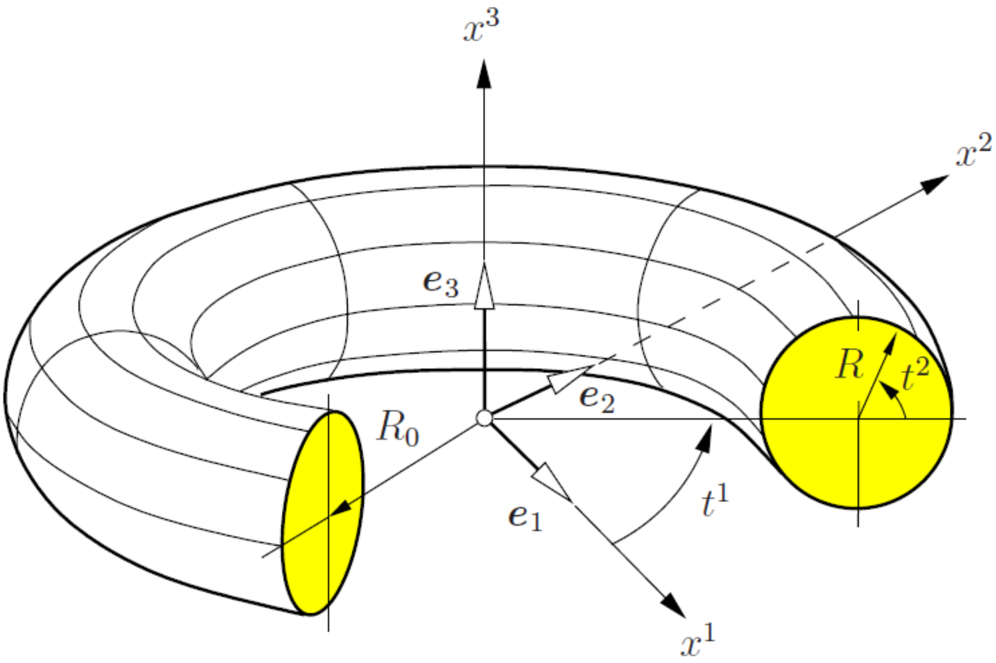

Fig. 3.4. Torus

그림 3.4 와 같이 나타나는 것이 Torus 이다.

Torus 에서는 미분 기하학에서 나타나는 많은 현상들을 보여 주므로 Example로 많이 인용된다.

$R_0 > R$ 에서 Torus의 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{r}(t^1, t^2) = (R_0 + R\cos t^2)\cos t^1 \mathbf{e}_1 + (R_0 + R\cos t^2)\sin t^1 \mathbf{e}_2 + R\sin t^2 \mathbf{e}_3 \tag{66}$$

$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^1}$ 이고, ($\mathbf{g}_2$ 도 마찬가지, 그리고 $\mathbf{g}_3$ 는 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ 의 벡터 곱)

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= -(R_0 + R\cos t^2)\sin t^1 \mathbf{e}_1 + (R_0 + R\cos t^2)\cos t^1 \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{g}_2 &= -R\cos t^1 \sin t^2 \mathbf{e}_1 - R\sin t^1 \sin t^2 \mathbf{e}_2 + R\cos t^2 \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{g}_3 &= \cos t^1 \cos t^2 \mathbf{e}_1 + \sin t^1 \cos t^2 \mathbf{e}_2 + \sin t^2 \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

- First Fundamental form

$g_{11} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$ 에서 (Riemannian Metric)

$$g_{11} = (R_0 + R\cos t^2)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = R^2 \tag{67}$$

이로서 First Fundamental form $(ds)^2$ 을 구할 수 있게 된다.

- Second Fundamental form

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1,1} &= -(R_0 + R\cos t^2)\cos t^1 \mathbf{e}_1 - (R_0 + R\cos t^2)\sin t^1 \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{g}_{1,2} &= \mathbf{g}_{2,1} = R\sin t^1 \sin t^2 \mathbf{e}_1 - R\cos t^1 \sin t^2 \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{g}_{2,2} &= -R\cos t^1 \cos t^2 \mathbf{e}_1 - R\sin t^1 \cos t^2 \mathbf{e}_2 - R\sin t^2 \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

  - To calculate $b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3$

$$b_{11} = \mathbf{g}_{1,1}\mathbf{g}_3 = -(R_0 + R\cos t^2)\cos t^2, \quad b_{12} = b_{21} = \mathbf{g}_{1,2} \cdot \mathbf{g}_3 = 0, \quad b_{22} = \mathbf{g}_{2,2} \cdot \mathbf{g}_3 = -R \tag{68}$$

  - 이에 의해 Curvature를 구하면

$$\kappa_1 = b_1^1 = \frac{b_{11}}{g_{11}} = -\frac{\cos t^2}{R_0 + R\cos t^2}, \quad \kappa_2 = b_2^2 = \frac{b_{22}}{g_{22}} = -R^{-1} \tag{69}$$

  - Torus의 경우 위의 Normal cuvature가 Coordinate line에 존재하는 경우와 일치함을 알 수 있다.

- Gaussian Curvature는 다음 과 같다.

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\cos t^2}{R(R_0 + R\cos t^2)} \tag{70}$$

- $b = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2|_{=0}$ 에서 t^2 의 각도에 따라 , Elliptic, Hyperboilic, parabolic이 결정됨을 알 수 있다.

Application to Shell Theory

Geometry of the shell continuum

일단 기존과 같이 다음과 같은 3차원 Euclidean space를 가정하자.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t^1, t^2), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^3 \tag{71}$$

그리고 다음 그림과 같이 Closed curve C에 bounded 되어 있다고 가정하자.,
아래 그림처럼 Shell Continuum이 정의되어 있다고 가정하면

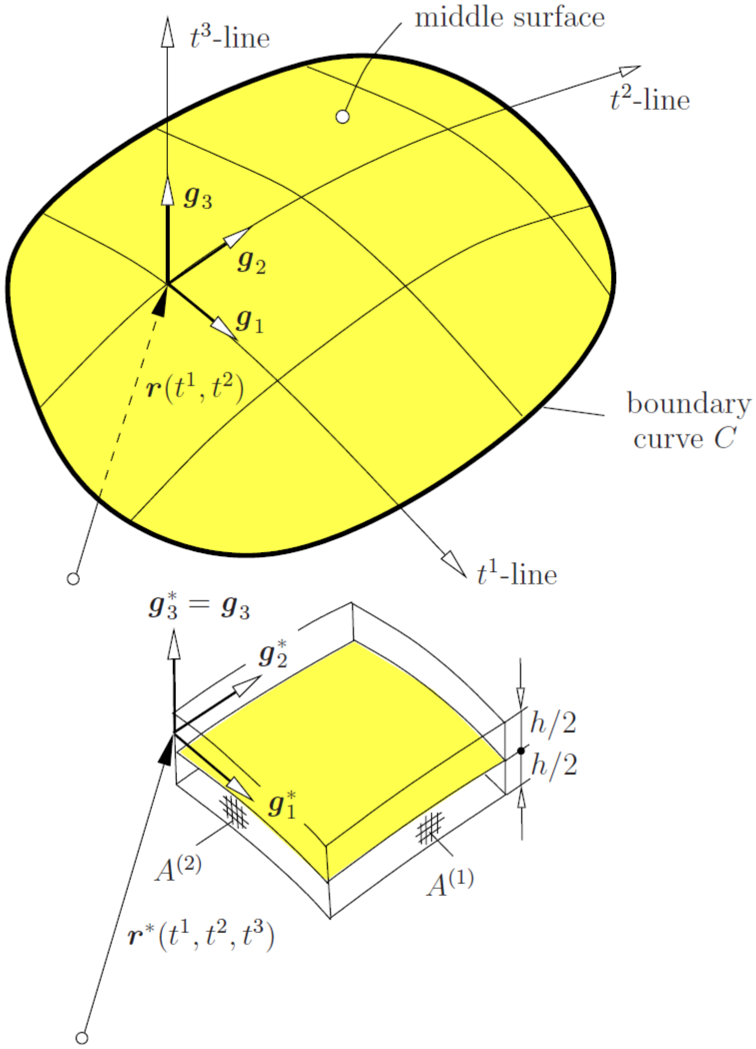

Fig. 3.5. Geometry of the shell continuum

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(t^1, t^2, t^3) = \mathbf{r}(t^1, t^2) + \mathbf{g}_3 t^3 \tag{72}$$

여기서 $\mathbf{g}_3$ 는 $\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|}$ 으로 정의되며, $-h/2 \le t^3 \le h/2$ 이다.

- 식 (71) 은 Shell의 중간에 있는 (그림상의 노란색 부분)의 surface를 의미한다

식 (71), (72)을 사용하여 thickness coordinate 를 계산한다.

$$\mathbf{g}^*_\alpha = \mathbf{r}^*_{,\alpha} = \mathbf{g}_\alpha + t^3\mathbf{g3},\alpha = (\delta^\rho_\alpha - t^3 b^\rho_\alpha)\mathbf{g}_\rho, \quad \alpha = 1,2 \tag{73}$$

where (3.79)에서

$$b^\beta_\alpha = b_{\alpha\rho}g^{\rho\beta} = -\Gamma_{3\alpha\rho}g^{\rho\beta} = -\Gamma^\beta_{3\alpha}, \quad \alpha,\beta = 1,2 \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^*_3 &= \frac{\mathbf{g}^*_1 \times \mathbf{g}^*_2}{\|\mathbf{g}^*_1 \times \mathbf{g}^*_2\|} = \mathbf{r}^*_{,3} = \mathbf{g}_3 \\
g^*_{\alpha\beta} &= \mathbf{g}^*_\alpha \cdot \mathbf{g}^*_\beta = (\delta^\rho_\alpha - t^3 b^\rho_\alpha)(\delta^\rho_\beta - t^3 b^\rho_\beta)\mathbf{g}_\rho \cdot \mathbf{g}_\rho \\
&= \delta^\rho_\alpha \delta^\rho_\beta \mathbf{g}_\rho \cdot \mathbf{g}_\rho - t^3(b^\rho_\alpha \delta^\rho_\beta + b^\rho_\beta \delta^\rho_\alpha)\mathbf{g}_\rho \cdot \mathbf{g}_\rho + (t^3)^2 b^\rho_\alpha b^\rho_\beta \mathbf{g}_\rho \cdot \mathbf{g}_\rho \\
&= \delta^\rho_\alpha \mathbf{g}_\rho \cdot \delta^\rho_\beta \mathbf{g}_\rho - t^3(b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha}) + (t^3)^2 b_{\alpha\rho}g^{\rho\rho}b_{\beta\rho}g^{\rho\rho}, \quad \because b^\rho_\alpha \delta^\rho_\beta = b_{\alpha\beta},\ \rho = 1,2 \\
&= g_{\alpha\beta} - 2t^3 b_{\alpha\beta} + (t^3)^2 b_{\alpha\beta} b^\alpha_\beta
\end{aligned}$$

위 식에서 $(b^\beta_\alpha)^T = b_{\alpha\beta}$ 로 생각하면 된다. 즉, **위 첨자는 Vector 표시의 Column 표기, 아래 첨자는 Row 표기로 생각하면 된다. 그러므로 Inner Product에 의해 하나는 Row 표기 하나는 Column 표기가 된다.**

$$g^* = [\mathbf{g}^*_1 \mathbf{g}^*_2 \mathbf{g}^*_3] = [(\delta^\rho_1 - t^3 b^\rho_1)\mathbf{g}_\rho(\delta^\gamma_2 - t^3 b^\gamma_2)\mathbf{g}_\gamma \mathbf{g}_3] \tag{75}$$

식 (75) 에서 ρ 는 1, 2, γ는 1, 2 이나 ρ 와 겹치지 않는 값이다. 고로 (75) 는

$$g^* = (\delta^\rho_1 - t^3 b^\rho_1)(\delta^\rho_1 - t^3 b^\rho_1)g e_{\rho\gamma 3} = g|\delta^\alpha_\beta - t^3 b^\alpha_\beta| = g[1 - 2t^3 H + (t^3)^2 K] \tag{76}$$

- 식 (76) 에서 $|\cdot|$는 Determinent를 의미.
- **Shell Shifter** : 식 (76) 에서 유도

$$\mu = \frac{g^*}{g} = 1 - 2t^3 H + (t^3)^2 K \tag{77}$$

Internal Force variables

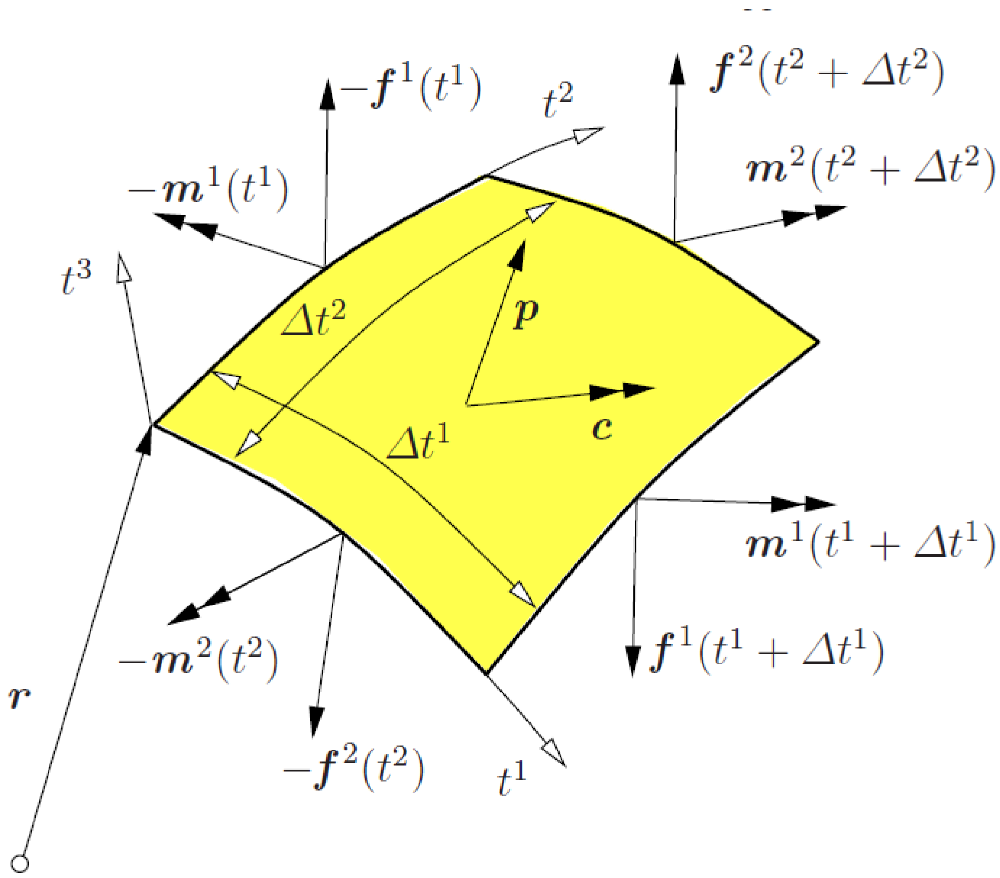

Fig. 3.6. Force variables related to the middle surface of the shell

그림 3.6과 같이 t^α에서 $t^\alpha + \Delta t^\alpha$ 만큼 변화가 있는 surface에서 Internel Force 를 생각한다.

- Force vector $\mathbf{f}^\alpha$ and Couple vector $\mathbf{m}^\alpha$를 Surface 중앙에 다음과 같이 정의된다고 가정하자.

$$\mathbf{f}^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \mu\sigma\mathbf{g}^{*\alpha} dt^3, \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \mu\mathbf{r}^* \times (\sigma\mathbf{g}^{*\alpha}) dt^3, \quad \alpha = 1,2 \tag{78}$$

- σ는 Coordinate line t^3 에서 t^β 로의 Boundary Surface $A^{(\alpha)}$ 에서의 Cauchy Stress Tensor 이다.
- Unit normal to this boundary surface

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{\mathbf{g}^{*\alpha}}{\|\mathbf{g}^{*\alpha}\|} = \frac{\mathbf{g}^{*\alpha}}{\sqrt{g^{*\alpha\alpha}}} = \frac{g^*}{\sqrt{g^*_{\beta\beta}}}\mathbf{g}^{*\alpha}. \quad \beta \neq \alpha = 1,2 \tag{79}$$

여기에서, $\mathbf{g}^{*\alpha} \cdot \mathbf{g}^*_\alpha = \mathbf{g}^{*\alpha} \cdot \mathbf{g}_3 = 0$ 이므로

$$g^{*\alpha\alpha} = \frac{g^*_{\beta\beta}}{g^{*2}}, \quad \beta \neq \alpha = 1,2 \tag{80}$$

이를 Cauchy Theorem $\mathbf{t} = \sigma\mathbf{n}$ 에 따라 식 (78) 에 대입하여 풀면