§1. Analytické vyjádření kružnice a kruhu

V.1.1.: . . .

V.1.2.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP s diferencí d nechť S_n je součet prvních n členů. Pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

[Dk: sečteme po dvojicích x-tého prvku od začátku a x-tého prvku od konce. Všechny dvojice mají součet $a_1 + a_n$ a případný zbylý člen je $\frac{a_1+a_n}{2}$.]

Př: určete součet prvnich 100 lichych přirozených čísel:

$$\frac{100 \cdot (1 + 199)}{2} = 10000$$

Součet lihých přirozencyh císel do $2n - 1$:

$$\frac{n(2n - 1 + 1)}{2} = n^2$$

V.1.3.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP. Pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

[Dk: $a_n = a_n - 1 + d \wedge a_n = a_{n+1} - d \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$]

Pozn:

1) Vyjádření členu předchozí věty je vyjádřením *aritmetrického průměru* čísel a_{n-1}, a_{n+1}.
2) platí i obrácení V.2.3.

V.1.4.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP. Pak platí:

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow d > 0$
2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající $\Leftrightarrow d < 0$
3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní $\Leftrightarrow d = 0$

V.1.5.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je AP. Pak platí:

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená $\Leftrightarrow d \geq 0$
2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená $\Leftrightarrow d \leq 0$
3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Leftrightarrow d = 0$

Př: 17/2:

$$S_{10} = \frac{10 * (3 + 60)}{2} = 315$$

Př: 17/7:

Všimnu si, že součet dvojice po sobě jdoucích čísel, kde první je na liché a druhé na sudé pozici, je -1.

V $2n$ členech je právě n takovýchto dvojic. Tedy součet je $-n$.

Př: 17/10:

$a_1 = 3 \cdot 1^2$ $3 + a_2 = 3 * 2^2 \Rightarrow a_2 = 9$

Tedy posloupnost musí mít $d = 6$ a tedy $a_n = -3 + 6n$

$$S_n = \frac{n(3 - 3 + 6n)}{2} = 3n^2$$

Př: 17/12:

1. $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$
2. $a_1, a_3, a_4, a_5, \ldots$

Př:

$$a_1 + a_4 = 12$$
$$a_2 - a_6 = -8$$

$$2a_1 + 3d = 12$$
$$a_1 + d - a_1 - 5d = -8 \Rightarrow d = 2$$

$$2a_1 + 3 \cdot 2 = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

AP: $a_0 = 1; d = 2$

Př: Délky stran pravoúhelého trojúhelníku tvoří AP. Vypočítejte strany, když $S = 6$

$(x + d)^2 = x^2 + (x - d)^2$
$x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + x^2 - 2xd + d^2$
$4xd = x^2$
$d = \frac{x}{4}$

$x(x - d) = x\frac{3}{4}x = 2 \cdot 6 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$a = 3; b = 4; c = 5$

Př: Kde platí $S_5 = S_6 = 60$ $a_6 = 60$

$$S_5 = a_6 - d + a_6 - 2d + a\_35 + a_6 - 4d + a_6 + 5d = -15d = 60 \Rightarrow d = -4$$

AP:$a_1 = 20, d = -4$

Př: 18/13:

$$24^2 = (24 - d)^2 + (24 - 2d)^2$$
$$576 = 5d^2 - 144d + 1152$$
$$0 = (d - 24)(d - \frac{24}{5})$$

Př: 18/14: jedinou pitagorijskou trojicí, která je zároveň aritmetrickou posloupností je $3, 4, 5$, tedy délky stran musí být $3k, 4k, 5k; k \in \mathbb{R}$.

Všimneme si, že tyto trojůhelníky jsou podobné. Jelikož ppoloměr kružnice vepsané trojůhelníku o stranách $3, 4, 5$ je 1, tak se musí jednat o $21, 28, 35$.

Př: 18/15:

$$(100 - 85 + 1)\frac{100 + 85}{2} = 1480$$

Př: 18/17:

$$t\frac{c - \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} - (t-1)a}{2} = t(c - \frac{1}{2}ta) = tc - \frac{1}{2}t^2a$$