§1. Středové kuželosečky a jejich tečny

Def: Kružnice, elipsy a hyperboly nazýváme středové křivky 2. stupně neboli *středové kuželosečky*. Jejich rovnice ve kterých vystupují souřadnice středu, nazýváme rovnice ve středovém tvaru.

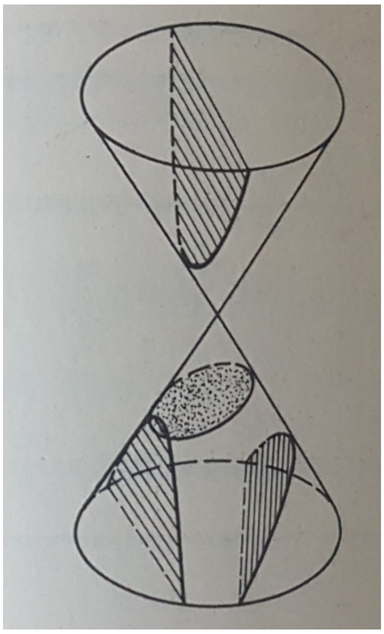
Pozn: Zapíšeme rovnice z předchozích definic:

$$
\begin{array}{ccc}
(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 & \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 & \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \\
(x-m)^2 r^2 + (y-n)^2 r^2 = 1 & \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 & -\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1
\end{array}
$$

Všechny rovnice jsou tedy tvaru

$$\pm p^2 (x-m)^2 \pm q^2 (y-n)^1 = \pm s^2$$

Pozn:



Název kuželosečky vystihuje možnost její vytvoření jako průniku rotační kružních kuželových ploch a roviny (viz obrázek).

Povšimneme si *vnitřku kuželové plochy* a jejího tečkoveného průniku s rovinou kuželesečky. U kružnice a paraboly zřejmě dostaneme útvary, kter jsem nazvali vnitřními oblastmi. Obdobný pojem zavedeme i pro středové kuželosečky. Vidíme, že zatímco elipsa má jednu vnitřní oblast hyperbola má dvě. Vislovíme však definici jen dle vzdáleností bodů v rovině:

Def: *Vnitřní oblstí elipsy* s ohnisky F, G a s hlavní poloosou a nezveme množinu všech bosů X roviny, pro které platí $|FX| + |GX| < 2a$

Def: *Vnitřní oblastí jedné větve hyperboly* $H(F, G, 2a)$ se nazývá množina všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX \gg 2a$ a druhé větve $|GX| - |FX| > 2a$.

V.1.1.:

1. Má-li elipsa rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak její oblast má v téže soustavě souřadnic analytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$
2. Má-li hyperbola rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak sjednocení vnitřních oblastí jejích větví má alalytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$

[Dk: Při odvozování se zachovává znaménko]

Def: *Tečnou středové kuželosečky* se nazývá přímka, která obsahuje jediný bod kuželosečky a neobsahuje žádný bod její vnitřní oblasti.

V.1.2.: Má-li středová kuželosečka rovnici

$$\pm p^1(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^2 \pm s^2$$

pak v její tečna t v $T[x_0, y_0]$ má rovnici

$$\pm p^2(x-m)(x_0-m) \pm q^2(y-n)(y_0-n) = \pm s^2$$

Př: 262/1:
Je dána hyperbola s rovnicí $16(x+2)^2 - 5(y-5)^2 = 80$. Určete rovnice všech tečen hyperboly, která má směrnici $k = 2$.

Tečna v $[x_0; y_0]$:

$$16(x+2)(x_0+2) - 5(y-5)(y_0-5) = 80$$

Směrnicovy tvarurčíme pokud $y_0 - 5 \neq 0$:

$$y - 5 = \frac{16(x_0+2)}{5(y_0-5)}(x+2) - \frac{80}{5(y_0-5)}$$

Protože $k = \frac{16(x_0+2)}{5(y_0-5)} = 2$, platí pro hledané souřadnice x_0, y_0 dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 16(x_0+2) &= 10(y_0-5) \\ 16(x_0+2)^2 - 5(y_0-5)^2 = 80 \end{aligned}$$

Dosadíme $5(y_0 - 5)$ na místo $8(x_0 + 2)$:

$$\begin{aligned} [5(y_0-5)]^2 - 20(y_0-5)^2 &= 320 \\ (y_0-5)^2 = 64 \end{aligned}$$

Tedy $y_0 - 5 = 5$ nebo $y_0' - 5 = -8$, tedy $y_0 = 13$ nebo $y_0 = -7$. Dosazeím $x_0 = 3$ resp. $x_0 = -7$

$$t_1 : 2x - y + 7 = 0$$

$$t_2 : 2x - y + 11 = 0$$

Př: Je dána elipsa $E : x^2 + 5y^0 - 5 = 0$ a bod $M[5; 1]$.

Tečna v bodě $T[x_0, y_0]$:

$$xx_0 + 5yy_0 - 5 = 0$$

Budeme hledat všechny T_0, pro něž tečne prochází M:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \quad (1) \\ 5x_0 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Dosadím:

$$\begin{aligned} (1 - y_0)^2 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \\ 1 - 2y_0 + y_0^2 + 5y_0^2 - 5 &= 0 \\ 3y_0^2 - y_0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$y_0 = 1 \vee y_0 = -\frac{2}{3}$
$T[0;1]; T'[\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}]$
$\overrightarrow{TM} = (5;0) \sim (1;0)$
$\overrightarrow{TM} = \left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right) \sim (2;1)$

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Př: 265/30: Kolmice jsou tvaru $3x + 2y + c = 0$

b)

$$4xx_0 - 9yy_0 = 36$$

Musí tedy platit $(4x_0; -9y_0) \sim (3;2) \Rightarrow 8x_0 = -27y_0$

$$\begin{aligned} 4(-\frac{27}{8}y_0)^2 - 9y_0 &= 36 \\ 65y_0^2 = 64 \end{aligned}$$

Tedy $y_0 = \pm\sqrt{\frac{64}{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ a $x_0 = \frac{-27}{8} \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{64}{65}}\right) = \mp\sqrt{\frac{729}{65}} = \mp\frac{27\sqrt{65}}{65}$

$$t_1 : 4x\frac{27\sqrt{65}}{65} + 9y\frac{8\sqrt{65}}{65} = 36$$
$$t_2 : 4x\frac{27\sqrt{65}}{65} + 9y\frac{8\sqrt{65}}{65} = -36$$

1. Zavedeme posunuté souřadnice $x' = x - 3$ a $y' = y - 4$ Tedy $x^2 + 2y^2 = 4$. Kolmost se posunem nezmění.

   Dále tedy analogicky určím tečny a finálně je posunu do kůvodních souřadic.

Př: 265/32:

a) Tečna bodem $T : -xx_0 + yy_0 = 9$.

   Musí procházet M: $6x_0 + 3y_0 = 9 \Rightarrow y_0 = 3 - 2x_0$
   A T musí náležet kuželosečce: $-x_0^2 + y_0^2 = 9$

Dosadím: $-x_0^2 + (3-2x_0)^2 = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = 4$.

$$t_1 : 3y = 9$$

$$t_2 : -4x - 5y = 9$$

c) Upravím na $2(x-2)^2 - 3(y-1)^2 - 30 = 0$. Zavedením posunutých souřadnic $x' = x-2; y' = y-1$ získám $2x^2 - 3y^2 = 30$ a $M[3; 9]$.

Dále analogicky.

A) Obecná rovnice kuželosečky a zakreslení množiny bodů obecné kvadratické rovnice se 2 neznámými bez členu xy

Pozn:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

kde $(A, B) \neq \overrightarrow{0}$

Obě proměnné upravíme na čtverec a upravíme na středovou rovnici kuželosečky (parabolu na vrcholovou rovnici).

Př: Zakreslete množinu bodů danou rovnicí $3x^2 - 2y^2 - 12x - 4y - 2 = 0$:

Upravíme:

$$\begin{aligned} 3(x^2-4x) - 2(y^2+2y) - 2 &= 0 \\ 3(x-2)^2 - 2(y+1)^2 &= 2 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 12 \\ \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{6} &= 1 \end{aligned}$$

Zakreslíme hperbolu se středem $S[2; -1]$, s hlavní osou na rovnoběžce s osou x, s poloosami $a = 2; b = \sqrt{6}$ a exentricitou $e = \sqrt{10}$ a s asymptotami:

$$y + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$$

$$y + 1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$$

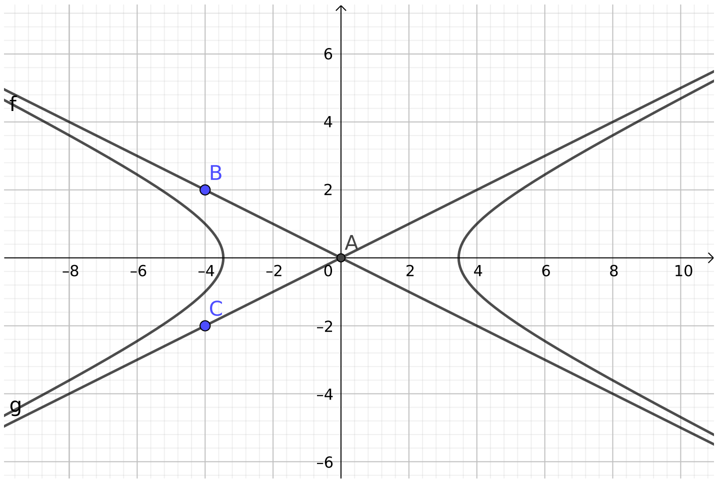
Pozn: Doplnění výrazů $Ax^2 + Dx; Cy^2 + Ey$ na druhé mocniny dvojčlenů poskytuje středové tvary rovnic kuželeoseček a tím umožnuje jejich zakreslení.

Př:

a)

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

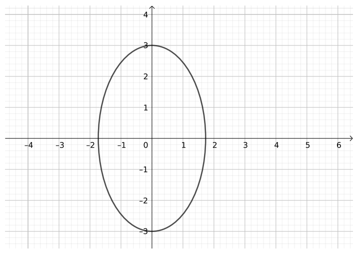
b)



$$S[\;0\;;0]$$
$$A_1[-\sqrt{12};0]$$
$$A_2[+\sqrt{12};0]$$
$$F[-\sqrt{15};0]$$
$$G[+\sqrt{15};0]$$
$$a : y = \frac{x}{2}$$
$$a' : y = -\frac{x}{2}$$

b)

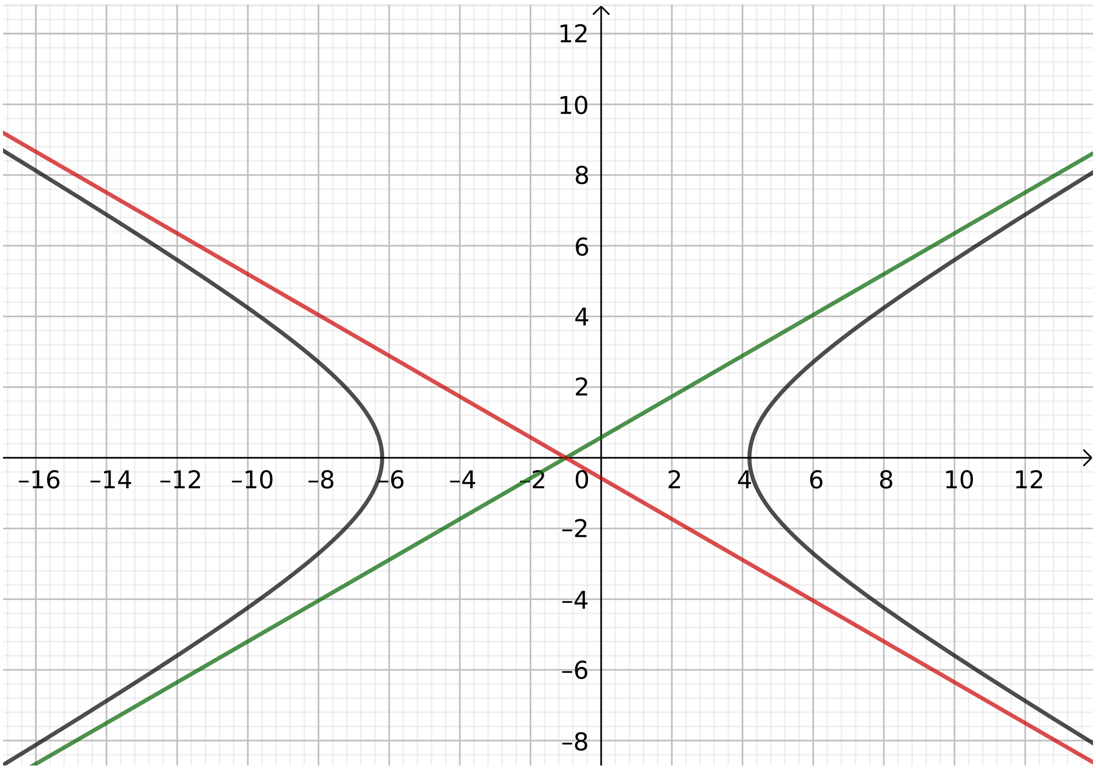
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$$



$$S[\;0\;;\;0\;]$$
$$A_1[\;0\;;\;-3\;]$$
$$A_2[\;0\;;\;+3\;]$$
$$B_1[-\sqrt{3};\;0\;]$$
$$B_2[+\sqrt{3};\;0\;]$$
$$F[\;0\;;-\sqrt{6}]$$
$$G[\;0\;;+\sqrt{6}]$$

c)

$$\frac{(x^2+1)^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$$



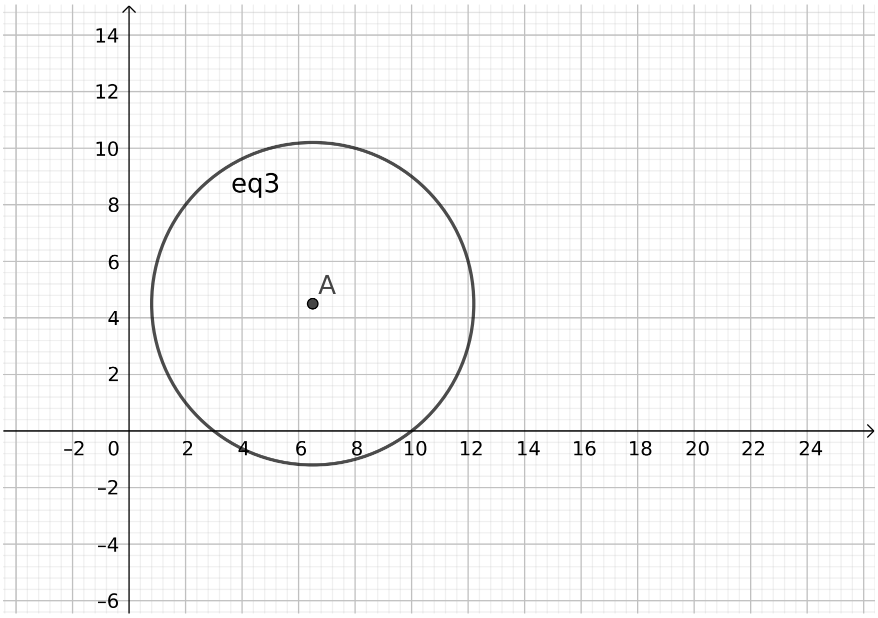
$$S[\quad -1 \quad ;0]$$
$$A_1[-1-\sqrt{27};0]$$
$$A_2[-1+\sqrt{27};0]$$
$$F[\ -1-6\ ;0]$$
$$G[\ -1+6\ ;0]$$

$$a: y = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

$$a': y = -\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

d)

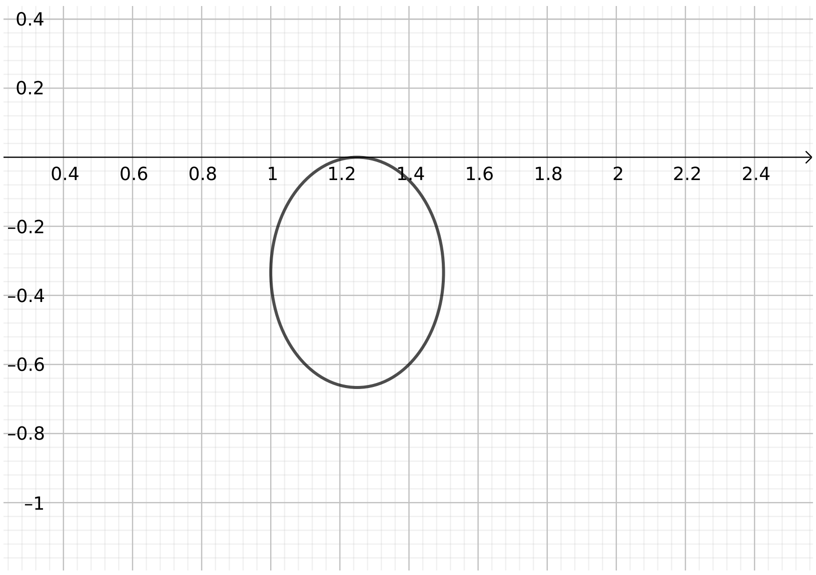
$$\left(x^2 - \frac{13}{2}\right)^2 - \left(y^2 - \frac{4}{5}\right) = \frac{65}{2}$$



$$S[\tfrac{13}{2};\tfrac{9}{2}]$$

e)

$$16\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+9\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=-25+25+1=1$$



$$
\begin{array}{rl}
S[\ \frac{5}{4}\ ; & \frac{1}{3}\ ] \\
A_1[\ \frac{5}{4}\ ; & 0\ ] \\
A_2[\ \frac{5}{4}\ ; & -\frac{2}{3}\ ] \\
B_1[\ 1\ ; & -\frac{1}{3}\ ] \\
B_2[1.5; & -\frac{1}{3}\ ] \\
F[\ \frac{5}{4}\ ; & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{1}2] \\
G[\ \frac{5}{4}\ ; & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{1}2]
\end{array}
$$

Pozn: Kritéria vzniku jednotlivých útvarů:

Předpokládejme, že vznikne kuželosečka.

Kružnice vznikne právě tehdy když $A = B$

Elipsa vznikne právě tehdy když $\mathrm{sqn}(A) = \mathrm{sqn}(B) = \pm 1$

Hyperbola vznikne právě tehdy když $\mathrm{sqn}(A) = -\mathrm{sqn}(B) = \pm 1$

Parabola vznikne právě tehdy když $AB = 0 \wedge A + B \neq 0$