37. Statistika

Př. 1

Aritmetický průměr pěti Michalových známek z angličtiny je 3,2. Kolik jedniček by měl Michal ještě dostat, aby pak jeho průměrná známka byla lepší než 2,5?

Př. 2

Průměrná měsíční mzda pracovníků (zaokrouhlená na stokoruny) firmy ORKÁN v různých obdobích loňského roku je zachycena v tabulce:

[illegible]				
[illegible]	16 600	17 000	17 100	17 300

Vypočítej průměrné mzdy ve firmě ve 2., 3. a 4. čtvrtletí loňského roku jednotlivě.

3

Průměrná výška původně nominovaných členů školního basketbalového mužstva byla 183 cm. Poté co byl do družstva zařazen nový hráč Ondřej, který měří 199 cm, vzrostla průměrná výška v družstvu o 2 cm. Kolik členů má školní družstvo nyní?

4

Aritmetický průměr sedmi různých přirozených čísel je 9, jejich medián je 10. Jaké největší hodnoty může nabýt největší z daných čísel?

Př. 5

Počet bodů, které získali žáci 4. ročníku gymnázia ve městě *N* při srovnávací práci z matematiky, je uveden v následující tabulce:

Počet bodů	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Počet žáků	5	11	8	5	2	6	7	3	4	3	6

Vypočítej aritmetický průměr, modus a medián znaku „bodový zisk při srovnávací práci z matematiky".

x ... bodový zisk

Př. 6

Ve fyzikálním cvičení změřil Karel desetkrát výšku válečku a výsledky zaznamenal do tabulky.

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výška (mm)	105,0	105,1	105,0	104,9	105,0	105,1	104,8	104,9	105,0	104,9

Vypočítej aritmetický průměr, medián, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient naměřené výšky.

Výška (cm)	104,8	104,9	105,0	105,1
Četnost	1	3	4	2

37. Statistika

Př. 1

Aritmetický průměr pěti Michalových známek z angličtiny je 3,2. Kolik jedniček by měl Michal ještě dostat, aby pak jeho průměrná známka byla lepší než 2,5?

x … počet jedniček

$$\frac{5 \cdot 3{,}2 + x \cdot 1}{5 + x} < 2{,}5 \quad \Big| \cdot (5 + x)$$

$$16 + x < 2{,}5 \cdot (5 + x)$$

$$16 + x < 12{,}5 + 2{,}5x$$

$$3{,}5 < 1{,}5x$$

$$x > \frac{3{,}5}{1{,}5} \doteq 2{,}33$$

$$x \geq 3$$

Michal by měl dostat aspoň 3 jedničky.

Určíme aritmetický průměr $(5 + x)$ známek a porovnáme ho s číslem 2,5.

Statistika
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 206)

Aritmetický průměr
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 206)

Př. 2

Průměrná měsíční mzda pracovníků (zaokrouhlená na stokoruny) firmy ORKÁN v různých obdobích loňského roku je zachycena v tabulce:

Období	1. čtvrtletí	2. čtvrtletí	3. čtvrtletí	4. čtvrtletí
[illegible]	16 600	17 000	17 100	17 300

Vypočítej průměrné mzdy ve firmě ve 2., 3. a 4. čtvrtletí loňského roku jednotlivě.

x Kč … průměrná měsíční mzda ve 2. čtvrtletí

$$\frac{16\,600 + x}{2} = 17\,000 \Rightarrow 16\,600 + x = 34\,000 \Rightarrow x = 17\,400$$

y Kč … průměrná měsíční mzda ve 3. čtvrtletí

$$\frac{2 \cdot 17\,000 + y}{3} = 17\,100 \Rightarrow 34\,000 + y = 51\,300 \Rightarrow y = 17\,300$$

z Kč … průměrná měsíční mzda ve 4. čtvrtletí

$$\frac{3 \cdot 17\,100 + z}{4} = 17\,300 \Rightarrow 51\,300 + z = 69\,200 \Rightarrow z = 17\,900$$

Průměrná měsíční mzda byla ve 2. čtvrtletí 17 400,– Kč, ve 3. čtvrtletí 17 100,– Kč a ve 4. čtvrtletí 17 900,– Kč.

Průměrné mzdy spočítáme postupně pro jednotlivá čtvrtletí.

Př. 3

Průměrná výška původně nominovaných členů školního basketbalového mužstva byla 183 cm. Poté co byl do družstva zařazen nový hráč Ondřej, který měří 199 cm, vzrostla průměrná výška v družstvu o 2 cm. Kolik členů má školní družstvo nyní?

n … původní počet členů družstva

$$\frac{n \cdot 183 + 199}{n + 1} = 183 + 2 \quad \Big| \cdot (n + 1)$$

$$183n + 199 = 185n + 185$$

$$14 = 2n$$

$$n = 7$$

Vyjádříme aritmetický průměr výšek členů družstva doplněného o Ondřeje.

Př. 4

Aritmetický průměr sedmi různých přirozených čísel je 9, jejich medián je 10. Jaké největší hodnoty může nabýt největší z daných čísel?

$a_1 < a_2 < \ldots < a_7$ … daná čísla

a_7 je co největší $\Leftrightarrow a_4 = 10$ a čísla a_1, a_2, a_3, a_5, a_6 co nejmenší $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_5 = 11, a_6 = 12$

$$\frac{1 + 2 + 3 + 10 + 11 + 12 + a_7}{7} = 9 \quad \Big| \cdot 7$$

$$39 + a_7 = 63$$

$$a_7 = 24$$

Největší z daných čísel může být nejvýše 24.

Medián je „prostřední" z uspořádaných hodnot znaku.

Mediánem je číslo a_4.

Ze známého aritmetického průměru určíme a_7.

Medián
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 207)

Př. 5

Počet bodů, které získali žáci 4. ročníku gymnázia ve městě N při srovnávací práci z matematiky, je uveden v následující tabulce:

Počet bodů	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Počet žáků	5	11	8	5	2	6	7	3	4	3	6

Vypočítej aritmetický průměr, modus a medián znaku „bodový zisk při srovnávací práci z matematiky".

x … bodový zisk

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 10 + 11 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0}{5 + 11 + 8 + 5 + 2 + 6 + 7 + 3 + 4 + 3 + 6} =$$

$$= \frac{338}{60} \doteq 5{,}63$$

$Mod(x) = 9$

Celkem 60 žáků; $5 + 11 + 8 + 5 = 29 < 30$

$$5 + 11 + 8 + 5 + 2 = 31 > 30$$

$$Med(x) = \frac{x_{30} + x_{31}}{2}; \quad x_{30} = x_{31} = 6 \Rightarrow Med(x) = 6$$

Pro aritmetický průměr $\bar{x}$ platí $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{r} n_i}$, kde n_i je četnost hodnoty x_i.

Modus je hodnota znaku s největší četností.

Pro určení mediánu určíme „prostřední" z hodnot znaku uspořádaných podle velikosti.

Modus
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 207)

Př. 6

Ve fyzikálním cvičení změřil Karel desetkrát výšku válečku a výsledky zaznamenal do tabulky.

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výška (mm)	105,0	105,1	105,0	104,9	105,0	105,1	104,8	104,9	105,0	104,9

Vypočítej aritmetický průměr, medián, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient naměřené výšky.

Výška (cm)	104,8	104,9	105,0	105,1
Četnost	1	3	4	2

Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky četností (kvůli rychlejšímu výpočtu).

$\bar{v}$ ... průměr

$$\bar{v}=\frac{1\cdot 104{,}8+3\cdot 104{,}9+4\cdot 105{,}0+2\cdot 105{,}1}{10}\text{ mm}=$$

$$=\frac{1\,049{,}7}{10}\text{ mm}=104{,}97\text{ mm}$$

Medián je aritmetický průměr „prostředních" hodnot a_5 a a_6.

$$v_5=105{,}0\text{ mm},\ v_6=105{,}0\text{ mm}\Rightarrow Med\,v=\frac{v_5+v_6}{2}=105{,}0\text{ mm}$$

Modus je hodnota znaku s největší četností.

$Mod\,v=105$ mm

$$s_v^2=\frac{1}{10}\cdot[(104{,}8-104{,}97)^2\cdot 1+(104{,}9-104{,}97)^2\cdot 3+(105{,}0-104{,}97)^2\cdot 4+$$

$$+(105{,}1-104{,}97)^2\cdot 2]\text{ mm}^2=\frac{1}{10}\cdot[(-0{,}17)^2\cdot 1+(-0{,}07)^2\cdot 3+$$

$$+(0{,}03)^2\cdot 4+(0{,}13)^2\cdot 2]\text{ mm}^2=\frac{1}{10}\cdot(0{,}028\,9+0{,}004\,9\cdot 3+$$

$$+0{,}000\,9\cdot 4+0{,}016\,9\cdot 2)\text{ mm}^2=\frac{1}{10}\cdot 0{,}081\text{ mm}^2=0{,}008\,1\text{ mm}^2$$

Vypočteme nejprve rozptyl s_v^2 podle vzorce $s_v^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n'}(v_i-\bar{v})^2\cdot n_i$

$$s_v=\sqrt{s_v^2}\doteq 0{,}09\text{ mm}$$

Směrodatná odchylka s_v je druhá odmocnina z rozptylu: $s_v=\sqrt{s_v^2}$

$$v_v=\frac{s_v}{\bar{v}}\cdot 100\,\%=\frac{0{,}09}{104{,}97}\cdot 100\,\%=0{,}085\,7\,\%\doteq 0{,}09\,\%$$

Variační koeficient v_v (někdy relativní odchylka) je podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru. Vyjadřuje se v procentech: $v_v=\frac{s_v}{\bar{v}}\cdot 100\,\%$

Směrodatná odchylka
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 208)

Variační koeficient
(Odmaturuj z matematiky 1, kap. 37, str. 208)

38. Základy diferenciálního počtu

Př. 1

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x^2+x+1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3+4x^2-5x-1}{x^4-5x^3-x^2+2x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x^2+x+1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1+1=2-3+1+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+5}=\frac{(-1)^2-3\cdot(-1)-2}{(-1)^2+2\cdot(-1)+5}=\frac{1+3-2}{1-2+5}=\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3+4x^2-5x-1}{x^4-5x^3-x^2+2x+1}=\frac{3+4-5-1}{1-5-1+2+1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

Protože je funkce $f\colon y=2x^3-3x^2+x+1$ v bo spojitá, je limita v tomto bod funkční hodnotě. Do výrazu $2x^3-3x^2+x+1$ dosadíme $x=1$. Podobně postupujeme i v úlohách b) a c).

Limita funkce v bodě
(Odmaturuj z matematiky 2, kap. 1, str. 7)

Př. 2

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-x-6}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^3+5x^2+6x}$

a) ***1. způsob řešení***

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{-2-3}=-\frac{1}{5}$$

2. způsob řešení

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)'}{(x^2-x-6)'}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{2\cdot(-2)-1}=-\frac{1}{5}$$

Protože po dosazení čísla – do výrazu $\frac{x+2}{x^2-x-6}$ vznikl neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, čitatel i jmenovatel musí být dělitel kořenovým činitelem $(x+2)$. Tímto výrazem zlomek zkrát

b) ***1. způsob řešení***

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{2+4}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

2. způsob řešení

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x+2}{3x^2}=\frac{4+2}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}$$

Neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ můžeme vypočítat L'Hospitalovým pravidlem.

L'Hospitalovo pravidl
(Odmaturuj z matematiky 2, kap. 1, str. 16)

c) ***1. způsob řešení***

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^3+5x^2+6x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-4)}{x(x^2+5x+6)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-4)}{x(x+3)(x+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{-3-4}{(-3)\cdot(-1)}=-\frac{7}{3}$$

2. způsob řešení

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^3+5x^2+6x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{2x-1}{3x^2+10x+6}=\frac{-6-1}{27-30+6}=-\frac{7}{3}$$