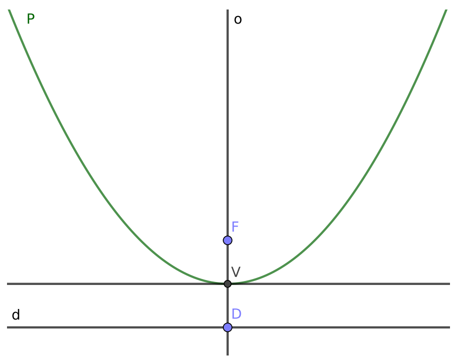
§1. Parabola

Pozn: Paraboly známe jako grafy kvadratických funkcí $y = ax^2+bx+c$, kde $a \neq 0$. Graf každé kvadratick funkce lze získat vhodným posunutím grfu $y = ax^2$. K těmto poznatkům dojdeme opět znovu uplatněním obecného analitického vyjádření parabol.

Geometrická definice paraboly pomocí vzdáleností jejíc bodů od dané přímky a daného bodu.

Def: Nechť je dána přímka d a bod $F \notin d$. Množinu všech bodů X rovniny dF, pro která platí $\rho(X, d) = |FX|$, nazýváme *parabola s ohnismek F a řídící přímkou d*. Označme ji $P(F, d)$.

Pozn:



F – ohnisko
d – řídící přímka
o – osa
V – vrchol

Pozn: Vliv $\rho(F, d)$ na tvar paraboly budeme zkoumat pomocí sítě na obrázku, kde jsou ke ružnici se středem F přípsaná čísla udávající vzdálenost jejich bodů od F.

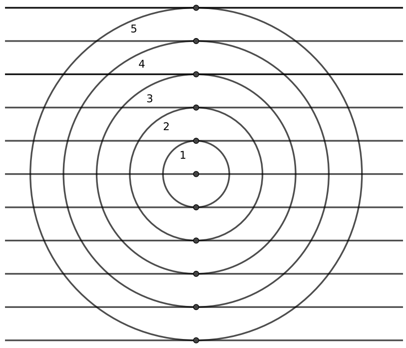
Návod k práci s obrázkem:

1. Položte průsvitku a vyznačte F a jednu z přímek jako d. Na prímky v polorovnič $\overrightarrow{dF}$ připište vzdálenosti od d.

2. Vyznačte body, které leží na kružnici a přímce se steným číslem.

3. Zhustěte síť a opakujte

4. spojete body hladkým obloukem.



Pozn: Odvozujeme analitické vyjádření parabol $P(F, d)$ pro $V[0; 0]$ a osu y: Pomocí vzorců pro vzdálenosti vyjádřime charakteristicku vlastnost bodů parabol.

$$\begin{aligned}
\rho(X, d) &= |FX| \\
|y \pm 0.5q| &= \sqrt{x^2 + (y - 0.5q)^2} \\
y^2 \pm qy + 0.250.5q^2 &= x^2 + (y - 0.5q)^2 \\
y^2 \pm qy + 0.25q^2 &= x^2 + y^2 \mp qy + 0.25q^2 \\
\pm 2qy &= x^2
\end{aligned}$$

Snadno ověříme, že každý bod X, který svými souřadnicemi splňuje poslední rovnici, má charakteristickou vlastnost bodu paraboly.

V.1.1.: Každá parabola $P(F, d)$, která má vrchol $V[0; 0]$ a svou osu v ose y, má analitické vyjádření $2py = x^2$, přitom $F[0; 2.5p], d : y = -0.5p$.

[Dokázáno výše]

V.1.2.: Každá parabola, která má rovnici $2py = x2$, kde $a \neq 0$ je grafem kvadratické funkce $y = sx^2$. Zároveň graf každé kvadratické funkce $y = ax^2$ je parabolou o rovnici $2py = x^2$, přitom $p = \frac{1}{2a}, a = \frac{1}{2p}$.

[Dk: plyne z toho, že rovnice $y = ax^2, 2py = x^2$ jsou ekvivalentní při uvedeném vzttau mezi a, p.].

Př: Určete rovnici všech parabl P, které mají osu rovnoběžnou s osou x a procházi body $A[-4; -2]; B[4; 2]; C[2; 4]$.

Z podmínky rovnoběžnosti plyne, že se jedná o kvadratickou funkci $x = f(y)$, tedy $x = ay^2 + by + c$.

Dosadíme:

$$\begin{aligned}
-4 &= 4a - 2b + c && (1) \\
4 &= 4a + 2b + c && (2) \\
2 &= 16a + 4b + c && (3) \\
& && (4)
\end{aligned}$$

$8 = 4b \Rightarrow 2 = b$

$4a = -c$
$2 = -4c + 8 + c \Rightarrow 3c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}y^2 + 2y + 3 = x$$

Př: 239/6:

a) $V[3,0]$, $q = 2 \Rightarrow 4(y) = (x-3)^2$y
b) $V[-3,-6]$, $q = -8 \Rightarrow -16(y+6) = (x+3)^2$y
c) $V[4,1]$, $q = -6 \Rightarrow -12(y-1) = (x-4)^2$y
d) $V[-2,\frac{1}{2}]$, $q = -3 \Rightarrow -6(y-\frac{1}{2}) = (x+2)^2$

Př: 239/8: $y = \pm x^2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow p : y = \mp\frac{1}{4} \wedge F[0, \pm\frac{1}{4}]$

a) $p : y = -\frac{1}{4}$ $F[3; \frac{1}{4}]$
b) $p : y = 5 - \frac{1}{4}$ $F[0; 5\frac{1}{4}]$
c) $p : y = 2 + \frac{1}{4}$ $F[0; 2 - \frac{1}{4}]$
d) $y - 3 = (x-2)^2$ $p : y = -\frac{1}{4}$ $F[0; \frac{1}{4}]$
e) $y - 13 = -(x+2)^2$ $p : y = 13 + \frac{1}{4}$ $F[-2; 13 - \frac{1}{4}]$
f) $y + 4 = -4(x-1)$ $p : y = -4 + \frac{1}{4}$ $F[1; -4 - \frac{1}{4}]$

Př: 240/10:

Př: $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} -2 &= 16a - 4b + c && (5) \\ 2 &= 16a + 4b + c && (6) \\ 4 &= 4a + 2b + c && (7) \end{aligned}$$

$4 = 8b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
$-16a = c$
$4 = 4a + 1 - 16a \Rightarrow 12a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$