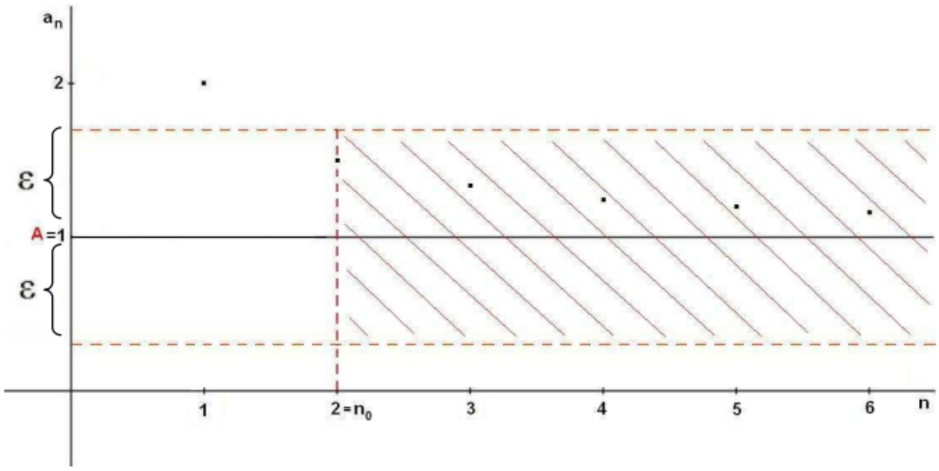
§1. Limita posloupnosti

Př: Určete několik prvních členů posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. nakreslete její graf a určete, jak se posloupnost chová pro vzrůstající n:



Def: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ číslo. Řekneme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*má limitu* rovnu číslu A, jestliže $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$, zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Pozn: $|a_n - A| < s \Leftrightarrow a_n \in (A - s; A + s)$

Def: Má-li posloupnost limitu, pak se nazývá *konvergentní*, v opačném případě *divergentní*.

V.1.1.: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

[Dk: Sporem: Nechť má posloupnsost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$limitu A a B, $A < B$.

Položme $\epsilon = \frac{B-A}{2}$. Musí platit:
$a_n \in (A - \epsilon; A + \epsilon) \cap a_n \in (B - \epsilon; B + \epsilon) \Rightarrow a_n \in \emptyset$, což je spor.]

V.1.2.: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Př: Obrácení předchozí věty neplatí: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pozn: Důsledek: Jestliže posloupnost není omezená, pak je divergentní.

Př: Určete limitu posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, hypotéza z předchozího příkladu: Máme dokázat:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$$

$|a_n - A| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{n+n}{n} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n}| < s\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$, neboť $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

V.1.3.: Každá nekonečná posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti je konvergentní a má stejnou limitu.

Pozn: Pokud lze vybrat z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$dvě konvergentní posloupnosti s různou limitou, je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$divergentní. (např.: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$)

V.1.4.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \cap \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

[Dk: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : b_n < \epsilon \Rightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq b_n < \epsilon$]

Pozn: Předpoklady předchozí věty lze zeslabit, nerovnosti nemusejí platit pro konečný počet členů posloupnosti.

V.1.5.: Věta o třech limitách:
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti takové, že $\exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n \leq b_n \leq c_n \cap \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$. Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Př:

1. $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
   $\forall \epsilon > 0 : \forall n : a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
   $\forall \epsilon > 0 : \forall n > \frac{1}{\epsilon} : 0 < a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = 0 + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$
3. $\left\{1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
   $\forall \epsilon > 0 : \forall n > \frac{1}{\epsilon} : 1 - \epsilon = 1 - \frac{1}{1/\epsilon} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + (-1)^n\frac{1}{n} = a_n = 1 + (-1)^n\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = 1 + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$
4. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
   Na sudých členech $\lim(-1)^{2n} = \lim 1 = 1$. Na lichých členech $\lim(-1)^{2n+1} = \lim -1 = -1$.

   Diverguje!

V.1.6.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \lim_{n\to\infty} b_n = B$ a nechť $c \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ $(\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0; B \neq 0)$

Př: : Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + 0 = 0$$

Pozn: Konvergence AP a GP:

1. AP je konvergentní $\Leftrightarrow d = 0$
2. GP je konvergentní $\Leftrightarrow q \in (-1, 1) \cap a_1 = 0.$

Pozn: Kromě limit zavedených v 1. definici tohoto paragrafu (tyto limity nazýváme *vlastní limity*) existují i tzv. *nevlastní limity* $\pm\infty$.

Def: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekněme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

1. *Má nevlastní limitu* $+\infty$ (diverguje k $+\infty$?) $\Leftrightarrow$ $\forall K \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$. Zapisujeme $\lim a_n = \infty$.
2. *Má nevlastní limitu* $+\infty$ (diverguje k $+\infty$?) $\Leftrightarrow$ $\forall K \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K$. Zapisujeme $\lim a_n = -\infty$.

Pozn: Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$ je racionální lomaná funkce. Pak platí:

1. *st* $P(x) >$ *st* $Q(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(n) = \pm\infty$
2. *st* $P(x) =$ *st* $Q(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(n) = \frac{a_n}{b_n}$
3. *st* $P(x) <$ *st* $Q(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(n) = 0$

V.1.7.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti takové, že$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak $\lim (a_n b_n) = 0$.

Př:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Př:

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2-3) = +\infty$$

Př: 39/1:

1. Vezměmw posloupnost na lichých imdexech: $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{2n}(2n-1)\right) = \lim_{n\to\infty}(2n-1) = 2\lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} 1 = 2\infty + 1 = \infty$. A na lichých indexech: $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{2n+1}(2n)\right) = -\lim_{n\to\infty} 2n = -2\lim_{n\to\infty} n = -2\infty = -\infty$. Podposloupnost diverguje.
2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n}{-3n+1}\right) = \frac{6}{-3} = -2$ (rac. lom. funkce)
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+2}\right) = \frac{2}{1} = 2$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-6n+5}{3n+5}\right) = \frac{6}{3} = 2$
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+7)^2}{4n^4-5n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+14n^2+49}{4n^4-5n+3}\right) = \frac{1}{4}$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2^n} - \frac{3n+5}{n^2}\right) \lim_{n\to\infty}\frac{5}{2^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n^2} = 0 + 0 = 0$
   První limita protože pro skoro všechna n: $\frac{5}{2^n} < \frac{5}{n}$ (2^n roste rychleji naž jakýkoliv polynom v n), dále už jen rac. lom. funkce.
7. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
8. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n+2} = 3$
9. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{3n^n-1} = \frac{1}{3}$

10. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{n+2} = \frac{3}{1} = 3$

11. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$

Př: 39/3:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{-n+2}{n} = -1$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{-4n+3}{n^2} = 0$

3. Sudé pozice $\lim_{n\to\infty} \frac{2-(-1)^{2n}\cdot 3}{(-1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3}{1} = 1$
   Liché pozice $\lim_{n\to\infty} \frac{2-(-1)^{2n-1}\cdot 3}{(-1)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3}{1} = 5$
   Diverguje

4. Sudé pozice $\lim_{n\to\infty} ((4+5)(7+10)) = 9 \cdot 17$
   Liché pozice $\lim_{n\to\infty} ((4-5)(7-10)) = 3$
   Diverguje.

Př: 9:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4-n^2}{2+n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^1+5n-b}{n+2} = \infty$

Př: 10:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : n_0 = \log_q x : \forall n > n_0 : q^n < q^{\log_q x} = x.$

2. $\ln q^n = \ln 1^n \ln 1 =$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : n_0 = \log_q x : \forall n > n_0 : q^n > q^{\log_q x} = x.$

4. Rozložíme na sudé a liché indexy:
   $\lim q^{2n} = \lim (q^2)^n + \infty$
   $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = q \cdot +\infty = -\infty$
   Diverguje.