# Tensor Algebra and Analysis



본 내용은 Tensor Algebra와 Analysis에 관련된 내용을 요약 정리한 것이다.

## Basic Notation (pp 8)

Let $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ be a basis in n-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^n$.
우리는 이러한 경우 즉, **아래 첨자 이면 Column Vector**로 인식한다.

Then, a basis $\mathcal{G}' = \{g^1, g^2, \cdots, g^n\}$ of $\mathbb{E}^n$ is called **dual to** $\mathcal{G}$ if

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \cdots n \tag{1}$$

위에서 이렇게 생각하면 된다. 즉, 위치와 상관없이 $\langle g^j, g_i \rangle$. 반대로 생각해도 상관은 없지만 이렇게 보는 것이 좋다.

### Theorem 1.6 (pp 9)

모든 Basis는 그것의 Dual Basis가 있다는 정리인데, 이 증명 중에 중요한 것은 Inverse Matrix의 Notation이다.

Let $\mathbf{g}^i$ be a basis dual to $\mathbf{g}_j$. Then

$$\mathbf{g}^i = g^{ij}\mathbf{g}_j, \quad \mathbf{g}_i = g_{ij}\mathbf{g}^j \tag{2}$$

Therefore,

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} g_{jk} \mathbf{g}^k \tag{3}$$

Multiplying scalarly with the vectors $\mathbf{g}_l$

$$\delta_l^i = g^{ij} g_{jk} \delta_l^k \tag{4}$$

그러므로 Matrix $[g_{kj}]$ 와 $[g^{kj}]$ 는 Inverse 이다. 즉,

$$[g^{kj}] = [g_{kj}]^{-1} \tag{5}$$

## 몇가지 추가 사항

- For all $\quad g_k \in \mathbb{E}^n,\ g^{ij} \in \mathbf{R}$

$$g^{ij} = g^{ji} = g^i \cdot g^j, \quad g_{ij} = g_{ji} = g_i \cdot g_j \tag{6}$$

- The orthonormal $e_k \in \mathbb{E}^n$ is **self dual** , so that

$$e_i = e^i,\ e_i \cdot e^j = \delta_i^j \tag{7}$$

- $\mathbf{x} = x^i \mathbf{g}_i = x_i \mathbf{g}^i$ 이므로 $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_i,\ x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^i$ 이것은

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^i = x^j \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i = x^j \delta_j^i = x^i \tag{8}$$

식 (8)을 사용하여 일반적인 벡터의 Inner Product를 살펴보면 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$는 각각
$\mathbf{x} = x_i \mathbf{g}^i = x^i \mathbf{g}_i, \mathbf{y} = y_i \mathbf{g}^i = y^i \mathbf{g}_i$ 로 놓으면

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i \mathbf{g}_i \cdot y^j \mathbf{g}_j = x^i y^j g_{ij} = x^i y_i = x_i y^j \tag{9}$$

식 (8), (9)의 경우 Vector/Scalar 구별을 확실하게 하기 위하여 Vector는 굵게 표시 나머지의 경우는 Vector로 일반적으로 정의 하였음

## Vector product

For $a, b, c \in \mathbb{E}^n$. Let $[abc] = (a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$

Let $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, and $\mathbf{g}_k \in \mathbb{E}^3$.

Set $g = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$

Consider the following set of vectors

$$\mathbf{g}^1 = g^{-1}\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{g}^2 = g^{-1}\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}^3 = g^{-1}\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 \tag{10}$$

- proof

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 \\ g\mathbf{g}^1 &= \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 \\ g\mathbf{g}^1 &= \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \quad \because \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 = \delta_1^1 = 1 \\ \mathbf{g}^1 &= g^{-1}\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

## Determinant

**proof of $g^2 = |g_{ij}|$**

Let $\mathbf{g}_k = \beta_k^i \mathbf{e}_i$ , we obtain

$$g = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = [\beta_1^i \mathbf{e}_i, \beta_2^j \mathbf{e}_j, \beta_3^k \mathbf{e}_k] = \beta_1^i \beta_2^j \beta_3^k [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \beta_1^i \beta_2^j \beta_3^k e_{ijk} = |\beta_j^i| \tag{11}$$

즉, $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = e_{ijk}$ vector이기 때문에 이렇게 쓸 수 있으며 $\beta_1^i \beta_2^j \beta_3^k e_{ijk} = |\beta_j^i|$ 는 역시 Determinant의 정의에 의해 (부피 이므로 정 입방체의 부피) 이렇게 쓸 수 있다.

여기서 $e_{ijk}$는 permutation symbol로서 **Levi-Civita symbol** 로 알려져 있으며 다음과 같이 정의된다.

$$e_{ijk} = e^{ijk} = [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \begin{cases} 1 & \text{if } i, j, k \text{ is an even permuataion of } 123 \\ -1 & \text{if } i, j, k \text{ is an odd permuataion of } 123 \\ 0 & Otherwise \end{cases} \tag{12}$$

이 경우에 right hand system에서 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1$ 이 된다.

$g_{ij}$ 의 정의에 의해

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \beta_i^k \mathbf{e}_k \cdot \beta_j^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \beta_i^k \beta_j^k e_k e_k = \sum_{k=1}^{3} \beta_i^k \beta_j^k \tag{13}$$

그러므로 이는

$$[g_{ij}] = [\beta_i^k][\beta_j^k]^T \tag{14}$$

따라서

$$|g_{ij}| = |\beta_i^k||\beta_j^k| = |\beta_i^k|^2 = g^2 \tag{15}$$

**Notice**

- $g = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$ 는 단순히 $\mathbf{g}_k$ 로 구성된

**Vector Product의 특성**

- General Determinant

식 (11) 에서 ($g = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$ 이므로 i,j,k이면 permutation 항이 필요하다.)

$$[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] = e_{ijk} g \tag{16}$$

식 (10) 에서

$$\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = e_{ijk} g \mathbf{g}^k \tag{17}$$

$$\begin{gathered}[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] = \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k = e_{ijk} g \\ \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^k = e_{ijk} g \mathbf{g}^k\end{gathered} \tag{18}$$

- Inverse Notation

마찬가지로 $[\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3]$ 를 생각해 보면 $g = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$ 에서 (5) 를 통해 이 값은 $g^{-1}$ 을 유추할 수 있다.

Let $\mathbf{g}^k = \alpha_i^k e^i$ 라 놓으면 마찬가지로

$$[\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3] = \alpha_i^1 \alpha_j^2 \alpha_k^3 [\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k] = \alpha_i^1 \alpha_j^2 \alpha_k^3 e^{ijk} \tag{19}$$

그런데 다음과 같으므로

$$\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^k = \beta_k^i \alpha_i^k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = \delta_k^k \implies \alpha_i^k = (\beta_k^i)^{-1} \tag{20}$$

식 (20)를 식 (19)에 대입하면

$$[\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3] = \alpha_i^1 \alpha_j^2 \alpha_k^3 e^{ijk} = (\beta_i^1 \beta_j^2 \beta_k^3)^{-1} e^{ijk} = |\beta_i^1|^{-1} = g^{-1} \tag{21}$$

그러므로

$$|g^{ij}| = g^{-2} \tag{22}$$

따라서

$$[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k] = \frac{e^{ijk}}{g} \tag{23}$$

식 (17) 에 대한 Analogy는 다음과 같다.

$$\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j = \frac{e_{ijk}}{g} \mathbf{g}^k \tag{24}$$

- 일반적인 Vector Product

Let $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i$ , $\mathbf{b} = b^j \mathbf{g}_j = b_j \mathbf{g}^j$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^i \mathbf{g}_i) \times (b^j \mathbf{g}_j) = a^i b^j \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = a^i b^j e_{ijk} g \mathbf{g}^k = g \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^2 & \mathbf{g}^3 \end{vmatrix} \tag{25}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{g}^i) \times (b_j \mathbf{g}^j) = a_i b_j \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j = a_i b_j e^{ijk} g^{-1} \mathbf{g}_k = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{vmatrix}$$

만일 Orthonormal Basis 라면 $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = e_{ijk} \mathbf{e}^k = e^{ijk} \mathbf{e}_k$

그러므로

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \tag{26}$$

### Amendment

Vector Product에서 특별히 다음과 같이 ^ 를 정의한다.

$$\mathbf{w} \times \mathbf{x} = \hat{\mathbf{w}} \mathbf{x} \tag{27}$$

이는 일종의 Matrix로 볼 수 있으며 $\mathbf{x}$를 어떤 특정한

## Matrix 연산

$\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots \mathbf{g}_n\}$ 으로 Basis가 주어지고 Dual Basis는 $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \cdots \mathbf{g}^n\}$ 으로 주어진다고 가정하자. 그리고 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ 에 대하여 $\mathbf{x} = g_i \mathbf{g}^i$, $\mathbf{y} = g_j \mathbf{g}^j$ 라 놓으면

- **Right Mapping** (of $\mathbf{x}$ ) : $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $x$ 에서 $y$로 mapping 되므로
- **Left Mapping** (of $\mathbf{y}$) : $\mathbf{y}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x})$ 즉, 출력이 오른쪽으로 가능 Mapping 이기 때문에, 그리고 이를 조금만 변형 시키면 Right Mapping과 동일한 결과가 나오도록 해야한다.

먼저 Left Mapping을 생각해보면

$$\mathbf{y}\mathbf{A} = y_i \mathbf{g}^i \mathbf{A} = y_i [\mathbf{g}^i (\mathbf{A}\mathbf{g}^j)] \mathbf{g}_j \tag{28}$$

일단, Matrix이므로 이렇게 쓴다. 즉, (28) 에서 Matrix는 $[\mathbf{g}^i (\mathbf{A}\mathbf{g}^j)]$ 이렇게 생각한다. 모두 Upper에 있는 것으로 생각한다. 그래서 원래 $\mathbf{g}^i \to \mathbf{g}_j$ 로 보내는 Transform이 된다 .(Left Transform)

그러므로

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y} \cdot (x_j \mathbf{A}\mathbf{g}^j) = y_i x_j [\mathbf{g}^i \mathbf{A}\mathbf{g}^j] \tag{29}$$

# Tensor Product $\otimes$

Tensor product는 두 개의 vetor에서 2nd order tensor를 만들때 유용하다.

- Right Mapping

For $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ and an arbitrary vector $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ , 여기서, $\mathbf{x}$를 $\mathbf{b}$에 Projection된 값으로 $\mathbf{a}$로 나타낸다.

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \tag{30}$$

즉, 출력이 $\mathbf{a}$ , 입력은 $\mathbf{x}$ 시스템은 $\mathbf{b}$ 이다. 즉 입력이 오른쪽에 있으면 오른쪽에 대한 Mapping이 Right Mapping이다. 그리고 당연히 출력 기준 Basis를 사용하게 된다.

- Left Mapping

$$\mathbf{y}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \tag{31}$$

즉, 출력이 $\mathbf{b}$ , 입력은 $\mathbf{y}$ 시스템은 $\mathbf{a}$ 이다. 즉 입력이 왼쪽에 있으면 왼쪽에 대한 Mapping이 Left Mapping이다. 그리고 당연히 출력 기준 Basis를 사용하게 된다.

- Matrix는 Left Mapping이든 Right Mapping 이든 Dimension만 맞으면 같은 결과가 나오도록 해야한다.
- Tensor Product를 통해 Matrix가 정의될 수 있음을 보인다.

## Theorem 1.7

Let $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots \mathbf{f}_n\}$ , $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots \mathbf{g}_n\}$ be two arbitrary bases of $\mathbb{E}^n$ . Then , the tensors $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ represent a basis of $\mathbf{L}in^n$ . The dimension of the vector space $\mathbf{L}in^n$ is thus $n^2$ .

$\mathbf{L}in^n$ 의 element는 Second order Tensor를 의미한다. 즉, Matrix.

- 일반적인 Notation에서 $a \otimes b$ 는 $ab^T$ 로 생각하면 된다. 따라서

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} &= \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{y}^T(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = (\mathbf{y}^T\mathbf{a})\mathbf{b}^T = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}\end{aligned}$$

### proof

Let $\mathbf{A}' = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$

The tensors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}'$ coincide if and only if $\mathbf{A}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \forall x \in \mathbb{E}^n$ 그러므로

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j(x_k \mathbf{g}^k) = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i \otimes x_k \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i x_k \delta^k_j = x_j(\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^i)\mathbf{f}_j \tag{32}$$

또한

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}x_j \mathbf{g}^j = x_j \mathbf{A} \mathbf{g}^j \tag{33}$$

그런데, $\mathbf{x} = \mathbf{g}^i \mathbf{x} \mathbf{g}_i$ 이므로 (33) 는

$$\mathbf{A}\mathbf{g}^j = \mathbf{f}^i(\mathbf{A}\mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i \tag{34}$$

그러므로

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_j(\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j)\mathbf{f}_i = \mathbf{A}'\mathbf{x} \tag{35}$$

따라서 (32) 을 사용하여 1차독립을 증명할 수 있다. 구체적인 증명은 pp18을 본다.

- Theorem 1.7 에 따라 Matrix or Second order tensor는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_{ij}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A^i_{\cdot j}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A^j_{i \cdot}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \tag{36}$$

- $A^i_{\cdot j}$ 에서 $\cdot j$ 는 $j$가 뒷 편 Index라는 의미이다. $\cdot$ 에 해당하는 부분은 위쪽 인덱스 이므로.

- $A_{i\cdot}^{j}$ 에서 $i\cdot$ 는 $i$가 앞 편 Index라는 의미이다. $\cdot$ 에 해당하는 부분은 위쪽 인덱스 이므로.
- 즉, $\cdot$ 는 아래에만 쓰인다.

그러므로

$$\mathbf{A}\mathbf{g}^j = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \mathbf{g}^j = A^{ij}\mathbf{g}_i \implies \mathbf{g}^i \mathbf{A}\mathbf{g}^j = A^{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_i = A^{ij} \tag{37}$$

$i, j$ **위치가 그대로 $\mathbf{g}$ 의 index**가 된다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$A^{ij} = \mathbf{g}^i\mathbf{A}\mathbf{g}^j \quad A_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{A}\mathbf{g}_j \quad A_{i\cdot}^{j} = \mathbf{g}_i\mathbf{A}\mathbf{g}^j \quad A_{\cdot j}^{i} = \mathbf{g}^i\mathbf{A}\mathbf{g}_j \tag{38}$$

# Change of Basis

기본적으로 Basis $\mathbf{g}_k, \bar{\mathbf{g}}_k$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\mathbf{g}_i = a_i^j \bar{\mathbf{g}}_j \tag{39}$$

따라서, 임의의 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{g}_i = x^i a_i^j \bar{\mathbf{g}}_j \tag{40}$$

그러므로 Matrix $\mathbf{A}$ 에 대하여는

$$\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A^{ij}(a_i^k\bar{\mathbf{g}}_k) \otimes (a_j^l\bar{\mathbf{g}}_l) = A^{ij}a_i^k a_j^l \bar{\mathbf{g}}_k \otimes \bar{\mathbf{g}}_l \implies \bar{A}^{kl} = A^{ij}a_i^k a_j^l \tag{41}$$

# Matrix Tranposition

Tranposition은 다음과 같이 정의된다.

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \tag{42}$$

그러므로 $\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ 에 대하여

$$\mathbf{A}^T = (A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)^T = A^{ij}(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)^T = A^{ij}\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i \tag{43}$$

즉, index가 정상적인 경우에는 가까운 것이 가깝게 멀리있는 것이 멀리 이렇게 되었으나 Transpotion이 되면 가까이 index는 먼 Basis를 먼 index는 가까운 Basis를 선택하도록 되어있다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T)_{ij} &= A_{ji}, \quad (\mathbf{A}^T)^{ij} = A^{ji} \\ (\mathbf{A}^T)_{i\cdot}^{j} &= A_{\cdot i}^{j} = g^{jk}A_{k\cdot}^{l}g_{li}, \quad (\mathbf{A}^T)_{\cdot j}^{i} = A_{\cdot j}^{i} = g_{jk}A_{\cdot l}^{k}g^{li} \end{aligned} \tag{44}$$

위 식의 유도 예는 다음과 같다.

$$(\mathbf{A}^T)_{\cdot j}^{i} = \mathbf{g}^i\mathbf{A}^T\mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j\mathbf{A}\mathbf{g}^i = \mathbf{g}_j A_{\cdot l}^{k}\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l\mathbf{g}^i = g_{jk}A_{\cdot l}^{k}g^{li} \tag{45}$$

# Vector Identity

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{46}$$

$$\mathbf{a} \hat{\times} \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \tag{47}$$

Vector Identity는 식 (46) 를 의미한다.

이를 증명하기 위해서는 연습문제 1.14에서 제시한 다음 4개의 명제를 증명해야 한다.

For $n = 3$

- $\delta^{ij}e_{ijk} = 0$

$$\delta^{ij}e_{ijk} = \delta^{ij}(e_{ij1} + e_{ij2} + e_{ij3}) = e_{iik}|_{k=1,2,3} = 0 \tag{48}$$

- $e^{ikm}e_{jkm} = 2\delta^i_j$
    - $k, m$ 이 fix 이면 총 9개의 $i, j$ index가 나온다. 그런데, $k, m$ fix에서 0이 아니려고 하면 $i, j$는 같아야 한다. 고로 $\delta^i_j$. 그리고 하나가 결정되면 Even 방향과 Odd 방향의 Permutation이 되므로 $1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$ 가 된다. 따라서 $2\delta^i_j$.
- $e^{ijk}e_{ijk} = 6$
- n= 3인 경우 Permutation 종류는 Even의 경우 $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ 고로 위의 결과에서 6
- $e^{ijm}e_{klm} = \delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k$
    - $m$만 같고 $i, j$ 가 다른 경우이므로 $(i, k), (j, l)$ 의 index가 같은 경우와 다른 경우 ($(i, k), (j, l)$ ) 를 생각하면 위와 같다.

식 (46) 를 이 결과를 통해 증명하면

$\mathbf{a} = a^i\mathbf{g}_i, \ \mathbf{b} = b^j\mathbf{g}_j, \ \mathbf{c} = c_l\mathbf{g}^l$ 라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a^i b^j \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = a^i b^j e_{ijk} g\mathbf{g}^k \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= c_l(a^i b^j e_{ijk} g\mathbf{g}^k) \times \mathbf{g}^l = c_l a^i b^j g e_{ijk}(\mathbf{g}^k \times \mathbf{g}^l) = c_l a^i b^j g g^{-1} e_{ijk} e^{klm}\mathbf{g}_m \end{aligned} \tag{49}$$

따라서, 이 경우는

$$e_{ijk}e^{klm} = e_{ijk}e^{lmk} = \delta^l_i\delta^m_j - \delta^m_i\delta^l_j \tag{50}$$

에 해당한다. 그러므로 식 (49) 은 다음과 같이 쓸 수 있다,.

$$c_l a^i b^j e_{ijk} e^{klm}\mathbf{g}_m = a^i b^j c_l e_{ijk} e^{klm}\mathbf{g}_m = a^i b^j c_l(\delta^l_i\delta^m_j - \delta^m_i\delta^l_j)\mathbf{g}_m \tag{51}$$

따라서

$$a^i b^j c_l(\delta^l_i\delta^m_j - \delta^m_i\delta^l_j)\mathbf{g}_m = a^i c_i b^j \mathbf{g}_j - b^j c_j a^i \mathbf{g}_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{52}$$

그러므로 (46) 이 증명되었다. (47)의 경우는 간단히 증명된다.

# Scalar Product of Second-Order Tensors

- Definition of Matrix Scalar Product

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}^n \tag{53}$$

이는 다음을 유도한다.

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} : \mathbf{A} = \mathbf{cAd} = \mathbf{dA}^T\mathbf{c} \tag{54}$$

간단히 $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ 라 놓으면 정의에 의해

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} : \mathbf{A} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{d} = \mathbf{cAd} = (\mathbf{cAd})^T = \mathbf{dA}^T\mathbf{c} \tag{55}$$

그러므로 임의의 두 Tensor $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 의 scalar product는

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij} = A^{ij}B_{ij} = A^i_{\cdot j}B^{\cdot j}_{i\cdot} = A^{\cdot j}_{i\cdot}B^i_{\cdot j} \tag{56}$$

그리고 이는 Scalar 이기 때문에 기존의  벡터 scalar product의 특성을 모두 가지고 있다.

식 (54) 의 특성으로 인해 다음이 성립한다.

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{C}^T) : \mathbf{B} \tag{57}$$

- Trace는 다음과 같이 Scalar Product가 된다.

$$tr\mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I} \tag{58}$$

따라서 다음의 특성을 가진다.

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ tr(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B} \\ tr(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= tr(\mathbf{B}\mathbf{A}) \end{aligned}$$