Université Paris Cité

Statistique descriptive bivariée

Couple de variables

M. Mellouk

Objectifs

- **Statistique univariée** : analyse descriptive séparée de chaque variable d'un tableau *individus* × *variables*.
- **Statistique bivariée** : analyse descriptive des variables deux à deux :
  - étude d'un couple de variables statistiques
  - étude de la liaison entre deux variables quantitatives, qualitatives, quantitative/qualitative
  - **étape indispensable de toute analyse de jeux de données : croisement systématique des variables 2 à 2**.
- Statistique descriptive multivariée : Analyse des données.

Données brutes et données groupées

Étude de deux variables X et Y sur une **même population** de taille n :

- x_k et y_k : valeurs prises par X et Y pour un même individu k, $1 \leq k \leq n$.
- **Données brutes** $(x_k, y_k)_{k=1,\cdots,n}$: les n couples d'observations

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Exemple

Extrait des données brutes :

Individu	Sexe X	Salaire horaire Y
1	F	13.25
2	F	12.50
3	H	14.00
4	F	13.00
5	H	7.00
6	F	29.80
...		
599	H	14.50

- Le salaire horaire dépend-il du sexe des individus ?

Exemple

Extrait des données brutes :

Employé	Catégorie de personnel	Age	Région
1	A	58	NE
2	B	42	W
3	A	35	S
4	B	26	NE
5	B	22	W
6	C	32	NW
7	A	42	NE
...	...	...	...
597	C	41	S
598	C	33	NW
599	C	29	S

- La répartition des âges est-elle différente selon la catégorie de personnel (et dans quelle mesure) ?
- La catégorie des employés est-elle liée à la région (et de quelle manière) ?

Extrait des données

```
> head(Donnees)
{\small
  AGE SEXE REGION STAT_MARI SAL_HOR SYNDICAT CATEGORIE NIV_ETUDES NB_PERS NB_ENF REV_FOYER
1  58    F     NE         C   13.25      non         5         43       2      0        11
2  40    M      W         M   12.50      non         7         38       2      0         7
3  29    M      S         C   14.00      non         5         42       2      0        15
4  59    M     NE         D   10.60      oui         3         39       4      1         7
5  51    M      W         M   13.00      non         3         35       8      1        15
6  19    M     NW         C    7.00      non         3         39       6      0        16
```

```
> tail(Donnees)

    AGE SEXE REGION STAT_MARI SAL_HOR SYNDICAT CATEGORIE NIV_ETUDES NB_PERS NB_ENF REV_FOYER
594  63    M     NE         M    10.5      non         4         40       2      0        13
595  51    F      S         M    29.8      non         2         42       2      0        14
596  29    F     NE         C    27.0      oui         1         43       2      0        15
597  57    F     NW         D    21.0      non         4         40       1      0        14
598  29    F      W         M    13.0      oui         5         39       6      4        11
599  47    M      S         C    14.5      non         4         39       1      0        12
}
```

Description des données

```
> dim(Donnees)
[1] 599  11

> attach(Donnees)

> names(Donnees)

[1] "AGE"  "SEXE"  "REGION"  "STAT_MARI"  "SAL_HOR"  "SYNDICAT"  "CATEGORIE"  "NIV_ETUDES"
"NB_PERS"  "NB_ENF"  "REV_FOYER"

> str(Donnees)

'data.frame':    599 obs. of  11 variables:
 $ AGE       : int  58 40 29 59 51 19 64 23 47 66 ...
 $ SEXE      : Factor w/ 2 levels "F","M": 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 ...
 $ REGION    : Factor w/ 4 levels "NE","NW","S",..: 1 4 3 1 4 2 3 1 2 3 ...
 $ STAT_MARI : Factor w/ 5 levels "C","D","M","S",..: 1 3 1 2 3 1 3 1 3 2 ...
 $ SAL_HOR   : num  13.2 12.5 14 10.6 13 ...
 $ SYNDICAT  : Factor w/ 2 levels "non","oui": 1 1 1 2 1 1 1 1 2 1 ...
 $ CATEGORIE : int  5 7 5 3 3 3 9 1 8 5 ...
 $ NIV_ETUDES: int  43 38 42 39 35 39 40 43 40 40 ...
 $ NB_PERS   : int  2 2 2 4 8 6 3 2 3 1 ...
 $ NB_ENF    : int  0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 ...
 $ REV_FOYER : int  11 7 15 7 15 16 13 11 12 8 ...
```

Description des données

```
## Modification du type des variables

Donnees$CATEGORIE=as.factor(Donnees$CATEGORIE)
Donnees$NIV_ETUDES=as.factor(Donnees$NIV_ETUDES)
Donnees$REV_FOYER=as.factor(Donnees$REV_FOYER)
```

```
> str(Donnees)

'data.frame': 599 obs. of  11 variables:
 $ AGE       : int  58 40 29 59 51 19 64 23 47 66 ...
 $ SEXE      : Factor w/ 2 levels "F","M": 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 ...
 $ REGION    : Factor w/ 4 levels "NE","NW","S",..: 1 4 3 1 4 2 3 1 2 3 ...
 $ STAT_MARI : Factor w/ 4 levels "C","D","M","V": 1 3 1 2 3 1 3 1 3 2 ...
 $ SAL_HOR   : num  13.2 12.5 14 10.6 13 ...
 $ SYNDICAT  : Factor w/ 2 levels "non","oui": 1 1 1 2 1 1 1 1 2 1 ...
 $ CATEGORIE : Factor w/ 10 levels "1","2","3","4",..: 5 7 5 3 3 3 9 1 8 5 ...
 $ NIV_ETUDES: Factor w/ 15 levels "32","33","34",..: 12 7 11 8 4 8 9 12 9 9 ...
 $ NB_PERS   : int  2 2 2 4 8 6 3 2 3 1 ...
 $ NB_ENF    : int  0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 ...
 $ REV_FOYER : Factor w/ 16 levels "1","2","3","4",..: 11 7 15 7 15 16 13 11 12 8 ...
```

Résumé des données

```
> summary(Donnees)

      AGE            SEXE    REGION    STAT_MARI     SAL_HOR      SYNDICAT    CATEGORIE      NIV_ETUDES
 Min.    :16.00   F:297   NE:129   C:193     Min.    : 2.0   non:496   2      :133   39     :187
 1st Qu.:29.00   M:302   NW:122   D: 75     1st Qu.:10.5   oui:103   3      :125   40     :148
 Median :42.00            S :200   M:325     Median :15.0             5      : 94   43     :114
 Mean   :41.85            W :148   V:  6     Mean   :17.9             4      : 48   42     : 45
 3rd Qu.:53.50                               3rd Qu.:22.0             1      : 46   44     : 29
 Max.   :80.00                               Max.   :99.0             9      : 39   41     : 22
                                                                      (Other):114   (Other): 54

    NB_PERS          NB_ENF            REV_FOYER
 Min.    : 1.00   Min.    :0.0000   14     : 89
 1st Qu.: 2.00   1st Qu.:0.0000   15     : 77
 Median : 3.00   Median :0.0000   13     : 71
 Mean   : 3.11   Mean   :0.5326   12     : 70
 3rd Qu.: 4.00   3rd Qu.:1.0000   11     : 61
 Max.   :13.00   Max.   :6.0000   16     : 48
                                   (Other):183
```

X et/ou Y qualitatives ou quantitatives discrètes

- $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p$: les p modalités de X (p observations distinctes de X)

- $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_q$: les q modalités de Y (q observations distinctes de Y)

X et/ou Y quantitatives continues

- Valeurs de X regroupées en p classes

$$[e_0^X, e_1^X[, \ldots, [e_{i-1}^X, e_i^X[, \ldots, [e_{p-1}^X, e_p^X[$$

  de centres $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p$

- Valeurs de Y en q classes

$$[e_0^Y, e_1^Y[, \ldots, [e_{j-1}^Y, e_j^Y[, \ldots, [e_{q-1}^Y, e_q^Y[$$

  de centres $y_1, \ldots, y_j \ldots, y_q$

- Confusion parfois entre la classe $[e_{i-1}^X, e_i^X[$ et son centre x_i

Données groupées

- n_{ij} : nombre d'individus pour lesquels à la fois X prend la valeur x_i **et** Y la valeur y_j

$$n_{ij} = \#\{k = 1, \ldots, n \; x_k = x_i \; et \; y_k = y_j\}$$

- Si X est continue, $x_k = x_i$ signifie $x_k \in [e_{i-1}^X, e_i^X[$ de centre x_i

- **Données groupées** : $(x_i, y_j, n_{ij})_{i=1,\ldots,p, \; j=1,\ldots,q}$

Tableaux statistiques et distribution d'une série bivariée

Distribution jointe - Tableau de contingence

- **Distribution jointe en effectifs** de X et de Y :

$$\{(x_i, y_j, n_{ij})\ ;\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q\}$$

- Pour $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$
  - n_{ij} : nombre d'individus possédant la modalité x_i de X **et** la modalité y_j de Y.
  - $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$: nombre d'individus possèdant la modalité x_i ($\in$ classe de centre x_i) de X
  - $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$: nombre d'individus possèdant la modalité y_j de Y
  - $n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} = \sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}$; nombre total d'individus de la population.

Tableau de contingence en effectifs (p lignes, q colonnes)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_q	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1j}	$\ldots$	n_{1q}	$n_{1\bullet}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2j}	$\ldots$	n_{2q}	$n_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\ldots$	n_{ij}	$\ldots$	n_{iq}	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	n_{p2}	$\ldots$	n_{pj}	$\ldots$	n_{pq}	$n_{p\bullet}$
Total	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$\ldots$	$n_{\bullet j}$	$\ldots$	$n_{\bullet q}$	n

Tableau de contingence : SEXE x REGION

```
> TabContEf<-table(SEXE,REGION)
> print(TabContEf) #  affiche le nom des variables

    REGION
SEXE  NE  NW   S   W
   F  61  62  97  77
   M  68  60 103  71

> addmargins(TabContEf)

     REGION
SEXE   NE  NW   S   W Sum
  F    61  62  97  77 297
  M    68  60 103  71 302
  Sum 129 122 200 148 599
```

X : SEXE et Y : REGION

- X de type .... à $p =$ .... modalités.
- Y de type .... 0 $q =$ .... modalités.
- Mesures conjointes de X et Y sur $n =$ .... individus.

Distribution jointe en fréquences

- Pour $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$
  - $f_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{n}$: proportion d'individus possédant la modalité x_i de la variable X **et** la modalité y_j de la variable Y.
  - $f_{i\bullet} = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} f_{ij}$: fréquence de la modalité x_i de X
  - $f_{\bullet j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_{ij}$: fréquence de la modalité y_j de Y
  - $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f_{ij} = \sum_{i=1}^{p} f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} f_{\bullet j}$
- **Distribution jointe en fréquences** de X et de Y :

$$\{(x_i, y_j, f_{ij})\ ;\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q\}$$

Tableau de contingence en fréquences (p lignes, q colonnes)

X \ Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_q	Total
x_1	f_{11}	f_{12}	$\ldots$	f_{1j}	$\ldots$	f_{1q}	$f_{1\bullet}$
x_2	f_{21}	f_{22}	$\ldots$	f_{2j}	$\ldots$	f_{2q}	$f_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	f_{i1}	f_{i2}	$\ldots$	f_{ij}	$\ldots$	f_{iq}	$f_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_p	f_{p1}	f_{p2}	$\ldots$	f_{pj}	$\ldots$	f_{pq}	$f_{p\bullet}$
Total	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	$\ldots$	$f_{\bullet j}$	$\ldots$	$f_{\bullet q}$	1

Tableau de contingence : SEXE x REGION

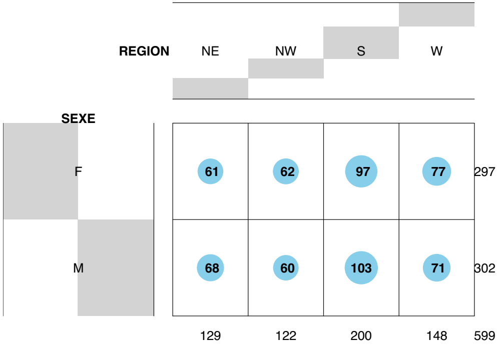
```
> TabContFr<-prop.table(TabContEf)
> print(TabContFr)

    REGION
SEXE        NE        NW         S         W
   F 0.1018364 0.1035058 0.1619366 0.1285476
   M 0.1135225 0.1001669 0.1719533 0.1185309

> print(round(TabContFr,2))
    REGION
SEXE   NE   NW    S    W
   F 0.10 0.10 0.16 0.13
   M 0.11 0.10 0.17 0.12
> addmargins(round(TabContFr,2))
     REGION
SEXE    NE   NW    S    W  Sum
  F   0.10 0.10 0.16 0.13 0.49
  M   0.11 0.10 0.17 0.12 0.50
  Sum 0.21 0.20 0.33 0.25 0.99
```

Tableau de contingence en % : SEXE x REGION

```
> TabContPr<-100*prop.table(TabContEf)
> print(TabContPr)
    REGION
SEXE        NE        NW         S         W
   F 10.18364 10.35058 16.19366 12.85476
   M 11.35225 10.01669 17.19533 11.85309
> print(round(TabContPr,2))
    REGION
SEXE    NE    NW     S     W
   F 10.18 10.35 16.19 12.85
   M 11.35 10.02 17.20 11.85
> addmargins(round(TabContPr,2))
     REGION
SEXE     NE    NW     S     W   Sum
  F   10.18 10.35 16.19 12.85 49.57
  M   11.35 10.02 17.20 11.85 50.42
  Sum 21.53 20.37 33.39 24.70 99.99
```

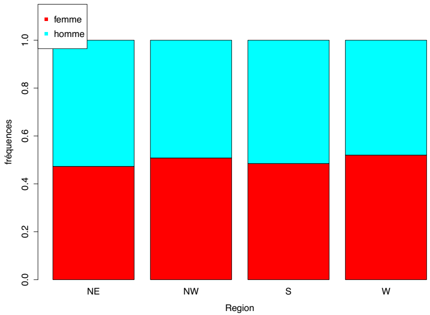
Tableau de contingence : Autre représentation

```
> library(gplots)
> balloonplot(t(TabContEf),dotsize=10,main="")
```



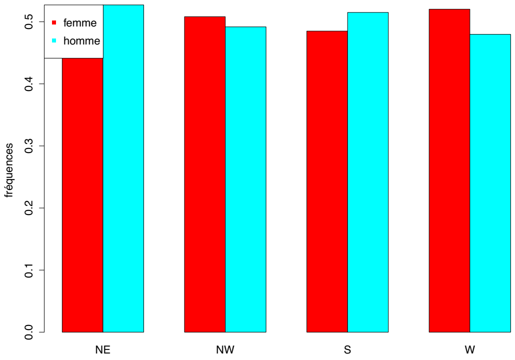
Représentations graphiques

```
> N1=nlevels(SEXE) # nombre de modalites (niveaux) du facteur Sexe
> N2=nlevels(REGION) # nombre de modalites (niveaux) du facteur REGION
> couleurs=rainbow(N1)
> barplot(TabContFr, col=couleurs,2)
> legend("topleft", legend=c("F", "H"), col=couleurs,pch=15)
```



Représentations graphiques

```
> barplot(TabContFr,beside=TRUE,  col=couleurs, 2)
> legend("topleft", legend=c("F", "H"), col=couleurs,pch=15)
```



Représentations graphiques

A ne pas faire (sauf si les modalités sont équilibrées) !

```
> couleurs=rainbow(N2)
> mosaicplot(TabContEf,col=couleurs,main="")
```

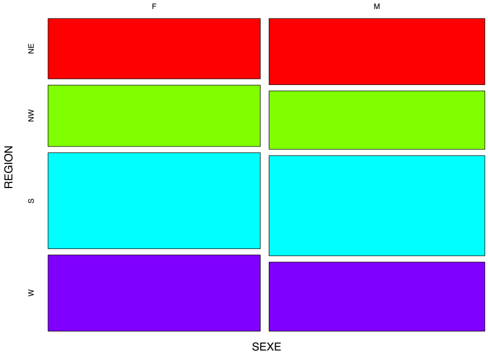


Tableau de contingence : SEXE x SALAIRE

$\Longrightarrow$ Tableau de contingence Qualitatif x Quantitatif.

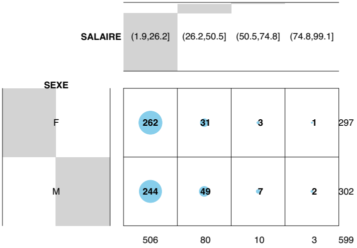
```
> Nclasse=4 # Nombre de classes
> SALAIRE<-cut(SAL_HOR,breaks=Nclasse)
> TabContEf<-table(SEXE,SALAIRE)

> print(TabContEf)
    SALAIRE
SEXE (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
   F        262          31           3           1
   M        244          49           7           2

> addmargins(TabContEf)
     SALAIRE
SEXE  (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1] Sum
  F          262          31           3           1 297
  M          244          49           7           2 302
  Sum        506          80          10           3 599
```

Tableau de contingence : SEXE x SALAIRE

```
> TabContFr<-prop.table(TabContEf)

> print(TabContFr)
    SALAIRE
SEXE  (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
   F 0.437395659 0.051752922 0.005008347 0.001669449
   M 0.407345576 0.081803005 0.011686144 0.003338898
> print(round(TabContFr,2))
    SALAIRE
SEXE (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
   F       0.44        0.05        0.01        0.00
   M       0.41        0.08        0.01        0.00
> addmargins(round(TabContFr,2))
     SALAIRE
SEXE  (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]  Sum
  F         0.44        0.05        0.01        0.00 0.50
  M         0.41        0.08        0.01        0.00 0.50
  Sum       0.85        0.13        0.02        0.00 1.00
```

Tableau de contingence : Autre représentation

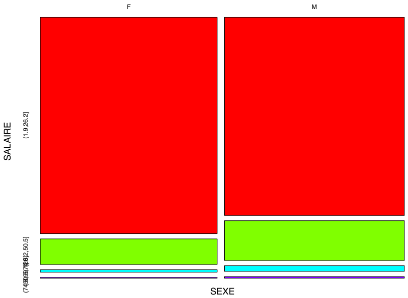
```
> balloonplot(t(TabContEf),dotsize=10,main="")
```



Représentations graphiques

A ne pas faire (sauf si les modalités sont équilibrées) !

```
> couleurs=rainbow(N2)
> mosaicplot(TabContEf,col=couleurs,main="")
```



Représentations graphiques

```
> boxplot(SAL_HOR ~ SEXE,xlab="Sexe",ylab="SALAIRE")
> abline(h=mean(SAL_HOR,na.rm=T),lty=2,col="red",lwd=2)
```

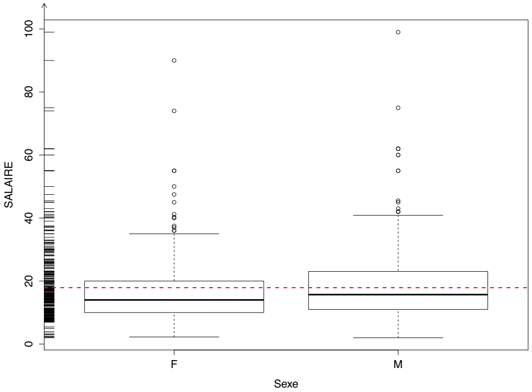


Tableau de contingence : AGE x SALAIRE

$\Longrightarrow$ Tableau de contingence Quantitatif x Quantitatif.

Salaire \ âge (ans) horaire	[16 ;32[	[32 ;48[	[48 ;64[	[64 ;80]	Total
[2 ;26[	180	156	144	26	506
[26 ;50[	11	28	40	1	80
[50 ;76[	0	5	4	1	10
[76 ;100]	1	0	1	1	3
Total	192	189	189	29	599

- X .... à $p = \ldots$ classes.
- Y .... à $q = \ldots$ classes.
- Mesures conjointes de X et Y sur $n = \ldots\ldots$ individus.
- **4** ....

Tableau de contingence : AGE x SALAIRE

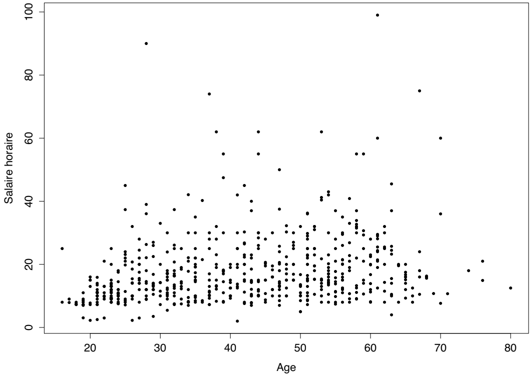
```
> NclasseS=4 # Nombre de classes : Salaire
> SALAIRE<-cut(SAL_HOR,breaks=NclasseS)
> NclasseA=4 # Nombre de classes : Age
> Age<-cut(AGE,breaks=NclasseA)
> TabContEf<-table(Age,SALAIRE)   # Tableau de contingence : Effectif
> print(TabContEf)
           SALAIRE
Age          (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
  (15.9,32]         180          11           0           1
  (32,48]           156          28           5           0
  (48,64]           144          40           4           1
  (64,80.1]          26           1           1           1
> addmargins(TabContEf)
           SALAIRE
Age          (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1] Sum
  (15.9,32]         180          11           0           1 192
  (32,48]           156          28           5           0 189
  (48,64]           144          40           4           1 189
  (64,80.1]          26           1           1           1  29
  Sum               506          80          10           3 599
```

Tableau de contingence : AGE x SALAIRE

```
> TabContFr<-prop.table(TabContEf)   # Tableau de contingence : Frequence

> print(round(TabContFr,2))
           SALAIRE
Age          (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
  (15.9,32]        0.30        0.02        0.00        0.00
  (32,48]          0.26        0.05        0.01        0.00
  (48,64]          0.24        0.07        0.01        0.00
  (64,80.1]        0.04        0.00        0.00        0.00

> addmargins(round(TabContFr,2))
           SALAIRE
Age          (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]  Sum
  (15.9,32]        0.30        0.02        0.00        0.00 0.32
  (32,48]          0.26        0.05        0.01        0.00 0.32
  (48,64]          0.24        0.07        0.01        0.00 0.32
  (64,80.1]        0.04        0.00        0.00        0.00 0.04
  Sum              0.84        0.14        0.02        0.00 1.00
```

Représentation graphique plus appropriée

```
> plot(AGE,SAL_HOR,pch=20,xlab="Age",ylab="Salaire horaire",main="")
```



Distributions marginales

- **Distribution marginale de X en effectifs et en fréquences**

$$\{(x_i, n_{i\bullet})\ ;\ 1 \leq i \leq p\} \qquad \{(x_i, f_{i\bullet})\ ;\ 1 \leq i \leq p\}$$

$\Rightarrow$ Dernière colonne du tableau de contingence en effectifs ou fréquences

- **Distribution marginale de Y en effectifs et en fréquences**

$$\{(y_j, n_{\bullet j})\ ;\ 1 \leq j \leq q\} \qquad \{(y_j, f_{\bullet j})\ ;\ 1 \leq j \leq q\}$$

$\Rightarrow$ Dernière ligne du tableau de contingence en effectifs ou fréquences

Tableaux des effectifs/fréquences de X et de Y

X	effectif	fréquence
x_1	$n_{1\bullet}$	$f_{1\bullet}$
x_2	$n_{2\bullet}$	$f_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$n_{i\bullet}$	$f_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	$n_{p\bullet}$	$f_{p\bullet}$
Total	$n = \sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet}$	1

Y	effectif	fréquence
y_1	$n_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 1}$
y_2	$n_{\bullet 2}$	$f_{\bullet 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$n_{\bullet j}$	$f_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_q	$n_{\bullet q}$	$f_{\bullet q}$
Total	$n = \sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}$	1

Dist. marginale de X
en eff. et en fréq.

Dist. marginale de Y
en eff. et en fréq.

Distributions marginales : SEXE et REGION

Y / Sexe X	WE	NW	S	W	Total
Femme	61	62	97	77	297
Homme	68	60	103	71	302
Total	129	122	200	148	599

```
> margin.table(TabContEf,1)

SEXE
  F   M
297 302

> margin.table(TabContEf,2)

REGION
 NE  NW   S   W
129 122 200 148
```

Distributions marginales : SEXE et REGION

Y / Sexe X	WE	NW	S	W	Total
Femme	0.1018	0.1035	0.1619	0.1285	0.495
Homme	0.1135	0.1002	0.1720	0.1185	0.504
Total	0.215	0.203	0.333	0.247	1

```
> margin.table(TabContFr,1)

SEXE
        F         M
0.4958264 0.5041736

> margin.table(TabContFr,2)

REGION
   NE    NW     S     W
0.215 0.203 0.333 0.247
```

Distributions conditionnelles

- Distributions conditionnelles de X sachant Y (colonne fixée) et de Y sachant X (ligne fixée)

- En effectifs, pour tout $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$

  - n_{ij} : nombre d'individus tq $X = x_i$ **et** $Y = y_j$

  - $n_{i/j}$: nombre d'individus tq $X = x_i$ **parmi** ceux pour lequels $Y = y_j$

  $$n_{i/j} = n_{ij} \quad \text{avec } j \text{ fixé}$$

  - $n_{j/i}$: nombre d'individus tq $Y = y_j$ **parmi** ceux pour lesquels $X = x_i$

  $$n_{j/i} = n_{ij}, \quad i \text{ fixé}$$

- En fréquences, pour tout $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots q$,
  - f_{ij} : proportion d'individus tq $X = x_i$ **et** $Y = y_j$
  - $f_{i/j}$: proportion d'individus pour lesquels $X = x_i$ **parmi** ceux pour lesquels $Y = y_j$.
  $$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}$$
  - $f_{j/i}$: proportion d'individus pour lesquels $Y = y_j$ **parmi** ceux pour lesquels $X = x_i$
  $$f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}$$

Distributions conditionnelles en effectifs et fréquences

- **Distribution conditionnelle en effectifs de X sachant $Y = y_j$**

$$\{(x_i, n_{i/j})\ ;\ 1 \leq i \leq p,\ j \text{ fixé}\}$$

($j^{\text{ème}}$ colonne du tableau de contingence en effectifs)

- **Distribution conditionnelle en effectifs de Y sachant $X = x_i$**

$$\{(y_j, n_{j/i})\ ;\ 1 \leq j \leq q,\ i \text{ fixé}\}$$

($i^{\text{ème}}$ligne du tableau de contingence en effectifs).

- **Distribution conditionnelle en fréquences de X sachant $Y = y_j$:**

$$\{(x_i, f_{i/j})\ ;\ 1 \leq i \leq p,\ j \text{ fixé}\}$$

- **Distribution conditionnelle en fréquences de Y sachant $X = x_i$:**

$$\{(y_j, f_{j/i})\ ;\ 1 \leq j \leq q,\ i \text{ fixé}\}$$

$X/Y = y_j$	effectif	fréquence.
x_1	$n_{1/j} = n_{1j}$	$f_{1/j} = \dfrac{n_{1j}}{n_{\bullet j}}$
x_2	$n_{2/j} = n_{2j}$	$f_{2/j} = \dfrac{n_{2j}}{n_{\bullet j}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$n_{i/j} = n_{ij}$	$f_{i/j} = \dfrac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	$n_{p/j} = n_{pj}$	$f_{p/j} = \dfrac{n_{pj}}{n_{\bullet j}}$
Total	$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$	1

Dist. cond. eff. et fréq. de X sachant $Y = y_j$

$Y/X = x_i$	effectif	fréquence
y_1	$n_{1/i} = n_{i1}$	$f_{1/i} = \frac{n_{i1}}{n_{i\bullet}}$
y_2	$n_{2/i} = n_{i2}$	$f_{2/i} = \frac{n_{i2}}{n_{i\bullet}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$n_{j/i} = n_{ij}$	$f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_q	$n_{q/i} = n_{iq}$	$f_{q/i} = \frac{n_{iq}}{n_{i\bullet}}$
Total	$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$	1

Dist. cond .eff. et fréq. de Y sachant $X = x_i$

- Il y a q distributions conditionnelles de X sachant $Y = y_j$ (autant que les q modalités ou classes de Y)

- Il y a p distributions conditionnelles de Y sachant $X = x_i$ (autant que les p modalités ou classes de X)

Tableau des q distributions conditionnelles de X sachant Y

Distribution conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ dans la colonne j

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q
x_1	$f_{1/1}$	$f_{1/2}$	$\dots$	$f_{1/j}$	$\dots$	$f_{1/q}$
x_2	$f_{2/1}$	$f_{2/2}$	$\dots$	$f_{2/j}$	$\dots$	$f_{2/q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$f_{i/1}$	$f_{i/2}$	$\dots$	$f_{i/j}$	$\dots$	$f_{i/q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_p	$f_{p/1}$	$f_{p/2}$	$\dots$	$f_{p/j}$	$\dots$	$f_{p/q}$
Total	1	1	$\dots$	1	$\dots$	1

Tableau des p distributions conditionnelles de Y sachant X

Distribution conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ dans la ligne i

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q	Total
x_1	$f_{1/1}$	$f_{2/1}$	$\dots$	$f_{j/1}$	$\dots$	$f_{q/1}$	1
x_2	$f_{1/2}$	$f_{2/2}$	$\dots$	$f_{j/2}$	$\dots$	$f_{q/2}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_i	$f_{1/i}$	$f_{2/i}$	$\dots$	$f_{j/i}$	$\dots$	$f_{q/i}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_p	$f_{1/p}$	$f_{2/p}$	$\dots$	$f_{j/p}$	$\dots$	$f_{q/p}$	1

Exemple : Distributions conditionnelles en effectifs de Y sachant X

Salaire Y / Sexe X	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	262	31	3	1	297
Homme	**244**	**49**	**7**	**2**	302
Total	506	80	10	3	599

- **Dist. cond. en effectifs du salaire horaire chez (sachant que) les hommes**

  Parmi les .... hommes, il y a ..... personnes qui gagnent entre 2 et 26 dollars.

- Sur les .... personnes observées, ... sont des hommes et gagnent entre 2 et 26 dollars.

Exemple : Distributions conditionnelles en effectifs de X sachant Y

Salaire Y / Sexe X	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	**262**	31	3	1	297
Homme	**244**	49	7	2	302
Total	506	80	10	3	599

- **Dist. cond. en effectifs du sexe sachant que le salaire horaire est compris entre 2 et 26 dollars**.

  Parmi les ... personnes qui gagnent entre 2 et 26 dollars, il y a ... hommes.

- Sur les ... personnes observés, ... sont des hommes et gagnent entre 2 et 26 dollars.

Tableau des $q = 4$ distributions conditionnelles en fréquences du sexe X sachant le salaire horaire Y

Salaire Y / Sexe X	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	**52%**	39%	30%	33%	50%
Homme	**48%**	61%	70%	67%	50%
Total	100%	100%	100%	100%	100%

- Dist. cond. en fréquences du sexe sachant que le salaire horaire est compris entre 2 et 26 dollars.
- Parmi les ... personnes qui gagnent entre 2 et 26 dollars, il y en a ...% hommes.
- Sur les .... personnes observées, ...% sont des hommes et gagnent entre 2 et 26 dollars

Tableau des $p = 3$ distributions conditionnelles en fréquences du salaire horaire Y selon le sexe X

Salaire Y / Sexe X	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	88%	10%	1%	1%	100%
Homme	**81%**	**16%**	**2%**	**1%**	100%
dist. marg. de Y	85%	13%	2%	0%	100%

- Dist. cond. en fréquences de l'âge sachant la catégorie de personnel.
- Parmi les ... hommes, il y a ...% des personnes qui gagnent entre 2 et 26 dollars.
- Sur les ... personnes observés, ...% sont des hommes et gagnent entre 2 et 26 dollars

Moyennes, variances marginales et conditionnelles

- **UNIQUEMENT** pour variables quantitatives.
- Données brutes : calculs similaires à ceux effectués en statistique univariée après extraction des individus d'intérêt.
- Données groupées : à partir des tableaux de contingence.

Moyennes et variances marginales

- Distribution marginale de X en effectifs/fréquences

$$\{(x_i, n_{i\bullet})\ ;\ 1 \leq i \leq p\} \qquad \{(x_i, f_{i\bullet})\ ;\ 1 \leq i \leq p\}$$

- Distribution marginale de Y en effectifs/fréquences

$$\{(y_j, n_{\bullet j})\ ;\ 1 \leq j \leq q\} \qquad \{(y_j, f_{\bullet j})\ ;\ 1 \leq j \leq q\}$$

- Moyennes marginales $\overline{\mathbf{x}}$ et $\overline{\mathbf{y}}$

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} \mathbf{n_{i\bullet}x_i} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{f_{i\bullet}x_i}$$

$$\overline{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} \mathbf{n_{\bullet j}y_j} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{q}} \mathbf{f_{\bullet j}y_j}$$

Moyennes marginales : AGE et SALAIRE

```
> print(TabContEf)
> addmargins(TabContEf)
           SALAIRE
Age         (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1] Sum
  (15.9,32]        180          11           0           1 192
  (32,48]          156          28           5           0 189
  (48,64]          144          40           4           1 189
  (64,80.1]         26           1           1           1  29
  Sum              506          80          10           3 599
> margin.table(TabContEf,1)
Age
(15.9,32]   (32,48]   (48,64] (64,80.1]
      192       189       189        29
> margin.table(TabContEf,2)
SALAIRE
 (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
        506          80          10           3
## A comparer avec :
> mean(AGE)
[1] 41.84975
> mean(SAL_HOR)
[1] 17.89835
```

- Variances marginales $\sigma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}}$ et $\sigma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{2}}$

$$V(x) = \sigma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{n_{i\bullet}}\left(\mathbf{x_i} - \overline{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{2}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{f_{i\bullet}}\left(\mathbf{x_i} - \overline{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$V(y) = \sigma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{q}} \mathbf{n_{\bullet j}}\left(\mathbf{y_j} - \overline{\mathbf{y}}\right)^{\mathbf{2}} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{q}} \mathbf{f_{\bullet j}}\left(\mathbf{y_j} - \overline{\mathbf{y}}\right)^{\mathbf{2}}$$

- Soit aussi

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet}x_i^2 - (\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_{i\bullet}x_i^2 - (\overline{x})^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}y_j^2 - (\overline{y})^2 = \sum_{j=1}^{q} f_{\bullet j}y_j^2 - (\overline{y})^2$$

Variances marginales : AGE et SALAIRE

```
> print(TabContEf)
> addmargins(TabContEf)
           SALAIRE
Age          (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1] Sum
  (15.9,32]         180          11           0           1 192
  (32,48]           156          28           5           0 189
  (48,64]           144          40           4           1 189
  (64,80.1]          26           1           1           1  29
  Sum               506          80          10           3 599
> margin.table(TabContEf,1)
Age
(15.9,32]   (32,48]   (48,64] (64,80.1]
      192       189       189        29
> margin.table(TabContEf,2)
SALAIRE
 (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
        506          80          10           3
## A comparer avec :
> var(AGE)
[1] 199.275
> var(SAL_HOR)
[1] 127.2247
```

Moyennes et variances conditionnelles

Pour $j = 1, \ldots, q$

- Dist. cond. de X en effectifs/fréquences sachant que $Y = y_j$

$$\{(x_i, n_{i/j}) \; ; \; 1 \leq i \leq p\} \qquad \{(x_i, f_{i/j}) \; ; \; 1 \leq i \leq p\}$$

avec

$$\mathbf{n_{i/j} = n_{ij}} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}}$$

- Moyenne conditionnelle de X sachant que $Y = y_j$: $\bar{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}}$

$$\bar{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{x}}_{/\mathbf{Y}=\mathbf{y_j}} = \frac{1}{\mathbf{n_{\bullet j}}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{n_{i/j} x_i} = \frac{1}{\mathbf{n_{\bullet j}}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{n_{ij} x_i} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{f_{i/j} x_i} \; ;$$

- Variance conditionnelle de X sachant que $Y = y_j$: $\sigma^2_{\mathbf{x/j}}$

$$\sigma^2_{\mathbf{x/j}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_{/\mathbf{Y}=\mathbf{y_j}}) = \frac{1}{\mathbf{n_{\bullet j}}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{n_{i/j}} \left(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}}\right)^2 = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{f_{i/j}} \left(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}}\right)^2 \; .$$

Pour $i = 1, \ldots, p$

- Dist. cond. de Y en effectifs/fréquences sachant que $X = x_i$

$$\{(y_j, n_{j/i})\ ;\ 1 \leq j \leq q\} \qquad \{(y_j, f_{j/i})\ ;\ 1 \leq j \leq q\}$$

avec

$$\mathbf{n_{j/i} = n_{ij}} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}}$$

- Moyenne conditionnelle de Y sachant que $X = x_i$: $\mathbf{\overline{y}_{/i}}$

$$\mathbf{\overline{y}_{/i} = \overline{y}_{/X=x_i} = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{q} n_{j/i} y_j = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{q} f_{j/i} y_j}\ ;$$

- Variance conditionnelle de Y sachant que $X = x_i$: $\sigma^2_{\mathbf{y/i}}$

$$\sigma^2_{\mathbf{y/i}} = \mathbf{V(y_{/X=x_i}) = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{q} n_{j/i} \left(y_j - \overline{y}_{/i}\right)^2 = \sum_{j=1}^{q} f_{j/i} \left(y_j - \overline{y}_{/i}\right)^2}\ .$$

Autre écriture de la variance conditionnelle

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{x/j} &= \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{p} n_{i/j} \left(x_i - \overline{x}_{/j}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{p} n_{ij} x_i^2 - \left(\overline{x}_{/j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} f_{i/j} x_i^2 - \left(\overline{x}_{/j}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{y/i} &= \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{q} n_{j/i} \left(y_j - \overline{y}_{/i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} y_j^2 - \left(\overline{y}_{/i}\right)^2 = \sum_{j=1}^{q} f_{j/i} y_j^2 - \left(\overline{y}_{/i}\right)^2
\end{aligned}
$$

Moyennes et variances conditionnelles du salaire par âge

```
> round(tapply(SAL_HOR, Age, mean),2)
(15.9,32]   (32,48]   (48,64] (64,80.1]
    14.14     18.62     20.83     18.97
> round(tapply(SAL_HOR, Age, var),2)
(15.9,32]   (32,48]   (48,64] (64,80.1]
    80.15    127.34    140.10    215.17
> tapply(SAL_HOR,Age,summary)
$`(15.9,32]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   2.25    9.00   12.00   14.14   16.34   90.00
$`(32,48]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   2.00   10.75   15.00   18.62   22.11   74.00
$`(48,64]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   4.00   13.00   19.00   20.83   25.72   99.00
$`(64,80.1]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   7.65   12.00   16.00   18.97   18.00   75.00
```

Moyennes et variances conditionnelles de l'âge par tranche de salaire

```
> round(tapply(AGE, SALAIRE, mean),2)
 (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
      40.80       47.06       50.30       52.00
> round(tapply(AGE, SALAIRE, var),2)
 (1.9,26.2] (26.2,50.5] (50.5,74.8] (74.8,99.1]
     205.08      123.86      131.12      441.00
> tapply(AGE,SALAIRE,summary)
$`(1.9,26.2]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   16.0    28.0    40.0    40.8    52.0    80.0
$`(26.2,50.5]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  25.00   38.75   49.00   47.06   56.25   70.00
$`(50.5,74.8]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  37.00   40.25   48.50   50.30   58.75   70.00
$`(74.8,99.1]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   28.0    44.5    61.0    52.0    64.0    67.0
```

Lien entre moyennes marginales et conditionnelles

$\Longrightarrow$ On peut retrouver la moyenne marginale (générale) en calculant la moyenne pondérée des moyennes conditionnelles.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}\overline{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{q}} \mathbf{f}_{\bullet\mathbf{j}}\overline{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}} \\ \overline{\mathbf{y}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet}\overline{\mathbf{y}}_{/\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{f}_{\mathbf{i}\bullet}\overline{\mathbf{y}}_{/\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Décomposition de la variance

$\Longrightarrow$ On peut pas retrouver la variance marginale à partir des variances conditionnelles.

Variance marginale = variance des moyennes conditionnelles + moyenne des variances conditionnelles.

$$\begin{aligned} \sigma^2 \mathbf{x} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}\left(\overline{\mathbf{x}}_{/\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{x}}\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_{\bullet j}\sigma^2_{\mathbf{x}/\mathbf{j}} \\ \sigma^2_{\mathbf{y}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet}\left(\overline{\mathbf{y}}_{/\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{y}}\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i\bullet}\sigma^2_{\mathbf{y}/\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Remarque

- On peut calculer les moyennes et les variances conditionnelles d'une variable quantitative sachant les modalités d'une variable qualitative.
- Mais la réciproque est fausse ! Evident !

Exemple :

SEXE X \ Salaire Y	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	88%	10%	1%	1%	100%
Homme	81%	16%	2%	1%	100%
dist. marg. de Y	85%	13%	2%	0%	100%

- Le salaire horaire moyen de l'ensemble des personnes observés est de $17,9$ dollars $\Rightarrow \overline{y} = 17,9$
- Le salaire horaire moyen des femmes A est de $16,6$ dollars $\Rightarrow \overline{y}_{/A} = 16,6$
- Le salaire horaire moyen des hommes B est de $19,17$ dollars $\Rightarrow \overline{y}_{/B} = 19,17$
- $17,9 = \overline{y} = \sum_{i=1}^{p} f_{i\bullet}\overline{y}_{/i} = 0,4959 * 16,6 + 0,5041 * 19,17$ $\Longrightarrow$ voir Slide 52.

Exemple :

SEXE X \ Salaire Y	[2 ;26[	[26,50[	[50,76[	[76,100[	Total
Femme	88%	10%	1%	1%	100%
Homme	81%	16%	2%	1%	100%
dist. marg. de Y	85%	13%	2%	0%	100%

- La variance marginale du salaire horaire est $\sigma_y^2 = 127,22$.
- La variance du salaire horaire des femmes est $\sigma^2_{y/F} = 105,84$.
- La variance du salaire horaire des hommes est $\sigma^2_{y/M} = 145,39$.

Moyennes et variances conditionnelles du salaire horaire par sexe

```
> round(tapply(SAL_HOR, SEXE, mean),2)
    F     M
16.60 19.17

> round(tapply(SAL_HOR, SEXE, var),2)
     F      M
105.84 145.39

> tapply(SAL_HOR,SEXE,summary)
$F
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   2.25   10.00   14.00   16.60   20.00   90.00

$M
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   2.00   11.00   15.70   19.17   23.04   99.00
```