§1. Kulová plocha, koule

Def: Nechť je dán bod S a kladné reálné číslo r. *Kulovou plochu se středem S a poloměrem r* nazýváme množinu všech bodů X prostoru, pro které platí $|SX| = r$ *Koulí se středem S a poloměrem r* se nazývá množina všech bodů X prostoru, pro která platí, že $|SX| \leq r^2$.

Pozn: Při analitickém vyjadřování těchto útvarů uplatníme ekvivalenci charakteristických vlastností:

$$|SX| = r \quad \Leftrightarrow \quad |SX|^2 = r^2$$
$$|SX| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad |SX|^2 \leq r^2$$

V.1.1.: Má-li bod S souřadnice $[m, n, q]$ a bod $X[x, y, z]$, pak kulová plocha $k(S, r)$ je analyticka vyjádřena rovnicí:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2$$

a koule $K(S, r)$ nerovnicí:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 \leq r^2$$

Pozn: Úloha o vzájemné poloze přímky a kulové plochy povede obdobným způsobem ke kvadratické rovnici. Může tedy mít následující typy výsledků:

- prázdná množina
- jednobodová množina
- dvoubodová množina

Př: Určete hodnotu parametru k, pro kterou má rovina $\rho : 2x - 3y + z + k = 0$ neprázdný průnik s kulovou plochou k středu $S[2; -3; 1]$ a poloměru 3.

$\rho \cap k \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \rho(S, \rho) \leq 3$

Nerovnici vyjádřím analiticky:

$$\begin{aligned} \frac{|2 \cdot 2 - 3(-3) + 1 \cdot 1 + k|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} &\leq 3 \\ |14 + k| &\leq 3 \cdot 14 \end{aligned}$$

Hledané hodnoty parametru k patří do intervalu $\left\langle -14 - 3\sqrt{14}; -14 + 3\sqrt{14} \right\rangle$.

Pozn: Jak víme ze stereometrie, tečnou rovinu kulové plochy můžeme charakterizovat kteroukoliv z těchto tří vlastností:

- Má s kulovou plochou jednobodový průnik
- Má od středu vzdálenost rovnou poloměru
- je kolmá k poloměru kulové plochy obsahující bod dotyku

Bod X je libovolným bodem roviny $\tau, X \neq T$. Z rovnosti $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SX} = r^2$ můžeme odvodit rovnici tečné kruhové roviny τ kulové plochy K zcela obdobně jako rovnici tečny kružnice.

V.1.2.: Rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(t - n) + (z_0 - q)(z - q) = r^2$ je analytickým vyjádřením tečné roviny kulové plochy $K : (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2$ v jejím bodě $T[x_0, y_0, z_0]$.

Pozn: Úpravy obecné rovnice kulové plochy na středový tvar se provádí stejnými kroky jako úpravy rovnice kružnice. Platí také, že ne každá rovnice typu $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ vyjadřuje kulovou plochu.

Př: 222/21: $\overrightarrow{SA} = (0, -2, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{13}$ $\overrightarrow{SB} = (0, -5, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{34}$ $\overrightarrow{SC} = (5, 0, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{41}$

$r = \sqrt{41}$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 \leq 41$$

Př: 22/24: $(1 - t - 1)^2 + (2 + t)^2 + (3 - 2t - 1)^2 = r^2$
$(1 - t)^2 + (2 + t)^2 + (3 - 2t - 6)^2 = r^2$

$(1 - t - 1)^2 + (2 + t)^2 + (3 - 2t - 1)^2 = (1 - t)^2 + (2 + t)^2 + (3 - 2t - 6)^2$
$6t^2 - 4t + 8 = 6t^2 + 14t + 14$
$18t = 6$
$t = -\frac{1}{3}$
$S\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right]$
$r^2 = 10$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{5}\right)^2 = 10$$

Př: 222/25:

$\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$

$\overleftrightarrow{AB} = \{[4 + t; 5 - 2t; 6 + 2t] | t \in \mathbb{R}\}$

$$(4 + t - 2)^2 + (5 - 2t - 3)^2 + (6 + 2t - 5)^2 = 36$$
$$9t^2 - 27 = 0$$

$t = \pm\sqrt{3}$

1. $\emptyset$
2. $\left\{[4 + \sqrt{3}; 5 - 2\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3}]\right\}$
3. $\left\{[4 - \sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3}; 6 - 2\sqrt{3}]; [4 + \sqrt{3}; 5 - 2\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3}]\right\}$