# §1. Binomické rovnice

Pozn: Nechť $a' in \mathbb{R}$; $\sqrt[n]{a}$ v reálném ooru (pokud existuje) je jediné číslo $x$ s vlastností $x^n = a$. Tzn. v $\mathbb{R}$ existuje nejvýše jedna $\sqrt[n]{a}$. V množině $\mathbb{C}$ je situace jiná.

Def: *Binomickou rovnicí* s neznámou $z \in \mathbb{C}$ nazýváme každou rovnici tvaru $z^n = a$, kde $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Každý komplexní kořen binomické rovnice nazýváme *komplexní n-tou odmocninu* z čisla $a$.

Př: Vypočítejte: $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$
$z^2 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $|z| = \sqrt{2}$ $2\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi n \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \vee \varphi = \frac{7}{6}\pi$

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Pozn: Při řešení binomických rovnic (s využitím goniometrického tvaru komplexních čísel) jde tedy i o řešení následujícího problému:

Určit všechna $x \in \mathbb{R} : (\cos x + i \sin x)^n (\cos nx + i \sin nx) = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Musí platiti: $nx = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$

Je zřejmé, že pro $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ získáme argumenty různých komplexních čísel.

Pro $k = n + h; h \in \mathbb{N}_0 : x_k = \frac{\alpha + 2h\pi}{n} + 2\pi \Rightarrow x_h$ a $x_k$ se liší o $2\pi$, proto jsou to argumenty téhož čísla.

V.1.1.: Nechť $a \in \mathbb{C}$: pak binomická rovnice $z^n = a$ má v množině $\mathbb{C}$:

1. $a = 0 \Rightarrow$ jeden kořen
2. $a \neq 0 \Rightarrow$ právě $n$ kořenů
$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}$$
kde $k \in \{0; 1; \ldots n-1\}$, $\alpha \ldots$ argument komplexního čísla $a$.

Př: Řešte v $\mathbb{C}$: $z^3 = i$.

$|z|^3 = 1 \Rightarrow |z| = 1$
$3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{2}i; -i$$

Pozn: Obrazy kořenů binomické rovnice $z^n = a; n \geq 3$ tvoří vrcholy pravidelného $n$-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$, neboť rozdíl dvou „sousedních“ kořenů je konstantní:

$$x_{i-1} - x_i = \frac{\alpha + 2(i+1)\pi}{n} - \frac{\alpha + 2i\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$