

§1. . . .

Př: $p = \{[1+t, 2-t]; t \in \mathbb{R}\}$

- Způsob vyloučení parametru:

$$x = 1 + t$$

$$y = 2 - t \quad x + y - 3 = 0$$

- Přes normálový vektor:

$$\text{směrový vektor: } \vec{u} = (1, -1)$$

$$\text{normálový vektor: } \vec{n} = (1, 1)$$

$$ax + bx + c = 0$$

$$x + y + c = 0$$

Dosadím $A[1, 2] \in p: 1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$.

Př: Napište parametrické rovnice $p: x - 2y + 1 = 0$.

- Substitucí: $x = 2t - 1$

$$y = t$$

$$p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}.$$

- Přes normálový vektor:

$$\text{normálový vektor: } \vec{u} = (-2, 1). \text{ směrný vektor: } \vec{u} = (2, 1). [2t + a, t] \in p \Rightarrow$$

$$2t + a - 2t + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}.$$

DÚ: 145/17,18 $A = [0, 5]$

$$B = [6, 7]$$

$$C = [1, 4]$$

$$A_0 = [\frac{7}{2}; \frac{11}{2}]$$

$$B_0 = [\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$$

$$C_0 = [\frac{6}{2}; \frac{12}{2}]$$

$$x - 7y + 35 = 0$$

$$5x - 11y + 47$$

$$x - y + 3 = 0$$

$$6x - y - \frac{3}{2} = 0$$

. . .

Př: Dáno $A = [0, 2], B = [3; 0]$. Napište rovnice přímky: Úsekový:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Obecný

$$2x + \frac{3}{y} - 6 = 0$$

Směrníkový

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Parametrický:

$$p = \{[t, -\frac{2}{3}t + 2]; t \in \mathbb{R}\}$$

Dů: 150/21,22,23,24

§2. ...

§3. ...

§4. ...

§5. **Vzájemná poloha dvou rovin**

V.5.1.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi Necht' $\rho : ax + by + cz + d = 0, \sigma : ex + fy + gz + h = 0$ jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, b, c, d) = k \cdot (e, f, g, h)$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, b, c) = k \cdot (e, f, g) \wedge d \neq k \cdot h$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} : (a, b, c) \neq k \cdot (e, f, g)$.

Př: Určete vzájemnou polohu dvou rovin:

$$\rho : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$$

$$\sigma : x - y - z + 1 = 0$$

$$\vec{n}_\rho = (2; 3; 4)$$

$$\vec{n}_\sigma = (1; -1; -1)$$

vektory jsou lin. nezávislé: $\rho \nparallel \sigma$

Určení průsečnice rovin ρ, σ (hledáme parametrickou rovnici přímky v E_3):

volíme $z = t; t \in \mathbb{R}$:

$$2x + 3y + 4t + 5 = 0$$

$$x - y - t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5x + t + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{5} - \frac{t}{5}$$

$$y = x - t + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t$$

$$\text{Průsečnice: } \left\{ \left[-\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t; -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t; t \right] \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

V.5.2.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi:

Necht' $\rho(A, \vec{u}, \vec{v}), \sigma(B, \vec{k}, \vec{l})$ jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 2/$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 3$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 3.$

Př: Určete vzájemnou polohu rovin ρ a $\sigma : \rho = \{[1+t_1+2t_2; 2t_1+3t_2; -2-2t_1+t_2]; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(A = [1; 0; -2]; \vec{u} = (1; 2; -2); \vec{v} = (2; 3; 1)) \\ \sigma = \{[r_1; -3 + r_2; 1 + 4r_1 - r_2]; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow \sigma(B = [0; -3; 1]; \vec{k} = (1; 0; 4); \vec{l} = (0; 1; -1)) \\ \Rightarrow \vec{AB} = (-1; -3; 3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3 \Rightarrow$ roviny jsou různoběžné.

Rovnice průsečnice ρ, σ : – porovnání souřadnic ρ a σ :

$$1 + t_1 + 2t_2 = r_1$$

$$2t_1 + 3t_2 = -3 + r_2$$

$$-2 - 2t_1 + t_2 = 1 + 4r_1 - r_2$$

soustava 3 rovnic o 4 neznámých, po vyjádření z 2. a 3. rovnice $t = r_1 = t$, odsud a z

1. rovnice $t_1 = -1 - t, r_2 = t + 1$.

Dosazením do rovnice roviny ρ :

$$p = \{[t; -2 + t; 3t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: 182/19,20

Rozhodněte, jakou mají roviny vzájemnou polohu a určete průsečnice:

$$\begin{aligned} \rho &: 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ \sigma &: 4x + y - 5z + 3 = 0 \\ \tau &: x + 2y - z + 1 = 0 \\ \varphi &: -4x + 6y - 2z + 5 = 0 \\ \alpha &: 3x - y - x + 5 = 0 \\ \beta &: x + y + z - 7 = 0 \end{aligned}$$

• ρ a σ :

Nerovnoběžné:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -14 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array} \right)$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-5 + 14a}{14}; \frac{-11 + 7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

• ρ a τ :

Nerovnoběžné:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{5 + 1a}{7}; \frac{-6 + 3a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\sigma}$ a τ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 7 & 0 & -9 & | & -5 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & -7 & -1 & | & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -7 & -1 & | & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-5+9a}{7}; \frac{-1-1a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\rho}$ a φ :

$$(2, -3, 1) = -\frac{1}{2}(-4, 3, -2) \wedge -4 \cdot \frac{-1}{2} = -2 \neq 5$$

Rovnoběžné.

- $\underline{\sigma}$ a φ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 0 & -7 & 7 & | & 8 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & -7 & 7 & | & 8 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-13+28a}{28}; \frac{-8+7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\tau}$ a φ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 0 & -14 & 6 & | & 9 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -14 & 6 & | & 9 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{2+1a}{7}; \frac{-9+6a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\rho}$ a α :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 7 & 0 & -4 & | & -19 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 & | & -38 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-19+4a}{7}; \frac{-22+5a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\sigma}$ a α :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 21 & 0 & -18 & | & -24 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$P = \left\{ \left[\frac{-8+6a}{7}; \frac{11+11a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- τ a α :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -7 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 7 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & | & -11 \\ 0 & 7 & -2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-11+3a}{7}; \frac{2+2a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- φ a α :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -14 & 10 & | & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 42 & 0 & -24 & | & -105 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 & | & -35 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-35+8a}{14}; \frac{-35+10a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- ρ a β :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 2 & -3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -5 & -1 & | & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & | & 25 \\ 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{25-4a}{5}; \frac{10-1a}{5}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- σ a β :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -3 & -9 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 3 & 9 & | & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & | & -10 \\ 0 & 3 & 9 & | & 31 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{-10+6a}{3}; \frac{31-9a}{3}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- τ a β :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 15 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\{[15-3a; -8+2a; a] : a \in \mathbb{R}\}$$

- φ a β :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -10 & -2 & | & -23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 10 & 2 & | & 23 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{47-8a}{10}; \frac{23-2a}{10}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

• α a β :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -4 & -4 & | & -26 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 2 & 2 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 13 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[\frac{1}{2}; \frac{13-2a}{2}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Př: 183/21

$$\rho(A = [1, 2, 0], \vec{r} = (2, -1, 1), \vec{s} = (-1, 1, -1))$$

$$\sigma(B = [2, 3, -1], \vec{t} = (-2, 2, -2), \vec{u} = (2, -2, -2))$$

$$\tau(C = [4, 3, 2], \vec{m} = (-1, 1, 1), \vec{n} = (1, -2, -3))$$

Což mohu ekvivalentně převést na:

$$\rho(A = [1, 2, 0], \vec{r} = (2, -1, 1), \vec{s} = (1, -1, 1))$$

$$\sigma(B = [2, 3, -1], \vec{t} = (1, -1, 1), \vec{u} = (1, -1, -1))$$

$$\tau(C = [4, 3, 2], \vec{m} = (1, -1, -1), \vec{n} = (1, -2, -3))$$

$$\vec{BA} = (-1, -1, 1)$$

$$\vec{AC} = (3, 1, 2)$$

$$\vec{BC} = (2, 0, 3)$$

• ρ a ϕ :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{t}, \vec{u} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

Průsečnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = 0 \wedge t \in \mathbb{R} \Rightarrow p = \{[2-2t; 3+2t; -1-2t] | t \in \mathbb{R}\}$$

• ρ a τ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

• φ a τ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{t}, \vec{u}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi:

Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka, $\rho(B, \vec{v}, \vec{w})$ rovina. Pak platí:

- $p \subset \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 2$
- $p \parallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 3$
- $p \nparallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 3$

Pr:

Rozhodněte vzájemnou polohu přímky a roviny: $p = \{[3+t; 1+2t; 2-t] | t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$p: A = [3; 1; 2], \vec{u} = (1; 2; -1)$

$\rho = \{[1-3r+s; 2r-s; 1+4r-s] | r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho: B = [1; 0; 1], \vec{v} = (-3; 2; 4), \vec{w} = (1; -1; -1)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-2; -1; -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3 \Rightarrow$ přímka je různoběžná.

Určení průsečíku:

porovnáme souřadnice p a ρ : $3+t = 1-3r+s$

$1+2t = 2r-s$

$2-t = 1+4r-s$

$\Rightarrow 3$ rovnice o třech neznámých – vyřešením dostaneme $t = -2$. Dosadíme: $P = [1; -3; 4]$

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí:

Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka, $\rho : ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0, 0, 0]$ rovina. Nechť $\vec{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

- $p \subset \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \in \rho$
- $p \parallel \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \notin \rho$
- $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

Př: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ :

- $p = [1 - t, 1 + 3t, -2] | t \in \mathbb{R}, \rho : 3x + y + 5z + 7 = 0$
 $\Rightarrow \vec{u} = (-1; 3; 0), \vec{n} = (3; 1; 5).$
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow$ přímka je s rovinou rovnoběžná. Rozhodneme, jestli p leží v rovině ρ , tzn. jestli $A \in \rho$:
 $A[1; 1; -2]$
 $3 + 1 - 10 + 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow 0$ rovnoběžné různé.
- $p = [3 + t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}, \rho : x - 2y + z - 3 = 0$
 $\vec{u} = (1; -1; 2)$
 $\vec{n} = (1; -2; 1)$
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow p \nparallel \rho$

Určení průsečíku:

Dosadíme rovnici přímky do rovnice roviny ρ : $3 + t - 2 + 2t + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}$.

$$p = \left[\frac{17}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right]$$

Př: 188/26:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1; 0; 2)$$

$$\vec{n} = (2; 1; 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 + 0 + 2 = 4 \Rightarrow \text{nejsou rovnoběžné.}$$

$$2 \cdot t + 0 + 2t + 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cap \rho = P + \overrightarrow{PQ} \cdot (-2) = [-2; 0; -4]$$

Př: 188/27:

Určím rovnoběžnou rovinu procházející A :

$$2 \cdot 3 - 2 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Rovnicí tedy je $\varphi : 2x - y - z - 3 = 0$.

Dosadím: $6 - y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{y = 5}$.

Př: 189/28:

- $\vec{t} = (-1, 1, -3)$
 $\vec{n} = (-1; 2; 1)$
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné

$A = [1, 0, 2]$. Dosadím: $-1 + 0 + 2 - 1 = 0$. Průnikem je p .

- $\vec{t} = (-1, 3, 1)$
 $\vec{n} = (1, 1, -1)$
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné.

Průsečík: $2 - t + 3t - t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow q \cap \sigma = [-1, 1, -4]$.

- $\vec{t} = (3; -4; 2)$
 $\vec{n} = (2; 1; -1)$
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné.

$A[2; 1; 0]$ dosadím: $4 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow m \cap \tau = \emptyset$.

Př: 189/29: Průsečnice $p: \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 1 & 3 & -2 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 3 & -4 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & -13 & 7 & | & 31 \end{pmatrix} \sim$
 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 & | & -11 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix}$

$$p = \left\{ \left[\frac{-11+5t}{13}; \frac{-31+7t}{13}; a \right] : t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow p \left(A \left[-\frac{11}{13}; -\frac{31}{13}; 0 \right]; \vec{u} = (5; 7; 13) \right)$$

$$\rho(B[5; 3; 1], \vec{v} = (-1; 1; 0), \vec{w} = (2, -1, 5))$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejsou rovnoběžné.

Převodu ρ na obecnou rovnici roviny: $x + y = 8 + s \Rightarrow 5x + 5y - z = 40 - 1 = 39$

Spočítám průsečík všech rovnic:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 5 & 5 & -1 & | & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 5 & 5 & -1 & | & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & -13 & 7 & | & 31 \\ 0 & -10 & 9 & | & 79 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & | & 157 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 470 & 0 & 0 & | & 2360 \\ 0 & 470 & 0 & | & 2740 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 47 & 0 & 0 & | & 236 \\ 0 & 47 & 0 & | & 274 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix}$$

$$P = \left\{ \left[\frac{236}{47}; \frac{274}{47}; \frac{717}{47} \right] \right\}$$

Př: Převodu γ na obecnou rovnici: $x + z = -6 + r \Rightarrow x - y + z = -5$

$$\text{Průsečík: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ -1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \\ 3 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$P = \{[2; 0; -7]\}$$

Převodu δ na obecnou: $x + 3y = 12 + 7t \Rightarrow x + 3y + 7z = 19$

$$1 + 0 - 49 + a = 0 \Rightarrow a = 48$$

$$\epsilon : x + 3y + 7z + 48 = 0$$

Př: 32 Jelikož se roviny protínají v právě jednom bodě, musí průsečnice protínat γ v jednom bodě.

Spočítám dimenzi vektorového prostoru tvořeného normálovými vektory k rovinám:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelikož dimenze je 3, roviny se protínají v právě jednom bodě. Jelikož ϵ má stejný normálový vektor jako δ , výsledek se nezmění.

§7. Příčka mimoběžek

Def: Necht p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Přímka r , která je různoběžná s oběma přímkami p, q , se nazývá *příčka mimoběžek* p, q .

Pozn: Necht $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v})$ jsou přímky. Pak pro příčku mimoběžek $r(Q, \vec{w})$ platí: $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle$.

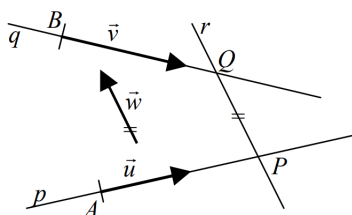
A) Nalezení příčky r mimoběžek p, q , která je rovnoběžná s daným vektorem

Pozn: Dáno: $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v}); \vec{w} \neq \vec{0}$

Rozbor:

$$1) \vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 0 \text{ řešení}$$

$$2) \vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 1 \text{ řešení}$$



$$\left. \begin{aligned} P &= A + k \cdot \vec{u} \\ Q &= B + l \cdot \vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{PQ} = Q - P = B + l \vec{v} - A - k \vec{u}$$

$$\vec{PQ} = x \vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k \vec{u} = x \vec{w}$$

$$\vec{AB} = x \vec{w} + k \vec{u} - l \vec{v}$$

Př: Jsou dány mymoněžky $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$, a vektor \vec{w} :

$A[1; -2; 5]; B[-1; 1; -5]; \vec{u}(1; 3; -1), \vec{v}(1; 1; 2), \vec{w}(1; 1; 4)$

Najděte příčku p, q , která je rovnoběžná s \vec{w} .

$\vec{AB} = (-2; 3; -10) \Rightarrow (-2; 3; -10) = x(1; 1; 4) - l(1; 1; 2) + k(1; 3; -1)$. Hledáme body

P, Q , pro které platí: $P = A + k \cdot \vec{u}; Q = B + l \cdot \vec{v}$ a zároveň $\vec{PQ} = x \cdot \vec{w}$.

$\Rightarrow x \cdot \vec{w} = Q - P = B - A + l\vec{v} - k\vec{u}$

$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \vec{AB} = (-2; 3; -10)$.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$k = \frac{5}{2} \Rightarrow P = \left[\frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \frac{5}{2} \right] \Rightarrow \vec{PQ} = \left\{ \left[\frac{7}{2} + t; \frac{11}{2} + t; \frac{5}{2} + 4t \right] \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Př:

Cvičení 1:

Jsou dány mymoněžky $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$, a vektor \vec{w} :

$A[10; -7; 0]; B[-3; 5; 0]; \vec{u}(5; 4; 1), \vec{v}(2; 1; 1), \vec{w}(8; 7; 1)$

Najděte příčku p, q , která je rovnoběžná s \vec{w} .

$$\begin{aligned} k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \vec{AB} = (-13; 12; 0). \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 8 & -13 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 8 & -13 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

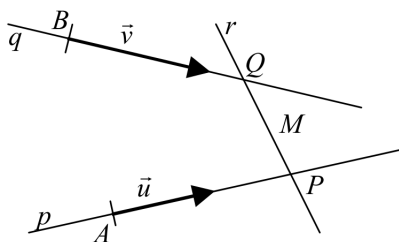
Soustava nemá řešení \Rightarrow hledaná příčka neexistuje.

B) Nalezení příčky r mimoběžek p, q , která prochází bodem M

Pozn: Dáno: $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v})$, bod M .

Rozbor:

- 1) $M \in p \cap q \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení
- 2) $M \notin p \cap q \Rightarrow$
 - (a) jedna přímka je rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem $M \Rightarrow 0$ řešení.
 - (b) ani jedna přímka není rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem $M \Rightarrow 1$ řešení.



$$\begin{aligned}
 P &= A + k \vec{u} \\
 Q &= B + l \vec{v} \\
 \overrightarrow{MP} &= x \cdot \overrightarrow{MQ} \\
 A + k \vec{u} &= x(\overrightarrow{MB} + l \vec{v}) \\
 -k \vec{u} + m \vec{v} + x \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}, \text{ kde } m = x \cdot l \\
 &\Rightarrow 3 \text{ rovnice o 3 neznámých } k, m, x.
 \end{aligned}$$

Př: Jsou dány mimoběžky $p(A, u), q(B, v)$, bod M . Nalezněte příčku mimoběžek p, q , procházející bodem M .
 $A[1; 5; 2]; B[0; -1; 1]; M[0; 1; -5]; \vec{u}(1; 2; 1), \vec{v}(3; 1; 0)$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} &= (1; 4; 7) \\
 \overrightarrow{MB} &= (0; -2; 6) \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \\
 P &= \left\{ \left[-3; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$k = -3; m = -\frac{2}{3}; x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 P &= [1; 5; 2] - 3(1; 2; 1) = [-2; -1; -1] \\
 Q &= [0; -1; 1] - 1(3; 1; 0) = [-3; -2; 1] \\
 \overrightarrow{PQ} &= \{[t; 1+t; -5-2t] | t \in \mathbb{R}\}.
 \end{aligned}$$

Př: Jsou dány mimoběžky $p(A, u), q(B, v)$, bod M . Nalezněte příčku mimoběžek p, q , procházející bodem M .
 $A[3; 1; 2]; B[-2; 1; 0]; M[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0]; \vec{u}(1; 2; -1), \vec{v}(3; -1; 1)$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} &= (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}; 2) \\
 \overrightarrow{MB} &= (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0) \\
 P &= A + k \vec{u} \\
 Q &= B + l \vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} &= x \cdot \overrightarrow{MQ} \\
A + k\vec{u} &= x(\overrightarrow{MB} + l\vec{v}) \\
-k\vec{u} + m\vec{v} + x\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}, \text{ kde } m = x \cdot l \\
\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & -3 & 7 \\ -4 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \\
k &= -\frac{3}{5}; m = \frac{7}{5}; x = \frac{13}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= [3 - \frac{3}{5}; 1 - \frac{6}{5}; 2 + \frac{3}{5}] = [\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{13}{5}] \\
Q &= [-2 + \frac{21}{5}; 1 - \frac{7}{5}; 0 + \frac{7}{5}] = [\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{7}{5}] \\
\overrightarrow{QP} &= [\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{6}{5}]
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left\{ \left[\frac{12}{5} + k; -\frac{1}{5} + k; \frac{13}{5} + 6k \right] \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

C) Nalezení osy o mimoběžek p, q

Def: Necht p, q jsou mimoběžné přímky. Pak příčka mimoběžek o , která je kolmá k přímkám p i q , se nazývá osa mimoběžek p, q .

Př: nalezněte osu mimoběžek p, q .

$$p = \{[8 + t; 5 + 2t; 8 - t] \mid t \in \mathbb{R}\} \quad q = \{[-4 - 7r; 3 + 2r; 4 + 3r] \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Hledáme osu $o(P, \vec{w})$; $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, máme dáno:

$$A[8; 5; 8], \vec{u}(1; 2; -1)$$

$$B[-4; 3; 4], \vec{v}(-7; 2; 3)$$

$$p \perp o : \vec{u} \cdot \vec{w} = w_1 + 2w_2 - w_3 = 0 \Rightarrow w_2 = \frac{w_1}{2}$$

$$q \perp o : \vec{v} \cdot \vec{w} = -7w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = 2w_1$$

$$w_1 - \text{libovolný (jedná se jen o násobek)} \Rightarrow \vec{w} = (2; 1; 4).$$

tento vektor lze také zistat jako vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$. Nyní hledáme příčku p, q rovnoběžnou s \vec{w} .

$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

$$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-12; -2; -4).$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & -4 & -6 & | & 16 \\ 0 & -16 & -3 & | & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 16 & 3 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & -21 & | & 42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -17 & | & 32 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \Rightarrow P = [7; 3; 9]$$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \{[7 + 2t; 3 + t; 9 + 4t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: Úkol 3

Nalezněte příčku mimoběžek, která je rovnoběžná s rovinami ρ, σ .

$$p : A[-5; 2; 2]; \vec{u} = (2; 0; 1)$$

$$q : z - 2 = 0 \wedge 5x - 8y + 9z + 100 = 0 \Rightarrow B[-\frac{118}{5}; 0; 2]; \vec{v} = (8; 5; 0)$$

$$\rho \{[3 + 3r + s; 2r; 2s]; r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho : 2x - 3y - 3z = 6$$

$$\sigma : x - 4u - 3z + 12 = 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & | & 6 \\ 1 & -4 & -3 & | & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & | & -12 \\ 2 & -3 & -3 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & | & -12 \\ 0 & 5 & 3 & | & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & | & 60 \\ 0 & 5 & 3 & | & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = (3; -3; 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overleftrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

$$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-\frac{93}{5}; -2; 0). \bar{A} = \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & -5 & -10 & | & -40 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & -66 & -45 & | & 269 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 66 & 45 & | & -269 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 66 & 45 & | & -269 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & -87 & | & -797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 95 & | & 227 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 870 & 0 & 0 & | & -55966 \\ 0 & 87 & 0 & | & -898 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 435 & 0 & 0 & | & -27983 \\ 0 & 87 & 0 & | & -898 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{27983}{435} \Rightarrow P = [-5 + 2\frac{27983}{435}; 2; 2 + \frac{27983}{435}]$$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \left\{ \left[-5 + 2\frac{27983}{435} + 3k; 2 - 3k; 2 + \frac{27983}{435} + 5k \right] | k \in \mathbb{R} \right\}$$

Př: úkol 4:

Nalezněte příčku mimoběžek, která leží v rovině ρ :

$$p : x + y = 2 \wedge 2x + z = 5.$$

$$q : x + 2y = 1 \wedge -3y + z = 2$$

$$\rho : x + 2y - x = -2$$

$$\text{Určím } P = p \cap \rho: \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -9 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$P = [-1; 3; 7]$$

$$\text{Určím } Q = q \cap \rho: \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$Q = \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 3 \right]$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; -4 \right)$$

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{[-1 + 4t; 3 - 8t; 7 - 12t] | t \in \mathbb{R}\}$$

§8. Vzdálenost

Def: Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. Vzdáleností podprostorů \mathcal{A}, \mathcal{B} nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definované takto: $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min \{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, kde $|AB|$ je délka úsečky AB .

Pozn: Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:
Necht' $M \in \mathbb{R}$ je množina. Pak číslo $i \in \mathbb{R}$ nazýváme infimem množiny M , je-li největší dolní závorou množiny M , tj. jestliže platí:

1. $\forall m \in M : i \leq m$
2. $\forall r \in \mathbb{R} : i(\forall m \in M : r \leq m) \Rightarrow i \geq r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a necht' $D = \{AB : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak vzdáleností podprostorů \mathcal{A}, \mathcal{B} nazýváme infimum množiny D .

Platí: Má-li množina D nejmenší prvek n , pak tento prvek je infimum $\Rightarrow n = \rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Pozn: Jestliže \mathcal{A}, \mathcal{B} mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

A) Vzdálenost 2 bodů v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

Pozn:

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Necht' $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body.

Pak platí $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (b_j - a_j)^2}$ [Dk.
viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

Př: Určete $\rho(A, B)$:

1. $A[3; -1], B[0; 2]$
 $\rho(A, B) = 3\sqrt{2}$
2. $A[1; 0; 2]; B[-1; 2; 1]$ $\rho(A, B) = 3$

B) Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{E}_2

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p .

$p: ax + by + c = 0; \vec{n} = (a, b) \neq \vec{0}; A[a_1, a_2]$

$q \perp p - q: x = \{[a_1 + ta; a_2 + tb] | t \in \mathbb{R}\}$

$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q$

$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$

$t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - c}{a^2 + b^2}$

$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA_0}|$

$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b)$

$$|AA_0| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.2.: Necht' $A[a_1; a_2] \in \mathbb{E}_2$ je bod, $p: ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$ je přímka. Pak platí:

$$\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př: Určete $\rho(A, p): A[-1; 2]; p: x - 2y + 1 = 0$

$$\rho(A, p) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Př: 200/47:

$A[3; 2]; p: 3x - 4y - 7 = 0$

$$\rho(A, p) = \frac{|9 - 8 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{6}{5}$$

Př: 200/48:

Určete velikosti výšek trojúhelníku ABC :

$A[0; 0]$

$B[7; 0]$

$C[4; 5]$

$$\overrightarrow{BC} = (-3, 5) \Rightarrow a: 5x + 3y + ? = 0; 35 + 0 + ? = 0 \Rightarrow a: 5x + 3y - 35 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (7, 0) \Rightarrow c: 0x + y = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5) \Rightarrow b: 5x - 4y + ? = 0; 0 - 0 + ? = 0 \Rightarrow b: 5x - 4y = 0$$

$$\rho(A, a) = \frac{|-35|}{\sqrt{25+9}} = \sqrt{34} \frac{35}{34} \quad \rho(B, b) = \frac{|35|}{\sqrt{25+16}} = \sqrt{41} \frac{35}{41} \quad \rho(C, c) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = 1$$

C) Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p .

I. způsob: $p(P, \vec{u}); P[p_1, p_2, p_3]; \vec{u}(u_1, u_2, u_3), A[a_1, a_2, a_3]$
 $A_0[p_1 + t^*u_1 + p_2 + t^*u_2, p_3 + t^*u_3]$
 $\vec{n} = \overrightarrow{AA_0} = (p_1 - a_1 + t^*u_1, p_2 - a_2 + t^*u_2, p_3 - a_3 + t^*u_3)$
 $\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$

Jedna rovnice o jedné neznámé t^* , po určení t^* určíme A_0 .

II. způsob: Určení rovnice roviny ρ , která prochází A a je kolmá k přímce p .

$$p \cap \rho = \{A_0\}$$

III. způsob: Vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod p jako funkce proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

Př: Určete $\rho(A, p)$
 $A[1; 0; 1], p = [2 - t; t; 0], t \in \mathbb{R}.$

I. způsob: $\overrightarrow{AA_0} = (1 - t^*; t^*; -1)$
 $\vec{u} = (-1; 1; 0)$
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t^* - 1 + t^* = 0$
 $t^* = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = [\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0] \quad \overrightarrow{AA_0} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1) \Rightarrow \rho(A, A_0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

II. způsob: $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 1; 0)$
 $\rho: -x + y + d = 0$
 $A \in \rho \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$
 $\rho: -x + y + 1 = 0$
 $p \cap \rho: -(2 - t) + t + 1 = 0$
 $-2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ (dále stejně jako v předchozím bodě)}$

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{(1 - t)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

minimum nastane pro $t = \frac{1}{2}$ a nabývá hodnoty $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Př: $200/45$
 $p = \{[1 - 1t; 2 + 3t; 4 + t] | t \in \mathbb{R}\}; M[1; 4; 5]$

I. způsob: $\overrightarrow{MM_0} = (-t; -2 + 3t; -1 + t)$
 $\vec{u} = (-1; 3; 1)$
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t - 6 + 9t - 1 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}$
 $M_0 = [\frac{4}{11}; \frac{43}{11}; \frac{51}{11}]$
 $|\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{\left(\frac{4}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{43}{11} - 4\right)^2 + \left(\frac{51}{11} - 5\right)^2} = \frac{2\sqrt{286}}{11}$

II. způsob: $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 3; 1)$

$$\rho: -x + 3y + z + d = 0$$

$$M \in \rho \Rightarrow -1 + 12 + 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$$

$$\rho: -x + 3y + z - 16 = 0$$

$$p \cap \rho: -1 + t + 6 + 9t + 4 + t - 16 = 0$$

$$11t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}. \text{ (dále stejně jako v předchozím bodě)}$$

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{MX}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t - 2)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{t^2 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 2t + 1} =$$

$$= \sqrt{11t^2 - 14t + 5} = \sqrt{11\left(t - \frac{7}{11}\right)^2 - \frac{49}{11} + 5}$$

minimum nastane pro $t = \frac{7}{11}$ a nabývá hodnoty $\frac{2\sqrt{286}}{11}$.

Př: 200/46

$$p = \{[5 + 5t; 3 - 4t; 2] | t \in \mathbb{R}\}; C[4; 12; 4]$$

$$|CX| = \sqrt{(1 + 5t)^2 + (9 + 4t)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 10t + 25t^2 + 81 + 72t + 16t^2 + 4} = \sqrt{41x^2 + 82x + 86} =$$

$$\sqrt{41(x^2 + 1)^2 + 86x - 41} \text{ Minimum je } \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Př: 200/49

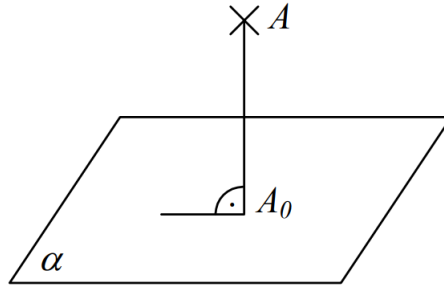
$$p = \{[t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}\}; A[1, 0, 5] \quad |AX| = \sqrt{(t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (2t - 5)^2} =$$

$$= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 20t + 25} = \sqrt{6t^2 - 24t + 27} = \sqrt{6(t^2 - 2)^2 + 3}$$

Minimum je $\sqrt{3}$.

D) Vzdálenost bodu od roviny v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α .



$$\alpha: ax + by + cz + d = 0; [a, b, c] \neq [0, 0, 0]; A[a_1, a_2, a_3]$$

$$q \perp \alpha \Rightarrow p = [a_1 + ta; b_1 + tb; c_1 + tc] | t \in \mathbb{R}$$

$$A_0[a_1 + t^*a; b_1 + t^*b; c_1 + t^*c] \in \alpha \cap q$$

$$a(a_1 + t^*a) + b(b_1 + t^*b) + c(c_1 + t^*c) = 0$$

$$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d \quad t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - ca_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\rho(A, \alpha) = |\overrightarrow{AA_0}|$$

$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b, t^*c)$$

$$|\overrightarrow{AA_0}| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2 + (t^*c)^2} = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.3.: Nechť $A[a_1; a_2; a_3]$ je bod a $\alpha: ax + by + cz + d = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$ je rovina. Pak platí:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|aa_1 + ba_1 + ca_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(A, \alpha)$
 $A[1; -1; 0], \alpha : x - y + 2z - 1 = 0$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Př: 200/50 Určete $\rho(A, \alpha)$
 $A[1; 0; 5], \alpha : 12x + 3y - 4z = 0$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|12 + 0 - 20|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{169}} = \frac{8}{13}$$

E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(A, q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.
 $p : ax + by + c_1 = 0$ $q : ax + by + c_2 = 0; (a, b) \neq \vec{0}$

Zvolíme $A[a_1, a_2] \in p$:

$$\rho(A, q) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 = -c$$

$$\Rightarrow \rho(p, q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.4.: Necht' $p : ax + by + c_1 = 0; q : ax + by + c_2 = 0$ jsou dvě rovnoběžky, $(a, b) \neq \vec{0}$. Pak platí:

$$\rho(p, q) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př: Určete $\rho(p, q)$:
 $p : 4x - 2y + 1 = 0 \sim 2x - y + 0.5 = 0$
 $q : 2x - y + 3 = 0$

$$\rho(p, q) = \frac{|3 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(A, q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz C).

Př: Určete $\rho(p, q)$:
 $p = \{[1 + 2t; -2t; -4t] | t \in \mathbb{R}\}$
 $q = \{[1 - s; s; 2 + 2s] | s \in \mathbb{R}\}$
 $A[1; 0; 0] \in p$
 $B \in q$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(1-s-1)^2 + s^2 + (2+2s)^2} = \sqrt{6s^2 + 8s + 4} = 6\left(s + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} \cdot 6 + 4 = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\rho(A, q) = \rho(p, q) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz D).

Př: Určete $\rho(p, \alpha)$:

$$p = \{[-1 + 2t; 1 - t; 2 + 3t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha : x + 5y + z - 3 = 0$$

Ověření $p \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0$:

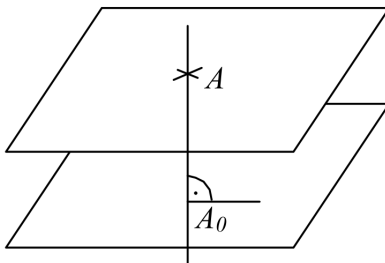
$$(2; -1; 3) \cdot (1; 5; 1) = 2 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow \text{platí.}$$

$A[-1; 1; 2] \in p$:

$$\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha) = \frac{|-1 + 5 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$, kde $A \in \alpha$ je libovolný bod.



$$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$$

$$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha.$$

$$\rho(A, \beta) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$A \in \alpha : aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$$

$$\Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.5.: Necht' $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0, \beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ jsou dvě různé rovnoběžné roviny, $(a, b, c) \neq \vec{0}$. Pak platí:

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(\alpha, \beta)$:
 $\alpha : 3x - y + 2z - 1 = 0$
 $\beta : -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0 \quad 3x - y + 2z - 0 = 0$
 $\rho(\alpha, \beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$

I) Vzdálenosti dvou mimoběžných přímk v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta)$, kde $p \subset \alpha; q \subset \beta; \alpha \parallel \beta$.

I. způsob: Z definice:

$$\begin{aligned} p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v}) \\ \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3) \\ \alpha : n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0 \\ A \in \alpha \Rightarrow \text{dosazením do předchozí rovnice určíme } d_1. \\ \beta : n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0 \\ B \in \beta \Rightarrow \text{dosazením do předchozí rovnice určíme } d_2. \\ \text{Dále viz H).} \end{aligned}$$

II. způsob: Pomocí osy mimoběžek:

Nechť o je osa mimoběžek p, q .
 Určíme průniky $o \cap p = \{P\}, o \cap q = \{Q\}$

Př: Určete $\rho(p, q)$:
 $p = \{[9 + 4t; -2 - 3t; t] | t \in \mathbb{R}\}$
 $q = \{[-2r; -7 + 9r; 2 + 2r] | r \in \mathbb{R}\}$

I. zp.: $\vec{u} = (4; -3; 1); \vec{v} = (-2; 9; 2)$
 $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9; 4 \cdot (-2) - 4 \cdot ; 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-2)) = (-15; -10; 30) \rightarrow (3; 2; -6)$
 $\alpha : 3x + 2y - 6z + d_1 = 0$
 $A[9; 2; -1] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = -23.$
 $\beta : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$
 $B[0; -7; 2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 \Rightarrow d_2 = 26.$
 $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta) = \frac{|26+3|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7$

II. zp.: Hledáme $o(P, \vec{w})$
 $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \dots = (3; 2; -6)$

Přímka p, q rovnoběžná s \vec{w} :

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (-9; -5; 2) \\ P &= A + k\vec{u} \\ Q &= B + l\vec{v} \end{aligned} \right\} \vec{PQ} = B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ -6 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -9 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & -245 & -245 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 15 & | & -1 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & | & -16 \\ 0 & 8 & 0 & | & -16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = [9; -2; 0] - 2(4; -3; 1) = [1; 4; -2]$$

$$Q = [0; -7; 2] + (-2; 9; 2) = [-2; 2; 4]$$

$$\Rightarrow |PQ| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \rho(p, q) = 7$$

Př: 96/100:

100. Určete osu mimoběžek $x_1 = 7 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 9 - t$ a $x_1 = 3 - 7s$, $x_2 = 1 + 2s$, $x_3 = 1 + 3s$ a vypočítejte jejich vzdálenost.

$$p = \{[7 + t; 3 + 2t; 9 - t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$q = \{[3 - 7s; 1 + 2s; 1 + 3s] | s \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{u} = (1; 2; -1)$$

$$\vec{v} = (-7; 2; 3)$$

$$\vec{AB} = (-4; -2; -8)$$

$$\vec{w} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2; 7 - 3; 2 + 14) = (8; 4; 16) \sim (-4; 2; 8) \Rightarrow \text{příčkou je } AB.$$

$$P = [7; 3; 9]$$

$$Q = [3; 1; 1]$$

$$|PQ| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$$

Př: 92/82

82. Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou $4x - 3y - 12 = 0$ a mají od bodu $A = (2, 3)$ vzdálenost rovnou 5.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: 4x - 3y + c = 0$ (z rovnoběžnosti). Vzdálenost tedy je $\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-1+c|}{5} = 5 \Rightarrow c = 5 \cdot 5 + 1 = 26 \vee c = 1 - 5 \cdot 5 = -24$

$$p_1: 4x - 3y + 26$$

$$q_2: 4x - 3y - 24$$

Př: 92/83

83. Na ose y najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku i od přímky $3x - 4y + 12 = 0$.

Hledám bod $A[0, y]$. Vzdálenost k počátku: $|y|$.

Vzdálenost k přímce: $\frac{|-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5} \cdot |y-3|$.

Když $y \leq 0$: $-y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow -5y = -4y+12 \Rightarrow y = -12 \in (-\infty; 0)$
 Když $0 \leq y \leq 3$: $y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow 5y = -4y+12 \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{9}{12} \in \langle 0, 3 \rangle$
 Když $3 \leq y$: $y = \frac{4}{5}(y-3) \Rightarrow 5y = 4y-12 \Rightarrow y = -12 \notin \langle 3, \infty \rangle$

$$A_0 = [0; -12]$$

$$A_1 = \left[0; \frac{9}{12}\right]$$

Př: 92/84

84. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = (-2, 1)$ a od bodu $B = (3, 1)$ má vzdálenost rovnou 4.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.

Když $a = 0$: $A \in p \Rightarrow 1b + c = 0 \Rightarrow p: 0x + y - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 0 \neq 4 \Rightarrow$ spor.
 BÚNO tedy $a = 1$.

$$A \in p \Rightarrow -2 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$$

$$\rho(p, B) = 4 \Rightarrow \frac{|3+b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow \frac{25}{16} = 1+b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}.$$

$$\text{Když } b = \frac{3}{4}: c = \frac{5}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$\text{Když } b = -\frac{3}{4}: c = \frac{11}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3-\frac{3}{4}+\frac{11}{4}}{\sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$p_1: x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x + 3y + 5 = 0$$

$$p_1: x - \frac{3}{4}y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x - 3y + 11 = 0$$

Př: 92/85

85. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = (1, 2)$ a má stejnou vzdálenost od bodů $B = (3, 3)$ a $C = (5, 2)$.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.

Když $b = 0$: $A \in p \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow p: x - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 3 \neq 5 = \rho(C, p) \Rightarrow$ spor.
 BÚNO tedy $b = 1$.

$$A \in p \Rightarrow a + 2 + c = 0 \Rightarrow a + c = -2$$

$$\rho(p, B) = \rho(p, C) \Rightarrow \frac{|3a+3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5a+2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |3a+3+c| = |5a+2+c| \Rightarrow |2a+1| = |4a|$$

$$\text{Když } a \leq -\frac{1}{2} \vee a \geq 0: 2a+1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Když } a \geq -\frac{1}{2} \wedge a \leq 0: 2a+1 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{6}.$$

$$p_1: \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow p: x + 2y - 5 = 0$$

$$p_2: -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow p: x - 6y + 11 = 0$$

§9. Odchylka

Def: Necht' \vec{u}, \vec{v} jsou dva nenulové vektory. *Odchylkou dvou vektorů \vec{u}, \vec{v} označujeme $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$ a definujeme takto:*

1. Je-li $\vec{u} = k\vec{v}; k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 0^\circ$
2. Je-li $\vec{u} = k\vec{v}; k \in \mathbb{R}^- \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 180^\circ$
3. Je-li $\vec{u} \neq k\vec{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ odchylkou vektorů \vec{u}, \vec{v} rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn: $0^\circ \leq |\angle \vec{u}, \vec{v}| \leq 180^\circ$

V.9.1.: Necht' \vec{u}, \vec{v} jsou dva nenulové vektory. Pak platí:

$$|\angle \vec{u}, \vec{v}| = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk: Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn: Jestliže jsou dva podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je 0° .

A) Odchylka dvou přímek v \mathbb{E}_2

Pozn: Necht' p, q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají. $0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$

V.9.2.: Necht' $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce $y = \arccos x$ má pro definiční obor $\langle 0; 1 \rangle$ obor hodnot $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.]

V.9.3.: Necht' $p: ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq \vec{0}$), $p: ex + fy + g = 0$ ($(e, f) \neq \vec{0}$) jsou 2 různoběžné přímky a necht' $\vec{n}_p = (a, b), \vec{n}_q = (e, f)$. Pak platí:

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2. a z toho, že normálové vektory přímek svírají stejný úhel jako přímky samé.]

V.9.4.: Necht' $p(A, \vec{u}), p: ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq \vec{0}$) jsou 2 různoběžné přímky a necht' $\vec{n}_q = (a, b)$. Pak platí:

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2., z toho, že odchylka normálového vektoru 1 přímky a směrového vektoru 2. přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$ (φ je odchylka obou přímek).]

Př: Určete $\angle p, q$:

a) $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}); A[1; 0], B[3; 1], \vec{u}(1; 1), \vec{v}(-1; 0)$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|-1|}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $p: 5x + 3y - 7 = 0; q: 4x - y + 5 = 0$

$$\vec{n}_p = (5, 3); \vec{n}_q = (4, -1)$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|20 - 3|}{\sqrt{25 + 9} + \sqrt{16 + 1}} = \arccos \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

c) $p = \overleftrightarrow{AB}; A[1; 0]; B[2; 1]; q: x + 2y - 6 = 0$

$$\vec{u} = (1; 1); \vec{n}_q = (1, 2)$$

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|1 + 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/69:

69. Určete odchylku α přímek

a) $2x + y - 5 = 0$ a $6x - 2y + 7 = 0;$

b) $x_1 = 2 + t, x_2 = 3 - t$ a $2x + 4y - 1 = 0.$

a) $\vec{n}_p = (2; 1); \vec{n}_q = (6; -2)$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|12 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $\vec{u} = (1; -1); \vec{n}_q = (2; 4) \sim (1; 2)$

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|1 - 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/70:

70. Určete rovnici přímky, která má od přímky $x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y .

$$\vec{n} = (1; -2)$$

$$\text{Otočím o } +30^\circ: \vec{n}_1 = \vec{n} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (1 - 2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

$$p_1: (\sqrt{3} + 2)x + (1 - 2\sqrt{3})y + c_1 = 0$$

$$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}(-2\sqrt{3} + 1) = c_1$$

$$p_1: (2\sqrt{3} + 4)x + (-4\sqrt{3} + 2) + (6\sqrt{3} - 3) = 0$$

$$\text{Otočím o } -30^\circ: \vec{n}_1 = \vec{n} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

$$p_1: (\sqrt{3}-2)x + (-1-2\sqrt{3})y + c_2 = 0$$

$$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}(-2\sqrt{3}-1) = c_1$$

$$p_2: (2\sqrt{3}-4)x + (-4\sqrt{3}-2)y + (6\sqrt{3}+3) = 0$$

Př: 86/71:

71. V rovnoramenném pravouhlém trojúhelníku je dán vrchol ostrého úhlu $A = (5, 7)$ a přímka $6x + 4y - 9 = 0$, ve které leží jedna z odvěsen. Určete rovnice přímk, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníku.

$$p: 6x + 4y + 9$$

$$\vec{n}_p = (6; 4) \sim (3, 2)$$

$$6 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - 9 \neq 0 \Rightarrow A \notin p \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = p$$

$$\text{Najdu } \overleftrightarrow{AC} \perp BC: \overleftrightarrow{AC}: 2x - 3y + c = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow 10 - 21 + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

$$\overleftrightarrow{AC}: 2x - 3y + 11 = 0$$

Najdu \overleftrightarrow{AB} :

Otočím p o $+45^\circ$:

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_p \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

$$\overleftrightarrow{BC}_1: x + 5y + d = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AB}_1 \Rightarrow 5 + 5 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = -40$$

$$\overleftrightarrow{BC}_1: x + 5y - 40 = 0$$

Otočím p o -45° :

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_p \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\overleftrightarrow{BC}_2: 5x - y + e = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AB}_2 \Rightarrow 5 \cdot 5 - 7 + e = 0 \Rightarrow e = -18$$

$$\overleftrightarrow{BC}_2: 5x - y - 18 = 0$$

Př: 86/73:

73. Určete kosiny vnitřních úhlů trojúhelníku o vrcholech $A = (1, 1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (3, 1)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-2, 2) \sin(-1; 1) \\ \overrightarrow{BC} &= (4, -2) \sin(2; -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (2, 0) \sin(1; 0)\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{2+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

B) Odchylka dvou přímek v \mathbb{E}_3

Pozn: Necht' p, q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

Necht' p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\angle p', q'|$, kde $p' \parallel p, q' \parallel q$ jsou různoběžky.

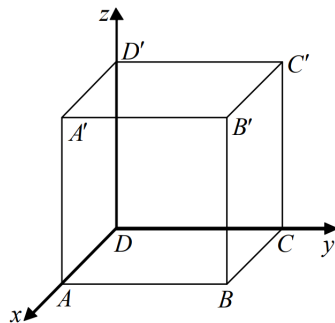
$$0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$$

V.9.5.: Necht' $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$|\angle \overrightarrow{p}, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

[Dk.: viz V.9.2].

Př: Určete odchylku přímek $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}$ krychle $ABCD A'B'C'D'$:



Analytické řešení:

$$A[1; 0; 0]; A'[1; 0; 1],$$

$$B[1; 1; 0]; B'[1; 1; 1],$$

$$C[0; 1; 0]; C'[0; 1; 1],$$

$$D[0; 0; 0]; D'[0; 0; 1],$$

$$\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1); \overrightarrow{BC'} = (-1; 0; 1)$$

$$|\angle \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}| = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Stereometrické řešení:

Celý problém se evidentně odehrává v rovině $A'BC'$: Úsečky $A'B, BC'$ a $A'C'$ mají evidentně stejnou vzdálenost, protože se jedná o stěnové úhlopříčky. $\triangle A'BC'$ je tedy rovnostranný, pročež $|\angle \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}| = |\angle A'BC'| = \frac{\pi}{3}$.

Př: 177/11:

$$\overrightarrow{u} = (-1; 1; -1)$$

$$\overrightarrow{v} = (1; 1; 1)$$

$$|\angle p, \overrightarrow{AB}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

Př:

177/12:

$$\vec{u}(2; 2; 10) \sim (1; 1; 5)$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, x| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, y| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, z| = \arccos \frac{|5|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 7581 = \frac{81}{81} = 1 \quad QED.$$

Př:

178/17:

$$1. \quad \begin{array}{l} \vec{u}(1, 1, 1) \\ \vec{v}(-1, 1, 1) \end{array}$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

.

$$2. \quad \begin{array}{l} \vec{u}(1, 1, 1) \\ \vec{v}(-1, 1, 0) \end{array}$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

.

Př:

178/18:

$$1. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \text{ a } \overleftrightarrow{CD}: \\ \vec{u}(-6; 5; 0) \\ \vec{v}(-3; -3; 8) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|18 - 15|}{\sqrt{36 + 25} \cdot \sqrt{9 + 9 + 64}} = \arccos \frac{3\sqrt{5002}}{5002}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AC} \text{ a } \overleftrightarrow{BD}: \\ \vec{u}(-1; 6; 0) \\ \vec{v}(2; -2; 8) \sim (1; -1; 4) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-1 - 6|}{\sqrt{1 + 36} \cdot \sqrt{1 + 1 + 8}} = \arccos \frac{7\sqrt{370}}{370}$$

$$3. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AD} \text{ a } \overleftrightarrow{BC}: \\ \vec{u}(-4; 3; 8) \\ \vec{v}(5; 1; 0) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-20 + 3|}{\sqrt{16 + 9 + 64} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \arccos \frac{17 \cdot \sqrt{2314}}{2314}$$

C) Odchylka přímky od roviny v \mathbb{E}_3

Pozn: Necht' p, α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné. Pak platí: $|\angle p, \alpha| = |\angle p, q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subset \beta$.
 $0^\circ \leq |\angle p, \alpha| \leq 90^\circ$

V.9.6.: Necht' $p(A, \vec{u})$ je přímka a $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \vec{0})$ je rovina a necht' $\vec{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5., z toho, že odchylka normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$ (φ je odchylka přímky od roviny).]

Př: Určete $|\angle p, \alpha|$:
 $p = \overleftrightarrow{AB}; A[1; 1; -2]; B[-1; 0; -1]$
 $\alpha: 2x - 3y + z + 4 = 0$

$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|-4 + 3 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow p \parallel \alpha$$

D) Odchylka dvou rovin v \mathbb{E}_3

Pozn: Necht' α, β jsou dvě různoběžné roviny. Pak platí: $|\angle \alpha, \beta| = |\angle p, q|$, kde $p \subset \alpha; q \subset \beta; p \perp r; q \perp r; r = \alpha \cap \beta$.
 $0^\circ \leq |\angle \alpha, \beta| \leq 90^\circ$

V.9.7.: Necht'
 $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \vec{0})$
 $\beta : ex + fy + gz + h = 0 \quad ((e, f, g) \neq \vec{0})$
 jsou dvě roviny. Necht' $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ a $\vec{n}_\beta = (e, f, g)$. Pak platí:

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5. a z toho, že normálové vektory rovin svírají stejný úhel jako roviny samé.]

Př: Určete $|\angle \alpha, \beta|$:
 $\alpha : 2x + 3y + z - 5 = 0$
 $\beta : x - y + z + 12 = 0$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2 - 3 + 1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Př: 192/34:
 $A[0; 0; 0]; A'[0; 0; 1],$
 $B[0; 1; 0]; B'[0; 1; 1],$
 $C[1; 1; 0]; C'[1; 1; 1],$

$$D[1; 0; 0]; D'[1; 0; 1],$$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{ACB'} &= \{[s, s+t, t]; s, t \in \mathbb{R}\} \\ \overleftrightarrow{ACB'} &: x - y + z = 0 \\ \overleftrightarrow{ACB} &= \{[s, s+t, 0]; s, t \in \mathbb{R}\} \\ \overleftrightarrow{ACB} &: 0x + 0y + z = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{ACB'}, \overleftrightarrow{ACB}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Př: 192/35:

$$\begin{aligned}\text{a) } \alpha &: x + y + 0z - 2 = 0 \\ \beta &: 0x + 9y + 2z - 16 = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0 + 9 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{85}} = \arccos \frac{9\sqrt{170}}{170}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \alpha &: -3x + y - 2z + 16 = 0 \\ \beta &: 0x + 1y + 4z + 2 = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0 + 1 - 8|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{238}}{34}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \alpha &: 13x - 2y + 5z - 56 = 0 \\ \beta &: 3x + 0y + 2z - 16 = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|39 + 10|}{\sqrt{198} \cdot \sqrt{13}} = \arccos \frac{49\sqrt{286}}{858}$$

d) Analogicky.

$$\begin{aligned}\text{e) } p([3; -1; 3], (1; -1; -3)) \\ \alpha &: 6x + 3y + 4z - 32 = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \alpha, p| = \arcsin \frac{|6 - 3 - 12|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{61}} = \arcsin \frac{9\sqrt{671}}{671}$$

$$\begin{aligned}\text{f) } p([2; 0; 5], (4; 2; -6) \sim (2; 1; -3)) \\ \alpha &: 13x - 2y + 5z - 56 = 0\end{aligned}$$

$$|\angle \alpha, p| = \arcsin \frac{|26 - 2 - 5|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{198}} = \arcsin \frac{19\sqrt{77}}{462}$$

Př:

75. Najděte parametrické vyjádření přímky, která prochází počátkem, protíná přímku $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 1 - 3t$ a jejich odchylka je 30° .

$$\begin{aligned}
q &= \{[4+t; 3+4t; 1-3t] | t \in \mathbb{R}\} \\
p &\in \overrightarrow{[0; 0; 0]} q = \alpha = \{[4s+t; 3s+4t; s-3t] | s, t \in \mathbb{R}\} \\
\alpha &: x - y - z = 0 \\
p &= \{[at; bt; ct] | t \in \mathbb{R}\} \\
\text{BÚNO } a &= 1 \text{ (když } a = 0, \text{ tak } b = 1 \wedge c = -1, \text{ což evidentně nesedí)} \\
p \in \alpha &\Rightarrow a - b - c = 0 \Rightarrow c = 1 - b \quad \vec{u} = (1, b, 1 - b) \\
\vec{v} &= (1, 4, -3) \\
\cos 30^\circ &= \frac{|1+4b-3+3b|}{\sqrt{26}\sqrt{2x^2-2x+2}} \\
\sqrt{3}\sqrt{26}\sqrt{2x^2-2x+2} &= 2 \cdot |7b-2| \\
3 \cdot 26 \cdot (2b^2 - 2b + 2) &= 196b^2 - 112b + 16 \\
0 &= 40b^2 + 44b - 140 \\
b &= -\frac{5}{2} \vee b = \frac{7}{5} \\
p_1 &= \{[2t; 5t; 3t] | t \in \mathbb{R}\} \\
p_2 &= \{[5t; 7t; -2t] | t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Př:

76. Najděte pravouhlý průmět přímky $x_1 = 4t, \quad x_2 = 4 + 3t, \quad x_3 = -1 - 2t$ do roviny $x - y + 3z + 2 = 0$.

$$\vec{n} = (1; -1; 3)$$

$$\begin{aligned}
A[0; 4; -1] &\in p \\
A_0 &= k \cdot \vec{n} + A \in \alpha: \\
k - (4 - k) + 3(-1 + 3k) + 2 &= 0 \Rightarrow k = \frac{5}{11} \\
A_0[0 + 1 \cdot \frac{5}{11}; 4 - 1 \cdot \frac{5}{11}; -1 + 3 \cdot \frac{5}{11}] &= [\frac{5}{11}; \frac{39}{11}; \frac{4}{11}] \\
B[-4; 1; 1] &\in p \\
B_0 &= k \cdot \vec{n} + B \in \alpha: \\
-4 + k - (1 - k) + 3(1 + 3k) + 2 &= 0 \Rightarrow k = 0 \\
B_0 &= B[-4; 1; 1]
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{B_0 A_0} = (\frac{49}{11}; \frac{28}{11}; \frac{-7}{11}) = (49; 28; -7)$$

$$p_0 = \{[-4 + 49t; 1 + 28t; 1 - 7t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př:

77. Určete odchylku přímky $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ od roviny $2x + y + z = 0$.

$$\begin{aligned}
p &= \{[t; 2t; -t] | t \in \mathbb{R}\} \\
\vec{v} &= (1, 2, -1) \\
\vec{n} &= (2, 1, 1)
\end{aligned}$$

$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \arcsin \frac{3}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Př:

79. Určete odchylku α rovin $x_1 = 3t + 3s$, $x_2 = -t - s$,
 $x_3 = 2t - 5s$ a $2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$.

$$x = 3t + 3s$$

$$y = -t - s$$

$$z = 2t - 5s$$

$$\alpha : x + 3y = 0$$

$$\beta : 2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2+3|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Př: 177/14: $\vec{a} = (-2; 1)$
 $\vec{b} = (0.5; 1)$ $(1, 2)$
 $\vec{c} = (-1; 1)$
 $\vec{d} = (0; 1)$

$$1. |\angle \vec{a} \vec{b}| = \arccos \frac{|-2+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{0}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$2. |\angle \vec{a} \vec{c}| = \arccos \frac{|2+1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$3. |\angle \vec{a} \vec{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$4. |\angle \vec{b} \vec{c}| = \arccos \frac{|-1+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$5. |\angle \vec{b} \vec{d}| = \arccos \frac{|+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$6. |\angle \vec{c} \vec{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Př: 177/15: $\vec{u} = (2, 9)$
 $\vec{v} = (9, -2)$

$$p : 9x - 2y + c = 0$$

$$A \in p : 9 \cdot 0 - 2(-5) + c = 0 \Rightarrow c = -10$$

$$p : 9x - 2y - 10 = 0$$

Př: 192/36: $\vec{u} = (1, 2, -1)$

$$1. \vec{a} = (0; 1; -1)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{a}| = \arcsin \frac{|2+1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$2. \vec{b} = (1; 3; -5)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{b}| = \arcsin \frac{|1+6+5|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{35}} = \arcsin \frac{2\sqrt{210}}{36}$$

$$3. \quad \vec{c} = (8; -1; 3)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{a}| = \arcsin \frac{|8 - 2 - 3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{77}} = \arcsin \frac{\sqrt{462}}{154}$$

Př: 192/37:

$$x = 5 - r + 2s$$

$$y = -3 + 2r - 5s$$

$$z = 1 - 3r + 3s$$

$$2x + y = 7 - s$$

$$3x - z = 14 + 3s$$

$$3(2x + y) + (3x - z) = 9x + 3y - z = 35$$

$$\vec{v} = (9; 3; -1)$$

$$1. \quad \vec{a} = (0; 1; -1)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{a}| = \arcsin \frac{|3 + 1|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$2. \quad \vec{b} = (1; 3; -5)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{a}| = \arcsin \frac{|9 + 9 + 5|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{35}} = \arcsin \frac{2\sqrt{210}}{36}$$

$$3. \quad \vec{c} = (8; -1; 3)$$

$$|\angle \vec{u} \vec{a}| = \arcsin \frac{|72 - 3 - 3|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{77}} = \arcsin \frac{\sqrt{462}}{154}$$