Kuželosečky ve speciální poloze - pracovní listy

Kružnice

Zadání úloh

1. Určete střed a poloměr kružnice, která prochází body $A = [4; 0]$, $B = [-4; -4]$ a $C = [5; -7]$.
2. Uvažujme body $A = [3; 1]$, $B = [-9; 6]$ a $C = [-9; 1]$. Určete střed a poloměr kružnice, která je vepsaná trojúhelníku ABC.
3. Najděte rovnici kružnice, která má střed $S = [-2; 3]$ a na přímce $p : 3x - 4y + 3 = 0$ vytíná tětivu délky 8.
4. Najděte rovnici kružnice, která se dotýká souřadnicové osy x v bodě $T = [2; 0]$ a prochází bodem $A = [-4; 2]$.
5. Najděte rovnice všech kružnic, které mají střed na přímce $p : 5x + y + 12 = 0$ a dotýkají se obou souřadnicových os.
6. Uvažujme body $A = [1; 2]$, $B = [1; -4]$ Vyšetřete, co je množinou všech bodů X v rovině, pro něž platí $|AX| = 2\,|BX|$.

Návody, výsledky a komentáře

1. Výpočet lze vést pomocí nalezení průsečíku os dvou ze zadaných tětiv hledané kružnice či pomocí hledání její středové rovnice, což vede na problém řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých. Výsledek: $S = [1; -4]$, $r = 5$.

2. Výpočet lze vést pomocí nalezení průsečíku os dvou z jeho vnitřních úhlů. Všimneme-li si však, že zadaný trojúhelník má u vrcholu C pravý úhel, přičemž jeho odvěsna AC je „vodorovná“ a odvěsna BC je „svislá“, můžeme si řešení úlohy numericky zjednodušit. Výsledek: $S = [-7; 3]$, $\rho = 2$.

3. Nejprve zjistíme, že $|Sp| = 3$. Poloměr hledané kružnice pak určíme jako délku přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek 3 a 4. Výsledek: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

4. Střed hledané kružnice leží jednak na ose úsečky AT a dále na přímce o rovnici $x = 2$, která je kolmicí k ose x vedenou bodem T. Výsledek: $(x-2)^2 + (y-10)^2 = 100$.

5. Střed hledané kružnice leží jednak na přímce p a dále na jedné z os úhlů, které souřadnicové osy společně svírají, tzn. na přímce $y = x$ nebo na přímce $y = -x$. Úloha má proto dvě řešení: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ a $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

6. Po dosazení do zadání získáme rovnici
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\left[(x-1)^2 + (y+4)^2\right] .$$
Jejími ekvivalentními úpravami dostaneme
$$(x-1)^2 + (y+6)^2 = 16\,,$$
což je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [1; -6]$ a poloměrem $r = 4$. Poznamenejme, že se jedná o tzv. Apolloniovu[1] kružnici.

[1] *Apollónios z Pergy* - starověký řecký geometr a matematik, který žil okolo roku 200 př. n. l.

Elipsa

Zadání úloh

1. Určete délky poloos a excentricitu elipsy, která má vzdálenost mezi hlavním a vedlejším vrcholem $2\sqrt{34}$ a vzdálenost mezi ohniskem a vedlejším vrcholem 10.

2. Najděte rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné se souřadnicovými osami, střed v bodě $[-5; -12]$ a dva ze svých vrcholů na souřadnicových osách. Najděte všechna řešení této úlohy.

3. Určete rovnici elipsy, která má střed v počátku soustavy souřadnic, její vedlejší vrcholy a ohniska tvoří čtverec s úhlopříčkou délky 2 a její osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Najděte všechna řešení této úlohy.

4. Najděte rovnici elipsy, která má ohniska $F = [4; -1]$ a $G = [0; -1]$ a prochází bodem $K = \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

5. Určete rovnici elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, má ohnisko $F = [3; -2]$ a vedlejší vrchol $C = [-1; 1]$. Dále určete souřadnice ostatních jejích vrcholů a ohnisek. Najděte všechna řešení této úlohy.

6. Uvažujme elipsu o rovnici
$$4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0\,.$$
Najděte její střed a vypočtěte obsah kosočtverce určeného jejími vrcholy.

Návody, výsledky a komentáře

Označme a délku hlavní poloosy, b délku vedlejší poloosy a e excentricitu uvažované elipsy v každé ze zadaných úloh. Platí tedy $a^2 = b^2 + e^2$.

1. Dle zadání platí $2\sqrt{34} = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $a = 10$. Odtud máme $b = 6$. Konečně $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 8$.

2. Zadání vlastně říká, že souřadnicové osy jsou tečnami hledané elipsy. Proto vzdálenost středu od souřadnicových os určuje délky poloos této elipsy. Úloha tedy má jediné řešení, kterým je „stojatá“ elipsa
$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y+12)^2}{144} = 1\,.$$

3. Dle zadání platí $b = e = 1$, takže $a = \sqrt{2}$. Úloha má tedy dvě řešení
$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \qquad \text{a} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\,.$$

4. Vzhledem k tomu, že úsečka FG je „vodorovná“, jedná se o „ležatou“ elipsu se středem v bodě $[2;-1]$ ($e = 2$). Dle definice platí $|FK| + |GK| = 2a$. Odtud vypočteme, že $a = 3$. Konečně $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5}$. Výsledek:
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1\,.$$

5. Vzhledem k poloze zadaných bodů vyhoví „ležatá“ elipsa, kde C je „horní“ vrchol a F „pravé“ ohnisko a „stojatá“ elipsa, kde C je „levý“ vrchol a F „dolní“ ohnisko. V prvním případě má hledaná elipsa rovnici
$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1\,,$$
hlavní vrcholy $A = [-6;-2]$, $B = [4;-2]$, druhý vedlejší vrchol $D = [-1;-5]$ a druhé ohnisko $G = [-5;-2]$. Ve druém případě má hledaná elipsa rovnici
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1\,,$$
hlavní vrcholy $A = [3;-4]$, $B = [3;6]$, druhý vedlejší vrchol $D = [7;1]$ a druhé ohnisko $G = [3;4]$.

6. Středová rovnice uvažované elipsy je
$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1\,,$$
její střed tedy je $[4;-1]$, poloosy mají délky $a = 3$, $b = 2$. Kosočtverec, jehož obsah máme určit, je tvořen čtyřmi shodnými pravoúhlými trojúhelníky o odvěsnách délek a a b. Jeho obsah je tudíž roven
$$4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab = 12\,.$$

Hyperbola

Zadání úloh

1. Najděte rovnici hyperboly, která má střed $S = [-3; 4]$, ohnisko $G = [-3; -9]$ a vrchol $A = [-3; 16]$.

2. Určete střed, ohniska , vrcholy a asymptoty hyperboly, která má rovnici
$$16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 596 = 0\,.$$

3. Najděte rovnice všech hyperbol, které mají osy totožné se souřadnicovými osami a procházejí body $K = [3; 2]$ a $L = \left[-5; 2\sqrt{3}\right]$.

4. Najděte rovnici hyperboly, která má asymptoty $a_1 : \ 3x - 4y - 6 = 0$ a $a_2 : \ 3x + 4y - 6 = 0$ a ohnisko $F = [2; 5]$.

5. Najděte střed, délky poloos, excentricitu a asymptoty hyperboly, která má rovnici $xy - 3x + y - 5 = 0$.

6. Najděte rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $F = [-3; 4]$ a $G = [-1; 2]$, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Návody, výsledky a komentáře

Označme a délku hlavní poloosy, b délku vedlejší poloosy a e excentricitu uvažované hyperboly v každé ze zadaných úloh. Platí tedy $e^2 = a^2 + b^2$.

1. Dle zadání platí $a = |AS| = 12$ a $e = |GS| = 13$. Odtud vychází $b = 5$, takže hledaná rovnice je tvaru
$$-\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{144} = 1\,.$$

2. Pomocí doplnění na čtverec dostaneme středovou rovnici tvaru
$$\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{64} = 1\,.$$
Takže $S = [1; -2]$, $a = 6$, $b = 8$, tedy $e = 10$. Uvažovaná hyperbola má vrcholy $A = [-5; -2]$, $B = [7; -2]$, ohniska $F = [-9; -2]$, $G = [11; -2]$ a asymptoty $4x - 3y - 10 = 0$ a $4x + 3y + 2 = 0$.

3. Principiálně je třeba uvažovat, že hledaná rovnice je jednoho ze tvarů
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{nebo} \qquad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,.$$
Po dosazení bodů K a L dostaneme soustavu dvou rovnic o kladných reálných neznámých a a b, která má však řešení pouze v prvním případě. Výsledek: $x^2 - 2y^2 = 1$ ($a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$).

4. Střed hledané hyperboly leží v průsečíku asymptot, je to bod $S = [2; 0]$. Dále platí $e = |SF| = 5$ a $b = |Fa_1| = |Fa_2| = 4$, takže $a = \sqrt{e^2 - b^2} = 3$. Výsledek:
$$-\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

5. Zadanou rovnici je vhodné upravit do tvaru, ze kterého jsme schopni určit vlastnosti zadané lineární lomené funkce, tj.
$$y - 3 = \frac{2}{x+1}\,.$$
Odtud vidíme, že se jedná o rovnoosou hyperbolu s asymptotami $x = -1$ a $y = 3$, středem $S = [-1; 3]$. Dále vychází $a = b = 2$ a $e = 2\sqrt{2}$.

6. Střed $S = [-2; 3]$ úsečky FG je středem hledané hyperboly. Pro její excentricitu platí $e = |SF| = \sqrt{2}$, takže $a = b = 1$. Hledaná rovnice je pak tvaru
$$y - 3 = -\frac{1}{2\,(x+2)}\,.$$

Parabola

Zadání úloh

1. Najděte vrcholovou rovnici paraboly, která má řídící přímku $d:\ y = 2$ a ohnisko $F = [4; 0]$ a určete její průsečíky se souřadnicovými osami.

2. Uvažujme bod $[-1; 2]$ a přímku $x = 3$. Vyšetřete, co je množinou všech bodů X v rovině, které mají od obou zadaných útvarů stejnou vzdálenost. Vyšetřete důležité charakteristiky (střed, vrcholy, ohniska, osy - pokud je daná kuželosečka má) nalezené kuželosečky.

3. Najděte ohnisko, vrchol, osu a řídící přímku paraboly, která má rovnici
$$x^2 - 8x - 12y - 8 = 0\,.$$

4. Určete rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x a prochází body $A = [2; 1]$, $B = [-4; -1]$ a $C = [-1; 2]$.

5. Určete rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V = [-8; 1]$, osu rovnoběžnou s jednou ze souřadnicových os a na ose y vytíná tětivu délky 4.

6. Určete rovnici paraboly, na níž leží dva body souměrné podle její osy: $A = [0; -1]$, $B = [0; -5]$, přičemž ohnisko této paraboly leží na úsečce AB a parametr této paraboly je 2. Najděte všechna řešení této úlohy.

Návody, výsledky a komentáře

Označme p parametr, F ohnisko, V vrchol a d řídící přímku uvažované paraboly v každé ze zadaných úloh. Platí tedy $p = |Fd|$.

1. Hledaná parabola se otevírá „dolů“, má vrchol $V = [4; 1]$, takže její rovnice je
$$-4\,(y-1) = (x-4)^2 \;.$$
Průsečíky se souřadnicovými osami pak má v bodech $[0; -3]$, $[2; 0]$ a $[6; 0]$.

2. Po dosazení do zadání získáme rovnici
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = |x-3| \;.$$
Jejími ekvivalentními úpravami dostaneme
$$-8\,(x-1) = (y-2)^2 \;,$$
což je rovnice paraboly, která se otevírá „doleva“, má vrchol $V = [1; 2]$, osu $y = 2$ a parametr $p = 4$. Zadaný bod je jejím ohniskem a zadaná přímka její přímkou řídící.

3. Zadanou rovnici upravíme do tvaru
$$12\,(y+2) = (x-4)^2 \;,$$
což je rovnice paraboly, která se otevírá „nahoru“, má vrchol $V = [4; -2]$, osu $x = 4$, parametr $p = 6$, ohnisko $F = [4; 1]$ a řídící přímku $d:\ y = -5$.

4. Příslušnou parabolu lze hledat ve tvaru $x = ay^2 + by + c$. Dosazením zadaných bodů získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých a, b a c, jejímž vyřešením dostaneme hledanou rovnici ve tvaru $x = -2y^2 + 3y + 1$.

5. Ze zadaných informací plyne, že osa hledané paraboly je rovnoběžná s osou x a má tedy rovnici $y = 1$. Vzhledem k symetrii zmíněné tětivy podle této osy, má hledaná parabola s osou y průsečíky v bodech $A = [0; -1]$ a $B = [0; 3]$. S ohledem na polohu vrcholu zjišťujeme, že hledaná parabola se otevírá „doprava“. Má tedy vrcholovou rovnici $2p\,(x+8) = (y-1)^2$. Hodnotu parametru p určíme například pomocí dosazení bodu A. Výsledek:
$$(x+8) = 2\,(y-1)^2 \qquad \left(p = \frac{1}{4}\right) \;.$$

6. Ohnisko je $F = [0; -3]$, osa má rovnici $y = -3$. Úloha má dvě řešení. V prvním z nich je vrcholem bod $V_1 = [1; -3]$ a parabola, která se otevírá „doleva“, má rovnici
$$p_1:\ -4\,(x-1) = (y+3)^2 \;.$$
Ve druhém řešení je vrcholem bod $V_2 = [-1; -3]$ a parabola, která se otevírá „doprava“, má rovnici
$$p_1:\ 4\,(x+1) = (y+3)^2 \;.$$

Kuželosečka a přímka, tečna kuželosečky

Zadání úloh

1. Vypočtěte délku tětivy, kterou přímka $p:\ 8x-6y-17=0$ vytíná na kuželosečce $k:\ y^2-8x+2y+17=0$. O jakou kuželosečku se jedná?

2. Vypočtěte odchylku tečen vedených bodem $A=[2;-5]$ ke kružnici $k:\ (x+4)^2+(y-3)^2=25$. Je třeba určovat rovnice těchto tečen?

3. Zdůvodněte, kolik existuje tečen kružnice $k:\ (x-1)^2+(y+2)^2=3$, které jsou kolmé k přímce $p:\ 2x-3y+4=0$.

4. Najděte obecné rovnice tečen kružnice $k:\ (x+1)^2+(y+3)^2=25$ vedených bodem $A=[4;2]$. Určete rovněž jejich dotykové body.

5. Najděte obecné rovnice tečen kuželosečky $k:\ 4x^2+9y^2=25$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p:\ 8x-9y+1=0$. Určete rovněž jejich dotykové body.

6. Najděte všechny přímky procházející bodem $A=[-1;-3]$, které mají s parabolou $y-1=-(x+3)^2$ právě jeden společný bod.

7. Uvažujme hyperbolu $h:\ 25x^2-9y^2=16$, body $A=\left[\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right]$ a $B=\left[-\frac{4}{5};0\right]$. Najděte všechny přímky, které mají s hyperbolou h právě jeden společný bod a prochází přitom

   (a) bodem A,

   (b) bodem B.

8. Uvažujme hyperbolu $h:\ xy=-1$. Najděte poloměr kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic tak, aby se tato kružnice dotýkala (tzn. měla s ní společný právě jeden bod) každé větve hyperboly h. Určete rovnice tečen obou kuželoseček v každém z těchto společných bodů.

Návody, výsledky a komentáře

1. Jedná se o parabolu, která má s přímkou p společné body $\left[\frac{17}{8}; 0\right]$ a $\left[\frac{41}{8}; 4\right]$, jejichž vzdálenost je 5.

2. Zadaná kružnice má poloměr $r = 5$, dále snadno vypočteme, že $|AS| = 10$. Tudíž platí

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{|AS|} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 60^\circ\,.$$

   Rovnice tečen hledat nemusíme.

3. Každá přímka, která má s kružnicí jediný společný bod, je její tečnou (toto však neplatí např. u hyperboly či paraboly). Bez ohledu na polohu přímky p, středu kružnice k a velikost jejího poloměru, tečny požadovaných vlastností existují právě dvě.

4. Rovnice poláry je $x_0 + y_0 - 1 = 0$, v jejích průsečících s k leží dotykové body $T_1 = [4; -3]$ a $T_2 = [-1; 2]$. Hledané tečny mají rovnice $t_1 : x - 4 = 0$ a $t_2 : y - 2 = 0$.

5. Každá přímka, která má s elipsou jediný společný bod, je její tečnou. Tečnu tedy hledejme ve tvaru $8x - 9y + c = 0$. Hodnotu parametru určíme tak, aby tato přímka měla se zadanou elipsou jediný společný bod. Výsledek: dotykové body $T_1 = [-2; 1]$ a $T_2 = [2; -1]$, tečny $t_1 : -8x + 9y - 25 = 0$ a $t_2 : -8x + 9y + 25 = 0$.

6. Snadno ověříme, že bod A leží na zadané parabole. Vyhoví tedy jednak rovnoběžka s osou této paraboly. Ta má rovnici $x = -1$. Dále vyhoví jediná tečna a ta má rovnici $y = -4x - 7$.

7. Zadaná hyperbola má asymptoty $5x \pm 3y = 0$. Úloze vyhoví každá tečna (v obecné situaci mohou existovat nejvýše dvě) a každá rovnoběžka s některou z asymptot (v obecné situaci mohou existovat také nejvýše dvě) procházející daným bodem.

   (a) Bod A leží na jedné z asymptot. V takovém případě má úloha právě dvě řešení. Vyhoví jedna tečna t a rovnoběžka r se druhou asymptotou. Řešení: $t : 25x + 9y - 16 = 0$, $r : 5x + 3y - 4 = 0$.

   (b) Bod B je vrcholem hyperboly h. V takovém případě má úloha právě tři řešení. Vyhoví jedna tečna t a dvě rovnoběžky r_1 a r_2 se druhou asymptotou. Řešení: $t : 5x + 4 = 0$, $r_1 : 5x - 3y + 4 = 0$ a $r_2 : 5x + 3y + 4 = 0$.

8. Obě uvažované kuželosečky mají společný střed. Kružnice se zadané hyperboly bude dotýkat v jejích vrcholech, tzn. v bodech $[-1; 1]$ a $[1; -1]$. Hledaný poloměr tedy je $r = \sqrt{2}$. V těchto bodech mají obě kuželosečky společné tečny, které jsou kolmé k hlavní ose h. Mají tedy rovnice: $y = x \pm 2$.

Singulární kuželosečky

Zadání úloh

1. Jaké typy útvarů mohou být průnikem kuželové (resp. válcové) plochy a roviny?

2. Uveďte příklad rovnice tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,, \text{ kde } (a_{11}; a_{12}; a_{22}) \neq (0; 0; 0)\,, \tag{1}$$

   které vyhoví

   (a) dvě různé rovnoběžky,

   (b) dvojnásobná přímka,

   (c) dvě různoběžky,

   (d) bod,

   (e) prázdná množina.

3. U každé z následujících typů kuželoseček rozmyslete, zda má svůj střed (případně více středů). Své odpovědi zdůvodněte.

   (a) dvě různé rovnoběžky

   (b) dvojnásobná přímka

   (c) dvě různoběžky

   (d) bod

4. Najděte rovnici kuželosečky, která je tvořena

   (a) bodem $[4; -5]$,

   (b) rovnoběžkami $x + 2y + 3 = 0$ a $x + 2y - 1 = 0$,

   (c) různoběžkami určenými bodem $[-2; 5]$ a směrovými vektory $(1; -2)$ a $(-2; 3)$,

   (d) dvojnásobnou přímkou $\{[2 + t; -3 + 3t]\,, t \in \mathbb{R}\}$.

5. Určete typ dané kuželosečky (tzn. zjistěte, čím je tvořena).

   (a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   (b) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 9$

   (c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

   (d) $x^2 + 6x + 9 - y^2 = 0$

   (e) $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$

6. Najděte všechny středy kuželoseček (a) - (d) z předchozí úlohy.

Návody, výsledky a komentáře

1. Prázdná množina, bod, dvojnásobná přímka, dvě různé rovnoběžky, dvě různoběžky, elipsa (ve speciálním případě kružnice), parabola, hyperbola.

2. Například

   (a) $(x-1)(x+1)=0$,

   (b) $x^2=0$,

   (c) $(x-y)(x+y)=0$,

   (d) $x^2+y^2=0$,

   (e) $x^2+1=0$.

3. Středem kuželosečky k rozumíme bod S takový, že pro každý bod $X \in k$ platí, že $X' \in k$, kde X' značí obraz bodu X ve středové souměrnosti se středem S.

   (a) Tato kuželosečka má dokonce přímku středů. Jejím středem je každý bod osy pásu, který příslušné dvě rovnoběžky určují.

   (b) Každý bod této přímky je středem, neboť tato kuželosečka je podle něj středově souměrná. I tato kuželosečka má přímku středů.

   (c) Jediným středem je průsečík těchto různoběžek.

   (d) Tento bod je současně středem uvažované kuželosečky.

   Poznámka. Všimněme si, že v případech (b) - (d) leží střed přímo na kuželosečce. Hovoříme o tzv. *singulárním* bodu. V případu (a) tomu tak není. Dvě různé rovnoběžky (podobně jako elipsa či hyperbola) tedy žádný singulární bod nemají, i když mají střed.

4. Uvědomte si, že roznásobením libovolné z níže uvedených rovnic každou z nich upravíme do tvaru (1).

   (a) $(x-4)^2+(y+5)^2=0$,

   (b) $(x+2y+3)(x+2y-1)=0$,

   (c) $(2x+y-1)(3x+2y-4)=0$,

   (d) $(3x-y-9)^2=0$.

5. Každou ze zadaných rovnic nejprve upravte do níže uvedeného tvaru, z něhož je již odpověď patrná.

   (a) $(x+3)^2=0$ - dvojnásobná přímka

   (b) $(x-2y)^2-3^2=0 \Leftrightarrow (x-2y-3)(x-2y+3)=0$ - dvě různé rovnoběžky

   (c) $(x-3)^2+(y+2)^2=0$ - bod

   (d) $(x+3)^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y+3)(x+y+3)=0$ - dvě různoběžky

   (e) $(x+y)^2+1=0$ - prázdná množina

6. K řešení úlohy využijte upravené tvary rovnic - viz výše ve výsledcích.

   (a) přímka $x+3=0$

   (b) přímka $x-2y=0$

   (c) bod $[3;-2]$

   (d) bod $[-3;0]$