V. Planimetrie

§1. Základní pojmy

Pozn.: a) V kapitole o planimetrii budeme pracovat v rovině $\boldsymbol{E}_2$, což je základní množina, jejíž prvky jsou body

$\boldsymbol{E}_2$ … euklidovský prostor dimenze 2

b) Podmnožiny v $\boldsymbol{E}_2$-přímky, označujeme malými písmeny.
Množinu všech přímek v rovině označujeme $\mathcal{P}$ (psacím P).

c) Vztahy zapisujeme takto:
$A \in p$ …bod A leží na přímce p; přímka p obsahuje bod A.
$\in$ …„ležet na“- relace incidence
$p \subseteq \boldsymbol{E}_2$($p \in \mathcal{P}$)…přímka p leží v rovině $\boldsymbol{E}_2$.

Pozn.: Bod, přímka a rovina jsou tzv. primitivními pojmy (základní), které nedefinujeme a vyslovujeme o nich nedokazatelná tvrzení (**axiomy**), které považujeme za platné. Z nich budujeme soustavu planimetrických pojmů a vět.

Axiomy incidence pro přímku
(axiomy relace „$\in$“ pro přímku)

A$_1$: Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka:

$$\forall A,B \in E_2, A \neq B:\ \exists!\ p \in \mathcal{P}:\ A \in p\ \wedge B \in p$$

A$_2$: Na každé přímce leží alespoň 2 různé body:

$$\forall\ p \in \mathcal{P}:\ \exists\ A,B \in E_2:\ A \neq B\ \wedge\ A \in p\ \wedge B \in p$$

A$_3$: Existují alespoň 3 body, které neleží na jedné přímce:

$$\exists\, A,B,C \in E_2,\ A \neq B \neq C:\ \forall\ p \in \mathcal{P}:\ A \notin p \vee B \notin p \vee C \notin p$$

Axiom rovnoběžnosti
(Euklidův axiom, pátý Euklidův postulát o rovnoběžkách)

A$_4$: Každým bodem, který neleží na dané přímce, prochází právě jedna přímka, která s danou přímkou nemá žádný společný bod:

$$\forall A \in E_2,\ \forall\ p \in \mathcal{P}:\ A \notin p\ \Rightarrow\ \exists!\ q \in \mathcal{P}: A \in q\ \wedge p \cap q = \emptyset$$

V.1.1.: Existují alespoň tři přímky, které nemají společný bod

[Dk.: Dle $\mathbf{A_3}$ $\exists A, B, C \in$ $\boldsymbol{E_2}$, které neleží na jedné přímce, tj: $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$
Dle $\mathbf{A_1}$ $p_1 = \overleftrightarrow{AB}$, $p_2 = \overleftrightarrow{BC}$, $p_3 = \overleftrightarrow{AC}$, $p_1 \neq p_2$, $p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3$
$\Rightarrow p1 \cap p2 \cap p3 = \varnothing$]

V.1.2.: $\forall\ p, q \in \mathcal{P}: p = q \Rightarrow\ p \cap q \neq \varnothing$

[Dk.: Plyne z $\mathbf{A_2}$]

Pozn.: Pro klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v $\boldsymbol{E_2}$ má význam obměna věty 1.2.:

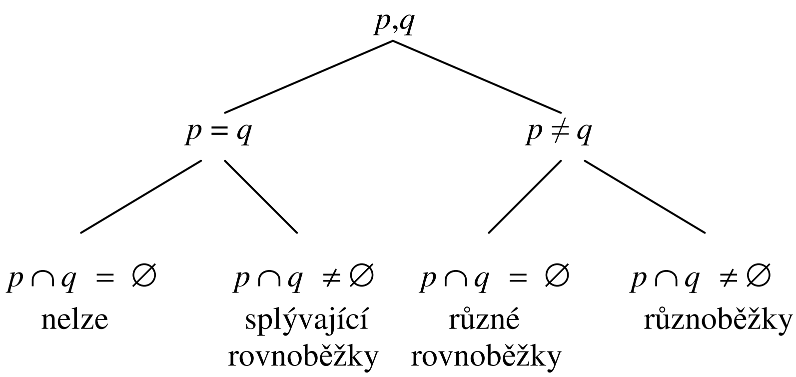
$\forall\ p, q \in \mathcal{P}:\ p \cap q = \varnothing\ \Rightarrow p \neq q$

V.1.3.: $\forall\ p, q \in \mathcal{P}:\ p \cap q$ je alespoň dvou prvková množina $\Rightarrow p = q$

[Dk.: $p \cap q = \{A, B\}$, $A \neq B \Rightarrow\ A \in\ p \wedge B \in\ p \wedge A \in\ q \wedge B \in q \Rightarrow\ p\ =\ q$]

Pozn.: Věty 1.3. výhodně užíváme k důkazu totožnosti dvou přímek, neboť stačí dokázat, že mají společné dva body.

Pozn.: Třídění vzájemné polohy dvou přímek $p, q \subseteq$ $\boldsymbol{E_2}$ provádíme podle tohoto schématu:



Def.: Nechť $p, q \in \mathcal{P}$. Jestliže platí:

a) $p = q$, pak přímky p, q se nazývají <u>splývající rovnoběžky</u>

b) $p \neq q \wedge p \cap q\ =\ \varnothing$, pak přímky p, q se nazývají <u>různé rovnoběžky</u>

c) $p \neq q \wedge p \cap q \neq \varnothing$, pak přímky p, q se nazývají <u>různoběžky</u>.

V.1.4.: Nechť $p, q \in \mathcal{P}$ jsou různoběžky, pak $p \cap q = \{P\}$, bod P nazveme průsečíkem (průnikem) různoběžek p, q.

[Dk.: sporem: podle definice různob. přímek platí, že $p \cap q \neq \emptyset$. Je-li $p \cap q$ alespoň dvouprvková množina $\Rightarrow$ $p = q$ $\Rightarrow$ $p \parallel q$ – spor.]

Pozn.: a) Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, zapisujeme $p \parallel q$, jsou-li různoběžné, zapisujeme $p \nparallel q$.

b) Pro dvě přímky $p,q \subseteq \boldsymbol{E_2}$ platí, že p není rovnoběžné s q znamená totéž jako p je různoběžné s q, v $\boldsymbol{E_3}$ to však neplatí.

c) Pomocí pojmu rovnoběžnost lze vyjádřit axiom $\mathbf{A_4}$ i pro body na přímce.
Platí: $\mathbf{A_4}$‘: Každým bodem lze ke každé přímce vést právě jednu rovnoběžku.
Pro $\forall A \in \boldsymbol{E_2}$, $\forall p \in \mathcal{P}\ \exists!\ q \in \mathcal{P};\ q \parallel p\ \wedge A \in q$

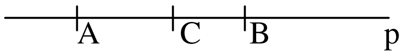
V.1.5.: Tranzitivnost rovnoběžnosti: $\forall p, q, r \in \mathcal{P}$: $p \parallel q \wedge q \parallel r \Rightarrow p \parallel r$

Důsledek V.1.5.: Protíná-li přímka jednu z rovnoběžek, pak protíná i druhou.
$\forall p, q, r \in \mathcal{P}$: $p \parallel q \wedge p \nparallel r \Rightarrow q \nparallel r$ (jde o obměnu věty 1.5.)

Def.: Nechť $A,B,C \in \boldsymbol{E_2}$ jsou tři body. Jestliže všechny tři leží na jedné přímce, řekneme, že jsou kolineární. V opačném případě jsou nekolineární.

§2. Uspořádání na přímce

Pozn.: Jako další primitivní pojem zavedeme vztah „ležet mezi“- relace uspořádání.



„Bod C leží mezi body A, B“; zapisujeme $C\,\mu\,AB$.
Relaci uspořádání značíme μ [mí].
Vlastnosti relace μ vyjadřují následující axiomy:

Axiomy uspořádání pro přímku
(axiomy relace „μ“ pro přímku)

A_5: $\forall A,B,C \in \boldsymbol{E}_2 : C\mu AB \Rightarrow A,B,C$ jsou tři různé kolineární body a také platí $C\mu BA$

A_6: $\forall A,B \in \boldsymbol{E}_2, A \neq B : \exists\ C \in \boldsymbol{E}_2 : B\,\mu\,AC$

A_7: $\forall A,B \in \boldsymbol{E}_2, A \neq B : \exists\ D \in \boldsymbol{E}_2 : D\,\mu\,AB$

A_8: Ze tří různých kolineárních bodů právě jeden leží mezi dvěma ostatními.

$$\forall A,B,C \in p \subseteq \boldsymbol{E}_2,\ A \neq B,\ B \neq C,\ A \neq C :\ A\,\bar{\mu}\,BC\ \wedge\ B\,\bar{\mu}\,AC\ \Rightarrow\ C\,\mu\,AB$$

A_9: $\forall A,B,C,D \in \boldsymbol{E}_2, B\,\mu\,AC \wedge C\,\mu\,BD \Rightarrow B\,\mu\,AD$

A_{10}: $\forall A,B,C,D \in \boldsymbol{E}_2, B\,\mu\,AD \wedge C\,\mu\,BD \Rightarrow C\,\mu\,AD$

Def.:

a) Nechť $p \in \mathcal{P}, A \in p, B \in p, A \neq B$.
Množinu $P_1(A)=\{X \in \boldsymbol{E}_2;\ X = B \vee X\,\mu\,AB \vee B\,\mu\,AX\}$ nazýváme otevřenou polopřímkou $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A.
Množinu $P_2(A)=\{X \in \boldsymbol{E}_2;\ A\,\mu\,BX\}$ nazýváme otevřenou polopřímkou opačnou k polopřímce $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A.

b) Množinu $P_1(A) \cup \{A\}$ nazveme $\mapsto{AB}$ (uzavřenou) polopřímkou s počátkem A.
Množinu $P_2(A) \cup \{A\}$ nazveme (uzavřenou) polopřímkou opačnou k polopřímce $\overset{\longmapsto}{AB}$ s počátkem A.

Pozn.:

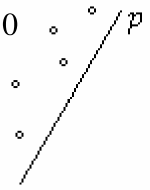
a) Sjednocením dvou opačných polopřímek je přímka, průnikem společný počátek.

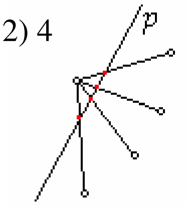
b) Místo pojmu „otevřená polopřímka“ užíváme pojem „vnitřek polopřímky“.

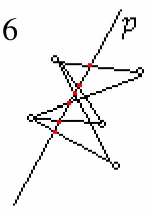
Def.: Nechť body $A,B \in \boldsymbol{E_2}$, $A \neq B$. Průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ nazveme <u>úsečkou</u> AB. Body A,B se nazývají <u>krajní body úsečky</u> AB, bod $X \mu AB$ se nazývá <u>vnitřní bod úsečky</u> AB.

V.2.1.:Bod X je vnitřním bodem úsečky $AB \Leftrightarrow X \mu AB$.

Př.: Jestliže pět různých bodů leží mimo přímku p, kolik úseček, spojujících dvě z nich, protne přímku p?

Řešení: 1) 0 

2) 4 

3) 6 

Př.: Je dáno n různých přímek, žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři neprochází jedním bodem. Určete počet průsečíků. Řešení: $\frac{n(n-1)}{2}$

§3. Polorovina

Pozn.: Jako další pojem (ne primitivní) zavedeme relaci „přímka odděluje dva body“. Budeme používat znak ν [ný].

Def.: Nechť $a \in \mathcal{P}, A \notin a, B \notin a, A \neq B$. Řekneme, že <u>přímka</u> a <u>odděluje body</u> A,B (zapisujeme $a \ \nu \ AB$), jestliže $\exists X \in \boldsymbol{E_2}$: $X \in a \wedge X \ \mu \ AB$.
V opačném případě řekneme, že <u>přímka</u> a <u>neodděluje body</u> A,B a zapisujeme $a \ \bar{\nu} \ AB$.

Axiomy pro rovinu
(axiomy relace„ν“ pro rovinu)

A_{11}: $\forall A, B, C \in \boldsymbol{E_2}, \forall a \in \mathcal{P}: a \ \nu \ AB \ \wedge \ a \ \nu \ AC \Rightarrow a \ \bar{\nu} \ BC$

A_{12}: Nechť $a \in \mathcal{P}$ je přímka v $\boldsymbol{E_2}$. Pak všechny body $X \in \boldsymbol{E_2} \setminus a$ lze rozdělit do dvou podmnožin $P_1(a)$, $P_2(a)$ takto:

1) Přímka a odděluje každé dva body z různých podmnožin.
$$\forall X \in P_1(a), \ \forall Y \in P_2(a): a \ \nu \ XY$$

2) Přímka a neodděluje žádné dva body z jedné podmnožiny.
$$\forall X, Y \in P_i(a), \ i \in \{1,2\}: a \ \bar{\nu} \ XY$$

Def.: Množinu $P_1(a)$ z **A_{12}** nazýváme <u>otevřenou polorovinou s hranicí a(s hraniční přímkou a)</u>, množinu $P_2(a)$ nazýváme <u>otevřenou polorovinou s hranicí a opačnou k $P_1(a)$.</u>
Množinu $P_1(a) \cup a$ nazveme <u>(uzavřenou) polorovinou s hranicí a.</u> Množinu $P_2(a) \cup a$ nazveme <u>(uzavřenou) polorovinou s hranicí a opačnou</u> k $P_2(a)$.

Pozn.:

a) Sjednocením dvou opačných polorovin je rovina. Průnikem dvou opačných polorovin je hraniční přímka.
b) Místo pojmu „otevřená polorovina“ užíváme „vnitřek poloroviny“.
c) Je-li $a \in \mathcal{P}$ hraniční přímka, $A \in \boldsymbol{E_2}$, $A \notin a$ a je-li bod A vnitřní bod poloroviny, pak polorovinu $P_1(a) \cup a$, které náleží A, značíme $\overrightarrow{aA}$ (někdy aA)
d) Jsou-li $A,B,C \in \boldsymbol{E_2}$ různé nekolineární body, pak polorovinu s hranicí $\overleftrightarrow{AB}$, které náleží bod C, značíme $\overrightarrow{ABC}$.

V.3.1.: Nechť $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $a \in \mathcal{P}$, $A \in a$, $B \notin a$, pak platí: $\overrightarrow{AB}$ leží v polorovině $\overrightarrow{aB}$ ($\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{aB}$).

[Dk.: Nechť $a \nparallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow a \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$. Nechť $\forall X \in \boldsymbol{E_2}, X \in \overrightarrow{AB}, X \neq A \Rightarrow$

$$\Rightarrow X \ \mu \ AB \ \vee \ B \ \mu \ AX \ \vee \ X = B \Rightarrow a \ \bar{\nu} \ \mathrm{AX} \Rightarrow X \in \overrightarrow{aB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{aB} \ ]$$

Důsledek věty 3.1.: Nechť AB je úsečka, $a \in \mathcal{P}, A \in a, B \notin a$, pak $: AB \subseteq \overset{\longmapsto}{aB}$

V.3.2.: Nechť $a \in \mathcal{P}, P_1(a)$ je otevřená polorovina. Pak platí:

1. $\forall X, Y \in \boldsymbol{E_2},\ X \neq Y; X, Y \in P_1(a) \Rightarrow XY \cap a = \varnothing$
2. $\forall X, Y \in \boldsymbol{E_2} \setminus a,\ X \in P_1(a) \wedge Y \notin P_1(a) \Rightarrow XY \cap a \neq \varnothing$

[Dk.:1.Nechť $Z \in P_2(a)$ lib. $\Rightarrow a\ v\ ZX \wedge a\ v\ ZY \overset{A11}{\Rightarrow} a\ \bar{v}\ XY \Rightarrow$ na úsečce XY neleží žádný bod přímky $a \Rightarrow XY \cap a = \varnothing$

2. odbobně]

Def.: Nechť $A, B, V \in \boldsymbol{E_2}$ jsou tři různé nekolineární body.

Průnik polorovin $\overset{\longmapsto}{VBA} \cap \overset{\longmapsto}{VAB}$ nazveme <u>konvexním úhlem</u> (zapisujeme $\sphericalangle BVA$), V jeho <u>vrcholem</u>, polopřímky $\overset{\longmapsto}{VA}, \overset{\longmapsto}{VB}$ jeho <u>rameny</u>.

<u>Nekonvexním úhlem</u> $\sphericalangle BVA$ nazveme sjednocení polorovin opačných k polorovinám $\overrightarrow{VBA}, \overrightarrow{VAB}$.

Pozn.:

a) Jestliže polopřímky $\overset{\longmapsto}{VA}, \overset{\longmapsto}{VB}$ splynou, pak úhel $\overset{\longmapsto}{VBA} \cap \overset{\longmapsto}{VAB}$ nazveme <u>nulovým úhlem.</u>

b) Jestliže $\overset{\longmapsto}{VA}, \overset{\longmapsto}{VB}$ jsou opačné polopřímky, pak libovolnou z polorovin určenou přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ nazveme <u>přímým úhlem.</u>

Pozn.:

a) <u>Konvexní</u> bodovou <u>množinou</u> rozumíme každou bodovou množinu, která s každými svými body A,B obsahuje i celou úsečku AB.

b) <u>Nekonvexní</u> bodovou <u>množinou</u> nazýváme takovou bodovou množinu, v níž existuje dvojice bodů A,B taková, že úsečka AB neleží v této množině.

c) Nulový a přímý úhel považujeme za konvexní.

Def.: Nechť $A, B, C \in \boldsymbol{E_2}$ jsou tři různé nekolineární body.

<u>Trojúhelníkem</u> ABC (značíme $\triangle ABC$) nazýváme průnik polorovin $\overset{\longmapsto}{ABC} \cap \overset{\longmapsto}{BCA} \cap \overset{\longmapsto}{CAB}$. Body A,B,C nazýváme <u>vrcholy trojúhelníka</u>, úsečky AB, BC, CA jeho <u>strany</u>, sjednocení úseček $AB \cup BC \cup CA$ jeho <u>obvodem</u>.

Pozn.:

a) Obdobně lze definovat 4-n-úhelník. V těchto případech však rozlišujeme n-úhelníky konvexní (vypuklé) a nekonvexní (duté).

b) Trojúhelník je vždy konvexní.

V.3.3.: Nechť $A,B,C\in$ $\boldsymbol{E_2}$ jsou 3 různé nekolineární body, $a\in$ $\mathcal{P}$ přímka, na níž žádný z bodů A,B,C neleží. Nechť přímka a protíná stranu AB trojúhelníka $\triangle ABC$ v jejím vnitřním bodě X. Pak protíná právě jednu ze zbývajících stran BC, CA ve vnitřním bodě Y.

[Dk.: Přímka a rozděluje $\boldsymbol{E_2}$ na dvě poloroviny, body A, B leží v opačných polorovinách s hranicí a, bod C leží v jedné z těchto polorovin.

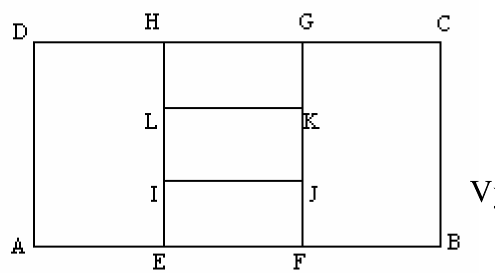
a) Nechť $C\in aA \Rightarrow a \vee BC \wedge a \,\overline{\vee}\, AC \Rightarrow BC\cap a\neq\emptyset \wedge AC\cap a=\emptyset \Rightarrow BC\cap a=\{Y_1\}$

b) Nechť $C\in aB \Rightarrow a \vee AC \wedge a \,\overline{\vee}\, BC \Rightarrow AC\cap a\neq\emptyset \wedge BC\cap a=\emptyset \Rightarrow AC\cap a=\{Y_2\}$

V obou případech protíná přímka a právě jednu ze stran $\triangle ABC$.]

Pozn.: V.3.3. lze někdy považovat za axiom (tzv. Paschův axiom), jímž lze nahradit skupinu axiomů $\mathbf{A_7}$, $\mathbf{A_9}$, $\mathbf{A_{10}}$, $\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{A_{12}}$.

Př.: V narýsovaných čarách je možno najít:



a) 11 čtyřúhelníků
b) 8 šestiúhelníků
c) 8 osmiúhelníků
d) 1 dvanáctiúhelník

Vypište všechny tyto mnohoúhelníky.

§4. Měření úseček a úhlů

Def.: Nechť $A,B\in$ $\boldsymbol{E_2}$. Přiřaďme uspořádané dvojici bodů $[A,B]$ reálné číslo označené $|AB|$, pro něž platí:

1. $|AB| \geq 0$, přičemž $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $|AB| = |BA|$
3. $C\ \mu\ AB \Rightarrow |AB| = |CB| + |AC|$
4. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $m\in\mathbb{R}$, $m\geq 0$. Pak existuje právě jeden bod $C\in\overrightarrow{AB}$ tak, že $|AC| = m$.

Pak reálné číslo $|AB|$ nazveme <u>délkou úsečky</u> AB.

Pozn.:

a) Za <u>nulovou úsečku</u> považujeme takovou úsečku, jejíž oba krajní body splynou (nemá žádný vnitřní bod). Podle 1. platí: $|AA| = 0$.

b) Je-li AB nenulová úsečka, $C\ \mu\ AB$ libovolný bod, pak úsečku AB nazýváme <u>součtem úseček</u> AC a CB. Podle 3. platí $|AB| = |CB| + |AC|$.

V.4.1.: Nechť $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $C\in\overrightarrow{AB}$, $C\neq A$ její vnitřní bod takový, že $|AC| < |AB|$. Pak $C\ \mu\ AB$.

[Dk.: Platí: $A\neq B, C\neq A, C\neq B \Rightarrow A,B,C$ jsou tři různé kolineární body. Podle $\mathbf{A_8}$ stačí dokázat, že $A\ \bar{\mu}\ BC$ ani $B\ \bar{\mu}\ AC$.
a) $B\ \bar{\mu}\ AC$, protože body B,C jsou vnitřními body téže polopřímky s počátkem A.
b) $B\ \bar{\mu}\ AC$ dokážeme sporem: Nechť
$B\ \mu\ AC \Rightarrow |AC| = |AB| + |BC| \Rightarrow$ protože $|BC| > 0$, platí $|AC| > |AB|$ – spor]

Def.: Řekneme, že konvexní <u>úhly</u> $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ jsou <u>ve styčné poloze</u> (<u>styčné úhly</u>), leží-li v jedné rovině a jejich průnikem je polopřímka $\overrightarrow{VB}$.
Jejich sjednocení nazýváme <u>součtem úhlů</u> $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$.

Pozn.: Součtem dvou konvexních úhlů nemusí být vždy konvexní úhel.

Def.: Nechť $\sphericalangle AVC$ je konvexní úhel nenulový ani přímý.
Řekneme, že <u>polopřímka</u> $\overrightarrow{VB}$ <u>prochází mezi rameny úhlu</u> $\sphericalangle AVC$, jestliže existuje úsečka $A'C'$ tak, že $A'\in\overrightarrow{VA}$, $C'\in\overrightarrow{VC}$ a platí, že $A'C'\cap\overrightarrow{VB}\neq\emptyset$.
(Je-li úhel $\sphericalangle AVC$ přímý, pak řekneme, že každá polopřímka $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle AVC$.)

Pozn.: Každému konvexnímu úhlu $\sphericalangle AVC$ přiřaďme <u>velikost úhlu</u> (označme $|\sphericalangle AVC|$) ve stupních takto:

1. nulový úhel má velikost $0°$, přímý úhel $180°$
2. každý jiný konvexní úhel má velikost $u°$, kde $0° < u° < 180°$, $u \in \mathbb{R}$
3. jestliže $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny konvexního úhlu $\sphericalangle AVC$, pak $|\sphericalangle AVC| = |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle BVC|$
4. Nechť $\overrightarrow{VA}$ je polopřímka, $u \in \mathbb{R}$, $u \in \langle 0°, 180° \rangle$. Pak existuje polopřímka $\overrightarrow{VB}$ tak, že $|\sphericalangle AVB| = u°$.

Pozn.: Velikost úhlu se kromě stupňů také udává v radiánech (také v gradech). <u>Radián</u> (rad) je jednotka míry obloukové, je to středový úhel příslušný v jednotkové kružnici kruhovému oblouku délky 1.

Z definice plyne: $360° = 2\pi$ (rad), tedy $180° = \pi$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $45° = \frac{\pi}{4}, \ldots$

Pozn.: Za další primitivní pojem zvolme <u>shodnost</u> (symbol $\cong$). Nechť pro něj platí:

1. $AB \cong CD \Leftrightarrow |AB| = |CD|$
2. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF \Leftrightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$
3. $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \Leftrightarrow |A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |A_1C_1| = |A_2C_2| \wedge |B_1C_1| = |B_2C_2| \wedge$
   $\wedge |\sphericalangle C_1A_1B_1| = |\sphericalangle C_2A_2B_2| \wedge |\sphericalangle A_1B_1C_1| = |\sphericalangle A_2B_2C_2| \wedge |\sphericalangle B_1C_1A_1| = |\sphericalangle B_2C_2A_2|$.

<u>Axiom shodnosti:</u>

A13: <u>Věta *sus* o shodnosti trojúhelníků:</u>
Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ platí:
$|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |A_1C_1| = |A_2C_2| \wedge |\sphericalangle C_1A_1B_1| = |\sphericalangle C_2A_2B_2|$.
Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Pozn.: V dalším budeme úhly i jejich velikosti označovat malými řeckými písmeny.

Def.: Každý <u>úhel</u> o velikosti $90°$ se nazývá <u>pravý</u>.

Def.: Nechť $p, q \in \mathcal{P}$ jsou dvě různoběžky. Řekneme, že <u>přímky</u> p, q jsou na sebe <u>kolmé</u> (zapisujeme $p \perp q$), jestliže všechny čtyři úhly, které spolu svírají, jsou shodné (a tedy pravé).

V.4.2.: Nechť $p \in \mathcal{P}$ je přímka, $P \in p$ bod. Pak existuje právě jedna přímka q taková, že $p \perp q \wedge P \in q$.

[Dk.: 1. existence: plyne z definice velikosti úhlu.
2. jednoznačnost: sporem – Nechť $\exists\, q_1, q_2 \in \mathcal{P} : q_1 \perp p, q_2 \perp p$,
$P \in q_1, P \in q_2, q_1 \neq q_2 \Rightarrow |\sphericalangle XPQ_1| \neq |\sphericalangle XPQ_2| \Rightarrow$ jestliže
$|\sphericalangle XPQ_1| = 90°$, pak $|\sphericalangle XPQ_1| \neq 90° -$ spor .]

V.4.3.: Nechť $p \in \mathcal{P}$ je přímka, $P \notin p$ bod. Pak existuje právě jedna přímka q taková, že $p \perp q \wedge P \in q$.

[Dk.: 1. existence: Nechť $X \in p$.
a) Je-li $PX \perp p$, pak existuje.
b) Je-li $PX \not\perp p$, pak přeneseme úhel $\sphericalangle PXA$ do opačné poloroviny s hranicí p a vrcholem X. Sestrojme bod $Q \in \overrightarrow{XZ}$ tak, aby $|XP| = |XQ|$. $A \in PQ \cap p$.
$\triangle XAP \cong \triangle XAQ(sus)$:XA-společná strana, $|\sphericalangle AXP| = |\sphericalangle AXQ|$ podle konstrukce, $|XP| = |XQ|$ podle konstrukce.
Tedy $|\sphericalangle XAP| = |\sphericalangle XAQ| \Rightarrow$ protože $|\sphericalangle PAQ|$ je přímý,
$|\sphericalangle XAP| = 90° \Rightarrow PA \perp p$
2. jednoznačnost: sporem:
Nechť $\exists\, q_1, q_2 \in \mathcal{P} : q_1 \perp p, q_2 \perp p,\ P \in q_1, P \in q_2, q_1 \neq q_2$.
Označme $Q_1 \in q_1 \cap p, Q_2 \in q_2 \cap p \Rightarrow \exists \triangle PQ_1Q_2$, v němž existují dva pravé úhly-spor s tím, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.]

Def.:

a) <u>Středem úsečky</u> AB nazveme bod S, pro něž platí: $S \in AB \wedge |AS| = |BS|$. Označme $S = A \dotminus B$.
b) <u>Osou úsečky</u> AB nazveme přímku o, pro niž platí: o prochází středem úsečky AB $\wedge\, o \perp AB$.
c) <u>Osou úhlu</u> $\sphericalangle AVC$ nazveme polopřímku $\overrightarrow{VB}$, pro niž platí: $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle AVC \wedge |\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC|$

Pozn.: <u>Klasifikace úhlů podle velikosti:</u>
- nulový: $\alpha = 0°$
- ostrý: $0° < \alpha < 90°$
- pravý: $\alpha = 90°$
- tupý: $90° < \alpha < 180°$
- přímý: $\alpha = 180°$
- konvexní (vypuklý): $0° \leq \alpha \leq 180°$
- nekonvexní (dutý): $180° < \alpha < 360°$
- plný: $\alpha = 360°$
- kosý: ostrý nebo tupý

Vzdálenost, odchylka:

Def.: Nechť $P \in \boldsymbol{E_2}$ je bod, $p \in \mathcal{P}$ přímka. Bod P_0 nazýváme kolmým průmětem bodu P na přímku p (patou kolmice vedené z bodu P na přímku p), jestliže platí:

1. $P \in p \Rightarrow P_0 = P$
2. $P \notin p \Rightarrow P_0 = p \cap q$, kde $q \perp p \wedge P \in q$.

Def.:

a) Nechť $A, B \in \boldsymbol{E_2}$ jsou dva body. Vzdáleností dvou bodů A, B nazýváme délku úsečky $|AB|$.

b) Nechť $P \in \boldsymbol{E_2}$ je bod, $p \in \mathcal{P}$ přímka. Vzdáleností bodu P od přímky p nazýváme reálné číslo, označené $\rho\,(P,p)$, definované takto: $\rho\,(P,p) = |PP_0|$, kde P_0 je kolmý průmět bodu P na přímku p.

Pozn.: a) $P \in p \Rightarrow P_0 = P \Rightarrow \rho(P, p) = |PP_0| = 0$

b) $\forall P \in \boldsymbol{E_2}$, $\forall p \in \mathcal{P} : \rho(P, p) \geq 0$, přičemž $\rho(P, p) = 0 \Leftrightarrow P_0 = P (\Leftrightarrow P \in p)$.

c) $\rho(P, p) = \min(\rho(P, X))$, kde $X \in p$ je libovolný bod.

Def.: Nechť $a, b \in \mathcal{P}$ jsou dvě rovnoběžné přímky. Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek a, b nazýváme reálné číslo, označené $\rho(a, b)$, definované takto: $\rho(a,b) = \rho(A, b)$, kde $A \in a$ je libovolný bod.

Pozn.:

a) Někdy definujeme i vzdálenost různoběžek a klademe ji rovnu nule.

b) $\forall a, b \in \mathcal{P} : \rho(a,b) \geq 0$, přičemž $\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$, je-li $a \parallel b$.

b) Nechť $a \parallel b$. Pro $\forall A_1, A_2 \in a$ platí: $\rho(A_1, b) = \rho(A_2, b)$.

Def.: Nechť $a, b \in \mathcal{P}$ jsou dvě přímky. Odchylkou dvou přímek a, b nazýváme reálné číslo φ, $0° \leq \varphi \leq 90°$, kde φ je velikost úhlu, který spolu přímky a, b svírají (u různoběžek). U rovnoběžek klademe $\varphi = 0°$.

Pozn.:

a) Odchylka dvou přímek je tedy velikost nulového, ostrého nebo pravého úhlu.

b) Úhel, jehož velikost je odchylkou dvou přímek, může mít libovolně zvolený vrchol V a ramena má na přímkách, které procházejí bodem V a jsou rovnoběžné s danými přímkami.

Př.: Pro pět bodů na přímce platí: $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Které z ostatních vzdáleností dvou z těchto pěti bodů musí být sobě rovny?
Řešení: $|AC| = |BD| = |CE|, |AD| = |BE|$

Př.: Pro pět různých bodů na přímce platí $|AC| = |CE|, |BC| = |CD|$. Dokažte, že také $|AB| = |DE|$, $|AD| = |BE|$.
Řešení: $|AC| = |CE| = x$, $|BC| = |CD| = y$,
$|AB| = |AC| - |BC| = x - y$, $|DE| = |CE| - |CD| = x - y \Rightarrow |AB| = |DE|$
$|AD| = |AC| + |CD| = x + y$, $|BE| = |BC| + |CE| = x + y \Rightarrow |AD| = |BE|$

Př.: Dokažte: $|\sphericalangle BVD| = |\sphericalangle CVE| \Rightarrow |\sphericalangle BVC| = |\sphericalangle DVE|$
Řešení: $\beta + \gamma = \gamma + \delta \Rightarrow \beta = \delta \Rightarrow |\sphericalangle BVC| = |\sphericalangle DVE|$

Př.: Dokažte: $|\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle BVD| \Rightarrow |\sphericalangle AVD| + |\sphericalangle BVC|$
Řešení: $\alpha + \beta + \beta + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma) + \beta = |\sphericalangle AVD| + |\sphericalangle BVC|$

§5. Dvojice úhlů

Def.: Dva úhly nazýváme vedlejší, jsou-li ve styčné poloze, mají-li jedno rameno společné a jejich součtem je přímý úhel (jejich sjednocením je polorovina).

V.5.1.: Součet každých dvou vedlejších úhlů je $180°$.

[Dk.: $\overleftrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle AVC \Rightarrow |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle BVC| = |\sphericalangle AVC|$ -přímý $\Rightarrow |\sphericalangle AVC| = 180°$]

Důsledek V.5.1.: Jsou-li dva úhly shodné, jsou shodné i jejich úhly vedlejší.

Def.: Dva úhly (ne nulové ani přímé) nazýváme vrcholové, jestliže ramena jednoho jsou opačné polopřímky ramen druhého úhlu.

V.5.2.: Každé dva vrcholové úhly jsou shodné.

[Dk.: $\left.\begin{array}{l}\alpha + \gamma = 180° \\ \beta + \gamma = 180°\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha - \beta = 180° - 180° \Rightarrow \alpha = \beta$]

Důsledek V.5.2.: Osy vedlejších úhlů jsou k sobě kolmé.

Pozn.: Vedlejší i vrcholový úhel k pravému úhlu je pravý úhel.

Def.: Dva úhly nazýváme doplňkové, resp. výplňkové, jestliže jejich součtem je pravý, resp. přímý úhel.

Pozn.: Všechny vedlejší úhly jsou výplňkové, ale výplňkové úhly nemusí být úhly vedlejší.

Def.: Dvě polopřímky, ležící na téže přímce, nazýváme souhlasnými, jestliže jedna z nich je podmnožinou druhé. V opačném případě je nazveme nesouhlasnými.

Def.: Nechť přímka p je proťata přímkami a, b po řadě v různých bodech A, B. Každou dvojici úhlů s vrcholy A, B nazveme:

a) souhlasné úhly, jestliže platí:
   1. úhly leží v téže polorovině s hranicí p.
   2. ramena úhlů ležící na p jsou souhlasné polopřímky.

b) střídavé úhly, jestliže platí:
   1. úhly leží na opačných polorovinách s hranicí p.
   2. ramena úhlů ležící na p jsou nesouhlasné polopřímky.

c) přilehlé úhly, jestliže platí:
   1. úhly leží v téže polorovině s hranicí p.
   2. ramena úhlů ležící na p jsou nesouhlasné polopřímky, jejichž průnikem je úsečka AB.

V.5.3: Nechť přímka p je proťata přímkami a, b po řadě v různých bodech A, B. Pak platí:

a) souhlasné úhly s vrcholy A, B jsou shodné $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné

b) střídavé úhly s vrcholy A, B jsou shodné $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné

c) přilehlé úhly s vrcholy A, B jsou výplňkové $\Leftrightarrow$ přímky a, b jsou rovnoběžné.

[Dk.: využívá také větu o velikosti vnějších úhlů trojúhelníku vzhledem k úhlům vnitřním (V.6.3.).

a) 1.„$\Rightarrow$“: sporem: Nechť $\alpha = \beta \wedge a \nparallel b \Rightarrow \exists\, P \in a \cap b \Rightarrow \exists \triangle ABP$.
Vždy je jeden z dvojice souhlasných úhlů vnějším úhlem a druhý vnitřním úhlem $\triangle ABP$. Protože vnější úhel v trojúhelníku je větší než vnitřní úhel u jiného vrcholu, platí, že $\alpha \neq \beta$ - spor.

2.„$\Leftarrow$“: sporem: Nechť $a \parallel b \wedge \alpha \neq \beta$. Sestrojíme úhel α' s jedním ramenem na p a vrcholem B v téže polorovině jako úhel β tak, že $\alpha = \alpha'$. Protože $\alpha = \alpha'$ a jsou souhlasné, platí, že $a \parallel q$. Tedy bodem B vedeme dvě různé rovnoběžky b, q s přímkou a - spor.

b) plyne z a) a V.5.2., neboť střídavý úhel k danému úhlu je úhel vrcholový k úhlu souhlasnému s daným úhlem.

c) plyne z a), V.5.1. a definice výplňkových úhlů, neboť přilehlý úhel k danému úhlu je úhel vedlejší k úhlu souhlasnému s daným úhlem.]

§6. Trojúhelník, úhly v trojúhelníku

Pozn.: Trojúhelník jsme si definovali v §3 jako průnik tří polorovin.
Větu *sus* o shodnosti trojúhelníků jsme si zavedli jako axiom shodnosti (**A$_{13}$**) v §4.

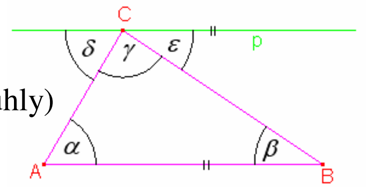
Def.: Nechť ABC je trojúhelník. Vnitřním úhlem trojúhelníku ABC při vrcholu A nazýváme $\sphericalangle BAC$, vnějším úhlem $\triangle ABC$ při vrcholu A pak libovolný úhel vedlejší k úhlu $\sphericalangle BAC$ (k úhlu vnitřnímu).

V.6.1: Součet libovolných dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než $180°$.

[Dk.: Ukážeme, že $\beta + \gamma < 180°$: Označme $A_1 = B \dot{-} C$. Na polopřímce $\overrightarrow{AA_1}$ sestrojme bod D tak, aby $A_1 = A \dot{-} D \Rightarrow \triangle AA_1C \cong \triangle DA_1B$ (*sus*) (dále $|CA_1| = |BA_1|$, neboť $A_1 = B \dot{-} C$, úhly u vrcholu A_1 jsou vrcholové) $\Rightarrow \gamma = \beta_1$. Platí: $\sphericalangle ABD = \beta + \beta_1$, $\sphericalangle ABD$ není přímý, protože $D \notin \overrightarrow{AB}$, $D \in \overrightarrow{ABA_1} \Rightarrow |\sphericalangle ABD| < 180° \Rightarrow \beta + \beta_1 = \beta + \gamma < 180°$.]

V.6.2: Součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.

[Dk.: Sestrojme $p \parallel AB,\ C \in p$.
$\alpha = \delta$ (střídavé úhly) $\wedge \beta = \varepsilon$ (střídavé úhly)
$\delta + \gamma + \varepsilon = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$.]



Důsledek V.6.2.: V každém trojúhelníku existují alespoň dva ostré úhly. (Každý trojúhelník má nejvýše jeden úhel tupý nebo nejvýše jeden úhel pravý.)

V.6.3: V každém trojúhelníku je vnější úhel při vrcholu A větší než kterýkoliv z vnitřních úhlů u vrcholů B nebo C.

[Dk.: Podle V.6.1. je $\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta < 180° \Rightarrow \beta < 180° - \alpha \\ \alpha' = 180° - \alpha \ldots \text{vedlejší úhel} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta < \alpha'$,
analogicky pro úhel γ.]

V.6.4: V každém trojúhelníku je velikost vnitřního úhlu při jednom vrcholu rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících dvou vrcholů.

[Dk.: $\left.\begin{array}{r} \alpha + \alpha' = 180° \text{ (úhly vedlejší)} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180° \end{array}\right\} \alpha' = \beta + \gamma$.]

V.6.5: <u>Věta *usu* o shodnosti trojúhelníků:</u>
Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ platí:
$|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |\sphericalangle C_1A_1B_1| = |\sphericalangle C_2A_2B_2| \wedge |\sphericalangle A_1B_1C_1| = |\sphericalangle A_2B_2C_2|$.
Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

[Dk.: 1. Nechť $|A_1C_1| = |A_2C_2| \Rightarrow$ shodnost plyne z vety *sus* (A13).

2. Nechť $|A_1C_1| \neq |A_2C_2|$. Nechť např. $|A_1C_1| > |A_2C_2|$.
Sestrojme na A_1C_1 bod X tak, aby $|A_1X| = |A_2C_2|$. Protože
$|A_1X| < |A_1C_1| \Rightarrow X \mu A_1C_1$, $\triangle A_1B_1X \cong \triangle A_2B_2C_2$ $(sus) \Rightarrow \overrightarrow{B_1X}$
prochází mezi rameny $\sphericalangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$ úhly $\sphericalangle A_1B_1X$, $\sphericalangle XB_1C_1$ jsou
ve styčné poloze $\Rightarrow |\sphericalangle A_1B_1X| < |\sphericalangle A_1B_1C_1|$ - spor.]

Def.:

a) <u>Trojúhelník</u> ABC se nazývá <u>rovnoramenný</u>, jestliže alespoň dvě jeho strany jsou shodné úsečky.
Jestliže $|AC| = |BC|$, nazývají se úsečky AC, BC <u>ramena</u> $\triangle ABC$, úsečka AB jeho <u>základna</u>, vrchol C <u>hlavní vrchol</u> $\triangle ABC$.

b) <u>Trojúhelník</u> ABC se nazývá <u>rovnostranný</u>, jestliže všechny tři jeho strany jsou shodné úsečky.

c) <u>Trojúhelník</u> ABC se nazývá <u>pravoúhlý</u>, jestliže je jeden jeho vnitřní úhel pravý.
Je-li úhel při vrcholu C pravý, nazývá se strana AB <u>přepona</u>, strany AC, BC <u>odvěsny</u> $\triangle ABC$.

V.6.6.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: $\triangle ABC$ je rovnoramenný se základnou $AB \Leftrightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC|$.

[Dk.: 1.„$\Rightarrow$“: Nechť $\triangle ABC$ je rovnoramenný, AB-základna
$\Rightarrow |AC| = |BC| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ $(sus) \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC|$.

2.„$\Leftarrow$“: Nechť $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ $(usu) \Rightarrow$
$\Rightarrow |AC| = |BC| \Rightarrow \triangle ABC$ je rovnoramenný.]

V.6.7.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: $\triangle ABC$ je rovnostranný $\Leftrightarrow |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 60°$.

[Dk.: 1.„$\Rightarrow$“: Nechť $\triangle ABC$ je rovnostranný $\Rightarrow$
$|AC| = |BC| \wedge |BC| = |AB| \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC$ $(sus) \wedge \triangle BAC \cong$
$\cong \triangle ACB$ $(sus) \Rightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| \wedge |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB|$. Protože součet těchto tří
Úhlů je $180°$, musí být každý $60°$.

2.„$\Leftarrow$“: Nechť $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = 60° \Rightarrow \triangle ABC \cong$ $\cong \triangle BAC \cong \triangle ACB$ (usu) (možno opět rozepsat po dvojicích trojúhelníků) $\Rightarrow |AC| = |BC| = |AB| \Rightarrow \triangle ABC$ je rovnostranný.]

Pozn.:

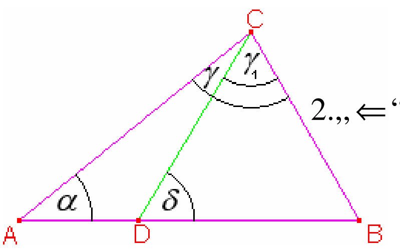
a) Rovnostranný trojúhelník je zvláštním případem rovnoramenného trojúhelníku.

b) V každém pravoúhlém trojúhelníku je přepona větší než jakákoliv odvěsna.

V.6.8: Nechť je dán $\triangle ABC$. Pak platí: $|AB| > |BC| \Leftrightarrow |\sphericalangle BCA| > |\sphericalangle CAB|$, tj. platí: proti větší straně leží větší úhel, proti menší straně leží menší úhel a naopak proti většímu úhlu leží větší strana, proti menšímu úhlu leží menší strana.

[Dk.: 1.„$\Rightarrow$“: Nechť $|AB| > |BC|$ .Sestrojme $D \in AB$ tak, že $|BD| = |BC|$.

$$\left.\begin{array}{l} D \mu AB \Rightarrow \gamma_1 < \gamma \\ \triangle BCD \text{ je rovnoramenný} \Rightarrow \gamma_1 = \delta \\ \delta \text{ - vnější úhel } \triangle ADC \Rightarrow \alpha < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha < \delta = \gamma_1 < \gamma \Rightarrow \Rightarrow \alpha < \gamma$$



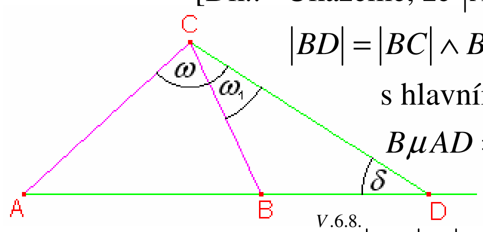
2.„$\Leftarrow$“: Nechť $\gamma > \alpha$. Sporem-nechť $|AB| \le |BC|$.

Je-li $|AB| = |BC|$, je $\triangle ABC$ rovnoramenný s hlavním vrcholem $B \Rightarrow \alpha = \gamma$ - spor.

Je-li $|AB| < |BC| \overset{1.„\Rightarrow"}{\Rightarrow} \gamma < \alpha$ - spor.]

V.6.9.: <u>Trojúhelníková nerovnost:</u>
V každém $\triangle ABC$ platí: součet délek libovolných dvou stran je větší než strana třetí.

[Dk.: Ukážeme, že $|AC| < |AB| + |BC|$: Sestrojme na $\overrightarrow{AB}$ bod D tak, že



$$\left.\begin{array}{l} |BD| = |BC| \wedge B \mu AD . \ \triangle BCD \text{ je rovnoramenný} \\ \text{s hlavním vrcholem } B \Rightarrow \omega_1 = \delta \\ B \mu AD \Rightarrow \omega_1 < \omega \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta < \omega \overset{V.6.8.}{\Rightarrow} |AC| < |AD| = |AB| + |BD| = |AB| + |BC| \Rightarrow |AC| < |AB| + |BC| \,]$$

Pozn.: Platí i obrácené tvrzení: Jsou-li dány tři úsečky o délkách *a*, *b*, *c* tak, že součet každých dvou z nich je větší než zbývající, pak existuje trojúhelník se stranami *a*, *b*, *c*.

Důsledek V.6.9.: Pro každé tři body $A, B, C \in \boldsymbol{E_2}$ platí:
$|AB| \le |AC| + |BC|$, přičemž $|AB| = |AC| + |BC| \Leftrightarrow C \in AB$ (tedy body A, B, C jsou kolineární).

Def.: Nechť je dán $\triangle ABC$.

a) <u>Střední příčkou trojúhelníka</u> nazýváme úsečku spojující středy dvou stran trojúhelníka.

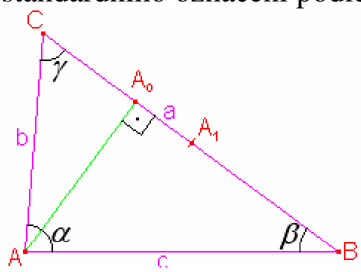
b) <u>Těžnicí trojúhelníka</u> nazýváme úsečku spojující vrchol trojúhelníka se středem protější strany.

c) <u>Výškou trojúhelníka</u> nazýváme úsečku procházející vrcholem trojúhelníka, která je kolmá na přímku, na níž leží protější strana trojúhelníka.

Pozn.: Někdy se uvedenými pojmy označují i přímky, na nichž dané úsečky leží.

Pozn.: Nechť je dán $\triangle ABC$. Pak budeme užívat následujícího standardního označení podle obrázku:

$$A_1 = B \dot{-} C \Rightarrow t_a = AA_1$$
$$A_0 \in \overleftrightarrow{BC} \text{ tak, že } \overleftrightarrow{AA_0} \perp \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow v_a = AA_0$$



V.6.10.: Střední příčka každého trojúhelníka je rovnoběžná s protilehlou stranou a má velikost rovnu polovině této strany.

[Dk.: viz §8 o čtyřúhelnících.]

V.6.11.: Nechť je dán $\triangle ABC$. Všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě T a platí: $|AT| : |A_1T| = 2:1$, kde $A_1 = B \dot{-} C$.

[Dk.: viz §8 o čtyřúhelnících.]

Def.: Průsečík těžnic trojúhelníka se nazývá <u>těžiště trojúhelníka</u>.

Pozn.: Také všechny tři výšky každého trojúhelníka se protínají v jednom bodě (tento bod se nazývá <u>ortocentrum</u>), který u tupoúhlého trojúhelníku leží vně trojúhelníku a u pravoúhlého trojúhelníku ve vrcholu, při němž je pravý úhel.

V.6.12.: Nechť $\triangle ABC$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Pak platí: těžnice t_c splývá s výškou v_c a s osou úhlu $\sphericalangle ACB$

[Dk.: Nechť $t_c = CC_1$, kde $C_1 = A \dot{-} B$.

$\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ (sus), neboť $|AC| = |BC|$ ... ramena trojúhelníku

$|AC_1| = |BC_1|$ ... viz.definice středu úsečky

$|\sphericalangle CAC_1| = |\sphericalangle CBC_1|$ ... podle V.6.6.

a) $|\sphericalangle AC_1C| = |\sphericalangle BC_1C| = 90° \Rightarrow CC_1 = v_c$

b) $|\sphericalangle ACC_1| = |\sphericalangle BCC_1| \Rightarrow CC_1$ ... osa úhlu $\sphericalangle ACB$]

V.6.13.: <u>Věta *sss* o shodnosti trojúhelníků:</u>
Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ platí: $|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |B_1C_1| = |B_2C_2| \wedge |A_1C_1| = |A_2C_2|$. Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

V.6.14: <u>Věta *Ssu* o shodnosti trojúhelníků:</u>
Nechť pro $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ platí: $|A_1B_1| = |A_2B_2| \wedge |B_1C_1| = |B_2C_2| \wedge |A_1B_1| > |B_1C_1| \wedge$
$\wedge |\sphericalangle B_1C_1A_1| = |\sphericalangle B_2C_2A_2|$. Pak platí: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

§7. Podobnost trojúhelníků, Euklidovy věty, Pythagorova věta

Def.: Trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ jsou podobné (zapisujeme $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$), jestliže

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ : k = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|}$$, číslo k-koeficient (poměr) podobnosti.

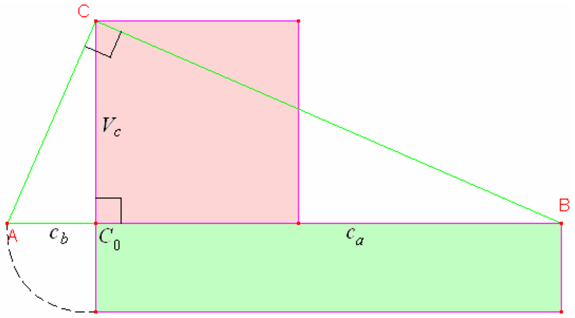
Pozn.: Shodnost je podobnost pro $k = 1$.

V.7.1.: Věta *uu* o podobnosti trojúhelníků:
Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou podobné.

V.7.2.: Věta *sus* o podobnosti trojúhelníků:
Shodují-li se dva trojúhelníky v poměru dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

V.7.3.: Euklidova věta o výšce:
Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, pak platí:
Obsah čtverce nad výškou na přeponu je roven obsahu obdélníka o stranách rovných úsekům na přeponě oddělených touto výškou.

$$v_c^{\,2} = c_b \cdot c_a$$

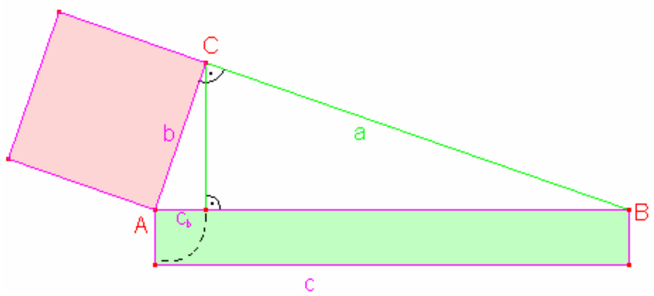


[Dk.: $\triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0 \,(\text{uu})$, neboť $\sphericalangle C_0CB$ je otočením $\sphericalangle C_0AC$

$$\frac{|CC_0|}{|AC_0|} = \frac{|BC_0|}{|CC_0|} \qquad \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \qquad v_c^{\,2} = c_b \cdot c_a$$]

V.7.4.: Euklidovy věty o odvěsnách:
Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, pak platí:
Obsah čtverce nad odvěsnou je roven obsahu obdélníka o stranách rovných přeponě a úseku na přeponě přilehlému k této odvěsně odděleného výškou na přeponu.

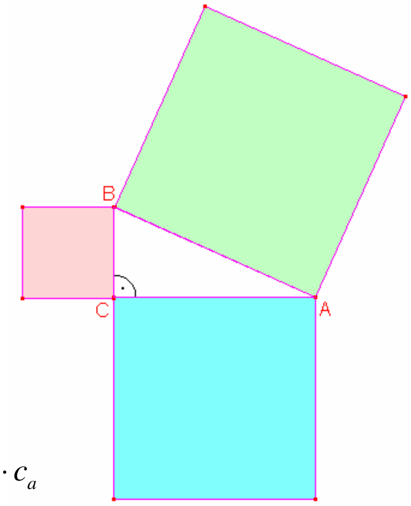
$$b^2 = c \cdot c_b$$
$$a^2 = c \cdot c_a$$



V.7.5.: Pythagorova věta:

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, pak platí:
Obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



[Dk.:

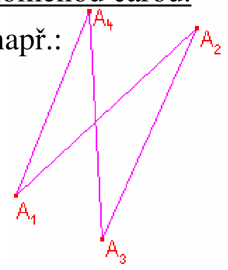
$$a^2 = c \cdot c_a$$
$$\underline{b^2 = c \cdot c_b}$$
$$a^2 + b^2 = c(c_a + c_b)$$
$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

]

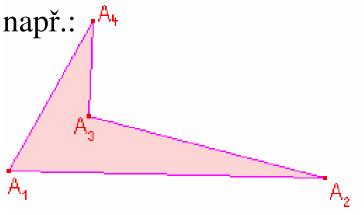
Pozn.: Všechny tři věty platí i obráceně:
Pokud v trojúhelníku platí:
$(v_c{}^2 = c_b \cdot c_a) \vee (a^2 = c \cdot c_a) \vee (b^2 = c_b \cdot c) \vee (a^2 + b^2 = c^2) \Rightarrow \triangle ABC$ je pravoúhlý.

§8. Čtyřúhelníky

Def.: Nechť $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \boldsymbol{E_2}$ jsou čtyři body, z nichť žádné tři nejsou lineární. Sjednocení úseček $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_4 \cup A_4A_1$ nazveme uzavřenou lomenou čárou.
(označme $A_1A_2A_3A_4$) např.:



Def.: Nechť $A_1A_2A_3A_4A_1$ je uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná, pak čtyřúhelníkem $A_1A_2A_3A_4$ nazveme sjednocení této lomené čáry s množinou jejích vnitřních bodů. např.:



Body A_1, A_2, A_3, A_4 se nazývají vrcholy, uzavřená lomená čára $A_1A_2A_3A_4A_1$ obvodem, každá úsečka se nazývá stranou a úsečky A_1A_3, A_2A_4 se nazývají úhlopříčky čtyřúhelníku.

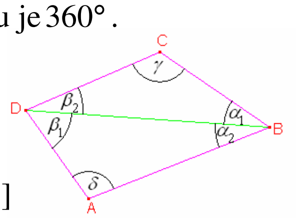
Pozn.:

a) Konvexní čtyřúhelník bychom mohli definovat jako průnik čtyř polorovin.

b) Úhlopříčky AC, BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají ve vnitřním bodě čtyřúhelníku, tedy konvexní čtyřúhelník lze chápat jako sjednocení čtyř nepřekrývajících se trojúhelníků $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CDP, \triangle DAP$, kde P je průsečík úhlopříček.

V.8.1.: Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je $360°$.

[Dk.:
$$\begin{aligned} \delta + \beta_1 + \alpha_2 &= 180° \\ \gamma + \beta_2 + \alpha_1 &= 180° \\ \hline \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 360° \end{aligned}$$
]



V.8.2.: Součet vnějších úhlů konvexního čtyřúhelníku je $360°$, počítáme-li u každého vrcholu právě jeden.

[Dk.: Podle definice vnějších úhlů jde o vedlejší úhel k úhlu vnitřnímu. Tedy vnější + vnitřní = $180°$. Pokud u každého vnitřního úhlu použijeme pouze jeden vnější úhel, tak součet vnějších a vnitřních úhlů čtyřúhelníku je $4 \cdot 180° = 720°$. Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku se rovná $360°$, tedy součet vnějších úhlů se rovná $720°$ - $360°$ = $360°$.]

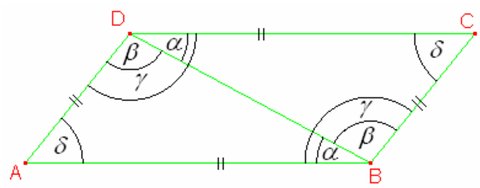
Def.: Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné, pak ho nazveme <u>rovnoběžníkem</u>.

Pozn.: Každý rovnoběžník je konvexní čtyřúhelník.

V.8.3.: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, pak platí:

1) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$
2) Protilehlé úhly jsou shodné.

[Dk.:



$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (usu, neboť dvě dvojice střídavých úhlů a jedna společná strana $\Rightarrow$ 1) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$

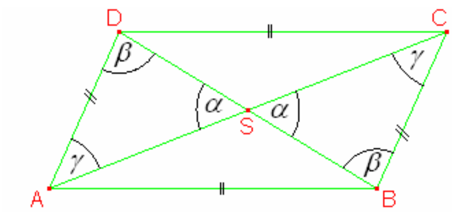
2) $\alpha + \beta = \alpha + \beta \quad \alpha + \beta = \gamma$

$\underline{\gamma = \gamma} \quad \underline{\delta = \delta}$ (podle podobnosti).]

V.8.4.: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, pak platí:

$S = A \dot{-} C = B \dot{-} D$, jestliže $S \in AC \cap BD$, tedy úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.

[Dk.:



$\triangle ASD \cong \triangle CSB$ (usu, neboť dvě dvojice střídavých úhlů a jedna stejná strana.

$|AS| = |CS| \qquad |AS| + |CS| = |AC| \Rightarrow \underline{S = A \dot{-} C}$

$|BS| = |DS| \qquad |BS| + |DS| = |BD| \Rightarrow \underline{S = B \dot{-} D}$]

V.8.5.: Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, pak platí:

1) $|AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD \Leftrightarrow ABCD$ je rovnoběžník
2) $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |DA| \Leftrightarrow ABCD$ je rovnoběžník

[Dk.: 1) a) „$\Rightarrow$“: $|AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ rovnoběžník.

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (sus) $\Rightarrow |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBC| \Rightarrow ABCD$ je rovnoběžník.

b)„ $\Leftarrow$“: $ABCD$ je rovnoběžník $\Rightarrow |AB| = |CD| \wedge AB \parallel CD$ z definice.

2) analogicky]

Def.: Čtyřúhelník, jehož všechny čtyři úhly jsou pravé, se nazývá pravoúhelník.

V.8.6.:
1) Každý pravoúhelník je rovnoběžník.
2) Úhlopříčky pravoúhelníku jsou shodné.

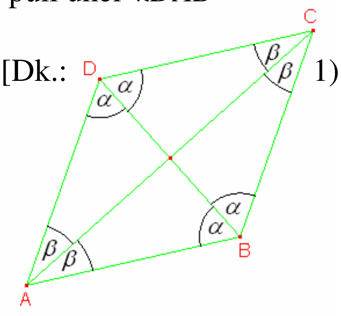
[Dk.: 1) $AB \parallel CD$ je zřejmé $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (usu) $\Rightarrow |AB| = |CD| \Rightarrow ABCD$ je rovnoběžník.
2) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (sus) $\Rightarrow |BD| = |AC|$]

Def.:
1) Rovnoběžník $ABCD$ se nazývá kosočtvercem, jestliže $|AB| = |BC|$ a žádný vnitřní úhel není pravý.

2) Rovnoběžník $ABCD$ se nazývá kosodélníkem, jestliže $|AB| \neq |BC|$ a žádný vnitřní úhel není pravý.

V.8.7.: Nechť $ABCD$ je kosočtverec, pak platí:
1) $AC \perp BD$
2) AC půlí úhel $\sphericalangle DAB$

[Dk.:



1)
$$\left.\begin{array}{l} \beta = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| \ldots \text{stříd.} \\ \beta = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \ldots \triangle ABC \text{ je rr} \\ \beta = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DAC| \ldots \text{stříd.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS \cong \triangle CDS \cong \triangle ADS \text{ (usu)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle DSC| = |\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle ASB| = \frac{360°}{4} = 90° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC \perp BD$$

2)
$$\left.\begin{array}{l} |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| \\ |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DAC| \end{array}\right\} \Rightarrow |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC \text{ půlí úhel } \sphericalangle DAB$$]

Def.: Pravoúhelník $ABCD$ nazýváme a) čtvercem, jestliže $|AB| = |BC|$;
b) obdélníkem, jestliže $|AB| \neq |BC|$.

Pozn.: Pro čtverec platí analog. věta jako pro kosočtverec (V.8.7.)

Pozn.: Velmi často se kosočtverec považuje za zvláštní případ kosodélníku, čtverec za zvláštní případ obdélníku, někdy dokonce obdélník za zvláštní případ kosodélníku a čtverec za zvláštní případ kosočtverce. Tedy čtverec má všechny vlastnosti kosočtverce a obdélníku.

Def.: Konvexní čtyřúhelník $ABCD$, kde $AB \parallel CD \wedge BC \nparallel DA$, nazveme lichoběžníkem.
Strany AB a CD nazveme základnami a strany BC a DA rameny lichoběžníka.

Def.:

1) Lichoběžník $ABCD$ se nazývá rovnoramenný, jestliže $|BC| = |DA|$.

2) Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB a CD a nechť $E = B \dot{-} C$, $F = D \dot{-} A$.
Pak úsečka EF se nazývá střední příčka lichoběžníka $ABCD$.

V.8.8.: Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB a CD a nechť EF je jeho střední příčka.
Pak platí:
1) $EF \parallel AB (\parallel CD)$;
2) $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.

[Dk.: 1) Nechť $E = B \dot{-} C$; vedeme přímku $\overleftrightarrow{EH}$ bodem $E, \overleftrightarrow{GH} \parallel DA \Rightarrow \triangle GBE \cong \triangle HCE (\text{usu}) \Rightarrow AGEF$ je rovnoběžník a $EF \parallel AB$

2) $|AB| = |EF| + x; |DC| = |EF| - x \Rightarrow |AB| + |DC| = 2|EF| \Rightarrow$
$\Rightarrow |EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$]

§9. Mnohoúhelníky

Pozn.: Uzavřená lomená čára $A_1A_2...A_nA_1$, která leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník nebo také *n*-úhelník.

Pozn.: Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a n různých polopřímek $SX_1, SX_2, ..., SX_n$ kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, přičemž pro tyto polopřímky platí: $|\sphericalangle X_1SX_2| = |\sphericalangle X_2SX_3| = ... = |\sphericalangle X_{n-1}SX_n| = \frac{360°}{n} = \omega$. Označme $A_1, A_2, ..., A_n$ průsečíky daných polopřímek s danou kružnicí *k*. Pravidelný mnohoúhelník $A_1A_2...A_n$ je pak sjednocením všech trojúhelníků $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$. Všechny tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné. Úsečka, jejímiž krajními body jsou dva nesousední vrcholy trojúhelníků, se nazývá úhlopříčka.

V.9.1.: Každý konvexní *n*-úhelník má $\dfrac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Pozn.: Každé dvě sousední strany určují vnitřní úhel pravidelného mnohoúhelníku.

Pozn.: Úhly ω mezi úsečkami spojujícími dva sousední vrcholy se středem mnohoúhelníka se nazývají středové úhly.

V.9.2.: Nechť $A_1A_2...A_n$ je pravidelný *n*-úhelník, pak platí, že součet vnitřních úhlů daného n-úhelníka je roven $180°(n-2)$.

§10. Kružnice, kruh

Def.: Nechť $S \in \boldsymbol{E_2}$, $r \in \mathbb{R}^+$.

<u>Kružnicí</u> k <u>se středem</u> S <u>a poloměrem</u> r nazýváme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E_2}$, kde $|SX| = r$. Zapíšeme $k(S;r) = \{X \in \boldsymbol{E_2} : |SX| = r\}$.

<u>Kruhem</u> K <u>se středem</u> S <u>a poloměrem</u> r nazýváme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E_2}$, kde $|SX| \le r$. Zapíšeme $K(S;r) = \{X \in \boldsymbol{E_2} : |SX| \le r\}$.

Def.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice.

Množinu $U_1 = \{X \in \boldsymbol{E_2} : |SX| < r\}$ nazýváme <u>vnitřní oblastí kružnice</u>.

Množinu $U_2 = \{X \in \boldsymbol{E_2} : |SX| > r\}$ nazýváme <u>vnější oblastí kružnice</u>.

Def.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice; $X_1, X_2 \in k$, $X_1 \ne X_2$.

Úsečku X_1X_2 nazýváme <u>tětivou kružnice</u> k, přímku $\overleftrightarrow{X_1X_2}$ <u>sečnou kružnice</u> k. Je-li navíc $S \in X_1X_2$, nazýváme tětivu X_1X_2 <u>průměrem</u>.

Pozn.:

a) Sečna má s kružnicí dva společné body.

b) Je-li X_1X_2 průměr, platí: $|X_1X_2| = 2r$.

V.10.1.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, X_1X_2 její tětiva, AB její průměr. Pak platí:

$$\overleftrightarrow{X_1X_2} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \exists\, O \in \boldsymbol{E_2}:\ X_1X_2 \cap AB = \{O\} \wedge O = X_1 \dot{-} X_2.$$

[Dk.: a) $S \in X_1X_2 \Rightarrow O = S$ - platí

b) $S \notin X_1X_2 \Rightarrow \exists$ rovnoramenný $\triangle SX_1X_2$, kde SO je jeho výška (totiž $\triangle SOX_1 \cong \triangle SOX_2$ (Ssu)) $\Rightarrow SO$ je jeho těžnice $\Rightarrow O = X_1 \dot{-} X_2$.]

V.10.2.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, X_1X_2 její tětiva. Pak platí:

a) $|X_1X_2| \le 2r$

b) $|X_1X_2| = 2r \Leftrightarrow S \in X_1X_2$

[Dk.: a) $S \notin X_1X_2 \Rightarrow \exists \triangle SX_1X_2$, v němž platí trojúhelníková nerovnost:

$|X_1S| + |X_2S| > |X_1X_2|$

$2r > |X_1X_2|$

b) 1. „$\Rightarrow$“: $|X_1X_2| = 2r \Rightarrow X_1X_2$ je průměr $\Rightarrow S \in X_1X_2$

2. „$\Leftarrow$“: $S \in X_1X_2 \Rightarrow X_1X_2$ je průměr $\Rightarrow |X_1X_2| = 2r$.]

Def.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, $T \in k$. Přímku t, pro niž platí $T \in t \wedge ST \perp t$, nazýváme <u>tečnou kružnice</u> s bodem dotyku T.

V.10.3.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, t její tečna. Pak platí:
Tečna t má s kružnicí k společný právě jeden bod - bod dotyku.

[Dk.: $T \in k, T \in t \Rightarrow t \cap k \neq \emptyset$
Nechť $X \in t,\ X \neq T \Rightarrow \exists \triangle STX$ (pravoúhlý) s přeponou $SX \Rightarrow$
$\Rightarrow |SX| > |ST| = r \Rightarrow X$ leží ve vnější oblasti kružnice $\Rightarrow X \notin k$.]

Pozn.: Z důkazu předchozí věty je zřejmé, že každý bod $X \in t$, který není bodem dotyku, leží ve vnější oblasti kružnice.

Def.:

a) Nechť $k(S;r)$ je kružnice, AB její tětiva, která není průměrem.

Množinu $k \cap \overrightarrow{ABS}$ nazýváme <u>větším obloukem kružnice</u> k .

Množinu $k \cap \sigma$, kde σ je polorovina opačná k $\overrightarrow{ABS}$, nazýváme <u>menším obloukem kružnice</u> k s krajními body A, B .

b) Oblouk kružnice s krajními body A, B, je-li AB průměrem, nazveme <u>polokružnicí</u>.

Pozn.: Oblouk kružnice s krajními body A, B označujeme $\overset{\frown}{AB}$.

Aby bylo jasné, zda-li myslíme větší nebo menší oblouk, někdy označujeme $\overset{\frown}{ACB}$, kde $C \in \overset{\frown}{AB},\ C \neq A,\ C \neq B.$

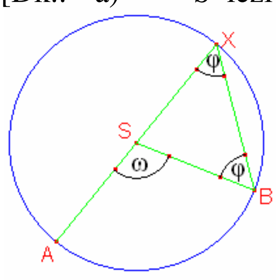
Def.: Nechť je dán oblouk $\overset{\frown}{AB}$ na kružnici $k(S;r)$.

Polopřímky $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB}$ jsou rameny dvou úhlů, z nichž právě jeden obsahuje oblouk $\overset{\frown}{AB}$.

Tento úhel nazýváme <u>středovým úhlem příslušným oblouku</u> $\overset{\frown}{AB}$. Každý úhel $\sphericalangle AXB$, kde $X \in k \wedge X \notin \overset{\frown}{AB}$, nazýváme <u>obvodovým úhlem příslušným oblouku</u> $\overset{\frown}{AB}$.

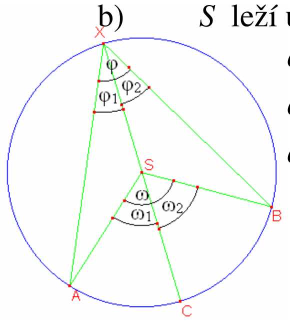
V.10.4.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice.
Pak středový úhel je dvojnásobkem libovolného obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.

[Dk.: a) S leží na rameni obvodového úhlu:



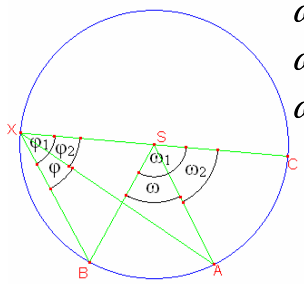
$\triangle SXB$ - rovnoramenný se základnou $BX \Rightarrow \sphericalangle SBX = \varphi$
ω...vnější úhel $\triangle SXB \Rightarrow \omega = \varphi + \varphi = 2\varphi$

b) S leží uvnitř obvodového úhlu: označme $C \in \overrightarrow{XS} \cap k$



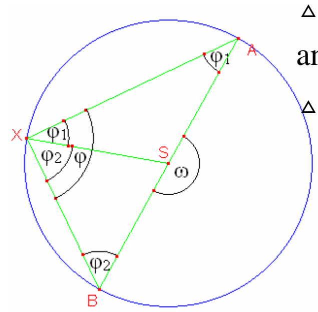
$\omega_1 = 2\varphi_1 \qquad \omega = \omega_1 + \omega_2$
$\omega_2 = 2\varphi_2 \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$
$\omega_1 + \omega_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \omega = 2\varphi$

c) S leží vně obvodového úhlu: označme $C \in \overrightarrow{XS} \cap k$



$$\omega_1 = 2\varphi_1 \qquad \omega = \omega_1 - \omega_2$$
$$\omega_2 = 2\varphi_2 \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\omega_1 - \omega_2 = 2(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \omega = 2\varphi$$

d) S leží na AB:



$\triangle AXS$ - rovnoramenný se základnou $AX \Rightarrow \sphericalangle XAS = \varphi_1$,
analogicky $\sphericalangle XBS = \varphi_2$
$\triangle ABX$: $2(\varphi_1 + \varphi_2) = 180°$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90° = \varphi = \frac{\omega}{2}$$]

V.10.5.: Každé dva obvodové úhly, příslušné témuž oblouku kružnice, jsou shodné.

[Dk.: přímý důsledek V.10.4.]

V.10.6.: **Thaletova věta:**
Každý obvodový úhel, příslušný polokružnici, je pravý.

[Dk.: důsledek V.10.4., neboť polokružnici přísluší středový úhel $180°$.]

Pozn.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice, $X \in k$ pevný bod. Pak platí:
Probíhá-li bod A rovnoměrně po kružnici, tzn. otáčí-li se $\overrightarrow{SA}$ kolem bodu S konstantní úhlovou rychlostí a, otáčí se přímka $\overleftrightarrow{XA}$ kolem bodu X konstantní úhlovou rychlostí $\frac{a}{2}$.

Def.: Nechť $\overset{\frown}{AB}$ je menší oblouk kružnice $k(S;r)$, t tečna ke kružnici k v bodě A, bod $C \in t$, $C \in \sigma$, kde σ je polorovina opačná k $\overrightarrow{ABS}$.
Úhel $\sphericalangle CAB$ nazýváme <u>úsekovým úhlem příslušným oblouku</u> $\overset{\frown}{AB}$.

Pozn.: Úsekový úhel je tedy úhel, který svírá tečna s tětivou AB. Jeho velikost je tedy dána jako odchylka této tečny a tětivy.

V.10.7.: Nechť $\overset{\frown}{AB}$ je menší oblouk kružnice $k(S;r)$, ε úsekový úhel, φ libovolný obvodový úhel příslušný oblouku $\overset{\frown}{AB}$. Pak platí: $\varepsilon = \varphi$.

[Dk.: $\left.\begin{array}{l} \alpha+\varepsilon=90^\circ \\ \left.\begin{array}{l} 2\alpha+\omega=180^\circ \\ \omega=2\varphi \end{array}\right\} \; \begin{array}{l} 2(\alpha+\varphi)=180^\circ \\ \alpha+\varphi=90^\circ \end{array} \end{array}\right\} \; \varepsilon=\varphi$]

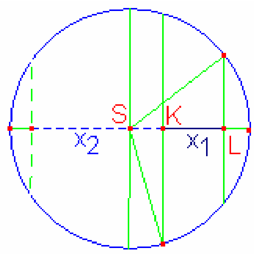
Př.: Dvě rovnoběžné tětivy kružnice $k(S;6\text{ cm})$ mají délky 6 cm a 10 cm. Vypočtěte jejich vzdálenost.

Řešení: $|SK| = \sqrt{r^2 - \frac{t_1^2}{4}} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$

$|SL| = \sqrt{r^2 - \frac{t_2^2}{4}} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$x_1 = |SL| - |SK| = 3\sqrt{3} - \sqrt{11} \doteq 1{,}9$ cm

$x_2 = |SK| + |SL| = \sqrt{11} + 3\sqrt{3} \doteq 8{,}5$ cm



Př.: Dvě kružnice $k_1(O_1;r_1)$, $k_2(O_2;r_2)$ se dotýkají v bodě A. Bodem A je vedena přímka, protínající kružnici k_1 v bodě A_1 a k_2 v A_2. Dokažte, že $\overleftrightarrow{O_1A_1} \parallel \overleftrightarrow{O_2A_2}$.

Řešení: Dokážeme, že $\triangle O_1A_1A \sim \triangle O_2A_2A : |\sphericalangle A_1AO_1| = |\sphericalangle A_2AO_2| = \alpha$ (úhly vrcholové), $\frac{|O_2A|}{|O_1A|} = \frac{r_2}{r_1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\frac{|A_1A|}{2}}{r_1} \Rightarrow |A_1A| = 2r_1\cos\alpha \\ \\ \cos\alpha = \dfrac{\frac{|A_2A|}{2}}{r_2} \Rightarrow |A_2A| = 2r_2\cos\alpha \end{array}\right\} \frac{|A_2A|}{|A_1A|} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{|O_2A|}{|O_1A|} \Rightarrow \triangle O_1A_1A \sim \triangle O_2A_2A \; (sus) \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\sphericalangle O_1A_1A| = |\sphericalangle O_2A_2A|$ - úhly souhlasné u přímek $\overleftrightarrow{O_1A_1}$, $\overleftrightarrow{O_2A_2} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_1A_1} \parallel \overleftrightarrow{O_2A_2}$.

§11. Množiny bodů daných vlastností

Pozn.:

a) Zatím jsme se seznámili s jednou množinou bodů daných vlastností – při definici kružnice (viz §10).

b) Další množiny bodů, o nichž řekneme, že jsou množiny všech bodů s danou vlastností, musíme dokazovat:
Nechť M je hledaná množina bodů, U je množina bodů s vlastností V. Musíme dokázat, že $M=U$, tj. $M \subseteq U \wedge U \subseteq M$. Tedy dokazujeme:
1. $X \in M \Rightarrow X \in U$ s vlastností V
2. $X \in U$ s vlastností $V \Rightarrow x \in M$

nebo obměna 2.: $X \notin M \Rightarrow X \notin U$ s vlastností V.

V.11.1.: Nechť AB je úsečka. Množinou všech bodů $X \in \boldsymbol{E_2}$, pro něž $|AX| = |BX|$, je osa o úsečky AB.

[Dk.: $U = \{X \in \boldsymbol{E_2}: |AX| = |BX|\}$

1. $o \subseteq U$: $X \in o$ lib. $\Rightarrow$ Nechť $X \in AB \Rightarrow X = S$ - střed $AB \Rightarrow$
$\Rightarrow |AS| = |BS| \Rightarrow X \in U$
Nechť $X \notin AB \Rightarrow \triangle ASX \cong \triangle BSX$ $(sus) \Rightarrow$
$\Rightarrow |AX| = |BX| \Rightarrow X \in U$

2. $U \subseteq o$: $X \in$ U lib. $\Rightarrow$ $|AX| = |BX| \Rightarrow$
Nechť $X \in AB \Rightarrow X = S \in o$
Nechť $X \notin AB \Rightarrow \exists \triangle ABX$ - rovnoramenný se základnou AB, kde XS je těžnice, ale i výška $\Rightarrow \overleftrightarrow{XS} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow X \in o$]

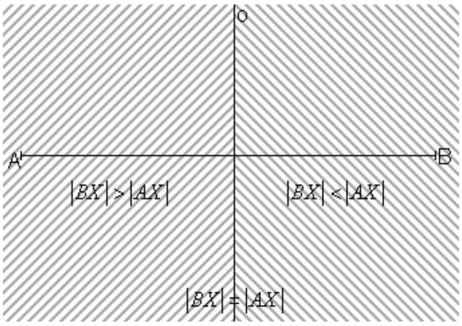
V.11.2.: Nechť AB je úsečka, o její osa. Pak platí:a) $\overrightarrow{oA} = \{X \in \boldsymbol{E_2}: |AX| \leq |BX|\}$

b) $\overrightarrow{oB} = \{X \in \boldsymbol{E_2}: |AX| \geq |BX|\}$

[Dk.: 1. Nechť $X \in \overrightarrow{oA}$.
Nechť $X \in o \Rightarrow$ platí podle V.11.1.
Nechť $X \notin o$. Nechť $X \in AB$ - zřejmé
Nechť $X \notin AB$. Označme $Y \in o \cap BX$
$|BX| = |BY| + |YX| = |AY| + |YX| > |AX| \Rightarrow$
$|BX| > |AX| \Rightarrow$ platí vlastnost.

2. Nechť $X \notin \overrightarrow{oA}$.
Nechť $X \notin o \Rightarrow X \in \overrightarrow{oB} \Rightarrow |BX| < |AX| \Rightarrow$
$\Rightarrow$ neplatí vlastnost pro polorovinu $\overrightarrow{oA}$.]

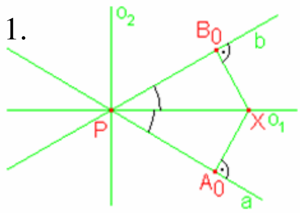
Pozn.: Tedy všechny body roviny lze rozdělit takto:



V.11.3: Nechť a,b jsou dvě různoběžky, $a \cap b = \{P\}$. Množinou všech bodů $X \in$ ***E₂***, pro něž platí: $\rho(X,a) = \rho(X,b)$, je sjednocení přímek $o_1 \cup o_2$, kde o_1, o_2 jsou <u>osy úhlů</u>, které přímky a,b svírají.

[Dk.: Označme $U = \{X \in \boldsymbol{E_2}: \rho(X,a) = \rho(X,b)\}$

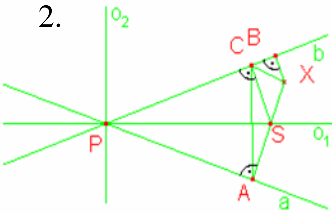
1.



$X \in o_1 \cup o_2 \Rightarrow$ sestrojme kolmé průměry bodu X na přímky $a,b - A_0, B_0$

$\triangle PXA_0 \cong \triangle PXB_0 \ (usu) \Rightarrow |A_0X| = |B_0X| \Rightarrow X \in U$

2.



$X \notin o_1 \cup o_2 \Rightarrow \rho(X,a) = |AX|, \rho(X,b) = |BX|$

Označme $S \in XA \cap o_1$. Podle 1. $|SA| = |SC|$, kde C je kolmý průmět S na b.

Platí: $|AX| = |AS| + |SX| = |CS| + |SX| > |XC| > |XB|$,

neboť v $\triangle BXC$ je XC přepona $\Rightarrow |AX| > |BX| \Rightarrow$

$\Rightarrow X \notin U$]

Stejným způsobem by se dokazovaly i následující věty:

V.11.4: Nechť a,b jsou dvě rovnoběžky, $a \neq b$. Množinou všech bodů $X \in$ ***E₂***, pro něž platí: $\rho(X,a) = \rho(X,b)$, je přímka $o \parallel a \ (\parallel b)$, kde $\rho(o,a) = \rho(o,b)$. Tuto přímku nazveme <u>osou pásu</u> s hraničními přímkami *a,b*.

V.11.5: Nechť $\sphericalangle AVB$ je konvexní nenulový úhel. Množinou všech bodů $X \in$ ***E₂***, $X \in \sphericalangle AVB$, pro něž platí: $\rho(X, \overrightarrow{VA}) = \rho(X, \overrightarrow{VB})$, je <u>polopřímka</u> *o*, která je osou konvexního úhlu *AVB*.

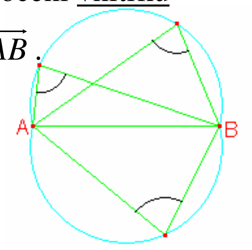
V.11.6: Nechť *p* je přímka. Množinou všech bodů $X \in$ ***E₂***, které mají od přímky *p* stejnou vzdálenost $a, a \in \mathbb{R}^+$, je sjednocení přímek $e_1 \cup e_2$, kde $e_1 \parallel p \parallel e_2 \wedge \rho(e_1, p) = \rho(e_2, p) = a$. Tyto přímky nazveme <u>ekvidistantou přímky</u> *p*.

V.11.7.: Nechť $k(S;r)$ je kružnice. Množinou všech bodů $X \in \boldsymbol{E_2}$, které mají od kružnice k stejnou vzdálenost $a, a \in \mathbb{R}^+, a < r$, je sjednocení kružnic $e_1 \cup e_2$, kde kružnice k, e_1, e_2 jsou soustředné a platí $\rho(e_1,k) = \rho(e_2,k) = a$. Tyto kružnice nazveme ekvidistantou kružnice k.

V.11.8.: Nechť AB je úsečka. Množinou všech vrcholů $C \in \boldsymbol{E_2}$ všech pravoúhlých trojúhelníků $\triangle ABC$ s přeponou AB je množina $k \setminus \{A,B\}$ kde $k(S;\frac{|AB|}{2})$ je kružnice, $S = A \dot{-} B$. Tuto množinu budeme nazývat Thaletovou kružnicí nad přeponou AB a označovat $k_T(AB)$.

[Dk.: plyne z V.10.6.]

V.11.9.: Nechť AB je úsečka, $|\sphericalangle ACB|$ velikost úhlu γ. Množinou vrcholů $X \in \boldsymbol{E_2}$ všech $\triangle ABX$ s jednou stranou AB a úhlem γ o velikosti $|\sphericalangle ACB|$ je sjednocení vnitřku oblouku $\overset{\frown}{ACB}$ s jeho obrazem $\overset{\frown}{AC'B}$ v souměrnosti podle přímky $\overleftrightarrow{AB}$.



Pozn.:

a) Pokud $\sphericalangle AXB = \alpha$, pak říkáme, že úsečka AB je vidět z bodu X pod úhlem α, resp. úhel α se nazývá zorným úhlem úsečky AB.

b) Konstrukce množiny $U = \{X \in \boldsymbol{E_2}: |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$:

Hledáme S, resp. S', kde $o(\overleftrightarrow{AB}): S \to S'$:

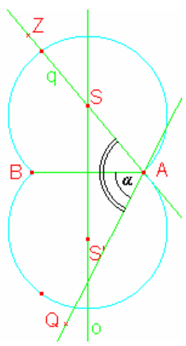
1. $\Rightarrow |AS| = |BS| \Rightarrow S \in$ osa AB
2. ω - středový úhel k úhlu $\alpha \Rightarrow \omega = 2\alpha$

$\triangle ABS: |\sphericalangle ABZ| = \frac{180°-\omega}{2} = 90° - \frac{\omega}{2} = 90° - \alpha$

$\Rightarrow S \in$ rameno $\sphericalangle ABZ$, kde $|\sphericalangle ABZ| = 90° - \alpha$

Př.: Sestrojte $U = \{X \in \boldsymbol{E_2}: |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$: a) $|AB| = 5cm,\ \alpha = 60°$
b) $|AB| = 5cm,\ \alpha = 150°$

Rozbor:



Dk.: viz předchozí poznámka b)

Postup konstrukce:

1.$o; o -$ osa AB

2.$\sphericalangle BAQ; |\sphericalangle BAQ| = \alpha$

3.$q; q \perp AQ, A \in q$

4.$S; S \in q \cap o$

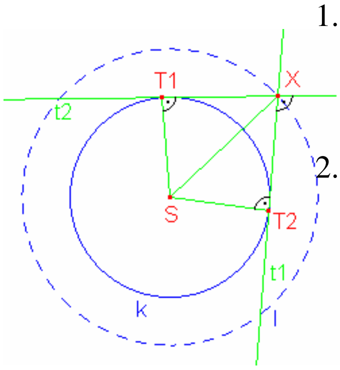
5.$S'; o(AB), S \to S'$

6.$\alpha < 90° \Rightarrow$ větší oblouky $\overset{\frown}{AB}$ kružnic $k(S;|SA|), k'(S';|S'A|)$

$\alpha > 90° \Rightarrow$ menší oblouky $\overset{\frown}{AB}$ kružnic $k(S;|SA|), k'(S';|S'A|)$

Př.: Dokažte, že množinou všech bodů, z nichž lze k dané kružnici o poloměru r vést dvě kolmé tečny, je kružnice s danou soustředná o poloměru $\sqrt{2}r$.

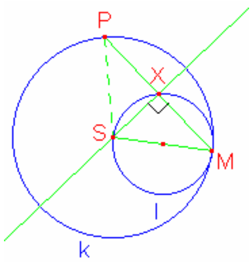
Řešení: $U = \{X \in \boldsymbol{E}_2 : \overleftrightarrow{XT_1} \perp \overleftrightarrow{XT_2}$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku tečen t_1, t_2 ke kružnici $k\}$



1. $X \in U \Rightarrow |\sphericalangle T_1XT_2| = 90° \Rightarrow |\sphericalangle T_1ST_2| = 90° \Rightarrow T_1XT_2S$ je čtverec, kde SX je jeho úhlopříčka $\Rightarrow |SX| = \sqrt{2}r \Rightarrow$ $\Rightarrow X \in l$
2. $X \in l \Rightarrow |SX| = \sqrt{2}r, |XT_1|^2 = |SX|^2 - |ST_1|^2 =$ $= r^2 \cdot 2 - r^2 = r^2 \Rightarrow |XT_1| = r \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle SXT_1 -$ rovnoramenný pravoúhlý $\Rightarrow$ $\Rightarrow |\sphericalangle T_1XS| = 45° \Rightarrow |\sphericalangle T_1XT_2| = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{XT_1} \perp \overleftrightarrow{XT_2} \Rightarrow X \in U$

Př.: Najděte množinu středů všech tětiv kružnice k, které leží na přímkách procházejících bodem $M \in k$ libov.

Řešení: $A = \{X \in \boldsymbol{E}_2 : X = P \dot{-} M, P \in k, P \neq M\}; B = l \setminus \{M\}$, kde $l(T; \frac{r}{2}), T = S \dot{-} M$



1. $A \subseteq B$: $S \in \overleftrightarrow{MP} \Rightarrow X = S \Rightarrow X \in l$

$S \notin \overleftrightarrow{MP} \Rightarrow \overleftrightarrow{SX} -$ osa $PM \Rightarrow |\sphericalangle SXM| = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in k_T(SM) = l$

2. $B \subseteq A$: $X = S$ - platí

$X \neq S \Rightarrow X \in k_T(SM) = l \Rightarrow |\sphericalangle SXM| = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists P \in \boldsymbol{E}_2 : P \in \overleftrightarrow{XM} \cap l \wedge P \neq M \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PSM -$ rovnoramenný, kde SX je výška, ale i těžnice $\Rightarrow X = P \dot{-} M \Rightarrow X \in A$

§12. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku, tětivový a tečnový čtyřúhelník

Def.: Nechť ABC je trojúhelník. Kružnici, která prochází body A, B, C, nazýváme kružnicí trojúhelníku ABC opsanou.

V.12.1.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: Existuje právě jedna kružnice $\triangle ABC$ opsaná, její střed S leží v průsečíku os stran trojúhelníku a poloměr $r = |AS| = |BS| = |CS|$.

[Dk.: $A \in k, B \in k, C \in k \Rightarrow |AS| = |BS| = |CS|$, kde S je střed k

$|AS| = |BS| \overset{V.11.1.}{\Rightarrow} S \in o_1, o_1 -$ osa úsečky AB

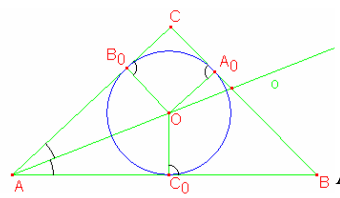
$|AS| = |CS| \Rightarrow S \in o_2, o_2 -$ osa úsečky AC

Protože $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{AC} \wedge o_1 \perp AB \wedge o_2 \perp AC \Rightarrow o_1 \nparallel o_2 \Rightarrow \exists\, S \in o_1 \cap o_2$

$|BS| = |CS| \Rightarrow S \in o_3, o_3 -$ osa úsečky $BC \Rightarrow \{S\} = o_1 \cap o_2 \cap o_3$]

Def.: Nechť ABC je trojúhelník, O jeho vnitřní bod. Kružnici se středem O, která se dotýká všech tří stran $\triangle ABC$, nazýváme kružnicí trojúhelníku ABC vepsanou.

V.12.2.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: Existuje právě jedna kružnice $\triangle ABC$ vepsaná, její střed O leží v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku a poloměr $r = |OA_0| = |OB_0| = |OC_0|$, kde A_0, B_0, C_0 jsou body dotyku této kružnice se stranami a, b, c $\triangle ABC$.



[Dk.: O je vnitřní bod $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{AO}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle BAC$

$B_0, C_0 -$ body dotyku se stranami $b, c \Rightarrow |OB_0| = |OC_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB_0 \cong \triangle AOC_0$ $(Ssu) \Rightarrow \sphericalangle B_0AO \cong \sphericalangle C_0AO \Rightarrow O \in o_1 = \overrightarrow{AO}$,

$o_1 -$ osa $\sphericalangle B_0AC_0$

Analogicky $O \in o_2, o_2 -$ osa $\sphericalangle C_0BA_0; O \in o_3, o_3 -$ osa $\sphericalangle B_0CA_0 \Rightarrow$

$\{O\} = o_1 \cap o_2 \cap o_3$

Analogicky $|OA_0| = |OB_0| = |OC_0|$]

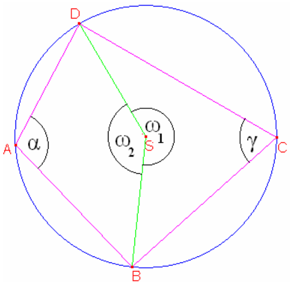
Def.: Nechť je dána kružnice $k(S, r)$. Konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice k, nazýváme tětivovým čtyřúhelníkem.
(Nechť je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Čtyřúhelník $ABCD$, kterému lze opsat kružnici, nazýváme tětivovým čtyřúhelníkem.)

Pozn.: Tětivovými čtyřúhelníky jsou např. čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník.

V.12.3.: Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník s vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pak platí: čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový $\Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

[Dk.: 1„$\Rightarrow$": Nechť $ABCD$ je tětivový $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, k(S,r): A\in k \wedge B\in k \wedge C\in k \wedge D\in k \Rightarrow$ pak platí:



$\alpha -$ obvodový přísl. $\widehat{DCB}$

$\omega_1 -$ středový přísl. $\widehat{DCB}$ $\Rightarrow \omega_1 = 2\alpha$

$\gamma -$ obvodový přísl. $\widehat{DAB}$ $\Rightarrow \omega_2 = 2\gamma$

$\omega_2 -$ středový přísl. $\widehat{DAB}$

$\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2(\alpha+\gamma)$, také $\omega_1 + \omega_2 = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 180° \Rightarrow \beta + \delta = 180°$

2„$\Leftarrow$": Nechť ve čtyřúhelníku platí: $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$.

Opišme kružnici $\triangle ABC \Rightarrow \beta$ je obvodovým úhlem přísl. $\widehat{AC}$,

obvodový úhel přísl. 2. oblouku $\widehat{AC}$ má velikost $180°-\beta=\delta$,

tedy na k leží vrcholy všech úhlů o velikosti $180°-\beta=\delta \Rightarrow$

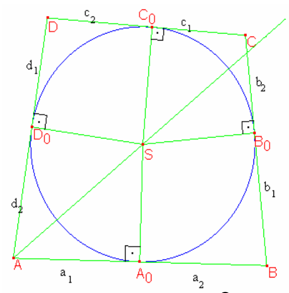
$\Rightarrow D\in \widehat{AC} \Rightarrow D\in k \Rightarrow ABCD$ je tětivový]

Def.: Nechť je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Čtyřúhelník $ABCD$, kterému lze vepsat kružnici, nazýváme tečnovým čtyřúhelníkem.

Pozn.: Tečnovými čtyřúhelníky jsou např. čtverec, kosočtverec.

V.12.4.: Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník se stranami a,b,c,d. Pak platí:
čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový $\Leftrightarrow a+c=b+d$.

[Dk.: 1„$\Rightarrow$": Nechť $ABCD$ je tečnový



$\Rightarrow |A_0S| = |D_0S| \Rightarrow \triangle AA_0S \cong \triangle AD_0S$ $(Ssu) \Rightarrow a_1 = d_2$

analogicky $a_2 = b_1$

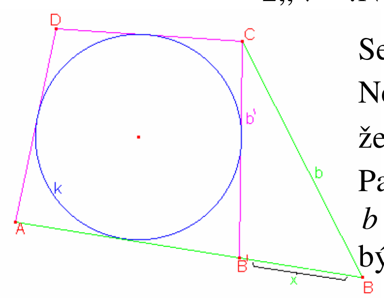
$c_1 = b_2$

$c_2 = d_1$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + b_2 + d_1 + d_2 \Rightarrow a+c=b+d$

2„$\Leftarrow$": Nechť v $ABCD$ platí: $a+c=b+d$.



Sestrojme k tak, aby se dotýkala $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$.

Nechť BC je nesečnou k. Veďme bodem C tečnu t ke k tak,

že $t \neq \overleftrightarrow{CD}; B' \in t \cap AB$.

Pak $AB'CD$ je tečnový $\Rightarrow a-x+c=b'+d$. Podle předpokladu

$b=b'+x \Rightarrow$ podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle B'BC$ musí

být $b'=b \Rightarrow B=B' \Rightarrow ABCD$ je tečnový]

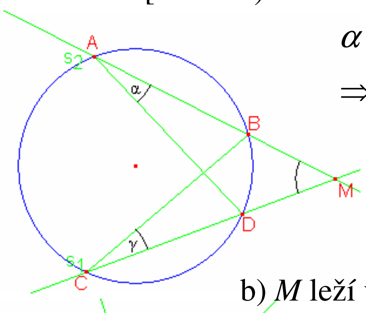
Př.: Jsou dány dvě kružnice k, k', které se protínají ve dvou bodech *K,L*. Nechť $A \in k, A \neq K, A \neq L$ je libovolný bod, $\overleftrightarrow{AK} \cap k' = \{B, K\}, \overleftrightarrow{AL} \cap k' = \{C, L\}$. Dokažte, že $\overleftrightarrow{BC} \parallel t$, kde t je tečna vedená ke k bodem A.

Řešení:
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ - úsekový úhel příslušný } \overset{\frown}{AK} \Rightarrow \alpha = \varphi \Rightarrow \psi = 180^\circ - \alpha \\ \text{čtyřúhelník } KLCB \text{ je tětivový} \Rightarrow \beta + \psi = 180^\circ \Rightarrow \psi = 180^\circ - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{střídavé}}{\alpha = \beta} \Rightarrow t \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

§13. Mocnost bodu ke kružnici

V.13.1.: Nechť $k(S,r)$ je kružnice, $M \notin k$ bod. Nechť s_1, s_2 jsou dvě sečny kružnice k procházející bodem M. Označme $s_1 \cap k = \{A,B\}, s_2 \cap k = \{C,D\}$. Pak platí: $|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$.

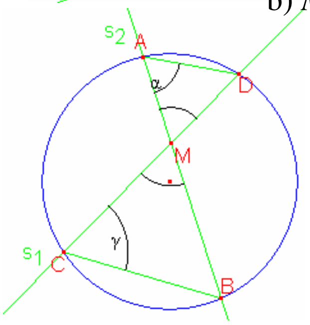
[Dk.: a) M leží ve vnější oblasti k:



$\alpha = \gamma$ (obvodové úhly $\overset{\frown}{BD}$) $\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB$ (uu) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MD|}{|MB|} \Rightarrow |MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$

b) M leží ve vnitřní oblasti k:



$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \alpha \text{ (obvodové úhly } \overset{\frown}{BD}) \\ |\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle AMD| \text{ (vrchol. úhly)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB \text{ (uu)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|} \Rightarrow |MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$]

Pozn.: Číslo $|MA|\cdot|MB|$ je tedy nezávislé na poloze sečny, závisí pouze na poloze bodu M vzhledem ke kružnici k. Následující definice je tedy korektní.

Def.: Nechť $k(S,r)$ je kružnice, $M \in \boldsymbol{E_2}$ bod. Nechť s je libovolná sečna kružnice k procházející bodem M. Označme $s \cap k = \{A,B\}$.
Pak <u>mocností bodu</u> M <u>ke kružnici</u> k nazýváme reálné číslo $m_M \in \mathbb{R}$, pro které platí:

a) $M \in k \Rightarrow m_M = 0$

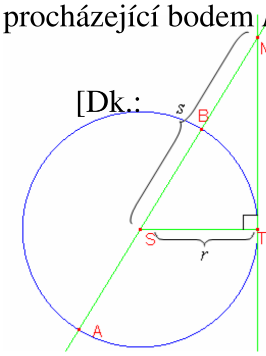
b) M leží ve vnější oblasti $k \Rightarrow m_M = |MA|\cdot|MB|$

c) M leží ve vnitřní oblasti $k \Rightarrow m_M = -|MA|\cdot|MB|$

Pozn.: Nejmenší mocnost ke kružnici $k(S,r)$ má bod S; $m_S = -r^2$.

V.13.2.: Nechť $k(S,r)$ je kružnice, M bod ležící ve vnější oblasti k. Nechť t je tečna procházející bodem M ke kružnici k s dotykovým bodem T. Pak platí: $m_M = |MT|^2$.

[Dk.:



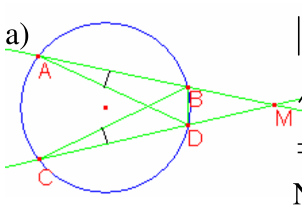
Nechť s je sečna taková, že $S \in s$. Označme $s \cap k = \{A,B\}$.
$m_M = |MA|\cdot|MB| = (s+r)(s-r) = s^2 - r^2 = |MT|^2$ ($\Leftarrow \triangle MTS$ je pravoúhlý trojúhelník)]

V.13.3.: Nechť a,b jsou dvě různoběžky, $a \cap b = \{M\}$. Pak platí:

a) Jestliže dva různé body A,B leží na téže polopřímce přímky a s počátkem M a dva různé body C,D leží na téže polopřímce přímky b s počátkem M a platí-li $|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$, pak body A,B,C,D leží na téže kružnici k.

b) Jestliže body A,B leží na opačných polopřímkách přímky a s počátkem M a body C,D leží na opačných polopřímkách přímky b s počátkem M a platí-li $|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$, pak body A,B,C,D leží na téže kružnici k.

[Dk.: a)



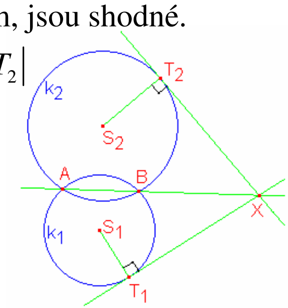
$|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD| \Rightarrow \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MD|}{|MB|} \wedge$
$\wedge |\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle CMB| \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB$ (sus) $\Rightarrow$
$\Rightarrow |\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle MCB|$.
Nechť k je kružnice opsaná $\triangle ABD \Rightarrow \sphericalangle BAD$ je obvodový úhel příslušný $\overset{\frown}{BD} \Rightarrow$ protože $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DCB|$, je také $\sphericalangle DCB$ obvodový úhel příslušný $\overset{\frown}{BD} \Rightarrow C \in k$

b) analogicky]

Pozn.: V.13.3. je obrácením V.13.1.

Př.: Dvě kružnice se protínají ve dvou bodech A,B; bod $X \in \overleftrightarrow{AB}$, ale neleží na úsečce AB. Dokažte, že délky úseků na tečnách, vedených z bodu X ke kružnicím, jsou shodné.

Řešení: $m_{X,k_1} = |XA|\cdot|XB| = |XT_1|^2$
$m_{X,k_2} = |XA|\cdot|XB| = |XT_2|^2$
$\Rightarrow |XT_1|^2 = |XT_2|^2 \Rightarrow |XT|_1 = |XT_2|$



Pozn.: Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ z předchozího příkladu je zřejmě množinou všech bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnicím k_1, k_2. Tato přímka se nazývá chordála dvou kružnic. Když se obě kružnice dotýkají, pak chordála je jejich společnou tečnou.

Př.: V rovnoběžníku $ABCD$ platí: $|AC| > |BD|$. Nechť $M \in AC$ je takový bod, že čtyřúhelník $BCDM$ je tětivový. Dokažte, že $\overleftrightarrow{BD}$ je společnou tečnou ke kružnici opsané $\triangle ABM$ a $\triangle ADM$.

Řešení: $m_{S,k} = -|MS|\cdot|CS| = -|BS|\cdot|DS| \Rightarrow |MS|\cdot|CS| = |BS|\cdot|DS|$

1. $m_{S,k_1} = |MS|\cdot|AS| = |BS|^2$ $\qquad |CS| = |AS| \quad |DS| = |BS|$ $\Rightarrow |MS|\cdot|AS| = |BS|^2 \Rightarrow$ B je dotykový bod tečny $\overleftrightarrow{BD}$ ke k_1

2. ke k_2 analogicky

VI. Shodná a podobná zobrazení

§1. Zobrazení

Pozn.: S pojmem (binární) relace jsme se seznámili ve druhé kapitole v §12 - každá podmnožina kartézského součinu.

Def.: Nechť A, B jsou dvě podmnožiny. Zobrazením f z množiny A do množiny B nazýváme relaci $f \subseteq A \times B$, pro níž platí: Ke každému $x \in A$ existuje **nejvýše jedno** $y \in B$ tak, že $[x, y] \in f$.
Značení: Je-li $[x, y] \in f$, píšeme také $y = f(x)$.
Prvek $y \in B$ nazýváme obrazem prvku $x \in A$ v zobrazení f. Prvek $x \in A$ nazýváme vzorem prvku $y \in B$ v zobrazení f.

Def.: Nechť $f \subseteq A \times B$ je zobrazení.
Definičním oborem zobrazení f nazýváme množinu $D(f) \subseteq A$ všech prvků $x \in A$ takových, že k nim existuje **právě jedno** $y \in B$ tak, že $y = f(x)$.
$D(f) = \{x \in A; \exists! y \in B : y = f(x)\}$
Oborem hodnot zobrazení f nazýváme množinu $H(f) \subseteq B$ všech prvků $y \in B$ takových, že k nim existuje **alespoň jedno** $x \in A$ tak, že $y = f(x)$.
$H(f) = \{y \in B; \exists x \in A : y = f(x)\}$

Def.: Nechť f je zobrazení z A do B.
Je-li $D(f) = A$, pak mluvíme o zobrazení množiny A do množiny B a zapisujeme $f : A \to B$.
Je-li $H(f) = B$, pak mluvíme o zobrazení z množiny A na množinu B.
Je-li $D(f) = A \wedge H(f) = B$, pak mluvíme o zobrazení množiny A na množinu B neboli surjekci.
Je-li $A = B$, pak mluvíme o zobrazení v množině A.

Def.: Nechť f je zobrazení z A do B. Zobrazení f se nazývá prosté, jestliže ke každému $y \in B$ existuje nejvýše jedno $x \in A$ tak, že $y = f(x)$.

Pozn.: Při prostém zobrazení mají tedy dva různé vzory dva různé obrazy.
$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ nebo obměna
$\forall x_1, x_2 \in D(f) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Def.: Zobrazení $f : A \to B$ množiny do množiny, které je prosté, nazýváme injekce.
Zobrazení $f : A \to B$, které je současně surjekcí a injekcí, nazýváme bijekce.

Pozn.: f je bijekce $\Leftrightarrow$ platí:
1) $D(f) = A$
2) $H(f) = B$
3) f je prosté

Def.: Nechť $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. Inverzní relací k relaci α nazveme relaci $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$ takovou, že $\alpha^{-1} = \{[y, x] \in B \times A : [x, y] \in \alpha\}$. Je-li α zobrazení, nazveme relaci α^{-1} inverzním zobrazením.

Pozn.:

a) Nechť $f : A \to B$ je zobrazení z A do B. Pak relace $f^{-1} : B \to A$ je zobrazení právě tehdy, když f je prosté.

b) Je-li f bijekce, je f^{-1} bijekce a platí: $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$.

Def.: Nechť $f : A \to B$, $g : B \to C$ jsou zobrazení. Složeným zobrazením H ze zobrazení f a g (v tomto pořadí) nazveme relaci $l \subseteq A \times C$ takovou, že
$h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B : f(x) = y \wedge g(y) = z\}$.
Značíme $z = g(f(x)), h = g \circ f$ (čteme „g po f“).

Pozn.:

a) Skládání zobrazení není komutativní.
b) Složením dvou bijekcí získáme bijekci.

Def.: Nechť i je zobrazení $i \subseteq A^2$ takové, že každému $x \in A$ platí: $i(x) = x$. Toto zobrazení nazveme identitou.

Pozn.:

a) Každá identita je bijekce.
b) Je-li $f : A \to B$ bijekce, pak i $f^{-1} : B \to A$ je bijekce a složením těchto zobrazení získáme identitu: $f \circ f^{-1} = i_B \wedge f^{-1} \circ f = i_A$.

§2. Shodná zobrazení

Pozn.: Základní množinou bude množina všech bodů v rovině - $\boldsymbol{E_2}$. Budeme tedy zkoumat taková zobrazení Z, kde $D(Z) \subseteq \boldsymbol{E_2}$, $H(Z) \subseteq \boldsymbol{E_2}$.

Def.: Shodným (izometrickým) zobrazením v rovině (shodností v rovině) nazýváme zobrazení $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$, jestliže $\forall X, Y \in \boldsymbol{E_2}$: $|Z(X)Z(Y)| = |XY|$.

Pozn.:

a) Shodné zobrazení zachovává délky.

b) Někdy se pojmy shodné zobrazení a shodnost rozlišují. Shodné zobrazení se definuje pro různé bodové množiny $\boldsymbol{E_n}$, $\boldsymbol{E_m}$ (tedy $Z: \boldsymbol{E_n} \to \boldsymbol{E_m}$). Je-li $n = m$, mluvíme o shodnosti v množině $\boldsymbol{E_n}$.
My budeme pracovat s množinou $\boldsymbol{E_2}$, proto budeme zkoumat shodnosti v $\boldsymbol{E_2}$ (i když někdy budeme používat shodná zobrazení v $\boldsymbol{E_2}$).

V.2.1.: Každé shodné zobrazení je prosté.

[Dk.: sporem: Nechť Z je shodné a není prosté $\Rightarrow \exists X, Y \in \boldsymbol{E_2}$: $X \neq Y \wedge$
$\wedge\, Z(X) = Z(Y) \Rightarrow |Z(X)Z(Y)| = 0.$
Ale z definice plyne $|Z(X)Z(Y)| = |XY| \wedge X \neq Y \Rightarrow |Z(X)Z(Y)| \neq 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ spor]

Pozn.: Dá se ukázat, že každé shodné zobrazení je bijekcí $\boldsymbol{E_2}$ na $\boldsymbol{E_2}$.

Důsledek V.2.1.: Ke každému shodnému zobrazení Z existuje inverzní zobrazení Z^{-1}, které je rovněž shodné.

V.2.2.: Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je shodné zobrazení, AB úsečka. Obrazem úsečky AB v zobrazení Z je úsečka $Z(A)Z(B)$ shodná s AB.

[Dk.: Nechť $X \in AB \Rightarrow |AX| + |XB| = |AB| \Rightarrow |Z(A)Z(X)| + |Z(X)Z(B)| =$
$= |Z(A)Z(B)| \Rightarrow Z(X) \in Z(A)Z(B).$
Důkaz opačné inkluze provedeme stejnou úvahou pro bijekci Z^{-1}.]

Pozn.:

a) Dá se ukázat, že ve shodném zobrazení je obrazem polopřímky polopřímka, přímky přímka, poloroviny polorovina, úhlu shodný úhel, kružnice kružnice,…

b) Rovněž platí, že ve shodném zobrazení jsou obrazem rovnoběžných přímek p, q rovnoběžné přímky $Z(p)$, $Z(q)$.

Def.:

a) Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je zobrazení, $X \in \boldsymbol{E_2}$ bod.
Bod X nazýváme samodružným (fixním) bodem zobrazení Z, jestliže platí: $Z(X) = X$.

b) Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je zobrazení, $U \subseteq \boldsymbol{E_2}$ útvar (tj. libovolná podmnožina $\boldsymbol{E_2}$).
Obrazem útvaru U v zobrazení Z nazýváme útvar $U' = Z(U) =$
$= \{Y \in \boldsymbol{E_2}: \exists X \in U : Z(X) = Y\}$.
Útvar U nazýváme samodružný v zobrazení Z, jestliže platí: $Z(U) = U$.
Útvar U nazýváme bodově samodružný v zobrazení Z, jestliže $\forall X \in U : Z(X) = X$.

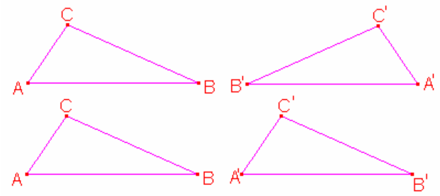
Pozn.: Každý bodově samodružný útvar je samodružný, ale obracení neplatí.

Def.: Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je zobrazení, $p \subseteq \boldsymbol{E_2}$ přímka.
Směr, který určuje přímka p, se nazývá samodružný v zobrazení Z, jestliže platí:
$Z(p) \parallel p$.

Def.: Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je shodnost (shodné zobrazení), ABC trojúhelník.
Shodnost, která nemění smysl obíhání vrcholů $\triangle ABC$, se nazývá přímá.
Shodnost, která mění smysl obíhání vrcholů $\triangle ABC$, se nazývá nepřímá.

nepřímá $\to$

přímá $\to$



Def.: Nechť $Z: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je zobrazení $I: \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ identita.
Zobrazení Z se nazývá involutorní, jestliže platí: $Z \circ Z = I$.

Pozn.: Pro involutorní zobrazení Z platí: $Z^{-1} = Z$.

V.2.3.: Nechť F, G jsou shodná zobrazení $\boldsymbol{E_2}$ do $\boldsymbol{E_2}$.
Pak také zobrazení $H = G \circ F$ je shodné zobrazení.

[Dk.: Ukážeme, že $\forall X, Y \in \boldsymbol{E_2}: |XY| = |H(X)H(Y)|$.
$|H(X)H(Y)| = |G(F(X))G(F(Y))| = |F(X)F(Y)| = |XY|$]

§3. Klasifikace shodných zobrazení v rovině

A) Identita:

Pozn.: Identitu jsme si definovali v §1.

Pozn.:

a) Určení: -
b) Samodružné body: všechny
c) Samodružné směry: všechny
d) Přímá shodnost

B) Osová souměrnost:

Def.: Nechť $o \subseteq \boldsymbol{E_2}$ je přímka. Zobrazení $O_o : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ nazýváme osovou souměrností s osou o, jestliže platí:

1. $X \in o \Rightarrow X' = X$
2. $X \notin o \Rightarrow X' \in p, p \perp o, X \in p : X \dot{-} X' \in o$

Bod X' je obraz bodu X v O_o. Zapisujeme: $X' = O_o(X)$.

V.3.1.: Osová souměrnost je shodné zobrazení.

[Dk.: a) $X \in o, Y \in o : |XY| = |X'Y'|$

b) $X \in o, Y \notin o :$ i) $XY \perp o : X = Y \dot{-} Y' \Rightarrow |XY| = |X'Y'|$

ii) $XY \not\perp o : \exists \triangle XYY', S = Y \dot{-} Y' \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle XYS \cong \triangle XY'S$ (sus) $\Rightarrow |XY| = |XY'| = |X'Y'|$

c) $X \notin o, Y \notin o$: obdobně, je nutné uvažovat polohu bodů X,Y vzhledem k ose o: leží-li ve stejné nebo jiné polorovině, je-li $\overleftrightarrow{XY} \parallel o$ nebo $\overleftrightarrow{XY} \perp o$.]

Pozn.:

a) Určení : osa souměrnosti o
b) Samodružné body: vyplní přímku o
c) Samodružné směry: dva na sebe kolmé (jeden je určený osou o, druhý přímkou kolmou k o)
d) Nepřímá shodnost

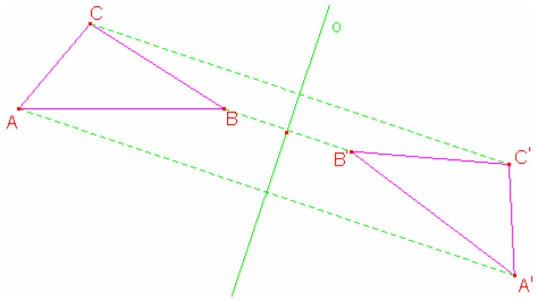
V.3.2.: Osová souměrnost je involutorní zobrazení.

[Dk.: a) $X \in o : O_o \circ O_o(X) = O_o(O_o(X)) = O_o(X) = X = I(X)$

b) $X \notin o : X' = O_o(X) : O_o \circ O_o(X) = O_o(O_o(X)) = O_o(X') = X = I(X)$]

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ v osové souměrnosti s osou o.

$O_o(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



Pozn.: Přímka $p \subseteq \boldsymbol{E_2}$ se v osové souměrnosti s osou o zobrazuje následovně:

a) $p \parallel o \Rightarrow p' \parallel o \Rightarrow p' \parallel p$

b) $p \nparallel o \Rightarrow$ i) $p \perp o \Rightarrow p' = p$ (p je samodružná přímka, ale není bodově samodružná).

ii) $p \not\perp o \Rightarrow p' \nparallel p \ \wedge p \cap p' \in o$

Pozn.: <u>Skládání osových souměrností:</u>

a) osy rovnoběžné - $a \parallel b$:

i) $a=b$: $O_a \circ O_a = I$ - <u>identita</u>

ii) $a \neq b$: $O_b \circ O_a = T$ - <u>posunutí</u>:

$\forall X \in \boldsymbol{E_2}$: $|XX'| = 2d$, kde $d = \rho(a,b)$.

Složíme-li obě souměrnosti v opačném pořadí, dostaneme posunutí v opačném směru o stejnou délku $2d$.

b) osy různoběžné - $a \nparallel b - a \cap b = \{S\}$:

i) $a \perp b: O_b \circ O_a = S$ - <u>středová souměrnost</u>

ii) $a \not\perp b: O_b \circ O_a = R$ - <u>rotace</u> kolem bodu S

$\forall X \in \boldsymbol{E_2}$: $|\sphericalangle XSX'| = 2\alpha$, kde α je velikost orientovaného úhlu, který svírají osy a a b.

Složíme-li obě souměrnosti v opačném pořadí, dostaneme rotaci o úhel $-\alpha$.

C) <u>Středová souměrnost:</u>

Def.: Nechť $S \in \boldsymbol{E_2}$ je bod. Zobrazení $S_S : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ nazýváme <u>středovou souměrnosti</u> se středem S, jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow X' = X$
2. $X \neq S \Rightarrow S = X \dot{-} X'$

Zapisujeme: $X' = S_S(X)$.

Pozn.: Středová souměrnost se středem S vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami, které se protínají v bodě S. Tedy středová souměrnost je shodné zobrazení.

Pozn.:

a) Určení: střed souměrnosti S
b) Samodružné body: jeden – střed S
c) Samodružné směry: všechny
d) Přímá shodnost

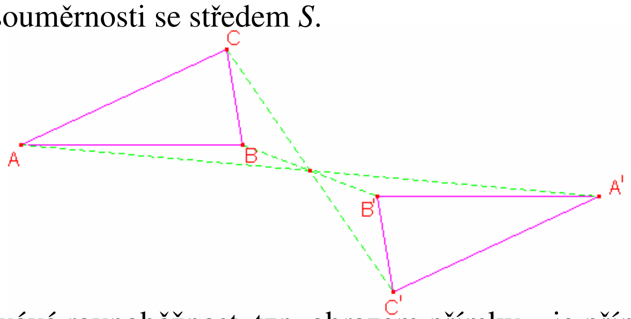
V.3.3.: Středová souměrnost je involutorní zobrazení.

[Dk.: a) $X = S : S_S \circ S_S(X) = S_S(S_S(X)) = S_S(X) = X = S = I(X)$

b) $X \neq S : X' = S_S(X) : S_S \circ S_S(X) = S_S(S_S(X)) = S_S(X') = X = I(X)$]

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ ve středové souměrnosti se středem S.

$S_S(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



V.3.4.: Středová souměrnost zachovává rovnoběžnost, tzn. obrazem přímky p je přímka p', kde $p' \parallel p$.

[Dk.: a) $S \in p : \forall X \in p : X' \in p \Rightarrow p' = p \Rightarrow p' \parallel p$

b) $S \notin p : X, Y \in p, X \neq Y \Rightarrow X' \in p' \wedge Y' \in p' \wedge X' \neq Y'$

Platí: $\triangle XYS \cong \triangle X'Y'S$ (sus) $\Rightarrow |\sphericalangle YXS| = |\sphericalangle Y'X'S|$-úhly střídavé$\Rightarrow$

$\Rightarrow p \parallel p'$]

D) <u>Translace (posunutí):</u>

Def.: Zobrazení $T : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ nazýváme <u>translací</u> (<u>posunutím</u>), jestliže $\forall A, B \in \boldsymbol{E_2}$ platí: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \wedge \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$. Zapisujeme: $A' = T(A), B' = T(A)$.

Pozn.:

a) Posunutí vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými osami. Tedy posunutí je shodné zobrazení.
b) Speciálním případem translace je identita.

Pozn.:

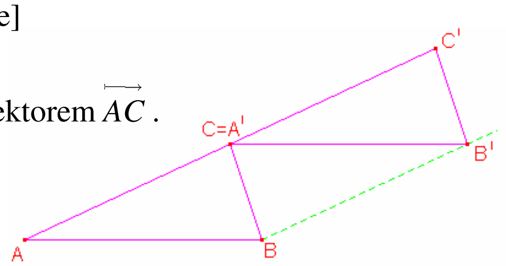
a) Určení: jednou uspořádanou dvojicí bodů A, A' – vzor a jeho obraz. Někdy říkáme, že posunutí je určeno orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA'}$ nebo vektorem $\overrightarrow{AA'}$, kde A je počáteční a bod A' koncový bod vektoru.
b) Samodružné body: žádný (v případě identity všechny)

   Samodružnými přímkami jsou ty, které jsou rovnoběžné s vektorem $\overrightarrow{AA'}$
c) Samodružné směry: všechny
d) Přímá shodnost

V.3.5.: Nechť T : $\boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je posunutí. Pak platí: $\forall A, B \in$ $\boldsymbol{E_2}$: $|AA'| = |BB'|$

[Dk.: plyne přímo z definice]

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{AC}$.
$T_{\overrightarrow{AC}}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



E) Rotace (otočení):

Def.: Nechť $S \in$ $\boldsymbol{E_2}$ je bod, α orientovaný úhel. Zobrazení $R_{S,\alpha}$: $\boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ nazýváme rotací (otočením) se středem S o úhel α, jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow X' = X$
2. $X \neq S \Rightarrow \sphericalangle XSX' = \alpha \wedge |XS| = |X'S|$

Zapisujeme: $X' = R_{S,\alpha}(X)$.

Pozn.:

a) U orientovaného úhlu rozlišujeme počáteční a koncové rameno

b) Velikost orientovaného úhlu není určena jednoznačně, dvě velikosti téhož úhlu se liší o $k \cdot 360°$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pozn.:

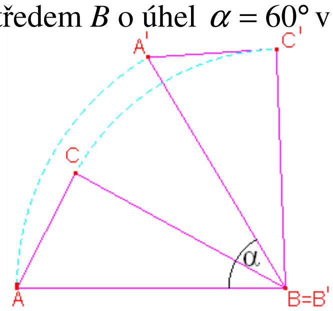
a) Rotace vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem různoběžnými osami. Tedy rotace je shodné zobrazení.

b) Speciálním případem rotace o úhel $180°$, resp $(2k-1) \cdot 180°$ je středová souměrnost se středem S. Analogicky bychom také mohli říct, že speciálním případem rotace o úhel $360°$, resp. $k \cdot 360°$ je identita.

Pozn.:

a) Určení: střed otočení S a úhel otočení α.
b) Samodružné body: jeden – střed S
c) Samodružné směry: žádný (v případě středové souměrnosti všechny)
d) Přímá shodnost

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ v otočení daném středem B o úhel $\alpha = 60°$ v záporném smyslu.
$R_{S,-60°}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



F) Posunutá souměrnost:

Def.: Nechť $O_o : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ je osová souměrnost s osou o, $T_{\overrightarrow{AA'}} : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$ posunutí dáno orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA'}$. Posunutou souměrností nazýváme zobrazení $T_{\overrightarrow{AA'}} \circ O_o : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$. Zapisujeme $X' = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ O_o(X)$.

Pozn.: Posunutá souměrnost vznikne také složením středové a osové souměrnosti, resp. složením tří osových souměrností. Tedy posunutá souměrnost je shodné zobrazení.

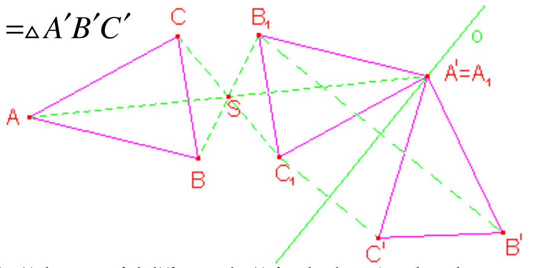
Pozn.:

a) Určení: zobrazeními, které máme skládat
b) Samodružné body: žádný
c) Samodružné směry: dva na sebe kolmé
d) Nepřímá shodnost

Př.: Na obrázku jsou dány dva trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Najděte středovou a osovou souměrnost tak, aby $O_o \circ S_S(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$

$S_S(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$

$O_o(\triangle A_1B_1C_1) = \triangle A'B'C'$



Pozn.:

a) Každé dva shodné útvary v rovině lze vyjádřit právě jedním (pokud neuvažujeme speciální případy) shodným zobrazením uvedeným v podparagrafech A)-F).

b) Každé shodné zobrazení v rovině lze vyjádřit složením osových souměrností.

§4. Shodná zobrazení v rovině – konstrukční úlohy

Pozn.: Vlastnosti úsečky XX' spojující vzor a obraz ve shodných zobrazeních:

a) osová souměrnost s osou o: $XX' \perp o \wedge X \dot{-} X' \in o$

b) středová souměrnost se středem S: $S = X \dot{-} X'$

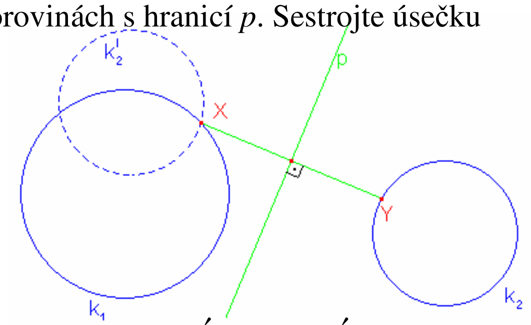
c) posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA'}$: $XX' \parallel AA' \wedge |XX'| = |AA'|$

d) otočení se středem S a úhlem $\alpha, \alpha \neq 180°$: XX' je základnou rovnoramenného $\triangle XSX'$, kde $\sphericalangle XSX' = \alpha$

Př.: Je dána přímka p, kružnice k_1, k_2 v opačných polorovinách s hranicí p. Sestrojte úsečku XY tak, aby $X \in k_1, Y \in k_2, \overleftrightarrow{XY} \perp p, X \dot{-} Y \in p$.

Řešení:

Rozbor: $XY \perp p \wedge X \dot{-} Y \in p \Rightarrow X = O_p(Y)$



Hledáme X: 1) $X \in k_1$

2) $X = O_p(Y) \wedge Y \in k_2 \Rightarrow X \in O_p(k_2) = k_2' \Rightarrow X \in k_2'$

$X \in k_1 \cap k_2'$

Postup konstrukce:
1) p, k_1, k_2
2) $k_2', k_2' = O_p(k_2)$
3) $X; X \in k_1 \cap k_2'$
4) $Y; Y = O_p(X)$ (protože je involutorní zobrazení);
obecně: Y - vzor bodu X v O_p
5) XY

Konstrukce:

Diskuse: $k_1 \cap k_2' = \emptyset \Rightarrow$ O řešení

$k_1 \cap k_2' = \{X\} \Rightarrow 1$ řešení

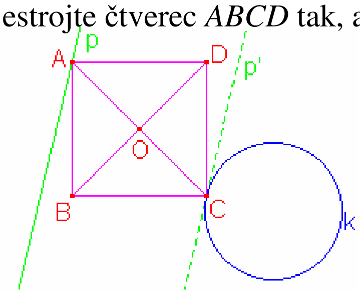
$k_1 \cap k_2' = \{X_1, X_2\} \Rightarrow 2$ řešení

$k_1 \cap k_2' = k_1 \Rightarrow \infty$ řešení

Př.: Je dána přímka p, kružnice k a bod O. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in p, C \in k$ a O byl středem čtverce.

Řešení:

Rozbor: $O = A \dot{-} C \Rightarrow C = S_O(A)$



Hledáme C: 1) $C \in k$

2) $C = S_O(A) \wedge A \in p \Rightarrow C \in S_O(p) = p' \Rightarrow C \in p'$

Postup konstrukce:
1) p, k, O
2) p'
3) $C; C \in p' \cap k$
4) $A; A = S_O(C)$
5) $q; q \perp AC \wedge O \in q$
6) $l; l(O, |OA|)$
7) $B, D; q \cap l = \{B, D\}$
8) $\square ABCD$

Konstrukce:

Diskuse: $k \cap p' = \emptyset \Rightarrow$ O řešení

$k \cap p' = \{C\} \Rightarrow$ 1 řešení

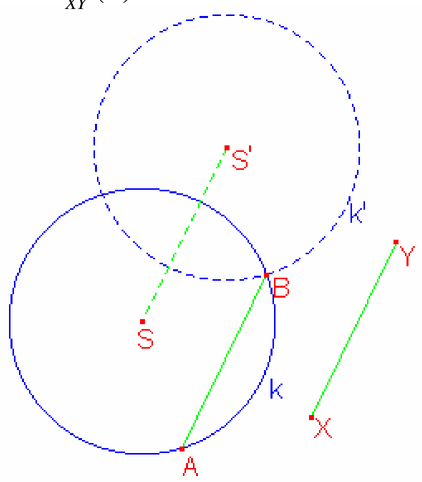
$k \cap p' = \{C_1, C_2\} \Rightarrow$ 2 řešení

Př.: Je dána kružnice k a úsečka XY. Sestrojte tětivu kružnice k shodnou a rovnoběžnou s XY.
Řešení:
Rozbor: $AB \parallel XY \wedge |AB| = |XY| \Rightarrow B = T_{\overline{XY}}(A)$

Hledáme B: 1) $B \in k$

2) $B = T_{\overline{XY}}(A) \wedge A \in k \Rightarrow B \in T_{\overline{XY}}(k) = k' \Rightarrow B \in k'$

Postup konstrukce:
1) k, XY
2) k'
3) $B; B \in k \cap k'$
4) $A; A -$ vzor bodu B v $T_{\overline{XY}}$
5) AB



Konstrukce:

Diskuse: $|XY| > 2r \Rightarrow$ O řešení

$|XY| = 2r \Rightarrow$ 1 řešení

$|XY| < 2r \Rightarrow$ 2 řešení

§5. Podobná zobrazení

Def.: Podobným zobrazením v rovině (podobností v rovině) nazýváme zobrazení Z: $\boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro $\forall X, Y \in \boldsymbol{E_2}: |Z(X)Z(Y)| = k \cdot |XY|$. Číslo k nazýváme koeficientem podobného zobrazení (koeficientem podobnosti).

Pozn.:

a) Každá podobnost je jednoznačně určena číslem k, které lze vyjádřit ze vztahu
$k = \dfrac{|X'Y'|}{|XY|}$.
Pro $k = 1$ dostáváme shodnost ($\Rightarrow$ nevlastní podobnost) (Tedy každé shodné zobrazení je podobné.)
$k \neq 1 \Rightarrow$ vlastní podobnost: $k > 1 \Rightarrow$ zvětšení
$k < 1 \Rightarrow$ zmenšení

b) Podobné zobrazení zachovává dělící poměr bodů.

c) Někdy se pojmy podobné zobrazení a podobnost rozlišují (viz §2 - shodná zobrazení).

V.5.1.: Každé podobné zobrazení je prosté.

[Dk.: sporem: $\exists X, Y \in \boldsymbol{E_2}$: $X \neq Y \wedge Z(X) = Z(Y) \Rightarrow |X'Y'| = 0$
$|X'Y'| = k \cdot |XY| > 0$
- spor]

Pozn.: Dá se ukázat, že každé podobné zobrazení je bijekcí $\boldsymbol{E_2}$ na $\boldsymbol{E_2}$.

Důsledek V.5.1.: Ke každému podobnému zobrazení Z existuje inverzní zobrazení Z^{-1}, které je také podobné.

V.5.2.: Nechť Z je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti k.
Pak Z^{-1} je též podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $k' = \frac{1}{k}$.

[Dk.: Nechť $Z(X) = A, Z(Y) = B \Rightarrow Z^{-1}(A) = X, Z^{-1}(B) = Y$;
$k' \in \mathbb{R}^+ : |Z^{-1}(A)Z^{-1}(B)| = k \cdot |AB|$
$|XY| = k' \cdot |X'Y'| = k' \cdot k \cdot |XY| \Leftrightarrow k' \cdot k = 1 \Rightarrow k' = \frac{1}{k}$]

Pozn.:

a) Dá se ukázat, že v každém podobném zobrazení je obrazem úsečky úsečka, obrazem polopřímky polopřímka, přímky přímka, kružnice kružnice,…

b) Také obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

Def.: Nechť $U_1, U_2 \subseteq \boldsymbol{E_2}$ jsou útvary (tj. libovolné podmnožiny $\boldsymbol{E_2}$). Útvar U_2 nazýváme podobným útvaru U_1, právě když existuje podobné zobrazení Z takové, že $Z(U_1) = U_2$. Zapisujeme $U_1 \sim U_2$.

Pozn.: Platí: $U_1 \sim U_2 \Leftrightarrow U_2 \sim U_1$.

V.5.3.: Nechť Z_1 je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti k_1, Z_2 s koeficientem podobnosti k_2.
Pak složené zobrazení $Z = Z_2 \circ Z_1$ je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $k = k_1.k_2$.

Pozn.: Obdobně jako u shodnosti zavádíme pojmy přímá a nepřímá podobnost.

V.5.4.: Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod, nazývaný středem podobnosti.

§6. Stejnolehlost

Def.: Nechť $S \in \boldsymbol{E_2}$ je pevný bod, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ číslo.
Zobrazení H: $\boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$, ($H_{S,\lambda} : \boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_2}$) nazýváme stejnolehlostí (homotetií) se středem S a koeficientem λ, jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow H(X) = S$ (tedy $X' = S$)
2. $X \neq S \Rightarrow |SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, přičemž a) $\lambda > 0 \Rightarrow X' \in \overrightarrow{SX}$
   b) $\lambda < 0 \Rightarrow S \mu XX'$

Zapisujeme: $X' = H_{S,\lambda}(X)$.

Pozn.:

a) Pro speciální hodnoty koeficientu λ dostáváme již dříve známé druhy zobrazení:
$\lambda = 1$ identita
$\lambda = -1$ středová souměrnost

b) $|\lambda| > 1$ zvětšení
$|\lambda| < 1$ zmenšení

V.6.1.: Stejnolehlost je podobné zobrazení s koeficientem $k = |\lambda|$.

[Dk.: Nechť $H_{S,\lambda} = H; X, Y \in \boldsymbol{E_2}; H(X) = X', H(Y) = Y'$. Ukažme, že $|X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|$.

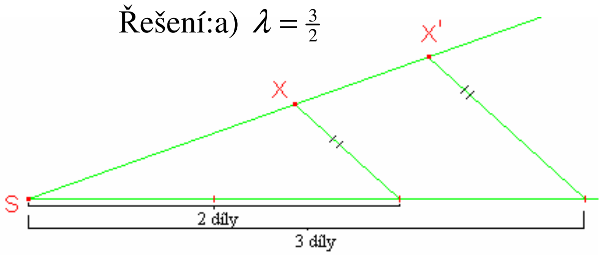
1. $X = S \Rightarrow X' = S \Rightarrow \underline{|X'Y'|} = |SY'| = |\lambda| \cdot |SY| = \underline{|\lambda| \cdot |XY|}$
2. $X \neq S \neq Y \Rightarrow$ a) S, X, Y nekolineární: $\triangle SXY \sim \triangle SX'Y'$ (sus) $\Rightarrow$
   $\Rightarrow |X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|$.
   b) S, X, Y kolineární: podle definice sčítání úseček
   $|X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|$]

Pozn.:

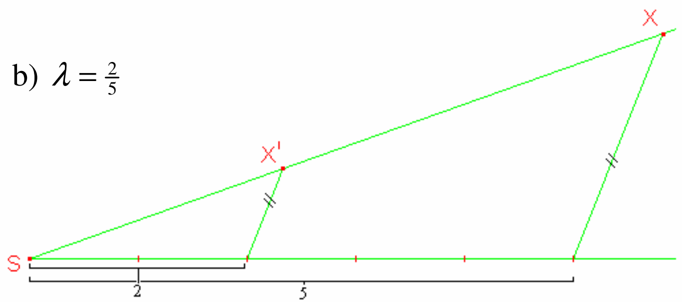
a) Určení: střed stejnolehlosti S a koeficient stejnolehlosti λ. Pro konstrukční účely zpravidla střed stejnolehlosti S a jedna dvojice vzor – obraz ($A - A'$)
b) Samodružné body: jeden – střed stejnolehlosti S
c) Samodružné směry: každý (všechny)
d) Přímá podobnost

Př.: Zobrazte bod X ve stejnolehlosti dané daným bodem S a koeficientem a) $\lambda = \frac{3}{2}$, b) $\lambda = \frac{2}{5}$, c) $\lambda = -\frac{5}{3}$, d) $\lambda = -\frac{2}{3}$.

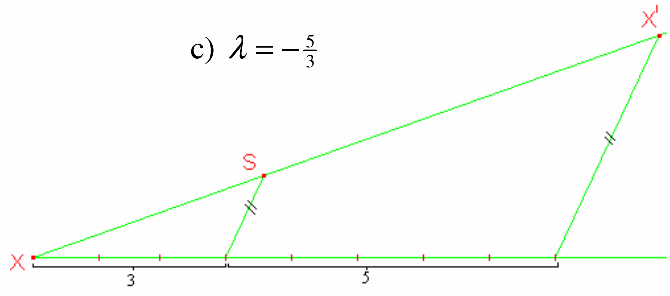
Řešení: a) $\lambda = \frac{3}{2}$



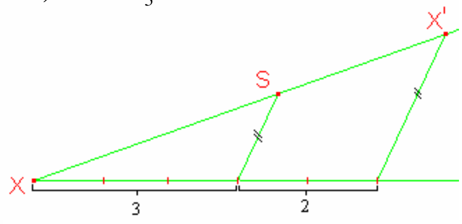
b) $\lambda = \frac{2}{5}$



c) $\lambda = -\frac{5}{3}$



d) $\lambda = -\frac{2}{3}$

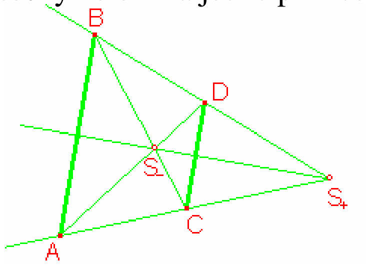


V.6.2.: Stejnolehlost zachovává rovnoběžnost, tzn. obrazem přímky p je přímka p', kde $p' \parallel p$.

[Dk.: obdoba V.3.4. a V.6.1.]

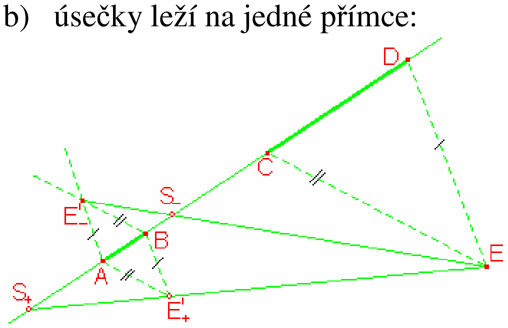
Pozn.: Stejnolehlost rovnoběžných úseček: Každé dvě rovnoběžné úsečky, které nejsou shodné, jsou stejnolehlé dvěma způsoby.

a) úsečky neleží na jedné přímce:



Platí: $A \dot{-} B \in \overleftrightarrow{S_+S_-}, C \dot{-} D \in \overleftrightarrow{S_+S_-}$

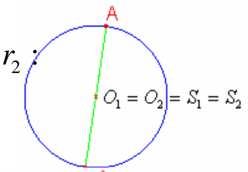
b) úsečky leží na jedné přímce:



Nejdříve musíme sestrojit obrazy E_+', E_-' některého libov. bodu neležícího na této přímce (nejjednodušší doplnit na tři rovnostr. trojúhelníky: $\triangle CDE, \triangle ABE_+', \triangle ABE_-'$).

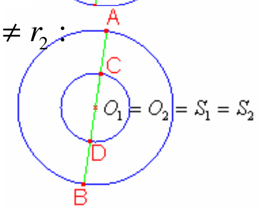
Pozn.: Stejnolehlost kružnic: Každé dvě kružnice, které nejsou shodné, jsou stejnolehlé dvěma způsoby:

a) $O_1 = O_2$: i) $r_1 = r_2$:

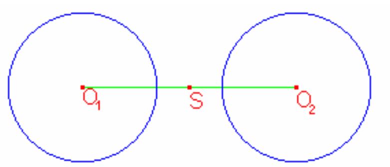


$H_{1S_1,\lambda=1}$	identita	$H_1(A) = A$
$H_{2S_2,\lambda=-1}$	střed souměrnost	$H_2(A) = B$

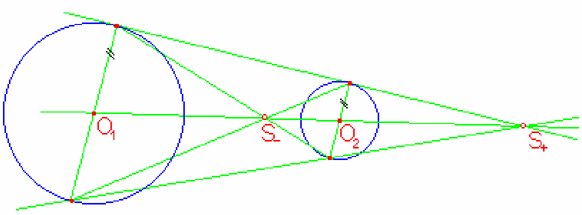
ii) $r_1 \neq r_2$:



b) $O_1 \neq O_2$: i) $r_1 = r_2$:

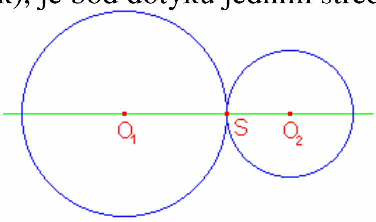


ii) $r_1 \neq r_2$:



Mají-li dvě kružnice společné tečny, pak tyto tečny procházejí středy stejnolehlosti. Tečny vedené bodem S_+ jsou vnější, bodem S_- vnitřní.

Pozn.: Dotýkají-li se dvě kružnice (vnější dotyk), je bod dotyku jedním středem stejnolehlosti, která převádí jednu kružnici v druhou.



V.6.3.:

a) Každé podobné zobrazení v rovině lze vyjádřit jako složení stejnolehlosti a shodnosti (nebo naopak)

b) V rovině existují právě tři různé typy vlastní podobnosti: stejnolehlost, podobnost složená ze stejnolehlosti a rotace (přímá podobnost) a podobnost složená ze stejnolehlosti a osové souměrnosti (nepřímá úměrnost).

[Dk.: viz následující příklad]

Př.: Na obrázku jsou dány dva podobné trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:

a) přímo podobné,
b) nepřímo podobné.

Nalezněte:

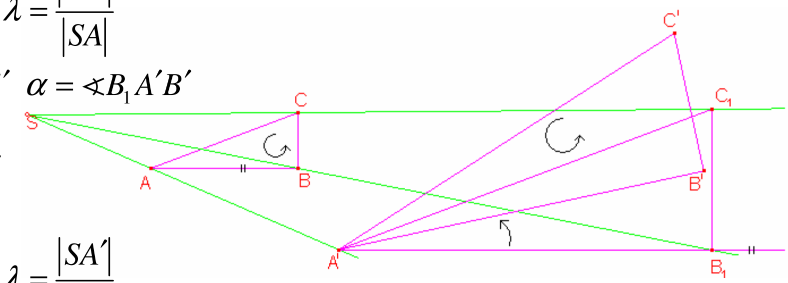
a) stejnolehlost a rotaci,
b) stejnolehlost a osovou souměrnost,

jimiž se první trojúhelník zobrazí na druhý.

Řešení:a) $H_{S,\lambda}(\triangle ABC) = \triangle A'B_1C_1 \quad \lambda = \dfrac{|SA'|}{|SA|}$

$R_{A',\alpha}(\triangle A'B_1C_1) = \triangle A'B'C' \quad \alpha = \sphericalangle B_1A'B'$

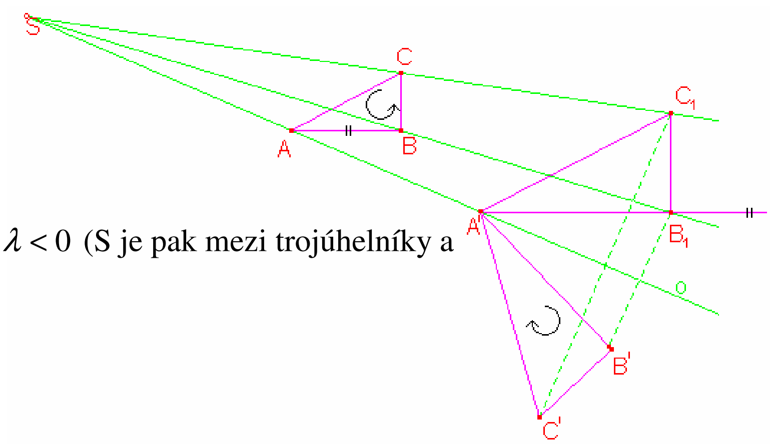
$R \circ H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



b) $H_{S,\lambda}(\triangle ABC) = \triangle A'B_1C_1 \quad \lambda = \dfrac{|SA'|}{|SA|}$

$O_o(\triangle A'B_1C_1) = \triangle A'B'C' \quad o$ – osa úhlu $\sphericalangle B_1A'B'$

$O \circ H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



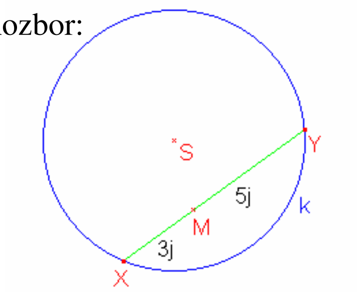
Lze použít i stejnolehlost s $\lambda < 0$ (S je pak mezi trojúhelníky a pomocný $\triangle A'B_1C_1$ je jiný).

§7. Podobná zobrazení v rovině – konstrukční úlohy

Př.: Je dána kružnice k a uvnitř ní bod M. Sestrojte všechny tětivy kružnice k, procházející bodem M, které jsou jím děleny na dvě úsečky v poměru 3:5.

Řešení:

Rozbor:



$M \mu XY \wedge 5 \cdot |XM| = 3 \cdot |MY| \Rightarrow X = H_{M,-\frac{3}{5}}(Y)$

Hledáme X: 1) $X \in k$

2) $X = H_{M,-\frac{3}{5}}(Y) \wedge Y \in k \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in H_{M,-\frac{3}{5}}(k) = k' \Rightarrow X \in k'$

Postup konstrukce: 1. k, M 3. $X; X \in k \cap k'$ 5. XY

2. k' 4. $Y; Y$ – vzor bodu X v $H_{M,-\frac{3}{5}}$ (lépe $Y \in k \cap \overrightarrow{XM}$)

Konstrukce:

Diskuse: dvě řešení (obecně 0–2 řešení: 0 např. pro $M = S \wedge \lambda \neq \pm 1$)

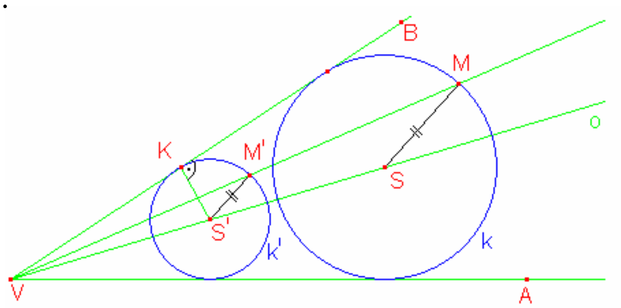
Př.: Je dán konvexní úhel $\sphericalangle AVB$ a vnitřní bod M tohoto úhlu. Sestrojte kružnici, procházející bodem M, která se dotýká obou ramen úhlu.

Řešení:

Rozbor: k' …libov. kružnice, dotýkající se ramen VA, VB,

$M' \in \overrightarrow{VM} \cap k'$

$\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}$ společné tečny kružnice $k, k' \Rightarrow V$ je střed stejnolehlosti, která zobrazuje k' na k.



Hledáme S: 1) $S \in o, o$ – osa úhlu $\sphericalangle AVB$

2) $k = H_{V,\lambda}(k') \wedge M \in k \wedge M' \in k' \Rightarrow M = H_{V,\lambda}(M') \Rightarrow$

$\Rightarrow MS \parallel M'S' \Rightarrow S$ leží na rovnoběžce s $M'S'$ procházející bodem M

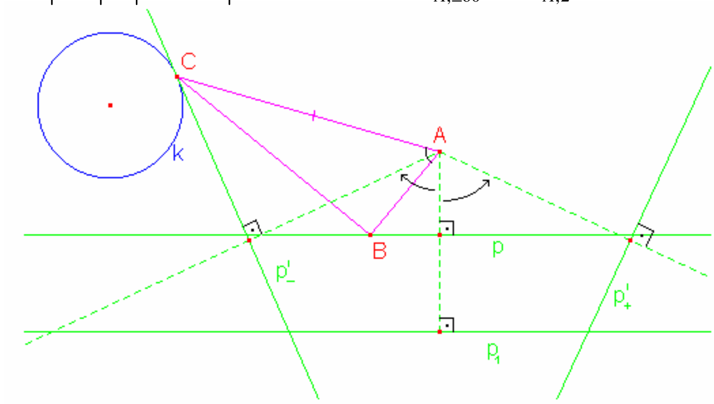
λ...dáno dvojicí $M, M' : \lambda = \dfrac{|VM|}{|VM'|}$

Postup konstrukce:

1. $\sphericalangle AVB, M$
2. $o; o -$ osa $\sphericalangle AVB$
3. $K; K \in \overrightarrow{VB}$ lib.bod
4. $p; p \perp VB \wedge K \in p$
5. $S'; S' \in p \cap o$
6. $k'; k'(S'; |S'K|)$
7. $\overrightarrow{VM}$
8. $M'; M' \in VM \cap k'$
9. $q; q \parallel M'S' \wedge M \in q$
10. $S; S \in q \cap o$
11. $k; k(S, |SM|)$

Konstrukce:
Diskuse: dvě řešení

Př.: Je dána přímka p, kružnice k a bod A podle obrázku. Sestrojte $\triangle ABC$ s úhlem $|\sphericalangle BAC| = 60°$ tak, aby $B \in p, C \in k$ a $|AC| = 2 \cdot |AB|$.
Řešení:
Rozbor: $|AC| = 2 \cdot |AB| \wedge |\sphericalangle BAC| = 60° \Rightarrow C = R_{A,\pm 60°} \circ H_{A,2}(B)$



Hledáme C: 1) $C \in k$
2) $C = R \circ H(B) \wedge B \in p \Rightarrow C \in R \circ H(p) = p' \Rightarrow C \in p'$

Postup konstrukce:

1. p, k, A
2. $p_1; p_1 = H_{A,2}(p)$
3. $p'_+; p'_+ = R_{A,+60°}(p_1)$
   $p'_-; p'_- = R_{A,-60°}(p_1)$
4. $C; C \in k \cap (p'_+ \cup p'_-)$
5. $B; B -$ vzor bodu C v $R \circ H$
6. $\triangle ABC$

Konstrukce:
Diskuse: podle zadání dvě řešení.
obecně 0–4 řešení podle počtu průsečíků $(p'_+ \cup p'_-) \cap k$