TD1 : Calcul Matriciel, Normes, Inégalités et Décompositions

Exercice 1 : Calcul matriciel et vectoriel

Soient les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $u \cdot v$ et $\|u\|$.

(b) Calculer Au et $A^\top v$.

Exercice 2 : Norme et inégalité de Cauchy-Schwarz

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$: $|\sum x_i y_i| \leq \|x\|\|y\|$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 3 : Décomposition spectrale

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : SVD d'une matrice 2x2

Trouver la SVD de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : Inégalité de Cauchy-Schwarz matricielle

Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| \leq \|A\|_F \|x\|$ où $\|A\|_F$ est la norme de Frobenius.

Exercice 6 : Propriétés de la norme spectrale

Montrer que $\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_{\max}(A)$.

Exercice 7 : Décomposition spectrale d'une matrice 3x3

Diagonaliser $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : **SVD et approximation de rang inférieur**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver sa SVD et l'approximation de rang 1.

Exercice 9 : **Relation entre valeurs propres et valeurs singulières**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres.