[2018-10-04] Quantization Parameter 분석

Test 결과 본인의 예상과 거의 들어 맞는 결과가 도출 되었으나 Difference가 예상과 달리 -1. 0. 1 의 3가지 값을 가진다. 다시말해 어떤 오차에 의해 $\Delta Q_{q_1, q_2} = Q_{q_1} - 2 \cdot Q_{q_2}, \quad q_2 = q_1 + 6$ 에서

$$-1 < N_{q_1} - 2N_{q_2} < 2$$

의 조건이 깨지기 때문이다. 이 원인은 기본적으로 $|2Q_2|$ **가** $|Q_1|$ **보다 클 수가 없기 때문** 이라는 전제가 깨지기 때문이다. 이를 분석하기 위해서 HEVC 혹은 H.264/AVC의 양자화 과정을 살펴보자.

기본 양자화 방정식

비디오 코덱에서는 기본적으로 다음과 같은 방식으로 Quantization을 수행한다.

$$Q(\mathcal{X}, q) = \left[\frac{1}{q^s} \mathcal{X} \right] \approx \left[\frac{1}{q^s} \mathcal{X} \times 2^{qbits} \right] \gg qbits \tag{1}$$

여기서 $bits$는 14이다.

그런데, 직접 정수 나눗셈을 수행하는 것이 아니라, Shift 연산을 통해 정수 나눗셈을 필요한 정확도를 가지면서 수행하는 것이 비디오 코덱의 기본이다. 이를 위해 기본적인 Quantization 범위를 살펴보면 다음과 같다.

qp	0	1	2	3	4	5	6
q^s	0.625	0.703	0.797	0.891	1.0	1.125	1.25

이를 수식으로 나타내면 다음과 같다고 하면.

$$q^s = 0.625 \cdot 2^{\left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + k \cdot (q \mod 6)} \tag{2}$$

이때, 비례상수 k를 알아보기 위해 위 식을 정리하면 다음과 같은 방정식이 유도된다. 만일 $m = (q \mod 6)$ 이라 하고 m 값일 때의 Quantization Step을 q^s_m 라 하면

$$\begin{aligned} q^s_m &= 0.625 \cdot 2^{\left(\left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + k \cdot m \right)} \\ \frac{q^s_m}{0.625} &= 2^{\left(\left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + k \cdot m \right)} \\ \log_2 \frac{q^s_m}{0.625} &= \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + k \cdot m \\ k &= \frac{1}{m} \cdot \left(\log_2 \frac{q^s_m}{0.625} - \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor \right) \end{aligned} \tag{3}$$

위 표와 같은 결과를 얻기 위해서 $q \in \mathbf{Z}(0, 6)$ 인 경우를 알아보면 $\left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor = 0$ 이므로, 이것의 Least mean square error를 최소화 하는 $\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} k_m$를 알아본다.

다음과 같은 Python 프로그램을 통해 결과를 알아본다.

```
npA = np.array([ 0.625,  0.703,  0.797,  0.891,  1.   ,  1.125])
npQA = npA[1:6]
npK = np.log2(npQA/0.625) * 1/np.array(list(range(1, 6)))

>>>sum(npK)/5
0.17093414099804752
```

m	1	2	3	4	5	Average
k	0.1696685	0.17536177	0.17052308	0.16951798	0.16959938	0.17093414

식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
Q(\mathcal{X},q) &\approx \left[\frac{1}{0.625\cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6}\rfloor + k\cdot m}}\mathcal{X}\times 2^{qbits}\right] \gg qbits \\
&= \left[\frac{8}{5}\cdot 2^{-\left(\lfloor \frac{q}{6}\rfloor + k\cdot m\right)}\mathcal{X}\times 2^{qbits}\right] \gg qbits \\
&= \left[\frac{8}{5}\cdot 2^{qbits - k\cdot m}\mathcal{X}\times 2^{-\lfloor \frac{q}{6}\rfloor}\right] \gg qbits \\
&\approx \left[\frac{8}{5}\cdot 2^{qbits - \left(\log_2 \frac{q_m^s}{0.625} - \lfloor \frac{q}{6}\rfloor\right)}\mathcal{X}\right] \gg \left(qbits + \left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor\right) \\
&= \left[\left(\frac{8}{5}\cdot 2^{qbits - \log_2 \frac{q_m^s}{0.625}}\right)2^{\lfloor \frac{q}{6}\rfloor}\mathcal{X}\right] \gg \left(qbits + \left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor\right) \\
&= \left[\left(\frac{8}{5}\cdot 2^{-\log_2 \frac{q_m^s}{0.625}}\cdot 2^{qbits}\right)\cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6}\rfloor}\mathcal{X}\right] \gg \left(qbits + \left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor\right) \\
&= \left[\left(\frac{8}{5}\cdot \frac{0.625}{q_m^s}\cdot 2^{qbits}\right)\cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6}\rfloor}\mathcal{X}\right] \gg \left(qbits + \left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor\right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{q_m^s}\cdot 2^{qbits}\right)\cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6}\rfloor}\mathcal{X}\right] \gg \left(qbits + \left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)에서 q_m^s 의 값은 $m = (q \mod 6)$ 에 따라 표 1 과 같으므로 $\left(\frac{1}{q_m^s}\cdot 2^{qbits}\right)$ 를 $m \in \mathbf{Z}[0,5]$ 의 값으로 다음 Python 코드로 간단히 계산하면

```
>>>
>>> (1/npA[0:5]) * 16384
array([ 26214.4, 23305.83214794,  20557.08908407,  18388.32772166,
        16384.  , 14563.55555556 ])
```

이를 반올림 하여 정수화 시킨 값과 HEVC의 Quant Scale 값을 비교해 보면 다음과 같다.

m	0	1	2	3	4	5
Eval	26214	23306	20557	18388	16384	14564
HEVC	26214	23302	20560	18396	16384	14564

여기에 입력 데이터의 비트심도 (8/10 bit)와 변환 부호화 크기에 따른 변환 부호화의 스케일을 고려하여 5 비트의 추가 Shift가 필요하다. 이를 고려하면 식 (4)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
Q(\mathcal{X}, q) &\approx \left[\left(\frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits} \right) \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor} \cdot 2^5 \cdot \mathcal{X} \right] \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + 5) \\
&= \left[\left(\frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits} \right) \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} \right] \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + 5)
\end{aligned}
$$

따라서 이 값의 반올림을 한다고 가정하면 다음과 같아야 한다.

$$
\begin{aligned}
Q(\mathcal{X}, q) &\approx \left[\frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} \right] \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + 5) \\
&= \left\lfloor \frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} + f \right\rfloor \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + 5)
\end{aligned}
$$

일반적인 반 올림이 되기 위해서는 f 의 값이 다음과 같아야 한다.

- 외부에서 수행되는 나눗셈 때문에 $2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}$ 이 곱해져야 한다.

$$
f = \frac{1}{2} q_m^s \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}
$$

따라서, Scale Factor $2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}$ 를 생각하지 않는다면 f 는 다음의 범위를 가지는 것이 정상이다.

$$
0.3125 \leq \frac{1}{2} q_m^s \leq 0.5625
$$

HEVC에서 f의 값은 Intra의 경우 $f = \frac{1}{3} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}$ Inter의 경우 $f = \frac{1}{6} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}$ 이다. 그러므로 HEVC에서의 반올림 팩터는 Intra에서 $\frac{1}{3} = 0.3333 \cdots$, Inter에서는 $\frac{1}{6} = 0.16666 \cdots$ 이다. 특히 Inter의 경우에는 지나치게 낮아서 제대로 반올림이 되기에는 낮은 값이다. 이는 상당히 높은 값을 가져야만 반올림되어 값이 수정됨을 의미한다. 이런 경우 다음과 같은 경우가 발생할 수 있다.

- $q_2 = q_1 + 6$ 이고 $f_q = f_0 \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q}{6} \rfloor + 5}$ 이라 하면

$$
\begin{aligned}
f_{q_1} &= f_0 \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_1}{6} \rfloor + 5} \\
f_{q_2} &= \cdot f_0 \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_2}{6} \rfloor + 5} = 2 \cdot f_0 \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_1}{6} \rfloor + 5} = 2 f_{q_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(\mathcal{X}, q_1) &\approx \left\lfloor \frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_1}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} + f_{q_1} \right\rfloor \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q_1}{6} \right\rfloor + 5) = \lfloor A \rfloor \gg B \\
Q(\mathcal{X}, q_2) &\approx \left\lfloor \frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_2}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} + f_{q_2} \right\rfloor \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q_2}{6} \right\rfloor + 5) \\
&= \left\lfloor \frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_1 + 6}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} + f_{q_2} \right\rfloor \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q_1 + 6}{6} \right\rfloor + 5) \\
&= \left\lfloor 2 \cdot \frac{1}{q_m^s} \cdot 2^{qbits + \lfloor \frac{q_1}{6} \rfloor} \cdot \bar{\mathcal{X}} + 2 f_{q_1} \right\rfloor \gg (qbits + \left\lfloor \frac{q_1}{6} \right\rfloor + 5 + 1) = \lfloor 2A \rfloor \gg (B + 1)
\end{aligned}
$$

Quantization 과 Gauss Function

식 (1)은 근사 방정식이다. 그런데, 이것이 등식이 되기 위한 조건을 생각해 보자.

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{q^s}\mathcal{X}\right] &= \left[\frac{1}{q^s}\mathcal{X}\cdot 2^{qbits}\cdot 2^{-qbits}\right] \\ &= \left[\frac{8}{5}\cdot 2^{\left(qbits-\left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor - k\cdot m\right)}\mathcal{X}\cdot 2^{-qbits}\right] \\ &= \left[\frac{1}{10}\cdot 2^{\left(qbits-\left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor +4- k\cdot m\right)}\mathcal{X}\cdot 2^{-qbits}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

정수 $L(q) = qbits - \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor + 4 = 18 - \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor \in \mathbf{Z}$ 를 정의하자.

이 경우 방정식 (5)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{q^s}\mathcal{X}\right] &= \left[\frac{2^{-k\cdot m}}{10}\cdot\mathcal{X}\cdot 2^{L(q)}\cdot 2^{-qbits}\right] \\ &= \left[\frac{2^{-k\cdot m}}{10}\cdot\mathcal{X}\cdot 2^{10+8-\left\lfloor \frac{q}{6}\right\rfloor}\cdot 2^{-qbits}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

식 (6) 에서 $\left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor \in \mathbf{Z}[0,8]$ 이므로 $8 - \left\lfloor \frac{q}{6} \right\rfloor = 2^p$ where $p \in \mathbf{Z}[0,8]$ 그리고 $km \in \mathbf{R}[0,1)$ 이므로

따라서 다음을 만족 시킬 수 있는 정수 $\lambda \in \mathbf{Z}$가 존재한다고 하면,

$$\frac{2^{-k\cdot m}}{10}\cdot\mathcal{X}\cdot 2^{10} = 2^{\lambda} \tag{7}$$

그리고, $\lambda + p \geq qbits \Rightarrow \lambda \geq 14 - p \in \mathbf{Z}$ 이면 근사식이 아닌 Shift에 의한 연산이 등식 조건으로 성립한다. 그러나, 식 (7) 에서

$$\mathcal{X} = 10\cdot 2^{\lambda-10+k\cdot m} = \begin{cases}\in \mathbf{Z} & m=0 \\ \notin \mathbf{Z} & m \in \mathbf{Z}[1,5]\end{cases}$$

즉, q 가 6의 배수인 경우에만 Shift 연산과 Gaussian 함수에 의한 양자화와 동일하게 된다.

그 외의 경우에는,, Shift 연산에 의한 양자화에 오차가 있음을 의미하며, 오차의 크기에 따라, 예상하지 못한 결과가 나타날 수 있음을 의미한다.

Quantization 오차 분석

$q_2 = q_1 + 6$ 이고, $q_1^s = \frac{1}{2} q_2^s$ 일때, Let $\mathcal{X} = q_1 \cdot k + m$ where $0 \leq m < q_1$, then

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \left[k + \frac{1}{q_1}m\right] = \left\lfloor k + \frac{1}{q_1}m + \frac{1}{2}\frac{1}{q_1}q_1\right\rfloor.$$

thereby,

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \begin{cases} k & 0 \leq m < \frac{1}{2}q_1 \\ k+1 & \frac{1}{2}q_1 \leq m < q_1\end{cases}$$

In q_2, by the same way, we can obtain

$$\left[\frac{1}{q_2}\mathcal{X}\right] = \left[\frac{1}{2q_1}\mathcal{X}\right] = \left[\frac{1}{2}k + \frac{1}{2q_1}m\right] = \left\lfloor \frac{1}{2}k + \frac{1}{2q_1}m + \frac{1}{2}\frac{1}{2q_1}2q_1\right\rfloor. \tag{8}$$

Let $k = 2\cdot\bar{k} + n$. In (9), since $m < q_1$, $\frac{m}{2q_1} + \frac{1}{2} < 1$. Therefore,

$$\left[\frac{1}{q_2}\mathcal{X}\right] = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{2}k + \frac{1}{2q_1}m + \frac{1}{2} \right\rfloor = \bar{k}. & n = 0 \\ \left\lfloor \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2q_1}m + \frac{1}{2} \right\rfloor = \bar{k} + 1 & n = 1 \end{cases}$$

It means that the k is odd number, $\left[\frac{1}{q_2}\mathcal{X}\right]$ is $\bar{k}+1$ in spite of which value the remainder m has.

- When k is **odd** value and $m < \frac{1}{2}q_1$

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = 2\bar{k}+1, \quad \left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \bar{k}+1$$

Therefore,

$$Q_1 - 2Q_2 = 2\bar{k} + 1 - 2(\bar{k}+1) = -1$$

- When k is **odd** value and $\frac{1}{2}q_1 \leq m < q_1$

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = (2\bar{k}+1)+1, \quad \left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \bar{k}+1$$

Therefore,

$$Q_1 - 2Q_2 = 2\bar{k} + 2 - 2(\bar{k}+1) = 0$$

- When k is **even** value and $m < \frac{1}{2}q_1$

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = 2\bar{k}, \quad \left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \bar{k}$$

Therefore,

$$Q_1 - 2Q_2 = 2\bar{k} - 2\bar{k} = 0$$

- When k is **even** value and $\frac{1}{2}q_1 \leq m < q_1$

$$\left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = 2\bar{k}+1, \quad \left[\frac{1}{q_1}\mathcal{X}\right] = \bar{k}$$

Therefore,

$$Q_1 - 2Q_2 = 2\bar{k} + 1 - 2\bar{k} = 1$$

Q.E.D.

그러므로, 양자화 모델은 $|2Q_2|$ 가 $|Q_1|$ 보다 1이 더 클 수 있으므로, 이 경우에는

$$\begin{aligned} \Delta Q_{q_1,q_2} &= Q_1 - 2 \cdot Q_2 \\ &= \frac{1}{q_1^s}\mathcal{X} + N_{q_1} - \frac{2}{q_2^s}\mathcal{X} - 2N_{q_2} - 1 \\ &= \frac{1}{q_1^s}\mathcal{X} + N_{q_1} - \frac{2}{2q_1^s}\mathcal{X} - 2N_{q_2} - 1 \\ &= N_{q_1} - 2N_{q_2} - 1 \end{aligned}$$

에서

$$-2 < N_{q_1} - 2N_{q_2} < 1$$

이 된다.

Inverse Quantization

Inverse Qunatization은 기본적으로 다음과 같이 간단히 Quantization Step $q^s \in \mathbf{R}$을 곱하는 것으로 완료된다..

$$Q^{-1}(q, X^Q) = X^Q \cdot q^s \tag{9}$$

하지만, Quantization Step 은 실수이므로 부호화 및 복호화에서는 이를 정수로 바꾸어야 하며 이를 위한 정수화 Scale 변수로 2^6 을 사용한다. 이를 앞에서 유도한 Quantization Step 식 (2)를 사용하여 식 (9)를 다시 나타내면

$$\begin{aligned}
Q^{-1}(q, X^Q) &= X^Q \cdot 0.625 \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor + k \cdot (q \mod 6)} \cdot 2^6 \\
&= X^Q \cdot \frac{5}{8} \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor + k \cdot (q \mod 6)} \cdot 2^3 \cdot 2^3 \\
&= X^Q \cdot 40 \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor + k \cdot (q \mod 6)}
\end{aligned} \tag{10}$$

$m = q \mod 6$ 이고, 위에서 구한 각 m에 대한 k을 통해 $40 \cdot 2^{km}$ 을 HEVC 에서는 **Level Scale** 이라 한다. HEVC 표준에 구현된 값과 다음의 Python Code를 통해 구한 값을 비교하면 다음 표와 같다.

```
>>> npA = np.array([ 0.625,  0.703,  0.797,  0.891,  1.   ,  1.125])
>>> npQA = npA[1:6]
>>> npK = np.log2(npQA/0.625) * 1/np.array(list(range(1, 6)))
>>> npm = list(range(1, 6))
>>> LS = 40 * np.power(2, npk * npm)
```

m	0	1	2	3	4	5
Eval	40.0	44.99	51.01	57.02	64.0	71.99
HEVC	40	45	51	57	64	72

HEVC 표준에서는 식 (10)에 추가적으로 양자화 변환계수의 Scale 값을 추가하게 되는데 이 스케일 값은 2^4 이다. 또한, 입력데이터의 비트심도와 변환 부호화의 크기에 따른 부호화 스케일 값을 위해 위의 값은 2^{shift} 값으로 나누어져야 하며, 여기에 Shift 값으로 나누어지기 때문에 반올림에 의한 정수값을 만들기 위한 항을 추가해야 한다. 이를 추가하게 되면 식 (10)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
Q^{-1}(q, X^Q) &= \left[X^Q \cdot 40 \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor + k \cdot m + 4} \right] \gg shift \\
&= \left\lfloor X^Q \cdot 40 \cdot 2^{\lfloor \frac{q}{6} \rfloor + k \cdot m + 4} + 2^{shift-1} \right\rfloor \gg shift
\end{aligned} \tag{11}$$