

§1. Podprostory vektorového prostoru

Def: Necht' V je vektorový prostor $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$ vektory, $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}$. Vektor $\vec{x} = \sum_{i=1}^k p_i \vec{u}_i$ nazýváme lineární kombinací vektorů. Reálná čísla p_i nazýváme *koefficienty lineární kombinace*.

Lineární kombinaci, kde $\forall i : p_i = 0$, tedy $\vec{x} = \vec{0}$ nazýváme triviální lineární kombinací.

Def: Podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme *podprostorem vektorového prostoru V* právě tehdy, když W je vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání a vnějšího násobení definovaným ve V .

V.1.1.: neprázdná množina W je podprostorem vektorového prostoru V právě tehdy, když platí:

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$
- $\forall p \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in W : p \cdot \vec{u} \in W$

[Dk:

„ \Rightarrow “ Z definice.

„ \Leftarrow “ kommutativita a asociativita plyne z komutativity a asociativity ve V , platí $\vec{u} \in W \Rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \in W$ ($-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u} \in W$). Vlastnost 5.-8. z definice vektorového prostoru platí ve W , protože platí ve V .

]

Př: Necht' $\mathbb{R}^{(2)}$ je aritmetický prostor. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory $\mathbb{R}^{(2)}$

1. $S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$:
 S je podprostorem.
2. $S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$:
Není: $2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin T$
3. $U = \{(z, z); z \in \mathbb{R}\}$:
Necht' $\vec{u} = (u, u); \vec{v} = (v, v)$, pak $\vec{u} + \vec{v} = (u + v, u + v) \in U$. je podprostorem.

V.1.2.: Necht' S je podmnožina vektorového prostoru V . Pak množina $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů množiny S je podprostorem V .