Variables aléatoires continues — Exercices corrigés

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-5;15]$. Calculer :

a) $P(X \leqslant 2)$

Correction :

La fonction densité de probabilité de la loi uniforme sur $[-5;15]$ est $f(x) = \dfrac{1}{15-(-5)} = \dfrac{1}{20}$,

et donc, $P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_{-5}^{2} f(x)\,dx = \left[\dfrac{x}{20}\right]_{-5}^{2} = \dfrac{2}{20} - \dfrac{-5}{20} = \dfrac{7}{20}$

b) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$

Correction :

De même qu'au a), $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\dfrac{x}{20}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{20} - \dfrac{-1}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

c) $P_{(X\geqslant 0)}(-1 \leqslant X \leqslant 2)$

Correction :

$$P_{(X\geqslant 0)}(-1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{P\Big((X \geqslant 0) \cap (-1 \leqslant X \leqslant 2)\Big)}{P(X \geqslant 0)} = \frac{P(0 \leqslant X \leqslant 2)}{P(X \geqslant 0)} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{2}{15}$$

d) Soit Y la variable aléatoire égale à $\dfrac{X+5}{10}$. Calculer $P_{(X\leqslant 10)}(Y \geqslant 1)$.

Correction :

$$\begin{aligned} P_{(X\leqslant 10)}(Y \geqslant 1) &= P_{(X\leqslant 10)}\left(\frac{X+5}{10} \geqslant 1\right) = P_{(X\leqslant 10)}(X+5 \geqslant 10) = P_{(X\leqslant 10)}(X \geqslant 5) \\ &= \frac{P\Big((X \leqslant 10) \cap (X \geqslant 5)\Big)}{P(X \leqslant 10)} = \frac{P(5 \leqslant X \leqslant 10)}{P(X \leqslant 10)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$. Calculer :

a) $P(X \leqslant 2)$

Correction :

La fonction densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$ est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 3\,e^{-3x}$,

et donc, $P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_{0}^{2} 3e^{-3x}\,dx = \left[-e^{-3x}\right]_{0}^{2} = -e^{-3\times 2} + e^{-3\times 0} = -e^{-6} + 1$

b) $P(X \geqslant 4)$

Correction :

$$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \int_{0}^{4} 3e^{-3x}\,dx = 1 - \left[-e^{-3x}\right]_{0}^{4} = 1 - \left(-e^{-12} + e^{0}\right) = e^{-12}$$

c) $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$

Correction :

$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 3e^{-3x}\,dx = \Big[-e^{-3x}\Big]_2^4 = -e^{-12} + e^{-6}$

d) $P_{(X\geqslant 2)}(X \geqslant 4)$

Correction :

$$P_{(X\geqslant 2)}(X \geqslant 4) = \frac{P\Big((X\geqslant 2)\cap(X\geqslant 4)\Big)}{P(X\geqslant 2)} = \frac{P(X\geqslant 4)}{P(X\geqslant 2)} = \frac{e^{-12}}{e^{-6}} = e^{-12+6} = e^{-6}$$

e) $P_{(X\geqslant 122)}(X \geqslant 124)$

Correction :

$$P_{(X\geqslant 122)}(X \geqslant 124) = \frac{P\Big((X\geqslant 122)\cap(X\geqslant 124)\Big)}{P(X\geqslant 122)} = \frac{P(X\geqslant 124)}{P(X\geqslant 122)} = \frac{e^{-3\times 124}}{e^{-3\times 122}} = e^{-6}$$

f) Soit deux réels $a>0$ et $h>0$. Montrer que la probabilité $P_{(X\geqslant a)}(X \geqslant a+h)$ ne dépend pas de a.

Correction :

$$P_{(X\geqslant a)}(X \geqslant a+h) = \frac{P\Big((X\geqslant a)\cap(X\geqslant a+h)\Big)}{P(X\geqslant a)} = \frac{P(X\geqslant a+h)}{P(X\geqslant a)}$$

avec, $P(X\geqslant a) = 1 - P(X<a) = 1 - \displaystyle\int_0^a 3e^{-3x}\,dx = 1 - \Big[-e^{-3x}\Big]_0^a = 1 - \Big(-e^{-3a}+1\Big) = e^{-3a}$

et de même, $P(X\geqslant a) = e^{-3(a+h)}$,

d'où, $P_{(X\geqslant a)}(X \geqslant a+h) = \dfrac{P(X\geqslant a+h)}{P(X\geqslant a)} = \dfrac{e^{-3\times(a+h)}}{e^{-3\times a}} = e^{-3\times(a+h)+3\times a} = e^{-3a}$.

Cette probabilité ne dépend donc effectivement pas de a.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(500; 20^2)$.
Pour Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite , on note et donne $a = P(Z\leqslant 0)$, $b = P(Z\leqslant 0,5) \simeq, 0,6915$, $c = P(Z\leqslant 1) \simeq 0,8413$, $d = P(Z\leqslant 2) \simeq 0,9772$,

Exprimer en fonction de a, b, c et d, puis donner une valeur approchée de :

a) $P(X\leqslant 520)$

Correction :

Le calcul peut se faire directement à la calculatrice (à utiliser donc pour vérifier le résultat), mais ici on doit exprimer cette probabilité en fonction des données a, b, c et d de l'énoncé.
On doit donc se ramener à la loi normale centrée réduite.
Soit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-500}{20}$; alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, et

$$P(X\leqslant 520) = P\left(\frac{X-500}{20} \leqslant \frac{520-500}{20}\right) = P(Z\leqslant 1) = c \simeq 0,8413$$

b) $P(X\geqslant 540)$

Correction :

$P(X\geqslant 540) = 1 - P(X<540) = 1 - P\left(\dfrac{X-500}{20} < \dfrac{540-500}{20}\right) = 1 - P(Z<2) = 1 - d \simeq 0,0228$

(car $P(Z<2) = P(Z\leqslant 2)$, pour Z une variable aléatoire **continue**).

c) $P\left(460 \leqslant X \leqslant 540\right)$

<u>Correction :</u>

$$\begin{aligned} P\left(460 \leqslant X \leqslant 540\right) &= P\left(\frac{460-500}{20} \leqslant \frac{X-500}{20} \leqslant \frac{540-500}{20}\right) = P\left(-2 \leqslant Z \leqslant 2\right) \\ &= P\left(Z \leqslant 2\right) - P\left(Z \leqslant -2\right) = P\left(Z \leqslant 2\right) - \Big(1 - P\left(Z \leqslant 2\right)\Big) \\ &= d - \Big(1-d\Big) = 2d - 1 \simeq 0,9544 \end{aligned}$$

d) $P_{(X \geqslant 500)}\left(X \leqslant 510\right)$

<u>Correction :</u>

$$P_{(X \geqslant 500)}\left(X \leqslant 510\right) = \frac{P\Big((X \geqslant 500) \cap (X \leqslant 510)\Big)}{P\left(X \geqslant 500\right)} = \frac{P\left(500 \leqslant X \leqslant 510\right)}{P\left(X \geqslant 500\right)}$$

avec,

$$\begin{aligned} P\left(500 \leqslant X \leqslant 510\right) &= P\left(\frac{500-500}{20} \leqslant \frac{X-500}{20} \leqslant \frac{510-500}{20}\right) \\ &= P\left(0 \leqslant Z \leqslant 0,5\right) \\ &= P\left(Z \leqslant 0,5\right) - P\left(Z \leqslant 0\right) = b - a \end{aligned}$$

et $P\left(X \geqslant 500\right) = P\left(\dfrac{X-500}{20} \geqslant \dfrac{500-500}{20}\right) = P\left(Z \geqslant 0\right) = 1 - P\left(Z < 0\right) = 1 - a.$

Ainsi, $P_{(X \geqslant 500)}\left(X \leqslant 510\right) = \dfrac{b-a}{1-a} \simeq 0,383$

(On se rappelle pour ce dernier calcul que, la loi normale centrée réduite est symétrique, et donc, $a = P\left(Z \leqslant 0\right) = P\left(Z \geqslant 0\right) = 0,5$).

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(200; 15^2\right)$.

Déterminer le réel $u > 0$ tel que $P\left(200 - 2u \leqslant X \leqslant 200 + 2u\right) = 0,9$.

<u>Correction :</u>

On se ramène à la loi normale centrée réduite : soit la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-200}{15}$ qui suit donc la loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors

$$\begin{aligned} P\left(200-2u \leqslant X \leqslant 200+2u\right) = 0,9 &\iff P\left(\frac{200-2u-200}{15} \leqslant \frac{X-200}{15} \leqslant \frac{200+2u-200}{15}\right) = 0,9 \\ &\iff P\left(-\frac{2u}{15} \leqslant Y \leqslant \frac{2u}{15}\right) = 0,9 \\ &\iff P\left(Y \leqslant \frac{2u}{15}\right) - P\left(Y \leqslant -\frac{2u}{15}\right) = 0,9 \\ &\iff P\left(Y \leqslant \frac{2u}{15}\right) - \left(1 - P\left(Y \leqslant \frac{2u}{15}\right)\right) = 0,9 \\ &\iff 2 \times P\left(Y \leqslant \frac{2u}{15}\right) - 1 = 0,9 \\ &\iff P\left(Y \leqslant \frac{2u}{15}\right) = \frac{1+0,9}{2} = 0,95 \end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, ou de la table de valeurs de la loi normale centré réduite, on trouve que $P\left(Y \leqslant 1,65\right) \simeq 0,95$.

On doit donc avoir $\dfrac{2u}{15} \simeq 1,65 \iff u \simeq \dfrac{1,65 \times 15}{2} \simeq 12,375$

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu; \sigma^2\right)$.

On donne $\mu = E(X) = 120$.
Déterminer l'écart-type σ tel que $P(100 \leqslant X \leqslant 140) = 0,92$.

Correction :

On se ramène à la loi normale centrée réduite : soit la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-120}{\sigma}$ qui suit donc la loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors

$$\begin{aligned}
P(100 \leqslant X \leqslant 140) = 0,92 \quad &\iff P\left(\frac{100-120}{\sigma} \leqslant \frac{X-120}{\sigma} \leqslant \frac{140-120}{\sigma}\right) = 0,92 \\
&\iff P\left(-\frac{20}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) = 0,92 \\
&\iff P\left(Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) - P\left(Y \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right) - = 0,92 \\
&\iff P\left(Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right)\right) = 0,92 \\
&\iff 2P\left(Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) - 1 = 0,92 \\
&\iff P\left(Y \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) = \frac{0,92+1}{2} = 0,96
\end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, ou de la table de valeurs de la loi normale centré réduite, on trouve que $P(Y \leqslant 1,76) \simeq 0,96$,

et on doit donc avoir $\dfrac{20}{\sigma} \simeq 1,76 \iff \sigma \simeq \dfrac{20}{1,76} \simeq 11,36$.

Exercice 6 *Surréservation d'une compagnie aérienne*

Une compagnie utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Une étude statistique montre que 5 passagers sur 100 ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement. On considérera ainsi que la probabilité qu'un passager ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement est de 0,05.

1. La compagnie accepte 327 réservations sur un vol.
   Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

   Correction :
   On répète $n = 327$ fois le tirage aléatoire d'un passager. C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est "le passager se présente à l'embarquement", événement dont la probabilité est $p = 1 - 0,05 = 0,95$.
   Ces répétitions sont identiques et indépendantes (on suppose que chaque personne se présente ou non à l'embarquement indépendamment du choix des autres passagers).
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement, c'est-à-dire le nombre de succès dans les 327 répétitions, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(327; 0,95)$.

   b. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ? Les paramètres de la loi seront déterminés à 10^{-2} près.

   Correction :
   Comme $n = 327 \geqslant 30$, $np = 310,95 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 16,35 \geqslant 5$, d'après le théorème de Moivre-Laplace, la loi de probabilité de X peut-être approchée par la loi normale de paramètre $\mu = np = 310,65$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \simeq 3,94$.

   c. En utilisant l'approximation par la loi normale, calculer $P(X \leqslant 320)$.
   Penser vous que le risque pris par la compagnie en acceptant 327 réservations soit important ?

   Correction :

Avec cette approximation,

$$\begin{aligned}P(X \leqslant 320) &\simeq P\left(\frac{X-310,65}{3,94} \leqslant \frac{320-310,65}{3,94}\right) \simeq P\left(\frac{X-310,65}{3,94} \leqslant 2,37\right)\\ &\simeq \Pi(2,37) \simeq 0,99\end{aligned}$$

où on a utilisé la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Π (dont les valeurs sont données dans la table ou calculées par la calculatrice).

Le risque pris par la compagnie d'avoir plus de passagers qui présentent à l'embarquement que de places réellement disponible est faible, il est inférieur à 1 %.

2. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même vol 330 réservations ? 335 réservations ?

Correction :
En procédant de même, on trouve avec 330 réservations :

$$P\left(X \leqslant 320\right) \simeq P\left(\frac{X-313,5}{3,96} \leqslant \frac{320-313,5}{3,96}\right) \simeq P\left(\frac{X-313,5}{3,96} \leqslant 1,64\right) \simeq \Pi(1,64) \simeq 0,95$$

et, avec 335 réservations :

$$P\left(X \leqslant 320\right) \simeq P\left(\frac{X-318,25}{3,99} \leqslant \frac{320-318,25}{3,99}\right) \simeq P\left(\frac{X-318,25}{3,99} \leqslant 0,44\right) \simeq \Pi(0,44) \simeq 0,67$$

Ainsi, avec 330 réservations, le risque qu'il y ait plus de passagers se présentant à l'embarquement que de places disponibles reste inférieur à 5 %, tandis qu'avec 335 réservations ce risque devient de l'ordre de 33 % (environ 1 chance sur 3).
Ce dernier cas paraît alors déjà bien moins raisonnable.

3. La compagnie accepte 337 réservation sur ce même vol d'une capacité de 320 passagers.
310 personnes sont déjà présentes à l'embarquement. Quelle est la probabilité que moins de 320 personnes se présentent en tout à l'embarquement ?

Correction :
En procédant de même que précédemment, avec 337 réservations, on recherche la probabilité conditionnelle :

$$P_{(X\geqslant 310)}\left(X \leqslant 320\right) = \frac{P\Big((X \geqslant 310) \cap (X \leqslant 320)\Big)}{P\left(X \geqslant 310\right)} = \frac{P\left(310 \leqslant X \leqslant 320\right)}{P\left(X \geqslant 310\right)}$$

avec,

$$\begin{aligned}P\left(310 \leqslant X \leqslant 320\right) &\simeq P\left(\frac{310-320,15}{4} \leqslant \frac{X-320,15}{4} \leqslant \frac{320-320,15}{4}\right)\\ &\simeq P\left(-2,54 \leqslant \frac{X-320,15}{4} \leqslant -0,04\right)\\ &\simeq \Pi(-0,04) - \Pi(-2,54)\\ &\simeq 1-\Pi(0,04) - (1-\Pi(2,54))\\ &\simeq \Pi(2,54) - \Pi(0,04) \simeq 0,478\end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned}
P\left(X \geqslant 310\right) & \simeq P\left(\frac{X-320,15}{4} \geqslant \frac{310-320,15}{4}\right) \simeq P\left(\frac{X-320,15}{4} \geqslant -2,54\right) \\
& \simeq 1-\Pi(-2,54) \simeq 1-(1-\Pi(2,54)) \\
& \simeq \Pi(2,54) \simeq 0,994
\end{aligned}$$

Au final, on a donc, $P_{(X \geqslant 310)}\left(X \leqslant 320\right) \simeq \dfrac{0,478}{0,994} \simeq 0,48$.

Exercice 7 Une entreprise fabrique des brioches en grande quantité.

On pèse les boules de pâte avant cuisson. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule de pâte, associe sa masse. On admet que X suit la loi normale de moyenne 700 g et d'écart type 20 g.

1. Seules les boules dont la masse est comprise entre 666 g et 732 g sont acceptées à la cuisson. Quelle est la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, soit acceptée à la cuisson ?

   Correction :
   Une boule est acceptée à la cuisson si $(666 \leqslant X \leqslant 732)$ dont la probabilité est :

   $$(666 \leqslant X \leqslant 732) = P\Big(\frac{666-700}{20} \leqslant \frac{X-700}{20} \leqslant \frac{32-700}{20}\Big) = P\Big(-1,7 \leqslant Y \leqslant 1,6\Big)$$

   où $Y = \dfrac{X-700}{20}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, et donc, en notant Π sa fonction dé répartion,

   $$(666 \leqslant X \leqslant 732) = \Pi(1,6) - \Pi(-1,7) = \Pi(1,6) - (1-\Pi(1,7)) = \Pi(1,6) + \Pi(1,7) - 1 \simeq 0,90$$

   Remarque : le calcul de $(666 \leqslant X \leqslant 732)$ *peut aussi se faire directement à l'aide de la calculatrice, néanmoins, cette démarche est à connaître et est de plus incontournable pour la question suivante.)*

2. Déterminer le réel positif h afin que l'on ait : $P(700-h \leqslant X \leqslant 700+h) \geqslant 0,95$.
   Enoncer ce résultat à l'aide d'une phrase.

   Correction :
   Avec les mêmes notations qu'à la question précédente :

   $$\begin{aligned}
   P(700-h \leqslant X \leqslant 700+h) & = P\left(\frac{700-h-700}{20} \leqslant \frac{X-700}{20} \leqslant \frac{700+h-700}{20}\right) \\
   & = P\left(-\frac{h}{20} \leqslant Y \leqslant \frac{h}{20}\right) \\
   & = \Pi\left(\frac{h}{20}\right) - \Pi\left(-\frac{h}{20}\right) \\
   & = \Pi\left(\frac{h}{20}\right) - \left(1-\Pi\left(\frac{h}{20}\right)\right) \\
   & = 2\Pi\left(\frac{h}{20}\right) - 1
   \end{aligned}$$

   et ainsi,

   $$\begin{aligned}
   P(700-h \leqslant X \leqslant 700+h) \geqslant 0,95 & \iff 2\Pi\left(\frac{h}{20}\right) - 1 \geqslant 0,95 \\
   & \iff \Pi\left(\frac{h}{20}\right) \geqslant \frac{0,95+1}{2} = 0,975
   \end{aligned}$$

A l'aide de la table des valeurs de Π ou de la calculatrice, on trouve que $\Pi(x) \geqslant 0,975$ dès que $x \geqslant 1,89$.

On doit donc avoir $\dfrac{h}{20} \simeq 1,89 \iff h \simeq 1,89 \times 20 \simeq 37,8$.

Ce résultat siginifie que plus de 95 % des boules de pâte ont une masse comprise entre $700-h \simeq 662,2$g et $700+h \simeq 737,8$g.

3. On admet que 8% des boules sont refusées à la cuisson. On prélève au hasard, successivement et avec remise, n boules dans la production. On note Y_n la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de n boules, associe le nombre de boules qui seront refusées à la cuisson. Cette variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale.

   Dans le cas $n = 10$,

   a. calculer la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, exactement 3 boules refusées à la cuisson ;

   Correction :

   Y_{10} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,08)$, et donc la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, exactement 3 boules refusées à la cuisson, est :

$$P\left(Y_{10}=3\right)=\binom{10}{3}p^3(1-p)^7 \simeq 0,034$$

   b. calculer la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, au moins 7 boules acceptées à la cuisson.

   Correction :

   La probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, au moins 7 boules acceptées à la cuisson, soit aussi strictement moins de 3 boules refusées, est :

$$\begin{aligned} P\left(Y_{10}<3\right) &= P\left(Y_{10}=0\right)+P\left(Y_{10}=1\right)+P\left(Y_{10}=2\right) \\ &= \binom{10}{0}p^0(1-p)^{10}+\binom{10}{1}p^1(1-p)^9+\binom{10}{2}p^2(1-p)^8 \\ &\simeq 0,96 \end{aligned}$$

Exercice 8 Une ligne de transmission entre un émetteur et un récepteur transporte des pages de texte, chaque page étant représentée par 100 000 bits.

La probabilité pour qu'un bit soit erroné est estimé à 0,0001 et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.

Partie A. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs lors de la transmission d'une page.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

   Calculer la moyenne et l'écart type de X.

   Correction :

   Pour transmettre une page, on répète $n = 100\,000$ fois la transmission d'un bit, de manière identique et indépendante.

   La variable aléatoire X compte le nombre de bits erronés, ce qui arrive avec la probabilité $p = 10^{-4}$, sur ces 100 000 répétitions. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10^5; 10^{-4})$.

   Sa moyenne est donc $E(X)=np=10^5\times10^{-4}=10$, et son écart-type $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)} \simeq 3,16$.

2. On admet que cette loi peut être approchée par une loi normale de paramètres $m = 10$ et $\sigma = \sqrt{10}$. Dans ces conditions, déterminer la probabilité pour qu'une page comporte au plus 15 erreurs.

   Correction :
   La probabilité qu'une page comporte au plus 15 erreurs et alors

$$P\left(X \leqslant 15\right) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{10}} \leqslant \frac{15-10}{\sqrt{10}}\right) \simeq P\left(U \leqslant 1,58\right)$$

   où la variable aléatoire $U = \dfrac{X-10}{\sqrt{10}}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, et donc,

$$P\left(X \leqslant 15\right) \simeq 0,94$$

Partie B. Pour corriger les erreurs commises à la suite de la transmission d'une page, on transmet cette page autant de fois qu'il le faut jusqu'à l'obtention d'une page sans erreur.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de transmissions (d'une même page) nécessaires pour obtenir une page sans erreur. On suppose que $p = 0,05$ est la probabilité de transmission d'une page sans erreur et $q = 1-p$ est la probabilité de transmission d'une page avec erreur.

On admet que Y suit la loi de probabilité P définie par $P(Y = n) = pq^{n-1}$; pour tout n entier naturel non nul.

a. Calculer $P(Y \leqslant 5)$.

   Correction :
   On cherche la probabilité :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 5) &= P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) \\ &= pq^0 + pq^1 + pq^2 + pq^3 + pq^4 \\ &\simeq 0,23 \end{aligned}$$

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(Y \leqslant n) = 1 - q^n$.

   Correction :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n) &= P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + \cdots + P(Y=n) \\ &= pq^0 + pq^1 + pq^2 + \cdots + pq^{n-1} \\ &= p\left(q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

   or, $q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q, soit $\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1-q^n}{p}$, car $p = 1-q$, et donc, finalement on a bien,

$$P(Y \leqslant n) = p\frac{1-q^n}{p} = 1 - q^n$$

Exercice 9

On souhaite connaître le nombre de poissons vivants dans un lac clos. Pour cela, on prélève 500 poissons au hasard dans ce lac, on les marque puis on les relâche dans le lac.

Quelques jours plus tard, on prélève à nouveau aléatoirement 500 poissons dans le lac. Parmi ces 500 poissons, on en compte 24 qui sont marqués.

On suppose que pendant la période d'étude le nombre N de poissons dans le lac est stable.

1. Quelles sont les proportions p et p' de poissons marqués dans l'échantillon prélevé et dans le lac ?

   Correction :

   On a compté 24 poissons marqués sur l'échantillon de 500, $p = \dfrac{24}{500} = 0,048 = 4,8\,\%$, tandis que dans le lac il y a en tout 500 poissons marqués soit $p' = \dfrac{500}{N}$.

2. Donner, à 10^{-3} près, l'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion de poissons marqués dans le lac.

   Correction :

   L'intervalle de confiance au niveau de 95 % pour une proportion $p = 0,048$ dans un échantillon de taille $n = 500$ est :

$$I = \left[\ p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\ \right] = \left[\ 0,048 - \frac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,048 + \frac{1}{\sqrt{500}}\ \right] \simeq \left[\ 0,003\ ;\ 0,093\ \right]$$

3. En déduire un encadrement de la proportion du nombre de poissons dans le lac puis du nombre de poissons dans le lac.

   Correction :

   L'intervalle de confiance précédent est un encadrement pour la proportion p' dans la population complète (ici tout le lac), et donc, on a

$$0,003 \leqslant p' = \frac{500}{N} \leqslant 0,093 \iff \frac{500}{0,093} \leqslant N \leqslant \frac{500}{0,003} \iff 5\,376 \leqslant N \leqslant 166\,666$$

   La proportion p' de poissons marqués dans le lac est comprise entre $0,3\,\%$ et $9,3\,\%$, et le nombnre de poissons est compris entre 5 376 et 166 666 (à un niveau de confiance de 95 %).

4. On considère que la population de poissons est trop importante pour le lac (dimensions, ressources, ...) lorsqu'il y a plus de 50 000 poissons qui y vivent.

   En supposant que la proportion p de poissons marqués reste la même dans un échantillon prélevé de plus grande taille, quelle devrait-être cette taille pour que l'on puissse affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le lac n'est pas surpeuplé en poissons ?

   Correction :

   On cherche la taille n de l'échantillon de manière à pouvoir déterminer si $N' = 50\,000$ est dans l'intervalle de confiance ou non.

   On doit donc imposer à la borne supérieure de l'intervalle de confiance :

$$\begin{aligned}
\frac{500}{50\,000} \leqslant 0,048 + \frac{1}{\sqrt{n}} &\iff \frac{500}{50\,000} - 0,048 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\iff \frac{1}{\dfrac{500}{50\,000} - 0,048} \leqslant \sqrt{n} \\
&\iff \left(\frac{1}{\dfrac{500}{50\,000} - 0,048}\right)^2 \leqslant n
\end{aligned}$$

   soit, $n \geqslant 692$: il faudrait donc prélever un échantillon d'au moins 692 poissons.

La loi binomiale et la loi de Poisson peuvent être approchées par une loi normale

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Si $n > 30$, $\min\{np; n(1-p)\} > 5$ alors :

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Logique car $E[X] = np$ et $V[X] = np(1-p)$