

## §1. . . .

Př:  $p = \{[1+t, 2-t]; t \in \mathbb{R}\}$

- Způsob vyloučení parametru:

$$x = 1 + t$$

$$y = 2 - t \quad x + y - 3 = 0$$

- Přes normálový vektor:

$$\text{směrový vektor: } \vec{u} = (1, -1)$$

$$\text{normálový vektor: } \vec{n} = (1, 1)$$

$$ax + bx + c = 0$$

$$x + y + c = 0$$

Dosadím  $A[1, 2] \in p: 1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$ .

Př: Napište parametrické rovnice  $p: x - 2y + 1 = 0$ .

- Substitucí:  $x = 2t - 1$

$$y = t$$

$$p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}.$$

- Přes normálový vektor:

$$\text{normálový vektor: } \vec{u} = (-2, 1). \text{ směrný vektor: } \vec{u} = (2, 1). [2t + a, t] \in p \Rightarrow$$

$$2t + a - 2t + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}.$$

DÚ: 145/17,18  $A = [0, 5]$

$$B = [6, 7]$$

$$C = [1, 4]$$

$$A_0 = [\frac{7}{2}; \frac{11}{2}]$$

$$B_0 = [\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$$

$$C_0 = [\frac{6}{2}; \frac{12}{2}]$$

$$x - 7y + 35 = 0$$

$$5x - 11y + 47$$

$$x - y + 3 = 0$$

$$6x - y - \frac{3}{2} = 0$$

. . .

Př: Dáno  $A = [0, 2], B = [3; 0]$ . Napište rovnice přímky: Úsekový:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Obecný

$$2x + \frac{3}{y} - 6 = 0$$

Směrníkový

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Parametrický:

$$p = \{[t, -\frac{2}{3}t + 2]; t \in \mathbb{R}\}$$

Dů: 150/21,22,23,24

§2. ...

§3. ...

§4. ...

§5. **Vzájemná poloha dvou rovin**

**V.5.1.:** Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi Necht'  $\rho : ax + by + cz + d = 0, \sigma : ex + fy + gz + h = 0$  jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, b, c, d) = k \cdot (e, f, g, h)$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, b, c) = k \cdot (e, f, g) \wedge d \neq k \cdot h$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} : (a, b, c) \neq k \cdot (e, f, g)$ .

**Př:** Určete vzájemnou polohu dvou rovin:

$$\rho : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$$

$$\sigma : x - y - z + 1 = 0$$

$$\vec{n}_\rho = (2; 3; 4)$$

$$\vec{n}_\sigma = (1; -1; -1)$$

vektory jsou lin. nezávislé:  $\rho \nparallel \sigma$

Určení průsečnice rovin  $\rho, \sigma$  (hledáme parametrickou rovnici přímky v  $E_3$ ):

volíme  $z = t; t \in \mathbb{R}$ :

$$2x + 3y + 4t + 5 = 0$$

$$x - y - t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5x + t + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{5} - \frac{t}{5}$$

$$y = x - t + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t$$

$$\text{Průsečnice: } \left\{ \left[ -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t; -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t; t \right] \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

**V.5.2.:** Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi:

Necht'  $\rho(A, \vec{u}, \vec{v}), \sigma(B, \vec{k}, \vec{l})$  jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 2/$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 3$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 3.$

**Př:** Určete vzájemnou polohu rovin  $\rho$  a  $\sigma : \rho = \{[1+t_1+2t_2; 2t_1+3t_2; -2-2t_1+t_2]; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(A = [1; 0; -2]; \vec{u} = (1; 2; -2); \vec{v} = (2; 3; 1)) \\ \sigma = \{[r_1; -3 + r_2; 1 + 4r_1 - r_2]; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow \sigma(B = [0; -3; 1]; \vec{k} = (1; 0; 4); \vec{l} = (0; 1; -1)) \\ \Rightarrow \vec{AB} = (-1; -3; 3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3 \Rightarrow$  roviny jsou různoběžné.

Rovnice průsečnice  $\rho, \sigma$ : – porovnání souřadnic  $\rho$  a  $\sigma$ :

$$1 + t_1 + 2t_2 = r_1$$

$$2t_1 + 3t_0 = +3 + r_2$$

$$-2 - 2t_1 + t_1 = 1 + 4r_1 - r_2$$

soustava 3 rovnic o 4 neznámých, po vyjádření z 2. a 3. rovnice  $t = r_1 = t$ , odsud a z

1. rovnice  $t_1 = -1 - t, r_2 = t + 1$ .

Dosazením do rovnice roviny  $\rho$ :

$$p = \{[t; -2 + t; 3t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: 182/19,20

Rozhodněte, jakou mají roviny vzájemnou polohu a určete průsečnice:

$$\begin{aligned} \rho &: 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ \sigma &: 4x + y - 5z + 3 = 0 \\ \tau &: x + 2y - z + 1 = 0 \\ \varphi &: -4x + 6y - 2z + 5 = 0 \\ \alpha &: 3x - y - x + 5 = 0 \\ \beta &: x + y + z - 7 = 0 \end{aligned}$$

•  $\rho$  a  $\sigma$ :

Nerovnoběžné:

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -14 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array} \right)$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-5 + 14a}{14}; \frac{-11 + 7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

•  $\rho$  a  $\tau$ :

Nerovnoběžné:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{5 + 1a}{7}; \frac{-6 + 3a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\sigma$  a  $\tau$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 7 & 0 & -9 & | & -5 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & -7 & -1 & | & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -7 & -1 & | & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-5+9a}{7}; \frac{-1-1a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\rho$  a  $\varphi$ :

$$(2, -3, 1) = -\frac{1}{2}(-4, 3, -2) \wedge -4 \cdot \frac{-1}{2} = -2 \neq 5$$

Rovnoběžné.

- $\sigma$  a  $\varphi$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 0 & -7 & 7 & | & 8 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & -7 & 7 & | & 8 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-13+28a}{28}; \frac{-8+7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\tau$  a  $\varphi$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 0 & -14 & 6 & | & 9 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -14 & 6 & | & 9 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{2+1a}{7}; \frac{-9+6a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\rho$  a  $\alpha$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 7 & 0 & -4 & | & -19 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 & | & -38 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-19+4a}{7}; \frac{-22+5a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\sigma$  a  $\alpha$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 21 & 0 & -18 & | & -24 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim$$

Průsečnice:

$$P = \left\{ \left[ \frac{-8+6a}{7}; \frac{11+11a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\tau$  a  $\alpha$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -7 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 7 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & | & -11 \\ 0 & 7 & -2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-11+3a}{7}; \frac{2+2a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\varphi$  a  $\alpha$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -14 & 10 & | & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 42 & 0 & -24 & | & -105 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 & | & -35 \\ 0 & 14 & -10 & | & -35 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-35+8a}{14}; \frac{-35+10a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\rho$  a  $\beta$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 2 & -3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -5 & -1 & | & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & | & 25 \\ 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{25-4a}{5}; \frac{10-1a}{5}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\sigma$  a  $\beta$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -3 & -9 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 3 & 9 & | & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & | & -10 \\ 0 & 3 & 9 & | & 31 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{-10+6a}{3}; \frac{31-9a}{3}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\tau$  a  $\beta$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 15 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\{[15-3a; -8+2a; a] : a \in \mathbb{R}\}$$

- $\varphi$  a  $\beta$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 & | & -5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -10 & -2 & | & -23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 10 & 2 & | & 23 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{47-8a}{10}; \frac{23-2a}{10}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

•  $\alpha$  a  $\beta$ :

Nerovnoběžné:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -4 & -4 & | & -26 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 2 & 2 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 13 \end{pmatrix}$$

Průsečnice:

$$\left\{ \left[ \frac{1}{2}; \frac{13-2a}{2}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Př: 183/21

$$\rho(A = [1, 2, 0], \vec{r} = (2, -1, 1), \vec{s} = (-1, 1, -1))$$

$$\sigma(B = [2, 3, -1], \vec{t} = (-2, 2, -2), \vec{u} = (2, -2, -2))$$

$$\tau(C = [4, 3, 2], \vec{m} = (-1, 1, 1), \vec{n} = (1, -2, -3))$$

Což mohu ekvivalentně převést na:

$$\rho(A = [1, 2, 0], \vec{r} = (2, -1, 1), \vec{s} = (1, -1, 1))$$

$$\sigma(B = [2, 3, -1], \vec{t} = (1, -1, 1), \vec{u} = (1, -1, -1))$$

$$\tau(C = [4, 3, 2], \vec{m} = (1, -1, -1), \vec{n} = (1, -2, -3))$$

$$\vec{BA} = (-1, -1, 1)$$

$$\vec{AC} = (3, 1, 2)$$

$$\vec{BC} = (2, 0, 3)$$

•  $\rho$  a  $\phi$ :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{t}, \vec{u} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

Průsečnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = 0 \wedge t \in \mathbb{R} \Rightarrow p = \{[2-2t; 3+2t; -1-2t] | t \in \mathbb{R}\}$$

- $\rho$  a  $\tau$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

- $\varphi$  a  $\tau$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \langle \vec{t}, \vec{u}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = 3 \Rightarrow \text{nerovnoběžné.}$$

## §6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi:

Nechť  $p(A, \vec{u})$  je přímka,  $\rho(B, \vec{v}, \vec{w})$  rovina. Pak platí:

- $p \subset \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 2$
- $p \parallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 3$
- $p \nparallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 3$

Pr:

Rozhodněte vzájemnou polohu přímky a roviny:  $p = \{[3+t; 1+2t; 2-t] | t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$p: A = [3; 1; 2], \vec{u} = (1; 2; -1)$

$\rho = \{[1-3r+s; 2r-s; 1+4r-s] | r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho: B = [1; 0; 1], \vec{v} = (-3; 2; 4), \vec{w} = (1; -1; -1)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-2; -1; -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3 \Rightarrow$  přímka je různoběžná.

Určení průsečíku:

porovnáme souřadnice  $p$  a  $\rho$ :  $3+t = 1-3r+s$

$1+2t = 2r-s$

$2-t = 1+4r-s$

$\Rightarrow 3$  rovnice o třech neznámých – vyřešením dostaneme  $t = -2$ . Dosadíme:  $P = [1; -3; 4]$

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí:

Nechť  $p(A, \vec{u})$  je přímka,  $\rho : ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0, 0, 0]$  rovina. Nechť  $\vec{n} = (a, b, c)$ . Pak platí:

- $p \subset \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \in \rho$
- $p \parallel \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \notin \rho$
- $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

**Př:** Rozhodněte o vzájemné poloze přímky  $p$  a roviny  $\rho$ :

- $p = [1 - t, 1 + 3t, -2] | t \in \mathbb{R}, \rho : 3x + y + 5z + 7 = 0$   
 $\Rightarrow \vec{u} = (-1; 3; 0), \vec{n} = (3; 1; 5)$ .  
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow$  přímka je s rovinou rovnoběžná. Rozhodneme, jestli  $p$  leží v rovině  $\rho$ , tzn. jestli  $A \in \rho$ :  
 $A[1; 1; -2]$   
 $3 + 1 - 10 + 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow 0$  rovnoběžné různé.
- $p = [3 + t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}, \rho : x - 2y + z - 3 = 0$   
 $\vec{u} = (1; -1; 2)$   
 $\vec{n} = (1; -2; 1)$   
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow p \nparallel \rho$

Určení průsečíku:

Dosadíme rovnici přímky do rovnice roviny  $\rho$ :  $3 + t - 2 + 2t + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}$ .

$$p = \left[ \frac{17}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right]$$

**Př:** 188/26:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1; 0; 2)$$

$$\vec{n} = (2; 1; 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 + 0 + 2 = 4 \Rightarrow \text{nejdou rovnoběžné.}$$

$$2 \cdot t + 0 + 2t + 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cap \rho = P + \overrightarrow{PQ} \cdot (-2) = [-2; 0; -4]$$

**Př:** 188/27:

Určím rovnoběžnou rovinu procházející  $A$ :

$$2 \cdot 3 - 2 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Rovnicí tedy je  $\varphi : 2x - y - z - 3 = 0$ .

Dosadím:  $6 - y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{y = 5}$ .

**Př:** 189/28:

- $\vec{t} = (-1, 1, -3)$   
 $\vec{n} = (-1; 2; 1)$   
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$  rovnoběžné

$A = [1, 0, 2]$ . Dosadím:  $-1 + 0 + 2 - 1 = 0$ . Průnikem je  $p$ .

- $\vec{t} = (-1, 3, 1)$   
 $\vec{n} = (1, 1, -1)$   
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow$  nejsou rovnoběžné.

Průsečík:  $2 - t + 3t - t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow q \cap \sigma = [-1, 1, -4]$ .



- $\vec{t} = (3; -4; 2)$   
 $\vec{n} = (2; 1; -1)$   
 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$  rovnoběžné.

$A[2; 1; 0]$  dosadím:  $4 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow m \cap \tau = \emptyset$ .

Př: 189/29: Průsečnice  $p: \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 1 & 3 & -2 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 3 & -4 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & -13 & 7 & | & 31 \end{pmatrix} \sim$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 & | & -11 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix}$

$$p = \left\{ \left[ \frac{-11+5t}{13}; \frac{-31+7t}{13}; a \right] : t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow p \left( A \left[ -\frac{11}{13}; -\frac{31}{13}; 0 \right]; \vec{u} = (5; 7; 13) \right)$$

$$\rho(B[5; 3; 1], \vec{v} = (-1; 1; 0), \vec{w} = (2, -1, 5))$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejsou rovnoběžné.

Převodu  $\rho$  na obecnou rovnici roviny:  $x + y = 8 + s \Rightarrow 5x + 5y - z = 40 - 1 = 39$

Spočítám průsečík všech rovnic:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 5 & 5 & -1 & | & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 5 & 5 & -1 & | & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & -13 & 7 & | & 31 \\ 0 & -10 & 9 & | & 79 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 13 & -7 & | & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -8 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & | & 157 \\ 0 & 10 & -9 & | & -79 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 470 & 0 & 0 & | & 2360 \\ 0 & 470 & 0 & | & 2740 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 47 & 0 & 0 & | & 236 \\ 0 & 47 & 0 & | & 274 \\ 0 & 0 & 47 & | & 717 \end{pmatrix}$$

$$P = \left\{ \left[ \frac{236}{47}; \frac{274}{47}; \frac{717}{47} \right] \right\}$$

Př: Převodu  $\gamma$  na obecnou rovnici:  $x + z = -6 + r \Rightarrow x - y + z = -5$

$$\text{Průsečík: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ -1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 1 & -1 & 1 & | & -5 \\ 3 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$P = \{[2; 0; -7]\}$$

Převodu  $\delta$  na obecnou:  $x + 3y = 12 + 7t \Rightarrow x + 3y + 7z = 19$

$$1 + 0 - 49 + a = 0 \Rightarrow a = 48$$

$$\epsilon : x + 3y + 7z + 48 = 0$$

**Př:** 32 Jelikož se roviny protínají v právě jednom bodě, musí průsečnice protínat  $\gamma$  v jednom bodě.

Spočítám dimenzi vektorového prostoru tvořeného normálovými vektory k rovinám:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelikož dimenze je 3, roviny se protínají v právě jednom bodě. Jelikož  $\epsilon$  má stejný normálový vektor jako  $\delta$ , výsledek se nezmění.

## §7. Příčka mimoběžek

**Def:** Necht  $p, q$  jsou 2 mimoběžné přímky. Přímka  $r$ , která je různoběžná s oběma přímkami  $p, q$ , se nazývá *příčka mimoběžek*  $p, q$ .

**Pozn:** Necht  $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v})$  jsou přímky. Pak pro příčku mimoběžek  $r(Q, \vec{w})$  platí:  $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle$ .

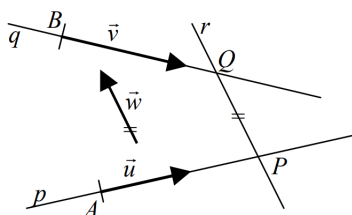
### A) Nalezení příčky $r$ mimoběžek $p, q$ , která je rovnoběžná s daným vektorem

**Pozn:** Dáno:  $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v}); \vec{w} \neq \vec{0}$

Rozbor:

$$1) \vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 0 \text{ řešení}$$

$$2) \vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 1 \text{ řešení}$$



$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{PQ} = Q - P = B + l \vec{v} - A - k \vec{u}$$

$$\vec{PQ} = x \vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k \vec{u} = x \vec{w}$$

$$\underline{\vec{AB} = x \vec{w} + k \vec{u} - l \vec{v}}$$

**Př:** Jsou dány mymoněžky  $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ , a vektor  $\vec{w}$ :

$A[1; -2; 5]; B[-1; 1; -5]; \vec{u}(1; 3; -1), \vec{v}(1; 1; 2), \vec{w}(1; 1; 4)$

Najděte příčku  $p, q$ , která je rovnoběžná s  $\vec{w}$ .

$\vec{AB} = (-2; 3; -10) \Rightarrow (-2; 3; -10) = x(1; 1; 4) - l(1; 1; 2) + k(1; 3; -1)$ . Hledáme body

$P, Q$ , pro které platí:  $P = A + k \cdot \vec{u}; Q = B + l \cdot \vec{v}$  a zároveň  $\vec{PQ} = x \cdot \vec{w}$ .

$\Rightarrow x \cdot \vec{w} = Q - P = B - A + l\vec{v} - k\vec{u}$

$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \vec{AB} = (-2; 3; -10)$ .

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$k = \frac{5}{2} \Rightarrow P = [\frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \frac{5}{2}] \Rightarrow \vec{PQ} = \{ [\frac{7}{2} + t; \frac{11}{2} + t; \frac{5}{2} + 4t] \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Př:

Cvičení 1:

Jsou dány mymoněžky  $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ , a vektor  $\vec{w}$ :

$A[10; -7; 0]; B[-3; 5; 0]; \vec{u}(5; 4; 1), \vec{v}(2; 1; 1), \vec{w}(8; 7; 1)$

Najděte příčku  $p, q$ , která je rovnoběžná s  $\vec{w}$ .

$$\begin{aligned} k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \vec{AB} = (-13; 12; 0). \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 8 & -13 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 8 & -13 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

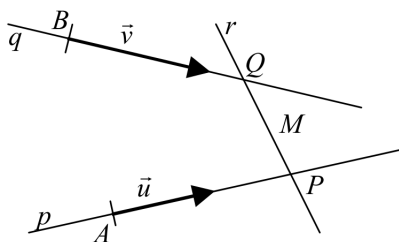
Soustava nemá řešení  $\Rightarrow$  hledaná příčka neexistuje.

## B) Nalezení příčky $r$ mimoběžek $p, q$ , která prochází bodem $M$

Pozn: Dáno:  $p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v})$ , bod  $M$ .

Rozbor:

- 1)  $M \in p \cap q \Rightarrow$  nekonečně mnoho řešení
- 2)  $M \notin p \cap q \Rightarrow$ 
  - (a) jedna přímka je rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem  $M \Rightarrow 0$  řešení.
  - (b) ani jedna přímka není rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem  $M \Rightarrow 1$  řešení.



$$\begin{aligned}
 P &= A + k \vec{u} \\
 Q &= B + l \vec{v} \\
 \overrightarrow{MP} &= x \cdot \overrightarrow{MQ} \\
 A + k \vec{u} &= x(\overrightarrow{MB} + l \vec{v}) \\
 -k \vec{u} + m \vec{v} + x \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}, \text{ kde } m = x \cdot l \\
 &\Rightarrow 3 \text{ rovnice o 3 neznámých } k, m, x.
 \end{aligned}$$

**Př:** Jsou dány mimoběžky  $p(A, u), q(B, v)$ , bod  $M$ . Nalezněte příčku mimoběžek  $p, q$ , procházející bodem  $M$ .  
 $A[1; 5; 2]; B[0; -1; 1]; M[0; 1; -5]; \vec{u}(1; 2; 1), \vec{v}(3; 1; 0)$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} &= (1; 4; 7) \\
 \overrightarrow{MB} &= (0; -2; 6) \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \\
 P &= \left\{ \left[ -3; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$k = -3; m = -\frac{2}{3}; x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 P &= [1; 5; 2] - 3(1; 2; 1) = [-2; -1; -1] \\
 Q &= [0; -1; 1] - 1(3; 1; 0) = [-3; -2; 1] \\
 \overrightarrow{PQ} &= \{[t; 1+t; -5-2t] | t \in \mathbb{R}\}.
 \end{aligned}$$

**Př:** Jsou dány mimoběžky  $p(A, u), q(B, v)$ , bod  $M$ . Nalezněte příčku mimoběžek  $p, q$ , procházející bodem  $M$ .  
 $A[3; 1; 2]; B[-2; 1; 0]; M[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0]; \vec{u}(1; 2; -1), \vec{v}(3; -1; 1)$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} &= (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}; 2) \\
 \overrightarrow{MB} &= (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0) \\
 P &= A + k \vec{u} \\
 Q &= B + l \vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} &= x \cdot \overrightarrow{MQ} \\
A + k\vec{u} &= x(\overrightarrow{MB} + l\vec{v}) \\
-k\vec{u} + m\vec{v} + x\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}, \text{ kde } m = x \cdot l \\
\bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & -3 & 7 \\ -4 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \\
&\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \\
&\left( \begin{array}{ccc|c} 20 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array} \right) \\
k &= -\frac{3}{5}; m = \frac{7}{5}; x = \frac{13}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= [3 - \frac{3}{5}; 1 - \frac{6}{5}; 2 + \frac{3}{5}] = [\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{13}{5}] \\
Q &= [-2 + \frac{21}{5}; 1 - \frac{7}{5}; 0 + \frac{7}{5}] = [\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{7}{5}] \\
\overrightarrow{QP} &= [\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{6}{5}]
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left\{ \left[ \frac{12}{5} + k; -\frac{1}{5} + k; \frac{13}{5} + 6k \right] \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

### C) Nalezení osy o mimoběžek $p, q$

**Def:** Necht  $p, q$  jsou mimoběžné přímky. Pak příčka mimoběžek  $o$ , která je kolmá k přímkám  $p$  i  $q$ , se nazývá osa mimoběžek  $p, q$ .

**Př:** nalezněte osu mimoběžek  $p, q$ .

$$p = \{[8 + t; 5 + 2t; 8 - t] \mid t \in \mathbb{R}\} \quad q = \{[-4 - 7r; 3 + 2r; 4 + 3r] \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Hledáme osu  $o(P, \vec{w})$ ;  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , máme dáno:

$$A[8; 5; 8], \quad \vec{u}(1; 2; -1)$$

$$B[-4; 3; 4], \quad \vec{v}(-7; 2; 3)$$

$$p \perp o : \vec{u} \cdot \vec{w} = w_1 + 2w_2 - w_3 = 0 \Rightarrow w_2 = \frac{w_1}{2}$$

$$q \perp o : \vec{v} \cdot \vec{w} = -7w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = 2w_1$$

$$w_1 - \text{libovolný (jedná se jen o násobek)} \Rightarrow \vec{w} = (2; 1; 4).$$

tento vektor lze také zistat jako vektorový součin  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Nyní hledáme příčku  $p, q$  rovnoběžnou s  $\vec{w}$ .

$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

$$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-12; -2; -4).$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & -4 & -6 & | & 16 \\ 0 & -16 & -3 & | & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 16 & 3 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & -21 & | & 42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -17 & | & 32 \\ 0 & 2 & 3 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \Rightarrow P = [7; 3; 9]$$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \{[7 + 2t; 3 + t; 9 + 4t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: Úkol 3

Nalezněte příčku mimoběžek, která je rovnoběžná s rovinami  $\rho, \sigma$ .

$$p : A[-5; 2; 2]; \vec{u} = (2; 0; 1)$$

$$q : z - 2 = 0 \wedge 5x - 8y + 9z + 100 = 0 \Rightarrow B[-\frac{118}{5}; 0; 2]; \vec{v} = (8; 5; 0)$$

$$\rho \{[3 + 3r + s; 2r; 2s]; r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho : 2x - 3y - 3z = 6$$

$$\sigma : x - 4u - 3z + 12 = 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & | & 6 \\ 1 & -4 & -3 & | & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & | & -12 \\ 2 & -3 & -3 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & | & -12 \\ 0 & 5 & 3 & | & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & | & 60 \\ 0 & 5 & 3 & | & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = (3; -3; 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overleftrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l \cdot \vec{v} - A - k \vec{u} = x\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

$$k\vec{u} - l\vec{v} + x\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-\frac{93}{5}; -2; 0). \bar{A} = \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & -5 & -10 & | & -40 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 15 & -93 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & -66 & -45 & | & 269 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 66 & 45 & | & -269 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 66 & 45 & | & -269 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & -87 & | & -797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & -40 & 15 & | & -93 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 95 & | & 227 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 870 & 0 & 0 & | & -55966 \\ 0 & 87 & 0 & | & -898 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 435 & 0 & 0 & | & -27983 \\ 0 & 87 & 0 & | & -898 \\ 0 & 0 & 87 & | & 797 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{27983}{435} \Rightarrow P = [-5 + 2\frac{27983}{435}; 2; 2 + \frac{27983}{435}]$$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \left\{ \left[ -5 + 2\frac{27983}{435} + 3k; 2 - 3k; 2 + \frac{27983}{435} + 5k \right] | k \in \mathbb{R} \right\}$$

Př: úkol 4:

Nalezněte příčku mimoběžek, která leží v rovině  $\rho$ :

$$p : x + y = 2 \wedge 2x + z = 5.$$

$$q : x + 2y = 1 \wedge -3y + z = 2$$

$$\rho : x + 2y - x = -2$$

$$\text{Určím } P = p \cap \rho: \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -9 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$P = [-1; 3; 7]$$

$$\text{Určím } Q = q \cap \rho: \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$Q = \left[ \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 3 \right]$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left( \frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; -4 \right)$$

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{[-1 + 4t; 3 - 8t; 7 - 12t] | t \in \mathbb{R}\}$$

## §8. Vzdálenost

**Def:** Necht'  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$  jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. Vzdáleností podprostorů  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  nazýváme nezáporné reálné číslo  $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  definované takto:  $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min \{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ , kde  $|AB|$  je délka úsečky  $AB$ .

**Pozn:** Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:  
Necht'  $M \in \mathbb{R}$  je množina. Pak číslo  $i \in \mathbb{R}$  nazýváme infimem množiny  $M$ , je-li největší dolní závorou množiny  $M$ , tj. jestliže platí:

1.  $\forall m \in M : i \leq m$
2.  $\forall r \in \mathbb{R} : i(\forall m \in M : r \leq m) \Rightarrow i \geq r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Necht'  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E}_3$  jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a necht'  $D = \{AB : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ . Pak vzdáleností podprostorů  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  nazýváme infimum množiny  $D$ .

Platí: Má-li množina  $D$  nejmenší prvek  $n$ , pak tento prvek je infimum  $\Rightarrow n = \rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

**Pozn:** Jestliže  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  mají nějaký společný bod, pak  $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ .

### A) Vzdálenost 2 bodů v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

**Pozn:**

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

**V.8.1.:** Necht'  $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$  jsou dva body.

Pak platí  $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (b_j - a_j)^2}$  [Dk.  
viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

**Př:** Určete  $\rho(A, B)$ :

1.  $A[3; -1], B[0; 2]$   
 $\rho(A, B) = 3\sqrt{2}$
2.  $A[1; 0; 2]; B[-1; 2; 1]$   $\rho(A, B) = 3$

## B) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_2$

**Pozn:**  $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$ , kde  $A_0$  je kolmý průmět  $A$  na  $p$ .

$p: ax + by + c = 0; \vec{n} = (a, b) \neq \vec{0}; A[a_1, a_2]$

$q \perp p - q: x = \{[a_1 + ta; a_2 + tb] | t \in \mathbb{R}\}$

$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q$

$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$

$t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - c}{a^2 + b^2}$

$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA_0}|$

$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b)$

$$|AA_0| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**V.8.2.:** Necht'  $A[a_1; a_2] \in \mathbb{E}_2$  je bod,  $p: ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$  je přímka. Pak platí:

$$\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Př:** Určete  $\rho(A, p): A[-1; 2]; p: x - 2y + 1 = 0$

$$\rho(A, p) = \frac{|-1-2 \cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

**Př:** 200/47:

$A[3; 2]; p: 3x - 4y - 7 = 0$

$$\rho(A, p) = \frac{|9-8-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{6}{5}$$

**Př:** 200/48:

Určete velikosti výšek trojúhelníku  $ABC$ :

$A[0; 0]$

$B[7; 0]$

$C[4; 5]$

$$\overrightarrow{BC} = (-3, 5) \Rightarrow a: 5x + 3y + ? = 0; 35 + 0 + ? = 0 \Rightarrow a: 5x + 3y - 35 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (7, 0) \Rightarrow c: 0x + y = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5) \Rightarrow b: 5x - 4y + ? = 0; 0 - 0 + ? = 0 \Rightarrow b: 5x - 4y = 0$$

$$\rho(A, a) = \frac{|-35|}{\sqrt{25+9}} = \sqrt{34} \frac{35}{34} \quad \rho(B, b) = \frac{|35|}{\sqrt{25+16}} = \sqrt{41} \frac{35}{41} \quad \rho(C, c) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = 1$$



### C) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_3$

**Pozn:**  $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$ , kde  $A_0$  je kolmý průmět  $A$  na  $p$ .

I. způsob:  $p(P, \vec{u}); P[p_1, p_2, p_3]; \vec{u}(u_1, u_2, u_3), A[a_1, a_2, a_3]$   
 $A_0[p_1 + t^*u_1 + p_2 + t^*u_2, p_3 + t^*u_3]$   
 $\vec{n} = \overrightarrow{AA_0} = (p_1 - a_1 + t^*u_1, p_2 - a_2 + t^*u_2, p_3 - a_3 + t^*u_3)$   
 $\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$

Jedna rovnice o jedné neznámé  $t^*$ , po určení  $t^*$  určíme  $A_0$ .

II. způsob: Určení rovnice roviny  $\rho$ , která prochází  $A$  a je kolmá k přímce  $p$ .

$$p \cap \rho = \{A_0\}$$

III. způsob: Vyjádření  $|\overrightarrow{AX}|$ , kde  $X$  je libovolný bod  $p$  jako funkce proměnné  $t$  (parametr přímky) a určení minima této funkce.

**Př:** Určete  $\rho(A, p)$   
 $A[1; 0; 1], p = [2 - t; t; 0], t \in \mathbb{R}.$

I. způsob:  $\overrightarrow{AA_0} = (1 - t^*; t^*; -1)$   
 $\vec{u} = (-1; 1; 0)$   
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t^* - 1 + t^* = 0$   
 $t^* = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = [\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0] \quad \overrightarrow{AA_0} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1) \Rightarrow \rho(A, A_0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

II. způsob:  $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 1; 0)$   
 $\rho: -x + y + d = 0$   
 $A \in \rho \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$   
 $\rho: -x + y + 1 = 0$   
 $p \cap \rho: -(2 - t) + t + 1 = 0$   
 $-2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ (dále stejně jako v předchozím bodě)}$

III. způsob:  $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{(1 - t)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

minimum nastane pro  $t = \frac{1}{2}$  a nabývá hodnoty  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**Př:**  $200/45$   
 $p = \{[1 - 1t; 2 + 3t; 4 + t] | t \in \mathbb{R}\}; M[1; 4; 5]$

I. způsob:  $\overrightarrow{MM_0} = (-t; -2 + 3t; -1 + t)$   
 $\vec{u} = (-1; 3; 1)$   
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t - 6 + 9t - 1 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}$   
 $M_0 = [\frac{4}{11}; \frac{43}{11}; \frac{51}{11}]$   
 $|\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{\left(\frac{4}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{43}{11} - 4\right)^2 + \left(\frac{51}{11} - 5\right)^2} = \frac{2\sqrt{286}}{11}$

II. způsob:  $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 3; 1)$

$$\rho : -x + 3y + z + d = 0$$

$$M \in \rho \Rightarrow -1 + 12 + 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$$

$$\rho : -x + 3y + z - 16 = 0$$

$$p \cap \rho : -1 + t + 6 + 9t + 4 + t - 16 = 0$$

$$11t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}. \text{ (dále stejně jako v předchozím bodě)}$$

III. způsob:  $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{MX}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t - 2)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{t^2 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 2t + 1} =$$

$$= \sqrt{11t^2 - 14t + 5} = \sqrt{11\left(t - \frac{7}{11}\right)^2 - \frac{49}{11} + 5}$$

minimum nastane pro  $t = \frac{7}{11}$  a nabývá hodnoty  $\frac{2\sqrt{286}}{11}$ .

Př: 200/46

$$p = \{[5 + 5t; 3 - 4t; 2] | t \in \mathbb{R}\}; C[4; 12; 4]$$

$$|CX| = \sqrt{(1 + 5t)^2 + (9 + 4t)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 10t + 25t^2 + 81 + 72t + 16t^2 + 4} = \sqrt{41x^2 + 82x + 86} =$$

$$\sqrt{41(x^2 + 1)^2 + 86x - 41} \text{ Minimum je } \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Př: 200/49

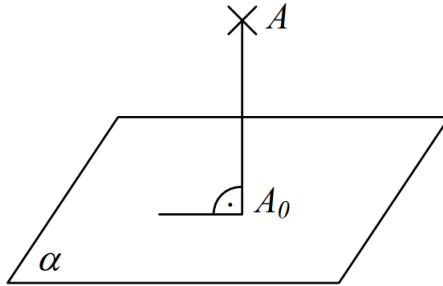
$$p = \{[t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}\}; A[1, 0, 5] \quad |AX| = \sqrt{(t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (2t - 5)^2} =$$

$$= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 20t + 25} = \sqrt{6t^2 - 24t + 27} = \sqrt{6(t^2 - 2)^2 + 3}$$

Minimum je  $\sqrt{3}$ .

## D) Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn:  $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$ , kde  $A_0$  je kolmý průmět bodu  $A$  do roviny  $\alpha$ .



$$\alpha : ax + by + cz + d = 0; [a, b, c] \neq [0, 0, 0]; A[a_1, a_2, a_3]$$

$$q \perp \alpha \Rightarrow p = [a_1 + ta; b_1 + tb; c_1 + tc] | t \in \mathbb{R}$$

$$A_0[a_1 + t^*a; b_1 + t^*b; c_1 + t^*c] \in \alpha \cap q$$

$$a(a_1 + t^*a) + b(b_1 + t^*b) + c(c_1 + t^*c) = 0$$

$$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d \quad t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - ca_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\rho(A, \alpha) = |\overrightarrow{AA_0}|$$

$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b, t^*c)$$

$$|\overrightarrow{AA_0}| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2 + (t^*c)^2} = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.3.: Nechť  $A[a_1; a_2; a_3]$  je bod a  $\alpha : ax + by + cz + d = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$  je rovina. Pak platí:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|aa_1 + ba_1 + ca_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**Př:** Určete  $\rho(A, \alpha)$   
 $A[1; -1; 0], \alpha : x - y + 2z - 1 = 0$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

**Př:** 200/50 Určete  $\rho(A, \alpha)$   
 $A[1; 0; 5], \alpha : 12x + 3y - 4z = 0$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|12 + 0 - 20|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{169}} = \frac{8}{13}$$

### E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v $E_3$

**Pozn:**  $\rho(p, q) = \rho(A, q)$ , kde  $A \in p$  je libovolný bod.  
 $p : ax + by + c_1 = 0$   $q : ax + by + c_2 = 0; (a, b) \neq \vec{0}$

Zvolíme  $A[a_1, a_2] \in p$ :

$$\rho(A, q) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 = -c$$

$$\Rightarrow \rho(p, q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**V.8.4.:** Necht'  $p : ax + by + c_1 = 0; q : ax + by + c_2 = 0$  jsou dvě rovnoběžky,  $(a, b) \neq \vec{0}$ . Pak platí:

$$\rho(p, q) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Př:** Určete  $\rho(p, q)$ :  
 $p : 4x - 2y + 1 = 0 \sim 2x - y + 0.5 = 0$   
 $q : 2x - y + 3 = 0$

$$\rho(p, q) = \frac{|3 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

### F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v $E_2$

**Pozn:**  $\rho(p, q) = \rho(A, q)$ , kde  $A \in p$  je libovolný bod.

Na přímce  $p$  zvolíme libovolný bod, dále viz C).

**Př:** Určete  $\rho(p, q)$ :  
 $p = \{[1 + 2t; -2t; -4t] | t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[1 - s; s; 2 + 2s] | s \in \mathbb{R}\}$   
 $A[1; 0; 0] \in p$   
 $B \in q$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(1-s-1)^2 + s^2 + (2+2s)^2} = \sqrt{6s^2 + 8s + 4} = 6\left(s + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} \cdot 6 + 4 = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\rho(A, q) = \rho(p, q) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

### G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v $\mathbb{E}_3$

**Pozn:**  $\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha)$ , kde  $A \in p$  je libovolný bod.

Na přímce  $p$  zvolíme libovolný bod, dále viz D).

**Př:** Určete  $\rho(p, \alpha)$ :

$$p = \{[-1 + 2t; 1 - t; 2 + 3t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha : x + 5y + z - 3 = 0$$

Ověření  $p \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ :

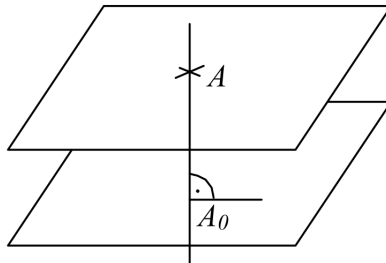
$$(2; -1; 3) \cdot (1; 5; 1) = 2 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow \text{platí.}$$

$A[-1; 1; 2] \in p$ :

$$\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha) = \frac{|-1 + 5 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v $\mathbb{E}_3$

**Pozn:**  $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$ , kde  $A \in \alpha$  je libovolný bod.



$$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$$

$$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha.$$

$$\rho(A, \beta) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$A \in \alpha : aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$$

$$\Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**V.8.5.:** Necht'  $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0, \beta : ax + by + cz + d_2 = 0$  jsou dvě různé rovnoběžné roviny,  $(a, b, c) \neq \vec{0}$ . Pak platí:

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete  $\rho(\alpha, \beta)$ :  
 $\alpha : 3x - y + 2z - 1 = 0$   
 $\beta : -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0 \quad 3x - y + 2z - 0 = 0$   
 $\rho(\alpha, \beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$

## I) Vzdálenosti dvou mimoběžných přímek v $\mathbb{E}_3$

Pozn:  $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta)$ , kde  $p \subset \alpha; q \subset \beta; \alpha \parallel \beta$ .

I. způsob: Z definice:

$$\begin{aligned} p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v}) \\ \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3) \\ \alpha : n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0 \\ A \in \alpha \Rightarrow \text{dosazením do předchozí rovnice určíme } d_1. \\ \beta : n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0 \\ B \in \beta \Rightarrow \text{dosazením do předchozí rovnice určíme } d_2. \\ \text{Dále viz H).} \end{aligned}$$

II. způsob: Pomocí osy mimoběžek:

Nechť  $o$  je osa mimoběžek  $p, q$ .  
 Určíme průniky  $o \cap p = \{P\}, o \cap q = \{Q\}$

Př: Určete  $\rho(p, q)$ :  
 $p = \{[9 + 4t; -2 - 3t; t] | t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[-2r; -7 + 9r; 2 + 2r] | r \in \mathbb{R}\}$

I. zp.:  $\vec{u} = (4; -3; 1); \vec{v} = (-2; 9; 2)$   
 $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9; 4 \cdot (-2) - 4 \cdot ; 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-2)) = (-15; -10; 30) \rightarrow (3; 2; -6)$   
 $\alpha : 3x + 2y - 6z + d_1 = 0$   
 $A[9; 2; -1] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = -23.$   
 $\beta : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$   
 $B[0; -7; 2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 \Rightarrow d_2 = 26.$   
 $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta) = \frac{|26+3|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7$

II. zp.: Hledáme  $o(P, \vec{w})$   
 $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \dots = (3; 2; -6)$

Přímka  $p, q$  rovnoběžná s  $\vec{w}$ :

$$\vec{AB} = (-9; -5; 2)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= A + k\vec{u} \\ Q &= B + l\vec{v} \end{aligned} \right\} \vec{PQ} = B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ -6 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -9 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & -245 & -245 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 15 & | & -1 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & | & -16 \\ 0 & 8 & 0 & | & -16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = [9; -2; 0] - 2(4; -3; 1) = [1; 4; -2]$$

$$Q = [0; -7; 2] + (-2; 9; 2) = [-2; 2; 4]$$

$$\Rightarrow |PQ| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \rho(p, q) = 7$$

Př: 96/100:

100. Určete osu mimoběžek  $x_1 = 7 + t$ ,  $x_2 = 3 + 2t$ ,  $x_3 = 9 - t$  a  $x_1 = 3 - 7s$ ,  $x_2 = 1 + 2s$ ,  $x_3 = 1 + 3s$  a vypočítejte jejich vzdálenost.

$$p = \{[7 + t; 3 + 2t; 9 - t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$q = \{[3 - 7s; 1 + 2s; 1 + 3s] | s \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{u} = (1; 2; -1)$$

$$\vec{v} = (-7; 2; 3)$$

$$\vec{AB} = (-4; -2; -8)$$

$$\vec{w} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2; 7 - 3; 2 + 14) = (8; 4; 16) \sim (-4; 2; 8) \Rightarrow \text{příčkou je } AB.$$

$$P = [7; 3; 9]$$

$$Q = [3; 1; 1]$$

$$|PQ| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$$

Př: 92/82

82. Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou  $4x - 3y - 12 = 0$  a mají od bodu  $A = (2, 3)$  vzdálenost rovnou 5.

Nechť hledaná přímka je tvaru  $p: 4x - 3y + c = 0$  (z rovnoběžnosti). Vzdálenost tedy je  $\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-1+c|}{5} = 5 \Rightarrow c = 5 \cdot 5 + 1 = 26 \vee c = 1 - 5 \cdot 5 = -24$

$$p_1: 4x - 3y + 26$$

$$q_2: 4x - 3y - 24$$

Př: 92/83

83. Na ose  $y$  najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku i od přímky  $3x - 4y + 12 = 0$ .

Hledám bod  $A[0, y]$ . Vzdálenost k počátku:  $|y|$ .

Vzdálenost k přímce:  $\frac{|-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5} \cdot |y-3|$ .

Když  $y \leq 0$ :  $-y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow -5y = -4y+12 \Rightarrow y = -12 \in (-\infty; 0)$   
 Když  $0 \leq y \leq 3$ :  $y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow 5y = -4y+12 \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \in \langle 0, 3 \rangle$   
 Když  $3 \leq y$ :  $y = \frac{4}{5}(y-3) \Rightarrow 5y = 4y-12 \Rightarrow y = -12 \notin \langle 3, \infty \rangle$

$$A_0 = [0; -12]$$

$$A_1 = \left[0; \frac{9}{12}\right]$$

Př: 92/84

84. Určete rovnici přímky, která prochází bodem  $A = (-2, 1)$  a od bodu  $B = (3, 1)$  má vzdálenost rovnou 4.

Nechť hledaná přímka je tvaru  $p: ax + by + c = 0$ .

Když  $a = 0$ :  $A \in p \Rightarrow 1b + c = 0 \Rightarrow p: 0x + y - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 0 \neq 4 \Rightarrow$  spor.  
 BÚNO tedy  $a = 1$ .

$$A \in p \Rightarrow -2 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$$

$$\rho(p, B) = 4 \Rightarrow \frac{|3+b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow \frac{25}{16} = 1+b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}.$$

$$\text{Když } b = \frac{3}{4}: c = \frac{5}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$\text{Když } b = -\frac{3}{4}: c = \frac{11}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3-\frac{3}{4}+\frac{11}{4}}{\sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$p_1: x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x + 3y + 5 = 0$$

$$p_1: x - \frac{3}{4}y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x - 3y + 11 = 0$$

Př: 92/85

85. Určete rovnici přímky, která prochází bodem  $A = (1, 2)$  a má stejnou vzdálenost od bodů  $B = (3, 3)$  a  $C = (5, 2)$ .

Nechť hledaná přímka je tvaru  $p: ax + by + c = 0$ .

Když  $b = 0$ :  $A \in p \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow p: x - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 3 \neq 5 = \rho(C, p) \Rightarrow$  spor.  
 BÚNO tedy  $b = 1$ .

$$A \in p \Rightarrow a + 2 + c = 0 \Rightarrow a + c = -2$$

$$\rho(p, B) = \rho(p, C) \Rightarrow \frac{|3a+3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5a+2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |3a+3+c| = |5a+2+c| \Rightarrow |2a+1| = |4a|$$

$$\text{Když } a \leq -\frac{1}{2} \vee a \geq 0: 2a+1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Když } a \geq -\frac{1}{2} \wedge a \leq 0: 2a+1 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{6}.$$

$$p_1: \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow p: x + 2y - 5 = 0$$

$$p_2: -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow p: x - 6y + 11 = 0$$

## §9. Odchylka

**Def:** Necht  $\vec{u}, \vec{v}$  jsou dva nenulové vektory. *Odchylkou dvou vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  označujeme  $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$  a definujeme takto:*

1. Je-li  $\vec{u} = k\vec{v}; k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 0^\circ$
2. Je-li  $\vec{u} = k\vec{v}; k \in \mathbb{R}^- \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 180^\circ$
3. Je-li  $\vec{u} \neq k\vec{v}$  pro  $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$  odchylkou vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

**Pozn:**  $0^\circ \leq |\angle \vec{u}, \vec{v}| \leq 180^\circ$

**V.9.1.:** Necht  $\vec{u}, \vec{v}$  jsou dva nenulové vektory. Pak platí:

$$|\angle \vec{u}, \vec{v}| = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk: Plyne z definice skalárního součinu]

**Pozn:** Jestliže jsou dva podprostory  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$  rovnoběžné, jejich odchylka je  $0^\circ$ .

### A) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_2$

**Pozn:** Necht  $p, q$  jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek  $p, q$  je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.  $0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$

**V.9.2.:** Necht  $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$  jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce  $y = \arccos x$  má pro definiční obor  $\langle 0; 1 \rangle$  obor hodnot  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ .]

**V.9.3.:** Necht  $p: ax + by + c = 0$  ( $(a, b) \neq \vec{0}$ ),  $q: ex + fy + g = 0$  ( $(e, f) \neq \vec{0}$ ) jsou 2 různoběžné přímky a necht  $\vec{n}_p = (a, b), \vec{n}_q = (e, f)$ . Pak platí:

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2. a z toho, že normálové vektory přímek svírají stejný úhel jako přímky samé.]

**V.9.4.:** Necht  $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$  jsou 2 různoběžné přímky a necht  $\vec{n}_q = (a, b)$ . Pak platí:

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_q|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2., z toho, že odchylka normálového vektoru 1 přímky a směrového vektoru 2. přímky svírá úhel  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  a  $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$  ( $\varphi$  je odchylka obou přímek).]

**Př:** Určete  $\angle p, q$ :



a)  $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}); A[1; 0], B[3; 1], \vec{u}(1; 1), \vec{v}(-1; 0)$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|-1|}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b)  $p: 5x + 3y - 7 = 0; q: 4x - y + 5 = 0$

$$\vec{n}_p = (5, 3); \vec{n}_q = (4, -1)$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|20 - 3|}{\sqrt{25 + 9} + \sqrt{16 + 1}} = \arccos \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

c)  $p = \overleftrightarrow{AB}; A[1; 0]; B[2; 1]; q: x + 2y - 6 = 0$

$$\vec{u} = (1; 1); \vec{n}_q = (1, 2)$$

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|1 + 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/69:

69. Určete odchylku  $\alpha$  přímek

a)  $2x + y - 5 = 0$  a  $6x - 2y + 7 = 0;$

b)  $x_1 = 2 + t, x_2 = 3 - t$  a  $2x + 4y - 1 = 0.$

a)  $\vec{n}_p = (2; 1); \vec{n}_q = (6; -2)$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|12 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b)  $\vec{u} = (1; -1); \vec{n}_q = (2; 4) \sim (1; 2)$

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|1 - 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/70:

70. Určete rovnici přímky, která má od přímky  $x - 2y + 3 = 0$  odchylku  $30^\circ$  a prochází jejím průsečíkem s osou  $y$ .

$$\vec{n} = (1; -2)$$

$$\text{Otočím o } +30^\circ: \vec{n}_1 = \vec{n} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (1 - 2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

$$p_1: (\sqrt{3} + 2)x + (1 - 2\sqrt{3})y + c_1 = 0$$

$$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}(-2\sqrt{3} + 1) = c_1$$

$$p_1: (2\sqrt{3} + 4)x + (-4\sqrt{3} + 2) + (6\sqrt{3} - 3) = 0$$

$$\text{Otočím o } -30^\circ: \vec{n}_1 = \vec{n} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

$$p_1: (\sqrt{3}-2)x + (-1-2\sqrt{3})y + c_2 = 0$$

$$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}(-2\sqrt{3}-1) = c_1$$

$$p_2: (2\sqrt{3}-4)x + (-4\sqrt{3}-2)y + (6\sqrt{3}+3) = 0$$

Př: 86/71:

71. V rovnoramenném pravouhlém trojúhelníku je dán vrchol ostrého úhlu  $A = (5, 7)$  a přímka  $6x + 4y - 9 = 0$ , ve které leží jedna z odvěsen. Určete rovnice přímk, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníku.

$$p: 6x + 4y + 9$$

$$\vec{n}_p = (6; 4) \sim (3, 2)$$

$$6 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - 9 \neq 0 \Rightarrow A \notin p \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = p$$

$$\text{Najdu } \overleftrightarrow{AC} \perp BC: \overleftrightarrow{AC}: 2x - 3y + c = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow 10 - 21 + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

$$\overleftrightarrow{AC}: 2x - 3y + 11 = 0$$

Najdu  $\overleftrightarrow{AB}$ :

Otočím  $p$  o  $+45^\circ$ :

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_p \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

$$\overleftrightarrow{BC}_1: x + 5y + d = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AB}_1 \Rightarrow 5 + 5 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = -40$$

$$\overleftrightarrow{BC}_1: x + 5y - 40 = 0$$

Otočím  $p$  o  $-45^\circ$ :

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_p \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\overleftrightarrow{BC}_2: 5x - y + e = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{AB}_2 \Rightarrow 5 \cdot 5 - 7 + e = 0 \Rightarrow e = -18$$

$$\overleftrightarrow{BC}_2: 5x - y - 18 = 0$$

Př: 86/73:

73. Určete kosiny vnitřních úhlů trojúhelníku o vrcholech  $A = (1, 1)$ ,  $B = (-1, 3)$ ,  $C = (3, 1)$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-2, 2) \sin(-1; 1) \\ \overrightarrow{BC} &= (4, -2) \sin(2; -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (2, 0) \sin(1; 0)\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{2+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

## B) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_3$

**Pozn:** Necht'  $p, q$  jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

Necht'  $p, q$  jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna  $|\angle p', q'|$ , kde  $p' \parallel p, q' \parallel q$  jsou různoběžky.

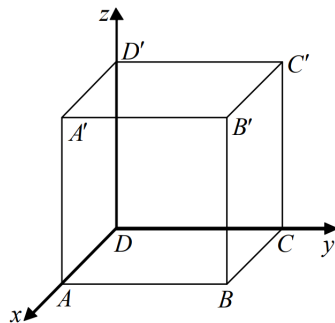
$$0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$$

**V.9.5.:** Necht'  $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$  jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$|\angle \overrightarrow{p}, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

[Dk.: viz V.9.2].

**Př:** Určete odchylku přímek  $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}$  krychle  $ABCD A'B'C'D'$ :



Analytické řešení:

$$A[1; 0; 0]; A'[1; 0; 1],$$

$$B[1; 1; 0]; B'[1; 1; 1],$$

$$C[0; 1; 0]; C'[0; 1; 1],$$

$$D[0; 0; 0]; D'[0; 0; 1],$$

$$\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1); \overrightarrow{BC'} = (-1; 0; 1)$$

$$|\angle \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}| = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Stereometrické řešení:

Celý problém se evidentně odehrává v rovině  $A'BC'$ : Úsečky  $A'B, BC'$  a  $A'C'$  mají evidentně stejnou vzdálenost, protože se jedná o stěnové úhlopříčky.  $\triangle A'BC'$  je tedy rovnostranný, pročež  $|\angle \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}| = |\angle A'BC'| = \frac{\pi}{3}$ .

**Př:** 177/11:

$$\overrightarrow{u} = (-1; 1; -1)$$

$$\overrightarrow{v} = (1; 1; 1)$$

$$|\angle p, \overrightarrow{AB}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

Př:

177/12:

$$\vec{u}(2; 2; 10) \sim (1; 1; 5)$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, x| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, y| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, z| = \arccos \frac{|5|}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{27}}} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 7581 = \frac{81}{81} = 1 \quad QED.$$

Př:

178/17:

$$1. \quad \begin{array}{l} \vec{u}(1, 1, 1) \\ \vec{v}(-1, 1, 1) \end{array}$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

.

$$2. \quad \begin{array}{l} \vec{u}(1, 1, 1) \\ \vec{v}(-1, 1, 0) \end{array}$$

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

.

Př:

178/18:

$$1. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \text{ a } \overleftrightarrow{CD}: \\ \vec{u}(-6; 5; 0) \\ \vec{v}(-3; -3; 8) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|18 - 15|}{\sqrt{36 + 25} \cdot \sqrt{9 + 9 + 64}} = \arccos \frac{3\sqrt{5002}}{5002}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AC} \text{ a } \overleftrightarrow{BD}: \\ \vec{u}(-1; 6; 0) \\ \vec{v}(2; -2; 8) \sim (1; -1; 4) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-1 - 6|}{\sqrt{1 + 36} \cdot \sqrt{1 + 1 + 8}} = \arccos \frac{7\sqrt{370}}{370}$$

$$3. \quad \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AD} \text{ a } \overleftrightarrow{BC}: \\ \vec{u}(-4; 3; 8) \\ \vec{v}(5; 1; 0) \end{array}$$

$$|\angle \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-20 + 3|}{\sqrt{16 + 9 + 64} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \arccos \frac{17 \cdot \sqrt{2314}}{2314}$$

### C) Odchylka přímky od roviny v $\mathbb{E}_3$

**Pozn:** Necht'  $p, \alpha$  jsou přímka a rovina navzájem různoběžné. Pak platí:  $|\angle p, \alpha| = |\angle p, q|$ ,  
kde  $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subset \beta$ .  
 $0^\circ \leq |\angle p, \alpha| \leq 90^\circ$

**V.9.6.:** Necht'  $p(A, \vec{u})$  je přímka a  $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \vec{0})$  je rovina a necht'  $\vec{n} = (a, b, c)$ . Pak platí:

$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5., z toho, že odchylka normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky svírá úhel  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  a  $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$  ( $\varphi$  je odchylka přímky od roviny).]