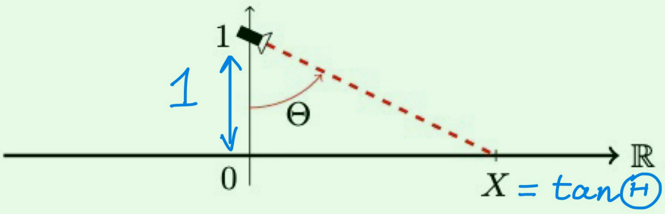
Exercices corrigés

Exercice I On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée Θ, et suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On note X le point marqué au sol par le laser (voir la figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de X.



Exercice II

Loi de Pareto

Une v.a. X suit une loi de Pareto de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & \text{si } \ x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où x_0 est une constante positive. Déterminer la constante k pour que f soit bien une densité et préciser la fonction de répartition de X.

Exercice III

Soit X une v.a. de f.r. F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } \ 1 < x \leq e \\ 1 & \text{si } \ e < x \end{cases}$$

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 1

On voit que $tg(\theta) = X$

La fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(tg(\theta) \leq x)$$
$$= P(\theta \leq \operatorname{arctg} x)$$

$\operatorname{arctg} : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$= F_\theta(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons

$$F_\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) & \text{si } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } t \leq -\pi/2 \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Densité de X

$$F_X'(x) = f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Loi de Cauchy.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \cdots + \int_{0}^{+\infty} \cdots$$

On

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{Ln}(1+x^2)\right]_0^a = \ln(1+a^2)$$

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = +\infty$$

Ce qui montre la divergence de cette intégrale

$\Longrightarrow$ $E(X)$ n'existe pas

Exercice II

$$k \int_{x_0}^{+\infty} x^{-3}\, \mathrm{d}x = \frac{k}{2x_0^2}$$

qui vaut 1 pour $k = 2x_0^2$.

Pour $x < x_0$, la densité est nulle et donc $F(x) = 0$. Pour $x \geq x_0$, on décompose l'intervalle d'intégration de f en deux :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_0} 0\, \mathrm{d}t + 2x_0^2 \int_{x_0}^{x} t^{-3}\, \mathrm{d}t = 1 - \frac{x_0^2}{x^2}$$

Exercice III

Il s'agit bien d'une fonction de répartition, strictement croissante de $F(1) = 0$ à $F(\mathrm{e}) = 1$, de dérivée nulle en dehors de l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$, avec $F'(x) = f(x) = 1/x$ pour $1 < x \leq \mathrm{e}$. On calcule donc :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{1}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{1}^{\mathrm{e}} x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$$

et $V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 3\right)$.

Exercice IV

Lecture de tables : loi normale

a) Si X suit une loi $N(35, 5^{2})$, calculer $P(X < 25)$, $P(37{,}5 < X < 40)$ et $P(32{,}5 < X < 37{,}5)$.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une v.a. Y de loi normale, telle que $P(Y > -3) = 0{,}691\,5$ et $P(Y < 2) = 0{,}977\,2$.

a

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-35}{5} < -2\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}022\,8$$

où Φ est la f.r. de la loi $N(0,1)$. On obtient par le même procédé :

$$P(37{,}5 < X < 40) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5) = 0{,}149\,8$$

et :

$$P(32{,}5 < X < 37{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) = 2\Phi(0{,}5) - 1 = 0{,}383\,0$$

b) Les valeurs fournies pour les probabilités figurent dans la table associées aux nombres 0,5 et 2. En centrant sur $m = E(Y)$ puis divisant par $\sigma = \sqrt{V(Y)}$, les hypothèses se traduisent donc par :

$$P(Y > -3) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} > \frac{-3-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-3-m}{\sigma}\right) = \Phi(0{,}5)$$

$$P(Y < 2) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} < \frac{2-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = \Phi(2)$$

Ce qui conduit au système :

$$\frac{-3-m}{\sigma} = -0{,}5 \quad \text{et} \quad \frac{2-m}{\sigma} = 2$$

de solution $m = -2$ et $\sigma = 2$.