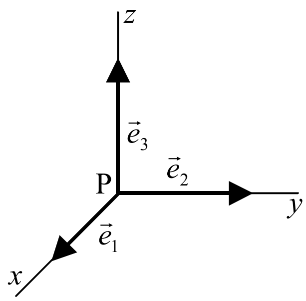
XI. ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

§1. Parametrické rovnice přímky

Pozn.: Předpokládejme, že v množině E_3, resp. E_2 (množina všech bodů v prostoru, resp. v rovině) je dána pevná ASS (afinní soustava souřadnic), která je dána 1 bodem (počátkem) a trojicí, resp. dvojicí lineárně nezávislých vektorů. Tzn., jestliže zvolíme umístění těchto vektorů tak, aby počátek ASS byl jejich počátečním bodem, pak přímky, které tyto vektory určují, jsou souřadné osy.



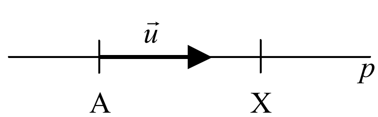
Def.: Nechť p je přímka, $\vec{u} \neq \vec{o}$ volný vektor takový, že existuje jeho umístění $\overrightarrow{AB}$ s vlastnostmi $A \in p, B \in p$. Pak vektor $\vec{u}$ nazýváme <u>směrovým vektorem přímky</u> p.

Pozn.: Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ se z tradičních důvodů užívá nepřesný zápis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

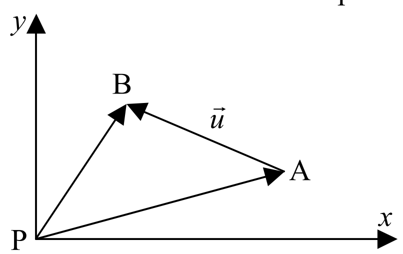
Pozn.: a) Směrový vektor přímky p není jediný, existuje jich nekonečně mnoho, všechny jsou navzájem rovnoběžné a nenulové.
b) Bude-li přímka zadána směrovým vektorem $\vec{u}$ a bodem A, zapíšeme to symbolem $p(A,\vec{u})$.

V.1.1.: Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka. Pak platí:

$$\boxed{\text{Bod } X \in E_3(E_2) \text{ leží na } p \Leftrightarrow \exists t \in R : \overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.}$$



Pozn.: Nechť $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3] \in E_3$; $\vec{u}(u_1,u_2,u_3) = \overrightarrow{AB}$. V X. kapitole ve V.7.2 jsme dokázali, že $u_i = b_i - a_i$, $i \in \{1,2,3\}$. Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ se z tradičních důvodů užívá zápis $\overrightarrow{AB} = B - A$, neboť $P[0;0;0]$.



V.1.2.: Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $A[a_1,a_2,a_3], \vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.
Pak platí: $\boxed{X[x,y,z] \in p \Leftrightarrow \exists t \in R : X = A + t\vec{u}}$
v souřadnicích:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \quad (*) \\ z &= a_3 + tu_3 \end{aligned}$$

[Dk.: Podle V.1.1 $X \in p \Leftrightarrow \exists t \in R : \overrightarrow{AX} = t\vec{u}$, tzn. $x_i - a_i = tu_i, i \in \{1,2,3\}$
$x_i = a_i + tu_i$]

Def.: Rovnici $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in R, \vec{u} \neq \vec{o}$, nazýváme <u>parametrickou rovnicí přímky</u> v E_3, resp. E_2, číslo t – parametr.
Soustavu (*) nazýváme <u>parametrickými rovnicemi přímky (v souřadnicích)</u> v E_3 (v E_2 by byly rovnice jen 2).

Pozn.: Přímku $p(A,\vec{u})$ lze v E_3 zapsat: $\boxed{p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3]; t \in R\}}$
v E_2: $\boxed{p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2]; t \in R\}}$

Př.: a) Napište rovnici přímky p; $p(A,\vec{u})$:
$A[1;-1;2], \vec{u}(0;1;2)$
$\Rightarrow x = a_1 + tu_1 = 1$
$y = a_2 + tu_2 = -1 + t$
$z = a_3 + tu_3 = 2 + 2t$
$\Rightarrow p = \{[1;-1+t;2+2t], t \in R\}$

b) Napište rovnici přímky p; $p = \overleftrightarrow{AB}$:
$A[0;-1;2]$
$B[2;3;-1]$
$\vec{u} = B - A = (2;4;-3)$
$\Rightarrow x = 2t$
$y = -1 + 4t$
$z = 2 - 3t$
$\Rightarrow p = \{[2t;-1+4t;2-3t], t \in R\}$

c) Napište rovnici úsečky AB z př. b):
-parametrická rovnice – stejná
-určení t: bod A: $x = 2t = a_1 = 0 \Rightarrow t = 0$
bod B: $x = 2t = b_1 = 2 \Rightarrow t = 1$
$\Rightarrow AB = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <0;1>\}$

d) Napište rovnici polopřímky $\mapsto AB$ z př. b):
$\Rightarrow$ dolní mez intervalu pro t stejná, horní mez jde k nekonečnu
$\Rightarrow \mapsto AB = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <0;\infty>\}$

e) Napište rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\mapsto AB$:
$\{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <-\infty;0>\}$

f) Napište rovnici polopřímky $\mapsto BA$:
$\mapsto BA = \{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <-\infty;1>\}$

g) Napište rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\mapsto BA$:
$\{[2t; -1+4t; 2-3t], t \in <1;\infty>\}$

Příklady

1) Jsou dány body $A[1;-3;0]$, $B[2;1;-2]$. Napište rovnici
a) přímky $\overleftrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (1;4;-2) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} = \{[1+t; -3+4t; -2t], t \in R\}$
b) polopřímky AB: $\mapsto AB = \{[1+t; -3+4t; -2t], t \in R_0^+\}$
c) polopřímky BA: $\mapsto BA = \{[1+t; -3+4t; -2t], t \in \langle -\infty;1 \rangle\}$
d) úsečky AB: $AB = \{[1+t; -3+4t; -2t], t \in \langle 0;1 \rangle\}$

§2. Vzájemná poloha dvou přímek

A) v E_2

Pozn.: **Určení vzájemné polohy přímek:**
Dáno: $p(A,\vec{u}), q(B,\vec{v}) \Rightarrow$ $p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2], t \in R\}$,
$q = \{[b_1 + rv_1, b_2 + rv_2], r \in R\}$

I. způsob: určíme průnik $p \cap q$:

$$\begin{aligned} a_1 + tu_1 &= b_1 + rv_1 \\ a_2 + tu_2 &= b_2 + rv_2 \end{aligned}$$ -soustava 2 rovnic s neznámými t, r

Soustava má: 1) *0 řešení* $\Rightarrow$ p, q - různé rovnoběžky
2) *1 řešení* $\Rightarrow$ p, q - různoběžky s průsečíkem P:
$P[a_1 + t'u_1, a_2 + t'u_2]$ nebo $P[b_1 + r'v_1, b_2 + r'v_2]$

3) *nekonečně mnoho řešení* $\Rightarrow$ p,q jsou totožné přímky

II. způsob: určíme, zda $\vec{u},\vec{v}$ jsou rovnoběžné (lineárně závislé):

1) $\forall k \in R : \vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \nparallel q \Rightarrow B \in p \Rightarrow p,q$ - různoběžky
2) $\exists k \in R : \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \parallel q \Rightarrow$ a) $B \in p \Rightarrow p,q$ - totožné rovnoběžky
b) $B \notin p \Rightarrow p,q$ - různé rovnoběžky.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

$A[3;2]$ $C[-4;5]$

$B[4;-1]$ $D[-1;-2]$

$\Rightarrow p([3;2],(1;-3)); \vec{u}(1;-3)$

$q([-4;5],(3;-7)); \vec{v}(3;-7)$

I. způsob:

$$3+t=-4+3u \quad /\cdot 3$$
$$\underline{2-3t=5-7u}$$
$$9+3t=-12+9u \quad (1)$$
$$\underline{2-3t=5-7u \quad (2)}$$
$$(1)+(2): 11=-7+2u$$
$$\Rightarrow u=9$$
$$t=\frac{5-63-2}{-3}=20 \Rightarrow \underline{p \nparallel q}$$

II. způsob:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lineárně nezávislé} \Rightarrow \underline{p \nparallel q}$$

B) v E_3

Pozn.: **Určení vzájemné polohy přímek:**

$$p(A,\vec{u}), q(B,\vec{v}) \Rightarrow \quad p=\{[a_1+tu_1, a_2+tu_2, a_3+tu_3]\}$$
$$q=\{[b_1+rv_1, b_2+rv_2, b_3+rv_3]\}$$

I. způsob: Porovnáním odpovídajících souřadnic získáme 3 rovnice o 2 neznámých t, r.

-soustava má 0 řešení $\Rightarrow$ p, q – různé rovnoběžky nebo mimoběžky (rozlišení provedeme na základě lineární závislosti nebo nezávislosti obou vektorů)

-ostatní – obdobně jako v E_2

II. způsob:

1) $\forall k \in R : \vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \nparallel q$: a) $p \cap q \neq \emptyset \Rightarrow p, q$ – různoběžky
b) $p \cap q = \emptyset \Rightarrow p, q$ – mimoběžky

2) $\exists k \in R : \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \parallel q$: a) $B \in p \Rightarrow p = q$ – totožné rovnoběžky
b) $B \notin p \Rightarrow p, q$ – různé rovnoběžky

V případě 1) lze o vzájemné poloze přímek p, q rozhodnout též vyšetřením toho, zda trojice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ je, resp. není lineárně závislá.

V.2.1.: <u>Věta o vzájemné poloze dvou přímek</u>
Nechť $p(A,\vec{u}), q(B,\vec{v})$ jsou dvě přímky. Pak platí:

1) $p \parallel q \wedge p = q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 1$
2) $p \parallel q \wedge p \neq q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1$
3) p, q – různoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2$
4) p, q – mimoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = 3$

Př.!: Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q

$p = \{[t; -1+2t; -2+2t], t \in R\}$
$q = \{[1+r; 1; r], r \in R\}$

I. způsob:

$t = 1 + r$
$2t - 1 = 1$
$2t - 2 = r$
$\Rightarrow$ 1 řešení: $t = 1; r = 0 \Rightarrow$ <u>různoběžky</u>

II. způsob:

$\vec{u}(1;2;2)$
$\vec{v}(1;0;1)$
$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ - lineárně nezávislé $\Rightarrow$ <u>různoběžky</u>

III. způsob:

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim = 2 \Rightarrow \underline{\text{různoběžky}}$$

Příklady

1) Jsou dány přímky $p(P,\vec{u}), q(Q,\vec{v})$. Určete jejich vzájemnou polohu.

$P\left[\frac{3}{2}; 1\right], \vec{u}(-1; 2); Q[-1; 6], \vec{v}\left[\frac{1}{2}; -1\right]$

$\Rightarrow \quad p = \left\{\left[\frac{3}{2} - t; 1 + 2t\right], t \in R\right\}$

$$q = \left\{\left[-1+\frac{1}{2}r; 6-r\right], r \in R\right\}$$

$$\frac{3}{2} - t = -1 + \frac{1}{2}r$$

$$1+2t = 6-r \Rightarrow r = 6-2t-1 = 5-2t$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - t = -1 + \frac{5-2t}{2}$$

$$3-2t = -2+5-2t$$

$3 = 3 \Rightarrow$ přímky jsou totožné

2) Určete vzájemnou polohu přímky $p(P,\vec{u})$ a přímky a) $q(Q,\vec{v}_1)$, b) $q(Q,\vec{v}_2)$

$P[1;1;3]$, $\vec{u}(2;3;-1)$; $Q[2;1;-2]$, $v_1(1;1;2)$, $v_2\left(-\frac{2}{3};-1;\frac{1}{3}\right)$

a) $p = \{[1+2t; 1+3t; 3-t], t \in R\}$, $q = \{[2+x; 1+x; -2-2x], x \in R\}$

$1+2t = 2+x \Rightarrow 1+2t = 2+3t \Rightarrow \underline{t=-1}$

$1+3t = 1+x \Rightarrow x = 3t \Uparrow$

$3-t = -2-2x \Rightarrow \underline{x=}3t = \underline{-3}$

$\Rightarrow$ <u>různoběžky</u>, průsečík $\underline{P=[-1;-2;4]}$

b) $q_2 = \left\{\left[2-\frac{2}{3}p; 1-p; -2+\frac{1}{3}p\right], p \in R\right\}$

$$1+2t = 2-\frac{2}{3}p$$

$$1+3t = 1-p \Rightarrow p = -3t$$

$$\Rightarrow 1+2t = 2-\frac{3(-3t)}{3}$$

$$1+2t = 2+2t$$

$1 = 2 \Rightarrow$ <u>různé rovnoběžky</u>

<u>§3. Další typy rovnice přímky v E_2</u>

Pozn.: Předpokládejme, že v E_2 je pevně dána kartézská soustava souřadnic, která je dána jedním bodem (počátkem) a dvěma kolmými jednotkovými vektory.

Pozn.!: **<u>Obecná rovnice přímky v E_2</u>**

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka v $E_2 \Rightarrow p:$

$$x = a_1 + tu_1 \quad /\cdot u_2$$
$$y = a_2 + tu_2 \quad /\cdot(-u_1)$$

$$u_2x - u_1y = a_1u_2 - a_2u_1$$

$$\underbrace{u_2}_{a}x - \underbrace{u_1}_{-b}y + \underbrace{a_2u_1 - a_1u_2}_{c} = 0$$

$\boxed{\Rightarrow ax+by+c=0}$, $[a,b] \neq [0;0]$

Def.: Rovnici $ax + by + c = 0$, kde $[a,b] \neq [0;0]$ nazýváme obecnou rovnicí přímky v E_2.

Pozn.: Obecná rovnice přímky v E_2 není určena jednoznačně, každý její nenulový násobek je rovnicí téže přímky.

Pozn.: Koeficienty a, b lze považovat za souřadnice vektoru kolmého ke směrovému vektoru přímky p.
[Dk.: Nechť přímka p má směrový vektor $\vec{u}$ a nechť vektor $\vec{n} = (a,b)$. Pak platí:
$\vec{n} \cdot \vec{u} = au_1 + bu_2 \Rightarrow (podle\ pozn.)\ a \cdot (-b) + b \cdot a = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$]

Def.: Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky p se nazývá normálový vektor přímky p a značí se $\vec{n}$.

Př.: Napište obecnou rovnici přímky p
$p = \{[2-3t; 4-5t], t \in R\}$

I. Vyloučením parametru ze soustavy rovnic
$x = 2 - 3t \quad / \cdot 5$
$y = 4 - 5t \quad / \cdot (-3)$
$5x - 3y = 10 - 12$
$\underline{5x - 3y + 2 = 0}$

II. Pomocí normálového vektoru přímky
$A = [2;4]$
směrový vektor $\vec{u} = (3;5)$
$\Rightarrow$ normálový vektor $\vec{n} = (5;-3)$
obecná rovnice: $5x - 3y + c = 0$
$A \in p \Rightarrow 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \underline{p: 5x - 3y + 2 = 0}$

Př.: Napište parametrickou rovnici přímky $p: x - 2y + 1 = 0$

I. Substitucí (1 neznámá = parametr)
$y = t; t \in R$
$x = 2t - 1$
$\Rightarrow p = \{[-1 + 2t; t], t \in R\}$

II. Pomocí směrového vektoru
$\vec{n} = (1;-2)$
$\vec{u} = (2;1)$
$A: y = 0 \Rightarrow x - 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A[-1;0]$
$\Rightarrow p = \{[-1 + 2t; t], t \in R\}$

Pozn.: **Směrnicový tvar rovnice přímky v E_2**
Nechť $p: ax + by + c = 0, b \neq 0.$

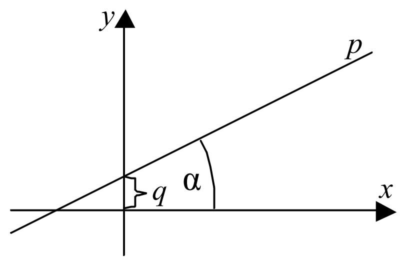
$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Označme $-\frac{a}{b} = k; -\frac{c}{b} = q$

$$\Rightarrow \underline{y = kx + q}$$

Def.: Rovnice $y = kx + q$ se nazývá <u>směrnicovým tvarem rovnice přímky</u> v E_2, k je <u>směrnice přímky</u>.

Pozn.: a) Geometrický význam čísel k, q:



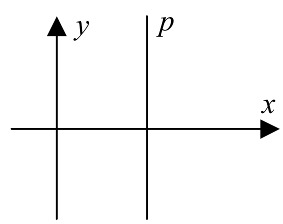
$p : y = kx + q$

$\boxed{k = \mathrm{tg}\,\alpha}$

průsečík přímky p s osou y v bodě $[0;q]$

$k = \frac{u_2}{u_1}$, kde $\vec{u}(u_1, u_2)$ je směrový vektor přímky p.

b) Směrnicový tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou y.



($\alpha = 90°$, tg 90° neexistuje)

c) Přímka p je dána směrnicí k a bodem $[x_1, y_1]$

$y = kx + q$

$[x_1, y_1] \Rightarrow \quad y_1 = kx_1 + q$

$q = y_1 - kx_1$

$y = kx + y_1 - kx_1$

$\boxed{y = k(x - x_1) + y_1}$

d) Přímka p je určena dvěma body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$

$$y = kx + q$$

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1}$$

Pozn.: **Úsekový tvar rovnice přímky v E_2**

Nechť $p: ax + by + c = 0; \quad a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0$$

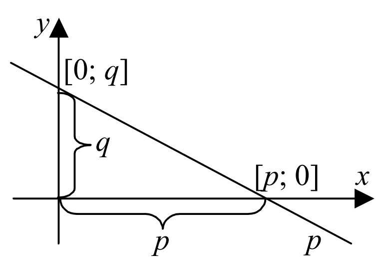
$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1.$$

Označme $-\frac{c}{a} = p; -\frac{c}{b} = q \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}\ ; p, q \neq 0$.

Def.: Rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\ ; p, q \neq 0$ nazýváme úsekovým tvarem rovnice přímky v E_2.

Pozn.: a) Geometrický význam čísel p, q:



b) Úsekový tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou x, rovnoběžné s y, procházející počátkem soustavy souřadnic.

Př.: Dáno: $A[0;2], B[3;0]$. Napište obecnou rovnici, úsekový, směrnicový a parametrický tvar rovnice přímky.

-úsekový tvar:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

-obecná rovnice:

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$2x - 3y = 6$

$\underline{2x + 3y - 6 = 0}$

-směrnicový tvar:

$y = kx + q$

$2x + 3y - 6 = 0$

$3y = -2x + 6 \quad / : 3$

$\underline{y = -\frac{2}{3}x + 2}$

-parametrická rovnice:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3; -2)$

$\Rightarrow p = \{[3t; 2 - 2t], t \in R\}$

Příklady

1) Jsou dány body $A[-2;1]$, $B[3;-2]$. Napište všechna vyjádření přímky $\overleftrightarrow{AB}$.

I. Parametrická rovnice: $\overrightarrow{AB} = (5;-3) \Rightarrow p = \{[-2 + 5t; 1 - 3t], t \in R\}$

II. Obecná rovnice: směrový vektor: $\vec{u} = (5;-3) \Rightarrow \vec{n} = (3;5)$

$\Rightarrow 3x + 5y + c = 0 \wedge A \in p \Rightarrow 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + c = 0$

$-6 + 5 + c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \underline{p : 3x + 5y + 1 = 0}$

III. Směrnicový tvar: $y = \frac{-1 - 3x}{5} \Rightarrow \underline{y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}}$

IV. Úsekový tvar: $3x + 5y = -1 \Rightarrow \underline{-3x - 5y = 1}$

2) Je dána přímka $p : x = 1 + 3t,\ y = -2 + t,\ t \in R$ a přímka q dána body $A[9;3]$, $B[11;6]$. Najděte obecnou rovnici přímky $r; r \perp p; p \cap q \in r$.

q: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2;3)$

$x = 9 + 2r$

$y = 3 + 3r$

Průsečík P:

$1 + 3t = 9 + 2r$

$-2 + t = 3 + 3r \Rightarrow t = 3r + 5$

$\Rightarrow 1 + 9r + 15 - 9 - 2r = 0$

$7r + 7 = 0$

$r = -1$

$x = 9 - 2 = 7,\ y = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow \underline{P = [7;0]}$

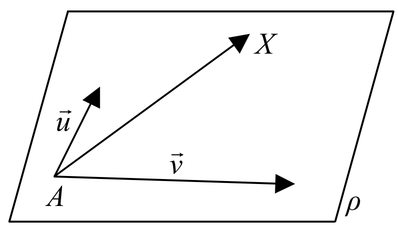
směrový vektor $p = (3;1) =$ normálový vektor r
$\Rightarrow$ obecná rovnice přímky $p: 3x + y + c = 0$
$3 \cdot 7 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -21$
$\Rightarrow \underline{r: 3x + y - 21 = 0}$

<u>§4. Rovnice roviny v E_3</u>

Pozn.: Předpokládejme, že rovina $\rho \in E_3$ je zadána bodem A a dvojicí lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Zapisujeme $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Def.: Nechť ρ je rovina, $\vec{u}, \vec{v}$ nenulové lineárně nezávislé volné vektory takové, že existuje jejich umístění $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ takové, že $A, B, C \in \rho$.
Pak vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazýváme <u>zaměřením roviny</u> ρ.

V.4.1.: Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina. Pak platí:
Bod $X \in E_3$ leží v rovině $\rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \in < \vec{u}, \vec{v} > \Leftrightarrow \exists r, s \in R: \overrightarrow{AX} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.



V.4.2.: Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina, $A[a_1, a_2, a_3], \vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Pak platí:
Bod $X[x, y, z]$ leží v rovině $\rho \Leftrightarrow \exists r, s \in R: \boxed{X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$
v souřadnicích:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y &= a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2 \qquad\qquad (*) \\ z &= a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \quad ; r, s \in R. \end{aligned}$$

Def.: Rovnici $X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$; $r, s \in R; \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$ nazveme <u>parametrickou rovnicí roviny</u> v E_3, čísla r, s parametry.
Soustavu (*) nazýváme <u>parametrickými rovnicemi roviny (v souřadnicích).</u>

Pozn.: Parametrickou rovnici roviny $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ též zapisujeme
$\rho = \{[a_1 + ru_1 + sv_1, a_2 + ru_2 + sv_2, a_3 + ru_3 + sv_3]; r, s \in R\}$.

Př.: Napište parametrickou rovnici roviny ρ určenou body $A[1;1;1]$, $B[2;0;-1]$, $C[1;0;0]$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0;-1;-1)$

$\Rightarrow \rho = \{[1+r; 1-r-s; 1-2r-s]; r,s \in R\}$

Pozn.: **<u>Obecná rovnice roviny</u>**

Nechť $\rho(A,\vec{u},\vec{v})$ je rovina, $A[a_1,a_2,a_3], \vec{u}(u_1,u_2,u_3), \vec{v}(v_1,v_2,v_3)$.

Pak rovina ρ má tyto rovnice:
$$x = a_1 + ru_1 + sv_1$$
$$y = a_2 + ru_2 + sv_2$$
$$z = a_3 + ru_3 + sv_3 \quad ; r,s \in R.$$

Eliminací parametrů r,s a vhodným označením koeficientů A,B,C,D (analogie odvození obecné rovnice přímky) získáme tvar

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$, kde $[A,B,C] \neq [0;0;0]$.

Def.: Rovnici $Ax + By + Cz + D = 0$, kde $[A,B,C] \neq [0;0;0]$ nazýváme <u>obecnou rovnicí roviny</u>.

Pozn.: Koeficienty A,B,C lze považovat za souřadnice vektoru kolmého k rovině ρ, tzn. <u>normálového vektoru roviny</u> $\rho: \vec{n} = (A,B,C), \vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$.

Př.: Napište obecnou rovnici roviny ρ:

$$\rho: x = 1 + r$$
$$y = 1 - r - s$$
$$z = 1 - 2r - s \quad , r,s \in R.$$

I. Pomocí normálového vektoru

-z parametrické rovnice: $A = [1;1;1]$

$\vec{u} = (1;-1;-2)$

$\vec{v} = (0;-1;-1)$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1;1;-1) \sim (1;-1;1)$$

obecná rovnice: $x - y + z + d = 0$

$A = [1;1;1] \Rightarrow 1 - 1 + 1 + d = 0$

$d = -1$

$\Rightarrow \underline{\rho: x - y + z - 1 = 0}$

II. Vyloučením parametrů r, s ze soustavy rovnic

$$x = 1 + r$$
$$\left.\begin{aligned} y &= 1 - r - s \\ z &= 1 - 2r - s \end{aligned}\right\} z - y = -r$$
$$\Rightarrow x + z - y = 1$$
$$\underline{x - y + z - 1 = 0}$$

Př.: Napište parametrické rovnice roviny ρ, která má obecnou rovnici $x + 2y - z + 1 = 0$.
Pomocí substituce:
$$\begin{aligned} y &= r \\ z &= s \\ x &= -1 + s - 2r \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 + s - 2r \\ y &= r \\ z &= s \quad ; r, s \in R \end{aligned}$$

Příklady

1) Jsou dány 3 body $A[-3;2;2]$, $B[1;-1;1]$, $C[2;0;-2]$. Najděte parametrickou a obecnou rovnici roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{u} = (4;-3;-1) \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{v} = (5;-2;-4) \end{aligned}\right. \Rightarrow \underline{\rho = \{[-3 + 4t + 5r; 2 - 3t - 2r; 2 - t - 4r]; t, r \in R\}}$$

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \right) = (10;11;7)$$

obecná rovnice: $10x + 11y + 7z + d = 0$

$A \Rightarrow -30 + 22 + 14 + d = 0$

$d = -6$

$\Rightarrow$ obecná rovnice: $\underline{10x + 11y + 7z - 6 = 0}$

§5. Vzájemná poloha dvou rovin

V.5.1.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi
Nechť $\rho : ax + by + cz + d = 0, \sigma : ex + fy + gz + h = 0$ jsou roviny.
Pak platí: I. $\rho = \sigma \Leftrightarrow \exists k \in R : (a,b,c,d) = k \cdot (e,f,g,h)$

II. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \exists k \in R : (a,b,c) = k \cdot (e,f,g) \wedge d \neq k \cdot h$

III. $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k \in R : (a,b,c) \neq k \cdot (e,f,g)$.

Př.: Určete vzájemnou polohu dvou rovin

$\rho : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$

$\sigma : x - y - z + 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_\rho &= (2;3;4) \\ \vec{n}_\sigma &= (1;-1;-1) \end{aligned}\right. \Rightarrow \text{ vektory nejsou lineárně závislé } \Rightarrow \rho \nparallel \sigma.$$

Určení průsečnice rovin ρ, σ (hledáme parametrickou rovnici přímky v E_3)

volíme $z = t; t \in R$

$$\begin{array}{l} 2x+3y+4t+5=0 \\ \underline{x-y-t+1=0} \quad /\cdot 2 \\ 5x+t+8=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8-t}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t$$

$$y = x - t + 1 \Rightarrow y = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t - t + 1 = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t$$

$\Rightarrow$ <u>rovnice průsečnice</u>: $x = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t$

$$y = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t$$

$$z = t \quad, t \in R$$

V.5.2.: <u>Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi</u>

Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v}), \sigma(B, \vec{k}, \vec{l})$ jsou roviny.

Pak platí: I. $\rho = \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \rangle = 2$

II. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \rangle = 3$

III. $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ a σ:

$\rho = \{[4 + t_1 + 2t_2; 5 + 2t_1; 3 + 2t_1 + 2t_2]; t_1, t_2 \in R\}$

$\sigma = \{[1 + 2r_1 + r_2; -2 - 2r_1 - 2r_2; 1 + r_1]; r_1, r_2 \in R\}$

$\Rightarrow \rho:\ A = [4; 5; 3]$, $\quad \sigma:\ B = [1; -2; 1]$

$\vec{u} = (1; 2; 2)$, $\quad \vec{k} = (2; -2; 1)$,

$\vec{v} = (2; 0; 2) \sim (1; 0; 1)$ $\quad \vec{l} = (1; -2; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; -7; -2)$

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \\ \overrightarrow{AB} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2, \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \rangle = 3$

$\Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné různé.

Př.: Určete vzájemnou polohu rovin ρ a σ:

$\rho = \{[1 + t_1 + 2t_2; 2t_1 + 3t_2; -2 - 2t_1 + t_2]; t_1, t_2 \in R\}$

$\sigma = \{[r_1; -3 + r_2; 1 + 4r_1 - r_2]; r_1, r_2 \in R\}$

$\Rightarrow \rho:\ A = [1; 0; -2]$, $\quad \sigma:\ B = [0; -3; 1]$

$\vec{u} = (1;2;2)$, $\vec{k} = (1;0;4)$,
$\vec{v} = (2;3;1)$ $\vec{l} = (0;1;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1;-3;3)$

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \\ \overrightarrow{AB} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3$

$\Rightarrow$ roviny jsou různoběžné.

Rovnice průsečnice ρ, σ:

-porovnání souřadnic ρ a σ:

$1 + t_1 + 2t_2 = r_1$

$2t_1 + 3t_2 = -3 + r_2$

$-2 - 2t_1 + t_2 = 1 + 4r_1 - r_2$

-soustava 3 rovnic o 4 neznámých, po vyjádření t_1 :

$t_1 = -1 - t_2$, dosazením do rovnice roviny ρ :

$\underline{p = \{[t_2; -2 + t_2; 3t_2], t_2 \in R\}}$

Příklady

1) Určete vzájemnou polohu rovin ρ a σ

$\rho : x + 2y + z - 1 = 0$, $\sigma : 2x + 3y - 2z + 2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} n_\rho &= (1;2;1) \\ n_\sigma &= (2;3;-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ lineárně nezávislé } \Rightarrow \rho \nparallel \sigma$$

Průsečnice: $x + 2y + z - 1 = 0 \quad /\cdot 2$

$2x + 3y - 2z + 2 = 0$

$-y - 4z + 4 = 0$

$\underline{z = t}: y = 4 - 4t$

$x = 1 - z - 2y = 1 - t + 8t - 8 = -7 + 7t$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= -7 + 7t \\ y &= 4 - 4t \\ z &= t \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{p = \{[-7 + 7t; 4 - 4t; t], t \in R\}}$

§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny daných parametrickými rovnicemi

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $\rho(B,\vec{v},\vec{w})$ rovina.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u},\overrightarrow{AB}\rangle = 2$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u},\overrightarrow{AB}\rangle = 3$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle = 3$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

$p = \{[3+t; 1+2t; 2-t], t \in R\}$

$\rho = \{[1-3r+s; 2r-s; 1+4r-s]; r,s \in R\}$

$p: A = [3;1;2], \vec{u} = (1;2;-1)$

$\rho: B = [1;0;1], \vec{v} = (-3;2;4), \vec{w} = (1;-1;-1)$

$$\begin{array}{c} \vec{w} \\ \vec{v} \\ \vec{u} \\ \overrightarrow{AB} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\langle v,\vec{w},\vec{u}\rangle = 3 \Rightarrow$ přímka je různoběžná s rovinou.

Určení průsečíku p,ρ:

-porovnáváme souřadnice p a ρ:

$3+t = 1-3r+s$

$1+2t = 2r-s$

$2-t = 1+4r-s$

$\Rightarrow$ soustava 3 rovnic o 3 neznámých, vyřešením dostáváme $t=-2; s=9; r=3$.

Dosazením $t=-2$ do rovnice přímky p dostáváme souřadnice průsečíku:

$\underline{P = [1;-3;4]}$.

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí

Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $\rho: ax+by+cz+d, [a,b,c] \neq [0;0;0]$ rovina. Nechť $\vec{n} = (a,b,c)$.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \in \rho$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \notin \rho$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$.

Př.: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

a) $p = \{[1-t; 1+3t; -2], t \in R\}$, $\rho: 3x+y+5z+7=0$

$\Rightarrow \vec{u} = (-1;3;0)$,

$\vec{n} = (3;1;5)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = -3+3+0 = 0 \Rightarrow$ přímka je s rovinou rovnoběžná

Rozhodneme, jestli přímka p leží v rovině ρ, tzn. jestli $A \in \rho$:

$A[1;1;-2]$
$3+1-10+7=1\neq 0 \Rightarrow \rho, p$ jsou rovnoběžné různé.

b) $p=\{[3+t;1-t;2t],\ t\in R\},\ \rho: x-2y+z-3=0$
$\Rightarrow \vec{u}=(1;-1;2)$
$\vec{n}_\rho=(1;-2;1)$
$\vec{u}\cdot\vec{n}=1+2+2=5 \Rightarrow p \nparallel \rho$

Určení průsečíku p,ρ:
-dosadíme rovnici přímky p do rovnice roviny ρ:
$3+t-2+2t+2t-3=0$
$5t=2$
$t=\frac{2}{5}$
$\Rightarrow \underline{P=\left[\frac{17}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]}$

Příklady

1) Jsou dány body $A[1;-1;3],\ B[1;2;-3],\ C[2;-3;4],\ D[3;-4;2]$

a) Rozhodněte, zda bod D leží v rovině $\overleftrightarrow{ABC}=\rho$
$\overrightarrow{AB}=(0;3;-6)$
$\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)$
$\Rightarrow \rho=\{[1+s;-1+3r-2s;3-6r+s];\ r,s\in R\}$
$D: 1+s=3 \Rightarrow s=2$
$-1+3r-2s=-4 \Rightarrow -1+3r-4=-4 \Rightarrow r=\frac{1}{3}$
$3-6r+s=3 \Rightarrow 3-2+2=3 \Rightarrow \underline{D\in \overleftrightarrow{ABC}}$

b) Určete průsečíky roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ se souřadnými osami
<u>s osou x</u>: $y=0\wedge z=0 \Rightarrow -1+3r-2s=0$
$3-6r+s=0 \Rightarrow s=6r-3$
$\Rightarrow -1+2r-12r+6=0 \Rightarrow -9r=-5$
$r=\frac{5}{9} \Rightarrow s=\frac{30}{9}-3=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
$x=1+s=\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{P=\left[\frac{4}{3};0;0\right]}$

<u>s osou y</u>: $1+s=0 \Rightarrow s=-1$

$$3-6r+s=0 \Rightarrow 3-6r-1=0$$
$$2=6r \Rightarrow r=\frac{1}{3}$$
$$y=-1+3r-2s=-1+1+2=2$$
$$\Rightarrow \underline{P=[0;2;0]}$$

<u>s osou z</u>: $1+s=0 \Rightarrow s=-1$

$$-1+3r-2s=0 \Rightarrow -1+3r+2=0$$
$$3r=-1 \Rightarrow r=-\frac{1}{3}$$
$$z=3-6r+s=3+2-1=4$$
$$\Rightarrow \underline{P=[0;0;4]}$$

§7. Příčka mimoběžek

Def.: Nechť p,q jsou 2 mimoběžné přímky. Přímka r, která je různoběžná s oběma přímkami p,q, se nazývá příčka mimoběžek p,q.

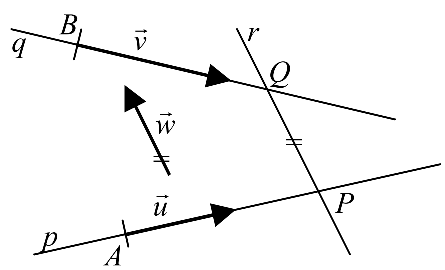
Pozn.: Nechť $p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v})$ jsou přímky. Pak pro příčku mimoběžek $r(Q,\vec{w})$ platí: $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

A) Nalezení příčky r mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w}$

Dáno: $p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v}),\ \vec{w} \neq \vec{o}$.

Rozbor: 1) $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 0$ *řešení*

2) $\vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 1$ *řešení*



$$\left.\begin{aligned} P &= A + k\cdot\vec{u} \\ Q &= B + l\cdot\vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\underline{\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}}$$

-3 rovnice o 3 neznámých x,k,l.

Př.: Jsou dány mimoběžky $p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v})$, vektor $\vec{w}$.

$A[1;-2;5],\ B[-1;1;-5],\ \vec{u}(1;3;-1),\ \vec{v}(1;1;2),\ \vec{w}(1;1;4)$

Najděte příčku mimoběžek p,q, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w}$.

$\overrightarrow{AB} = (-2;3;-10) \Rightarrow$ výsl. rovnice: $(-2;3;-10) = x(1;1;4) - l(1;1;2) + k(1;3;-1)$

Hledáme body P,Q, platí: $P = A + k\cdot\vec{u},\ \ Q = B + l\cdot\vec{v}$ a zároveň $\overrightarrow{PQ} = x\cdot\vec{w}$

$$\Rightarrow x\cdot\vec{w} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

$$-2 = x - l + k \Rightarrow l = x + k + 2$$

$$3 = x - l + 3k \Rightarrow x = -3k + l + 3$$

$$-10 = 4x - 2l - k$$

$$x = -3k + x + k + 2 + 3$$

$k = \frac{5}{2}$

$x = -3\frac{5}{2} + l + 3$

$-10 = 4x - 2l - \frac{5}{2}$

$-10 = -30 + 4l + 12 - 2l - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow l = \frac{21}{4}$

$x = -\frac{15}{2} + \frac{21}{4} + 3 = +\frac{3}{4}$

$\Rightarrow P = [1 + \frac{5}{2} \cdot 1; -2 + \frac{5}{2} \cdot 3; 5 - 1 \cdot \frac{5}{2}] = [\frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \frac{5}{2}]$

$\Rightarrow r = \overleftrightarrow{PQ} = \{[\frac{7}{2} + t; \frac{11}{2} + t; \frac{5}{2} + 4t], t \in R\}$

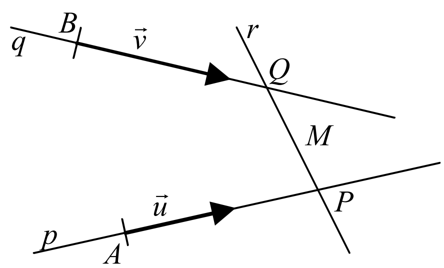
B) <u>Nalezení příčky r mimoběžek p, q, která prochází bodem M</u>:

Dáno: $p(A, \vec{u})$, $q(B, \vec{v})$, bod M

Rozbor: 1) $M \in p \vee M \in q \Rightarrow$ *nekonečně mnoho řešení*

2) $M \notin p \wedge M \notin q \Rightarrow$ a) jedna přímka je rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem M $\Rightarrow$ 0 *řešení*

b) jedna přímka není rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem M $\Rightarrow$ 1 *řešení*



$P = A + k \cdot \vec{u}$

$Q = B + l \cdot \vec{v}$

$\overrightarrow{MP} = x \cdot \overrightarrow{MQ} \Rightarrow P - M = x \cdot (Q - M)$

$A + k \cdot \vec{u} - M = x \cdot (B + l \cdot \vec{v} - M)$

$\overrightarrow{MA} + k \cdot \vec{u} = x \cdot (\overrightarrow{MB} + l \cdot \vec{v})$

$\overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + x \cdot l \cdot \vec{v} - k \cdot \vec{u}$

$\underline{-k \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v} + x \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}}$, kde $m = x \cdot l$

$\Rightarrow$ 3 rovnice o 3 neznámých k, m, x

Př.: Jsou dány mimoběžky $p(A,\vec{u}), q(B,\vec{v})$, bod M. Nalezněte příčku mimoběžek p,q, procházející bodem M.

$A[1;5;2]$, $B[0;-1;1]$,

$\vec{u}(1;2;1)$, $\vec{v}(3;1;0)$,

$M[0;1;-5]$

$P = A + k\vec{u}$, $Q = B + l\vec{v}$

$\overrightarrow{MP} = x \cdot \overrightarrow{MQ} \Rightarrow P - M = x \cdot \overrightarrow{MQ}$

$A + k\vec{u} - M = x \cdot \overrightarrow{MB} + xl\vec{v}$

$\overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + xl\vec{v} - k\vec{u}$

$\underline{-k\vec{u} + m\vec{v} + x \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}}:$

$(1;4;7) = x(0;-2;6) + m(3;1;0) - k(1;2;1)$

$1 = 3m - k \Rightarrow m = \dfrac{k+1}{3}$

$4 = -2x + m - 2k$

$7 = 6x - k \Rightarrow x = \dfrac{k+7}{6}$

$4 = -\dfrac{k+7}{3} + \dfrac{k+1}{3} - 2k$

$12 = -k - 7 + k + 1 + 6k$

$18 = -6k$

$\underline{k = -3}$

$\Rightarrow \underline{m = -\dfrac{2}{3}}$

$\Rightarrow \underline{x = \dfrac{2}{3}}$

$P = [1;5;2] - 3(1;2;1) = [-2;-1;-1]$

$Q = [0;-1;1] - 1(3;1;0) = [-3;-2;1]$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1;-1;2) \sim (1;1;-2)$

$r = \overleftrightarrow{PQ} = \{[t;1+t;-5-2t], t \in R\}$

Def.: Nechť p,q jsou mimoběžné přímky. Pak příčka mimoběžek o, která se kolmá k přímkám p i q, se nazývá <u>osa mimoběžek</u> p,q.

<u>C) Nalezení osy o mimoběžek p, q:</u>

Př.: Nalezněte osu mimoběžek p,q

$p = \{[8+t;5+2t;8-t], t \in R\}$

$q = \{[-4-7r;3+2r;4+3r], r \in R\}$

Hledáme osu $o(P,\vec{w})$, $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$, máme dáno:
$A[8;5;8]$, $\vec{u}(1;2;-1)$,
$B[-4;3;4]$, $\vec{v}(-7;2;3)$

$$p\perp o: \vec{u}\cdot\vec{w}=w_1+2w_2-w_3=0 \Rightarrow w_1+2w_2-2w_1=2w_2 \Rightarrow w_2=\frac{w_1}{2}$$

$$q\perp o: \vec{v}\cdot\vec{w}=-7w_1+2w_2+3w_3=0$$

$$\Rightarrow 8w_1-4w_3=0$$

$$2w_1-w_3=0$$

$$w_3=2w_1$$

w_1 - libovolný, neboť mohou být různé jeho násobky
např. $w_1=2,\ w_2=1,\ w_3=4 \Rightarrow w(2;1;4)$.
Tento vektor můžeme získat také jako vektorový součin $\vec{u}\times\vec{v}$.
Nyní hledáme příčku p,q, rovnoběžnou s $\vec{w}$.

$$\overrightarrow{PQ}=x\cdot\vec{w}$$

$$\left.\begin{array}{l} P=A+k\vec{u} \\ Q=B+l\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow PQ=Q-P=B+l\vec{v}-A\cdot k\vec{u}$$

$$x\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AB}+l\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AB}=x\vec{w}+k\vec{u}-l\vec{v}$$

$$(-12;-2;-4)=x(2;1;4)+k(1;2;-1)-l(-7;2;3)$$

$$-12=2x+k+7l \quad /\cdot(-2)$$

$$-2=x+2k-2l \quad /\cdot(-2)$$

$$\underline{-4=4x-k-3l}$$

$$-8=-3k+11l$$

$$\underline{20=-3k-17l}$$

$$-28=28l$$

$$\underline{l=-1}$$

$$-8=-3k-11$$

$$\underline{k=-1}$$

$$x=-2-2+2$$

$$\underline{x=-2}$$

$$P=A+k\vec{u}=[8;5;8]+(-1;-2;1)=[7;3;9]$$

$$Q=B+l\vec{v}=[-4;3;4]+(7;-2;-3)=[3;1;1]$$

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-4;-2;-8)=(2;1;4)$$

$$\underline{o=\overleftrightarrow{PQ}=\{[7+2t;3+t;9+4t],\ t\in R\}}$$

Př.: Nalezněte osu mimoběžek $p(A,\vec{u})$, $q(B,\vec{v})$ rovnoběžnou s $\vec{w}$
$A[10;-7;0]$, $B[-3;5;0]$
$\vec{u}(5;4;1)$, $\vec{v}(2;1;1)$, $\vec{w}(8;7;1)$

$P = a + k\vec{u},\ Q = B + r\vec{v}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$

$\overrightarrow{PQ} \Rightarrow x.\vec{w}$

$\Rightarrow B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$

$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$

$\Rightarrow (-13;12;0) = x(8;7;1) + k(5;4;1) - l(2;1;1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{w} & \vec{u} & -\vec{v} & \overrightarrow{AB} \\ 5 & 2 & -2 & -13 \\ 4 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -2 & -13 \\ 0 & -3 & 3 & 114 \\ 0 & 3 & -3 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -2 & -13 \\ 0 & -3 & 3 & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 127 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ <u>příčka neexistuje</u>.

Příklady

1) Jsou dány 2 mimoběžky p, q. Najděte příčku mimoběžek, procházející bodem *E*.

$p = \{[3-4t;1+t;1-t],\ t \in R\},\ q = \{[1-s;2-s;2+s],\ s \in R\},\ E[9;3;3]$

$P \in p,\ Q \in q \Rightarrow P = [3-4t;1+t;1-t],\ Q = [1-s;2-s;2+s]$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PE} = (6+4t;2-t;2+t) \\ \overrightarrow{QE} = (8+s;1+s;1-s) \end{array}\right\} \text{musí být lineárně závislé}$$

$6 + 4t = k\cdot(8+s)$

$$\left.\begin{array}{l} 2 - t = k\cdot(1+s) \\ 2 + t = k\cdot(1-s) \end{array}\right\} 4 = 2k \Rightarrow \underline{k = 2}$$

$\Rightarrow 3 + 2t = 8 + s \Rightarrow s = 2t - 5$

$2 + t = 2 - 4t + 10 \Rightarrow \underline{t = 2} \Rightarrow \underline{s = -1}$

$\Rightarrow P[-5;3;-1],\ Q[2;3;1]$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (7;0;2)$

$\underline{o = \overleftrightarrow{PQ} = \{[-5+7t;3;-1+t],\ t \in R\}}$

<u>§8. Vzdálenost</u>

Def.: Nechť $A, B \subseteq E_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. <u>Vzdáleností podprostorů</u> A, B nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(A,B)$ definované takto: $\rho(A,B) = \min\{|AB| : A \in A,\ B \in B\}$, kde $|AB|$ je dékla úsečky AB.

Pozn.: <u>Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů</u>:
Nechť $M \subseteq R$ je množina. Pak číslo $i \in R$ nazýváme <u>infimem množiny</u> M, je-li

největší dolní závorou množiny M, tj. jestliže platí:

1. $\forall m \in M : i \le m$
2. $\forall r \in R : \forall m \in M : r \le m \Rightarrow i \ge r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Nechť $\mathcal{A},\mathcal{B} \subseteq E_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a nechť $D = \{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak <u>vzdáleností podprostorů</u> $\mathcal{A},\mathcal{B}$ nazýváme infimum množiny D.
Platí: Má-li množina D nejmenší prvek *n*, pak tento prvek je infimum
$\Rightarrow n = \rho(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Pozn.: Jestliže $\mathcal{A},\mathcal{B}$ mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$.

A) <u>Vzdálenost 2 bodů v E_2, E_3</u>

$$\rho(A,B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Nechť $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3]$ jsou 2 body v E_3 (resp. v E_2).

Pak platí: $\rho(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3\,(2)}(b_i-a_i)^2}$

[Dk. viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

Př.: Určete $\rho(A,B)$

a) $A[3;-1]$, $B[0;2]$
$\rho(A,B) = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $A[1;0;2]$, $B[-1;2;1]$
$\rho(A,B) = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

B) <u>Vzdálenost bodu od přímky v E_2</u>

$\rho(A,p) = \rho(A,A_0)$, kde A_0 - kolmý průmět bodu A na přímku p

$p : ax+by+c=0; \quad [a,b] \ne [0;0], \vec{n}=(a,b), A[a_1,a_2]$

$\underline{q} \perp p : x = a_1 + ta,\ y = a_2 + tb$

$A_0[a_1+t^*a,\ a_2+t^*b] \in p \cap q :$

$a(a_1+t^*a)+b(a_2+t^*b)+c=0$

$t^*(a^2+b^2) = -aa_1-ba_2-c$

$$t^* = \frac{-aa_1-ba_2-c}{a^2+b^2}$$

$$\rho(A,p)=\rho(A,A_0)=\left|\overrightarrow{AA_0}\right|$$

$$\overrightarrow{AA_0}=A_0-A=(t^*a,t^*b)$$

$$\left|AA_0\right|=\sqrt{(t^*a)^2+(t^*b)^2}=t^*\cdot\sqrt{a^2+b^2}-\frac{aa_1+ba_2+c}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=\underline{\frac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

V.8.2.: Nechť $A[a_1,a_2]\in E_3$ je bod, $p=ax+by+c=0;[a,b]\neq[0;0]$ je přímka.
Pak platí: $\rho(A,p)=\dfrac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

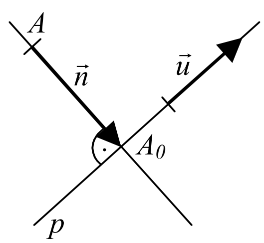
Př.: Určete $\rho(A,p)$
$A[-1;2]$, $p: x-2y+1=0$

$$\rho(A,p)=\frac{|-1-2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

C) <u>Vzdálenost bodu od přímky v E_3</u>

$\rho(A,p)=\rho(A,A_0)$, kde A_0 - kolmý průmět bodu A na přímku p

I. způsob:



$p(P,\vec{u})$, $P[p_1,p_2,p_3]$, $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $A[a_1,a_2,a_3]$

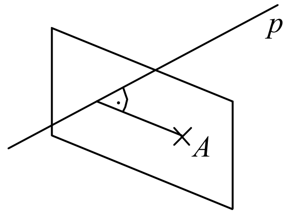
$A_0[p_1+t^*u_1,\ p_2+t^*u_2,\ p_3+t^*u_3]$

$\vec{n}=\overrightarrow{AA_0}=(p_1-a_1+t^*u_1,\ p_2-a_2+t^*u_2,\ p_3-a_3+t^*u_3)$

$\vec{n}\perp\vec{u}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

- 1 rovnice o 1 neznámé t^*, po určení t^* určíme A_0.

II. způsob: určení rovnice roviny ρ, která prochází bodem A a je kolmá k přímce p.



III. způsob: vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod přímky p, jako funkci proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

Př.!: Určete $\rho(A, p)$

$A[1;0;1]$, $p = \{[2-t;\, t;\, 0],\, t \in R\}$

I. zp.: $A = [1;0;-1] \Rightarrow A_0 = [2-t^*;\, t^*;\, 0]$

$$p = \{[2-t;\, t;\, 0],\, t \in R\} \Rightarrow \vec{n} = (-1;1;0)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = t^* - 1 + t^* = 0$$

$$2t^* = 1$$

$$t^* = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = \left[\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right]$$

$$\overrightarrow{AA_0} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right) \Rightarrow \rho(A, A_0) = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

II. zp.: $\rho \perp p \Rightarrow n_\rho = \vec{u} = (-1;1;0)$

$$\rho : -x + y + d = 0$$

$$\underline{A \in \rho} : -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow \rho : -x + y + 1 = 0$$

$$\underline{p \cap \rho} : -(2-t) + t + 1 = 0$$

$$-2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ (dále stejně jako v I.)}$$

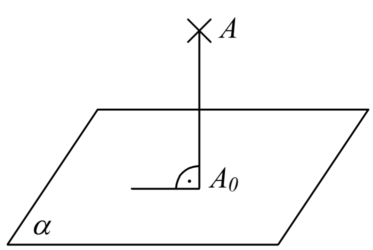
III. zp.: $X[2-t;\, t;\, 0]$, $\overrightarrow{AX} = (1-t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{(1-t)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2(t^2 - t + 1)} = \sqrt{2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right]} = \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{minimum pro } t = \frac{1}{2}, \text{ nabývá hodnoty } \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

D) Vzdálenost bodu od roviny v E_3

$\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α.



$\alpha : ax + by + cz + d = 0$; $[a,b,c] \neq [0;0;0]$, $A[a_1, a_2, a_3]$

$\underline{q} \perp \alpha :\ x = a_1 + ta$

$$y = a_2 + tb$$
$$z = a_3 + tc$$
$$A_0[a_1 + t^* a,\ a_2 + t^* b,\ a_3 + t^* c] \in \alpha \cap q :$$
$$a(a_1 + t^* a) + b(a_2 + t^* b) + c(a_3 + t^* c) + d = 0$$
$$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d$$
$$\Rightarrow t^* = -\frac{aa_1 + ba_2 + ca_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\rho(A,\alpha) = \rho(A, A_0) = \left|\overrightarrow{AA_0}\right|$$
$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^* a, t^* b, t^* c)$$
$$\left|\overrightarrow{AA_0}\right| = \sqrt{(t^* a)^2 + (t^* b)^2 + (t^* c)^2} = t^* \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = -\frac{aa_1 - ba_2 - ca_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2} =$$
$$= \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.3.: Nechť $A[a_1, a_2, a_3]$ je bod; $\alpha : ax + by + cz + d = 0, [a,b,c] \neq [0;0;0]$ je rovina.
Pak platí: $\rho(A,\alpha) = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Př.: Určete $\rho(A,\alpha)$
$A[1;-1;0],\ \alpha : x - y + 2z - 1 = 0$

$$\rho(A,\alpha) = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

E) <u>Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2</u>

$\rho(p,q) = \rho(A,q); A \in p$ libovolný bod
$p : ax + by + c_1 = 0$
$q : ax + by + c_2 = 0; \quad [a,b] \neq [0;0]$
zvolíme $A[a_1, a_2] \in p$:
$\rho(A,q) = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (podle V.8.2.)
$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_2 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 = -c_1$
$$\Rightarrow \rho(p,q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př.: Určete $\rho(p,q)$
$p : 4x - 2y + 1 = 0 \sim 2x - y + 0{,}5 = 0$
$q : 2x - y + 3 = 0$

$$\rho(p,q)=\frac{\left|3-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

F) <u>Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3</u>

Def.: $\rho(p,q)=\rho(A,q)$, kde $A\in p$ libovolný bod. Dále viz C).

G) <u>Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v E_3</u>

Def.: $\rho(p,\alpha)=\rho(A,\alpha)$, kde $A\in p$ libovolný bod. Dále viz D).

Př.: Určete $\rho(p,\alpha)$

$p=\{[-1+2t;1-t;2+3t],\ t\in R\}$

$\alpha: x+5y+z-3=0$

Ověření $p\parallel\alpha: \vec{u}_p\perp\vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$:

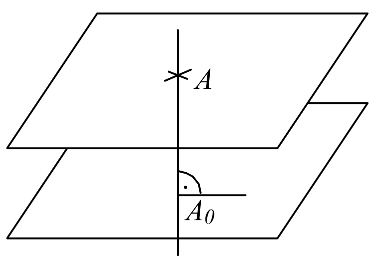
$(2;-1;3)\cdot(1;5;1)=2-5+3=0\Rightarrow$ platí

$\rho(p,\alpha)=\rho(A,\alpha),\ A[-1;1;2]$:

$$\frac{|1\cdot(-1)+5\cdot1+1\cdot2+3|}{\sqrt{1+25+1}}=\frac{-1+5+2-3}{\sqrt{27}}=\frac{3}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{27}}{9}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

H) <u>Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v E_3</u>

$\rho(\alpha,\beta)=\rho(A,\beta)$, kde $A\in\alpha$ libovolný bod.



$\alpha: ax+by+cz+d_1=0$

$\beta: ax+by+cz+d_2=0$

$A[a_1,a_2,a_3]\in\alpha$

$A\in\alpha\Rightarrow q=\{[a_1+ta,\ a_2+tb,\ a_3+tc],\ t\in R\}$

$q\perp\beta: x=a_1+ta,\ y=a_2+tb,\ z=a_3+tc$

$q\perp\alpha: aa_1+t^*a^2+ba_2+t^*b^2+ca_3+t^*c^2+d_2=0$

$$t^*(a^2+b^2+c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d_2$$
$$\Rightarrow t^* = -\frac{aa_1+ba_2+ca_3}{a^2+b^2+c^2}$$
$$\overrightarrow{AA_0} = (t^*a, t^*b, t^*c) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AA_0}\right| = t^* \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$= -\frac{aa_1+ba_2+ca_3+d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \underline{\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

V.8.5.: Nechť $\alpha : ax+by+cz+d_1 = 0,\ \beta : ax+by+cz+d_2 = 0$ jsou 2 různé rovnoběžné roviny, $[a,b,c] \neq [0;0;0],\ d_1 \neq d_2$.

Pak platí: $\rho(\alpha,\beta) = \dfrac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Př.: Určete $\rho(\alpha,\beta)$

$\alpha : 3x - y + 2z - 1 = 0$

$\beta : -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0 \sim 3x - y + 2z - 10 = 0$

$$\rho(\alpha,\beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \underline{\frac{9\sqrt{14}}{14}}$$

<u>I) Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3</u>

$\rho(a,b) = \rho(\alpha,\beta)$, kde $p \in \alpha,\ q \in \beta;\ \alpha \parallel \beta$

I. způsob: z definice:

$p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v})$

Určení normálového vektoru obou rovin:

$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3)$

$\alpha : n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0$

$\wedge\ A \in \alpha \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_1.

$\beta : n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0$

$\wedge\ B \in p \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_2, dále viz H)

II. způsob: pomocí osy mimoběžek

-určíme průniky $o \cap p = \{P\},\ o \cap q = \{Q\}$

$\Rightarrow \rho(p,q) = \rho(P,Q)$

Př.: Určete $\rho(p,q)$

$p = \{[9+4t; -2-3t; t],\ t \in R\}$

$q = \{[-2r; -7+9r; 2+2r],\ r \in R\}$

I. zp.: $\vec{u} = (4;-3;1),\ \vec{v} = (-2;9;2)$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} \right) = (-15; -10; 30) = (3; 2; -6)$$

$\alpha : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$

$A[9; -2; 0] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -23$

$\beta : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$

$B[0; -7; 2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 26$

$$\Rightarrow \rho(A, q) = \frac{|26 + 23|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = \underline{7}$$

II. zp.: Hledáme $o(P, \vec{w})$

$p \perp o \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 4w_1 - 3w_2 + w_3 = 0$

$q \perp o \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow -2w_1 + 9w_2 + 2w_3 = 0 \Rightarrow -4w_1 + 18w_2 + 4w_3 = 0$

$$\Rightarrow 15w_2 + 5w_3 = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{w_3}{3} = 4w_1 + 2w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = -\frac{w_3}{2}$$

Nechť $w_3 = 6 \Rightarrow w_2 = 2; w_1 = -3 \Rightarrow \vec{w} = (-3; 2; 6)$

Příčka p, q rovnoběžná s $\vec{w}$:

$\overrightarrow{AB} = (-9; -5; 2)$

$$\left. \begin{aligned} p &= A + k\vec{u} \\ q &= B + l\vec{v} \end{aligned} \right\} \overrightarrow{PQ} = B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w} \Rightarrow x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v} = AB$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 2 & -9 \\ -2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 2 & -9 \\ 0 & -17 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & -245 & -245 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow k = -2 \\ \Rightarrow l = 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} P &= [9; -2; 0] - 2(4; -3; 1) = [1; 4; -2] \\ Q &= [0; -7; 2] + (-2; 9; 2) = [-2; 2; 4] \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| =$$

$$= \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \underline{\rho(p, q) = 7}$$

Př.: Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A[1; 2]$ a má stejnou vzdálenost od bodů $B[3; 3]$ a $C[5; 2]$.

$\rho(\beta, p) = (C, p) \quad ; p : ax + by + c = 0$

$$\frac{|3a + 3b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Volím $b = 1$ (ze situace plyne, že budou 2 řešení). Pokud vyjdou 2 řešení pro $b = 1$, nemusíme uvažovat $b = 0$, jinak ano, nebo pro $b = 0$ dojít ke sporu.

$A \in p \Rightarrow a + 2b + c = 0$

$b = 1 \Rightarrow a + c = -2 \Rightarrow a = -c - 2$

$$\frac{|-3c - 6 + 3 + c|}{\sqrt{(-c-2)^2 + 1}} = \frac{|-5c - 10 + 2 + c|}{\sqrt{(-c-2)^2 + 1}}$$

$$|-3c-3+c| = |-5c-8+c|$$
$$|-3-2c| = |-8-4c|$$

1) shodná znaménka:
$$-3-2c = -8-4c$$
$$2c = -5 \Rightarrow \underline{c = -\frac{5}{2}}$$
$$\underline{a} = -c-2 = \frac{5}{2} - 2 = \underline{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow p: \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2}c = 0 \Rightarrow \underline{x+2y-5=0}$$

2) různá znaménka:
$$-3-2c = 8+4c$$
$$-6c = 11 \Rightarrow \underline{c = -\frac{11}{6}}$$
$$\underline{a} = -c-2 = \frac{11}{6} - \frac{12}{6} = \underline{-\frac{1}{6}}$$
$$\Rightarrow p_1 = -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \Rightarrow \underline{x-6y+11=0}$$

Př.: Určete rovnici přímky procházející bodem $A[-2;1]$, která má od $B[3;1]$ vzdálenost 4.

$$\rho(B,p) = 43$$
$$p: ax+by+c=0 \wedge A \in p \Rightarrow p: -2a+b+c=0$$
$$b=1:$$
$$-2a+1+c=0 \Rightarrow c = 2a-1$$
$$\frac{|3a+1+2a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = 4$$
$$|5a| = 4\sqrt{a^2+1}$$
$$25a^2 = 16a^2+16$$
$$\pm 3a = 4 \Rightarrow a = \pm\frac{4}{3}$$
$$a = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow p_1: \frac{4}{3}x + y + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow \underline{p_1: 4x+3y+5=0}$$
$$a = -\frac{4}{3} \Rightarrow c = -\frac{8}{3} - 1 = -\frac{11}{3} \Rightarrow p_2: -\frac{4}{3}x + y - \frac{11}{3} = 0 \Rightarrow \underline{p_2: -4x+3y-11=0}$$

Př.: Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou $4x-3y-12=0$ a mají od bodu $A[2;3]$ vzdálenost 5.

$$p: 4x-3y+c=0 \Rightarrow c = 3y-4x$$

$$\rho(A,p)=5 \Rightarrow 5=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 3+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-1+c|}{\sqrt{25}}=\frac{|-1+c|}{5}$$

$$\Rightarrow 25=|-1+c|$$

$$1)\ c=26 \Rightarrow \underline{p_1 : 4x-3y+26=0}$$

$$2)\ c=24 \Rightarrow \underline{p_2 : 4x-3y-24=0}$$

Př.: Určete rovnici roviny, která prochází průsečnicí rovin $\alpha : x+y-z+6=0$, $\beta : 2x+y-z+4=0$ a má od bodu $A[3;2;2]$ vzdálenost $\sqrt{11}$.

$$p(\vec{u},P)\in \alpha \cap \beta : p=\{[2;t-8;t], t\in R\}$$

$$\rho(\gamma,A)=\sqrt{11}=\frac{|3a+2b+2c-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$b=1 : c=-1 \Rightarrow \rho(\gamma,A)=\frac{|3a+2\cdot 2+8-2a|}{\sqrt{a^2+1+1}}=\frac{|a+8|}{\sqrt{a^2+2}}=\sqrt{11}$$

$$|a+8|=\sqrt{11}\cdot\sqrt{a^2+2} \Rightarrow a^2+16a+64=11a^2+22$$

$$10a^2-16a-42=0$$

$$5a^2-8a-21=0$$

$$a_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+420}}{10}=\frac{8\pm 22}{10} \Rightarrow a_1=3,\ a_2=-\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_1 : 3x+y-z+2=0}$$

$$\gamma_2 : \underline{7x-5y+5z-54=0}$$

Příklady

1) Zjistěte vzdálenost bodu $P[-3;1]$ od přímky $p : 2x+y-2=0$.

$$|PP_0|=\frac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot(-3)+1-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-7|}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$$

2) Je dána přímka $p : 3x-4y+1=0$. Najděte bod Q tak, aby $\rho(P,Q)=10$, pokud platí: $P=[1;?], P\in p, Q\in p$.

$$P\in p : 3\cdot 1-4y+1=0 \Rightarrow y=1$$

$$\Rightarrow P=[1;1],\ Q=[x_1,y_1]$$

$|PQ|=10=Q-P \Rightarrow |(x_1-1,\ y_1-1)|=10$ (1. rovnice)

$3x_1-4y_1+1=0$ (2. rovnice)

$$\Rightarrow x_1=\frac{4y_1-1}{3}$$

$$\left|\left(\frac{4y_1-1}{3}-1,\ y_1-1\right)\right| = 10$$

$$\left|\left(\frac{4(y_1-1)}{3},\ y_1-1\right)\right| = 10 = \left|\sqrt{\left(\frac{4(y_1-1)}{3}\right)^2+(y_1-1)^2}\right| = \left|\sqrt{\frac{16(y_1^2-2y_1+1)}{9}+y_1^2-2y_1+1}\right| =$$

$$= \left|\sqrt{\frac{16y_1^2-32y_1+16+9y_1^2-18y_1+9}{9}}\right| = \left|\sqrt{\frac{25y_1^2-50y_1+25}{9}}\right| = \left|\sqrt{\frac{(5y_1-5)^2}{9}}\right| = \left|\frac{5y_1-5}{3}\right|$$

$$\left|\frac{5y_1-5}{3}\right| = 10$$

i) $\frac{5y_1-5}{3} = 10$

$5y_1-5 = 30$

$5y_1 = 25$

$\underline{y_1 = 5} \Rightarrow \underline{x_1} = \frac{4y_1-1}{3} = \underline{\frac{19}{3}}$

ii) $\frac{-5y_2+5}{3} = 10$

$-5y_2+5 = 30$

$-5y_2 = 25$

$\underline{y_2 = -5} \Rightarrow \underline{x_2} = \frac{-20-1}{3} = \underline{\frac{-21}{3}}$

<u>§9. Odchylka</u>

Def.: Nechť $\vec{u},\vec{v}$ jsou 2 nenulové vektory. <u>Odchylku dvou vektorů</u> $\vec{u},\vec{v}$ označujeme $\varphi = |\angle\,\vec{u},\vec{v}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$, $k \in \mathrm{R}^+ \Rightarrow |\angle\,\vec{u},\vec{v}| = 0^0$
2. Je-li $\vec{u} \neq k\cdot\vec{v}$ pro $\forall k \in \mathrm{R} - \{0\} \Rightarrow$ odchylkou vektorů $\vec{u},\vec{v}$ rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn.: $0^0 \le |\angle\vec{u},\vec{v}| \le 180°$

V.9.1.: Nechť $\vec{u},\vec{v}$ jsou 2 nenulové vektory. Pak platí: $\boxed{|\angle\vec{u},\vec{v}| = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$

[Dk. Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn.: Jestliže jsou dva podprostory A, $B \subseteq E_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je $0°$.

A) Odchylka dvou přímek v E_2

Pozn.: Nechť p,q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p,q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.
$0^0 \leq |\angle p,q| \leq 90°$

V.9.2.: Nechť $p(A,\vec{u}),\ q(B,\vec{v})$ jsou 2 různoběžné přímky.
Pak platí: $\boxed{|\angle p,q| = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$
[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce $y=\arccos x$ má pro definiční obor $\langle 0;1\rangle$ obor hodnot $\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$.]

V.9.3.: Nechť $p: ax+by+c=0 \quad ([a,b]\neq[0;0])$
$q: ex+fy+g=0 \quad ([e,f]\neq[0;0])$
jsou 2 různoběžné přímky, a nechť $\vec{n}_p=(a,b),\ \vec{n}_q=(e,f)$.
Pak platí: $\boxed{|\angle p,q| = \arccos\frac{|\vec{n}_p\cdot\vec{n}_q|}{|\vec{n}_p|\cdot|\vec{n}_q|}}$.

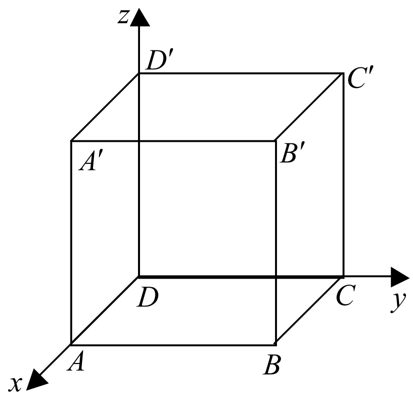
V.9.4.: Nechť $p(A,\vec{u}),\ q: ax+by+c=0,\ [a,b]\neq[0;0]$ jsou 2 přímky a nechť $\vec{n}=(a,b)$.
Pak platí: $\boxed{|\angle p,q| = \arcsin\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}}$

B) Odchylka dvou přímek v E_3

Pozn.: Nechť p,q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.
Nechť p,q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\angle p',q'|$, kde $p' \parallel p,\ q' \parallel q$ a p',q' jsou různoběžky.
$0^0 \leq |\angle p,q| \leq 90°$

V.9.5.: Nechť $p(A,\vec{u}), q(B,\vec{v})$ jsou 2 různoběžné nebo mimoběžné přímky.
Pak platí: $\boxed{|\angle p,q| = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$.

Př.: Určete odchylku přímek $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'C}$ krychle $ABCDA'B'C'D'$.



$A[1;0;0]$, $A'[1;0;1]$,
$B[1;1;0]$, $B'[1;1;1]$,
$C[0;1;0]$, $C'[0;1;1]$,
$D[0;0;0]$, $D'[0;0;1]$,
$\overrightarrow{A'B} = (0;1;-1)$, $\overrightarrow{BC'} = (-1;0;1)$

$$\Rightarrow \left|\angle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}\right| = \arccos\frac{|-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left|\angle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}\right| = \arccos\frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

C) Odchylka přímky od roviny v E_3

Pozn.: Nechť p,α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné.
Pak platí: $|\angle p,\alpha| = |\angle p,q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subseteq \beta$.
$0^0 \le |\angle p,\alpha| \le 90°$

V.9.6.: Nechť $p(A,\vec{u})$ je přímka, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $[a,b,c] \ne [0;0;0]$ rovina a nechť $\vec{n} = (a,b,c)$.
Pak platí: $\boxed{|\angle p,\alpha| = \arcsin\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}}$.

Př.: Určete $|\angle p,\alpha|$, $p = \overleftrightarrow{AB}$; $A[1;1;-2]$, $B[-1;0;1]$, $\alpha : 2x - 3y + z + 4 = 0$

$\vec{n}_\alpha = (2;-3;1)$, $\vec{n}_p = (-2;-1;1)$

$$|\angle p,\alpha| = \arcsin\frac{|-4+3+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \arcsin 0 = 0° \Leftarrow \underline{p \parallel \alpha}$$

D) Odchylka dvou rovin v E_3

Pozn.: Nechť α,β jsou 2 různoběžné roviny.
Pak platí: $|\angle \alpha,\beta| = |\angle p,q|$, kde $p \subseteq \alpha$, $q \subseteq \beta$; $p \perp r$, $q \perp r$, $r \in \alpha \cap \beta$.
$0^0 \le |\angle \alpha,\beta| \le 90°$

V.9.7.: Nechť $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $[a,b,c] \ne [0;0;0]$,
$\beta : ex + fy + gz + h = 0$, $[e,f,g] \ne [0;0;0]$

jsou 2 roviny. Nechť $\vec{n}_\alpha = (a,b,c),\ \vec{n}_\beta = (e,f,g)$.

Pak platí: $\boxed{|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}}$.

Př.: Určete $|\angle \alpha, \beta|$

$\alpha: 2x + 3y + z - 5 = 0,$

$\beta: x - y + z + 12 = 0$

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2-3+1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \arccos 0 = \underline{90^\circ}$$

Př.: Určete rovnici přímky, která má od přímky $x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y.

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|};\ \vec{n} = (1; -2) \Rightarrow \frac{|u_1 - 2u_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[0; y]: -2y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = 1: \frac{|u_1 - 2|}{\sqrt{u_1^2 + 1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|u_1 - 2| = \frac{\sqrt{u_1^2 + 1} \cdot \sqrt{15}}{2}$$

1) $u_1 - 2 = \dfrac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{u_1^2 + 1}}{2}$

$$2u_1 - 4 = \sqrt{15} \cdot \sqrt{u_1^2 + 1}$$

$$4u_1^2 - 16u_1 + 16 = 15u_1^2 + 15$$

$$-11u_1^2 - 16u_1 + 1 = 0$$

$$11u_1^2 - 16u_1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_{11} = \frac{16 + 2\sqrt{53}}{2},\ u_{12} = \frac{16 - 2\sqrt{53}}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{p_1 = \left\{ \left[\frac{16 + 2\sqrt{53}}{2} t; \frac{3}{2} + t \right], t \in R \right\}}$$

$$\underline{p_2 = \left\{ \left[\frac{16 + 2\sqrt{53}}{2} t; + \frac{3}{2} + t \right], t \in R \right\}}$$

2) $2-u_1=\dfrac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{u_1^2+1}}{2}$

$4-2u_1=\sqrt{15}\cdot\sqrt{u_1^2+1}$

$4u_1^2-16u_1+16=15u_1^2+15\Rightarrow$ stejné jako v případě 1)

Příklady

1) Jsou dány body $A[2;1]$, $B[4;2]$, $C[-1;3]$. Zjistěte odchylku přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{AC}$ a velikost úhlu α v trojúhelníku *ABC*.

Skalární součin: $\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2;1)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-3;2)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{c}\right|=\sqrt{5}$

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{13}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\varphi$

$-6+2=\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\varphi$

$\cos\varphi=\dfrac{-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}{65}$

$\varphi=\arccos\dfrac{-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}{65}=\underline{119°45'}$ - tupý úhel

$\Rightarrow$ odchylka je $180°-119°45'=\underline{60°15'}$

2) Jsou dány body $A[33;4]$, $B[-23;37]$, $C[-35;42]$ Určete osu úhlu *ACB*.

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{68^2+38^2}=78$

$\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=6\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\Rightarrow\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}+6\cdot\overrightarrow{CB}=(140;-68)$ (směrový vektor osy úhlu)

$\Rightarrow\underline{o=\{[-35+140t;42-68t],\,t\in R\}}$

XII. ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ

§1. Transformace souřadných soustav

Pozn.: V dalším budeme studovat kvadratické útvary v E_2, v níž bude dána buď ASS určená počátkem a dvěma lineárně nezávislými vektory, nebo KSS, kdy jsou bázové vektory navíc navzájem kolmé a stejně dlouhé.

Pozn.: Nechť $(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ je ASS (1), $P[0;0]_{(1)}, \vec{e}_1(1;0)_{(1)}, \vec{e}_2(0;1)_{(1)}$.

Platí: $X=[x,y]_{(1)} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2$

$\vec{u}=(u_1,u_2)_{(1)} \Leftrightarrow \vec{u}=u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2$

Nechť $(Q,\vec{u},\vec{v})$ je ASS (2), $Q[0;0]_{(2)}, \vec{u}(1;0)_{(2)}, \vec{v}(0;1)_{(2)}$,

$Q[q_1,q_2]_{(1)}, \vec{u}(u_1,u_2)_{(1)}, \vec{v}(v_1,v_2)_{(1)}$

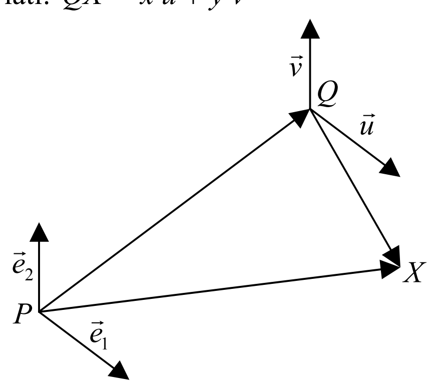
Platí: $\overrightarrow{PQ}=q_1\vec{e}_1+q_2\vec{e}_2$

$\vec{u}=u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2$

$\vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2$

Nechť $X[x,y]_{(1)}, X[x',y']_{(2)}$ je libovolný bod v E_2.

Platí: $\overrightarrow{QX}=x'\vec{u}+y'\vec{v}$



Platí: $\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QX}$

Dosazení: $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=q_1\vec{e}_1+q_2\vec{e}_2+x'\vec{u}+y'\vec{v}=q_1\vec{e}_1+q_2\vec{e}_2+x'(u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2)+$
$+y'(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2)=\vec{e}_1(q_1+x'u_1+y'v_1)+\vec{e}_2(q_2+x'u_2+y'v_2)$

$\vec{e}_1:\quad x=q_1+x'u_1+y'v_1$

$\vec{e}_2:\quad y=q_2+x'u_2+y'v_2$

někdy píšeme společně: $\boxed{X=Q+x'\vec{u}+y'\vec{v}}$

V.1.1.: Nechť $(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ je ASS (1), $(Q,\vec{u},\vec{v})$ je ASS (2); $Q[q_1,q_2]_{(1)}, \vec{u}(u_1,u_2)_{(1)}, \vec{v}(v_1,v_2)_{(1)}$, $\vec{e}_1(1;0), \vec{e}_2(0;1)$. Nechť $X\in E_2$; $X[x,y]_{(1)}, X[x',y']_{(2)}$.
Pak souřadnice bodu X v soustavách (1), (2) jsou vázány vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= q_1 + x'u_1 + y'v_1 \\ y &= q_2 + x'u_2 + y'v_2 \end{aligned}}$$

[Dk. V předchozí poznámce]

Def.: Rovnice z V.1.1. nazýváme <u>transformačními rovnicemi mezi souřadnými soustavami</u> (1) a (2) pro souřadnice bodu.

Pozn.: Transformační rovnice zapsané maticovou rovnicí:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

Označme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = Q, \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = A, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X' \Rightarrow X = Q + A \cdot X'$.

Matice A se nazývá <u>maticí přechodu</u> od soustavy (2) k soustavě (1).
Matice A je vždy regulární, tj. její determinant je různý od 0 ($|A| \neq 0$) (neboť $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé).

Pozn.: Násobení matic:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 3 + d \cdot 4 & a \cdot 5 + b \cdot 6 + \ldots \\ e \cdot 1 + f \cdot 2 + g \cdot 3 + h \cdot 4 & e \cdot 5 + f \cdot 6 + \ldots \\ \ldots & \ldots \\ i \cdot 1 + j \cdot 2 + \ldots & i \cdot 5 + \ldots \end{pmatrix}$$

Násobení matic není komutativní, násobit je možné pouze ty matice, z nichž první matice má stejný počet sloupců jako druhá matice řádků.

Př.: Maticovými operacemi vyjádřete nové souřadnice pomocí starých.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad / \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ zleva, neboť } A^{-1} \cdot A = E$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{u_1 v_2 - u_2 v_1}_{|A|}} \cdot \begin{pmatrix} v_2 & -u_2 \\ -v_1 & u_1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

Dosazení: $$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} & \dfrac{-v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ \dfrac{-u_2}{u_2 v_1 - u_1 v_2} & \dfrac{u_1}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right]}$$

Př.: Dáno: ASS $(Q, \vec{u}, \vec{v})$, která má vzhledem k dané ASS souřadnice $Q[1;0]$, $\vec{u}(1;0)$, $\vec{v}(1;1)$. Jaké souřadnice bude mít $X[x, y]$ vzhledem k soustavě $(Q, \vec{u}, \vec{v})$?

Hledané souřadnice: $[x', y']_{(Q, \vec{u}, \vec{v})}$

Transformační rovnice:
$x = 1 + 1x' - 1y' \Rightarrow x' = x - y - 1$
$y = 0 + 0x' + 1y' \Rightarrow y' = y$
$\Rightarrow \underline{X = [x - y - 1;\ y]_{(Q,\vec{u},\vec{v})}}$

Pozn.: <u>Odvození transformačních rovnic pro souřadnice vektoru</u>:
Dáno: $\langle P,\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle - (1), \langle Q,\vec{u},\vec{v}\rangle - (2), Q[q_1,q_2]_{(1)}, \vec{u}(u_1,u_2)_{(1)}, \vec{v}(v_1,v_2)_{(1)}$
libovolný vektor $\vec{w}(w_1,w_2)_{(1)} = (w_1',w_2')_{(2)}$
$\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 = w_1'\vec{u} + w_2'\vec{v} = w_1'(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2) + w_2'(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) =$
$= \vec{e}_1(w_1'u_1 + w_2'v_1) + \vec{e}_2(w_1'u_2 + w_2'v_2)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{e}_1: & w_1 = w_1'u_1 + w_2'v_1 \\ \vec{e}_2: & w_2 = w_1'u_2 + w_2'v_2 \end{array}}$$

§2. Definice kuželosečky

Def.: Nechť v E_2 je dána ASS $\langle P,\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle$.
Nechť je dána rovnice $\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$ (*), kde $a_{ij} \in R; i,j \in \{1,2,3\}, a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0\ ([a_{11},a_{12},a_{22}] \neq [0,0,0])$.
Pak množinu všech bodů $X[x,y] \in E_2$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (*), nazýváme <u>kuželosečkou</u>.

Pozn.: a) Jsou-li dány 2 rovnice, které se liší jen reálným násobkem, jsou považovány za 2 rovnice téže kuželosečky.
b) Jsou-li dány 2 rovnice typu (*) aniž by jedna byla násobkem druhé, pak příslušné kuželosečky považujeme za různé, i kdyby měly stejnou množinu řešení (např. $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{bod}\,[0;0]$, $2x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{bod}\,[0;0]$).

Pozn.: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Jestliže pro všechny prvky $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ platí $a_{ij} = a_{ji}$, pak <u>matici</u> A nazveme <u>symetrickou</u> (prvky symetrické podle hlavní diagonály jsou stejné).

Def.: Nechť k je kuželosečka daná rovnicí (*). Symetrickou maticí $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$
nazveme <u>maticí kuželosečky</u> k.

Pozn.: <u>Maticový zápis rovnice kuželosečky:</u>

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ nebo } \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Př.: Napište matici kuželosečky $x^2 - 2xy + 3y + 1 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Pozn.: Vyhovují-li rovnici kuželosečky souřadnice alespoň jednoho bodu, nazýváme <u>kuželosečku bodově reálnou</u>.
Nevyhovují-li rovnici kuželosečky souřadnice žádného bodu, nazýváme <u>kuželosečku formálně reálnou</u>.

§3. Průsečík přímky s kuželosečkou

Pozn.: Je dána kuželosečka $k: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ a přímka
$p: p(B, \vec{u})$
$B[b_1, b_2], \vec{u}(u_1, u_2)$
$x = b_1 + tu_1,\ y = b_2 + tu_2$
$x^2 = b_1^2 + 2tb_1u_1 + t^2u_1^2$
$y^2 = b_1^2 + 2tb_2u_2 + t^2u_2^2$
$xy = b_1b_2 + t(b_1u_2 + b_2u_1) + t^2 \cdot u_1u_2$
Roznásobením a vytknutím t^2, t^1, t^0 získáváme rovnici $\boxed{At^2 + 2Bt + c = 0}$

Diskuze: 1) $A = 0 \Rightarrow 2Bt + C = 0$: a) $B \neq 0 : t = -\dfrac{c}{2B}$ -1 řešení, kuželosečka má s přímkou 1 společný bod

b) $B = 0$:

i) $C \neq 0 : 0t \neq 0 \Rightarrow$ kuželosečka nemá s přímkou společný bod

ii) $C = 0 : 0t = 0 \Rightarrow$ každý bod kuželosečky leží na přímce

2) $A \neq 0 : D = 4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$

a) $B^2 > AC \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ 2 společné body
b) $B^2 = AC \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ 1 společný bod
c) $B^2 < AC \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ žádný společný bod

Př.: Zjistěte vzájemnou polohu přímky p a kuželosečky k

$p: y = 2x - 1$

$k: ax^2 - y = 0$

I. způsob: pomocí obecné rovnice – dosazení z 1. rovnice za y do druhé

II. způsob: převedení na parametrickou rovnici

$p: y = 2x - 1$

$x = t,\ y = 2t - 1$

$p \cap k: at^2 - 2t + 1 = 0$

1) $a = 0: 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 1 řešení (ale nejedná se o kuželosečku)

2) $a \neq 0: D = 4 - 4a$

a) $a > 1 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ 0 řešení

b) $a = 1 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ 1 řešení: $t = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow$ průsečík $[1;1]$

c) $a < 1 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ 2 řešení: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4a}}{2a} = a \pm \frac{\sqrt{1-a}}{a}$

$\Rightarrow$ průsečíky $\left[a \pm \frac{\sqrt{1-a}}{a}; 2a \pm \frac{2\sqrt{1-a}}{a} - 1 \right]$

§4. Kanonický tvar rovnice kuželosečky

V.4.1.!: Nechť $k: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ je kuželosečka.

Každou kuželosečku lze vhodnou transformací souřadné soustavy převést na jeden z následujících 9 tvarů, které nazýváme kanonickými rovnicemi kuželosečky:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(4) $y^2 = 2px,\ p > 0$

(5) $y^2 = k^2x^2,\ k > 0$

(6) $y^2 = -k^2x^2,\ k > 0$

(7) $y^2 = r^2,\ r > 0$

(8) $y^2 = -r^2,\ r > 0$

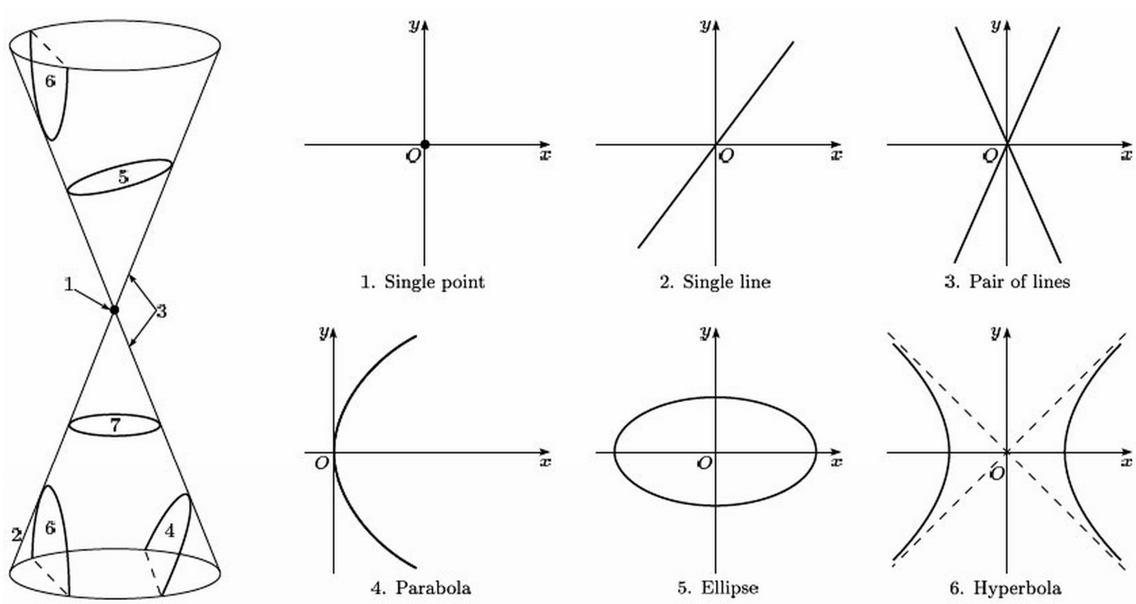
(9) $y^2 = 0$

[Dk.: členu s xy se zbavíme otočením soustavy souřadnic, všechny ostatní členy upravíme posunutím kuželosečky.]

Def.: Kuželosečku o rovnici (1) nazveme elipsou, čísla a,b poloosami elipsy (obr.5).
Kuželosečku o rovnici (2) nazveme imaginární elipsou (kuželosečka formálně reálná).
Kuželosečku o rovnici (3) nazveme hyperbolou, čísla a,b poloosami hyperboly (obr.6).
Kuželosečku o rovnici (4) nazveme parabolou, číslo p parametr paraboly (obr.4).
Kuželosečka o rovnici (5) jsou 2 různoběžky (obr.3).
Kuželosečka o rovnici (6) je bod (obr.1).
Kuželosečka o rovnici (7) jsou 2 různé rovnoběžky (řez roviny válcovou plochou).
Kuželosečka o rovnici (8) je prázdná množina (2 imaginární rovnoběžky), (kuželosečka formálně reálná).
Kuželosečka o rovnici (9) je dvojná přímka (obr.2).

Def.: Speciálním případem elipsy pro $a = b$ je kružnice.

Pozn.: Všechny kuželosečky můžeme získat jako řez roviny kuželovou plochou.



Def.: Nechť k je kuželosečka, A její matice.
Kuželosečku nazýváme regulární $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ (tedy matice A je regulární).
Kuželosečku nazýváme singulární $\Leftrightarrow |A| = 0$ (tedy matice A je singulární).

Pozn.: Kuželosečky 1.-4. z V.4.1. jsou regulární, 5.-9. singulární.

Příklady

1) Je dána kuželosečka $k: 4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y + q = 0$. Určete, pro která $q \in R$ je regulární a pro která singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & q \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 4q + 16 + 16 - 16 - 16 - 4q = 0$$

$\Rightarrow$ kuželosečka je singulární pro všechna $q \in R$.

§5. Regulární kuželosečky v základní poloze

Pozn.: V tomto paragrafu se budeme zabývat pouze KSS, tedy se nebudeme zabývat imaginární elipsou.

Def.: Je dána kuželosečka *k*. Přímka, podle níž je *k* osově souměrná, se nazývá osa (souměrnosti) kuželosečky *k*.

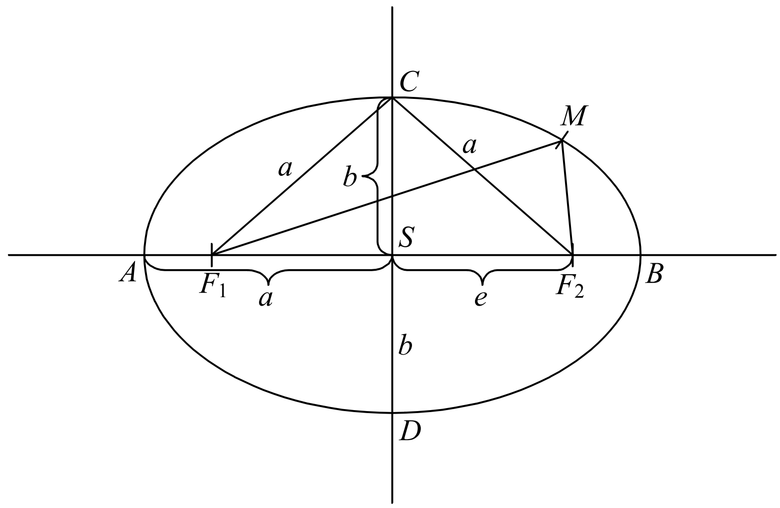
Def.: Řekneme, že kuželosečka *k* je v základní poloze, jestliže osy kuželosečky jsou rovnoběžné se souřadnými osami (není natočení kuželosečky, tedy $a_{12} = 0$).

Pozn.: Každou regulární kuželosečku lze vhodnou transformací soustavy souřadnic (otočením) převést do základní polohy.

A) Elipsa

Pozn.: V obecné rovnici $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ platí, že $\operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} a_{22}$.

Def.: Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů v rovině, které se nazývají ohniska, stalý součet vzdáleností (roven $2a$).



S – střed, F_1, F_2 – ohniska
A, B – hlavní vrcholy, C, D – vedlejší vrcholy
$\overleftrightarrow{AB}$ – hlavní osa, $\overleftrightarrow{CD}$ – vedlejší osa
$a = |AS| = |BS|$ – hlavní poloosa, $b = |CS| = |DS|$ – vedlejší poloosa
$e = |FS_1| = |F_2S|$ – <u>(lineární) excentricita</u> (výstřednost)

Platí: $\boxed{a^2 = b^2 + e^2}$, $\boxed{|F_1M| + |F_2M| = 2a}$, kde M – libovolný bod elipsy.

Pozn.: <u>Středové rovnice elipsy:</u> $S[0;0] \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (kanonická rovnice)

$$S[m,n] \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Pozn.: <u>Kružnice</u> je spec. případem elipsy pro $a = b$:

$$S[0;0] \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$S[m,n] \Rightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

Pozn.: Odvození kanonického tvaru rovnice elipsy (důkaz V.4.1):

$M[x,y]$, $F_1[-e,0]$, $F_2[e,0]$

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \quad /^2$$

$$(x-e)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2}$$

$$(2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2)(2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2)^2 \cdot 4((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)$$

$$4a^2x^4 + x^2e^2 + 2y^2 - 2x^2a^2 + e^2x^2 + e^4 + e^2y^2 - 2a^2e^2 + y^2x^2 + y^2 + y^2e^2 + y^4 - 2a^2y^2$$

$$-2a^2x^2 - 2a^2e^2 - 2a^2y^2 + 4a^4 = (x^2 + 2xe + e^2 + y^2)\cdot(x^2 - 2xe + e^2 + y^2)$$

$$4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2e^2 = -4x^2e^2$$
$$a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2e^2 = -x^2e^2$$
$$a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2(a^2 - b^2) = -x^2(a^2 - b^2)$$
$$-a^4 + a^2b^2 = -x^2a^2 + x^2b^2$$
$$-a^2y^2 + a^2b^2 - x^2b^2 = 0$$
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Př.: Zjistěte, zda rovnice $25x^2 + 9y^2 + 400x - 36y + 1411 = 0$ je rovnicí elipsy. V kladném případě určete střed, poloosy, ohniska, hlavní a vedlejší poloosy, vrcholy.

$$25(x^2 + 16x) + 9(y^2 - 4y) + 1411 = 0$$
$$25((x+8)^2 - 64) + 9((y-2)^2 - 4) + 1411 = 0$$
$$25(x+8)^2 - 1600 + 9(y-2)^2 - 36 + 1411 = 0$$
$$25(x+8)^2 + 9(y-2)^2 = 225$$
$$\frac{(x+8)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

$\Rightarrow$ poloosy: $\left.\begin{matrix} a = 5 \\ b = 3 \end{matrix}\right\} e^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow e = 4$

střed: $S[-8; 2]$

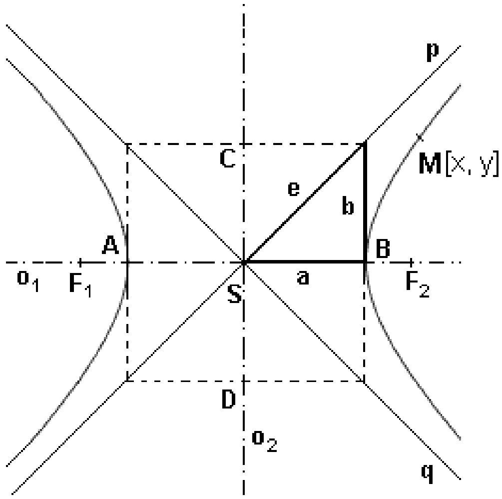
ohniska: $F_1 = [-12; 2]$, $F_2 = [-4; 2]$

vrcholy: $A = [-11; 2]$, $B = [-5; 2]$, $C = [-8; 7]$, $D = [-8; -3]$

B) Hyperbola

Pozn.: V obecné rovnici $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ platí, že $\operatorname{sgn} a_{11} \neq \operatorname{sgn} a_{22}$.

Def.: Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů v rovině (ohnisek), stejnou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností.



S – střed, F_1, F_2 – ohniska
A, B – hlavní vrcholy, C, D – vedlejší vrcholy
$\overleftrightarrow{AB}$ – hlavní osa, $\overleftrightarrow{CD}$ – vedlejší osa
a – hlavní poloosa, b – vedlejší poloosa
e – (lineární) excentricita (výstřednost)
p, q – asymptoty hyperboly

Platí: $\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$, $\boxed{\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a}$, kde M – libovolný bod hyperboly.

Pozn.: Středové rovnice hyperboly: $S[0;0] \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (kanonická rovnice)

$$S[m,n] \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Pozn.: Rovnice asymptot: $S[0;0] \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$

$$S[m,n] \Rightarrow y - m = \pm\frac{b}{a}(x-m)$$

Pozn.: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ hlavní osa hyperboly na ose x

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow$ hlavní osa hyperboly na ose y

Pozn.: Odvození kanonického tvaru rovnice elipsy (důkaz V.4.1):

$$\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a$$

$$M[x,y],\ F_1[-e,0],\ F_2[e,0]$$

$$\left|\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = \sqrt{(e-x)^2} + 2a \quad /^2$$

$$(e+x)^2 + y^2 = (e-x)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$(e+x)^2 + y^2 - (e-x)^2 - y^2 - 4a^2 = 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} \quad /^2$$

$$16a^4 = 16a^2 \cdot ((e-x)^2 + y^2)$$

$$(2a^2 - x^2 - y^2 - e^2)(2a^2 - x^2 - y^2 - e^2) = (x^2 + 2xe + e^2 + y^2)(x^2 - 2xe + e^2 + y^2)$$

$$4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2e^2 + x^4 + y^4 + e^4 + 2x^2y^2 + 2x^2e^2 + 2y^2e^2 =$$

$$= x^4 - 2x^3e + x^2e^2 + x^2y^2 + 2x^3e - 4x^2e^2 + 2xe^2 + 2ey^2 + e^2x^2 - 2xe^3 + e^4 + e^2y^2$$

$$+ y^2x^2 - 2xey^2 + y^2e^2 + y$$

$$= x^4 + 2x^2e^2 + 2x^2y^2 - 4x^2e^2 + e^4 + 2e^2y^2 + y^2$$

$$4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2e^2 + 4x^2e^2 = 0$$

$$a^2 - x^2 - y^2 - e^2 + \frac{x^2e^2}{a^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + e^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + e^2 + \frac{x^2(b^2 + a^2)}{a^2} = a^2$$

$$\frac{x^2a^2 + x^2b^2}{a^2} + x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = a^2$$

$$x^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} + x^2 + y^2 + b^2 = 0$$

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Př.!: Je dána kuželosečka $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$. Najděte středovou rovnici, střed, poloosy, ohniska, vrcholy, rovnice asymptot a hyperbolu načrtněte.

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 2y) - 124 = 0$$

$$9((x-2)^2 - 4) - 16((y-1)^2 - 1) - 124 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 36 - 16(y-1)^2 + 16 - 124 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 16(y-1)^2 = 144$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow S = [2;1]$$

$$\left.\begin{matrix} a = 4 \\ b = 3 \end{matrix}\right\} e^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow e = 5$$

ohniska: $[7;1], [-3;1]$

vrcholy: $[6;1], [-2;1]$

asymptoty:
$$(y-1)=\frac{3}{4}(x-2)$$
$$(y-1)=-\frac{3}{4}(x-2)$$

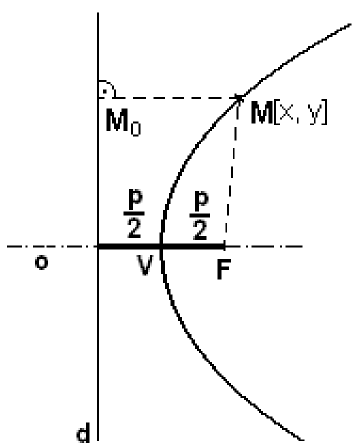
Př.: Napište středovou rovnici hyperboly se středem v počátku, která má hlavní poloosu $a=3$ a prochází bodem $M[5;2]$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{5^2}{3^2}-\frac{2^2}{b^2}=1$$
$$\Rightarrow b^2=\frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

C) Parabola

Pozn.: V obecné rovnici $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ platí, že buď $a_{11}=0$ nebo (vylučovací) $a_{22}=0$.

Def.: Parabola je množina bodů v rovině, které mají od pevného bodu (ohniska) a pevné přímky (řídící přímky), na níž tento bod neleží, stejnou vzdálenost.



V – vrchol paraboly, F – ohnisko, d – řídící přímka
p – parametr paraboly
o – osa paraboly

Platí: $\boxed{|MF|=|MM_0|}$, kde M – libovolný bod paraboly.

Pozn.: Vrcholové rovnice paraboly: $V[0;0] \Rightarrow y^2 = 2px$ (kanonická rovnice)

$V[m,n] \Rightarrow (y-n)^2 = 2p(x-m)$

Pozn.: Rovnice řídící přímky: $V[0;0] \Rightarrow x = -\frac{p}{2}$

$V[m,n] \Rightarrow x = m - \frac{p}{2}$

Pozn.: $y^2 = 2px \Rightarrow$ osa paraboly - osa x

$x^2 = 2py \Rightarrow$ osa paraboly - osa y

Pozn.: Odvození kanonického tvaru rovnice paraboly (důkaz V.4.1):

$|MF| = |MM_0|$, kde M_0 je kolmý průmět bodu M na řídící přímku.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Př.!: Určete vrchol, ohnisko, parametr a řídící přímku paraboly $y^2 - 7x + 6y - 19 = 0$.

$(y-3)^2 - 9 - 19 = 7x$

$(y-3)^2 = 7x + 28$

$(y-3)^2 = 7(x+4)$

$\Rightarrow V[-4;3],\ p = \frac{7}{2}$

$F\left[-\frac{9}{4};3\right]$

řídící přímka: $d: x = -4 - \frac{p}{2} \Rightarrow d: x = -\frac{23}{4}$

Př.: Určete útvar, jehož analytickým vyjádřením je rovnice:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$

$(x+1)^2 - 1 + y^2 + 4 = 0$

$(x+1)^2 + y^2 = -3 \Rightarrow$ imaginární kuželosečka

b) $x^2 - y^2 = 0$

$x^2 = y^2$

$x = \pm y,\ y = \pm x \Rightarrow$ 2 různoběžné přímky $(y = x,\ y = -x)$

c) $x^2 + y^2 = 0$

$x^2 = -y^2 \Rightarrow$ bod $[0;0]$

d) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$

$9(x^2 - 4x) - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$

$9(x-2)^2 - 36 - 16y^2 + 16 - 144 = 0$

$9(x-2)^2 - 16(y-1)^2 = -144$

$\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ hyperbola

e) $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$

$-(x^2 - 8x) + 3y - 10 = 0$

$(x+4)^2 = 6 + 3y$

$(x-4)^2 = 3(y+2) \Rightarrow$ parabola

Příklady

1) Jsou dány body $A[2;1]$, $B[3;0]$, $C[0;5]$. Najděte rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC.

$k: (x-m)^5 + (y-n)^2 = r^2$

$A, B, C \in k: \quad (2-m)^2 + (1-n)^2 = r^2$

$(3-m)^2 + (-n)^2 = r^2$

$(-m)^2 + (5-n)^2 = r^2$

(1) $4 - 4m + m^2 + 1 - 2n + n^2 = r^2$

(2) $9 - 6m + m^2 + n^2 = r^2$

(3) $m^2 + 25 - 10n + n^2 = r^2$

$(1)-(2): \quad -5 + 2m + 1 - 2n = 0$

$2m - 2n - 4 = 0$

$\underline{m - n - 2 = 0}$

$(2)-(3): \quad 9 - 6m - 25 + 10n = 0$

$-16 - 6m + 10n = 0$

$\underline{-3m + 5n - 8 = 0}$

$m = 2 + n$

$\Rightarrow -6 - 3n + 5n - 8 = 0$

$-14 + 2n = 0$

$\underline{n = 7} \Rightarrow \underline{m = 9}$

$r^2 = 9 - 54 + 81 + 49 = 85$

$\Rightarrow \underline{k: (x-9)^2 + (y-7)^2 = 85}$

§6. Tečna regulární kuželosečky

Def.: Přímka, která má s kuželosečkou k společný právě jeden bod T a neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky, se nazývá <u>tečna kuželosečky</u> a bod T její bod dotyku.

V.6.1.: <u>Obecná rovnice tečny kuželosečky:</u>
Nechť $T[x_T, y_T]$ je bod dotyku tečny t kuželosečky
$k: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Pak tečna t má obecnou rovnici
$t: (a_{11}x_T + a_{12}y_T + a_{13})x + (a_{12}x_T + a_{22}y_T + a_{23})y + a_{13}x_T + a_{23}y_T + a_{33} = 0$.

Pozn.: Maticový zápis rovnice tečny kuželosečky:

$$\begin{pmatrix} x_T & y_T & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ nebo } \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

V.6.2.!: <u>Rovnice tečen regulárních kuželoseček v základní poloze</u>
Bod dotyku $T[x_T, y_T]$

Kružnice:
$S[0;0]: xx_T + yy_T = r^2$
$S[m,n]: (x-m)(x_T-m) + (y-n)(y_T-n) = r^2$

Elipsa:
$S[0;0]: \dfrac{xx_T}{a^2} + \dfrac{yy_T}{b^2} = 1$
$S[m,n]: \dfrac{(x-m)(x_T-m)}{a^2} + \dfrac{(y-n)(y_T-n)}{b^2} = 1$

Hyperbola:
$S[0;0]: \dfrac{xx_T}{a^2} - \dfrac{yy_T}{b^2} = 1$
$S[m,n]: \dfrac{(x-m)(x_T-m)}{a^2} - \dfrac{(y-n)(y_T-n)}{b^2} = 1$

Parabola:
$V[0;0]: yy_T = p(x + x_T)$
$V[m,n]: (y-n)(y_T-n) = p(x + x_T - 2m)$

Př.!: Je dána kuželosečka $x^2 - y^2 = 24$. Napište rovnici tečny z bodu $Q[6;6]$.

$x^2 - y^2 = 24 \Rightarrow k: \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{y^2}{24} = 1$

$Q \in k$? $0 \neq 24 \Rightarrow Q$ neleží na k

Hledáme bod dotyku $T[x_T, y_T]$

tečna: $\dfrac{xx_T}{24} - \dfrac{yy_T}{24} = 1$

1) $Q \in t: \dfrac{6x_T}{24} - \dfrac{6y_T}{24} = 1$

2) $T \in k: \dfrac{x_T^2}{24} - \dfrac{y_T^2}{24} = 1$

$\Rightarrow$ soustava 2 rovnic o 2 neznámých, vyřešením dostáváme rovnici tečny
$\underline{t: 5x - y - 24 = 0}$.

Def.: Přímka, která má s kuželosečkou společné právě 2 body, se nazývá sečna kuželosečky, a spojnice těchto bodů je tětiva kuželosečky.

Příklady

1) V závislosti na parametru $c \in R$ rozhodněte o vzájemné poloze elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ a přímky $y = x + c$.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2 + 2xc + c^2}{3} = 1$$
$$3x^2 + 4x^2 + 8xc + 4c^2 = 12$$
$$7x^2 + 8xc + 4c^2 - 12 = 0$$
$$D = \sqrt{(8c)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (4c^2 - 12)} = \sqrt{64c^2 - 112c^2 + 336} = \sqrt{-48c^2 + 336} = 48(7 - c^2)$$

1) $D > 0 : c \in \left(-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right) \Rightarrow$ 2 řešení $\Rightarrow$ sečna
2) $D = 0 : c \in \left\{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right\} \Rightarrow$ 1 řešení $\Rightarrow$ tečna
3) $D < 0 : c \in R - \left(-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right) \Rightarrow$ 0 řešení $\Rightarrow$ vnější přímka

2) Napište rovnice tečen k dané kružnici $k : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ v průsečících k s přímkou $p : y = x + 3$.

Dosazení rovnice přímky do rovnice kružnice:
$$x^2 + (x+3)^2 - 6x - 4(x+3) + 3 = 0$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 - 6x - 4x - 12 + 3 = 0$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = 5$$
$$\Rightarrow T_1[0;3],\ T_2[2;5]$$

Matice kuželosečky: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$t_1 : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0+0-3 & 0+3-2 & 0-6+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(0)$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(0)\Rightarrow -3x+y-3=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1: 3x-y+3=0}$$

$$t_2: \begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 1 & -2\\-3 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(0)$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(0)\Rightarrow -x+3y+13=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2: x-3y+13=0}$$

3) Určete hodnotu parametru $p\in R$ tak, aby tečny vedené bodem $P[p,0]$ k elipse $4x^2+9y^2=36$ byly navzájem kolmé.

Rovnice tečny: $4xx_0+9yy_0=36$

dosazení bodu P: $4px_0+9\cdot 0y_0=36$ (rovnice poláry)

$$px_0=9\Rightarrow x_0=\frac{9}{p}\quad (p\neq 0)$$

dosazení do rovnice elipsy: $4\cdot\left(\dfrac{9}{p}\right)^2+9y^2=36$

$$4\cdot\frac{81}{p^2}+9y^2=36$$

$$9y^2+\frac{324}{p^2}=36$$

$$y_0=\pm\sqrt{\frac{36-\frac{324}{p^2}}{9}}$$

$$y_0=\pm\sqrt{4-\frac{36}{p^2}}$$

1. tečna: $4x\cdot\dfrac{9}{p}+9y\sqrt{4-\dfrac{36}{p^2}}=0$

2. tečna: $4x\cdot\dfrac{9}{p}-9y\sqrt{4-\dfrac{36}{p^2}}=0$

$$\vec{n}_{t_1} = \left(\frac{36}{p}; 9\sqrt{4-\frac{36}{p^2}}\right), \vec{n}_{t_2} = \left(\frac{36}{p}; -9\sqrt{4-\frac{36}{p^2}}\right)$$

$$\vec{n}_{t_1} \cdot \vec{n}_{t_2} = 16 \cdot \frac{81}{p^2} - 81\left(4-\frac{36}{p^2}\right) = 0$$

$$4 + 9 - p^2 = 0$$

$$\underline{p = \pm\sqrt{13}}$$

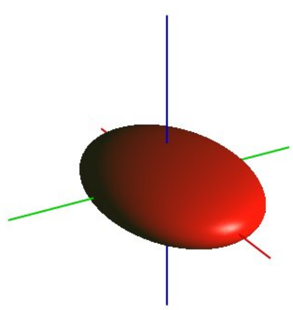
§7. Kvadriky

Def.: Kvadrikou rozumíme množinu všech bodů $X[x, y, z]$ v prostoru, jejichž souřadnice vyhovují rovnici:
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$,
kde alespoň jedno z čísel $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \neq 0$.

Pozn.: Regulární kvadriky

a) Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

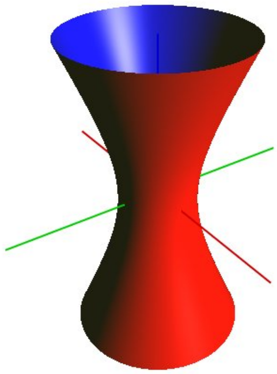
(Rotační elipsoid $(a = b)$ vznikne rotací elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ kolem osy z.)



b) Imaginární elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

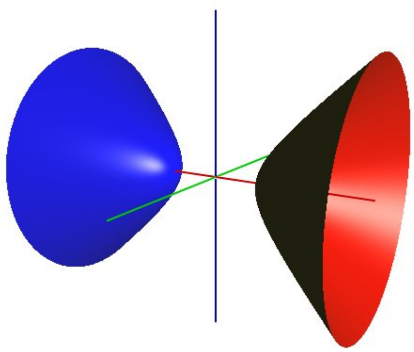
c) Jednodílný hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(Rotační jednodílný hyperboloid $(a = b)$ vznikne rotací hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ kolem osy z.)



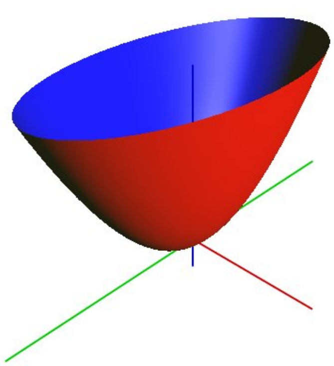
d) <u>Dvojdílný hyperboloid</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

(Rotační dvojdílný hyperboloid $(a=b)$ vznikne rotací hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, y=0$ kolem osy z.)



e) <u>Eliptický paraboloid</u>: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

(Rotační eliptický paraboloid $(a=b)$ vznikne rotací paraboly $z=\frac{x^2}{a^2}, y=0$ kolem osy z.)



f) Hyperbolický paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

(nemůže být rotační)