§1. Komplexní čísla, algebraický tvar komplexního čísla

Pozn: Množinu všech komplexních čísel označíme $\mathbb{C}$.

Def: *Komplexním číslem* $z \in \mathbb{C}$ nazýváme každou uspořadanou dvajici $z = (x, y)$ reálných čísel, tj. kartézského čtverce $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, na které jsou definovány rovnost a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení takto:

1. *Rovnost komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$

2. *Součet komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

3. *Rozdíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Rozdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 + z$, zapisujeme $z = z_1 - z_2$

4. *Součin komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$$

5. *Podíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Posdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 \cdot z$, zapisujeme $z = \frac{z_1}{z_2}$

V.1.1.: Nechť $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$. Pak platí:

1. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
2. $z_2 = \overrightarrow{0} : \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}; \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$

[Dk:

1.

$$z_1 = z_2 + z$$

Dosadím:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

Ekvivalentně upravím:

$$(x_1, y_1) = (x_1 - x_2 + x_2; y_1 - y_2 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$

Což evidentně platí. *QED*

2.

$$z_1 = z_2 \cdot z$$

Dosadím:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \cdot \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Ekvivalentně upravím:

$$(x_1, y_1) = \left(x_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - y_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} y_2 + x_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1x_2^2 + x_2y_1y_2 - x_2y_1y_2 + x_1y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2y_2 + y_1y_2^2 + x_2^2y_2 - x_1x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$

Což evidentně platí. *QED*

Př: 11/1:

Př: