Kuželosečky v obecné poloze - postřehy a materiály do výuky

Kuželosečkou rozumíme množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které vyhovují rovnici

$$k: \; a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,, \text{ kde } (a_{11}; a_{12}; a_{22}) \neq (0; 0; 0)\,. \qquad (1)$$

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

pak nazýváme *maticí kuželosečky* k. Pokud rovnici (1) nevyhovuje žádný bod s reálnými oběma souřadnicemi, říkáme takové kuželosečce *formálně reálná* (případně *imaginární*) kuželosečka. V opačném případě hovoříme o kuželosečce *bodově reálné*.

Příklad 1.

Uvažujme rovnice

$$k_1: \; x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0\,, \quad k_2: \; 2x^2 + 2xy - 3x - y + 1 = 0 \quad \text{a} \quad k_3: \; 4x - 2y + 1 = 0\,.$$

Rozhodněte, zda se jedná o kuželosečky a v kladném případě napište i jejich matice.

Řešení. Pouze rovnice k_3 není rovnicí kuželosečky, neboť $(a_{11}; a_{12}; a_{22}) = (0; 0; 0)$. Chceme-li se v matici kuželosečky k_2 vyhnout zlomkům, lze rovnici k_2 před zápisem do matice vynásobit dvěma. Potom platí

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & 12 \\ -6 & 12 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kuželosečku k nazýváme *regulární*, pokud $|A| \neq 0$. V opačném případě hovoříme o kuželosečce *singulární*.

Regulárními kuželosečkami jsou elipsa (ve speciálním případě kružnice), hyperbola a parabola. Mezi singulární kuželosečky patří bod, dvojnásobná přímka, dvě různé rovnoběžky, dvě různoběžky. Formálně reálná kuželosečka může být regulární i singulární. Pokud je formálně reálná kuželosečka regulární, jedná se o tzv. imaginární elipsu, v případě, že je singulární, je to dvojice tzv. imaginárních rovnoběžek.

Příklad 2.

Rozhodněte, zda jsou kuželosečky k_1 a k_2 (z Příkladu 1) regulární či singulární.

Řešení. Příslušné determinanty pak vypočteme pomocí Sarrusova pravidla. Platí

$$|A_1| = 1 \cdot 9 \cdot 15 + 2 \cdot [3 \cdot 12 \cdot (-6)] - [(-6) \cdot 9 \cdot (-6) + 1 \cdot 12 \cdot 12 + 3 \cdot 3 \cdot 15] = -900 \neq 0\,,$$

takže k_1 je regulární. Podobně vypočteme $|A_2| = 0$, takže k_2 je singulární.

Směr určený nenulovým směrovým vektorem $\overrightarrow{s} = (s_1; s_2)$, který vyhoví rovnici

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 = 0\,, \qquad (2)$$

označujeme jako *asymptotický směr* kuželosečky k.

Uvědomme si, že například směrové vektory $(1; -2)$ a $(-3; 6)$ určují stejný (tzn. jediný) asymptotický směr.

Asymptotický směr má pouze „neohraničená“ kuželosečka a charakterizuje ten směr, kterým „bychom po této kuželosečce šli do nekonečna“. Žádná kuželosečka nemůže mít více než dva asymptotické směry.

Dle počtu asymptotických směrů pak už jednotlivé kuželosečky můžeme klasifikovat.

- regulární kuželosečky
  - elipsa (pouze pokud $a_{11}\,|A| > 0$, je tato elipsa imaginární) nemá žádný asymptotický směr
  - parabola má právě jeden asymptotický směr (je to směrový vektor její osy)
  - hyperbola má právě dva asymptotické směry (jsou to směrové vektory jejích asymptot)
- singulární kuželosečky
  - bod nemá žádný asymptotický směr
  - dvě rovnoběžky (totožné, různé či imaginární) mají právě jeden asymptotický směr (v prvních dvou případech je to směrový vektor příslušné přímky)
  - dvě různoběžky mají právě dva asymptotické směry (jsou to směrové vektory každé z těchto přímek)

Příklad 3.

Určete asymptotické směry kuželoseček k_1 a k_2 (z Příkladu 1) a klasifikujte je.

Řešení. Potřebujeme najít největší možný počet vektorů, které představují lineárně nezávislá řešení rovnice (2). Toho docílíme například tak, že za s_1 (případně za s_2 - podle toho co je numericky jednodušší) dosadíme nejprve nulu a ve druhém případě vhodné nenulové číslo (často 1) a dořešíme rovnici o jedné neznámé, kterou jsme tím získali.

Rovnice (2) je pro kuželosečku k_1 tvaru

$$s_1^2 + 6s_1s_2 + 9s_2^2 = 0\,.$$

Pro $s_2 = 0$ dostáváme $s_1^2 = 0$, takže $s_1 = 0$. Nalezený vektor $(0;0)$ je však nulový a proto se nejedná o asymptotický směr. Pro $s_2 = 1$ dostáváme

$$s_1^2 + 6s_1 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s_1+3)^2 = 0\,,$$

tedy $s_1 = -3$. Zjistili jsme, že kuželosečka k_1 má jediný asymptotický směr, který je určen například vektorem $(-3;1)$. Protože se jedná o regulární kuželosečku (viz Příklad 2), je to parabola.

Rovnice (2) je pro kuželosečku k_2 tvaru

$$2s_1^2 + 2s_1s_2 = 0\,.$$

Je-li $s_1 = 0$, pak je uvedená rovnice splněna pro libovolné s_2, takže jeden asymptotický směr je určen například vektorem $\overrightarrow{s_1} = (0;1)$. Dosadíme-li do této rovnice $s_1 = 1$, dostaneme $s_2 = -1$. Druhý asymptotický směr je určen například vektorem $\overrightarrow{s_2} = (1;-1)$. Singulární kuželosečka k_2 tedy má dva asymptotické směry, takže je tvořena dvěma různoběžkami.

Středem kuželosečky k rozumíme bod S takový, že pro každý bod $X \in k$ platí, že $X' \in k$, kde X' značí obraz bodu X ve středové souměrnosti se středem S.

Bod $S = [m; n]$ je středem bodově reálné kuželosečky k dané rovnicí (1) právě tehdy, když jeho souřadnice splňují soustavu

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}m & + & a_{12}n & + & a_{13} & = & 0 \\ a_{12}m & + & a_{22}n & + & a_{23} & = & 0 \end{array}\,. \tag{3}$$

Všimněme si, že tato soustava odpovídá prvním dvěma řádkům matice A kuželosečky k.

Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých může mít jediné řešení (tzn. příslušná kuželosečka má jediný střed), žádné řešení (tzn. uvažovaná kuželosečka je nestředová) či nekonečně mnoho řešení s jednou volnou neznámou (tzn. všechny středy dané kuželosečky tvoří přímku). Odtud vyplývá, že má-li kuželosečka více než jeden střed, pak jich má nekonečně mnoho, přičemž všechny její středy leží na jedné přímce.

Příklad 4.

Najděte středy kuželoseček k_1 a k_2 (z Příkladu 1).

Řešení. Potřebujeme najít všechna řešení soustavy (3). Ta má pro kuželosečku k_1 tvar

$$\begin{array}{ccccccc} m & + & 3n & - & 6 & = & 0 \\ 3m & + & 9n & + & 12 & = & 0 \end{array}\,.$$

Vydělíme-li druhou rovnici třemi a odečteme-li od ní rovnici první, dostaneme se ke sporu. To znamená, že kuželosečka k_1 nemá žádný střed. To je v souladu s tím, že se jedná, jak již víme, o parabolu.

Pro kuželosečku k_2 má soustava (3) tvar

$$\begin{array}{ccccccc} 4m & + & 2n & - & 3 & = & 0 \\ 2m & & & - & 1 & = & 0 \end{array}\,.$$

Jejím řešením je bod $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, který je průsečíkem různoběžek, jež kuželosečku k_2 tvoří.

Příklad 5.

Najděte rovnice různoběžek, které tvoří kuželosečku k_2 (z Příkladu 1) a upravte zadanou rovnici této kuželosečky do součinového tvaru.

Řešení. Snadno najdeme parametrické vyjádření každé z těchto různoběžek p_1 a p_2. Víme totiž, že prochází bodem $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ (viz Příklad 4) a příslušnými směrovými vektory jsou vektory $\overrightarrow{s_1} = (0; 1)$ a $\overrightarrow{s_2} = (1; -1)$ určující její asymptotické směry (viz Příklad 3). Abychom získali součinový tvar rovnice kuželosečky k_2, potřebujeme najít obecné rovnice přímek p_1 a p_2, které stačí vynásobit. Rutinním výpočtem dostáváme

$$k_2 : \, (2x - 1)\,(x + y - 1) = 0\,.$$

Jestliže je střed S bodem kuželosečky k, nazýváme jej *singulárním bodem* kuželosečky k.

Střed $S = [m; n]$ je singulárním bodem kuželosečky k dané rovnicí (1) právě tehdy, když jeho souřadnice vyhovují rovnici

$$a_{13}m + a_{23}n + a_{33} = 0\,. \tag{4}$$

Všimněme si, že tato rovnice odpovídá poslednímu řádku matice A kuželosečky k.

Bod $S = [m; n]$ je tedy singulárním bodem kuželosečky k dané rovnicí (1) právě tehdy, když jeho souřadnice splňují (3) a (4).

Obsahuje-li kuželosečka alespoň jeden singulární bod, pak je singulární. Opačně toto tvrzení však neplatí. Kuželosečka tvořená dvěma různými rovnoběžkami je příkladem singulární kuželosečky, která singulární bod nemá.

Příklad 6.

Najděte singulární body kuželoseček k_1 a k_2 (z Příkladu 1).

Řešení. Kuželosečka $k_1$nemá žádný střed (viz Příklad 4), tudíž nemá ani žádný singulární bod. Rovnice (4) je pro kuželosečku k_2 tvaru $-3m - n + 2 = 0$. Snadno nahlédneme, že bod $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, který je jediným jejím středem (viz Příklad 4), ji splňuje, takže se jedná o bod singulární. Tento výsledek jsme očekávali, neboť víme, že průsečík různoběžek je bodem kuželosečky k_2.

Nechť k je bodově reálná regulární kuželosečka. Přímku t, která má s kuželosečkou k jediný společný bod a nemá asymptotický směr, nazýváme *tečnou* kuželosečky k.

Tečna bodově reálné regulární kuželosečky k dané rovnicí (1), která prochází bodem $T \in k$, $T = [x_0 y_0]$ má rovnici

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\,x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\,y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0\,, \tag{5}$$

kterou lze zapsat v maticovém tvaru

$$(x_0; y_0; 1)\,A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0)\ .$$

Příklad 7.

Určete tečny kuželosečky $k:\ x^2 + 2xy - y^2 + 6x = 0$ v jejích průsečících s osou x.

Řešení. Nejprve je třeba ověřit, zda se jedná o regulární kuželosečku. Determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vychází 9, takže k je skutečně regulární. Kdybychom dále určovali počet jejích asymptotických směrů, zjistili bychom, že existují právě dva a že se tedy jedná o hyperbolu (tento výpočet však pro řešení této úlohy nepotřebujeme). Vyřešením rovnice $x^2 + 6x = 0$ najdeme dotykové body $T_1 = [0; 0]$ a $T_2 = [-6; 0]$ hledaných tečen. Po dosazení do rovnice (5) a úpravě dostáváme

$$t_1:\ x = 0 \quad \text{a} \quad t_2:\ x + 2y + 6 = 0\,.$$

Dosadíme-li do rovnice (5) za x a y souřadnice bodu, kterým chceme vést tečnu kuželosečky k dané rovnicí (1), získáme rovnici *poláry*, v jejímž průsečíku s kuželosečkou k leží dotykový bod hledané tečny.

Příklad 8.

Určete tečny kuželosečky $k:\ 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$ vedené počátkem soustavy souřadnic.

Řešení. Opět je nejprve potřeba ověřit, že se jedná o regulární kuželosečku. Matice k je tvaru

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

její determinant je nenulový, můžeme se přesvědčit, že jde o elipsu (nemá žádný asymptotický směr). Rovnice (5) je pro kuželosečku k tvaru

$$(6x_0 + 7y_0 + 4)\,x + (7x_0 + 10y_0 + 5)\,y + 4x_0 + 5y_0 + 2 = 0\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li do (6) $x = y = 0$, obdržíme rovnici poláry

$$4x_0 + 5y_0 + 2 = 0\,.$$

Nalezením jejích průsečíků s kuželosečkou k najdeme souřadnice dotykových bodů $T_1 = \left[\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right]$ a $T_2 = \left[-1; \frac{2}{5}\right]$. Dosadíme-li postupně souřadnice těchto bodů za x_0 a y_0 do (6), získáme rovnice hledaných tečen

$$t_1:\ 2x + y = 0 \quad \text{a} \quad t_2:\ 2x + 5y = 0\,.$$

Nechť k je bodově reálná regulární kuželosečka. Přímku a, která nemá s kuželosečkou k žádný společný bod a má asymptotický směr, nazýváme *asymptotou* kuželosečky k.

Jedinou kuželosečkou, která má asymptoty, je hyperbola. Obě její asymptoty přitom procházejí jejím středem, jejich směrovými vektory jsou vektory určující asymptotické směry.

Příklad 9.

Určete asymptoty kuželosečky $k:\ x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$.

Řešení. Matice k je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$|A| = -3 \neq 0$, takže k je regulární kuželosečka. Rovnice (2) je tvaru

$$s_1^2 - 2s_1s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1\,(s_1 - 2s_2) = 0\,,$$

odkud je patrné, že asymptotické směry jsou určeny například vektory $\overrightarrow{s_1} = (0; 1)$ a $\overrightarrow{s_2} = (2; 1)$. Jedná se tedy o hyperbolu. Soustava (3) je tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcl} m & - & n & + & 1 & = & 0 \\ -m & & & + & 2 & = & 0 \end{array}$$

a jejím řešením je střed $S = [2; 3]$. Parametrická vyjádření hledaných asymptot jsou

$$a_1 = \{[2; 3 + t]\,; t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{a} \qquad a_2 = \{[2 + 2s; 3 + s]\,; s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Jejich obecné rovnice pak vychází

$$a_1:\ x - 2 = 0 \qquad \text{a} \qquad a_2:\ x - 2y + 4 = 0\,.$$

Příklad 10.

Charakterizujte kuželosečku $k: \ x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$.

Řešení. Matice k je tvaru

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$|A|=0$, takže k je singulární kuželosečka. Rovnice (2) je tvaru

$$s_1^2+2s_1s_2+s_2^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (s_1+s_2)^2=0\,,$$

odkud je patrné, že kuželosečka k má jediný asymptotický směr a ten je určen například vektorem $\overrightarrow{s}=(1;-1)$. Soustava (3) je tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} m & + & n & + & 1 & = & 0 \\ m & + & n & + & 1 & = & 0 \end{array}.$$

Vidíme, že obě její rovnice jsou stejné. Má tedy nekonečně mnoho řešení. Středy kuželosečky k tedy tvoří přímku

$$x+y+1=0\,. \tag{7}$$

Rovnice (4) je tvaru $m+n-4=0$ a je se soustavou (3) zřejmě ve sporu. Kuželosečka k tedy nemá žádný singulární bod. Je tedy tvořena dvěma různými rovnoběžkami. Abychom určili, zda je bodově či formálně reálná, umocníme nalezenou přímku středů, tj. rovnici (7) a pomocí výsledku upravíme zadanou rovnici kuželosečky k. Počítejme

$$(x+y+1)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0\,.$$

Proto

$$k: \ \left(x^2+2xy+y^2+2x+2y+1\right)-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+y+1-\sqrt{5}\right)\left(x+y+1+\sqrt{5}\right)=0\,.$$

Kuželosečka k je tedy tvořena dvěma různými rovnoběžkami o rovnicích $x+y+1-\sqrt{5}=0$ a $x+y+1+\sqrt{5}=0$.