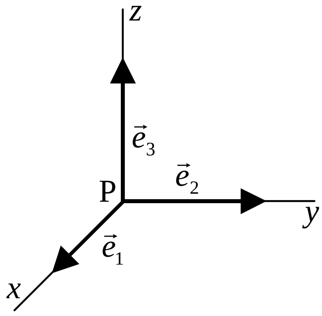
XI. ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

§1. Parametrické rovnice přímky

Pozn.: Předpokládejme, že v množině E_3, resp. E_2 (množina všech bodů v prostoru, resp. v rovině) je dána pevná ASS (afinní soustava souřadnic), která je dána 1 bodem (počátkem) a trojicí, resp. dvojicí lineárně nezávislých vektorů. Tzn., jestliže zvolíme umístění těchto vektorů tak, aby počátek ASS byl jejich počátečním bodem, pak přímky, které tyto vektory určují, jsou souřadné osy.



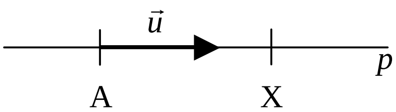
Def.: Nechť p je přímka, $\vec{u} \neq \vec{o}$ volný vektor takový, že existuje jeho umístění $\overrightarrow{AB}$ s vlastnostmi $A \in p, B \in p$. Pak vektor $\vec{u}$ nazýváme <u>směrovým vektorem přímky</u> p.

Pozn.: Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ se z tradičních důvodů užívá nepřesný zápis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

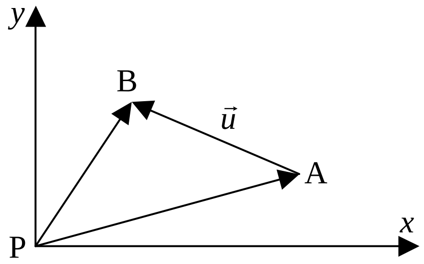
Pozn.: a) Směrový vektor přímky p není jediný, existuje jich nekonečně mnoho, všechny jsou navzájem rovnoběžné a nenulové.
b) Bude-li přímka zadána směrovým vektorem $\vec{u}$ a bodem A, zapíšeme to symbolem $p(A, \vec{u})$.

V.1.1.: Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka. Pak platí:

$\boxed{\text{Bod } X \in E_3(E_2) \text{ leží na } p \Leftrightarrow \exists t \in R : \overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.}$



Pozn.: Nechť $A[a_1, a_2, a_3],\ B[b_1, b_2, b_3] \in E_3; \vec{u}(u_1, u_2, u_3) = \overrightarrow{AB}$. V X. kapitole ve V.7.2 jsme dokázali, že $u_i = b_i - a_i,\ i \in \{1,2,3\}$. Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ se z tradičních důvodů užívá zápis $\overrightarrow{AB} = B - A$, neboť $P[0;0;0]$.



V.1.2.: Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $A[a_1, a_2, a_3]$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.
Pak platí: $\boxed{X[x,y,z] \in p \Leftrightarrow \exists t \in R : X = A + t\vec{u}}$
v souřadnicích: $x = a_1 + tu_1$
$y = a_2 + tu_2$ (*)
$z = a_3 + tu_3$
[Dk.: Podle V.1.1 $X \in p \Leftrightarrow \exists t \in R : \overrightarrow{AX} = t\vec{u}$, tzn. $x_i - a_i = tu_i$, $i \in \{1,2,3\}$
$x_i = a_i + tu_i$]

Def.: Rovnici $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in R, \vec{u} \neq \vec{o}$, nazýváme parametrickou rovnicí přímky v E_3, resp. E_2, číslo t – parametr.
Soustavu (*) nazýváme parametrickými rovnicemi přímky (v souřadnicích) v E_3 (v E_2 by byly rovnice jen 2).

Pozn.: Přímku $p(A,\vec{u})$ lze v E_3 zapsat: $\boxed{p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3]; t \in R\}}$
v E_2: $\boxed{p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2]; t \in R\}}$

Př.: a) Napište rovnici přímky p; $p(A,\vec{u})$:
$A[1;-1;2]$, $\vec{u}(0;1;2)$
$\Rightarrow x = a_1 + tu_1 = 1$
$y = a_2 + tu_2 = -1 + t$
$z = a_3 + tu_3 = 2 + 2t$
$\Rightarrow p = \{[1; -1+t; 2+2t], t \in R\}$

b) Napište rovnici přímky p; $p = \overrightarrow{AB}$:
$A[0;-1;2]$
$B[2;3;-1]$
$\vec{u} = B - A = (2;4;-3)$
$\Rightarrow x = 2t$
$y = -1 + 4t$
$z = 2 - 3t$
$\Rightarrow p = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in R\}$

c) Napište rovnici úsečky AB z př. b):
-parametrická rovnice – stejná
-určení t: bod A: $x = 2t = a_1 = 0 \Rightarrow t = 0$
bod B: $x = 2t = b_1 = 2 \Rightarrow t = 1$
$\Rightarrow AB = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <0;1>\}$

d) Napište rovnici polopřímky $\mapsto AB$ z př. b):
$\Rightarrow$ dolní mez intervalu pro t stejná, horní mez jde k nekonečnu
$\Rightarrow \mapsto AB = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <0; \infty)\}$

e) Napište rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\mapsto AB$:
$\{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in (-\infty; 0>\}$

f) Napište rovnici polopřímky $\mapsto BA$:
$\mapsto BA = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in (-\infty; 1>\}$

g) Napište rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\mapsto BA$:
$\{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <1; \infty)\}$

§2. Vzájemná poloha dvou přímek

A) v E_2

Pozn.: **Určení vzájemné polohy přímek:**

Dáno: $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}) \Rightarrow$ $p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2], t \in R\}$,
$q = \{[b_1 + rv_1, b_2 + rv_2], r \in R\}$

I. způsob: určíme průnik $p \cap q$:

$$\begin{aligned} a_1 + tu_1 &= b_1 + rv_1 \\ a_2 + tu_2 &= b_2 + rv_2 \end{aligned}$$ -soustava 2 rovnic s neznámými t, r

Soustava má: 1) *0 řešení* $\Rightarrow p, q$ - různé rovnoběžky
2) *1 řešení* $\Rightarrow p, q$ - různoběžky s průsečíkem P:
$P[a_1 + t'u_1, a_2 + t'u_2]$ nebo $P[b_1 + r'v_1, b_2 + r'v_2]$
3) *nekonečně mnoho řešení* $\Rightarrow p, q$ jsou totožné přímky

II. způsob: určíme, zda $\vec{u}, \vec{v}$ jsou rovnoběžné (lineárně závislé):

1) $\forall k \in R: \vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \nparallel q \Rightarrow B \in p \Rightarrow p, q$ - různoběžky
2) $\exists k \in R: \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \parallel q \Rightarrow$ a) $B \in p \Rightarrow p, q$ - totožné rovnoběžky
b) $B \notin p \Rightarrow p, q$ - různé rovnoběžky.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

$A[3;2] \qquad C[-4;5]$

$B[4;-1] \qquad D[-1;-2]$

$\Rightarrow p([3;2],(1;-3)); \vec{u}(1;-3)$

$q([-4;5],(3;-7)); \vec{v}(3;-7)$

I. způsob:

$$3+t=-4+3u \quad /\cdot 3$$
$$\underline{2-3t=5-7u}$$
$$9+3t=-12+9u \quad (1)$$
$$\underline{2-3t=5-7u \quad (2)}$$
$$(1)+(2): 11=-7+2u$$
$$\Rightarrow u=9$$
$$t=\frac{5-63-2}{-3}=20 \Rightarrow \underline{p \nparallel q}$$

II. způsob:

$$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{lineárně nezávislé} \Rightarrow \underline{p \nparallel q}$$

B) v E_3

Pozn.: **Určení vzájemné polohy přímek:**

$p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v}) \Rightarrow \quad p=\{[a_1+tu_1, a_2+tu_2, a_3+tu_3]\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ q=\{[b_1+rv_1, b_2+rv_2, b_3+rv_3]\}$

I. způsob: Porovnáním odpovídajících souřadnic získáme 3 rovnice o 2 neznámých t, r.

-soustava má 0 řešení $\Rightarrow$ p, q – různé rovnoběžky nebo mimoběžky (rozlišení provedeme na základě lineární závislosti nebo nezávislosti obou vektorů)

-ostatní – obdobně jako v E_2

II. způsob:

1) $\forall k \in R: \vec{u} \neq k\cdot\vec{v} \Rightarrow p \nparallel q$: a) $p \cap q \neq \emptyset \Rightarrow p, q$ – různoběžky

b) $p \cap q = \emptyset \Rightarrow p, q$ – mimoběžky

2) $\exists k \in R: \vec{u} = k\cdot\vec{v} \Rightarrow p \parallel q$: a) $B \in p \Rightarrow p = q$ – totožné rovnoběžky

b) $B \notin p \Rightarrow p, q$ – různé rovnoběžky

V případě 1) lze o vzájemné poloze přímek p, q rozhodnout též vyšetřením toho, zda trojice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ je, resp. není lineárně závislá.

V.2.1.: <u>Věta o vzájemné poloze dvou přímek</u>

Nechť $p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v})$ jsou dvě přímky. Pak platí:

1) $p \parallel q \wedge p = q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 1$

2) $p \parallel q \wedge p \neq q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1$

3) p, q – různoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2$

4) p, q – mimoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 3$

Př.!: Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q

$p = \{[t; -1+2t; -2+2t], t \in R\}$

$q = \{[1+r; 1; r], r \in R\}$

I. způsob:

$t = 1 + r$

$2t - 1 = 1$

$2t - 2 = r$

$\Rightarrow$ 1 řešení: $t = 1;\ r = 0 \Rightarrow$ <u>různoběžky</u>

II. způsob:

$\vec{u}(1; 2; 2)$

$\vec{v}(1; 0; 1)$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ - lineárně nezávislé $\Rightarrow$ <u>různoběžky</u>

III. způsob:

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim = 2 \Rightarrow \underline{\text{různoběžky}}$$

<u>§3. Další typy rovnice přímky v E_2</u>

Pozn.: Předpokládejme, že v E_2 je pevně dána kartézská soustava souřadnic, která je dána jedním bodem (počátkem) a dvěma kolmými jednotkovými vektory.

Pozn.!: <u>**Obecná rovnice přímky v E_2**</u>

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka v $E_2 \Rightarrow p:$

$$\begin{array}{ll} x = a_1 + tu_1 & /\cdot u_2 \\ y = a_2 + tu_2 & /\cdot(-u_1) \\ \hline \end{array}$$

$$u_2x - u_1y = a_1u_2 - a_2u_1$$

$$\underbrace{u_2}_{a}x - \underbrace{u_1}_{-b}y + \underbrace{a_2u_1 - a_1u_2}_{c} = 0$$

$\boxed{\Rightarrow ax + by + c = 0}$, $[a, b] \neq [0; 0]$

Def.: Rovnici $ax+by+c=0$, kde $[a,b]\neq[0;0]$ nazýváme <u>obecnou rovnicí přímky</u> v E_2.

Pozn.: Obecná rovnice přímky v E_2 není určena jednoznačně, každý její nenulový násobek je rovnicí téže přímky.

Pozn.: Koeficienty a, b lze považovat za souřadnice vektoru kolmého ke směrovému vektoru přímky p.
[Dk.: Nechť přímka p má směrový vektor $\vec{u}$ a nechť vektor $\vec{n}=(a,b)$. Pak platí:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=au_1+bu_2 \Rightarrow (podle\ pozn.)\ a\cdot(-b)+b\cdot a=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}\ ]$$

Def.: Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky p se nazývá <u>normálový vektor přímky</u> p a značí se $\vec{n}$.

Př.: Napište obecnou rovnici přímky p
$p=\{[2-3t;4-5t],t\in R\}$

I. <u>Vyloučením parametru</u> ze soustavy rovnic

$$x=2-3t \quad /\cdot 5$$
$$y=4-5t \quad /\cdot(-3)$$
$$5x-3y=10-12$$
$$\underline{5x-3y+2=0}$$

II. Pomocí <u>normálového vektoru</u> přímky

$A=[2;4]$

směrový vektor $\vec{u}=(3;5)$

$\Rightarrow$ normálový vektor $\vec{n}=(5;-3)$

obecná rovnice: $5x-3y+c=0$

$A\in p \Rightarrow 5\cdot 2-3\cdot 4+c=0 \Rightarrow c=2 \Rightarrow \underline{p: 5x-3y+2=0}$

Př.: Napište parametrickou rovnici přímky $p: x-2y+1=0$

I. <u>Substitucí</u> (1 neznámá = parametr)

$y=t; t\in R$

$x=2t-1$

$\Rightarrow p=\{[-1+2t; t], t\in R\}$

II. Pomocí <u>směrového vektoru</u>

$\vec{n}=(1;-2)$

$\vec{u}=(2;1)$

$A: y=0 \Rightarrow x-2\cdot 0+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow A[-1;0]$

$\Rightarrow p=\{[-1+2t; t], t\in R\}$

Pozn.: **<u>Směrnicový tvar rovnice přímky v E_2</u>**

Nechť $p: ax + by + c = 0, b \neq 0.$

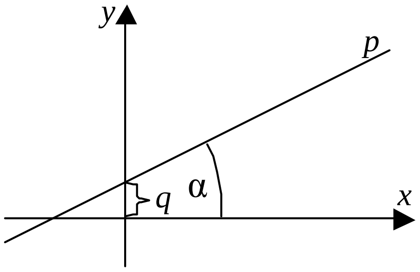
$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Označme $-\frac{a}{b} = k; -\frac{c}{b} = q$

$$\Rightarrow \underline{y = kx + q}$$

Def.: Rovnice $y = kx + q$ se nazývá <u>směrnicovým tvarem rovnice přímky</u> v E_2, k je <u>směrnice přímky</u>.

Pozn.: a) Geometrický význam čísel k, q:



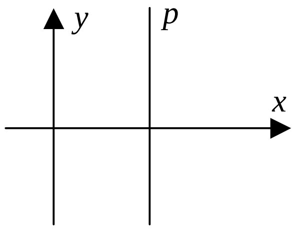
$p: y = kx + q$

$\boxed{k = \operatorname{tg} \alpha}$

průsečík přímky p s osou y v bodě $[0; q]$

$k = \frac{u_2}{u_1}$, kde $\vec{u}(u_1, u_2)$ je směrový vektor přímky p.

b) Směrnicový tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou y.



(α = 90°, tg 90° neexistuje)

c) Přímka p je dána směrnicí k a bodem $[x_1, y_1]$

$y = kx + q$

$[x_1, y_1] \in p \Rightarrow y_1 = kx_1 + q$

$q = y_1 - kx_1$

$y = kx + y_1 - kx_1$

$\boxed{y = k(x - x_1) + y_1}$

d) Přímka p je určena dvěma body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$

$y = kx + q$

$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1}$$

Pozn.: **<u>Úsekový tvar rovnice přímky v *E*$_2$</u>**

Nechť $p: ax + by + c = 0; \quad a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0$$

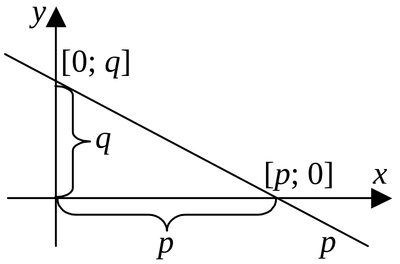
$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1.$$

Označme $-\frac{c}{a} = p; -\frac{c}{b} = q \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ $; p, q \neq 0$.

Def.: Rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ $; p, q \neq 0$ nazýváme <u>úsekovým tvarem rovnice přímky</u> v E_2.

Pozn.: a) Geometrický význam čísel *p*, *q*:



b) Úsekový tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou *x*, rovnoběžné s *y*, procházející počátkem soustavy souřadnic.

Př.: Dáno: $A[0; 2]$, $B[3; 0]$. Napište obecnou rovnici, úsekový, směrnicový a parametrický tvar rovnice přímky.

-úsekový tvar:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

-obecná rovnice:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

$$2x-3y=6$$

$$\underline{2x+3y-6=0}$$

-směrnicový tvar:

$$y=kx+q$$

$$2x+3y-6=0$$

$$3y=-2x+6 \quad /:3$$

$$\underline{y=-\frac{2}{3}x+2}$$

-parametrická rovnice:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3;-2)$$

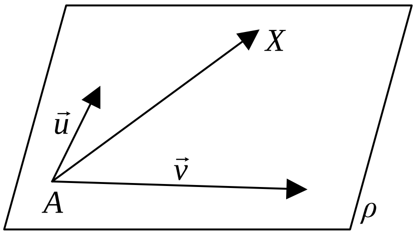
$$\Rightarrow\ p=\{[3t;\,2-2t],\,t\in R\}$$

§4. Rovnice roviny v E_3

Pozn.: Předpokládejme, že rovina $\rho \subseteq E_3$ je zadána bodem A a dvojicí lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Zapisujeme $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Def.: Nechť ρ je rovina, $\vec{u}, \vec{v}$ nenulové lineárně nezávislé volné vektory takové, že existuje jejich umístění $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ takové, že $A, B, C \in \rho$.
Pak vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazýváme zaměřením roviny ρ.

V.4.1.: Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina. Pak platí:
Bod $X \in E_3$ leží v rovině $\rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Leftrightarrow \exists r, s \in R : \overrightarrow{AX} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.



V.4.2.: Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina, $A[a_1, a_2, a_3]$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Pak platí:
Bod $X[x, y, z] \in \rho \Leftrightarrow \exists r, s \in R : \boxed{X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$
v souřadnicích:
$$x = a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1$$
$$y = a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2 \qquad (*)$$
$$z = a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \quad ; r, s \in R.$$

Def.: Rovnici $X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$; $r, s \in R; \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$ nazveme parametrickou rovnicí roviny v E_3, čísla r, s parametry.
Soustavu (*) nazýváme parametrickými rovnicemi roviny (v souřadnicích).

Pozn.: Parametrickou rovnici roviny $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ též zapisujeme
$\rho = \{[a_1 + ru_1 + sv_1, a_2 + ru_2 + sv_2, a_3 + ru_3 + sv_3]; r, s \in R\}$.

Př.: Napište parametrickou rovnici roviny ρ určenou body $A[1;1;1]$, $B[2;0;-1]$, $C[1;0;0]$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0;-1;-1)$

$\Rightarrow \rho = \{[1 + r; 1 - r - s; 1 - 2r - s]; r, s \in R\}$

Pozn.: **<u>Obecná rovnice roviny</u>**

Nechť $\rho(A,\vec{u},\vec{v})$ je rovina, $A[a_1,a_2,a_3]$, $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$.

Pak rovina ρ má tyto rovnice:
$$\begin{aligned} x &= a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + ru_3 + sv_3 \quad ; r,s \in R. \end{aligned}$$

Eliminací parametrů r,s a vhodným označením koeficientů A,B,C,D (analogie odvození obecné rovnice přímky) získáme tvar

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$, kde $[A,B,C]\neq[0;0;0]$.

Def.: Rovnici $Ax+By+Cz+D=0$, kde $[A,B,C]\neq[0;0;0]$ nazýváme <u>obecnou rovnicí roviny</u>.

Pozn.: Koeficienty A,B,C lze považovat za souřadnice vektoru kolmého k rovině ρ, tzn. <u>normálového vektoru roviny</u> $\rho: \vec{n}=(A,B,C)$, $\vec{n}\perp\vec{u}$, $\vec{n}\perp\vec{v}$.

Př.: Napište obecnou rovnici roviny ρ:
$$\rho:\ \begin{aligned} x &= 1+r \\ y &= 1-r-s \\ z &= 1-2r-s \quad ; \quad r,s\in R. \end{aligned}$$

I. Pomocí normálového vektoru

-z parametrické rovnice:
$$\begin{aligned} A &= [1;1;1] \\ \vec{u} &= (1;-1;-2) \\ \vec{v} &= (0;-1;-1) \end{aligned}$$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right)=(-1;1;-1)\sim(1;-1;1)$$

obecná rovnice: $\rho: x-y+z+d=0$

$A=[1;1;1]\in\rho \Rightarrow 1-1+1+d=0$

$d=-1$

$\Rightarrow \underline{\rho: x-y+z-1=0}$

II. Vyloučením parametrů r,s ze soustavy rovnic

$x=1+r$

$$\left.\begin{aligned} y &= 1-r-s \\ z &= 1-2r-s \end{aligned}\right\} z-y=-r$$

$\Rightarrow x+z-y=1$

$\underline{x-y+z-1=0}$

Př.: Napište parametrické rovnice roviny ρ, která má obecnou rovnici $x+2y-z+1=0$.

Pomocí substituce:
$$\begin{aligned} y &= r \\ z &= s \\ x &= -1+s-2r \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= -1+s-2r \\ y &= r \\ z &= s \quad ; r,s\in R \end{aligned}$$

$\rho=\{[-1-2r+s,\ r,\ s];\ r,s\in R\}$

§5. Vzájemná poloha dvou rovin

V.5.1.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi

Nechť $\rho: ax+by+cz+d=0,\ \sigma: ex+fy+gz+h=0$ jsou roviny.

Pak platí: I. $\rho=\sigma \Leftrightarrow \exists k\in R:(a,b,c,d)=k\cdot(e,f,g,h)$

II. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho\neq\sigma \Leftrightarrow \exists k\in R:(a,b,c)=k\cdot(e,f,g)\wedge d\neq k\cdot h$

III. $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k\in R:(a,b,c)\neq k\cdot(e,f,g)$.

nebo neexistuje takové $k\in R:(a,b,c)=k\cdot(e,f,g)$

Př.: Určete vzájemnou polohu dvou rovin

$\rho: 2x+3y+4z+5=0$

$\sigma: x-y-z+1=0$

$\vec{n}_\rho=(2;3;4)$

$\vec{n}_\sigma=(1;-1;-1)$ $\Rightarrow$ vektory nejsou lineárně závislé $\Rightarrow \rho\nparallel\sigma$.

Určení průsečnice rovin ρ, σ (hledáme parametrickou rovnici přímky v E_3):

volíme $z=t; t\in R$

$2x+3y+4t+5=0$

$x-y-t+1=0 \quad /\cdot 3$

$5x+t+8=0$

$$\Rightarrow x=\frac{-8-t}{5}=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}t$$

$$y=x-t+1 \Rightarrow y=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}t-t+1=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}t$$

$\Rightarrow$ rovnice průsečnice:
$$x=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}t$$
$$y=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}t$$
$$z=t \quad, t\in R$$

V.5.2.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi

Nechť $\rho(A,\vec{u},\vec{v}),\ \sigma(B,\vec{k},\vec{l})$ jsou roviny.

Pak platí: I. $\rho=\sigma \Leftrightarrow \dim\langle\vec{u},\vec{v},\vec{k},\vec{l}\rangle=2 \wedge \dim\langle\vec{u},\vec{v},\vec{k},\vec{l},\overrightarrow{AB}\rangle=2$

II. $\rho\parallel\sigma\wedge\rho\neq\sigma \Leftrightarrow \dim\langle\vec{u},\vec{v},\vec{k},\vec{l}\rangle=2 \wedge \dim\langle\vec{u},\vec{v},\vec{k},\vec{l},\overrightarrow{AB}\rangle=3$

III. $\rho\nparallel\sigma \Leftrightarrow \dim\langle\vec{u},\vec{v},\vec{k},\vec{l}\rangle=3$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ a σ:

$\rho=\{[4+t_1+2t_2;5+2t_1;3+2t_1+2t_2];\ t_1,t_2\in R\}$

$\sigma=\{[1+2r_1+r_2;-2-2r_1-2r_2;1+r_1];\ r_1,r_2\in R\}$

$\Rightarrow \rho:\ A=[4;5;3],$ $\quad\sigma:\ B=[1;-2;1]$

$\vec{u}=(1;2;2),$ $\quad\vec{k}=(2;-2;1),$

$\vec{v}=(2;0;2)\sim(1;0;1)$ $\quad\vec{l}=(1;-2;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; -7; -2)$

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2, \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \rangle = 3$

$\Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné různé.

Př.: Určete vzájemnou polohu rovin ρ a σ:

$\rho = \{[1 + t_1 + 2t_2;\ 2t_1 + 3t_2; -2 - 2t_1 + t_2];\ t_1, t_2 \in R\}$

$\sigma = \{[r_1; -3 + r_2; 1 + 4r_1 - r_2];\ r_1, r_2 \in R\}$

$\Rightarrow \rho:\ A = [1; 0; -2], \qquad \sigma:\ B = [0; -3; 1]$

$\vec{u} = (1; 2; -2), \qquad \vec{k} = (1; 0; 4),$

$\vec{v} = (2; 3; 1) \qquad \vec{l} = (0; 1; -1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; -3; 3)$

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3$

$\Rightarrow$ roviny jsou různoběžné.

<u>Rovnice průsečnice ρ, σ</u>:

-porovnání souřadnic ρ a σ:

$1 + t_1 + 2t_2 = r_1$

$2t_1 + 3t_2 = -3 + r_2$

$-2 - 2t_1 + t_2 = 1 + 4r_1 - r_2$

-soustava 3 rovnic o 4 neznámých, po vyjádření z 2. a 3.rovnice $t_2 = r_1 = t$, odsud a z 1. rovnice $t_1 = -1 - t$, $r_2 = t + 1$

Dosazením do rovnice roviny ρ:

<u>$p = \{[t; -2 + t; 3t], t \in R\}$</u>

§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $\rho(B,\vec{v},\vec{w})$ rovina.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u},\overrightarrow{AB}\rangle = 2$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u},\overrightarrow{AB}\rangle = 3$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 3$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

$p = \{[3+t; 1+2t; 2-t], t \in R\}$

$\rho = \{[1-3r+s; 2r-s; 1+4r-s]; r,s \in R\}$

$p: A = [3;1;2], \vec{u} = (1;2;-1)$

$\rho: B = [1;0;1], \vec{v} = (-3;2;4), \vec{w} = (1;-1;-1)$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (-2;-1;-1)$

$$\begin{array}{c} \vec{w} \\ \vec{v} \\ \vec{u} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\langle v,\vec{w},\vec{u}\rangle = 3 \Rightarrow$ přímka je různoběžná s rovinou.

Určení průsečíku p,ρ:

-porovnáváme souřadnice p a ρ:

$3+t = 1-3r+s$

$1+2t = 2r-s$

$2-t = 1+4r-s$

$\Rightarrow$ soustava 3 rovnic o 3 neznámých, vyřešením dostáváme $t=-2; s=9; r=3$.

Dosazením $t=-2$ do rovnice přímky p dostáváme souřadnice průsečíku:

$\underline{P = [1;-3;4]}$.

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $\rho: ax+by+cz+d=0, [a,b,c] \neq [0;0;0]$ rovina. Nechť $\vec{n} = (a,b,c)$.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \in \rho$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \notin \rho$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

a) $p = \{[1-t; 1+3t; -2], t \in R\}, \rho: 3x+y+5z+7=0$

$\Rightarrow \vec{u} = (-1;3;0)$,

$\vec{n} = (3;1;5)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = -3+3+0 = 0 \Rightarrow$ přímka je s rovinou rovnoběžná

Rozhodneme, jestli přímka p leží v rovině ρ, tzn. jestli $A \in \rho$:

$A[1;1;-2]$

$3+1-10+7=1\neq 0 \Rightarrow \rho, p$ jsou <u>rovnoběžné různé</u>.

b) $p=\{[3+t;1-t;2t],\ t\in R\},\ \rho: x-2y+z-3=0$

$\Rightarrow \vec{u}=(1;-1;2)$

$\vec{n}_\rho=(1;-2;1)$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=1+2+2=5\neq 0 \Rightarrow p \nparallel \rho$

Určení průsečíku p,ρ:

-dosadíme rovnici přímky p do rovnice roviny ρ:

$3+t-2+2t+2t-3=0$

$5t=2$

$t=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \underline{P=\left[\frac{17}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]}$