§1. Hyperbola

Def: Mějme dány dva ruzné body F, G a takové číslo $2a$, že $0 < 2a < |FG|$. Množinu všech bodů roviny X, pro než platí $||fx| - |GX|| = 2a$ nazýváme i*hyperbolou s ohnisy* FG *a s hlavní osou* $2a$. Stručně ji ozmačujeme $H(F, G, 2a)$. *Větví hyperboly* nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX| = 2a$. Stejně jako množinu, pro kterou platí $|GX| - |FX| = 2a$.

Pozn: Zvláštní tvar hyperboly působí nesnáze; hyperboly nemají na ose úsečky FG zádné body, proto nemají vedlejší vrcholy.

Číslo $b > 0$ se definuje jinak: Pomocí vztahu $b^2 = e^2 - a^2$ a stále se nazývá velikostí vedlejši poloosy. Ale jelikož hyperbola nemá vedlejší vrcholy, nemá ani žádnou vedlejší poloosu.

Př: Odvoďte analitické vyjádření hyperboly $H(F, G, 2a)$, jejíž ohniska F, G, leží na ose x.

Zvolíme $F[-e; 0]; G[e; 0]; X[x, y]$, přitom $|FG| = 2e > 2a, b^2 = e^2 - a^2$. Vyjádřím charakteristickou vlastnost jednoho bodu:

$$
\begin{aligned}
||FX| - |GX|| &= 2a \\
|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2) - 4e^2x^2} &= (x^2 + e^2 + y^2) - 2a^2 \\
a^2x^2 + a^2y^2 - e^2x^2 &= a^4 - a^2e^2 \\
x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2) \\
-b^2x^2 + a^2y^2 &= -a^2 - b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &
\end{aligned}
$$

Poslední rovnice je ekvivalentní s první, proto slouží jako analytické vyjádření hyperboly, jejíž osy leží na osách soustavy souřadnic a ohniska na ose x.

Př: Ověřte, zda pro každou dvojici a, b kladných reálných čísel muže rovnice odvozená v příkladě 1 vyjadřovat hyperbolu s ohnisky F, G na ose x a s hlavní osou $2a$.

Je-li dána rovnice $\frac{x^2}{s^2} - \frac{y^2}{b^2}$, kde $a > 0; b > 0$, můžeme sestrojit $A_1[-a; 0]; A_2[a; 0]; K[a; b]$. Přepona OK udává $e > a$, kružnice $k(O, e)$ protíná osu x v bodech $F[-e;]; G[e; 0]$. Snadno ověříme (viz předhozí příkjlad), že hyperbola $H(F, G, 2a)$ má analitické vyjádření, které bylo dáno.

Pozn: Na rozdíl od elips nerozhoduje nerovnost mezi a, b o tom, na které z os leži ohniska hyperboly. O tom rozhoduje prohození členů rozdílu.

Def: Směry, jejichž každá přímka má s hyperbolou nejvýše jeden spolecný bod, se nazývají *asymptotické směry hyperboly*. Přímky těchto směrů, které neobsahují žádný bod hyperboly, nazyváme *asymptoty hyperboly*

Def: U hyperboly používáme následující termíny:

F, G	ohniska
A_1, A_2	(hlavní) vrcholy
S nebo O	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedlejší poloosy
e	výstřednost
a_1, a_2	asymptoty

"""11-1".pdf

Př: Najdět analytické vyjádření rovnoosých hyperbol $H(F, G, 2a)$, jejicž kolmé asymptoty jsou rovnoběžné s x, y.

Pracujme s hyperbolami, které mají přímo osy x, y jako asymptoty. Střed je tedy $[0; 0]$ a F, G mají na osách 1. a 3. kvadrantu. Protože $a = b$, je $e = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$. Ohniska mají pak souřadnice $F[-a; -a]; G[a, a]; X[x, y]$.

$$\begin{aligned} ||FX| - |GX|| &= 2a \\ |\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}| &= 2a \\ y &= cx^{-1} \end{aligned}$$

V.1.1.: Uvažme $H(F, G, 2a)$, které mají střed $S[m, n]$, excentricitu $e = \frac{|FG|}{2}$, velikost vedlejší poloosy $b = e^2 - a^2$.

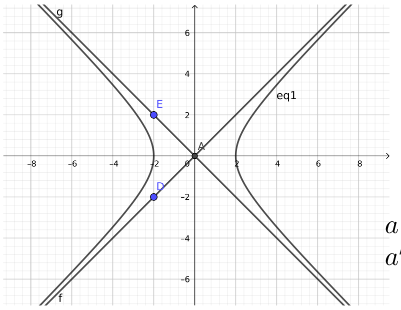
1. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rvnoběžná s x má právě jednu rovnici
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$
2. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rvnoběžná s y má právě jednu rovnici
$$\frac{(y-m)^2}{a^2} - \frac{(x-n)^2}{b^2} = 1$$
3. Každá rovnoosá hyperbla, která má asymptoty rovoběžné s x, y má právě jednu rovnici
$$2(x-m)(y-n) = a^2$$

Každá z rovnic vyjadřuje právě jednu hyperbolu v poloze výše popsané.

Př: 257/22:

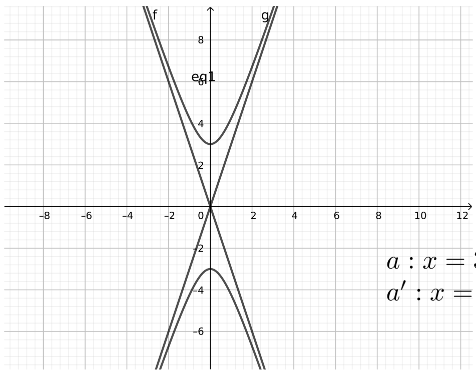
1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$
3. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$
4. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Př: 257/23:

a) 

$$\begin{array}{rl} F & [-2\sqrt{2};0] \\ G & [\ 2\sqrt{2}\ ;0] \\ S & [\quad 0 \quad ;0] \\ A_1 & [\ \ -2 \ \ ;0] \\ A_2 & [\quad 2 \quad ;0] \end{array}$$

$a : x = y$
$a' : x = -y$

d) 

$$\begin{array}{rl} F & [0;-\sqrt{10}] \\ G & [0;\ \sqrt{10}\ ] \\ S & [0;\quad 0 \quad] \\ A_1 & [0;\ \ -3 \ \ ] \\ A_2 & [0;\quad 3 \quad] \end{array}$$

$a : x = 3y$
$a' : x = -3y$

Př: 258/24: $p : y = 2x + 3$
$\overrightarrow{UV} = \left\{[3-t;t] | t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$

a) $x^2 - y^2 = 4$:
$x^2 - (2x+3)^2 = 4$
$0 = 3x^2 + 12x + 13$
$D = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 13 < 0$

$$H \cap p = \emptyset$$

$(3-t)^2 - t^2 = 4$
$5 - 6t = 0$
$t = \frac{5}{6}$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \left\{\left[\frac{13}{6}; \frac{5}{6}\right]\right\}$$

d) $y^2 - 9x^2 = 9$ $x^2 - 9(2x+3)^2 = 9$
$0 = 35x^2 + 108x + 90$
$D = 108^2 - 4 \cdot 35 \cdot 90 < 0$

$$H \cap p = \emptyset$$

$(3-t)^2 - 9t^2 = 9$
$0 = 8t^2 + 6t$
$t = 0 \vee t = -\frac{3}{4} < 0$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \{[3;0]\}$$