Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše 14
Školní rok 2008/2009
třída 4.A

ZÁVĚREČNÁ MATURITNÍ PRÁCE

Kombinatorika a pravděpodobnost

Autor: Mojmír Vinkler

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Boucník

Brno, 2009

<u>Prohlášení</u>

Prohlašuji, že jsem předloženou závěrečnou maturitní práci zpracoval samostatně a že jsem použil pouze materiál uvedený v seznamu literatury.

Dne 19. ledna 2009

Mojmír Vinkler

Obsah:

VIII. KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

§1. Základní kombinatorická pravidla

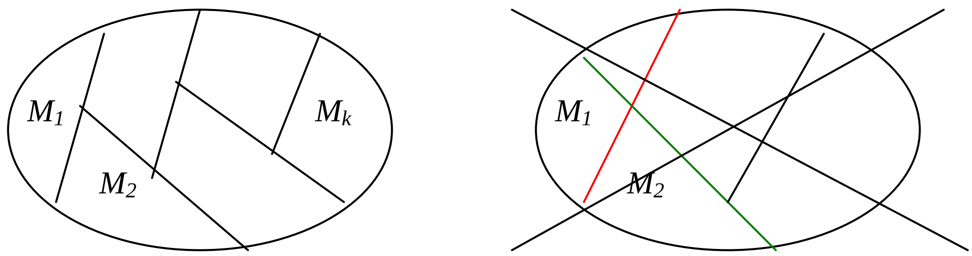
V.1.1. **Pravidlo součtu**

Nechť M je konečná množina, $M_1, M_2, \dots, M_k$, $k \in \mathbf{N}$, jsou její podmnožiny takové, že

I. $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = M$

II. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro lib. $i, j \in \{1,2,\dots,k\}, i \neq j$ (tzn. množiny M_1 až M_k jsou po dvou disjunktní).

Pak platí $|M| = |M_1|+|M_2|+\dots+|M_k|$, kde symbolem $|M|$, resp. $|M_i|$ značíme počet prvků množiny $|M|$, resp. $|M_i|$.



[Dk.: Nechť $x \in M$ je libovolný prvek M. Ten je na levé straně dokazovaného vztahu započítán právě jednou. Z podmínek 1. a 2. plyne, že také na pravé straně dokazovaného vztahu je započítán právě jednou.

Pozn.: Věta V.1.1 aplikuje pojem tzv. rozkladu množiny M pro případ, kdy je množina M konečná.

Def.: Nechť M je neprázdná množina. Rozklad **R** množiny M značíme $\mathbf{R}(M)$ a definujeme jako neprázdný systém neprázdných podmnožin $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$, $k \in \mathbf{N}$, pro které platí $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k \cup \dots = M$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro lib. $i, j \in \{1,2,\dots,k,\dots\}$, $i \neq j$. Množiny $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ nazýváme třídami rozkladu $\mathbf{R}(M)$.

Př.:

$$M = \{a,b,c\}$$
$$R_1(M) = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$$
$$R_2(M) = \{\{a,b\},\{c\}\}$$
$$R_3(M) = \{\{a,c\},\{b\}\}$$
$$R_4(M) = \{\{b,c\},\{a\}\}$$
$$R_5(M) = \{\{a,b,c\}\}$$

V.1.2.: **Pravidlo součinu**

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k$, $k \in \mathbf{N}$, jsou konečné množiny takové, že $|M_1| = m_1$, $|M_2| = m_2, \dots$, $|M_k| = m_k$, pak platí:

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k,$$

kde $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k = \{[a_1, a_2, \dots, a_k], a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_k \in M_k\}$

[Dk.: matematickou indukcí vzhledem ke k:

I. $k=1: triv.$

$k=2: |M_1 \times M_2| = m_1 \cdot m_1$

II. $|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \Rightarrow |M_1 \times M_2 \times ... \times M_k \times M_{k+1}| = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{k+1}$

Všechny uspořádané $(k+1)$–tice rozdělíme do skupin podle toho, který z n_{k+1} prvků mají na posledním místě. Skupin je n_{k+1} a každá obsahuje tolik prvků, kolik je jich v $M_1 \times M_2 \times ... \times M_k$, a to je $n_k \Rightarrow$

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k \times M_{k+1}| = \underbrace{m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k + ... + m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k}_{m_{k+1}} =$$

$$= m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{k+1}$$]

Př.: $M = \{a,b,c,d\}$

$R_1(M) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

$R_2(M) = \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$

$R_3(M) = \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}$

$R_4(M) = \{\{a,d\},\{b\},\{d\}\}$

$R_5(M) = \{\{b,c\},\{b\},\{d\}\}$

$R_6(M) = \{\{b,d\},\{b\},\{d\}\}$

$R_7(M) = \{\{c,d\},\{b\},\{d\}\}$

$R_8(M) = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$

$R_9(M) = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$

$R_{10}(M) = \{\{a,d\},\{b,c\}\}$

$R_{11}(M) = \{\{a\},\{b,c,d\}\}$

$R_{12}(M) = \{\{b\},\{b,c,d\}\}$

$R_{13}(M) = \{\{c\},\{b,c,d\}\}$

$R_{14}(M) = \{\{d\},\{b,c,d\}\}$

$R_{15}(M) = \{\{a,b,c,d\}\}$

Pozn.: Pravidlo součinu se v kombinatorice formuluje většinou takto:
Lze-li uspořádanou k-tici objektů vybrat tak, že první prvek vybíráme m_1 způsoby, druhý prvek vybíráme m_2 způsoby,…, k-tý prvek vybíráme m_k způsoby a přitom výběry jednotlivých prvků na sobě nezávisejí, pak je počet všech uspořádaných k-tic $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$.

Př.: Paní X má ve svém šatníku 4 páry obuvi, 5 sukní a 3 halenky. Kolika způsoby se může obléct?
$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ způsobů oblečení.

V.1.3.: **Dirichletův princip**
Má-li být alespoň nk + 1 předmětů rozděleno do k přihrádek, pak alespoň v jedné přihrádce je alespoň n + 1 předmětů.

[Dk. sporem:
Předpokládejme, že v každé přihrádce je nejvýše n předmětů.
Pak pro počet N všech předmětů platí:

$N \geq nk+1$ (z předpokladu věty)

$N \leq \underbrace{n+n+...+n}_{k-krat} = nk$ (z předpokladu sporu) $\Rightarrow$ spor]

Př.: Aleš má ve své spíži instantní polévky 4 druhů, od každé 3 kusy. Kolik polévek musí ze spíže vytáhnout, aby
a) měl dvě stejné: 4 druhy $\cdot 1$ polévka + 1 libovolná = 5
b) alespoň jedna je česneková: 3 ostatní druhy $\cdot 3$ polévky + 1 = 10

§2. Pořadí, variace, kombinace bez opakování

Def.: Nechť M je konečná n-prvková množina ($|M| = n$).
Uspořádanou n-tici prvků z množiny M, v níž se každý vyskytuje právě jednou, nazveme pořadím prvků z množiny M (pořadí z n-prvků).
Počet všech pořadí z n prvků označme $P(n)$.

V.2.1.: Pro $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:
$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ (čteme faktoriál)

[Dk.:
I. kombinatorickou úvahou:
Odvodíme rekurentní vztah $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$:
Rozdělme všechna pořadí z $(n+1)$–prvků do $(n+1)$ skupin podle toho, který prvek je na posledním místě. V každé této skupině je tolik prvků, kolik je všech pořadí ze zbylých n prvků, tj. $P(n)$. Podle V.1.2 $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$. Pak
$P(n) = n \cdot P(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot P(n-2) = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

II. podle pravidla součinu:
Množina všech pořadí je vlastně kartézským součinem n takovýchto množin: První z nich obsahuje právě prvky množiny M, tedy n prvků, druhá obsahuje $(n-1)$ prvků, neboť v pořadí se daný prvek může vyskytovat pouze 1x, třetí obsahuje $(n-2)$ prvků,…, n-tá množina obsahuje 1 prvek. Proto počet prvků tohoto součinu (což je zároveň počet pořadí) je roven $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.]

Def.: Pro lib. číslo $n \in \mathbf{N}$ definujeme
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$
$0! = 1$

Def.: Nechť M je konečná n-prvková množina, $k \le n$.
k-prvkovou variací z prvků množiny M (k- prvkovou variací z n prvků) nazveme libovolnou uspořádanou k-tici v níž se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.
Počet všech k-prvkových variací z n prvků budeme značit $V(k, n)$.

Pozn.: Často se užívá označení variace k-té třídy z n prvků.

V.2.2.: Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \le n$. Pak platí:
$$V(k,n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k-cinitelu} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[Dk.:
I. kombinatorickou úvahou:
Uvažme všechna pořadí prvků množiny M (počet $n!$) a rozdělme je do skupin tak, aby v této skupině byly ty n-tice, které se shodují v prvních k prvcích. Těchto skupin je $V(k,n)$ a každá obsahuje $(n - k)!$ prvků, neboť přesně tolika způsoby lze zbylých nevybraných $(n - k)$ prvků přeskládat na zbylých $(n - k)$ místech.
Tedy $n! = (n-k)! V(k,n) \Rightarrow V(k,n) = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)$.

II. podle pravidla součinu:

prvek k-tice:	1	2	3	…	k
lze vybrat způsoby:	n	n-1	n-2	…	n - k+1

Podle pravidla součinu $V(k,n) = P(k)\cdot K(k,n) \Rightarrow K(k,n) = \dfrac{V(k,n)}{P(k)}$.]

Pozn.: Pořadí n-prvkové množiny je tedy n-prvková variace n-prvkové množiny.

Def.: Nechť M je konečná n-prvková množina. Nechť $k \in \mathbf{N_0}$, $k \le n$.
Libovolnou k-prvkovou podmnožinu množiny M nazýváme <u>k-prvkovou kombinací prvků z prvků množiny M (k-prvkovou kombinací z n prvků)</u>.
Počet všech k-prvkových kombinací všech prvků značíme $K(k, n)$.

Pozn.:
1. Místo pojmu podmnožina bychom mohli hovořit o neuspořádané k-tici prvků množiny M, v níž je každý z prvků použit nejvýše jednou.
2. Variace a kombinace se tedy liší uspořádaností.

V.2.3.: Nechť $k, n \in \mathbf{N_0}$, $k \le n$, pak platí:

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

[Dk.: Uvažme všechny k-prvkové variace z n prvků a ty rozdělme do skupin podle toho, které prvky se v nich objevují. Pak ze všech variací, které jsou v jedné skupině, můžeme vytvořit 1 kombinaci. Proto počet skupin je $K(k,n)$ a každá skupina obsahuje $P(k) = k!$ variací.

Tedy $V(k,n) = P(k)\cdot K(k,n) \Rightarrow K(k,n) = \dfrac{V(k,n)}{P(k)}$.]

Def.: Nechť $k, n \in \mathbf{N_0}$, $k \le n$, pak definujeme
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, čteme „$n$ nad k“ a výraz $\binom{n}{k}$ nazýváme <u>kombinačním číslem</u> (resp. <u>binomickým koeficientem</u>).

Pozn.: 1. $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

2. vzhledem k tomu, že kombinační číslo udává počet všech podmnožin $\Rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbf{N}$

V.2.4.: Nechť $k, n \in \mathbf{N_0}$, $k \le n$, pak platí

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $k < n$

[Dk.:

1. z definice

$$L = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$P = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$L = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$P = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$]

Př.:

a) Kolika způsoby lze rozmíchat 32 karet?
= pořadí = 32!

b) Konference 90 delegátů
4 členný výbor (záleží na pořadí)
= variace = $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 = \frac{90!}{86!}$
3 členná delegace (nezáleží na pořadí)
= kombinace = $\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6}$

c) Kolika způsoby se může rozesadit 35 cestujících na 35 místech?
= pořadí = 35!

d) 5 přátel si navzájem třese rukama, jaký je počet potřesení?
= kombinace = $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

e) Souvislá síť 2760 stanic, kolik je potřeba druhů lístků?
= variace = $\frac{2760!}{(2760-2)!} = 2760 \cdot 2759$

f) Sportka – vybrat 6 polí z 49
= kombinace = $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$

g) Kolik čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 1.. 7 aby se neopakovala?
= variace = $\frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Př.: V hotelu je 50 lůžek. Potřebujeme uložit 35 nocležníků.

1) Z hlediska nocležníků, důležité kdo bude na které posteli

= variace = $V(35,50)=\dfrac{n!}{(n-k)!}=\dfrac{50!}{15!}=2{,}3\cdot 10^{52}$

2) Z hlediska správce, důležité pouze obsazené postele

= kombinace = $K(35,50)=\dbinom{50}{35}=\dfrac{50!}{35!15!}=2{,}25\cdot 10^{12}$

Př.: Dokažte: $\dbinom{p}{q}=\dbinom{p-1}{q-1}+\dbinom{p-2}{q-1}+\ldots+\dbinom{q-1}{q-1}$; $p,q\in N, p\geq q$

1) $\dbinom{n}{k}+\dbinom{n}{k+1}=\dbinom{n+1}{k+1}$

-sečíst předposlední s posledním… $\dbinom{q-1}{q-1}=\dbinom{q}{q}\Rightarrow\dbinom{q}{q-1}+\dbinom{q}{q}=\dbinom{q+1}{q}$

-sečíst předpředposlední s předposledním … $\dbinom{q+1}{q-1}+\dbinom{q+1}{q}=\dbinom{q+2}{q}$

-… $\Rightarrow\dbinom{p}{q}=\dbinom{p-1}{q-1}+\dbinom{p-1}{q}$, tvrzení platí

2) Matematickou indukcí

(a) $p=1$

$p,q\in N, p\geq q\Rightarrow q=1$

$L=\dbinom{1}{1}; P=\dbinom{0}{0}\Rightarrow L=P$

(b) $\forall p\in N: \dbinom{p}{q}=\dbinom{p-1}{q-1}+\ldots+\dbinom{q-1}{q-1}\Rightarrow\dbinom{p+1}{q}=\dbinom{p}{q-1}+\underbrace{\dbinom{p-1}{q-1}+\ldots+\dbinom{q-1}{q-1}}_{\binom{p}{q}}$

$L=\dbinom{p+1}{q}$

$P=\dbinom{p+1}{q}+\dbinom{p}{q}=\dbinom{p+1}{q}$

$\Rightarrow L=P$

Př.: Dokažte: $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+...+n\cdot\binom{n}{n}=2^{n-1}\cdot n;\ n\in N$

Levá strana:

$1\cdot\binom{n}{1}$ počet prvků ve všech 1-prvkových podmnožinách *n*-prvkové množiny

$2\cdot\binom{n}{2}$ počet prvků ve všech 2-prvkových podmnožinách *n*-prvkové množiny

…

$n\cdot\binom{n}{n}$ počet prvků ve všech *n*-prvkových podmnožinách *n*-prvkové množiny

$=1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+...+n\cdot\binom{n}{n}$ užitím pravidla součtu

= počet všech prvků ve všech podmnožinách *n*-prvkové množiny

Pravá strana:

2^{n-1} počet podmnožin *n*-prvkové množiny, ve kterých leží libovolný, pevně zvolený prvek *p*

n počet prvků *n*-prvkové množiny

$=2^{n-1}\cdot n$ užitím pravidla součinu

= počet všech prvků ve všech podmnožinách *n*-prvkové množiny

§3. Binomická věta

V.3.1.: **Binomická věta**

$\forall n \in$ **N**; $\forall a,b \in$ **R:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

[Dk.:

I. Kombinatorickou úvahou

Roznásobením výrazu $\underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n} = \sum$ členů $a^i b^j$, kde $i+j=n$.

Spočítejme, kolikrát je zde sčítanec tvaru $a^{n-k}b^k$.

Tolikrát, kolika způsoby lze z n závorek vybrat k-takových, z nichž vezmeme číslo b (ze zbylých $(n-k)$ závorek vezmeme číslo a). To je počet k-prvkových kombinací z n prvků, to je $\binom{n}{k}$.

II. Matematickou indukcí

1. $n=1$:

$L = (a+b)^1 = (a+b)$

$P = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a+b$

2. $\forall n \in$ **N:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}b^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b^1 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b^1 + \ldots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$\binom{n}{0}a^n b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$\overline{\binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b^1 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}}$$

Pozn.: Binomický rozvoj $(a+b)^n$ obsahuje $n+1$ sčítanců.

k-tý člen rozvoje je tvaru $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$

Pozn.: Pro rychlý výpočet koeficientů zapisujeme kombinační číslo do tzv. Pascalova trojúhelníku.

Pascalův trojůhelník

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{1} & & & \\ & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Pozn.: Z binomické věty dostáváme pro a), b) zajímavé součty a vzorce

a) $a = b = 1$

$$S_1 = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Je to počet všech podmnožin n-prvkové množiny

b) $a = 1$, $b = -1$

$$S_2 = (1+(-1))^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Př.: Určete součty

a) $S_3 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \dfrac{S_1 + S_2}{2} = 2^{n-1}$

b) $S_4 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = \dfrac{S_1 - S_2}{2} = 2^{n-1}$

$S_3 = S_4 \Rightarrow$ počet podmnožin n-prvkové množiny o sudém počtu prvků je stejný jako počet podmnožin o lichém počtu prvků

Př.: Určete součty

a) $S_3 = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = (1+2)^n = 3^n$

b) $S_4 = \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n 2^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k} = (1-2)^n = (-1)^n$

Př.: Jaký koeficient má u x^8 funkce $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$

I. rozepsáním

$$\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \binom{10}{0}3^{10}x^{20} - \binom{10}{1}3^9 x^{18-1} + \binom{10}{2}3^8 x^{16-2} - \binom{10}{3}3^7 x^{14-3} + \binom{10}{4}3^6 x^{12-4} - \ldots \Rightarrow \binom{10}{4}3^6$$

II. ! pomocí exponentu

hledaný koeficient členu $\binom{\ }{\ }\cdot(\ )^i\cdot(\ )^j$

$$i + j = n$$
$$i + j = 10$$
$$i = 10 - j$$

$$2i - j = 8$$
$$20 - 3j = 8$$
$$\Rightarrow j = 4 \qquad i = 6$$

$$\binom{10}{i}3^i(-1)^j = \binom{10}{6}3^6(-1)^4 = \binom{10}{4}3^6$$

Př.: Určete absolutní člen v rozvoji výrazu $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$

$$i + j = 6 \Rightarrow i = 6 - j$$
$$2i - j = 0 \Rightarrow 2i = j$$
$$j = 4 \quad \mathrm{i} = 2$$
$$\binom{10}{i}3^i(-1)^j = \binom{6}{2}2^2 3^4 = 4860$$

Př.: Dokažte: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \geq 1 + nx\ ;\ x \in R_0^+$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x = 1 + nx$$

$\Rightarrow$ platí

$$x \in R_0^+ \Rightarrow \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \geq 0$$

§4. Pořadí, variace, kombinace s opakováním

Př.: Kolik různých „slov“ lze vytvořit přestavením písmen slova:
a) BALET … 5!=120
b) ABRAKADABRA … $5 \cdot A, 2 \cdot B, 2 \cdot R, 1 \cdot K, 1 \cdot D \Rightarrow \dfrac{11!}{5!\,2!\,2!\,1!\,1!}$

Def.: Nechť je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, …, n_d prvků d-tého druhu (prvky téhož druhu považujeme za nerozlišitelné). Nechť $n_1+n_2+\ldots+n_d = n$.
Pořadím s opakováním (permutací s opakováním) z n_1 prvků 1.druhu, n_2 prvků 2.druhu, …, n_d prvků d-tého druhu nazveme každou uspořádanou n-tici, která obsahuje n_1 prvků 1.druhu, n_2 prvků 2.druhu, …, n_d prvků d-tého druhu.
Počet všech těchto pořadí označíme $P_o(n_1, n_2, \ldots, n_d)$.

Př.: Proveďte

$$\left(t^3 - u\sqrt{3}\right)^6 = t^{18} - \binom{6}{1} t^{15} 3^{0.5} u + \binom{6}{2} t^{12} 3\ u^2 - \binom{6}{3} t^9 3^{1.5} u^3 + \binom{6}{4} t^6 3^2 u^4 - \binom{6}{5} t^3 3^{2.5} u^5 + \binom{6}{6} 3^3 u^6 =$$
$$= t^{18} - 6\sqrt{3} t^{15} u + 45 t^{12} u^2 - 60\sqrt{3} t^9 u^3 + 135 t^6 u^4 - 54\sqrt{3} t^3 u^5 + 27 u^6$$

Pozn.: Dvě pořadí s opakováním považujeme za různá, jestliže alespoň na jednom místě jsou prvky různých druhů.

V.4.1.: Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbf{N}$ jsou čísla taková, že $n_1 + n_2 + \ldots + n_d = n$. Pak platí:

$$P_0(n_1, n_2, \ldots, n_d) = \frac{n!}{n_1!\,n_2! \ldots n_d!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{d} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{d} n_i!}$$

[Dk.:
Předpokládejme nejprve, že prvky každého druhu jsou rozlišitelné a vypišme všech n! pořadí těchto navzájem různých prvků. Rozdělme je nyní do skupin podle toho, které pořadí s opakováním reprezentují. Skupin je $P_0(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ a každá skupina obsahuje $n_1!, n_2!, \ldots, n_d!$ rozlišitelných pořadí $\Rightarrow$
$n! = P_0(n_1, n_2, \ldots, n_d) \cdot n_1!\,n_2! \ldots n_d!$]

Př.: Určete počet všech 6-ti ciferných čísel, které lze sestavit z číslic 1,2,3,4.
Podle pravidla součinu $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6$ možností

Def.: Nechť je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, …, n_d prvků d-tého druhu. Nechť $k \in \mathbf{N}$: $k \le n_i$ pro $\forall i \in \{1,2,\ldots,d\}$
k-prvkovou variací s opakováním z prvků daných d druhů nazveme každou uspořádanou k-tici vytvořenou z prvků těchto d druhů.
Počet těchto variací označíme $V_0(k,d)$.

V.4.2.: Pro $\forall\, k, d \in \mathbf{N}$ platí:
$$V_0(k,d) = \underbrace{d \cdot d \cdot \ldots \cdot d}_{k} = d^k$$

[Dk.:

Plyne okamžitě z pravidla součinu. (Každá k-prvková variace je uspořádanou k-ticí. V každé složce této k-tice může být jeden z d daných druhů. Podle pravidla součinu je $V_o(k,d) = \underbrace{d \cdot d \cdot \ldots \cdot d}_{k} = d^k$.)]

Př.!: V obchodě mají 4 druhy kávy. Kolika způsoby lze pořídit nákup 6-ti balíčků?

1.druh		2.druh		3.druh		4.druh
11	|0|	1	|0|		|0|	111

Každý nákup „zašifrujeme“ pomocí uspořádané 9-tice z 6 jedniček a 3 nul tak, že napíšeme tolik jedniček kolik je káv prvního druhu, oddělíme nulou, napíšeme kolik je káv druhého druhu, oddělíme, … .

Každému nákupu lze přiřadit takovou 9-tici a naopak každé 9-tici lze přiřadit nákup $\Rightarrow$ jde o bijekci.

Těchto 9-tic (tedy těchto nákupů) je tolik, kolik je pořadí s opakováním ze 6 jedniček a 3 nul.

$$P_0(6,3) = \frac{9!}{6!\,3!} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84 \text{ nákupů}$$

Def.: Nechť je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, …, n_d prvků d-tého druhu. Nechť $k \in \mathbf{N}$: $k \le n_i$ pro $\forall i \in \{1,2,\ldots,d\}$.

<u>k-prvkovou kombinací s opakováním z prvků</u> daných <u>d druhů</u> nazveme každou neuspořádanou k-tici vytvořenou z prvků těchto d-druhů.

Počet všech těchto kombinací označíme $K_0(k,d)$.

Pozn.: Dvě kombinace považujeme za různé, jestliže se liší počtem prvků alespoň jednoho druhu.

V.4.3.: $\forall\, k, d \in \mathbf{N}$ **:** $K_0(k,d)$

$$K_0(k,d) = P_0(k,d-1) = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} = \binom{k+d-1}{k} = \binom{k+d-1}{d-1}$$

[Dk.:!

Každou k-prvkovou kombinaci „zašifrujeme“ pomocí k jedniček a (d -1) nul tak, že napíšeme tolik jedniček, kolik je prvků 1.druhu, oddělíme nulou, napíšeme tolik jedniček, kolik je prvků 2.druhu, …, napíšeme tolik jedniček kolik je prvků d-tého druhu.

Tato „šifra“ je bijekcí množiny všech k-prvkových kombinací s opakováním z prvků d druhů na množinu všech uspořádaných (k+d-1)-tic složených z k jedniček a (d -1) nul.

Tedy $K_0(k,d) = P_0(k,d-1) = \dfrac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} = \dbinom{k+d-1}{k} = \dbinom{k+d-1}{d-1}$.]

Př.: 35 výletníků si objedná 12 druhů jídel. Kolik existuje různých druhů objednávek?

a) hledisko kuchaře (důležitý počet jednotlivých druhů jídel)

$$K_0(k,d) = P_0(k,d-1) = \frac{(35+12-1)!}{35!11!} = \frac{46!}{35!11!} = \binom{46}{35}$$

b) hledisko výletníků (důležité kdo dostane jaké jídlo)

$V_0(k,d) = 12^{35} = 5{,}9 \cdot 10^{37}$

Př.: 48/6,7,9

1) 35 výletníků, kolika způsoby se můžou rozdělit tak, aby 17 jelo vlakem, 8 autobusem, 6 lodí a 4 pěšky.

$$P_0(4,6,8,17) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_d!} = \frac{35!}{4!6!8!17!}$$

2) 26 písmen, kolik lze utvořit 6-ti místných slov?

$V_0(6,26) = 26^6$ slov

Př.: Máme 4 desetihaléřové mince, 4 korunové a 7 pětikorunových mincí.

a) Kolik různých částek můžeme těmito mincemi zaplatit, jestliže platíme jednou, dvěma, třemi nebo čtyřmi mincemi?

1 mince $\binom{3}{1}$

2 mince $\binom{3+2-1}{3-1} = \binom{4}{2}$

3 mince $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$

4 mince $\binom{3+4-1}{3-1} = \binom{6}{2}$

Pravidlo součtu: $\binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 34$ kombinací

b) Jestliže platíme jedním, dvěma nebo třemi druhy mincí?

1 druh:

desetníky 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 $\Rightarrow$ 4 možnosti

koruny 1;2;3;4 $\Rightarrow$ 4 možnosti

pětikoruny 5;10;…;35 $\Rightarrow$ 7 možností

2 druhy: $4 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 72$

3 druhy: $4 \cdot 4 \cdot 7 = 112$

Pravidlo součtu: $4 + 4 + 7 + 72 + 112 = 199$

§5. Kombinatorické úlohy s omezujícími podmínkami

Př !.: Ve třídě je 20 chlapců a 15 dívek. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat 6-ti člennou delegaci, mají-li zde být

a) právě 2 dívky a 4 chlapci

chlapci… $\binom{20}{4}$, dívky… $\binom{15}{2}$

$$\binom{20}{4}\binom{15}{2} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 15\cdot 15}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2} = 508725$$

b) nejvýše 2 dívky

2 dívky (4 chlapci) $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$ 1 dívka (5 chlapců) $\binom{20}{5}\binom{15}{1}$

0 dívek (6 chlapců) $\binom{20}{6}\binom{15}{0}$

pravidlo součtu: $\binom{20}{4}\binom{15}{2}+\binom{20}{5}\binom{15}{1}+\binom{20}{6}\binom{15}{0}$ = 780045

c) alespoň 2 dívky

1) 2 dívky $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$ 3 dívky $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$

4 dívky $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$ 5 dívek $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$

6 dívek $\binom{20}{4}\binom{15}{2}$

pravidlo součtu: $\binom{20}{4}\binom{15}{2}+\binom{20}{4}\binom{15}{2}+\binom{20}{4}\binom{15}{2}+\binom{20}{4}\binom{15}{2}+\binom{20}{4}\binom{15}{2}$

2) dohromady $\binom{35}{6}$ 0 dívek $\binom{20}{6}\binom{15}{0}$

1 dívek $\binom{20}{5}\binom{15}{1}$

$$\binom{35}{6}-\binom{20}{5}\binom{15}{1}-\binom{20}{6}\binom{15}{0}=1351840$$

Př !.: Na taneční zábavě se sešlo 12 dívek a 15 chlapců. Určete, kolika způsoby lze vybrat 4 páry (pár = chlapec + dívka).

$$\underbrace{\binom{12}{4}}_{\text{vyber divek}}\cdot\underbrace{\binom{15}{4}}_{\text{vyber chlapcu}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{usporadani dvojic}}=1351840$$

Př.: 49/12/13/14

a) 5 lůžkových, 7 jídelních, 20 obyčejných vagónů. Sestavte soupravu o 5-ti vagónech.

uspořádané vagóny - $V_0(5,3)=3^5=243$

neuspořádané vagóny – $K_0(5,3)=P_0(5,2)=\frac{(5+2)!}{5!\,2!}=21$

b) 73 žlutých, 41 modrých, 50 červených a 19 zelených kuliček. Kolik různých uskupení 10 kuliček můžeme dostat?

$K_0(10,4)=P_0(10,3)=\frac{(10+3)!}{3!\,10!}=286$

c) 35 oken, 5 praporů, 7 druhů praporů. Jak můžeme ozdobit okna?

$P_0(\underbrace{5,5,\ldots,5}_{7})=\frac{35!}{5!\,5!\ldots5!}=\frac{35!}{(5!)^7}$

Př.: Kolik různých slov můžeme získat záměnou slov LOKOMOTIVA, aby nebyly vedle sebe dvě O?

a) bez O (LKMTIVA)… 7!

přidání třech O do 8 mezer (_L_K_M_T_I_V_A_) …$=\binom{8}{3}$

b) všechny možnosti $P_0(10,8)=\frac{10!}{3!}$

dvojité písmeno „OO“ (uspořádání 9 písmen) 9!

trojité písmeno „OOO“ (uspořádání 8 písmen) 8!

$=\frac{10!}{3!}-9!+8!$

Př.: 59/13

Kolika způsoby lze z 10 kosmonautů vybrat 4-člennou posádku, aby nebyli jistí dva kosmonauti neletěli spolu?

$\underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{pocet ctveric}}-\underbrace{\binom{8}{2}}_{\text{moznosti kdy leti spolu}}=182$

Př.: 8.10, 8.11

a) 7 chlapců, 4 dívky. Sestavte 6-ti členné družstvo s alespoň 2 děvčaty

všichni $\binom{11}{6}$ 1 dívka $\binom{7}{5}\binom{4}{1}$

$=\binom{11}{6}-\binom{7}{5}\binom{4}{1}=371$

nebo $\binom{4}{2}\binom{7}{4}+\binom{4}{3}\binom{7}{3}+\binom{4}{4}\binom{7}{2}=371$

b) 20 různých knížek do 5 polic, do každé police se vejdou všechny knihy.

neuspořádané $K_0(20,5)=\dfrac{24!}{20!\,4!}$

uspořádané $\dfrac{P\ (20,4)}{P(4)}=\dfrac{24!}{4!}$

Př.: Kolika způsoby lze z 32 karet piket (7 - A) vybrat 6 karet tak, aby mezi nimi byla zastoupena každá barva (každá barva má 8 karet)?
Podle Dirichletova principu

3 karty 1 barvy $\quad 3\ 1\ 1\ 1 \Rightarrow \underbrace{\binom{4}{1}\binom{8}{3}}_{\text{vyber tri karet jedne barvy}} \cdot \underbrace{\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}}_{\text{vyber ostatnich barev}}$

2 karty 1 barvy a 2 karty 2 barev $\quad 2\ 2\ 1\ 1 \Rightarrow \underbrace{\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}}_{\text{vyber dvou karet dvou barev}} \cdot \underbrace{\binom{8}{1}\binom{8}{1}}_{\text{ostatni karty}}$

pravidlo součtu: $\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1}+\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1}=315392$

Př.: $x_1+x_2+...+x_k=n\ ;\ n,k\in N$

a) Počet řešení v Z_0^+

$\rightarrow$ rozdělení n objektů do k přihrádek
| …(k - 1) přepážek _ ... n objektů
např. _ _ | _ | | _ |

$\Rightarrow$ dohromady $n+(k-1)$ pozic, které obsazujeme | nebo _

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}=\binom{n+k-1}{n}=\binom{n+k-1}{k-1}$$

b) Počet řešení v **N**

$n\geq k \Rightarrow$ do každé přihrádky dáme 1 objekt a rozdělíme zbývajících $n-k$ objektů libovolně do k přihrádek

$$K_0(n-k,k-1)=\frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=\binom{n-1}{k-1}$$

$n<k$ … 0 řešení

c) Počet řešení v **Z**, kde $x_1\geq c_1, x_2\geq c_2,...,x_k\geq c_k;\ c_1,c_2,...,c_k$ jsou daná celá čísla

$n\geq c_1+c_2+...+c_k \Rightarrow$

$$K_0(n-(c_1+c_2+...+c_k),k-1)=\binom{n-(c_1+c_2+...+c_k)+k-1}{k-1}$$

$n\leq c_1+c_2+...+c_k$ … 0 řešení

§6. Kombinatorická geometrie

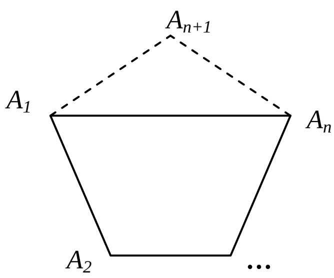
Př !.: Odvoďte vztah pro počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku.

I. z každého vrcholu vede n -3 úhlopříček, počet vrcholů je n a každá úhlopříčka je započítaná 2x $\Rightarrow u_n = \frac{(n-3)n}{2}$

II. počet spojnic 2 vrcholů (tj. stran i úhlopříček) je $\binom{n}{2}$, z toho n spojnic nejsou úhlopříčky $\Rightarrow u_n = \binom{n}{2} - n = \frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{(n-3)n}{2}$

III. !!! nejobecnější postup v kombinatorické geometrii

1) odvození <u>rekurentního vztahu:</u>



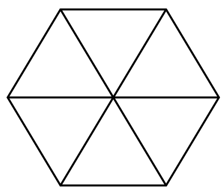
Je dán n-úhelník. Zjistíme, kolik přibude úhlopříček, přidáme-li 1 vrchol (vytvoříme (n +1)-úhelník)
z (n +1)-ního vrcholu přibude (n +1)-3 úhlopříček, také jedna strana A_1A_n se stane úhlopříčkou $\Rightarrow$ přibude (n +1)-3+1 = n -1 úhlopříček
$u_{n+1} = u_n + (n-1)$, $u_3 = 0$ (počáteční podmínka)

2) odvození <u>explicitního vztahu:</u>

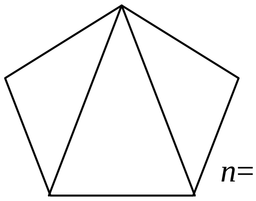
$$u_3 = 0$$
$$u_4 = 2 = u_3 + 2$$
$$u_5 = 5 = u_4 + 3$$
$$u_6 = 9 = u_5 + 4$$
$$\underline{u_n = u_{n-1} + (n-2)}$$
$$u_n = 2+3+...+(n-2) = (1+2+3+...+(n-2)) - 1 = \frac{(n-2)(n-2+1)}{2} - 1$$
$$= \frac{n^3 - 3n}{2} = \frac{(n-3)n}{2}$$

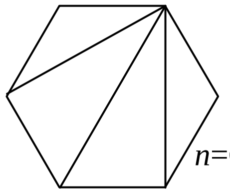
Př.: Odvoďte vztah pro součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku.

I. $S_n + 360° = n \cdot 180°$ $\quad S_n = (n-2)\cdot 180°$



II. počet trojúhelníků
$S_n = (n-2)\cdot 180°$





III. matematickou indukcí:

hypotéza $S_n = (n-2)\cdot 180°$

1. $n = 3 : S_3 = 180°$
2. $\forall k \in \{3,4,...,n\} : S_k = 180^0 \cdot (k-2) \Rightarrow S_{n+1} = 180^0 \cdot (n-2)$

   $S_{n+1} = S_n + S_3 = 180^0 \cdot (n-2) + 180^0 = 180^0 \cdot (n-2+1) = 180^0 \cdot (n-1)$

   přibude jeden trojúhelník

Př !.: V rovině je dáno n přímek

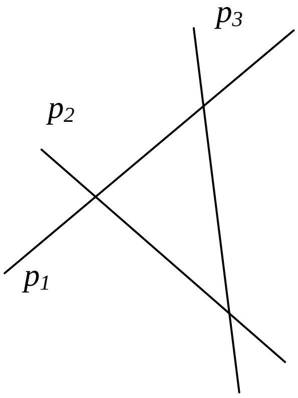
a) všechny přímky jsou rovnoběžné, různé
b) všechny procházející jedním bodem jsou různé
c) jsou v obecné poloze

Určete, na kolik částí přímky rozdělí rovinu:

a) $a_n = n+1$ rovin

b) $a_n = 2n$

c)



$a_1 = 2$

$a_2 = 4 = a_1 + 2$

$a_3 = 7 = a_2 + 3$

$a_4 = 11 = a_3 + 4$

$a_n = a_{n-1} + n$

$$a_n = 2+2+3+4+...+n = 1+1+2+...+n = \frac{(n+1)n}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}$$

(n+1)-ní přímka protne n přímek v n bodech $\Rightarrow$ rozdělí je na n +1 částí

§7. Součty k-tých mocnin

Pozn.: Jsou to součty typu:

$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $k \in \mathbf{N_0}$

$S_0(n) = n$

$S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

V.7.1.: $\forall k, n \in$ **N**:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}$$

[Dk.:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \binom{k+n-1}{k+1} + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}]$$

Pozn.: $\underline{k=1}$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \Rightarrow S_1(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$\underline{k=2}$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$\underbrace{1 + \frac{3\cdot 2}{2!} + \frac{4\cdot 3}{2!} + \ldots + \frac{(n+1)\cdot n}{2!}}_{k} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$S_2^*(n) = 2k = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + \ldots + (n+1)\cdot n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$S_2^*(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} (i^2+i) = (1^2+1) + (2^2+2) + (3^3+3) + \ldots + (n^2+n)$$

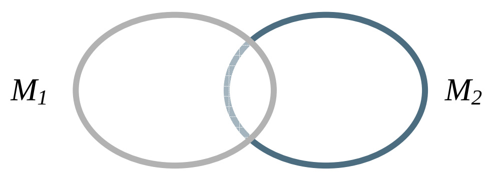
$$S_2^*(n) = S_2(n) + S_1(n) \Rightarrow S_2(n) = S_2^*(n) - S_1(n)$$

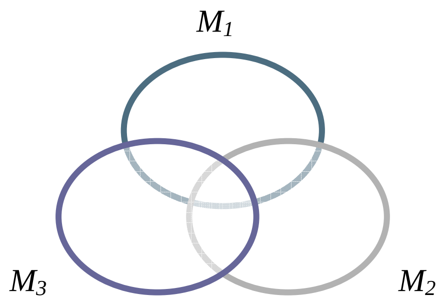
$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

§8. Princip inkluze a exkluze

Pozn.: $|M|$… počet prvků množiny M
Je-li dáno k konečných množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$, vyjádříme počet prvků jejich sjednocení pomocí počtu prvků množin a jejich průniků:
k=2:
$|M_1 \cup M_2|=|M_1|+|M_2|-|M_1 \cap M_2|$

k=3:
$|M_1 \cup M_2 \cup M_3|=|M_1|+|M_2|+|M_3|-|M_1 \cap M_2|-|M_1 \cap M_3|-|M_2 \cap M_3|+|M_1 \cap M_2 \cap M_3|$





V.8.1.: <u>Princip inkluze a exkluze</u>
Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou konečné množiny. Pak platí:

$$
\begin{aligned}
|M_1 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_k| = {} & |M_1| + |M_2| + \ldots + |M_k| - \\
& |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \ldots - |M_1 \cap M_k| - \ldots - |M_{k-1} \cap M_k| + \\
& |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \ldots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| - \ldots \\
& \ldots \\
& + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k| \\
= {} & \sum (-1)^{r+1} |M_{j1} \cap M_{j2} \cap \ldots \cap M_{jr}|
\end{aligned}
$$

zde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, \ldots, j_r\}$ množiny $\{1,2,\ldots,r\}$
[Dk.:

Zvolme libovolný prvek $m \in M_1 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_k$.
Je zřejmé, že na levé straně je prvek *m* započítán jednou.
Nechť $M_{q1}, M_{q2}, \ldots, M_{qs}$ jsou právě ty množiny, ve kterých se prvek *m* nachází, tzn. $m \in M_{q_1} \cap M_{q_1} \cap \ldots \cap M_{q_s}$.
Prvek *m* je započítán v těch množinách $M_{j_1} \cap M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ pro které platí:
$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subseteq \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$.
$\forall r \in \{1,2,\ldots,s\}$ je prvek *m* započítán v $\binom{s}{r}$ sčítancích tvaru
$M_{j_1} \cap M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_r}$, pro $r > s$ v žádném.

Celkový „příspěvek“ prvku m na pravé straně vzorce:

$$\binom{s}{1}-\binom{s}{2}+\ldots+(-1)^{s+1}\binom{s}{s}=-\underbrace{\binom{s}{0}+\binom{s}{1}+\ldots+(-1)^{s+1}\binom{s}{s}}_{0}+\binom{s}{0}=1]$$

Pozn.: Uvedený součet má 2^k-1 sčítanců.
Součet je zapsán tak, že na i-tém řádku jsou sčítance, které odpovídají i-prvkovým podmnožinám z množiny indexů $\{1,2,\ldots,k\}$ (viz. V.8.1.), kdy na i-tém řádku budu mít celkem $\binom{k}{i}$ sčítanců.

Pozn.: Princip inkluze a exkluze se používá k určení počtu objektů, které mají alespoň jednu z vybraných k-vlastností. Označíme-li pro $\forall i\in\{1,2,\ldots,k\}$ M_i množinu všech objektů, které mají i-tou vlastnost, pak hledáme počet prvků množiny $M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_k$, tedy $|M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_k|$.

Př.: Sportovní klub ve kterém jsou 4 oddíly A,B,C,D. Kolik dětí chodí celkem do klubu?

A…26	AB…7	ABC…5	ABCD…0
B…17	AC…18	ABD…0	
C…58	AD…3	ACD…2	
D…19	BC…9	BCD…0	
	BD…0		
	CD…5		

$|M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4|=$
$(26+17+58+19)-(7+18+9+0+5+3)+(5+0+2+0)-(0)=120-42+7=85$

Př !.: Určete počet všech pořadí n-prvků.

I. $m_1,m_2,\ldots,m_n$ s vlastností pro žádné $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ m_i prvek nestojí na i-tém místě.
M_i - množina všech pořadí v níž m_i prvek bude stát na i-tém místě.
p_n - hledaný počet
p_n' - počet pořadí, kde alespoň jeden prvek m_i stojí na i-tém místě.

---

p_n' je negace p_n

$p_n' + p_n = n!$... počet všech pořadí

$p_n = n! - p_n'$

$p_n' = |M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n|$

alespoň 1 prvek stojí na svém místě $\binom{n}{1}(n-1)!$

alespoň 2 prvky stojí na svém místě $\binom{n}{2}(n-2)!$

…

alespoň r prvků stojí na svém místě $\binom{n}{r}(n-r)!$

…

n prvků stojí na svém místě $\binom{n}{n}(n-n)!$

$$\binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\binom{n}{3}(n-3)!+$$

$$-\ldots+(-1)^{r+1}\binom{n}{r}(n-r)!+$$

$$+\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!=\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)!-\frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)!+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 1=$$

$$=\frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}(n-r)!=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{n!}{r!}=p_n'$$

$$p_n=n!-p_n'=n!-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{n!}{r!}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\frac{n!}{r!}=n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\frac{1}{r!}$$

II. Odvození rekurentního vzorce

Nechť $n \geq 2$.

Všech p_n pořadí rozdělíme do skupin podle toho, kterým prvkem budou začínat.

Nechť skupina začíná prvkem m_k ($k \geq 2$)

$[m_k,\ldots,k$ - té místo,...] - toto pořadí si rozdělíme na dvě disjunktní skupiny podle toho jaký prvek je na k-tém místě.

1. na k-tém místě prvek m_1

   $[m_k,\ldots,m_1,\ldots] \Rightarrow p_{n-2}$

2. na k-tém místě nestojí prvek m_1

   $[m_k,\ldots] \Rightarrow$ rozmístění zbylých si označíme p_{n-1}.

   v každé skupině $(p_{n-1}+p_{n-2})$ možných pořadí

   $p_n=(n-1)(p_{n-1}+p_{n-2})$; $p_1=0$, $p_2=1$

Př.: <u>Problém roztržité sekretářky</u>

V n různých obálkách je n různých dopisů. Roztržitá sekretářka dopisy rozbalila a zpátky je rozděluje náhodně. Kolika způsoby je lze rozdělit, aby žádný dopis nebyl ve své obálce?

Uvažme všechna uspořádání dopisů a odečtěme ty, ve kterých je alespoň jeden dopis ve své obálce.

$n!-p$ $n!$...rozdělení všech, p… počet špatných dopisů

R_i rozdělení, kdy i-tý pán dostane svůj klobouk

$$|R_1| = (n-1)!$$
$$|R_i| = (n-i)!$$
$$|R_1 \cap R_2| = (n-2)!$$

$$p = |R_1 \cup \ldots \cup R_n|$$
$$p = \binom{n}{1} \cdot (n-1)! - \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \cdot (n-j)!$$
$$n! - p = n! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \cdot (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \binom{n}{j} \cdot (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \cdot \frac{n!}{(n-j)!\, j!} \cdot (n-j)!$$
$$n! - p = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \cdot \frac{1}{j!}$$
$$P(A) = \frac{n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \cdot \frac{1}{j!}}{n!} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \cdot \frac{1}{j!}$$

§9. Náhodné pokusy a náhodné jevy

Pozn.: Pokusem rozumíme jednorázové uskutečnění pevně stanovených definičních podmínek. Rozlišujeme 2 pokusy:
1. Determinovaný: za určitých podmínek lze jednoznačně předpovědět výsledek pokusů.
2. Náhodný: výsledek není jednoznačně určen podmínkami, za kterých pokusy probíhají a můžeme je mnohokrát opakovat.

Def.: Náhodným jevem budeme rozumět jakákoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu o kterém mohu po provedení pokusu říct, zda je nebo není pravdivé.

Pozn.:
a) Protože jev chápeme jako výsledek nějakého pokusu, můžeme tyto předpovědi různě kombinovat, spojovat logickými spojkami, negovat, apod.
b) Jevy budeme označovat *A*, *B*, …
c) Jevy můžeme také chápat jako možné výsledky náhodného pokusu.
d) Základním prostorem rozumíme neprázdnou množinu Ω.
Možnými výsledky jednorázového pokusu jsou prvky *a* z množiny Ω.
Třídu *a* nazveme jevovým polem (na Ω). Podmnožiny *A* náležící do jevového pole *a* nazveme jevy.

Def.: Nechť *A*,*B* jsou jevy.
a) Řekneme, že jev *A* má za důsledek jev *B* (jev *A* implikuje jev *B*) (zapisujeme $A \subseteq B$), právě tehdy když jev *B* nastane vždy, když nastane jev *A*.
b) Řekneme, že jevy *A* a *B* jsou si rovny (zapisujeme *A* = *B*) ,právě když $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, tedy jev *B* nastane právě tehdy když nastane *A*.
c) Jev, který nastane při každé realizaci pokusu, nazveme jevem jistým (označujeme Ω). Jev, který nemůže nikdy nastat, nazveme jev nemožný (označujeme $\emptyset$).

Př.:
A_1 na kostce padne 2
A_2 padne sudé číslo
A_3 padne 7
A_4 padne některé z čísel 1,2,…,6
Platí: $A_1 \subseteq A_2$ (A_1 implikuje A_2), $\emptyset = A_3$ (jev nemožný), $\Omega = A_4$ (jev jistý).

Def.: Nechť $A_1, A_2, ..., A_n$ jsou jevy. Pak definujeme:

a) Jev *A* je sjednocením jevů $A_1, A_2, ..., A_n$ (zápis $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$):
A je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů $A_1, A_2, ..., A_n$.

b) Jev *A* je průnikem jevů $A_1, A_2, ..., A_n$ (zápis $A = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$):
A je jev, který nastane právě tehdy, když společně nastanou jevy $A_1, A_2, ..., A_n$

Def.: Nechť *A*,*B* jsou jevy
a) Opačným (komplementárním, doplňkovým) jevem k jevu *A* nazýváme jev $\overline{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev *A*.

b) Rozdílem (rozdělením) jevů A,B (v tomto pořadí) nazýváme jev $A-B$, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a nenastane jev B.

Pozn.: Zřejmě platí

a) $\overline{\emptyset}=\Omega$; $\overline{\Omega}=\emptyset$

b) $A\cup\overline{A}=\Omega$; $A\cap\overline{A}=\emptyset$

c) $A-B=A\cap\overline{B}$

Př.: A…padne sudé číslo
B… padne číslo dělitelné 3

$\overline{A}$… padne liché číslo; $\overline{B}$… padne jedno z 1,2,4,5; $A\cup B$… padne 2,3,4,6;
A - B… padne 2,4; B - A… padne 3

Def.: Jevy A,B nazveme neslučitelné (disjunktní), právě tehdy když $A\cap B=\emptyset$.

Def.: Nechť je dán nějaký náhodný pokus. Jev A nazveme elementárním jevem, právě tehdy když neexistují žádné 2 jevy B,C, $A\neq B\neq C$ takové, že $A=B\cup C$, tj. jev A nelze vyjádřit jako sjednocení jevů B,C.
Množinu všech elementárních jevů nazveme jevovým polem (prostorem elementárních jevů). Je to množina všech elementárních výsledků daného náhodného pokusu. Označujeme ho Ω.

Pozn.: Každý náhodný jev lze chápat jako podmnožinu jevového pole Ω. Tedy operace s jevy převádíme na operace s množinami. Nemožném jevu pak odpovídá prázdná množina, jistému jevu celé jevové pole Ω.

§10. Pravděpodobnost

Def.: <u>Klasická definice pravděpodobnosti</u>:
Nechť Ω je konečná neprázdná množina stejně možných výsledků daného náhodného pokusu, tzn. Ω je jevové pole. Nechť $A \subseteq \Omega$ je jev. Označme $|A|$, resp. $|\Omega|$ počet prvků množiny A, resp. Ω.

Pak <u>pravděpodobností jevu</u> A nazýváme reálné číslo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Pozn.: Zřejmě platí
a) $P(\emptyset) = 0$
b) $P(\Omega) = 1$
c) Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou 2 jevy takové, že $A \cap B = \emptyset$, pak platí:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
d) $\forall A \subseteq \Omega : 0 \le P(A) \le 1$

V.10.1.: Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy. Pak platí:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
[Dk.:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|}$$ princip inkluze a exkluze]

Pozn.: Vlastnosti z předešlé poznámky (v zesílené verzi pro spočetný počet podmnožin) se užívají k tzv. <u>axiomatické definici pravděpodobnosti</u>, která podmnožině $A \subseteq \Omega$ přiřadí reálné číslo nazývané pravděpodobností, tak aby platilo a), b), c) z předchozí poznámky.

Př.: Házení 2 mincemi, určete pravděpodobnost jevů:
$\Omega = \{[H,H];[H,O];[O.H];[O,O]\}$

a) A - na obou mincích hlava
$A = \{[H,H]\}$
$P(A) = \frac{1}{4}$

b) B – alespoň na jedné minci padne orel
$B = \{[H,O];[O.H];[O,O]\}$
$P(B) = \frac{3}{4}$

c) C – na obou mincích padne totéž
$C = \{[H,H];[O,O]\}$
$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Př.: Házíme jednou kostkou $\Omega = \{1,2,...,6\}$

a) A – padne sudé číslo

$A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) B – padne číslo větší než 2

$B = \{3,4,5,6\}$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Př.: Balíček 32 karet, vytahujeme 5 karet.

a) A – mezi kartami jsou právě 3 herce

$$|A| = \binom{8}{3}\binom{24}{2} \qquad |\Omega| = \binom{32}{5}$$

$$P(A) = \frac{\binom{8}{3}\binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} = 0{,}076$$

b) B – alespoň 2 králové

$$|B| = \binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{4}\binom{28}{1} \qquad |\Omega| = \binom{32}{5}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = 0{,}105$$

V.10.2.: Nechť $A \subseteq \Omega$ je jev. Pak pro pravděpodobnost opačného jevu $\overline{A}$ platí:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

[Dk.:

$$|\overline{A}| = |\Omega| - |A|$$

$$\Rightarrow \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} - \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)\,]$$

Př.: Házíme 2 kostkami, jaká je pravděpodobnost, že alespoň na 1 kostce padne 6?

I. A_1… na 1. kostce padne 6

A_2… na 2. kostce padne 6

A… padne alespoň jedna 6

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} = P(A_2)$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

II. $\overline{A_1}$ … na 1. kostce NEPADNE 6
$\overline{A_2}$ … na 2. kostce NEPADNE 6
$\overline{A}$ … na žádné kostce nepadne 6

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Př.: Je dáno 20 žáků – 10 hochů a 10 děvčat. Sedí v jedné řadě, lístky jsou náhodně rozděleny. Jaké je pravděpodobnost, že:

a) 2 děvčata nebudou sedět vedle sebe

$|\Omega| = 20!$

nejdříve posadíme hochy a děvčata dáme mezi ně _H_H_H_..._H_H_

10!...uspořádání hochů/děvčat

11…dáme 10 děvčat do 11 mezer, $11 = \binom{11}{10}$

$\Rightarrow |A| = 11 \cdot 10! \cdot 10!$

$$P(A) = \frac{11 \cdot 10! \cdot 10!}{20!}$$

b) Všechna děvčata sedí vedle sebe

10 děvčat spojíme do jednoho celku …H H H D H H…

10!... uspořádání děvčat

11!... uspořádání hochů se skupinou děvčat

$\Rightarrow |A| = 11! \cdot 10!$

$$P(A) = \frac{11! \cdot 10!}{20!}$$

c) Aby seděli Petr s Janou vedle sebe

Spojíme Petra a Janu …H/D H/D PJ H/D…

2!...uspořádání Petra a Jany

19!... uspořádání 9 hochů, 9 děvčat a Petra s Janou

$\Rightarrow |A| = 19! \cdot 2!$

$$P(A) = \frac{19! \cdot 2!}{20!}$$

§11. Nezávislé jevy

Př.: V osudí je 5 červených a 3 bílé kuličky. Náhodný pokus spočívá ve vytažení 2 kuliček, přičemž se 1. kulička do osudí: a) vrátí, b) nevrátí.
Jaká je pravděpodobnost, že budou obě vytažené kuličky červené?
I.způsob:

a) $|\Omega| = 8 \cdot 8$

$|A| = 5 \cdot 5$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

b) $|\Omega| = 8 \cdot 7$

$|A| = 5 \cdot 4$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

II.způsob:

a) A_1 1.tažená kulička Č, 2. kulička libovolná
A_2 1.tažená kulička libovolná, 2. kulička Č

$|\Omega| = 8 \cdot 8$

$|A_1| = 5 \cdot 8$ $\qquad |A_2| = 8 \cdot 5$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{40}{64} \cdot \frac{40}{64} = \frac{25}{64}$$

A_1 a A_2 jsou <u>nezávislé</u> $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

b) B_1 1.tažená kulička Č, 2. kulička libovolná
B_2 1.tažená kulička libovolná, 2. kulička Č

$|\Omega| = 8 \cdot 7$

$|B_1| = 5 \cdot 7$ $\qquad |B_2| = |\mathrm{B} \cdot \mathrm{Č} + \mathrm{Č} \cdot \mathrm{Č}| = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{35}{56} \cdot \frac{35}{56} = \frac{25}{64} \neq P(B_1) \cdot P(B_2)$$

B_1 a B_2 jsou <u>závislé</u> $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \cdot P(B_2)$

Def.: Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy.
Dva <u>jevy</u> A, B nazveme <u>nezávislé</u> $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pozn.: U nezávislých jevů jsou neměnné informace o nastoupení 1. jevu a šanci nastoupení 2. jevu. Tedy výsledek 1. jevu neovlivňuje pravděpodobnost 2. jevu.

Př.: Zjistěte, zda jsou dané jevy nezávislé

a) A_1… na kostce padne sudé číslo
A_2… na kostce padne 5 nebo 6

$|\Omega| = 6$

$|A_1| = 3 \Rightarrow P(A_1) = \frac{1}{2}$

$$|A_2| = 2 \Rightarrow P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

A_1 a A_2 jsou nezávislé

b) A_1… na kostce padne sudé číslo
A_3… padne liché číslo

$$|A_1| = 3 \Rightarrow P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$|A_3| = 3 \Rightarrow P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 0 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{4}$$

A_1 a A_3 jsou závislé

Př.: 2 kostky
A… alespoň na 1 padne 6
B… součet čísel je dělitelný 3
C… na obou kostkách padne stejné číslo

$$P(A) = \frac{11}{36} \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{12}{36} = \frac{11}{108}$$

$$P(B) = \frac{12}{36} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{11}{216}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} \qquad P(B \cap C) = \frac{1}{18} = P(A) \cdot P(B) = \frac{12}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{18}$$

Nezávislé jevy jsou B a C.

V.11.1.: Nechť A,B jsou neslučitelné (= disjunktní) jevy. Pak platí:
Jevy A,B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ alespoň jeden z jevů A a B má nulovou pravděpodobnost.
[Dk.:

1. „$\Rightarrow$“ :Nechť A,B neslučitelné, nezávislé $\Rightarrow$
   $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0$
2. „$\Leftarrow$“:zřejmé]

Př.: Předpokládejme, že na cíl střílejí 2 střelci. Pravděpodobnost zasažení $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}9$

a) Jaká je pravděpodobnost, že oba trefí cíl, jestliže se navzájem neovlivní?
   $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$
b) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 1 z nich trefí cíl?
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98$

Př.: 5x po sobě padla na kostce šestka, jaká je pravděpodobnost, že padne po šesté?

$P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ kostka nemá paměť, jevy jsou nezávislé

§12. Podmíněná pravděpodobnost

Př.: V telefonní ústředně je mezi 120 dráty 75 modrých a z nich 54 zapojených. Náhodně vybereme modrý drát. Jaká je pravděpodobnost, že bude zapojený?

$M\ldots$ 75 modrých

$Z\ldots$ 54 zapojených modrých

$P(M \mid Z)\ldots$ drát je zapojený ZA PŘEDPOKLADU že je modrý

$$P(M \mid Z) = \frac{|Z|}{|M|} = \frac{\frac{54}{120}}{\frac{75}{120}} = \frac{P(Z \cap M)}{P(M)}$$

Def.: Nechť $A, B \subseteq \Omega$, $P(B) > 0$.
Podmíněnou pravděpodobností jevu A za předpokladu nastoupení jevu B nazýváme reálné číslo, které značíme:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Př.: Házíme 2x kostkou. Nechť A je jev „součet obou čísel, která padnou je dělitelný 4“ a B je jev „druhým hodem padne 6“ (oba jevy jsou závislé).
Určete pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6 \cdot 6}}{\frac{6}{6 \cdot 6}} = \frac{1}{3}$$

(nemuseli jsme určovat pravděpodobnost jevu A)

Př.: Z množiny rodin se dvěma dětmi vybereme náhodně 1 rodinu. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině jsou 2 synové, za předpokladu, že v rodině je alespoň jeden syn?

$A\ldots$ v rodině jsou 2 synové

$B\ldots$ v rodině je alespoň jeden syn

$P(A) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ (neboť $A \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$) – závislé jevy

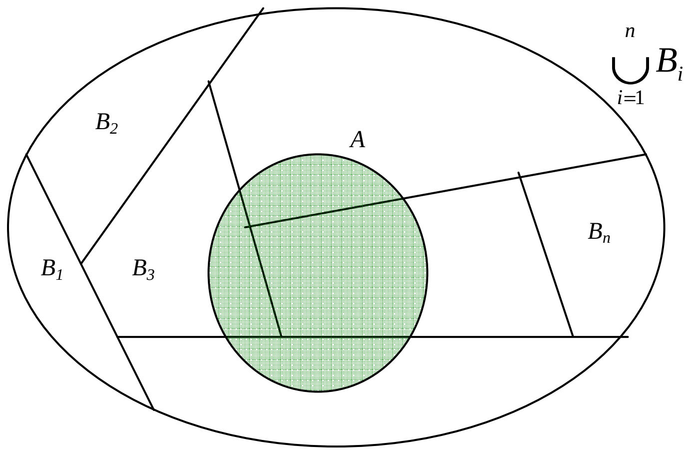
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Pozn.: Jestliže jevy A a B jsou nezávislé, pak:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$$

To znamená, že jevy A,B jsou nezávislé v tom smyslu, že informace o tom, že nastal jev B nemá žádný vliv na to, že nastal jev A (nemá žádný vliv na pravděpodobnost jevu A).

V.12.1.: Formule úplné pravděpodobnosti



Nechť $A, B_i \subseteq \Omega$, $i \in \{1,2,...,n\}$ jsou jevy takové, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ a $\forall i \neq j: B_i \cap B_j = \varnothing$ (jsou navzájem po dvou disjunktní).

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

[Dk.:

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup...\cup(A\cap B_n)$$

$$\forall i\neq j: B_i\cap B_j=\varnothing \text{ (navzájem po dvou disjuntkní)} \Rightarrow (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup...\cup(A\cap B_n)=\varnothing$$

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+...+P(A\cap B_n)$$

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A|B_n)\,]$$

Pozn.: Jevy $B_1, B_2, ..., B_n$ tvoří tzv. úplný systém jevů (proto pojem “Formule úplné pravděpodobnosti”)

Př !.: V osudí A jsou 2 černé a 3 bílé kuličky, v osudí jsou B jsou 2 černé a 1 bílá. Zvolíme náhodně 1 osudí a z něj vytáhneme jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kulička bude bílá?
A… zvolíme osudí A
B… zvolíme osudí B
X… vytáhneme bílou kuličku

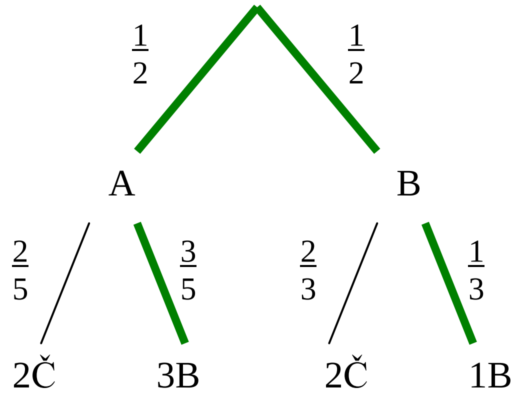
$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ vybírání osudí

$P(X \mid A) = \frac{3}{5}$ pravděpodobnost, že vytáhnu kuličku z osudí A

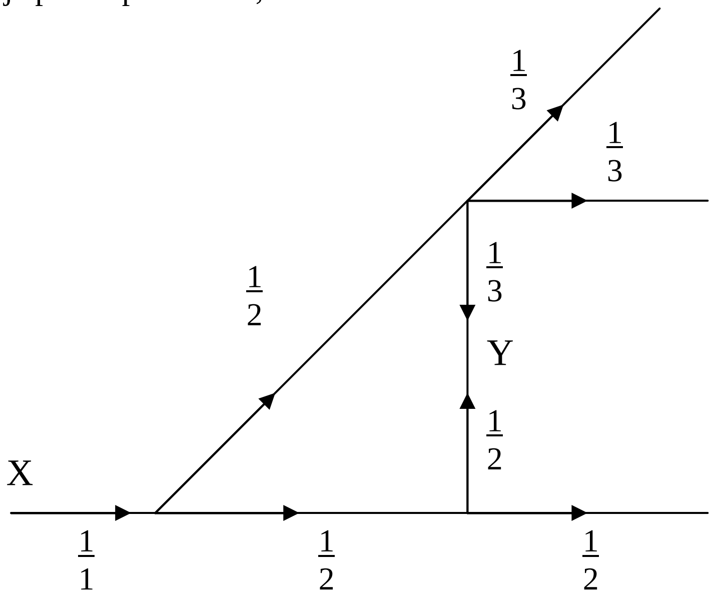
$P(X \mid B) = \frac{1}{3}$ pravděpodobnost, že vytáhnu kuličku z osudí B

$$P(X) = P(A) \cdot P(X \mid A) + P(B) \cdot P(X \mid B) = \frac{7}{15}$$

Nebo vypočtením přímo pomocí tzv. stromu logických možností.

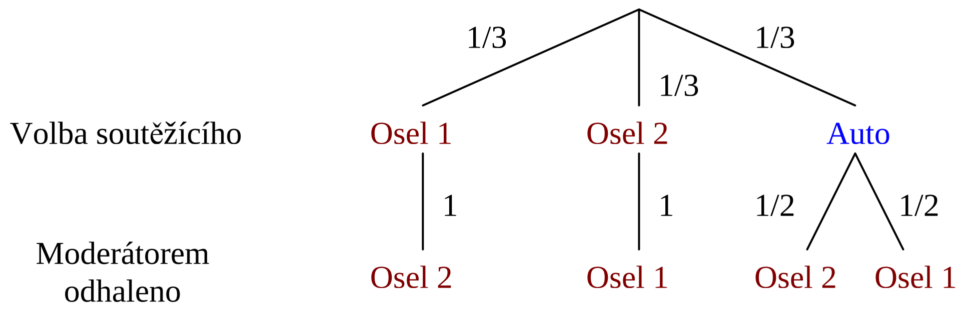


Př.: Z města X do města Y se lze dostat dvěma cestami podle dané mapy. Řidič, který nezná cestu se vydá správným směrem, ale na každé křižovatce se rozhoduje náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že dorazí do města Y?



Př.: Monty Hallův problém
Moderátor umístil soutěžní cenu – auto – za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – osel. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře.

Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, za nimiž je osel. Teď má soutěžící možnost buď ponechat svou původní volbu, nebo změnit volbu na zbývající dveře.
Nechť soutěžící nejprve zvolí dveře číslo 1. Nechť moderátor otevře dveře číslo 3, za kterými je osel. Zvýší se šance na výhru auta, pokud soutěžící změní volbu na dveře číslo 2?



	1/3	1/3	1/6	1/6
Ponechat	Osel 1	Osel 2	Auto	Auto
Změnit	Auto	Auto	Osel 1	Osel 2

Ponecháme výběr $P(Auto) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Změníme výběr $P(Auto) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

§13. Bayesův vzorec

Př !.: Na fakultě studuje 60% děvčat, z chlapců studuje matematiku 25%, z děvčat 10%. Náhodně vybereme studenta nebo studentku matematiky. Určete pravděpodobnost toho, že to bude dívka.

$P(D)=0{,}6$ $\qquad P(H)=0{,}4$

$P(M \mid H)=0{,}25$ $\qquad P(M \mid D)=0{,}1$

$$P(D \mid M)=?$$

$$P(M)=P(D)\cdot P(M \mid D)+P(H)\cdot P(M \mid H)$$

$$P(D\cap M)=P(D)\cdot P(M \mid D)$$

$$P(M\cap D)=P(M)\cdot P(D \mid M)$$

$$P(D \mid M)=\frac{P(D)\cdot P(M \mid D)}{P(M)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}1}{0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}25}=\frac{3}{8}$$

Př.: Házeme 2x kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet ok bude větší než 10, za předpokladu

a) $A\ldots$ právě při jednom z hodů padla 6

$$P(X \mid A)=\frac{P(X\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2\cdot 1}{36}}{\frac{2\cdot 6}{36}}=\frac{1}{6}$$

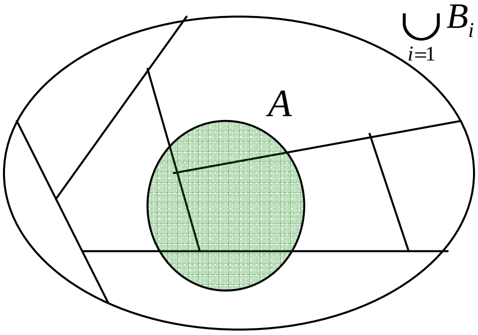
b) $B\ldots$ alespoň při jednom z hodů padla 6

$$P(X \mid B)=\frac{P(X\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2\cdot 2}{36}}{1-\frac{5\cdot 5}{6\cdot 6}}=\frac{4}{11}$$

c) $C\ldots$ při prvním hodu padla 6

$$P(X \mid C)=\frac{P(X\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1\cdot 2}{36}}{\frac{1\cdot 6}{36}}=\frac{1}{3}$$

V.13.1.: Bayesův vzorec (Bayesova formule)



Nechť $A, B_i \subseteq \Omega$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $\forall i, j, i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$.

Nechť $\exists i \in \{1,2,\dots,n\} : P(B_i) > 0$. Pak platí:

$$\forall k \in \{1,2,\dots,n\} : P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

[Dk.:

$\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$:

$$\left.\begin{array}{l} P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) \\ P(B_k \cap A) = P(A) \cdot P(B_k \mid A) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) = P(A) \cdot P(B_k \mid A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

Př.: V osudí A_1 jsou 3 bílé, 2 černé kuličky, v osudí A_2 je 1 bílá, 4 černé kuličky, v osudí A_3 jsou 2 bílé, 3 černé kuličky.
Náhodně vybereme kuličku z náhodně vybraného osudí a zjistíme, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost toho, že byla z osudí A_1?

$A_i, i \in \{1,2,3\}$ …zvolíme A_i-té osudí $\qquad$ B…vytažená kulička je bílá

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \mid A_2) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{6}$$

$$P(B \mid A_3) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$

Př.: Při vyšetření pacienta je podezření na 3 nezávisle se vylučující se nemoci. Laboratorní zkouška dává výsledek u nemocných 15%, 30%, 20%. Jaké jsou jednotlivé pravděpodobnosti chorob?

$$P(A_1) = 0{,}3 \quad P(A_2) = 0{,}5 \quad P(A_3) = 0{,}2$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}15}{0{,}135} = \frac{9}{47}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}135} = \frac{30}{47}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}135} = \frac{8}{47}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3) = 0{,}235$$

Př.: V osudí A_1 je 7 černých, 3 bílé kuličky a v osudí A_2 je 6 černých a 4 bílé kuličky. Zvolíme náhodně jedno osudí a vytáhneme bez vracení zpět 2 kuličky, Zjistíme, že 1. je černá a 2. je bílá. Ukažte, že je pravděpodobnější, že jsme zvolili osudí A_2.

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \mid A_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30} \Rightarrow P(A_1 \mid X) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{30}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{15}$$

$$P(X \mid A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{30} \Rightarrow P(A_1 \mid X) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{30}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{15}$$

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{4}$$

§14. Posloupnost nezávisle opakovaných pokusů

Pozn.: V tomto paragrafu budeme studovat takové pokusy, které mají právě dva výsledky (zdar, nezdar) a budeme zkoumat, jaká je pravděpodobnost toho, že pro n těchto nezávislých pokusů nastane příznivý jev právě k-krát.

Př.: Házeme 3x kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvakrát padne šestka?

I. A… právě 2x padla šestka

$$|\Omega| = 6^3 = 216$$

$$|A| = \binom{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 15$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

II. A_i… v i-tém hodu padla 6 $\qquad P(A_i) = \frac{1}{6}$

$\overline{A_i}$ … v i-tém hodu nepadla 6 $\qquad P(\overline{A_i}) = \frac{5}{6}$

Vybereme pokusy, kdy padne 2x šestka

$\binom{3}{2} \qquad [++-],[+-+],[-++]$

$$P(A) = \binom{3}{2}[P(A_i)]^2[P(\overline{A_i})]^1 = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

V.14.1.: <u>Bernoulliho věta (Bernoulliho rozdělení)</u>

Provádíme-li sérii n nezávislých pokusů, kdy pravděpodobnost úspěšného pokusu je p, pak pro pravděpodobnost toho, že právě k pokusů bude úspěšných, platí:

$$P(k,n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

[Dk.:

Jsou-li všechny pokusy nezávislé, pak pravděpodobnost toho, že z libovolné n-tice pokusů je právě k zdařilých (a tedy (n-k) nezdařilých) je $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Těchto k zdarů je možno z n pokusů vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby, přičemž každé 2 takové série jsou disjunktní.]

Př.: Uvažujme n hodů mincí. Jev „padne hlava“ považujeme za zdařilý, jev „padne orel“ za nezdařilý. Určete pravděpodobnost, že v sérii 100 hodů padne hlava právě 50x.

$$P(50,100) = \binom{100}{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{50} = 0{,}08$$

Je tedy malá pravděpodobnost toho, že právě v 50 hodech padne hlava. Zkoumejme, jaká je pravděpodobnost toho, že počet hodů, kdy padne hlava, se od 50 neliší o více jak o 10.

$$P(X)=P(40{,}100)+P(41{,}100)+\ldots+P(60{,}100)=\binom{100}{40}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\binom{100}{41}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\ldots+\binom{100}{60}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\cdot\left\{\binom{100}{50}+2\cdot\left[\binom{100}{51}+\binom{100}{52}+\ldots+\binom{100}{60}\right]\right\}=0.965$$

Př.: V písemce je 10 otázek, u každé správná jedna ze tří odpovědí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň polovinu tipneme správně?

$P(A)=1-P(\overline{A})$ $\quad$ $P(\overline{A})\ldots$ nejvýše 5 odpovědí špatných

žádná špatně $\quad P(\overline{A_0})=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

právě 1 špatně $\quad P(\overline{A_1})=\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$

právě 2 špatně $\quad P(\overline{A_2})=\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

….

právě 5 špatně $\quad P(\overline{A_5})=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

$$\Rightarrow P(A)=1-\sum_{j=0}^{5}\binom{10}{j}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10-j}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{j}$$

Seznam použité literatury:

A. Literatura

- *RNDr. Antonín Vrba*: KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST, MATEMATICKÁ INDUKCE – pro II. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku, Praha, SPN 1986

B. Přednášky

- *Kobza Aleš* - Cvičení v matematické třídě pro III. ročník
- *Boucník Pavel* – Přednášky v matematické třídě pro III. ročník gymnázií