

# บทที่ 4

## แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Map)

การลดรูป Boolean expression หรือ Switching function ให้สั้นที่สุดนั้น เราสามารถทำได้โดยใช้ **ทฤษฎีของ Boolean** ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 แต่ดูเหมือนจะเป็นการ **ยาก** ในกรณีที่มีตัวแปรหลาย ๆ ตัว การใช้ **แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Map)** หรือบางที่เรียกว่า **เค-แมป (K-Map)** ช่วยในการแก้ปัญหา จะเป็นการง่ายกว่า และจะมีข้อผิดพลาดน้อยกว่า

### 4.1 แผนผังคาร์โนห์ ชนิด 2 ตัวแปร (2-Variable Karnaugh Map)

Karnaugh Map ชนิด 2 ตัวแปร ประกอบด้วยช่องซึ่งแทนด้วยค่าของตัวแปรนั้น ๆ จำนวน  $2^2 = 4$  ช่อง (**ค่ายกกำลัง** คือ **จำนวนของตัวแปร**) แสดงได้ดังรูปที่ 4.1

A \ B	0	1
0	0	2
1	1	3

A \ B	0	1
0	00	10
1	01	11

(ก) Karnaugh Map ชนิด 2 ตัวแปร

(ข) แสดงค่าของตัวแปรในแต่ละช่อง

รูปที่ 4.1 Karnaugh map ชนิด 2 ตัวแปร

#### จากรูปที่ 4.1

ช่องที่ 0  $A=0, B=0$  แสดงค่าของ **Minterm** ได้เป็น  $\overline{A}\overline{B}$  และ **Maxterm** คือ  $A+B$

ช่องที่ 1  $A=0, B=1$  แสดงค่าของ **Minterm** ได้เป็น  $\overline{A}B$  และ **Maxterm** คือ  $A+\overline{B}$

ช่องที่ 2  $A=1, B=0$  แสดงค่าของ **Minterm** ได้เป็น  $A\overline{B}$  และ **Maxterm** คือ  $\overline{A}+B$

ช่องที่ 3  $A=1, B=1$  แสดงค่าของ **Minterm** ได้เป็น  $AB$  และ **Maxterm** คือ  $\overline{A}+\overline{B}$

จึงใส่ค่าของตัวแปรในแต่ละช่องของ Karnaugh Map ดังรูปที่ 4.2

		A	
		0	1
B	0	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$
	1	$\overline{A}B$	$AB$

		A	
		0	1
B	0	$A+B$	$\overline{A}+B$
	1	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$

(ก) ค่าของตัวแปรในรูปของ **Minterm**

(ข) ค่าของตัวแปรในรูปของ **Maxterm**

รูปที่ 4.2 แสดงค่าของตัวแปร 2 ตัว ใน Karnaugh Map

## 4.2 แผนผังคาร์โนห์ชนิด 3 ตัวแปร (3-Variable Karnaugh Map)

Karnaugh Map ชนิด 3 ตัวแปร ประกอบด้วยช่องซึ่งแทนด้วยค่าของตัวแปรนั้น ๆ จำนวน  $2^3 = 8$  ช่อง แสดงได้ดังรูปที่ 4.3

		AB			
		00	01	10	11
C	0	0	2	4	6
	1	1	3	5	7

		AB			
		00	01	10	11
C	0	000	010	100	110
	1	001	011	101	111

A=0, B=0, C=0

A=0, B=1, C=1

(ก) Karnaugh Map ชนิด 3 ตัวแปร

(ข) แสดงค่าของตัวแปรในแต่ละช่อง

		AB			
		00	01	10	11
C	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$	$AB\overline{C}$
	1	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	$ABC$

(ค) แสดงค่าของตัวแปรในรูปของ **Minterm**

รูปที่ 4.3 Karnaugh Map ชนิด 3 ตัวแปร

### 4.3 แผนผังการโน้ตชนิด 4 ตัวแปร (4-Variable Karnaugh Map)

Karnaugh map ชนิด 4 ตัวแปร ประกอบด้วยช่องซึ่งแทนด้วยค่าของตัวแปรนั้น ๆ จำนวน  $2^4 = 16$  แสดงได้ดังรูปที่ 4.4

AB \ CD	AB			
	00	01	10	11
00	0	4	8	12
01	1	5	9	13
10	2	6	10	14
11	3	7	11	15

(ก) Karnaugh Map ชนิด 4 ตัวแปร

AB \ CD	AB			
	00	01	10	11
00	0000	0100	1000	1100
01	0001	0101	1001	1101
10	0010	0110	1010	1110
11	0011	0111	1011	1111

(ข) แสดงค่าของตัวแปรในแต่ละช่อง

รูปที่ 4.4 Karnaugh Map ชนิด 4 ตัวแปร

### 4.4 การลดรูป Boolean expression หรือ Switching function โดยใช้ Karnaugh map

การลดรูป Boolean expression หรือ Switching function โดยใช้ Karnaugh map มีหลายวิธีดังนี้

**4.4.1** ใส่ **Minterm** (Logical 1) หรือ **Maxterm** (Logical 0) ลงใน Karnaugh map ตามช่องของค่าของมัน

**4.4.2** จับคู่ตัวที่อยู่ติดกัน โดยมีเกณฑ์อยู่ว่า จับได้ครั้งละ  $2^n$  ตัว คือ 1 ตัว หรือ 2 ตัว หรือ 4 ตัว หรือ 8 ตัว หรือ 16 ตัว...

**4.4.3** การจับคู่จะต้องจับคู่ให้ได้มากที่สุด เช่น ถ้าจับคู่ได้ 8 ตัว ก็อย่าไปจับคู่แบบ 4 ตัว 2 ครั้ง เพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าไม่น้อยยที่สุด

**4.4.4** ตัวที่ถูกจับคู่ไปแล้ว ก็สามารถนำมาจับคู่กับตัวอื่นอีกก็ได้ถ้าจำเป็น

**4.4.5** เมื่อจับคู่ได้แล้วก็ดำเนินการหาผลลัพธ์ วิธีการหาผลลัพธ์ทำได้โดย นำตัวที่ถูกจับคู่นั้นมอดดูค่าของด้านบนและด้านข้าง **ค่าที่ซ้ำกันคือผลลัพธ์ที่ต้องการ**

เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้นลองศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 4.1** จงลดรูป Switching function ต่อไปนี้ โดยใช้ Karnaugh map

(ก)  $f(A, B) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$

(ข)  $f(A, B) = \overline{A}B + AB$

(ค)  $f(A, B) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$

$$(ง) f(A,B) = \overline{A}B + AB$$

$$(จ) f(A,B) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$$(ฉ) f(A,B) = \overline{A}B + AB + \overline{A}\overline{B}$$

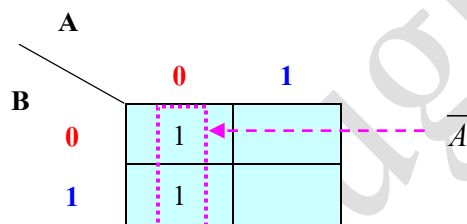
$$(ช) f(A,B) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$$(ซ) f(A,B) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}B + AB$$

### วิธีทำ

(ก)

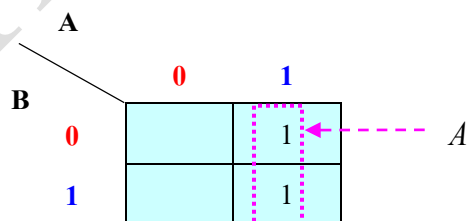
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0



**Minterm** ที่ช่อง 0 และ 1 เมื่อมองทางด้านบน เห็น 0 ทั้งคู่ ซึ่ง 0 คือค่าของ  $\overline{A}$  และเมื่อมองทางด้านข้างจะเห็น 0 และ 1 ซึ่งไม่ซ้ำกันจึงตัดทิ้งไป

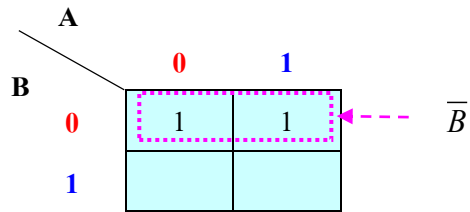
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A,B) &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B \\ &= \overline{A} \end{aligned}$$

(ข)



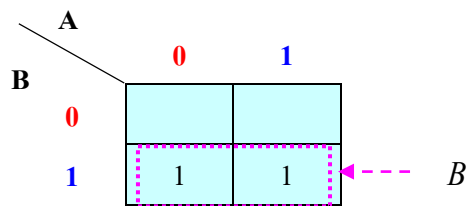
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A,B) &= \overline{A}B + AB \\ &= A \end{aligned}$$

(ค)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} \\ &= \overline{B} \end{aligned}$$

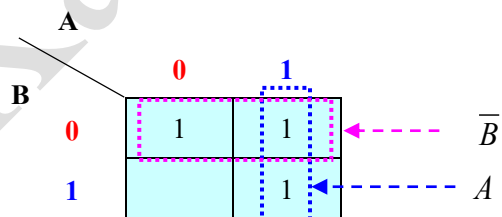
(ง)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}B + AB \\ &= B \end{aligned}$$

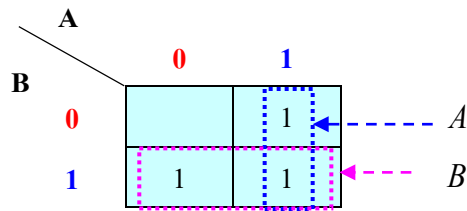
(จ)

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$	$AB$	$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB$	$A + \overline{B}$
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1



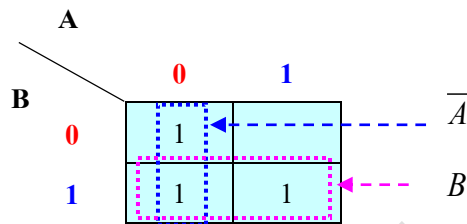
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB \\ &= A + \overline{B} \end{aligned}$$

(จ)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B \\ &= A + B \end{aligned}$$

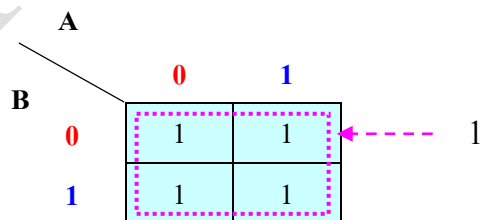
(ข)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB \\ &= \overline{A} + B \end{aligned}$$

(ค)

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$AB$	$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B + AB$
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B + AB \\ &= 1 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 4.2** จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้ โดยใช้ Karnaugh map

(ก)  $f(A, B) = (A + B)(\bar{A} + B)$

(ข)  $f(A, B) = (A + \bar{B})(\bar{A} + \bar{B})$

(ค)  $f(A, B) = (A + B)(A + \bar{B})$

(ง)  $f(A, B) = (\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})$

(จ)  $f(A, B) = (A + B)(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})$

(ฉ)  $f(A, B) = (\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{B})$

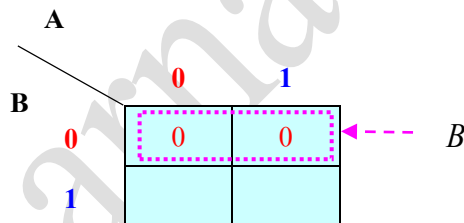
(ช)  $f(A, B) = (\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{B})(A + B)$

(ซ)  $f(A, B) = (A + B)(A + \bar{B})(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B})$

### วิธีทำ

(ก)

A	B	$\bar{A}$	$(A + B)$	$(\bar{A} + B)$	$(A + B)(\bar{A} + B)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1



**Maxterm** ที่ช่อง 0 และ 2 เมื่อมองจากด้านบนลงมาเห็น 0 และ 1 ซึ่งไม่ซ้ำกัน ก็ตัดทิ้งไป และเมื่อมองด้านข้างเห็น 0 ทั้งคู่ ซึ่ง 0 คือค่าของ B

$$\text{ดังนั้น } f(A, B) = (A + B)(\bar{A} + B) \\ = B$$

(ข)

		A	
		0	1
B	0		
	1	0	0

$\overline{B}$  ←

ดังนั้น  $f(A, B) = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$   
 $= \overline{B}$

(ค)

		A	
		0	1
B	0	0	
	1	0	

$A$  ←

ดังนั้น  $f(A, B) = (A + B)(A + \overline{B})$   
 $= A$

(ง)

		A	
		0	1
B	0		0
	1		0

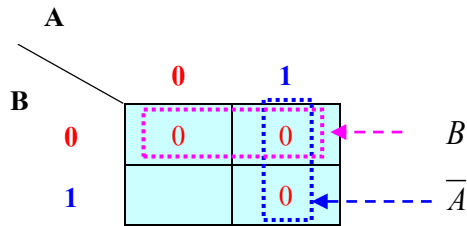
$\overline{A}$  ←

ดังนั้น  $f(A, B) = (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$   
 $= \overline{A}$



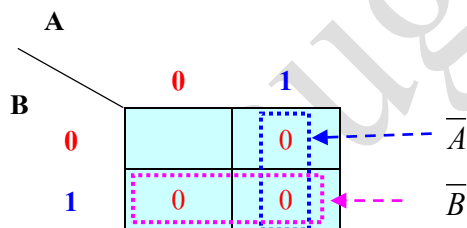
(จ)

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(A+B)$	$(\bar{A}+B)$	$(\bar{A}+\bar{B})$	$(A+B)(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$	$\bar{A}B$
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0



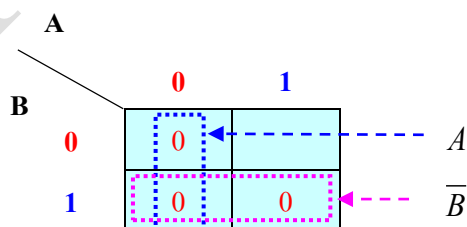
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= (A+B)(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}) \\ &= \bar{A}B \end{aligned}$$

(ข)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= (\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) \\ &= \bar{A}\bar{B} \end{aligned}$$

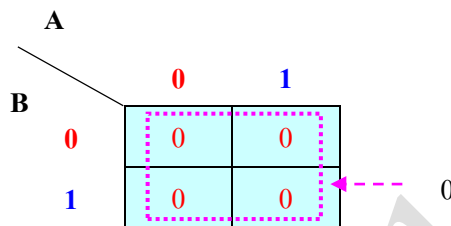
(ค)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B) &= (\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})(A+B) \\ &= A\bar{B} \end{aligned}$$

(ข)

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(A+B)$	$(A+\bar{B})$	$(\bar{A}+B)$	$(\bar{A}+\bar{B})$	$(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0



$$\text{ดังนั้น } f(A, B) = (A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}) \\ = 0$$

**ตัวอย่างที่ 4.3** จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้

(ก)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

(ข)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

(ค)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$

(ง)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$

(จ)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

(ฉ)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

(ช)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

(ซ)  $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

## วิธีทำ

(ก)

$A$	$B$	$C$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$ABC$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$
1
1
1
1
0
0
1
1

$\bar{A} + B$
1
1
1
1
0
0
1
1

		AB			
		00	01	10	11
C	0	1	1		1
	1	1	1		1

$\bar{A}$  (indicated by a pink arrow pointing to the first column of the 1x2 grid)
  $AB$  (indicated by a blue arrow pointing to the last column of the 1x2 grid)

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC \\
 &= \bar{A} + AB \\
 &= \bar{A} + B
 \end{aligned}$$

(ข)

		AB			
		00	01	10	11
C	0			1	1
	1	1	1	1	1

← A

← C

ดังนั้น  $f(A, B, C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC\overline{C} + ABC$

$$= A + C$$

(ค)

		AB			
		00	01	10	11
C	0	1		1	1
	1	1		1	

←  $A\overline{C}$

←  $\overline{A}\overline{B}$

←  $\overline{A}B$

ดังนั้น  $f(A, B, C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC\overline{C}$

$$= \overline{A}\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}B$$

$$= \overline{A}\overline{C} + \overline{B}(A + \overline{A})$$

$$= \overline{A}\overline{C} + \overline{B}$$

(ง)

		AB			
		00	01	10	11
C	0	1	1	1	
	1	1	1	1	

←  $\overline{A}$

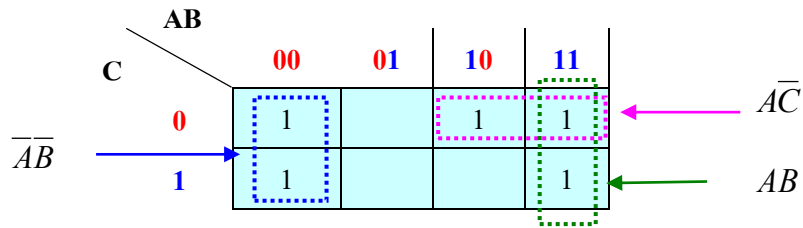
←  $A\overline{B}$

ดังนั้น  $f(A, B, C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC\overline{C} + ABC$

$$= \overline{A} + A\overline{B}$$

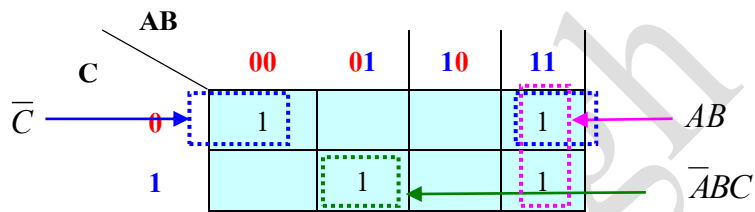
$$= \overline{A} + \overline{B}$$

(จ)



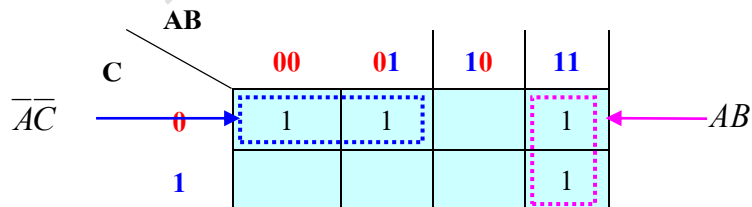
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}C \\ &= (A + \overline{A})(B + \overline{B}) + \overline{A}C \\ &= \overline{A}C \end{aligned}$$

(ฉ)



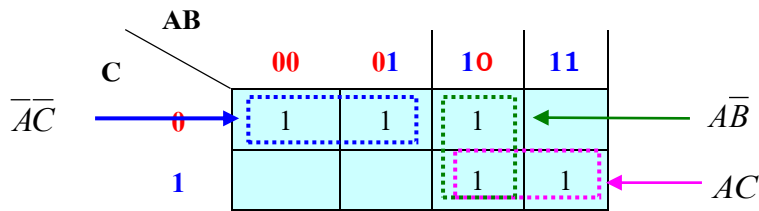
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\ &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + \overline{C} \\ &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + \overline{C} \\ &= B(A + \overline{A}) + \overline{C} \\ &= B + \overline{C} \end{aligned}$$

(ช)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\ &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C \end{aligned}$$

(ข)



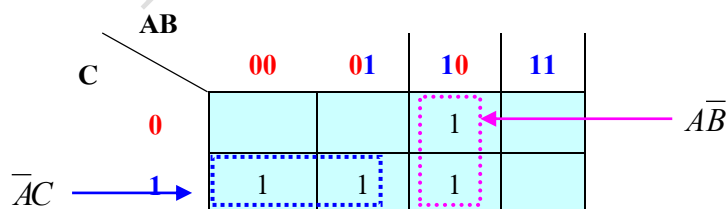
$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f(A,B,C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC \\
 &= \overline{A}\overline{B} + AC + \overline{A}\overline{C} \\
 &= \overline{A}\overline{B} + (AC + \overline{A}\overline{C}) \\
 &= \overline{A}\overline{B}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้

- (ก)  $f(A,B,C) = \sum m(1,3,4,5)$
- (ข)  $f(A,B,C) = \sum m(0,2,3,4,6,7)$
- (ค)  $f(A,B,C) = \sum m(0,3,5,6,7)$
- (ง)  $f(A,B,C) = \sum m(0,4,6,7)$
- (จ)  $f(A,B,C) = \pi M(0,2,3,4,6)$
- (ฉ)  $f(A,B,C) = \pi M(0,1,2,3,6)$
- (ช)  $f(A,B,C) = \pi M(0,2,5,6,7)$
- (ซ)  $f(A,B,C) = \pi M(1,2,5,6)$

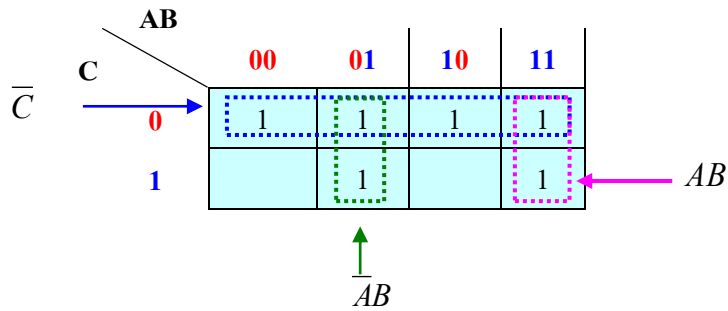
วิธีทำ

(ก)



$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f(A,B,C) &= \sum m(1,3,4,5) \\
 &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C
 \end{aligned}$$

(ข)

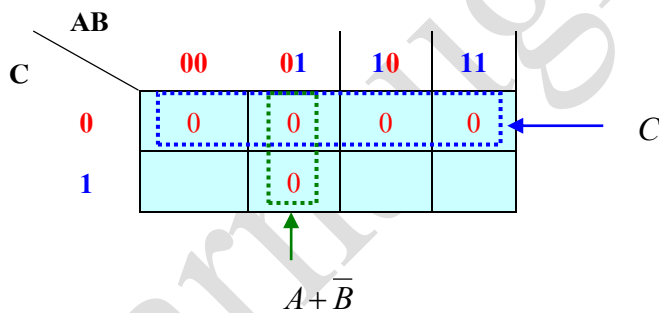


$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \sum m(0, 2, 3, 4, 6, 7) \\ &= \overline{A}B + AB + \overline{C} \\ &= B(\overline{A} + A) + \overline{C} \\ &= B + \overline{C} \end{aligned}$$

(ค) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

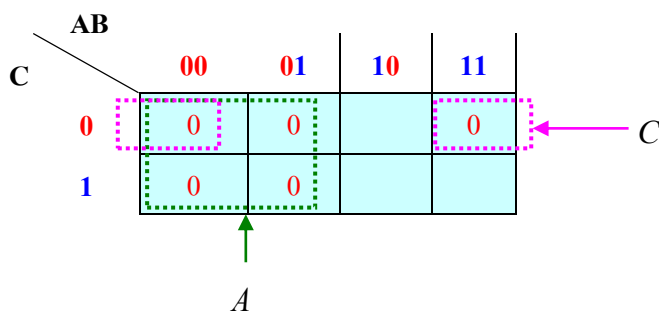
(ง) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

(จ)



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(A, B, C) &= \pi M(0, 2, 3, 4, 6) \\ &= C(A + \overline{B}) \end{aligned}$$

(ฉ)



$$\text{ดังนั้น } f(A, B, C) = \pi M(0, 1, 2, 3, 6)$$

$$= AC$$

(ข) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

(ข) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

**ตัวอย่างที่ 4.5** จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้

$$(ก) f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} +$$

$$\overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$(ข) f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D +$$

$$A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$(ค) f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} +$$

$$A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$(ง) f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD +$$

$$A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D$$

**วิธีทำ**

(ก)

AB					
CD		00	01	10	11
	00	1	1		
	01	1	1	1	1
	10	1	1		
	11	1	1		

←  $\overline{C}D$

←  $\overline{A}$

$$\text{ดังนั้น } f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} +$$

$$\overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$= \overline{A} + \overline{C}D$$



(ข)

AB					
CD		00	01	10	11
	00			1	1
	01			1	1
	10	1	1	1	1
	11			1	1

Diagram showing Karnaugh map for function f(A,B,C,D). The map is a 4x4 grid with columns labeled AB (00, 01, 10, 11) and rows labeled CD (00, 01, 10, 11). The cells containing 1 are: (10,00), (11,00), (10,01), (11,01), (00,10), (01,10), (10,10), (11,10), (10,11), (11,11). The map is grouped into two groups: a group of four cells (10,00), (11,00), (10,01), (11,01) labeled A, and a group of four cells (00,10), (01,10), (10,10), (11,10) labeled C̄D̄.

ดังนั้น  $f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD$

$$= A + C\bar{D}$$

(ค)

AB					
CD		00	01	10	11
	00	1			1
	01	1	1		1
	10	1	1		1
	11	1			1

Diagram showing Karnaugh map for function f(A,B,C,D). The map is a 4x4 grid with columns labeled AB (00, 01, 10, 11) and rows labeled CD (00, 01, 10, 11). The cells containing 1 are: (00,00), (01,00), (00,01), (01,01), (00,10), (01,10), (00,11), (01,11), (11,00), (11,01), (11,10), (11,11). The map is grouped into three groups: a group of four cells (00,00), (01,00), (00,01), (01,01) labeled AB, a group of four cells (00,00), (01,00), (00,10), (01,10) labeled Ā, and a group of four cells (00,00), (01,00), (00,11), (01,11) labeled ĀB̄.

ดังนั้น  $f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD$

$$= AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}$$

$$= \bar{A} + B$$

(ง)

AB					
CD		00	01	10	11
	00	1			1
	01		1	1	
	10		1	1	
	11	1			1

Diagram showing Karnaugh map for function f(A,B,C,D). The map is a 4x4 grid with columns labeled AB (00, 01, 10, 11) and rows labeled CD (00, 01, 10, 11). The cells containing 1 are: (00,00), (01,01), (10,01), (10,10), (00,11), (11,11). The map is grouped into four groups: a group of two cells (00,00), (00,11) labeled AB, a group of two cells (01,01), (10,01) labeled ĀB̄, a group of two cells (10,01), (10,10) labeled ĀB, and a group of two cells (00,11), (11,11) labeled ĀB̄.

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f(A,B,C,D) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} \\
 &\quad + A\overline{B}\overline{C}D + ABCD \\
 &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} \\
 &= A(B + \overline{B}) + \overline{A}(B + \overline{B}) \\
 &= A + \overline{A} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้

- (ก)  $f(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,3,4,6,8,10,12,14)$
- (ข)  $f(A,B,C,D) = \sum m(2,3,4,8,14,15)$
- (ค)  $f(A,B,C,D) = \sum m(0,3,4,5,6,7,13,14)$
- (ง)  $f(A,B,C,D) = \sum m(1,2,6,7,8,9,12,13)$
- (จ)  $f(A,B,C,D) = \sum m(1,8,10,12,13,14,15)$
- (ฉ)  $f(A,B,C,D) = \sum m(0,2,4,6,8,10)$

วิธีทำ

(ก)

		AB			
		00	01	10	11
CD	00	1	1	1	1
	01	1			
	10	1	1	1	1
	11	1			

$\overline{C}\overline{D}$   
 $C\overline{D}$   
 $\overline{A}\overline{B}$

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D) &= \sum m(0,1,2,3,4,6,8,10,12,14) \\
 &= \overline{A}\overline{B} + \overline{C}\overline{D} + C\overline{D} \\
 &= \overline{A}\overline{B} + \overline{D}(\overline{C} + C) \\
 &= \overline{A}\overline{B} + \overline{D}
 \end{aligned}$$

(ข)

AB		00	01	10	11	
CD	00		1	1		$\overline{CD}$
	01					
	10	1			1	
	11	1			1	$C$

$$f(A,B,C,D) = \sum m(2,3,4,8,14,15)$$

$$= C + \overline{CD}$$

(ค)

AB		00	01	10	11	
CD	00	1	1			$\overline{A}$
	01		1		1	
	10		1		1	
	11	1	1			$B$

$$f(A,B,C,D) = \sum m(0,3,4,5,6,7,13,14)$$

$$= \overline{A} + B$$

(ง)

AB		00	01	10	11	
CD	00			1	1	$A\overline{C}$
	01	1		1	1	
	10	1	1			$\overline{A}BC$
	11		1			$\overline{A}\overline{B}$

$$f(A,B,C,D) = \sum m(1,2,6,7,8,9,12,13)$$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}BC + A\overline{C}$$

(จ) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

(ฉ) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

**ตัวอย่างที่ 4.7** จงลดรูป Switching Function ต่อไปนี้

(ก)  $f(A,B,C,D) = \pi M(3,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$

(ข)  $f(A,B,C,D) = \pi M(0,1,2,3,4,7)$

(ค)  $f(A,B,C,D) = \pi M(2,3,9,10,13,14,15)$

(ง)  $f(A,B,C,D) = \pi M(1,3,5,7,9,10,11,13,14,15)$

(จ)  $f(A,B,C,D) = \pi M(0,1,2,5,7,8,10)$

(ฉ)  $f(A,B,C,D) = \pi M(0,1,2,4,6,8,9)$

**วิธีทำ**

(ก)

AB					
CD		00	01	10	11
00				0	0
01				0	0
10				0	0
11		0	0	0	0

$$f(A,B,C,D) = \pi M(3,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

$$= \overline{A}(\overline{C} + \overline{D})$$

(ข)

AB					
CD		00	01	10	11
00		0	0		
01		0			
10		0			
11		0	0		

$$f(A,B,C,D) = \pi M(0,1,2,3,4,7)$$

$$= A(A + B)$$

(ค)

AB		00	01	10	11
CD	00				
	01			0	0
	10	0		0	0
	11	0			0

$\bar{A}$  (points to the 0s in the CD=01 row)  
 $\bar{C}$  (points to the 0s in the AB=10 and AB=11 columns)

$$f(A,B,C,D) = \pi M(2,3,9,10,13,14,15)$$

$$= \overline{AC}$$

(ง) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

(จ) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

(ฉ) ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง

Karnaugh Map

**ตัวอย่างที่ 4.8** จงออกแบบวงจร Logic จาก Truth table ต่อไปนี้โดย

(ก) ใช้ NAND gate อย่างเดียว

(ข) ใช้ NOR gate อย่างเดียว

	Input				Output
	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

**วิธีทำ**

(ก) วงจร Logic ที่ใช้ **NAND gate** เพียงอย่างเดียว เราต้องหา Function ของ Output จาก **Minterm**

AB					
CD		00	01	10	11
00				1	1
01			1		1
10				1	1
11			1		1

$\overline{CD}$   
 $AB$   
 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$   
 $AC\overline{D}$   
 $\overline{A}BCD$

$$\begin{aligned}f(A,B,C,D) &= \sum m(5,7,8,10,12,13,14,15) \\&= AB + \overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{C}\overline{D} \\&= AB + \overline{C}\overline{D} + \overline{A}BD(\overline{C} + C) + A\overline{C}\overline{D} \\&= AB + \overline{C}\overline{D} + \overline{A}BD + A\overline{C}\overline{D} \\&= B(A + \overline{A}D) + \overline{D}(\overline{C} + AC) \\&= B(A + D) + \overline{D}(\overline{C} + A) \\&= BA + BD + \overline{D}\overline{C} + \overline{D}A \\&= \overline{\overline{BA + BD + \overline{D}\overline{C} + \overline{D}A}} \\&= \overline{BA.BD.DC.DA}\end{aligned}$$

ให้นักศึกษาลองวาดรูปวงจรจากผลลัพธ์ที่ได้

(ข) วงจร Logic ที่ใช้ **NOR gate** เพียงอย่างเดียว เราต้องหา Function ของ Output จาก **Maxterm**

ให้นักศึกษาลองฝึกทำด้วยตนเอง