§1. Suprémum a infimum množiny, konvergence omezených monotónních posloupností

Def: Nechť $M \neq \emptyset, M \subset \mathbb{R}$ je množina.
Číslo $a \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme *horní závorou množiny* $M \Leftrightarrow \forall x \in M : x \leq a$.
Číslo $b \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme *dolní závorou množiny* $M \Leftrightarrow \forall x \in M : x \geq b$.

Pozn:

1) Zřejmě platí: číselná množina M je shora omezená alespoň 1 její horní závora.
2) Číslo $c \in \mathbb{R}$ není horní závorou množiny $M \Leftrightarrow \exists x \in M : x > c$

Def: Nechť $M \neq \emptyset; M \subset \mathbb{R}$ je množina. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme *suprémem množiny* M, jestliže je její nejmenší horní závorou, tzn. že platí:

1. $\forall x \in M : x \leq s$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M : x \leq t \Rightarrow t \geq s$

Zapisujeme $s = \sup\ M$.

Číslo $t \in \mathbb{R}$ nazýváme *infimem množiny* M, jestliže je její nejmenší horní závorou, tzn. že platí:

1. $\forall x \in M : x \geq t$
2. $\forall j \in \mathbb{R}, \forall x \in M : x \geq j \Rightarrow j \leq i$

Zapisujeme $s = \inf M$.

Pozn:

1) Nechť $s = \sup\ M \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, p < s : \exists x \in M : x > p$
   Nechť $t = \inf M \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, p > t : \exists x \in M : x < p$

2) Každá neprázdná množina má nejvýše 1 suprémum a 1 infimum.

V.1.1.: <u>Věta o suprému a infimu:</u>

1. Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má suprémum.
2. Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Pozn: V.6.1. se v některých teoriích pokládá za axiom množinyx . Jinde je toto tvrzení důsledkem tzv. Dedekindova axiomu.

Pozn: <u>Dedekindův axiom</u>
Nechť X, Y jsou dvě neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi:

1. $X \cup Y = \mathbb{R}$
2. $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$

pak k nim $\exists z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y$ pro $\forall x \in X; \forall y \in Y$.

V.1.2.: Každá shora omezená neklesající posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Dusledek: Každá omezená monotónní posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Př: Najděte suprémum a infimum následujících množin:

1. $M_1 = (-2; 3\rangle$
   sup $M_1 = 3$
   inf $M_1 = -2$
2. $M_2 = (-\infty; 1\rangle$
   sup $M_1 = 1$
   inf M_1 Neexistuje
3. $M_3 = \mathbb{R}^+$
   sup M_1 Neexistuje
   inf $M_1 = 0$
4. $M_4 = \{-1, 0, 1\}$
   sup $M_1 = 1$
   inf $M_1 = -1$

Př: 43/7.1:

Ukažte, že každé reálné číslo je limitou neklesající posloupnosti.

Nechť $a + n \in \mathbb{R}; a \in \langle 0, 1)\,, n \in \mathbb{Z}$ je libovolné reálné číslo.

Dekadický zápis a je $a = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \ldots$.

Limitou posloupnosti $\left[n; n + a_1 10^{-1}; n + a_1 10^{-1} + a_2^{-2}; n + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3}; \ldots\right]$.

Př: 44/2: Limitou je evidentně supremum.

Př: 44/3: Rozložme součet na úseky pro každé n: $\left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n+1}; \ldots \frac{1}{2^{n-1}-1}\right]$.

Součet každého úseku je evidentně $> 2^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}-1} > \frac{1}{2}$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ tedy existuje $n > 2x$, Ovšem součet prvních 2^{n+1} členů posloupnosti je $> n\frac{1}{2} \geq x$. *QED*