

Př: Na množině $\mathbb{R}^{(2)} = \{[x, y]\}$ všech uspořádaných dvojic \mathbb{R} čísel definujeme operaci sčítání a vnějšího násobení takto:

$$\begin{aligned}\forall \overleftarrow{u}_1 = [x_1, y_1]; \forall \overleftarrow{u}_2 = [x_2, y_2] : \overleftarrow{u}_1 + \overleftarrow{u}_2 &= [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \in \mathbb{R}^{(2)} \\ \forall \overleftarrow{u}_1 = [x_1, y_1]; \forall p \in \mathbb{R} : p \cdot \overleftarrow{u}_1 &= [[p \cdot x_1, p \cdot y_1] \in \mathbb{R}^{(2)}\end{aligned}$$

Dokažte, že takto definovaná struktura je vektorovým prostorem:

1. Komutativita:

$$\overleftarrow{u}_1 + \overleftarrow{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \overleftarrow{u}_2 + \overleftarrow{u}_1$$

2. Asociativita:

$$\overleftarrow{u}_1 + (\overleftarrow{u}_2 + \overleftarrow{u}_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$(\overleftarrow{u}_1 + \overleftarrow{u}_2) + \overleftarrow{u}_3 = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

3. Nulový prvek: $\exists \overleftarrow{o} \in V : \overleftarrow{u} + \overleftarrow{o} = \overleftarrow{o} + \overleftarrow{u} = u :$

$$\overleftarrow{o} = (0, 0) : (x + y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x + y)$$

4. Roznásobení

5. Roznásobení

6. Existence neutrálního prvku násobení:

Pozn: Analogicky můžeme dokázat, že množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel tvoří vzhledem k analogickým definicím sčítání a vnějšího násobení vektorový prostor.