§1. Pravidla pro počítání s derivacemi

A) Derivace základních elementárních funkcí

V.1.1.:

$$
\begin{array}{rcl}
(c)' &=& 0 \;; c \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R} \\
(x^r)' &=& r x^{r-1} \;; r \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &=& \cos x \;; x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &=& -\sin x \;; x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &=& e^x \;; x \in \mathbb{R} \\
(\mathrm{tg} x)' &=& \frac{1}{\cos^2 x} \;; x \in \mathbb{R} \\
(\mathrm{cotg} x)' &=& -\frac{1}{\sin^2 x} \;; x \in \mathbb{R} \\
(\ln x)' &=& \frac{1}{x} \;; x \in \mathbb{R} \\
(\arcsin x)' &=& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;; x \in (-1;1) \\
(\arccos x)' &=& -\frac{1}{1-x^2} \;; x \in (-1;1) \\
(\mathrm{arctg} x)' &=& \frac{1}{x^2+1} \;; x \in \mathbb{R} \\
(\mathrm{arccotg} x)' &=& -\frac{1}{x^2+1} \;; x \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &=& a^x \ln a \;; x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &=& \frac{1}{x \ln a} \;; x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Př: $(x)' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$(x^{-1})' = -x^{-2}$

B) Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

V.1.2.: Nechť existují derivace f, g v $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
4. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Př: 199/15:

1. $\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2+1-6x^2-4x}{(x^2+1)} = \frac{-3x^2-4x+1}{(x^2+1)}$

Př: 218/3:

1. $f(x) = 5x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 10x - 3$
   $f'(1) = 8; f'(2) = 18; f'(-1) = -2$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}; f'(x) = -\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{1}{x^2}$
   $f'(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}, -f'(1) = -\frac{1}{2}; f'(4) = 0$

Př: $((x^2-1)(x^3-5))' = (x^5-x^3-5x^2+5)' = 5x^4-3x^2-10x$

$(x^2\mathrm{tg}(x))' = x^2\frac{1}{\cos^2(x)} + 2x\mathrm{tg}(x) = x(\frac{x}{\cos^2 x + 2x\mathrm{tg}x}$

$((x^2+1)\ln x)' = 2x\ln x + \frac{x^2+1}{x} = 2x\ln x + x + \frac{1}{x}$

Př: $(\frac{x}{x+1})' = \frac{1}{(x+1)^2}$

$\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)' = \frac{\sin(x)-1)\sin(x)+\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^2}$

$\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)' = \frac{e^x}{\cos x} - e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}$