§1. Limity elemantárnich funkcí

V.1.1.: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Pak platí:

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
4. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |f(x)|$

Př:

1. $\lim_{x\to 1} \left(\ln x + x^2 + 3\right) = 4$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3+x^2-2x+11}{x^2+x+1} = 11$
3. $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{x} = -\frac{1}{\pi}$
4. $\lim_{x\to \pi/2} \sqrt{x\cos x + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+2^x \sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cos x} = 1$
6. $\lim_{x\to \pi/4} x \tan x = \frac{\pi}{4}$

Př:

1. $\lim_{x\to +\infty} (e^x + x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to -\infty} (e^x + x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{arctg}x = +\infty$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$
5. $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$

Př:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Př: „cvičení 182/1“

Daná strana evidentně neexistuje v daném souboru.

A) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

V.1.2.: Nechť f, g jsou funkce a nechť existuje $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť existuje $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Př:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

Kromě $x \neq -1$:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$$

. Tedy

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} x-1 = -2$$

Př:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} -(x+1) = -2$$

Př:

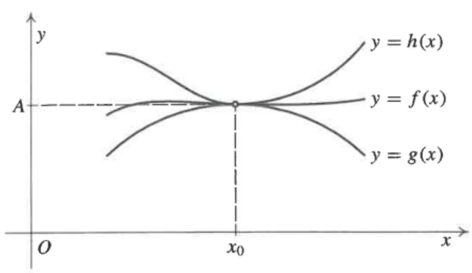
1.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x-3} = \frac{1}{2}$$

2.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3.
$$\lim_{x\to -\infty} x\sqrt{\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)^2} = \lim_{x\to -\infty} x\frac{(x^2+9)-(x^2-9)}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{18x}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{18x}{|2x|} = 9$$

B) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

V.1.3.: Nechť f, g, h jsou funkce a nechť existuje $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Nechť existuje $\lim_{x\to x_0} g(x) = h(x) = A$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.



C) Věta o limitě součtu „nulové“ a ohraničené funkce

V.1.4.: Nechť f, g jsou funkce a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť exsistuje $P(x_0)$, takové, že g je na tomto intervalu omezená. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Př:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Př:

$$\lim x \to 2\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim x \to 2\frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim x \to 2\frac{1}{(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x^2+11x+6}{x^3+27} = \lim_{x\to -3} \frac{3x-2}{1x^2-3x+9} = \frac{-11}{27}$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\mathrm{tg}x}{\sin 2x} = \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{2\sin x\cos x\cos x} = \lim_{x\to \pi} \frac{1}{2\cos x\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x+\sin x} = -1$$

Př:

$$\lim_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3} = \lim_{x\to 6} \frac{x-6}{x+3-9}(\sqrt{x+3}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2+16-16}(\sqrt{x^2+16}+4) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}(\sqrt{x^2+16}+4) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4}}(\sqrt{x^2+16}+4) = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2}{x^4}}(\sqrt{x^2+16}+4) = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x^2+16}+4) = 8$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-3x}+2x} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4x^2} \cdot \sqrt{x^2-3x}-2x =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{-3x(1+x)} \cdot \sqrt{x^2-3x}-2x = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{-3x} \cdot \sqrt{x^2-3x}-2x = \frac{1}{3}(2+2) = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4-x-3}{(x-1)(x^2+x+1)(2+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x^2+x+1)(2+\sqrt{x+3}} = \frac{-1}{12}$$

Př: $0; \frac{3}{5}; +\infty; +\infty$

Př:

Př:

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+4}+x) = \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+4}-x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-x^2+4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0$$

Př:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin 5x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$$