

Obsah

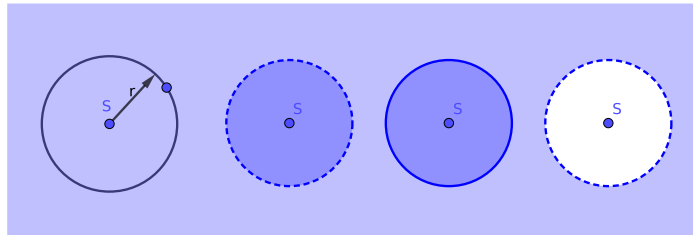
§1. Analytické vyjádření kružnice a kruhu	1
§2. Kružnice	2
§3. Vzájemná poloha kružnic, kruhů a lineárních útvarů	5
§4. Tečna kružnice	7
§5. Kulová plocha, koule	8
§6. Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic	10
§7. Analytické vyjádření obrazu útvaru	12
§8. Parabola	12
§9. Vzájemná poloha parabol a přímek, tečna paraboly	15
§10. Elipsa	19
V.10.1.: Analytické vyjádření elipsy	20
§11. Hyperbola	23
§12. Středové kuželosečky a jejich tečny	27

§1. Analytické vyjádření kružnice a kruhu

Def: Kružnice: $k(S, r = \{X \in \rho; |SX| = r\}$
 Kruh: $K(S, r = \{X \in \rho; |SX| \leq r\}$

V.1.1.: Útvary uvedené v levém sloupci mají analitická vyjádření v pravém sloupci:

kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$	$ SX ^2 = r^2$	$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$
vnitřní oblast kružnice $k(S, r)$	$ SX ^2 < r^2$	$(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2$
kruh $K(S, r)$	$ SX ^2 \leq r^2$	$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2$
vnější oblast kružnice $k(S, r)$	$ SX ^2 > r^2$	$(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2$



Př: 205/2: Napište analitické vyjádření kruhu $k(S, r)$, je-li dáno $S[2; -5]$ a $r = 3$:

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 \geq 9$$

Zakreslete kružnici, která má rovnici $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

$$k(S[-3; -2]; r = 2\sqrt{2})$$

Př: 205/2:

- $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$
- $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 \leq 6^2$
- $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 < 5$
- $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 > (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Př: 206/3:

- Kružnice a její vnější oblast: Střed $[4; -2]$, poloměr 1.
- Kružnice: Střed $[-2; -5]$, poloměr 5.
- Vnější oblast: Střed $[-3; \sqrt{3}]$, poloměr $\sqrt{13}$.
- Vnitřní oblast: Střed $[-3; -2]$, poloměr 4.
- Kruh: Střed $[-1; \sqrt{2}]$, poloměr $2\sqrt{2}$.
- Kružnice: Střed $[2; -\sqrt{12}]$, poloměr $2\sqrt{5}$.

§2. Kružnice

V.2.1.: Je-li v rovině dána kartézská soustava souřadnic, pak platí:

- Každou kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$ lze analyticky vyjádřit právě jednou rovnicí $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Každá rovnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde $r > 0$, analyticky vyjadřuje právě jednu kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem r .

- Def:** Rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, kde $r > 0$ se nazývá *středový tvar rovnice kružnice*.
- Pozn:** Jestliže rozepíšeme mocnny dvojčlenů ve středovém tvaru rovnice kružnice a získané členy uspořádáme sestupně, dostaneme $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$, což je rovnice typu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Def:** Pokud rovnice $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ vyjadřuje některou kružnici k , nazývá se *obecný tvar rovnice kružnice k*.
- Př:** Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 14 &= 0 \\(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 14 &= 0 \\(x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= -1\end{aligned}$$

Rovnce neodpovídá kružnici.

- Př:** Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4} + \left(y^2 + \frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{4} + c &= 0 \\(x + \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\end{aligned}$$

Musí tedy platiti $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$.

- Př:** Určete rovnice všech kružnic, které prochází body $A[-1; 3]; B[0; 2]; C[-1; -1]$:

$$\begin{aligned}1 + 9 - a + 3b + c &= 0 & (1) \\4 + 2b + c &= 0 & (2) \\1 + 1 - a - b + c &= 0 & (3) \\& & (4)\end{aligned}$$

Toto upravím na:

$$\begin{aligned}a - 3b - c &= 10 & (5) \\2b + c &= -4 & (6) \\a + b - c &= 2 & (7) \\& & (8)\end{aligned}$$

Soustava jediné má řešení $[4; -2; 0]$, které odpovídá rovnici $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ Po úpravě: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Jedná se o kružnici $k(S[-2; 1], r = \sqrt{5})$.

- Př:** 210/5:

- $(x - 2)^2 + y^2 = 5 + 4$ Střed $[2; 0]$, poloměr 3.
- $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 7 + 1 + 1$ Kruh: Střed $[-1; 1]$, poloměr 3.

- $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 2.5 + \frac{25}{4} + \frac{49}{4}$ Střed $[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}]$, poloměr $\sqrt{21}$.
- $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{83}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$ Kruh: Střed $[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}]$, poloměr $\sqrt{50}$.

Př: 210/6:

$$9 + 3a + c = 0 \quad (9)$$

$$4 + 2a + 4 - 2b + c = 0 \quad (10)$$

$$36 + 6a + 36 + 6b + c = 0 \quad (11)$$

$$(12)$$

$$3a + c = -9 \quad (13)$$

$$2a - 2b + c = -8 \quad (14)$$

$$6a + 6b + c = -72 \quad (15)$$

$$(16)$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 1 & -8 \\ 6 & 6 & 1 & -72 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & -9 \\ 6 & 6 & 1 & -72 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 12 & -2 & -48 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -1 & -24 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Žádně}$$

řešení \Rightarrow kružnice neexistuje, protože body jsou kolineární.

Př: Určete rovnice všech kružnic, které prochází bodem $A[1; 2]$, dotýká se osy y a mají střed na přímkce p , která má rovnici $y + x = 4$:

$$\text{Hledám } (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

$$k \text{ se dotýká } y \Rightarrow m^2 = r^2$$

$$S \in P \Rightarrow m + n = 4$$

$$A \in k \Rightarrow (1 - m)^2 + (2 - n)^2 = r^2$$

$$m + n = 4$$

$$(1 - m)^2 + (2 - n)^2 = m^2$$

$$\text{Řešení: } (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1 \text{ a } (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Př: 210/7: Hledám $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$:

$$\text{Dotýká se } x \Rightarrow r^2 = m^2.$$

$$\text{Dotýká se } x \Rightarrow r^2 = n^2.$$

$$K \in k \Rightarrow (9 - n)^2 + (2 - m)^2 = r^2$$

$$\text{Když } m = n = \pm r \quad K \in k \Rightarrow (9 - n)^2 + (2 - n)^2 = n^2 \Rightarrow x^2 - 22x + 85 = 0$$

$$m = n = r = 5 \vee m = n = r = 17$$

$$(x + 5)^2 + (y + 5) = 5^2$$

$$(x + 17)^2 + (y + 17) = 5^2$$

$$\text{Když } m = -n = \pm r \quad K \in k \Rightarrow (9 + n)^2 + (2 - n)^2 = n^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 85 = 0 \Rightarrow D = 255 - 4 \cdot 85 = -115 < 0$$

Př: 210/8: Hledám $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$:

$$m + 3n - 6 = 0 \Rightarrow m = 6 - 3n$$

$$r = 5$$

$$M[6; 9] \in k \Rightarrow (6 - m)^2 + (9 - n)^2 = 25 \Rightarrow (6 - 6 + 3n)^2 + (9 - n)^2 = 25 \Rightarrow 9n^2 - 18n + 56 = 0 \Rightarrow D = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = -1692 < 0.$$

Neexistuje řešení.

Př: 210/9/a:

Osa přímek, na které musí náležet střed je buď $x = 0$ nebo $y = 0$:

Jelikož $p \perp q$, průsečík přímek, body doteku a střed tvoří čtverec o straně r , tedy $|[0; 0]S| = 2\sqrt{2}$:

Řešením tedy jsou:

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

Př: 210/9/a:

$$(m - 4)^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \vee m = 6$$

$$S \in r \parallel p \rho(r, q) = 2 \Rightarrow r : x - y + 2 \pm 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n = 2 \pm 2\sqrt{2} + m$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 8 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 8 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

§3. Vzájemná poloha kružnic, kruhů a lineárních útvarů

Pozn: Úloha požadující určení průniku dvou útvarů vede k řešení soustavy rovnic či nerovnic, ve kterých jsou zahrnuta anaitická vyjádření těchto útvarů.

Př:

Je dána kružnice $k(S[2; 3, r = 5])$ a body $A[-3; -4]$ a $B[1; 6]$. Určete průsečík k s:

1. s úsečkou AB
2. s polopřímku AB
3. s přímkou AB

Kružnici vyjádřím: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

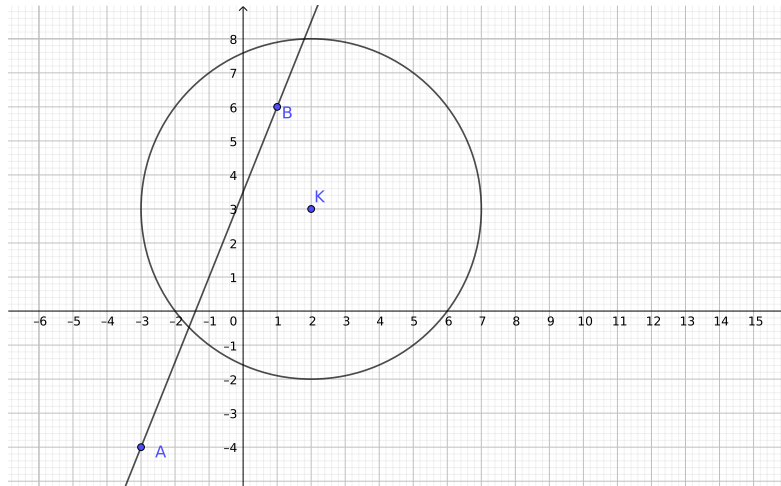
Přímku vyjádřím parametricky: $x = -3 + 4t; y = -4 + 10t | t \in \mathbb{R}$.

Dosadím: $(-5 + 4t)^2 + (-7 + 10t)^2 = 25$

$$116t^2 - 180t + 49 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{180 \pm \sqrt{9664}}{232}$$

1. Úsečka: $t \in \langle 0; 1 \rangle$. Zde leží pouze t_2 : tedy $\{[-3 + 4t_2; -4 + 10t_2]\}$
2. Polopřímka: $t > 0$: Zde leží obě dvě hodnoty: tedy $\{[-3 + 4t_1; -4 + 10t_1], [-3 + 4t_2; -4 + 10t_2]\}$
3. Přímka:
tedy $\{[-3 + 4t_1; -4 + 10t_1], [-3 + 4t_2; -4 + 10t_2]\}$



Př: 214/10:

1. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 100$
 $x = 0 : y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y^2 - 95 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm 4\sqrt{6}$
 $A_1[0; -1 + 4\sqrt{6}]$
 $A_2[0; -1 - 4\sqrt{6}]$
 $y = 0 : x^2 - 2x + 4 + 1 = 100 \Rightarrow y^2 - 4x - 95 = 0 \Rightarrow y = 2 \pm 3\sqrt{11}$
 $B_1[2 + 3\sqrt{11}; 0]$
 $B_2[2 - 3\sqrt{11}; 0]$
2. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
 $x = 0 : y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 6$
 $A_1[0; 0]$
 $A_2[0; 6]$
 $y = 0 : x^2 - 8x = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 8$
 $B_1[0; 0]$
 $B_2[8; 0]$
3. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
 $x = 0 : y^2 + 8y + 16 + 9 = 16 \Rightarrow y = -4 \pm \sqrt{7}$
 $A_1[0; -4 + \sqrt{7}]$
 $A_2[0; -4 - \sqrt{7}]$
 $y = 0 : (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad B[3; 0].$

Př: 214/13:

$$K : x^2 + (y - 3)^2 \leq 25$$

$$1. \overleftrightarrow{HL} = \{[-4 + 4t; 8t] | t \in \mathbb{R}\} \quad (-4 + 4t)^2 + (8t - 3)^2 \leq 25 \Rightarrow 80t^2 - 80t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\{[-4 + 4t; 8t] | t \in \langle 0; 1 \rangle\}$$

$$2. \overleftrightarrow{HM} = \{[-4 + 12t; 4t] | t \in \mathbb{R}\} \quad (-4 + 12t)^2 + (4t - 3)^2 \leq 25 \Rightarrow 160t^2 - 120t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; \frac{3}{4} \rangle$$

$$\left\{ [-4 + 12t; 4t] | t \in \left\langle 0; \frac{3}{4} \right\rangle \right\}$$

3. Analogicky

Př: 214/14:

$$y = 2x + c$$

$$(x - 3)^2 + (2x + c + 1)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$$

$$5x^2 + (4c - 2)x + (2c + c^2 + 6) = 0$$

$$D = (4c - 2)^2 - 4 \cdot 5(2c + c^2 + 6) = -4c^2 - 56c - 116 = (c - (-7 + 2\sqrt{5}))(c - (-7 - 2\sqrt{5}))$$

- prázdný: $c \in (-\infty; -7 - 2\sqrt{5}) \cup (-7 + 2\sqrt{5}; \infty)$
- jednobodový: $c \in \{-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\}$
- výcebodový: $c \in (-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5})$

§4. Tečna kružnice

Pozn: Jak víme, tečna je přímka, která leží v rovině kružnice a má tyto vlastnosti:

- Obsahuje právě jeden bod kružnice
- Střed kružnice má od ní vzdálenost poloměru kružnice.
- Je kolmá k poloměru kružnice, který obsahuje bod dotyku

Pozn: Rovnice tečny v daném bodě:

Je dána $k(S[m, n], r)$ a $T[x_0, y_0] \in k$. $X[x, y]$ je libovolným bodem tečny t .

$$\overrightarrow{ST} = (x_0 - m, y_0 - n)$$

$$\overrightarrow{SX} = (x - m, y - n)$$

Pro každý bod $X \neq T$ existuje pravoúhlý trojúhelník STX , přitom $|ST| = r$ a $|SX| \cos \alpha = r$, tedy $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SX} = |ST| \cdot |SX| \cdot \cos \alpha = r^2$. Každá tečna kružnice má tedy rovnici:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$$

V.4.1.: Rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$ je analytickým řešením tečny kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$.

Př: Je dána kružnice k s rovnicí $(x - 3)^2 + (y + 12)^2 = 100$ a body $L[9; -4]$ a $M[5; 2]$. Určete tečny ke k procházející L resp M .

- Dosazením L do rovnice k zjistíme, že $l \in k$. Tedy tečna $l : (9 - 3)(x - 3) + (-4 + 12)(y + 12) = 100$. Po úpravě: $3x + 4y - 11 = 0$

Dosazením M do k zjistíme, že M leží ve vnější oblasti.

Hledám bod dotyku:

$$T \in k \Rightarrow (x_0 - 3)^2 (y_0 + 12)^2 = 100$$

$$T \in t \Rightarrow (x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 - 12)(y + 12) = 100$$

$$M \in t \Rightarrow (x_0 - 3)(5 - 3) + (y_0 + 12)(2 + 12) = 100$$

$$(x_0 - 3)^2 + (y_0 + 12)^2 = 100$$

$$x_0 + 7y + 0 + 31 = 0$$

Řešení: $[-3; -4]$ a $[11, -6]$.

$$t_1 : -6(x - 3) + 8(y + 12) = 100 \dots -3x + 4y + 7 = 0$$

$$t_1 : -8(x - 3) + 6(y + 12) = 100 \dots 7x + 3y - 26 = 0$$

Př: $217/16: x = \frac{4y+7}{3}$

$$\left(\frac{4y+7}{3} - 3\right)^2 + (y + 12)^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}y^2 + \frac{200}{9}y + \frac{400}{9} = 0$$

$$D = 200^2 - 4 \cdot 25 \cdot 400 = 0$$

Je tečnou

$$x = \frac{-4y+26}{3}$$

$$\left(\frac{-4y+26}{3} - 3\right)^2 + (y + 12)^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}y^2 + \frac{80}{9}y + \frac{1859}{9} = 0$$

$$D = 80^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1859 = -179500$$

Není tečnou

Př: $218/19:$

$$1. (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad (x+2)(3+2) + (y+2)(7+2) = 5 \Rightarrow 5x + 5y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$(x+2)^2 + (1-x-2)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = -3$$

$$T_1[0, 1]; T_2[-3, r4]$$

$$\vec{u} = (3, 6); \vec{v} = (6, 3)$$

$$\alpha = \arccos \frac{|3 \cdot 6 + 6 \cdot 3|}{\sqrt{3^2+6^2} \cdot \sqrt{6^2+3^2}} = \arccos \frac{4}{5} = 36.87^\circ$$

§5. Kulová plocha, koule

Def: Nechť je dán bod S a kladné reálné číslo r . Kulovou plochu se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů X prostoru, pro které platí $|SX| = r$. Kouli se středem S a poloměrem r se nazývá množina všech bodů X prostoru, pro která platí, že $|SX| \leq r^2$.

Pozn: Při analytickém vyjadřování těchto útvarů uplatníme ekvivalenci charakteristických vlastností:

$$|SX| = r \quad \Leftrightarrow \quad |SX|^2 = r^2$$

$$|SX| \leq r \Leftrightarrow |SX|^2 \leq r^2$$

V.5.1.: Má-li bod S souřadnice $[m, n, q]$ a bod $X[x, y, z]$, pak kulová plocha $k(S, r)$ je analyticky vyjádřena rovnicí:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2$$

a koule $K(S, r)$ nerovnicí:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 \leq r^2$$

Pozn: Úloha o vzájemné poloze přímky a kulové plochy povede obdobným způsobem ke kvadratické rovnici. Může tedy mít následující typy výsledků:

- prázdná množina
- jednobodová množina
- dvoubodová množina

Př: Určete hodnotu parametru k , pro kterou má rovina $\rho : 2x - 3y + z + k = 0$ neprázdný průnik s kulovou plochou k středu $S[2; -3; 1]$ a poloměru 3.

$$\rho \cap k \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho(S, \rho) \leq 3$$

Nerovnici vyjádřím analyticky:

$$\frac{|2 \cdot 2 - 3(-3) + 1 \cdot 1 + k|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \leq 3$$

$$|14 + k| \leq 3 \cdot 14$$

Hledané hodnoty parametru k patří do intervalu $\langle -14 - 3\sqrt{14}; -14 + 3\sqrt{14} \rangle$.

Pozn: Jak víme ze stereometrie, tečnou rovinu kulové plochy můžeme charakterizovat kteroukoliv z těchto tří vlastností:

- Má s kulovou plochou jednobodový průnik
- Má od středu vzdálenost rovnou poloměru
- je kolmá k poloměru kulové plochy obsahující bod dotyku

Bod X je libovolným bodem roviny $\tau, X \neq T$. Z rovnosti $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SX} = r^2$ můžeme odvodit rovnici tečné kruhové roviny τ kulové plochy K zcela obdobně jako rovnici tečny kružnice.

V.5.2.: Rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) + (z_0 - q)(z - q) = r^2$ je analytickým vyjádřením tečné roviny kulové plochy $K : (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2$ v jejím bodě $T[x_0, y_0, z_0]$.

Pozn: Úpravy obecné rovnice kulové plochy na středový tvar se provádí stejnými kroky jako úpravy rovnice kružnice. Platí také, že ne každá rovnice typu $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ vyjadřuje kulovou plochu.

Př: 222/21: $\overrightarrow{SA} = (0, -2, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{13}$ $\overrightarrow{SB} = (0, -5, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{SB}| = \sqrt{34}$ $\overrightarrow{SC} =$

$$(5, 0, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{41}$$

$$r = \sqrt{41}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 41$$

Př:

$$22/24: (1-t-1)^2 + (2+t)^2 + (3-2t-1)^2 = r^2$$

$$(1-t)^2 + (2+t)^2 + (3-2t-6)^2 = r^2$$

$$(1-t-1)^2 + (2+t)^2 + (3-2t-1)^2 = (1-t)^2 + (2+t)^2 + (3-2t-6)^2$$

$$6t^2 - 4t + 8 = 6t^2 + 14t + 14$$

$$18t = 6$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

$$S\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right]$$

$$r^2 = 10$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{5}\right)^2 = 10$$

Př:

$$222/25:$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$$

$$\overleftarrow{AB} = \{[4+t; 5-2t; 6+2t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$(4+t-2)^2 + (5-2t-3)^2 + (6+2t-5)^2 = 36$$

$$9t^2 - 27 = 0$$

$$t = \pm\sqrt{3}$$

$$1. \emptyset$$

$$2. \{[4+\sqrt{3}; 5-2\sqrt{3}; 6+2\sqrt{3}]\}$$

$$3. \{[4-\sqrt{3}; 5+2\sqrt{3}; 6-2\sqrt{3}]; [4+\sqrt{3}; 5-2\sqrt{3}; 6+2\sqrt{3}]\}$$

§6. Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic

Př:

Vyšetřete množinu bodů X roviny, pro které platí $\rho(X, p) \geq 3 \cdot \rho(X, q)$, kde p, q jsou dvě kolmé přímky v rovině.

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby p byla osou x a q osou y .

$$p: y = 0, X[x, y]$$

$$q: x = 0, |y| \geq |X|$$

Útvar U , který má toto analytické vyjádření, sestojíme na základě znalostí, které máme o grafech funkcí. Diskuzí o hodnotách proměnné y získám soustavu nerovnic:

$$y \geq 0 \wedge y \geq 3|x| \text{ nebo } y \leq 0 \wedge -y \geq 3|x|$$

Část roviny „nad grafem“ funkce $y = 3|x|$ a Část roviny „pod grafem“ funkce $y = -3|x|$

Útvar U je sjednocením dvou vrcholových úhlů, jejichž osy leží na q . Pro α platí $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}$, tj. $\alpha \doteq 36^\circ$

Př: Vyšetřete množinu bodů M všech bodů X roviny, pro které platí $|AX| \geq 2|BX|$. Body A, B jsou dva různé body roviny.

Nechť $A[-3; 0]; B[3; 0]; X[x, y] \in M$:

$$\begin{aligned} |AX| &\geq 2|BX| \\ \sqrt{(x+3)^2 + y^2} &\geq 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} \\ (x+3)^2 + y^2 &\geq 4(x-3)^2 + 4y^2 \\ -9 &\geq x^2 - 10x + y^2 \\ 4^2 = 16 &\geq (x-5)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Každý bod, který splňuje první nerovnici splňuje i tu poslední vyjadřující $K([5; 0], 4)$.

Obrácením postupu úprav prokážeme, že každý bod tohoto kruhu K má charakteristickou vlastnost vyšetřované množiny M .

Př: 227/32:A

$$\begin{aligned} 1. \text{ Nechť } A[-1, 0]; B[1, 0]; X[x, y]: (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 &= 2^2 \\ 2y^2 + 2x^2 - 2x + 2x + 2 &= 4 \\ 2y^2 + 2x^2 &= 2 \\ y^2 + x^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$k([0; 0], 1)$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Nechť } A[-1, 0]; B[1, 0]; X[x, y]: \sqrt{(x+1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ (x+1)^2 + y^2 &= 4(x-1)^2 + 4y^2 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 \\ 0 &= 3x^2 - 10x + 3 + 3y^2 \\ 0 &= x^2 - \frac{10}{3}x + 1 + y^2 \\ 0 &= \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 + y^2 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{16}{9} = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$k\left(\left[\frac{5}{3}; 0\right], \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Nechť } A[-1, 0]; B[1, 0]; X[x, y]: (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 &= 4 \cdot 2^2 \\ 2y^2 + 2x^2 - 2x + 2x + 2 &= 16 \\ 2y^2 + 2x^2 &= 14 \\ y^2 + x^2 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k([0; 0], \sqrt{7}) \text{ Nechť } A[-1, 0]; B[1, 0]; X[x, y]: (x+1)^2 + y^2 + 2((x-1)^2 + y^2) &= 3 \cdot 2^2 \\ 3y^2 + 3x^2 - 2x + 3 &= 3 \cdot 4 \\ y^2 + x^2 - \frac{2}{3}x &= 3 \\ y^2 + \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 &= 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9} \\ k\left(\left[\frac{1}{3}; 0\right], \frac{28}{9}\right) \end{aligned}$$

§7. Analytické vyjádření obrazu útvaru

V.7.1.: Předpokládejme, že posunutí T je dáno rovnicí $x' = x + m, y' = y + n$ a zobrazuje U na U' . Potom platí:

Má-li útvar U rovnici $V(x, y) = 0$, pak útvar U' má v téže soustavě souřadnic rovnici $V(x - m, y - n) = 0$.

[Dk: Jde o rovnici, v níž dvojčleny $x - m, y - n$ nahrazují x, y na všech místech, kde se vyskytují x, y v původní rovnici útvaru U .]

Pozn: Aplikace předchozí věty:

1. Přímka, která prochází počátkem a má směrnici k , má také velmi jednoduchou rovnici $y = kx$.
Přímka, která prochází bodem $[x_1, y_1]$ a má směrnici k se dá považovat za obraz první v posunutí $x' = x + x_1, y' = y + y_1$, má rovnici $y - y_0 = k(x - x_0)$.
2. Kružnice, která má střed v počátku a poloměr r , má rovnici $x^2 + y^2 = r^2$.
Kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem r se dá považovat za obraz první kružnice v posunutí $x' = x + m, y' = y + n$ a má rovnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.
3. Tečna kružnice $k(O, r)$ v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ má rovnici $xx_0 + yy_0 = r^2$. Tečna kružnice $k(S, r)$ je obrazem tečny první kružnice v posunutí $x' = x + m, y' = y + n$ a má rovnici $(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2$.

V.7.2.: Má-li útvar U rovnici $V(x, y) = 0$, pak jeho obraz U' v souměrnosti, která vyměňuje kladné poloosy x, y má rovnici $V(y, x) = 0$.

[Dk: Jde o rovnici, v níž je každé x nahrazeno za y a y je nahrazeno za x .]

Př: Kružnice $k(S, r)$ zobrazíme v souměrnosti podle osy 1. kvadrantu na kružnici $k'(S', r)$; tečna t kružnice v bodě T se zobrazí na tečnu t' kružnice k' v bodě T' . Určete rovnici kružnice k' a tečny t' , je-li dáno:

$$S[-3, 6], r = 5, T[0; 10]$$

Umíme zapsat rovnici kružnice k : $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$ a rovnice tečny t v jejím bodě T : $(x + 3)3 + (y - 6)4 = 25$, tj $3x + 4y - 40 = 0$

Zobrazením v osové souměrnosti získáme $S'[6; -3], T'[10; 0]$. Rovnice kružnice k' : $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$. rovnice tečny t' v jejím bodě T' : $4x + 3y - 0 = 0$.

Př: 233/2:

Pro rovnici $ax + by = 0$ je posunutí $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

Př: 233/4:

Má-li útvar U rovnici $V(x, y, z) = 0$, pak v posunutí $[a, b, c]$ má rovnici $V(x - a, y - b, z - c) = 0$.

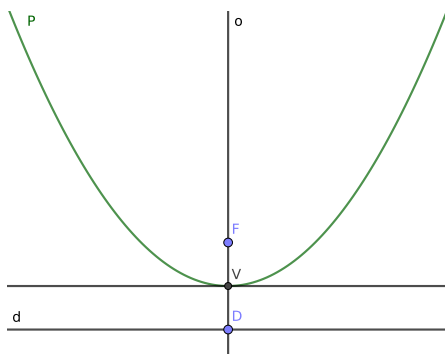
§8. Parabola

Pozn: Paraboly známe jako grafy kvadratických funkcí $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$. Graf každé kvadratické funkce lze získat vhodným posunutím grafu $y = ax^2$. K těmto poznatkům dojdeme opět znovu uplatněním obecného analytického vyjádření parabol.

Geometrická definice paraboly pomocí vzdáleností jejích bodů od dané přímky a daného bodu.

Def: Nechť je dána přímka d a bod $F \notin d$. Množinu všech bodů X roviny dF , pro která platí $\rho(X, d) = |FX|$, nazýváme *parabola s ohniskem F a řídící přímkou d* . Označme ji $P(F, d)$.

Pozn:



F – ohnisko

d – řídící přímka

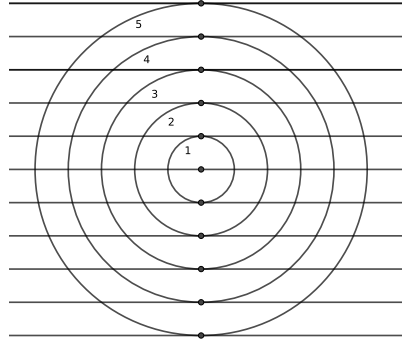
o – osa

V – vrchol

Pozn: Vliv $\rho(F, d)$ na tvar paraboly budeme zkoumat pomocí sítě na obrázku, kde jsou keružnici se středem F připsaná čísla udávající vzdálenost jejich bodů od F .

Návod k práci s obrázkem:

1. Položte průsvitku a vyznačte F a jednu z přímek jako d . Na přímky v polorovni \overrightarrow{dF} přiřaďte vzdálenosti od d .
2. Vyznačte body, které leží na kružnici a přímce se stejným číslem.
3. Zhustěte síť a opakujte
4. spojte body hladkým obloukem.



Pozn: Odvozujeme analytické vyjádření parabol $P(F, d)$ pro $V[0; 0]$ a osu y : Pomocí vzorců pro vzdálenosti vyjádříme charakteristickou vlastnost bodů parabol.

$$\begin{aligned}
 \rho(X, d) &= |FX| \\
 |y \pm 0.5q| &= \sqrt{x^2 + (y - 0.5q)^2} \\
 y^2 \pm qy + 0.250.5q^2 &= x^2 + (y - 0.5q)^2 \\
 y^2 \pm qy + 0.25q^2 &= x^2 + y^2 \mp qy + 0.25q^2 \\
 \pm 2qy &= x^2
 \end{aligned}$$

Snadno ověříme, že každý bod X , který svými souřadnicemi splňuje poslední rovnici, má charakteristickou vlastnost bodu paraboly.

V.8.1.: Každá parabola $P(F, d)$, která má vrchol $V[0; 0]$ a svou osu v ose y , má analytické vyjádření $2py = x^2$, přitom $F[0; 2.5p]$, $d : y = -0.5p$.

[Dokázáno výše]

V.8.2.: Každá parabola, která má rovnici $2py = x^2$, kde $a \neq 0$ je grafem kvadratické funkce $y = sx^2$. Zároveň graf každé kvadratické funkce $y = ax^2$ je parabolou o rovnici $2py = x^2$, přitom $p = \frac{1}{2a}$, $a = \frac{1}{2p}$.

[Dk: plyne z toho, že rovnice $y = ax^2$, $2py = x^2$ jsou ekvivalentní při uvedeném vztahu mezi a, p .]

Př: Určete rovnici všech parabol P , které mají osu rovnoběžnou s osou x a prochází body $A[-4; -2]$; $B[4; 2]$; $C[2; 4]$.

Z podmínky rovnoběžnosti plyne, že se jedná o kvadratickou funkci $x = f(y)$, tedy $x = ay^2 + by + c$.

Dosadíme:

$$-4 = 4a - 2b + c \quad (17)$$

$$4 = 4a + 2b + c \quad (18)$$

$$2 = 16a + 4b + c \quad (19)$$

$$(20)$$

$$8 = 4b \Rightarrow 2 = b$$

$$4a = -c$$

$$2 = -4c + 8 + c \Rightarrow 3c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}y^2 + 2y + 3 = x$$

Př: 239/6:

- a) $V[3, 0], q = 2 \Rightarrow 4(y) = (x - 3)^2 y$
- b) $V[-3, -6], q = -8 \Rightarrow -16(y + 6) = (x + 3)^2 y$
- c) $V[4, 1], q = -6 \Rightarrow -12(y - 1) = (x - 4)^2 y$
- d) $V[-2, \frac{1}{2}], q = -3 \Rightarrow -6(y - \frac{1}{2}) = (x + 2)^2$

Př: 239/8: $y = \pm x^2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow p : y = \mp \frac{1}{4} \wedge F[0, \pm \frac{1}{4}]$

- a) $p : y = -\frac{1}{4} F[3; \frac{1}{4}]$
- b) $p : y = 5 - \frac{1}{4} F[0; 5\frac{1}{4}]$
- c) $p : y = 2 + \frac{1}{4} F[0; 2 - \frac{1}{4}]$
- d) $y - 3 = (x - 2)^2 \quad p : y = -\frac{1}{4} F[0; \frac{1}{4}]$
- e) $y - 13 = -(x + 2)^2 \quad p : y = 13 + \frac{1}{4} F[-2; 13 - \frac{1}{4}]$
- f) $y + 4 = -4(x - 1) \quad p : y = -4 + \frac{1}{4} F[1; -4 - \frac{1}{4}]$

Př: 240/10:

Př: $y = ax^2 + bx + c$

$$-2 = 16a - 4b + c \tag{21}$$

$$2 = 16a + 4b + c \tag{22}$$

$$4 = 4a + 2b + c \tag{23}$$

$$4 = 8b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$-16a = c$$

$$4 = 4a + 1 - 16a \Rightarrow 12a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

§9. Vzájemná poloha parabol a přímek, tečna parabol

Př: Mějme parabolu s rovnicí $2py = x^2$, její bod $T[x_0, y_0]$ a hledejme rovnice všech přímek, které prochází T a mají s parabolou právě jeden společný bod.

Libovolná přímka procházející T má rovnici $x = x_0$ nebo $y - y_0 = k(x - x_0)$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Pro $x = x_0$ má přímka právě jeden společný bod, protože $f(x)$ je funkcí.

Pro $y - y_0 = k(x - x_0)$ řešíme soustavu:

$$2py = x^2 \quad (24)$$

$$2p(y - y_0) = 2pk(x - x_0) \quad (25)$$

$$(26)$$

Po dosazení $2py$ získám kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 2pkx - 2p(y_0 - kx_0) = 0$$

Disriminant rovice lze upravit na mocninu dvojčlenu:

$$D = (2pk)^2 - 4(-2p)(y_0 - kx_0) = 4p^2k^2 - 8pkx_0 + 4x_0^2 = (2pk - 2x_0)^2$$

Rovnice má jediný kořen když $D = 0 \Rightarrow pk = x_0$, tedy:

$$y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$$

Po dosazení roznásobení:

$$py + py_0 = xx_0$$

Existují ted dvě přímky s požadovanými vlastnostmi.

Pozn: Chceme-li definovat tečnu paraboly, musíme použít pojem vnitřní oblast paraboly. Charakteristické vlastnosti jejich bodů snadno vyšetříme:

$$\rho(X, d) = \rho(Z, d) + |ZX| = |FZ| + |ZX| > |FX|$$

Přímka t je tečnou paraboly, neobsahuje-li žádný bod vnitřní oblasi paraboly.

Def: *Vnitřní oblastí paraboly* $P(F, d)$ nazýváme množinu všech bodů X rovny, pro které platí $\rho(X, d) > |FX|$.

Def: *Tečnou paraboly* nazýváme přímku, která obsahuje jeden bod paraboly a neobsahuje žádný vnitřní bod paraoly.

V.9.1.: Má-li parabola rovnici $2py = x^2$, pak její vnitřní oblast je analyticky vyjádřena nerovnicí typu $2py > x^2$.

[Postačí v úvahách o parabole zaměnit rovnost za nerovnost.]

V.9.2.:

1. Má-li parabola rovnici $2py = x^2$ a je-li $T[x_0, y_0]$ jejím bodem, pak tečna paraboly v T má rovnici $p(y + y_0) = xx_0$.
2. Každá rovnice $p(y + y_0) = xx_0$, kde $p \neq 0$, vyjadřuje tečnu paraboly $2py = x^2$ v bodě $T[x_0, y_0]$ paraboly.

[První tvrzení je důsledkem příkladu.

U druhého tvrzení potvrdíme tři vlastnosti přímky:

1. Rovnice $x_0x - py - py_0 = 0$ vyjadřuje přímku, protože $(x_0, -p) \neq \vec{0}$.
2. Obsahuje jediný bod T paraboly:
Soustava rovnic $p(y+y_0) = xx_0; 2py = x^2$ vede po dosažení k rovnici $(x-x_0)^2 = 0$ s jedinným kořenem x_0 , proto přímka obsahuje jediný bod paraboly.
3. Neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti paraboly:
Předpokládejme, že nějaký bod $X[x, y]$ přímky je bodem vnitřní oblasti paraboly, pak platí: $2py_0 = x_0^2, p(y+y_0) = xx_0; 2py > x^2$
 $2xx_0 = 2py + 2py_0 > x^2 + x_0^2, 0 > (x-x_0)^2$.
To je spor, neplatí tedy předpoklad a přímka má požadovanou vlastnost.

]

Př:

245/13:

$$V[2, 1], q = 4 \Rightarrow P : y = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \overrightarrow{AC} = (9, 6) &\Rightarrow AC = \{[-4 + 9t; -3 + 6t] | t \in \langle 0, 1 \rangle\} \\ -3 + 6t &= \frac{1}{8}(-4 + 9t - 2)^2 + 1 \\ -\frac{81}{8}t^2 + \frac{39}{2}t - \frac{17}{2} & \\ t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{34}{27} > 1 & \end{aligned}$$

$$X = [-4 + 6; -3 + 4]$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \overrightarrow{BA} = (-4; -8) \sim (-1; -2) &\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \{[-t; 5 - 2t] | t \in \mathbb{R}_0^+\} \\ 5 - 2t &= \frac{1}{8}(-t - 2)^2 + 1 \\ -\frac{t^2}{8} - \frac{5}{2}t + \frac{7}{2} &= 0 \\ t = -10 \pm 8\sqrt{2} &\Rightarrow t = -10 + 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$Y = [10 - 8\sqrt{2}; 25 - 16\sqrt{5}]$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \overrightarrow{BC} = (5, -2) &\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \{[5t; 5 - 2t] | t \in \mathbb{R}\} \\ 5 - 2t &= \frac{1}{8}(5t - 2)^2 + 1 \quad 0 = \frac{25}{8}t^2 - \frac{t}{2} - \frac{7}{2} = 0 \quad t = \frac{2}{25} \pm \frac{8\sqrt{11}}{25} \end{aligned}$$

$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} - \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} + \frac{16\sqrt{11}}{25} \right]$$

$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} + \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} - \frac{16\sqrt{11}}{25} \right]$$

Př:

245/14:

Analogicky.

Př:

244/4:

Je dána parabola, která má rovnici $0.8(y+2) = (x-3)^2$ a přímka $q : x + 5y - 3 = 0$.
Určete rovnici všech tečen paraboly, které jsou kolmé k q .

Rovnice tečny v bodě $T[x_0, y_0]$:

$$t : 0.4(y+2) + 0.4(y_0+2) = (x-3)(x_0-3)$$

Po úpravě:

$$(x_0 - 3)x - 0.4y + \dots = 0$$

Tedy vektor kolmý k tečně je $\vec{n} = (x_0 - 3; -0.4)$. Vektor kolmý k q je $\vec{m} = (1, 5)$, tedy $0 = \vec{m} \cdot \vec{n} = (x_0 - 3) - 2 \Rightarrow x_0 = 5$. Z rovnice paraboly pak $y_0 = 3$. Tedy rovnice tečny po dosazení je

$$t : 2x - 0.4y - 3 \cdot 5 - 0.8 - 0.4(3 + 2) = 0$$

$$t : 2x - 0.4y - 22 = 0$$

Př:

244/5:

Je dána parabola $P : -4(x + 2) = (y - 5)^2$ a bod $M[0; 4]$. Určete rovnice všech tečen paraboly procházejících M .

Rovnice tečny je:

$$t : -2(x + 2) - 2(x_0 + 5) = (y - 5)(y_0 - 5)$$

Jelikož $M \notin P$, budeme hledat všechny body $T[x_0, y_0] \in P$, ve kterých má parabola tečnu t procházející M .

$$\begin{aligned} T \in P : \quad & -4(x_0 + 2) = (y_0 - 5)^2 \\ & -4(x_0 + 2) = (y - 5)^2 \\ M \in t : \quad & -2(0 + 2) - 2(x_0 + 2) = (4 - 5)(y_0 - 5) \\ & -2(x_0 + 2) = -(y_0 - 5) + 4 \end{aligned}$$

Odečtením dvojnásobku druhé rovnice získám:

$$0 = (y_0 - 5)^2 + 2(y_0 - 5)$$

Rovnice má dva kořeny $y_0 = 1$ a $y_0' = 7$. K nim dopočítáme body dotyku a tečny: $T[-6; 1]; T'[-3; 7]$

$$t : x - 2y + 8 = 0$$

$$t' : x + y - 4 = 0$$

Př:

245/16:

a)

$$y = \frac{x^2 + 2x + 9}{4}$$

$\overrightarrow{AB} = (-5 - 4)$ tedy rovnoběžka v \overleftarrow{AB} má rovnici $y = \frac{4}{5}x + c$.

$$P' : y = \frac{2x + 2}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Derivace (směrnice) paraboly musí být v bodě dotyku stejná jako směrnice tečny, tedy

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Dosadím: $y = \frac{9 + 30 + 225}{4} = \frac{284}{100}$. Z rovnice tečny: $2.84 = \frac{4}{5}0.6 + c \Rightarrow c = 10.8$

$$t : 4x - 5y = -10.8$$

b,c,d) Analogicky

Př: 245/16

a) Zavedy si posunuté souřadnice $y' + 2 = y; x' - 1 = x$. Dále v těchto souřadnicích:

$$P : 2 \cdot 2y = x^2$$

$$M[1; -3]$$

Hledám tečnu procházející $T[x_0, y_0]$:

$$\begin{aligned} T \in P : & \quad 4y_0 = x_0^2 \\ M \in t : & \quad 2(-3) + 2y_0 = x_0 \\ & \quad 2y_0 = x_0 + 6 \end{aligned}$$

Odečteme dvojnásobek:

$$0 = x_0^2 - 2x_0 - 12 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{13} \wedge x'_0 = 1 - \sqrt{13}$$

Dosažením: $T[1 + \sqrt{13}; \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{132}}{2}], T'[1 - \sqrt{13}; \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{132}}{2}]$,

$$t : 2y + 2 \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) = x(1 + \sqrt{13})$$

$$t' : 2y + 2 \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) = x(1 - \sqrt{13})$$

V původních souřadnicích:

$$t : 2y + 3 + \sqrt{13} = (x + 1)(1 + \sqrt{13})$$

$$t' : 2y + 3 - \sqrt{13} = (x + 1)(1 - \sqrt{13})$$

$$t : 2y + 2 - x(1 + \sqrt{13}) = 0$$

$$t' : 2y + 2 - x(1 - \sqrt{13}) = 0$$

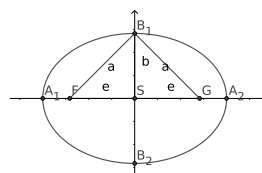
§10. Elipsa

Pozn: Termín *elipsa* už známe, máme představu o eliptickém tvaru např. vodní hladiny v šikmo postavené válcové nádobě. V geometrii se elipsa definuje pomocí součtu vzdáleností.

Def: Necht' jsou dány dva různé body F, G v rovině a číslo $2a > |FG|$. Množinu všech bodů X roviny, pro která platí $|FX| + |GX| = 2a$ nazýváme *elipa s ohnisky F, G a s hlavní osou o velikosti $2a$* . Stručně ji značíme $E(F, G, 2a)$

Def: U elipsy používáme tyto pojmy:

F, G	ohniska
A_1, A_2	hlavní vrcholy
B_1, B_2	vedlejší vrcholy
S	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedlejší poloosy
e	excentricita



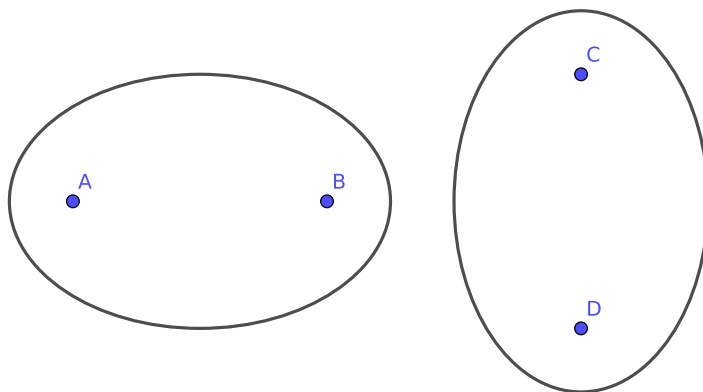
Př: Odvoďte analytické vyjádření elipsy $E(F, G, 2a)$:

Zvolíme souřadnice $F[-e, 0]; G[e, 0]; X[x, y]$. Přitom $|FG| = 2e < 2a; a^2 - e^2 = b^2$.
Analytické vyjádříme $|FX| + |GX| = 2a$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a \\ (x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2 + 2ex)(x^2 + e^2 + y^2 - 2ex)} &= 4a^2 \\ (x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4e^2x^2 &= 4a^2 + (x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 + e^2 + y^2) \\ x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

Pozn: Rovnice $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. vyjadřují elipsy s velikostmi poloos rovnými 2, resp. 3. Elipsy se liší polohou ohnisek na osách x, y .

Ohniska leží na té ose souřadnic, kde je poloosa s větší velikostí.



Pozn: Když je jmenovatel prvního zlomku menší než druhého, tak si x, y prohodí role.

Pozn: Proto někdy raději značíme jmenovatele p, q , aby neinformovali o tom, která je hlavní poloosa.

V.10.1.: Analytické vyjádření elipsy:

Každá elipsa, která má osy rovnoběžné s osami x, y a střed $S[m, n]$ má právě jednu rovnici typu

$$\frac{(x-m)^2}{p^2} + \frac{(y-n)^2}{q^2} = 1$$

kde $p, q > 0$.

V.10.2.: Každá rovnice tohoto typu vyjadřuje právě jednu elipsu se středem $S[m, n]$. Je-li

$p > q$, je $2a = 2p$ a hlavní osa elipsy leží na $y = n$. Je-li $p < q$, je $2a = 2q$ a hlavní osa elipsy leží na $x = m$. Je-li $p = q$, je elipsa kružnicí s poloměrem $r = p = q$.

Př: 249/3: Zakreslete střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí

$$5(x+2)^2 + 3(y-4)^2 - 30 = 0$$

Z rovnice určíme $S[-2; -4]$. Dále upravíme na $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$. Tedy $q^2 = a^2 = 10$ a $p^2 = b^2 = 6$. Hlavní osa s ohnisky leží na přímce rovnoběžné s osou y . Dále určíme excentricitu $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ Tedy:

$$\begin{aligned} A_1 & [-2 \quad ; 4 - \sqrt{10}] \\ A_2 & [-2 \quad ; 4 + \sqrt{10}] \\ B_1 & [-5 - \sqrt{6} \quad ; 4] \\ B_2 & [-5 + \sqrt{6} \quad ; 4] \\ F & [-5 \quad ; 6] \\ G & [-2 \quad ; 2] \end{aligned}$$

Př: 250/4:

Určete společné body elipsy a přímky KL , kde $K[3; -1]$ a $L[1; 6]$. Elipsa má rovnici $2(x+4)^2 + 3(y+1)^2 = 10$.

$\overleftrightarrow{KL} = \{[3 - 2t; -1 + 7t] | t \in \mathbb{R}\}$ Dosadíme:

$$2(7-2t)^2 + 3(7t)^2 = 10$$

$$155t^2 - 56t + 88 = 0$$

$D = 56^2 - 4 \cdot 155 \cdot 88 < 0 \Rightarrow$ Není řešení, tedy není průsečík.

Př: 250/18:

a) Ze symetrie dle osy platí $|FB_1| = |GB_1|$. Ovšem jelikož B_1 leží na elipse, tak $|FB_1| + |GB_1| = 2|FB_1| = 2a \Rightarrow a = |FB_1| = |GB_1|$. *QED*

Pro B_2 analogicky (nebo dle symetrie dle hlavní osy). *QED*

b) Z kolmosti os: $b^2 + e^2 = |B_1F|^2 = a^2$. *QED*

Upravíme na $e^2 = a^2 - b^2$. *QED*

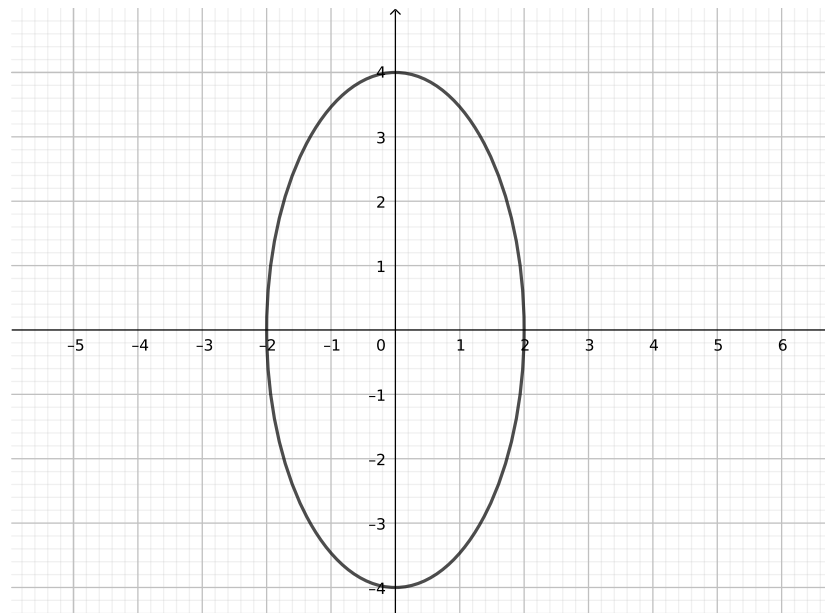
Jelikož SA_1 a SA_2 jsou hlavní poloosy, tak $|SA_1| = a = |SA_2|$. *QED*

Jelikož A_1SA_2 jsou kolmé v tomto pořadí, tak $|A_1A_2| = |A_1S| + |A_2S| = 2a$. *QED*

Př: 251/19:

a) Evidentně $S[0, 0]$. Hlavní poloosa ve směru osy y délky $a = 4$, vedlejší $b = 2$, tedy $e = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} A_1 & [0 \quad ; 4] \\ A_2 & [0 \quad ; -4] \\ B_1 & [2 \quad ; 0] \\ B_2 & [-2 \quad ; 0] \\ F & [0 \quad ; 2\sqrt{3}] \\ G & [0 \quad ; -2\sqrt{3}] \end{aligned}$$

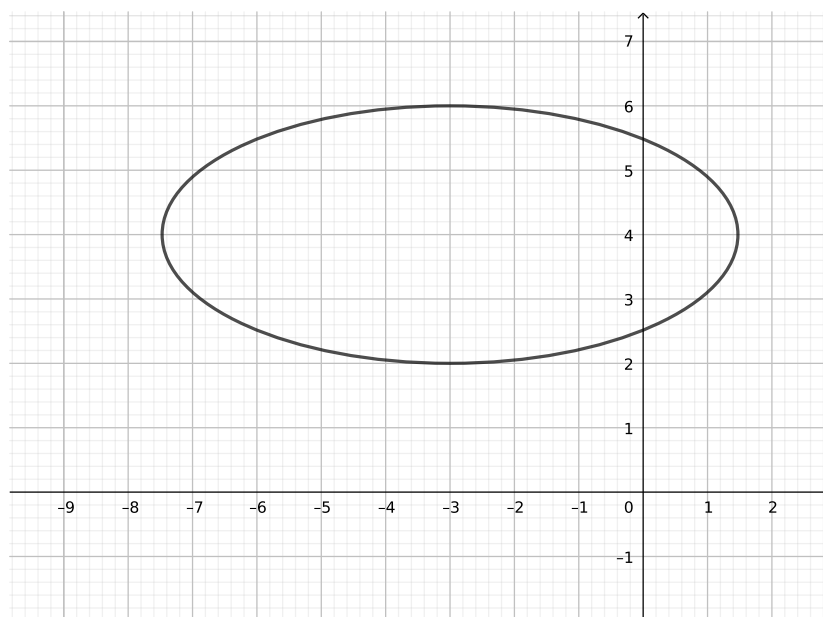


b,c,d,e) Analogicky. Střed je vždy stejný a pouze se mění směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/20:

- a) Evidentně $S[-3, 4]$. Hlavní poloosa ve směru osy x délky $a = \sqrt{20}$, vedlejší $b = 2$, tedy $e = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4$.

$$\begin{aligned} A_1 & [-3 + \sqrt{20}; 4] \\ A_2 & [-3 - \sqrt{20}; 4] \\ B_1 & [-3 \quad ; 6] \\ B_2 & [-3 \quad ; 2] \\ F & [1 \quad ; 4] \\ G & [-7 \quad ; 4] \end{aligned}$$



b,c,d) Analogicky. Pouze se mění střed, směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/21:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = (2; -5) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} = \{[3 + 2t; -5t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Dosadím: } \frac{(3+2t)^2}{4} + \frac{(-5t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 21t^2 + 48t + 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{39}}{21}$$

$$\left[\frac{15-4\sqrt{39}}{21}; \frac{120+10\sqrt{39}}{21} \right]$$

$$\left[\frac{15+4\sqrt{39}}{21}; \frac{120-10\sqrt{39}}{21} \right]$$

$$\overrightarrow{AC} = (6; -3) \Rightarrow \overleftrightarrow{AC} = \{[1 + 2t; 5 - t] | t \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$\text{Dosadím: } \frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 17t^2 + 6t + 13 = 0 \Rightarrow D36 - 4 \cdot 17 \cdot 13 < 0$$

Průsečík není.

$$\overrightarrow{BC} = (4; 2) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \{[3 + 2t; t] | t \in \langle 0; 2 \rangle\} \text{ Dosadím: } \frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$17t^2 + 48t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{59}}{17} < 0$$

Průsečík je pouze s přímkou, nikoliv úsečkou.

b,c,d,e) Analogicky. Vždyť je to jenom dosazení toho samého do jiné rovnice a výpočet kvadratické rovnice. Já nemám zájem celý den dosazovat a počítat kvadratické rovnice.

§11. Hyperbola

Def: Mějme dány dva různé body F, G a takové číslo $2a$, že $0 < 2a < |FG|$. Množinu všech bodů roviny X , pro než platí $||fx| - |GX|| = 2a$ nazýváme *hyperbolou s ohnisky*

FG a s hlavní osou $2a$. Stručně ji označujeme $H(F, G, 2a)$. Větví hyperboly nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX| = 2a$. Stejně jako množinu, pro kterou platí $|GX| - |FX| = 2a$.

Pozn: Zvláštní tvar hyperboly působí nesnáze; hyperboly nemají na ose úsečky FG žádné body, proto nemají vedlejší vrcholy.

Číslo $b > 0$ se definuje jinak: Pomocí vztahu $b^2 = e^2 - a^2$ a stále se nazývá velikostí vedlejší poloosy. Ale jelikož hyperbola nemá vedlejší vrcholy, nemá ani žádnou vedlejší poloosu.

Př: Odvoďte analytické vyjádření hyperboly $H(F, G, 2a)$, jejíž ohniska F, G , leží na ose x . Zvolíme $F[-e; 0]; G[e; 0]; X[x, y]$, přitom $|FG| = 2e > 2a, b^2 = e^2 - a^2$. Vyjádřím charakteristickou vlastnost jednoho bodu:

$$\begin{aligned} ||FX| - |GX|| &= 2a \\ |\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2}| &= 2a \\ \sqrt{(x^2 + e^2 + y^2) - 4ex} &= (x^2 + e^2 + y^2) - 2a^2 \\ a^2x^2 + a^2y^2 - e^2x^2 &= a^4 - a^2e^2 \\ x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2) \\ -b^2x^2 + a^2y^2 &= -a^2 - b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Poslední rovnice je ekvivalentní s první, proto slouží jako analytické vyjádření hyperboly, jejíž osy leží na osách soustavy souřadnic a ohniska na ose x .

Př: Ověřte, zda pro každou dvojici a, b kladných reálných čísel může rovnice odvozená v příkladě 1 vyjadřovat hyperbolu s ohnisky F, G na ose x a s hlavní osou $2a$.

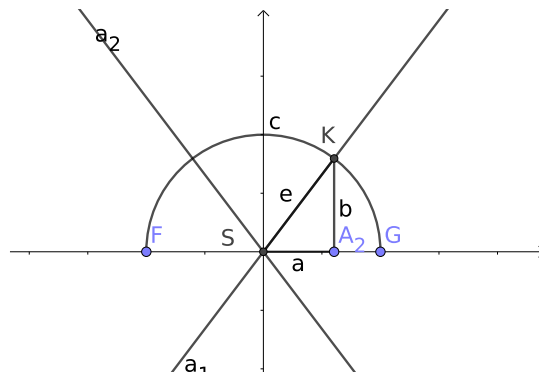
Je-li dána rovnice $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a > 0; b > 0$, můžeme sestavit $A_1[-a; 0]; A_2[a; 0]; K[a; b]$. Přepočítá OK udává $e > a$, kružnice $k(O, e)$ protíná osu x v bodech $F[-e; 0]; G[e; 0]$. Snadno ověříme (viz předchozí příklad), že hyperbola $H(F, G, 2a)$ má analytické vyjádření, které bylo dáno.

Pozn: Na rozdíl od elips nerozhoduje nerovnost mezi a, b o tom, na které z os leží ohniska hyperboly. O tom rozhoduje prohození členů rozdílů.

Def: Směry, jejichž každá přímka má s hyperbolou nejvýše jeden společný bod, se nazývají *asymptotické směry hyperboly*. Přímký těchto směrů, které neobsahují žádný bod hyperboly, nazýváme *asymptoty hyperboly*.

Def: U hyperboly používáme následující termíny:

F, G	ohniska
A_1, A_2	(hlavní) vrcholy
S nebo O	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedlejší poloosy
e	výstřednost
a_1, a_2	asymptoty



Př: Najdět analytické vyjádření rovnoosých hyperbol $H(F, G, 2a)$, jejichž kolmé asymptoty jsou rovnoběžné s x, y .

Pracujme s hyperbolami, které mají přímo osy x, y jako asymptoty. Střed je tedy $[0; 0]$ a F, G mají na osách 1. a 3. kvadrantu. Protože $a = b$, je $e = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$. Ohniska mají pak souřadnice $F[-a; -a]; G[a, a]; X[x, y]$.

$$\begin{aligned} ||FX| - |GX|| &= 2a \\ |\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}| &= 2a \\ y &= cx^{-1} \end{aligned}$$

V.11.1.: Uvažme $H(F, G, 2a)$, které mají střed $S[m, n]$, excentricitu $e = \frac{|FG|}{2}$, velikost vedlejší poloosy $b = e^2 - a^2$.

1. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rovnoběžná s x má právě jednu rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

2. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rovnoběžná s y má právě jednu rovnici

$$\frac{(y-m)^2}{a^2} - \frac{(x-n)^2}{b^2} = 1$$

3. Každá rovnoosá hyperbola, která má asymptoty rovnoběžné s x, y má právě jednu rovnici

$$2(x-m)(y-n) = a^2$$

Každá z rovnic vyjadřuje právě jednu hyperbolu v poloze výše popsané.

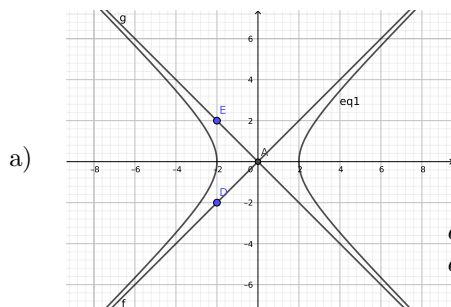
Př: 257/22:

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

$$3. \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$$

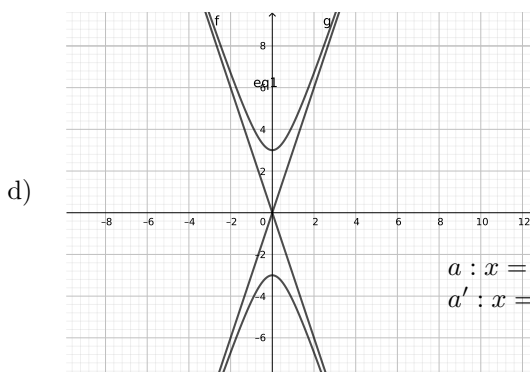
$$4. \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Př: 257/23:



$$\begin{aligned} F & [-2\sqrt{2}; 0] \\ G & [2\sqrt{2}; 0] \\ S & [0; 0] \\ A_1 & [-2; 0] \\ A_2 & [2; 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a & : x = y \\ a' & : x = -y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} F & [0; -\sqrt{10}] \\ G & [0; \sqrt{10}] \\ S & [0; 0] \\ A_1 & [0; -3] \\ A_2 & [0; 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a & : x = 3y \\ a' & : x = -3y \end{aligned}$$

Př: 258/24: $p: y = 2x + 3$
 $\overrightarrow{UV} = \{[3 - t; t] | t \in \mathbb{R}_0^+\}$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - y^2 &= 4: \\ x^2 - (2x + 3)^2 &= 4 \\ 0 &= 3x^2 + 12x + 13 \\ D &= 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 13 < 0 \end{aligned}$$

$$H \cap p = \emptyset$$

$$\begin{aligned} (3 - t)^2 - t^2 &= 4 \\ 5 - 6t &= 0 \\ t &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \left\{ \left[\frac{13}{6}; \frac{5}{6} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y^2 - 9x^2 &= 9 \quad x^2 - 9(2x + 3)^2 = 9 \\ 0 &= 35x^2 + 108x + 90 \end{aligned}$$

$$D = 108^2 - 4 \cdot 35 \cdot 90 < 0$$

$$H \cap p = \emptyset$$

$$(3-t)^2 - 9t^2 = 9$$

$$0 = 8t^2 + 6t$$

$$t = 0 \vee t = -\frac{3}{4} < 0$$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \{[3; 0]\}$$

§12. Středové kuželosečky a jejich tečny

Def: Kružnice, elipsy a hyperboly nazýváme středové křivky 2. stupně neboli *středové kuželosečky*. Jejich rovnice ve kterých vystupují souřadnice středu, nazýváme rovnice ve středovém tvaru.

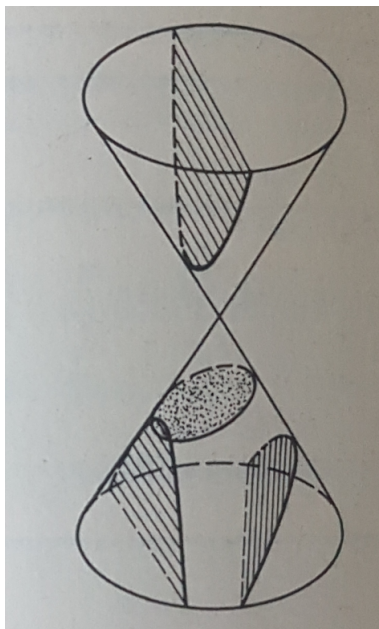
Pozn: Zapišeme rovnice z předchozích definic:

$$\begin{array}{lll} (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 & \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 & \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \\ (x-m)^2 r^2 + (y-n)^2 r^2 = 1 & \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 & -\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

Všechny rovnice jsou tedy tvaru

$$\pm p^2(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^2 = \pm s^2$$

Pozn:



Název kuželosečky vystihuje možnost její vytvoření jako průniku rotační kružnic kuželových ploch a roviny (viz obrázek).

Povšimneme si *vnitřku kuželové plochy* a jejího tečkoveného průniku s rovinou kuželesečky. U kružnice a paraboly zřejmě dostaneme útvary, kter jsem nazvali vnitřními oblastmi. Obdobný pojem zavedeme i pro středové kuželošečky. Vidíme, že zatímco elipsa má jednu vnitřní oblast hyperbola má dvě. Vislovíme však definici jen dle vzdáleností bodů v rovině:

Def: *Vnitřní oblast elipsy* s ohnisky F, G a s hlavní poloosou a nezveme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| + |GX| < 2a$

Def: *Vnitřní oblast jedné větve hyperboly* $H(F, G, 2a)$ se nazývá množina všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX| > 2a$ a druhé větve $|GX| - |FX| > 2a$.

V.12.1.:

1. Má-li elipsa rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak její oblast má v téže soustavě souřadnic analytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$
2. Má-li hyperbola rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak sjednocení vnitřních oblastí jejích větví má analytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$

[Dk: Při odvozování se zachovává znaménko]

Def: *Tečnou středové kuželošečky* se nazývá přímka, která obsahuje jediný bod kuželošečky a neobsahuje žádný bod její vnitřní oblasti.

V.12.2.: Má-li středová kuželošečka rovnici

$$\pm p^1(x - m)^2 \pm q^2(y - n)^2 \pm s^2$$

pak v její tečna t v $T[x_0, y_0]$ má rovnici

$$\pm p^2(x - m)(x_0 - m) \pm q^2(y - n)(y_0 - n) = \pm s^2$$

Př: 262/1:

Je dána hyperbola s rovnicí $16(x + 2)^2 - 5(y - 5)^2 = 80$. Určete rovnice všech tečen hyperboly, která má směrnici $k = 2$.

Tečna v $[x_0; y_0]$:

$$16(x + 2)(x_0 + 2) - 5(y - 5)(y_0 - 5) = 80$$

Směrnice tvarurčíme pokud $y_0 - 5 \neq 0$:

$$y - 5 = \frac{16(x_0 + 2)}{5(y_0 - 5)}(x + 2) - \frac{80}{5(y_0 - 5)}$$

Protože $k = \frac{16(x_0 + 2)}{5(y_0 - 5)} = 2$, platí pro hledané souřadnice x_0, y_0 dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 16(x_0 + 2) &= 10(y_0 - 5) \\ 16(x_0 + 2)^2 - 5(y_0 - 5)^2 &= 80 \end{aligned}$$

Dosadíme $5(y_0 - 5)$ na místo $8(x_0 + 2)$:

$$\begin{aligned} [5(y_0 - 5)]^2 - 20(y_0 - 5)^2 &= 320 \\ (y_0 - 5)^2 &= 64 \end{aligned}$$

Tedy $y_0 - 5 = 5$ nebo $y'_0 - 5 = -8$, tedy $y_0 = 13$ nebo $y_0 = -7$. Dosazíme $x_0 = 3$ resp. $x_0 = -7$

$$t_1 : 2x - y + 7 = 0$$

$$t_2 : 2x - y + 11 = 0$$

Př: Je dána elipsa $E : x^2 + 5y^0 - 5 = 0$ a bod $M[5; 1]$.

Tečna v bodě $T[x_0, y_0]$:

$$xx_0 + 5yy_0 - 5 = 0$$

Budeme hledat všechny T_0 , pro něž tečna prochází M :

$$x_0^2 + 5y_0^2 - 5 = 0 \quad (27)$$

$$5x_0 + 5y_0^2 - 5 = 0 \quad (28)$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned} (1 - y_0)^2 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \\ 1 - 2y_0 + y_0^2 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \\ 3y_0^2 - y_0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y_0 = 1 \vee y_0 = -\frac{2}{3}$$

$$T[0; 1]; T'[\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}]$$

$$\overrightarrow{TM} = (5; 0) \sim (1; 0)$$

$$\overrightarrow{TM} = (\frac{10}{3}; \frac{5}{3}) \sim (2; 1)$$

$$\cos \phi = \frac{2}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Př: 265/30: Kolmice jsou tvaru $3x + 2y + c = 0$

b)

$$4xx_0 - 9yy_0 = 36$$

$$\text{Musí tedy platit } (4x_0; -9y_0) \sim (3; 2) \Rightarrow 8x_0 = -27y_0$$

$$\begin{aligned} 4(-\frac{27}{8}y_0)^2 - 9y_0 &= 36 \\ 65y_0^2 &= 64 \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } y_0 = \pm\sqrt{\frac{64}{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65} \text{ a } x_0 = \frac{-27}{8} \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{64}{65}}\right) = \mp\sqrt{\frac{729}{65}} = \mp\frac{27\sqrt{65}}{65}$$

$$t_1 : 4x \frac{27\sqrt{65}}{65} + 9y \frac{8\sqrt{65}}{65} = 36$$

$$t_2 : 4x \frac{27\sqrt{65}}{65} + 9y \frac{8\sqrt{65}}{65} = -36$$

1. Zavedeme posunuté souřadnice $x' = x - 3$ a $y' = y - 4$ Tedy $x^2 + 2y^2 = 4$. Kolmost se posunem nezmění.

Dále tedy analogicky určím tečny a finálně je posunu do křivkových souřadnic.

Př: 265/32:

- a) Tečna bodem $T : -xx_0 + yy_0 = 9$.

Musí procházet $M: 6x_0 + 3y_0 = 9 \Rightarrow y_0 = 3 - 2x_0$

A T musí náležet kuželosečce: $-x_0^2 + y_0^2 = 9$

Dosadím: $-x_0^2 + (3 - 2x_0)^2 = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = 4$.

$$t_1 : 3y = 9$$

$$t_2 : -4x - 5y = 9$$

- c) Upravím na $2(x - 2)^2 - 3(y - 1)^2 - 30 = 0$. Zavedením posunutých souřadnic $x' = x - 2; y' = y - 1$ získám $2x'^2 - 3y'^2 = 30$ a $M[3; 9]$.

Dále analogicky.

A) Obecná rovnice kuželosečky a zakreslení množiny bodů obecné kvadratické rovnice se 2 neznámými bez členu xy

Pozn:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

kde $(A, B) \neq \vec{0}$

Obě proměnné upravíme na čtverec a upravíme na středovou rovnici kuželosečky (parabolu na vrcholovou rovnici).

Př: Zakreslete množinu bodů danou rovnicí $3x^2 - 2y^2 - 12x - 4y - 2 = 0$:

Upravíme:

$$\begin{aligned} 3(x^2 - 4x) - 2(y^2 + 2y) - 2 &= 0 \\ 3(x - 2)^2 - 2(y + 1)^2 &= 2 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 12 \\ \frac{(x - 2)^2}{2} - \frac{(y + 1)^2}{6} &= 1 \end{aligned}$$

Zakreslíme hperbolu se středem $S[2; -1]$, s hlavní osou na rovnoběžce s osou x , s poloosami $a = 2; b = \sqrt{6}$ a excentricitou $e = \sqrt{10}$ a s asymptotami:

$$y + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(x - 2)$$

$$y + 1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}(x - 2)$$

Pozn: Doplnění výrazů $Ax^2 + Dx; Cy^2 + Ey$ na druhé mocniny dvojčlenů poskytuje středové tvary rovnic kuželoseček a tím umožňuje jejich zakreslení.