§1. Geometrická posloupnost

Def: Nechť $\{a_2\}_{n=1}^{\infty}$je posloupnost reálnych čísel. Tato *posloupnost* se nazývá *geometrická*, právě když $\exists q \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n-1}q$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti (GP).

Pozn:
1) $a_1 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n = 0$, tj. konst posl.
2) $a_1 \neq 0 \wedge q = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} - \{1\} : a_n = 0$.

Pozn: V daslších úvahách tyto posloupnosti vyloučíme.

V.1.1.: Nechť $\{a_2\}_{n=1}^{\infty}$je GP s kvocientem q, pak platí:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
2. $\forall r, s \in \mathbb{N} : a_r = a_s \cdot q^{s-r}$

[Dk:

1. MI:
   (a) $n = 1$: $a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$.
   (b) $\underline{\text{Když platí } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ tak platí } a_{n+1} = a_1 q^n}$

$$a_1 q^n = a_1 q^{n-1} q = a_n q = a_{n+1}$$

2. Podělíme vztahy pro a_s a a_r.

]

V.1.2.: Nechť $\{a_2\}_{n=1}^{\infty}$je GP s kvocientem q. Pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

1. $q = 1 : S_n = n \cdot a_1$
2. $q \neq 1 : S_n = a_n q^n - 1q - 1$

[Dk:
$qS_n - S_n = a_1^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) - a_1(q^n - 1)$
pro $q \neq 1$: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$]

Př: Je dána posloupnost $\{2, 2sqrt2, 4, 4\sqrt{2}, 8, \ldots\}$, vypočítejte součet prvních 12 členů.

$q = \sqrt{2}$

$$S = 2\frac{\sqrt{2}^{12} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 126\frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 126 + 126\sqrt{2}$$

V.1.3.: Nechť $\{a_2\}_{n=1}^{\infty}$je GP, pak platí: $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$