分数阶微积分

Fractional Calculus

作者：JiPan

组织：Harbin Institute of Technology

邮箱：jipan_2014@126.com

时间：July 16, 2019

版本：V1.alpha.0.8

ElegantLaTeX Program

这书我没写过，不过确实在理———*ah Q LuXun*

序

前言

目　录

符号表

符号表、符号规定

偶数空一页

附录 A

参考文献

重要字体颜色

目录级别（三级）

1.1.1.1

第一部分

微积分基础（含线性代数、概率统计和实、复变函函数）

第 1 章　初等数学

第 2 章 微积分

第 3 章 线性代数

第 4 章 概率论

第 5 章 统计学

第 6 章 复变函数

6.1 复数与复变函数

在本章中，首先结束复数系统的代数和几何结构。然后引进复变量的函数——复变函数，进而介绍他的连续性和连续性。

6.1.1 复数和四则运算

6.1.1.1 复数的基本概念

为了便于后文说明，这里简单介绍复数的基本定义和结论。

定义 6.1. 复数

设 x 和 y 为两实数，称形如

$$z = x + \mathrm{i}y\ (或 x + y\mathrm{i}) \tag{6.1}$$

的数称为**复数**。这里 i 为虚数单位，具有性质 $\mathrm{i}^2 = 1$,x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部。复数集记为 $\mathbb{C}$，常记做

$$x = \mathrm{Re}\,(z), \quad y = \mathrm{Im}\,(z).$$

♣

虚部为零的数称为实数, 简记为 $x + \mathrm{i}0 = x$, 实数集记为 $\mathbb{R}$。因此，全体实数为复数的一部分，特别的有 $0 + \mathrm{i}0 = 0$，即当且实部和虚部同时为零时 z 为零。当虚部不为零的复数称为**虚数**，而实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**。如果量两复数的实部和虚部分别相等，则称两复数**相等**。

6.1.1.2 复数的四则运算

定理 6.1. 复数的四则运算

z_1 和 z_2 为两个复数

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2.$$

定义两复数 z_1,z_2 的四则运算为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2) \tag{6.2-1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 - y_2) \tag{6.2-2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + y_1x_2) \tag{6.2-3}$$

若 $z_2 \neq 0$，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{6.2-4}$$

♡

从式 6.2-1∼ 式 6.2-4 可知复数经过四则运算仍然是复数，又从式 6.2-1 和式 6.2-2 以及虚部和实部的定义可知

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Re}\,(z_1) \pm \mathrm{Re}\,(z_2) \tag{6.3-1}$$

$$\mathrm{Im}\,(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Im}\,(z_1) \pm \mathrm{Re}\,(z_2) \tag{6.3-2}$$

例 6.1

1. 化简 $i^3, \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.
2. 计算 (1) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$, (2) $\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} - \dfrac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}$。
3. 已知 $x + y\mathrm{i} = (2x-1) + y^2\mathrm{i}$，求 $z = x + \mathrm{i}y$。

解

1. $-\mathrm{i}, \quad -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$。
2. (1) $-\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}\mathrm{i}$, (2) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{5\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$。
3. $z = 1$ 或 $z = 1 + \mathrm{i}$。

6.1.2 复数的几何表示

6.1.2.1 复数的向量表示和复平面

任意给定的一个复数 $z = x + \mathrm{i}$，都有一对有序实数 (x, y) 相对应，而任意一对有序实数 (x, y) 都与直角坐标系 $P\,(x, y)$ 对应。只有能够建立盘面上的全部点与全体复数简的一一对应关系，于是可用直角坐标系中的点来表示复数, 如图 6.1所示。

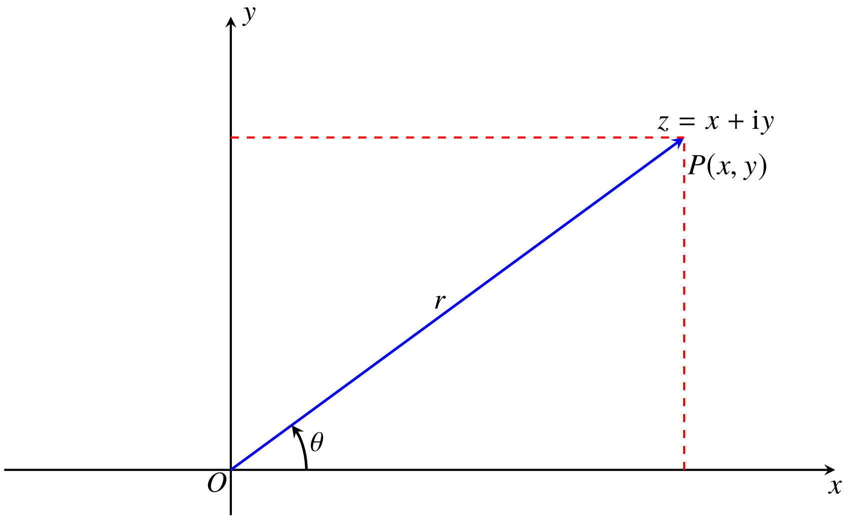

图 6.1: 向量的几何表示

表示复数 z 的直角坐标平面称为复平面或 z– 平面，复平面也常用集合 $\mathbb{C}$ 来表示。因复平面上的 x 轴上的点对应实数，y 轴上非零的点对应纯虚数，因此称 x 轴为实轴，y 轴为虚轴。由于全体复数与复平面上的点的全体是一一对应的，以后吧“点 z”和“复数 z”作为同义词而不加以区别。

在复平面上，如图 6.1所示，从原点 O 到点 $P\,(x, y)$ 作向量 $\overrightarrow{OP}$。我们可以看到复平

面上由原点 O 出发的向量的全体和复数的全体 $\mathbb{C}$ 之间也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 因此也可以向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$, 其中 x,y 分别等于向量 $\overrightarrow{OP}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量。今后把 "复数 z" 与其对应的向量 z" 也视为同义词。

在物理学中, 如力、速度、加速度等都可用向量表示, 说明复数可以用来表示实有的物理量。

6.1.2.2 模与辐角

定义 6.2. 模与辐角

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 叫做复数 z 的模或绝对值, 记作 $|z|$, 即 $|z| = r$。实轴正向转到与向量 $\overrightarrow{OP}$ 方向一致时所成的角度叫做复数的辐角, 记作 $\mathrm{Arg}\,(z)$, 即 $\mathrm{Arg}\,(z) = \theta$。♣

复数 0 的模为零, 即 $|0| = 0$, 其辐角是不确定的。任何不为零的复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}\,(z)$ 均有无穷多个值彼此之间相 2π 的整数倍通常把满足 $-\pi < \theta \neq \pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\,(z)$ 的主值记为 $\arg\,(z)$, 于是

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \arg\,(z) + 2k\pi, \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.4}$$

并且可以用复数 z 的实部来表示辅角的主值 $\arg\,(z)$:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x > 0, y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y > 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

由直角坐标与极坐标的关系 (图 6.1), 我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\,(\theta) = \tan\,(\mathrm{Arg}\,(z)) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{6.6}$$

于是复数 z 又可表示为

a =r t (cos0- ising

(1.2.3) 式通常称为复数 z 的三角表示式如果再利用欧拉 (Euler) 公式

我们又可以得到

这种形式称为复数的指数表示式

在 ğ11 节中已经指出: 两复数的实部与虚部分别相等则称两复数相等. 于

是从 (12.1) 式与 (122) 式即知两复数相等, 其模必定相等其辐角可以差 2x 的

6.1.3 共轭复数

6.1.4 复数的乘除、乘方和开方

6.1.5 复球面与无穷远点

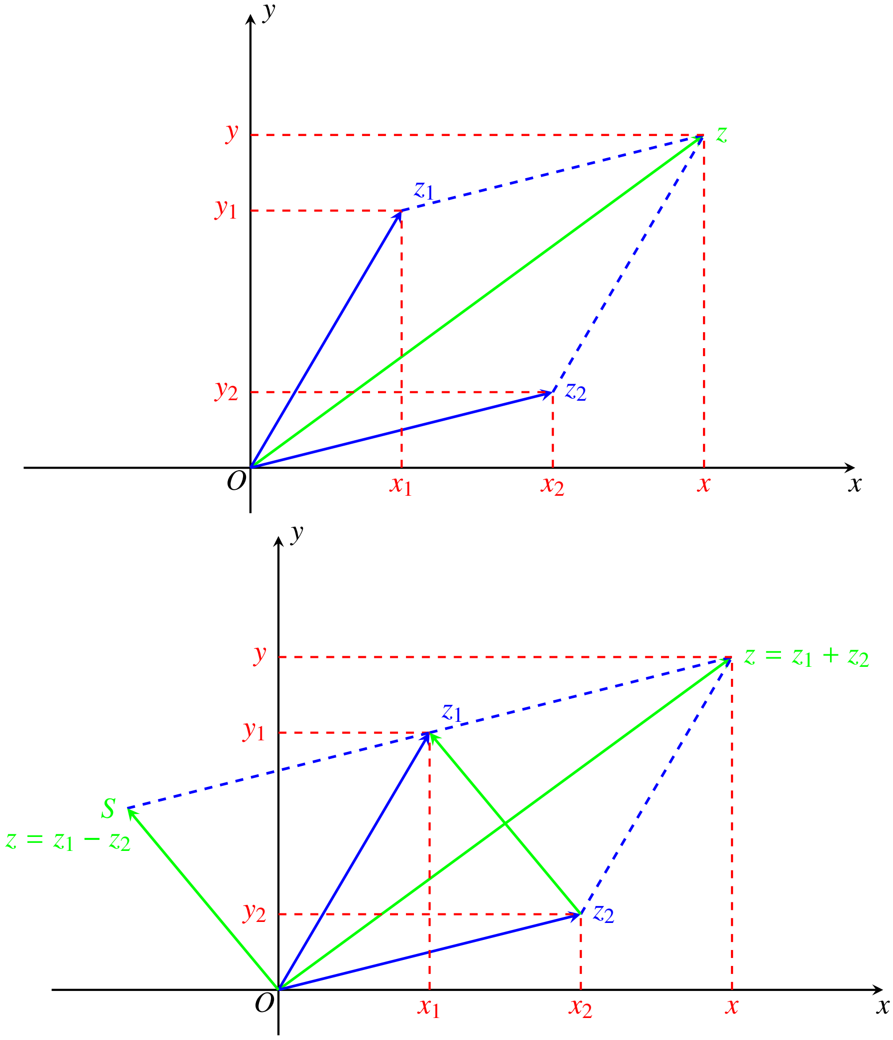

图 6.2: 复数的加减法

第二部分

微分方程 (含数理方程和特殊函数)

第三部分

微分方程数值解法

第 7 章　有限体积法

第 8 章 有限元法

第 9 章　谱方法

第 10 章 小波变换

第 11 章 其他方法

11.1 蒙特卡洛方法

第四部分

分数阶微分

第五部分

分数阶积分

第六部分

ElegantLaTeX 系列

参考文献

[1] SAMKO S, KILBA A, , et al. Fractional intergrals and derivatives:theory and applications[M]. [S.l.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[2] WIKIPEDIA. Gamma function[EB/OL]. 2018. https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function.

[3] WIKIPEDIA. Euler mascheroni constant[EB/OL]. 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Mascheroni_constant.

[4] WIKIPEDIA. Laguerre polynomials[EB/OL]. 2018. https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials#Generalized_Laguerre_polynomials.

[5] WIKIPEDIA. Beta function[EB/OL]. 2018. https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function.

[6] WIKIPEDIA. Error function[EB/OL]. 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Error_function.

[7] WIKIPEDIA. Crank nicolson method[EB/OL]. 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method.

[8] LI Q, CHEN L, ZENG Y. The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com[J]. China Finance Review International, 2018, 8(3):256-274.

[9] CARLSTROM C T, FUERST T S. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis[J]. The American Economic Review, 1997:893-910.

[10] QUADRINI V. Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations[J]. FRB Richmond Economic Quarterly, 2011, 97(3):209-254.

[11] 方军雄. 所有制、制度环境与信贷资金配置[J]. 经济研究, 2007(12):82-92.

[12] 刘凤良, 章潇萌, 于泽. 高投资、结构失衡与价格指数二元分化[J]. 金融研究, 2017(02):54-69.

[13] 吕捷, 王高望. CPI 与 PPI “背离”的结构性解释[J]. 经济研究, 2015, 50(04):136-149.

附录 基本数学工具

本附录包括了计量经济学中用到的一些基本数学，我们扼要论述了求和算子的各种性质，研究了线性和某些非线性方程的性质，并复习了比例和百分数。我们还介绍了一些在应用计量经济学中常见的特殊函数，包括二次函数和自然对数，前 4 节只要求基本的代数技巧，第 5 节则对微分学进行了简要回顾；虽然要理解本书的大部分内容，微积分并非必需，但在一些章末附录和第 3 篇某些高深专题中，我们还是用到了微积分。

A.1 求和算子与描述统计量

求和算子是用以表达多个数求和运算的一个缩略符号，它在统计学和计量经济学分析中扮演着重要作用。如果 $\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 表示 n 个数的一个序列，那么我们就把这 n 个数的和写为：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{A.1}$$

附录 线性代数

附录 最小示例

```latex
\documentclass[lang=cn,11pt]{elegantbook}
% title info
\title{Title}
\subtitle{Subtitle is here}
% bio info
\author{Your Name}
\institute{XXX University}
\date{\today}
% extra info
\version{1.00}
\extrainfo{Victory won\rq t come to us unless we go to it. --- M. Moore}
\logo{logo.png}
\cover{cover.jpg}

\begin{document}

\maketitle
\tableofcontents
\mainmatter
\hypersetup{pageanchor=true}
% add preface chapter here if needed
\chapter{Example Chapter Title}
The content of chapter one.

\bibliography{reference}

\chapterno{索引}

\end{document}
```