

内容提要

机械振动

1. 谐振动的特征

简谐振动的微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

简谐振动的运动方程 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

振幅和初相位与初始条件的关系

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

旋转矢量法

2. 简谐振动的能量

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E$$

3. 两个同方向同频率的简谐振动的合成

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

加强条件 $\Delta\varphi = 2k\pi \quad A = A_1 + A_2$

减弱条件 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad A = |A_1 - A_2|$

4. 拍频 振动频率都很大而频率差很小的同方向两个简谐振动的叠加后, 产生拍的现象。拍频等于二分振动的频率差。

$$\nu = |\nu_1 - \nu_2|$$

5. 两相互垂直的谐振动的合成

当两分振动的频率相同时, 合运动轨迹一般为一椭圆。其具体形状决定于两分振动的相位差和振幅。当两分振动的频率不同但为整数比时, 其合运动的轨迹为李萨如图。

6. 阻尼振动

阻尼振动的微分方程
$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

弱阻尼时
$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{其中 } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}).$$

7. 受迫振动

受迫振动的微分方程
$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

其稳定解为与驱动力频率相同的简谐振动。当驱动力的频率等于振动系统的固有频率时发生共振现象。