§1. Gaussova rovina, goniometrický tvar komplexního čísla

Pozn: Protože množina $\mathbb{C}$ je definována jako množina uspořádaných dvojic $\mathbb{R}$ čísel, lze každé komplexní číslo $z = (x, y)$ zobrazit v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a ztotožnit s bodem $z[x, y]$. Reálná čísla leží na ose x (osa x se nazývá reálná osa). Ryze imaginární čísla $z = yi, y \neq 0$ leží na ose y (osa y se nazývá imaginární osa). Rovina s reálnou a imaginární osou se nazývá Gaussova rovina a v ní zobrazujeme komplexní čísla. Podobně lze interpretovat komplexní čísla jako vektory s pevným počátečním bodem.

Def: Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Číslo $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ nazýváme *komplexně sdruženým číslem* k číslu z.

Číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ nazýváme *absolutní hodnotou komplexního čísla* z.

Komplexní číslo z s vlastností $|z| = 1$ nazýváme *komplexní jednotkou.*

Pozn:

1) Čísla z a $\overline{z}$ jsou osově souměrná podle reálné osy (osy x)
2) Číslo $|z|$ vyjadřuje vzdálenost bodu z od počátku souřadné soustavy, a tedy délku polohového vektoru bodu z.
3) Množinu všech komplexních jednotek označíme $\mathbb{U}$.
4) Protože obrazem množiny komplexních čísel se stejnou nenulovou absolutní hodnotou je kružnice se středem v počátku souřadné soustavy, je obrazem množiny $\mathbb{U}$ jednotková kružnice se středem v počátku.

V.1.1.: Pro každá dvě komplexně združená čísla $z = x + yi; \overline{z} = x - yi$ platí:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z + \overline{z} = 2x$
3. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
8. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

V.1.2.: Pro absolutní hodnoty libovolných komplexních čísel $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

1. $|z| \geq 0$, přičemž $|z| = 0 \equiv z = 0$
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
3. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + z_2|$
4. $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - z_2|$

5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

6. $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \quad (z_2 \neq 0)$

7. $\mathrm{Re}z \leq |z|; \mathrm{Im}z \leq |z|$

Pozn: Všechny vztahy platící pro reálná čísla nelze mechanicky převést do množiny komplexních čísel. Např. $|z|^2 \neq z^2$

Pozn: Na rozdíl od množiny reálných čísel není množina komplexních čísel uspořádaná, tedy komplexní čísla nelze srovnávat podle velikosti.

Def: Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}; z \neq 0$. *Argumentem komplexního čílsa* nazýváme orientovaný úhel φ, který svírá kladná poloosa reálné osy s polohovým vektorem bodu z.

Pozn: Každé nenulové číslo z má nekonečně mnoho argumentů, přitom každé 2 z nich se liší o $k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}$. Je-li $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$, pak jej nazýváme *hlavní argument komplexního čísla* z , je jediný.

V.1.3.: Každé komplexní číslo $z = x+iy; z \neq 0$ lze zapsat ve tvaru $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $|z|$ je absolutní hodnota z a φ je argument z, přičemž platí: $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

[Dk.!:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

]

Def: *Goniometrický tvar komplexního čísla*

Nechť $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Pak goniometrickým tvarem tohoto čísla nazýváme zápis čísla ve tvaru $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $|z|$ je absolutní hodnota z a φ ja argument z, přičemž $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

Př: Zapiště v gon. tvaru:

1. $z = 1 + i$
   $|z| = \sqrt{2}; \varphi = \frac{\pi}{4}$
   $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Př: Zapiště v alg. tvaru:

1. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$

Př: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}; z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sqrt{\varphi_1}); z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sqrt{\varphi_2})$ pak platí:

$z - 1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1}{|z_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Př: Vypočítejte v algebraickém i goniometrickém tvaru:

1. $(i - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} - 2i$
   $2e^{i\frac{5}{3}\pi} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{11}{6}\pi}$

2. $\frac{2e^{i\frac{5}{3}\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

V.1.4.: Moivreova věta:
Nechť máme nenulové kkomplexní číslo $z = |z|e^{i\varphi}; n \in \mathbb{N}$, pak platí:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

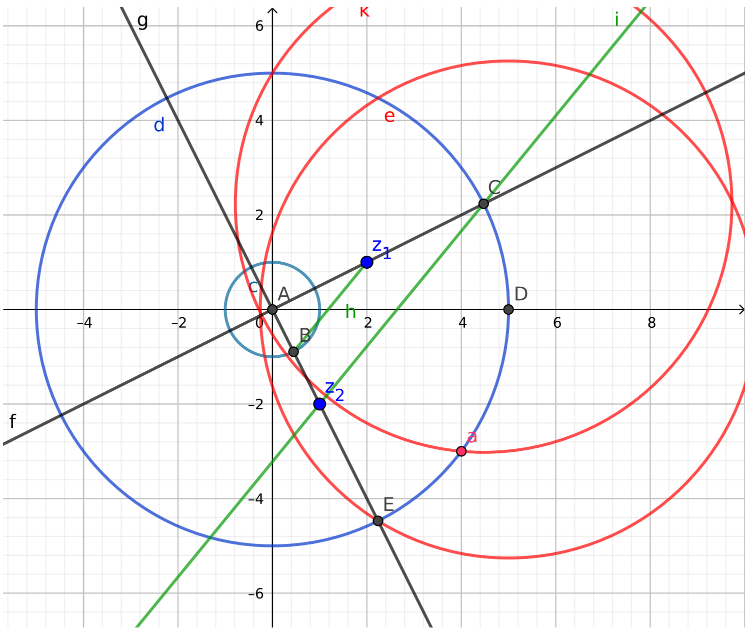
Pozn: Moivreova věta platí i pro celé exponenty.

Pozn: Součet a rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v Gaussově rovině.

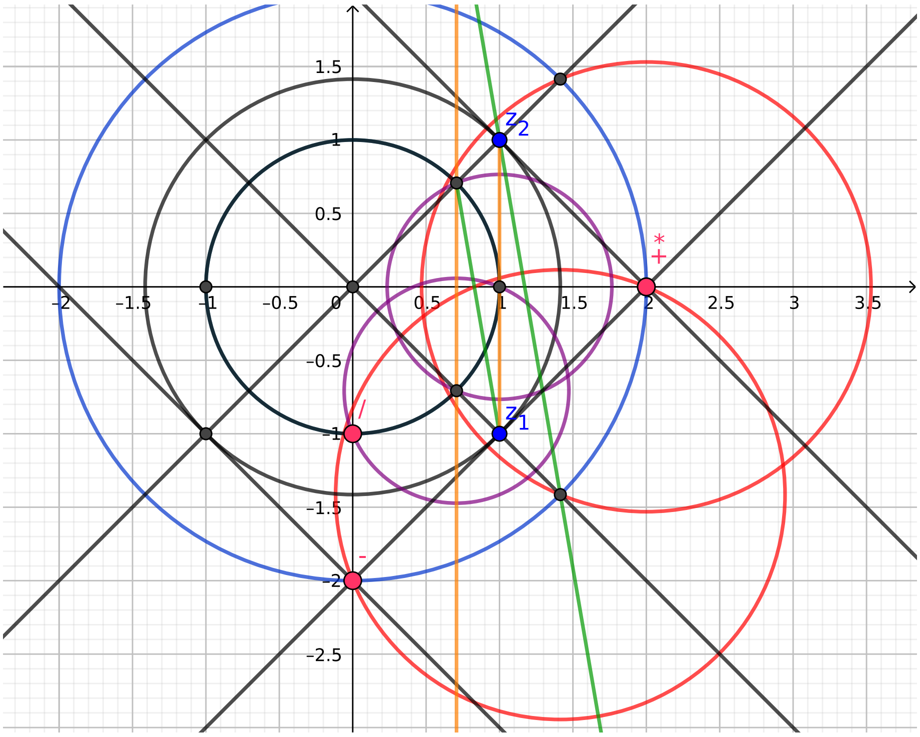
Součet a rozdíl jako sčítání a odčítání vektorů.

Součin $z_1 z_2$ (podíl $\frac{z_1}{z_2}$):

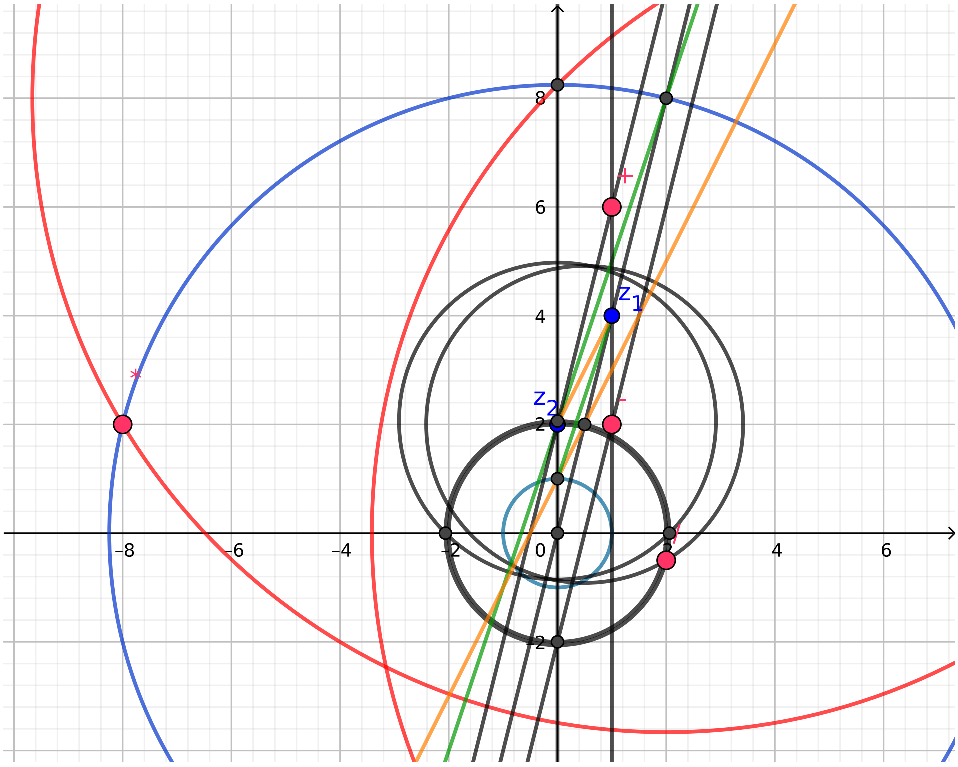
1. zobrazíme z_1 ve stejnolehnosti $H_{P,|z_2|}$ ($H_{P,|z_2|^{-1}}$): Získáme $|z_1 \cdot z_2|$.
2. zobrazíme $|z_1 \cdot z_2$ ($\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$) v rotaci $R_{P,\arg z_2}$ ($R_{P,-\arg z_2}$) Získáme $z_1 \cdot z_2$ ($\frac{z_1}{z_2}$).



Př:



$z_1 + z_2 = 2 + 0i$
$z_1 - z_2 = 0 - 2i$
$z_1 \cdot z_2 = 1 - i + i + 1 = 2$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$



$z_1 + z_2 = 1 + 6i$
$z_1 - z_2 = 1 + 2i$
$z_1 \cdot z_2 = 2i + 4i^2 = -4 + 2i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+4i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-4+i}{-2} = 2 - \frac{1}{2}i$

Př: 147/1:

d) $(1-i)^n = \sqrt{2}^2 e^{-ni\frac{\pi}{4}}$

e) $(\sqrt{2}+i)^n = 2^n e^{-i\frac{\pi}{6}}$

f) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20} = -i^{20} = -i^2 = 1$