

Semestální projekt – Analýza regulačních systémů

Ad A)

Určete matice A , B , C , D pro Frobeniův kanonický tvar a Jordanův kanonický tvar. Ve vybraném simulačním softwaru (Simulink, SciLab) namodelujte vnitřní stavové schéma a vykreslete přechodovou charakteristiku.

Zadaná lineární soustava:

$$a_3\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

$$a_3 = 1; a_2 = 18,2; a_1 = 90,91; a_0 = 73,71; b_0 = 6,3$$

Pomocí fce `tf2ss()` nebo přímo ze zadání ($a_3 = 1$), převedu na stavový popis a z něj lze určit Frobeniův kanonický tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -73,71 & -90,91 & -18,2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_0 \ 0 \ 0) = (6,3 \ 0 \ 0)$$

$$D = (0)$$

Ze zadané rovnice vyjádřím (Laplace):

$$s^3Y(s) + 18,2s^2Y(s) + 90,91sY(s) + 73,71Y(s) = 6,3U(s)$$

$$Y(s) \cdot (s^3 + 18,2s^2 + 90,91s + 73,71) = 6,3U(s)$$

Z toho přenos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6,3}{s^3 + 18,2s^2 + 90,91s + 73,71}$$

Pomocí fce `residue()` převedu na součet parciálních zlomků:

$$G(s) = \frac{6,3}{s^3 + 18,2s^2 + 90,91s + 73,71} = \frac{0,7778}{s + 9,1} - \frac{0,8873}{s + 8,1} + \frac{0,1095}{s + 1}$$

a z toho Jordanův kanonický tvar:

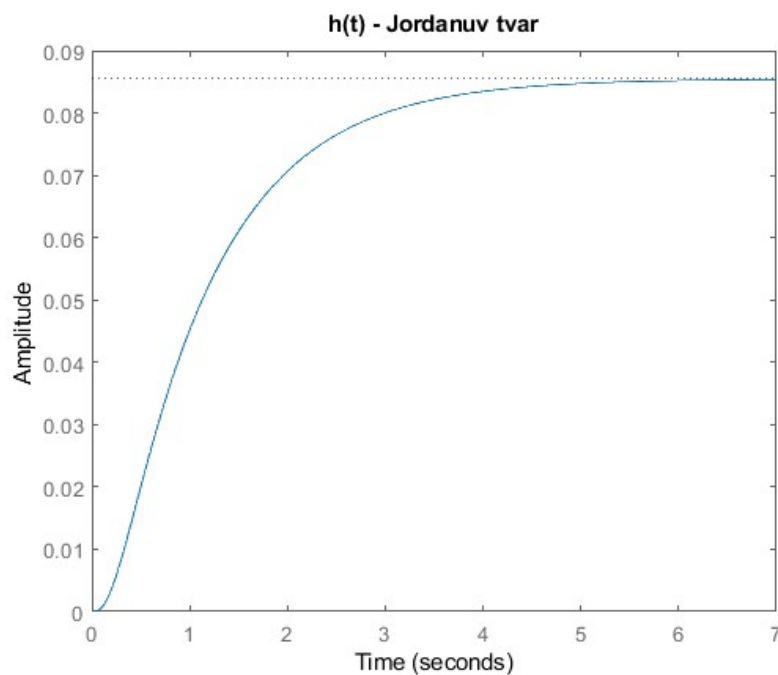
$$A = \begin{pmatrix} -9,1 & 0 & 0 \\ 0 & -8,1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (0,7778 \quad -0,8873 \quad 0,1095)$$

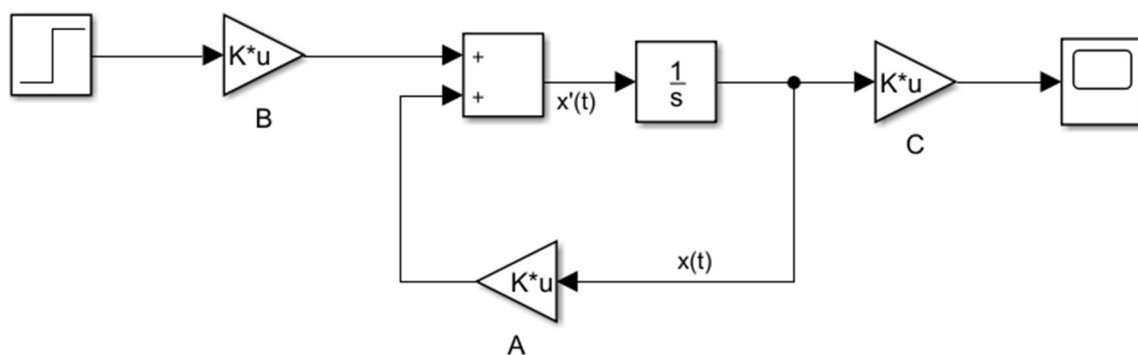
$$\mathbf{D} = (0)$$

Na obrázku 1 je průběh pro Jordanův tvar získaný pomocí fce `step()`. Identický průběh je i pro Frobeniův tvar.



Obr. 1 – Přejchodová charakteristika, stejná pro Frobenia i Jordana

Model byl dále ověřen v Simulinku. Na obr. 2 je schéma a na obr. 3 simulovaná přechodová charakteristika.



Obr. 2 – Simulační schéma



Obr. 3 – Přechodová charakteristika - Simulink

Ad B)

Řešte úplnou a neúplnou stavovou rovnici v Laplaceově transformaci. Stanovte obraz matice přechodu $\Phi(s)$. Najděte řešení stavové rovnice pro zvolený nenulový počáteční stav a průběhy vykreslete.

Počáteční stav pro úplnou stavovou rovnici zvolen jako:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

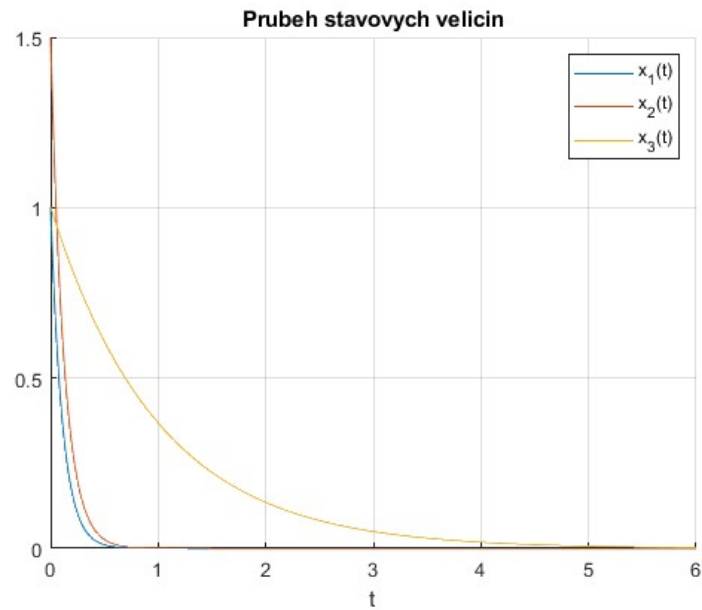
Obraz matice přechodu:

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= [s * I - A]^{-1} \\ \Phi(s) &= \left[s * I - \begin{pmatrix} -9,1 & 0 & 0 \\ 0 & -8,1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ \Phi(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+9,1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+8,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Neúplná rovnice:

$$x(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} \cdot x(0) = \begin{pmatrix} e^{-9,1t} \\ \frac{3}{2}e^{-8,1t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Na obrázku 4 jsou průběhy stavových veličin, pro neúplnou rovnici (bez buzení).



Obr. 4 – Průběh vnitřních stavů – neúplná rovnice

Zvolený budící signál je konstanta 5. Obraz:

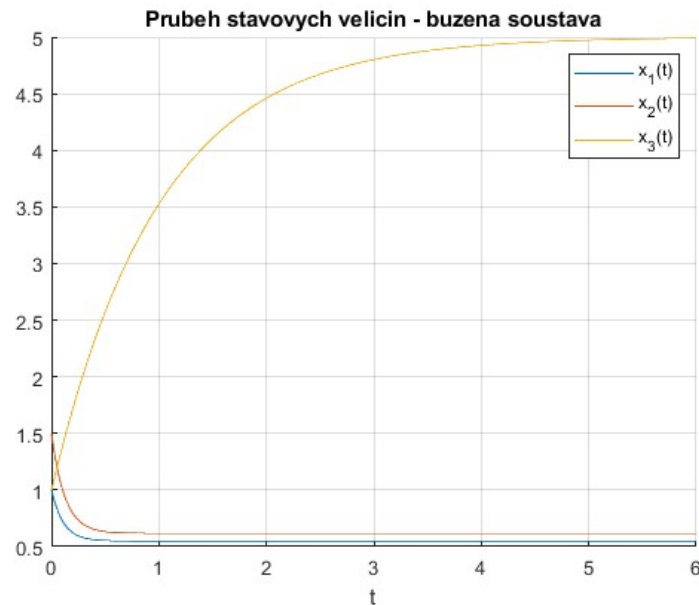
$$U(s) = \frac{5}{s}$$

$$X_{upl}(s) = \Phi(s) \cdot (x(0) + B \cdot U(s)) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{5}{s} + 1}{s + 9,1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{5}{s} + \frac{3}{2}}{s + 8,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\frac{5}{s} + 1}{s + 1} \end{pmatrix}$$

Úplná rovnice:

$$x_{upl}(t) = L^{-1}\{X_{upl}(s)\} = \begin{pmatrix} \frac{4,1}{9,1} e^{-9,1t} + \frac{5}{9,1} \\ \frac{1,43}{1,62} e^{-8,1t} + \frac{5}{8,1} \\ 5 - 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

Na obrázku 5 jsou průběhy stavových veličin, pro úplnou rovnici (buzena konstantním ss signálem o hodnotě 5).



Obr. 5 – Průběh vnitřních stavů – úplná rovnice

Ad C)

Vyšetřete říditelnost, pozorovatelnost, rekonstruovatelnost a dosažitelnost systému.

Systém je říditelný, pokud se hodnost matice říditelnosti rovná řádu systému – zde 3. Určení matice říditelnosti bylo provedeno pomocí fce `ctrb()`.

$$\mathbf{Q}_{rid} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -9,1 & 82,81 \\ 1 & -8,1 & 65,61 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hodnost této matice je 3, čili systém je říditelný i dosažitelný.

Systém je pozorovatelný, je-li hodnost matice pozorovatelnosti rovna řádu systému – zde 3. Určení matice pozorovatelnosti pomocí fce `obsv()`..:

$$\mathbf{Q}_{poz} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7778 & -0,8873 & 0,1095 \\ -7,0778 & 7,1873 & -0,1095 \\ 64,4078 & -58,2173 & 0,1095 \end{pmatrix}$$

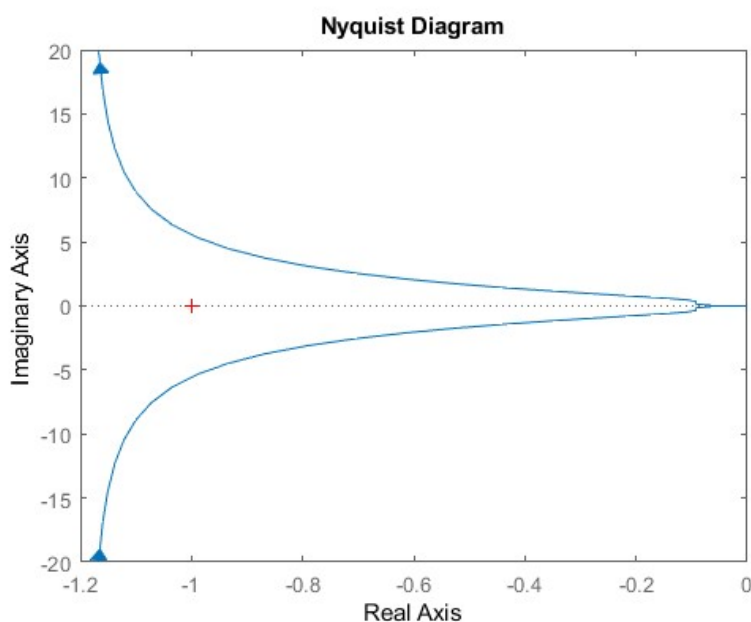
Hodnost této matice je 3, čili systém je pozorovatelný a zároveň tedy i rekonstruovatelný.

Ad D)

Předpokládejte, že soustava je regulována PID regulátorem s přenosem $GR(s)=P+I\cdot 1/s+Ds$ (složky zvolte vhodně tak, aby byla uzavřená smyčka stabilní, nebo použijte funkci `pidtune()`). Ověřte stabilitu uzavřeného regulačního obvodu Nyquistovým a Michajlovým kritériem. Pro tento obvod stanovte zásobu stability v amplitudě a ve fázi, překmit, dobu ustálení, dobu náběhu.

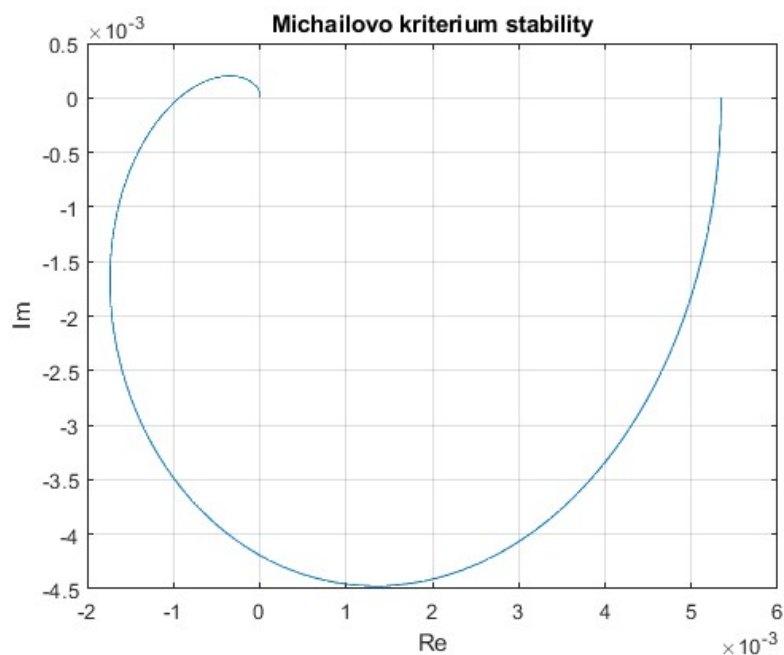
Parametry PID regulátoru byly zvoleny pomocí fce `pidtune()`: $P=22,8$; $I=29,7$; $D=4,22$.

Na obrázku 6 je nyquistův diagram soustavy s regulátorem. Křivka neobepíná bod -1, proto po uzavření zpětné vazby bude obvod stabilní.



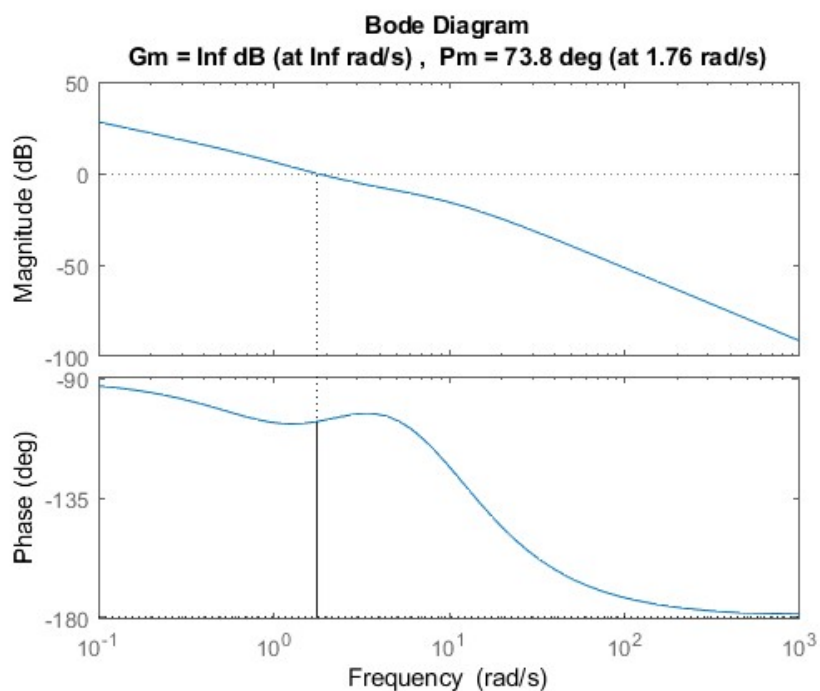
Obr. 6 – Nyquistův diagram systému s regulátorem

Na obrázku 7 je křivka pro Michailovo kritérium stability. Křivka prochází třemi kvadranty, což je zároveň řád systému a obklopuje bod 0, proto je obvod stabilní.

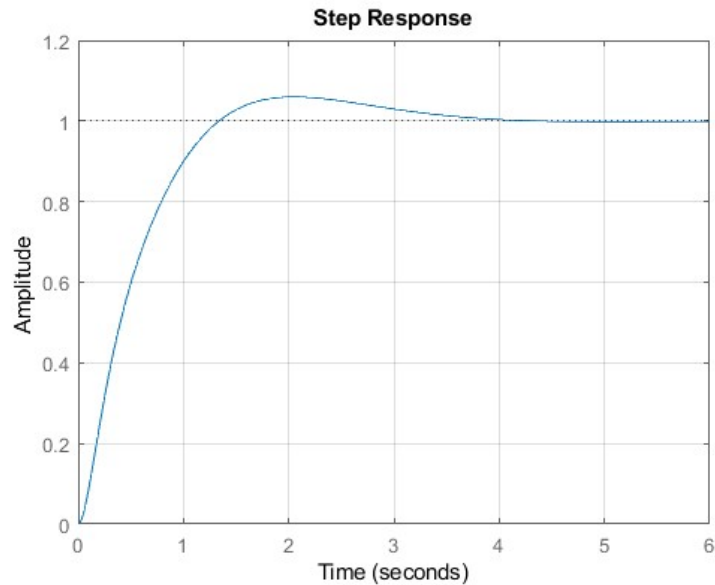


Obr. 7 – Michailův diagram systému s regulátorem

Z obrázku 8 je patrné, že zásoba stability ve fázi je $73,8^\circ$ při frekvenci 1,76 rad/s. Zásoba stability v amplitudě není určena, protože fáze nikdy není menší než -180° , resp. neprotne -180° .



Obr. 8 – Zásoba stability ve fázi a amplitudě



Obr. 9 – Přechodová charakteristika obvodu s uzavřenou f. b.

Překmit doba ustálení doba náběhu jsou patrné z obrázku 9 – Přechodové charakteristiky obvodu s uzavřenou zpětnou vazbou. Hodnoty byly vypočítány pomocí fce `stepinfo()`:

RiseTime: 0.8928 s
SettlingTime: 3.2723 s
Overshoot: 0.0598

Ad E)

Vypočtěte numericky hodnotu integrálního kvadratického kritéria a kritéria ITAE, ověřte ve vybraném simulačním software.

Kritéria kvality regulace byly vypočteny následovně: Pro kvadratické kritérium:

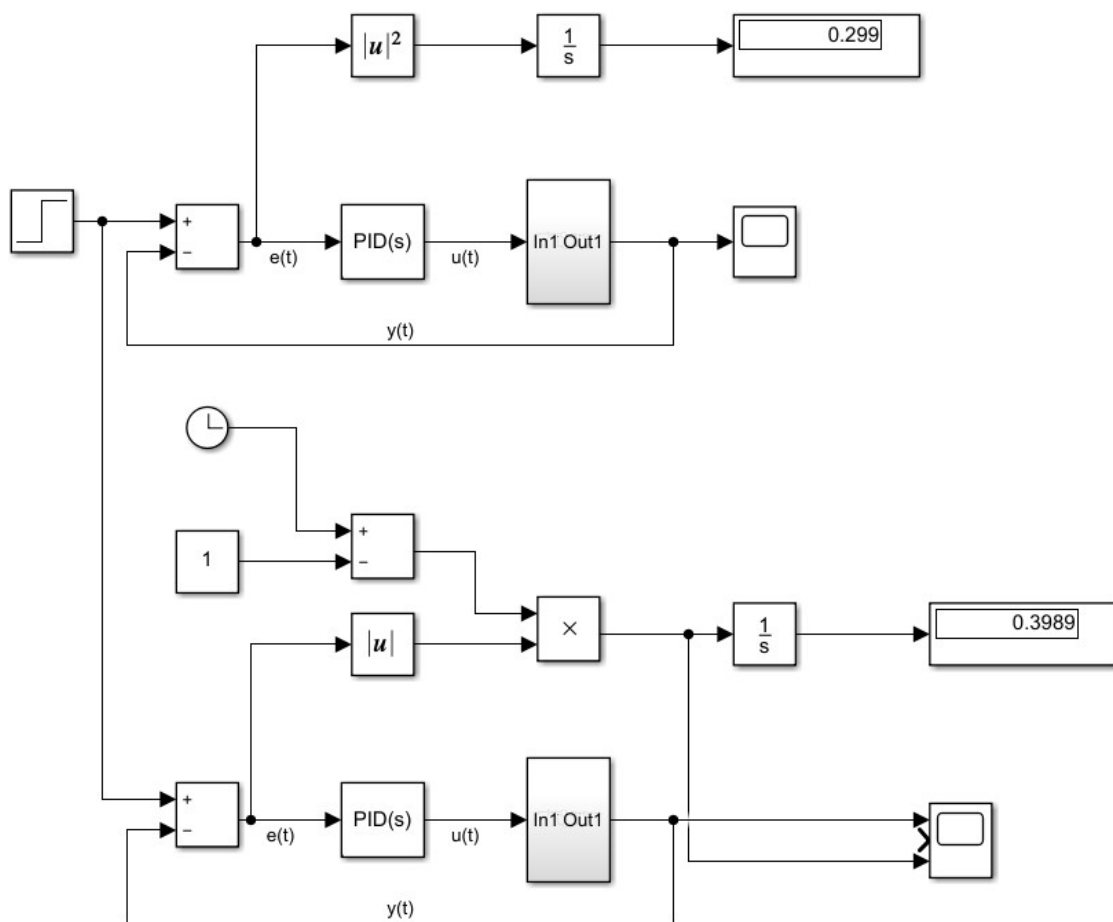
$$I_k = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 dt = 0.3042$$

Pro ITAE:

$$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)| \cdot t \cdot dt = 0.4032$$

Kde e je průběh regulační odchylky, $e(\infty) = 0$ pro tento systém. Při praktickém výpočtu byla místo integrace použita suma, viz zdrojový kód .m.

Na obrázku 10 je simulační schéma pro výpočet těchto kritérií numericky.

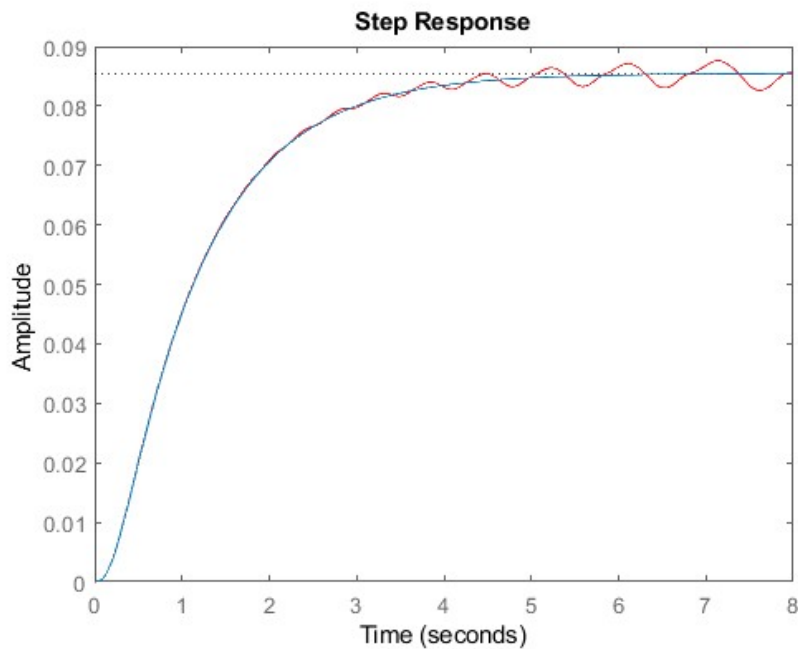


Obr. 10 – Integrální kritérium a ITAE numericky

Výstupy obou metod jsou velmi podobné – pouze je jiný časový krok a tím i jiná přesnost numerické metody.

Ad F)

Uložte si průběh frekvenční charakteristiky lineárního systému. Na základě těchto dat numericky vypočtete a vykreslete přechodovou charakteristiku. Pozn.: v případě identifikace astatické soustavy identifikujte nejdříve derivaci přechodové charakteristiky, poté zpětnou integrací získáte identifikovaný průběh původního systému.



Obr. 11 – Zásoba stability ve fázi a amplitudě

Průběh frekvenční charakteristiky (po složkách komplexních čísel) byl uložen pomocí fce `[Re Im Omega] = nyquist(sys)`. Zpětná rekonstrukce byla provedena pomocí zpětné fourierovy transformace, kterou byl získán průběh **impulzové charakteristiky**, podle vzorce:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Přechodová charakteristika, viz obr. 11 :: červená, byla získána pomocí integrace impulzové charakteristiky:

$$h(t) = \int_0^t g(t) \cdot dt$$

Poznámka: F^{-1} očekává frekvenční složky i pro záporné frekvence, které fce `nyquist()` nevrací. Tyto složky mají stejnou amplitudu a opačnou fázi (ta se vyruší z kladnou složkou téže frekvence). Proto bylo použito dvojí integrace s uměle „vyrobenými“ zápornými složkami. Poté sečteno.

Ad G)

Diskretizujte PID regulátor s vhodnou periodou vzorkování, namodelujte průběh regulované veličiny. Porovnejte v jednom grafu průběhy regulovaných veličin při regulaci se spojitým a diskrétním regulátorem.

Parametry PID: $P=22,8$; $I=29,7$; $D=4,22$.

Pro sériovou formu:

$$\begin{aligned}T_d &= \frac{D}{P} = \frac{4,22}{22,8} = 0,1853 \\T_i &= \frac{P}{I} = \frac{22,8}{29,7} = 0,7662 \\K_p &= P = 22,8\end{aligned}$$

Vzorkování volím 10x menší než nejmenší kořen jmenovatele (časová konstanta soustavy):

$$T_z = 0,1 \text{ s}$$

Převod na PSD (diskretizovaný PID):

$$\begin{aligned}q_0 &= K_p \left(1 + \frac{T_z}{T_i} + \frac{T_d}{T_z} \right) = 67,8894 \\q_1 &= -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T_z} \right) = -107,0805 \\q_2 &= K_p \frac{T_d}{T_z} = 42,1614\end{aligned}$$

Přenos:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{67,8894 - 107,0805 z^{-1} + 42,1614 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

Stavová rovnice:

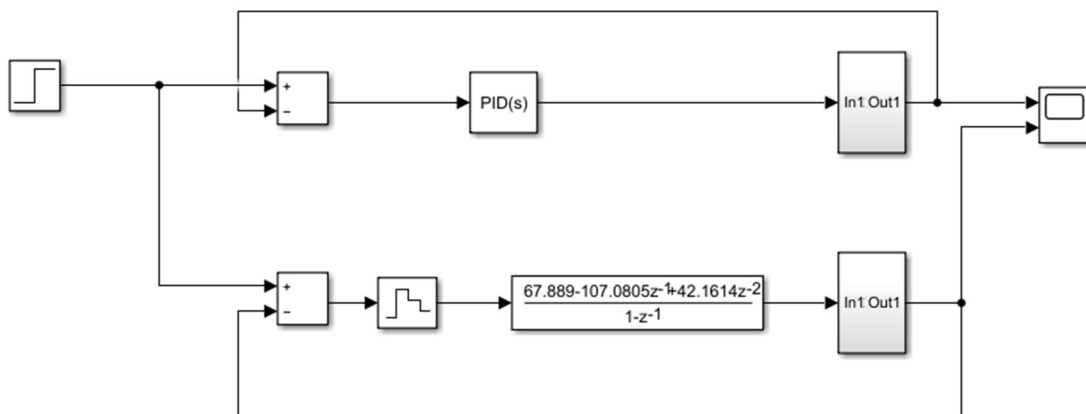
$$67,8894E(z) - 107,0805z^{-1}E(z) + 42,1614z^{-2}E(z) = U(z) - z^{-1}U(z)$$

Zpětnou Z transformací dostanu rovnici v časovém prostoru, pro akční veličinu:

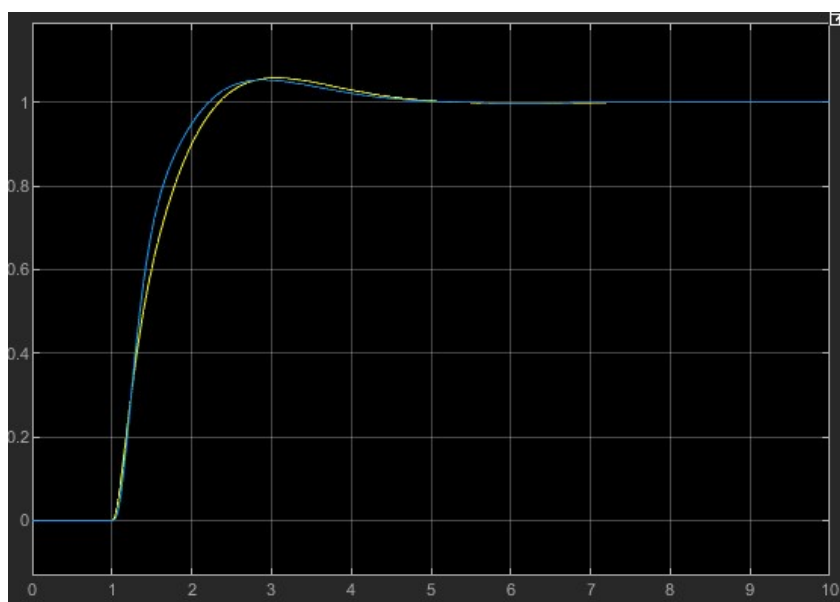
$$67,8894e(k) - 107,0805e(k-1) + 42,1614e(k-2) = u(k) - u(k-1)$$

$$u(k) = 67,8894e(k) - 107,0805e(k-1) + 42,1614e(k-2) + u(k-1)$$

Na obrázku 12 je simulační schéma pro regulační smyčku s PID i PSD (diskrétním) regulátorem. Šedý blok je model z bodu A :: obrázku 2. Na obrázku 13 je pak průběh výstupní veličiny obou soustav.



Obr. 12 – Schéma PID (nahore) a PSD (dole)



Obr. 13 – Přechodová charakteristika PID (žlutá) a PSD(modrá)

Zdrojové kódy matlab a schémata simulink přiložena externě.