§1. Komplexní čísla, algebraický tvar komplexního čísla

Pozn: Množinu všech komplexních čísel označíme $\mathbb{C}$.

Def: *Komplexním číslem* $z \in \mathbb{C}$ nazýváme každou uspořadanou dvajici $z = (x, y)$ reálných čísel, tj. kartézského čtverce $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, na které jsou definovány rovnost a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení takto:

1. *Rovnost komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$
$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$
2. *Součet komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$
3. *Rozdíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Rozdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 + z$, zapisujeme $z = z_1 - z_2$
4. *Součin komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
5. *Podíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Posdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 \cdot z$, zapisujeme $z = \frac{z_1}{z_2}$

V.1.1.: Nechť $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$. Pak platí:

1. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
2. $z_2 = \overrightarrow{0} : \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$

[Dk:

1.
$$z_1 = z_2 + z$$
Dosadím:
$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$
Ekvivalentně upravím:
$$(x_1, y_1) = (x_1 - x_2 + x_2; y_1 - y_2 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$
Což evidentně platí. *QED*

2.

$$z_1 = z_2 \cdot z$$

Dosadím:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \cdot \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Ekvivalentně upravím:

$$(x_1, y_1) = \left(x_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - y_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} y_2 + x_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1x_2^2 + x_2y_1y_2 - x_2y_1y_2 + x_1y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2y_2 + y_1y_2^2 + x_2^2y_2 - x_1x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$

Což evidentně platí. *QED*

Př: 11/1:

1. $5 + 4i$
2. $6 + 3i$
3. ??? Co to jako má znamenat ???
4. $6 - 9i$
5. analogicky

V.1.2.:

Množina $\mathbb{C}$ má následující vlastnosti:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $\exists o \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} : z + o = o + z = z$, kde $o = (0, 0)$
4. $\forall z \in \mathbb{C} : \exists z' \in \mathbb{C} : z + z' = z' + z = o$ (z' je číslo opačné k z)
5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
6. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
7. $\exists e \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} : z \cdot e = e \cdot z = z$, kde $e = (1, 0)$
8. $\forall z \in \mathbb{C} - \{o\} : \exists z^* \in \mathbb{C} - \{o\} : z^* \cdot z = z \cdot z^* = e$ (z^* je číslo převrácené k z)
9. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

[Dk:

Nechť $z_k = (x_k, y_k)$, pro všechna k:

1. ekvivalentní s $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. ekvivalentní s $(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$
3. $(x + 0, y + 0) = (x, y)$
4. $z' = -z \Rightarrow (x + -x, y + -y) = (0, 0)$
5. ekvivalentní s $(x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$
6. analogicky dvojím dosazením
7. $(x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0; x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1)$
8. Dosadíme $z^* = \left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2}\right)$: $\left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}; x\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}y\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}; \frac{0}{x^2+y^2}\right) = (1; 0)$
9. ekvivalentní s $((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3; (x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2))$

]

Pozn:

1) Vlastnosti 1-4 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C}$ s operací $+$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{C}, +)$
2) Vlastnosti 5-8 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C} - \{o\}$ s operací $\times$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{C} - \{o\}, \times)$
3) Vlastnosti 1-9 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C}$ s operacemi $+, \times$ tvoří *komutativní těleso (pole)* $(C, +, \times)$

Pozn: *Souvislost množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:*
Ztotožníme $\mathbb{R}$ s jistou podmnožinou množiny $\mathbb{C}$. Zobrazení $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme takto: $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x) = (x, 0)$ Zobrazení ϕ je injektivní (tedy prosté), ale není bijektivní. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

1. $\phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y)$
2. $\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(x \cdot y)$

ϕ zachovává operace $+$,$\times$. Je to izomorfní zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$. Lze tedy každé komplexní číslo $(x, 0)$ ztotožnit s reálným číslem x.

Pozn: *Konvence*
Komplexní číslo $(0, 1)$ označíme i.
Přitom platí: $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$
$i^2 = -1$

Def: Nechť $z \in \mathbb{C}; z = (x, y)$:
Zápis čísla z ve tvaru $z = x + iy$ nazýváme *algebraickým tvarem komplexního čísla* z. Číslo $x \in \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou částí* a $y \in \mathbb{R}$ nazýváme *částí imaginární*, číslo $i = (0, 1)$ nazýváme *imaginární jednotkou*. Zapisujeme $x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z$. *Čísla* $z = x + iy$, kde $y \neq 0$, nazýváme *imaginárními*, čísla $z = iy$, kde $y \neq 0$ nazýváme *ryze imaginárními.*

Pozn: Množina komplexních čísel je tedy sjednocením množiny čísel reálných a čísel imaginárních.

Pozn: Při počítání s komplexními čísly v algebraickém tvaru lze tato čísla formálně chápat jako mnohočleny a využívat faktu, že $-1 = i^2$.

Pozn: Platí: $\forall n \in \mathbb{Z}$: $i^{4n} = 1 \wedge i^{4n+1} = i \wedge i^{4n+2} = -1 \wedge i^{4n+3} = -i$

Př: $(2 + i) + (1 - 2i) = 3 - i$
$(2 + i)(1 - 2i) = 2 - 4i + i - 2i^2 = 2 - 3i + 2 = 4 - 3i$
$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{5i}{5} = i$