KROGH-MODELLEN

Marte Julie Sætra
m.j.satra@fys.uio.no

October 13, 2015

Innledning

Krogh-modellen beskriver hvordan O_2 diffunderer fra en blodåre og ut i vevet rundt. Den tar for seg en aksesymmetrisk geometri der vevet ligger som et sylinder rundt blodåra (også et sylinder). Flere andre antagelser blir også tatt med i modelleringen.

PO2 (P) i vevssylinderet beskrives ved hjelp av en tidsuavhengig diffusjonsligning:

$$D\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial P}{\partial r}) = M_0 \tag{1}$$

med randbetingelsene

$$P = P_{cap} \text{ ved } r = R_{cap}$$

og

$$\partial P/\partial r = 0 \text{ ved } r = R_t$$

der

- r: den radielle koordinaten
- D: vevets O2-diffusivitet
- α: vevets O2-løselighet
- M_0: vevets O2-forbruksrate
- R_{cap}: kapillærradius
- R_t: vevradius
- Krogh-diffusjonskoeffisienten er definert som $K = D\alpha$

De biofysiske parameterene D, α og M_0 kollapser til én ukjent parameter, M. Vi kan derfor skrive ligningen som

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial P}{\partial r}) = M \tag{2}$$

Numerisk løsning

Ved å bruke kjerneregelen, kan vi kan skrive ligning 2 som

$$\frac{\partial P}{\partial r} + r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = Mr \tag{3}$$

Vi definerer den diskrete tilnærminga til P som p_i med punkter r_i i intervaller fra $r_0 = R_{cap}$ til $r_{n+1} = R_t$. Steglengden er definert som $= (R_t - R_{cap})/(n+1)$. Vi har randbetingelsene $p_0 = P_{cap}$ og $p_n = p_{n+1}$.

Den førstederiverte kan diskretiseres med av en Backward Euler-approksimasjon:

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta r} \tag{4}$$

Den andrederiverte kan approksimeres med en Central difference-approksimasjon:

$$\frac{d^2P}{dr^2} \approx \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta r^2} \tag{5}$$

Dette gir oss den diskretiserte ligninga

$$\frac{p_i - p_{i-1}}{dr} + r_i\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{dr^2} = Mr_i \tag{6}$$

som vi også kan skrive som

$$(r_i - dr)P_{i-1} + (dr - 2r_i)P_i + r_iP_{i+1} = Mr_i(dr)^2 \tag{7}$$

Denne ligninga kan skrives som et sett med lineære linginger på formen

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f}, \tag{8}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ triagonal matrise på formen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (dr - r_i) & r_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (r_i - dr) & (dr - r_i) & r_i & 0 & \dots & \dots \\ 0 & (r_i - dr) & (dr - r_i) & r_i & 0 & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & (r_i - dr) & (dr - r_i) & r_i \\ 0 & \dots & & 0 & (r_i - dr) & (dr - r_i) \end{pmatrix} \tag{9}$$

og $f_i = Mr_i(dr)^2$ for $i > 1$ og $f_1 = Mr_1(dr)^2 - a_1p_{cap}$.

f_1 skiller seg ut fordi den håndterer randbetingelsen i p_0. Håndteringa av den andre randbetingelsen kommer litt senere.

Vi kan utnytte at $\mathbf{A}$ er en tridiagonal matrise og skrive den ved hjelp av tre éndimensjonale vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ der

$$\begin{aligned}
a_i &= (r_i - dr) \\
b_i &= (dr - 2r_i) \text{ og} \\
c_i &= r_i.
\end{aligned}$$

Systemet med ligninger kan da skrives på formen

$$a_i p_{i-1} + b_i p_i + c_i p_{i+1} = f_i \tag{10}$$

for $i = 1, 2, ..., n$. Dette settet med ligninger kan løses ganske enkelt med en forlengs og en baklengs substitusjon. Den forlengse substitusjonen har to steg; først gjøre om b-verdiene, deretter f-verdiene. Til sist finner man p-verdiene ved baklengs substitusjon. Algoritmen blir som følger:

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_i &= b_i - \frac{c_{i-1} a_i}{\widetilde{b}_{i-1}} \\
\widetilde{f}_i &= f_i - \frac{\widetilde{f}_{i-1} a_i}{\widetilde{b}_{i-1}} \\
p_i &= \frac{\widetilde{f}_i - c_i p_{i+1}}{\widetilde{b}_i}
\end{aligned}$$

Før man gjør den baklengse substitusjonen, må p_0 (og p_{n+1}) løses eksplisitt. Løsninga som tilfredsstiller randbetingelsen er

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{\widetilde{f}_n}{b_n + c_n} \\
p_{n+1} &= p_n
\end{aligned}$$

Tidsavhengig O_2-transport

Den tidsavhengige modellen vi skal studere senere er gitt som:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [1 + \frac{C_{Mb}}{\alpha} \frac{dS_{Mb}}{dP}]^{-1} \{ D \nabla^2 P - \frac{1}{\alpha} M(P) + \frac{1}{\alpha} D_{Mb} C_{Mb} \nabla \cdot (\frac{dS_{Mb}}{dP} \nabla P) \} \tag{11}$$

der

$$M(s) = \frac{M_0 P}{P + P_{crit}} \tag{12}$$

og

$$S_{Mb}(P) = \frac{P}{P + P_{Mb,50}} \tag{13}$$

og resten er en drøss med konstanter.

Jeg har ikke funnet initial- og randbetingelser.