Obsah

§1. Komplexní čísla, algebraický tvar komplexního čísla

Pozn: Množinu všech komplexních čísel označíme $\mathbb{C}$.

Def: *Komplexním číslem* $z \in \mathbb{C}$ nazýváme každou uspořadanou dvajici $z = (x, y)$ reálných čísel, tj. kartézského čtverce $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, na které jsou definovány rovnost a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení takto:

1. *Rovnost komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$
$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$
2. *Součet komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$
3. *Rozdíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Rozdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 + z$, zapisujeme $z = z_1 - z_2$
4. *Součin komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$$
5. *Podíl komplexních čísel* $z_1 = (x_1, y_1); z_2 = (x_2, y_2)$: Posdílem rozumíme komplexní číslo z, pro které platí $z_1 = z_2 \cdot z$, zapisujeme $z = \frac{z_1}{z_2}$

V.1.1.: Nechť $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$. Pak platí:

1. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
2. $z_2 = \overrightarrow{0} : \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$

[Dk:

1.

$$z_1 = z_2 + z$$

Dosadím:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

Ekvivalentně upravím:

$$(x_1, y_1) = (x_1 - x_2 + x_2; y_1 - y_2 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$

Což evidentně platí. *QED*

2.

$$z_1 = z_2 \cdot z$$

Dosadím:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \cdot \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Ekvivalentně upravím:

$$(x_1, y_1) = \left(x_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - y_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} y_2 + x_2 \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1x_2^2 + x_2y_1y_2 - x_2y_1y_2 + x_1y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_1x_2y_2 + y_1y_2^2 + x_2^2y_2 - x_1x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$$

Což evidentně platí. *QED*

Př: 11/1:

1. $5 + 4i$
2. $6 + 3i$
3. ??? Co to jako má znamenat ???
4. $6 - 9i$
5. analogicky

V.1.2.:

Množina $\mathbb{C}$ má následující vlastnosti:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $\exists o \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} : z + o = o + z = z$, kde $o = (0, 0)$
4. $\forall z \in \mathbb{C} : \exists z' \in \mathbb{C} : z + z' = z' + z = o$ (z' je číslo opačné k z)

5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
6. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
7. $\exists e \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} : z \cdot e = e \cdot z = z$, kde $e = (1, 0)$
8. $\forall z \in \mathbb{C} - \{o\} : \exists z^* \in \mathbb{C} - \{o\} : z^* \cdot z = z \cdot z^* = e$ (z^* je číslo převrácené k z)
9. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

[Dk:

Nechť $z_k = (x_k, y_k)$, pro všechna k:

1. ekvivalentní s $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. ekvivalentní s $(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$
3. $(x + 0, y + 0) = (x, y)$
4. $z' = -z \Rightarrow (x + -x, y + -y) = (0, 0)$
5. ekvivalentní s $(x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$
6. analogicky dvojím dosazením
7. $(x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0; x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1)$
8. Dosadíme $z^* = \left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2}\right)$: $\left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}; x\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}y\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}; \frac{0}{x^2+y^2}\right) = (1; 0)$
9. ekvivalentní s $((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3; (x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2))$

]

Pozn:

1) Vlastnosti 1-4 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C}$ s operací $+$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{C}, +)$
2) Vlastnosti 5-8 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C} - \{o\}$ s operací $\times$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{C} - \{o\}, \times)$
3) Vlastnosti 1-9 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbb{C}$ s operacemi $+, \times$ tvoří *komutativní těleso (pole)* $(C, +, \times)$

Pozn: *Souvislost množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:*
Ztotožníme $\mathbb{R}$ s jistou podmnožinou množiny $\mathbb{C}$. Zobrazení $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme takto: $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x) = (x, 0)$ Zobrazení ϕ je injektivní (tedy prosté), ale není bijektivní. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

1. $\phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y)$
2. $\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(x \cdot y)$

ϕ zachovává operace $+$,$\times$. Je to izomorfní zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$. Lze tedy každé komplexní číslo $(x, 0)$ ztotožnit s reálným číslem x.

Pozn: *Konvence*
Komplexní číslo $(0, 1)$ označíme i.
Přitom platí: $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$
$i^2 = -1$

Def: Nechť $z \in \mathbb{C}; z = (x, y)$:
Zápis čísla z ve tvaru $z = x + iy$ nazýváme *algebraickým tvarem komplexního čísla* z. Číslo $x \in \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou částí* a $y \in \mathbb{R}$ nazýváme *částí imaginární*, číslo $i = (0, 1)$ nazýváme *imaginární jednotkou*. Zapisujeme $x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z$. *Čísla* $z = x + iy$, kde $y \neq 0$, nazýváme *imaginárními*, čísla $z = iy$, kde $y \neq 0$ nazýváme *ryze imaginárními*.

Pozn: Množina komplexních čísel je tedy sjednocením množiny čísel reálných a čísel imaginárních.

Pozn: Při počítání s komplexními čísly v algebraickém tvaru lze tato čísla formálně chápat jako mnohočleny a využívat faktu, že $-1 = i^2$.

Pozn: Platí: $\forall n \in \mathbb{Z}$: $i^{4n} = 1 \wedge i^{4n+1} = i \wedge i^{4n+2} = -1 \wedge i^{4n+3} = -i$

Př: $(2 + i) + (1 - 2i) = 3 - i$
$(2 + i)(1 - 2i) = 2 - 4i + i - 2i^2 = 2 - 3i + 2 = 4 - 3i$
$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{5i}{5} = i$

§2. Gaussova rovina, goniometrický tvar komplexního čísla

Pozn: Protože množina $\mathbb{C}$ je definována jako množina uspořádaných dvojic $\mathbb{R}$ čísel, lze každé komplexní číslo $z = (x, y)$ zobrazit v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a ztotožnit s bodem $z[x, y]$. Reálná čísla leží na ose x (osa x se nazývá reálná osa). Ryze imaginární čísla $z = yi, y \neq 0$ leží na ose y (osa y se nazývá imaginární osa). Rovina s reálnou a imaginární osou se nazývá Gaussova rovina a v ní zobrazujeme komplexní čísla. Podobně lze interpretovat komplexní čísla jako vektory s pevným počátečním bodem.

Def: Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Číslo $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ nazýváme *komplexně sdruženým číslem* k číslu z.

Číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ nazýváme *absolutní hodnotou komplexního čísla* z.

Komplexní číslo z s vlastností $|z| = 1$ nazýváme *komplexní jednotkou.*

Pozn:

1) Čísla z a $\overline{z}$ jsou osově souměrná podle reálné osy (osy x)

2) Číslo $|z|$ vyjadřuje vzdálenost bodu z od počátku souřadné soustavy, a tedy délku polohového vektoru bodu z.

3) Množinu všech komplexních jednotek označíme $\mathbb{U}$.

4) Protože obrazem množiny komplexních čísel se stejnou nenulovou absolutní hodnotou je kružnice se středem v počátku souřadné soustavy, je obrazem množiny $\mathbb{U}$ jednotková kružnice se středem v počátku.

V.2.1.: Pro každá dvě komplexně združená čísla $z = x + yi; \overline{z} = x - yi$ platí:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z + \overline{z} = 2x$
3. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
8. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

V.2.2.: Pro absolutní hodnoty libovolných komplexních čísel $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

1. $|z| \geq 0$, přičemž $|z| = 0 \equiv z = 0$
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
3. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + z_2|$
4. $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - z_2|$
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \quad (z_2 \neq 0)$
7. $\mathrm{Re}z \leq |z|; \mathrm{Imz} \leq |z|$

Pozn: Všechny vztahy platící pro reálná čísla nelze mechanicky převést do množiny komplexních čísel. Např. $|z|^2 \neq z^2$

Pozn: Na rozdíl od množiny reálných čísel není množina komplexních čísel uspořádaná, tedy komplexní čísla nelze srovnávat podle velikosti.

Def: Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}; z \neq 0$. *Argumentem komplexního čílsa* nazýváme orientovaný úhel φ, který svírá kladná poloosa reálné osy s polohovým vektorem bodu z.

Pozn: Každé nenulové číslo z má nekonečně mnoho argumentů, přitom každé 2 z nich se liší o $k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}$. Je-li $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$, pak jej nazýváme *hlavní argument komplexního čísla* z , je jediný.

V.2.3.: Každé komplexní číslo $z = x+iy; z \neq 0$ lze zapsat ve tvaru $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $|z|$ je absolutní hodnota z a φ je argument z, přičemž platí: $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

[Dk.!:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

]

Def: *Goniometrický tvar komplexního čísla*

Nechť $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Pak goniometrickým tvarem tohoto čísla nazýváme zápis čísla ve tvaru $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $|z|$ je absolutní hodnota z a φ ja argument z, přičemž $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

Př: Zapiště v gon. tvaru:

1. $z = 1 + i$
   $|z| = \sqrt{2}; \varphi = \frac{\pi}{4}$
   $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Př: Zapiště v alg. tvaru:

1. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$

Př: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$; $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sqrt{\varphi_1})$; $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sqrt{\varphi_2})$ pak platí:

$z - 1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1}{|z_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Př: Vypočítejte v algebraickém i goniometrickém tvaru:

1. $(i - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} - 2i$
   $2e^{i\frac{5}{3}\pi} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{11}{6}\pi}$
2. $\frac{2e^{i\frac{5}{3}\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

V.2.4.: <u>Moivreova věta:</u>
Nechť máme nenulové kkomplexní číslo $z = |z|e^{i\varphi}; n \in \mathbb{N}$, pak platí:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

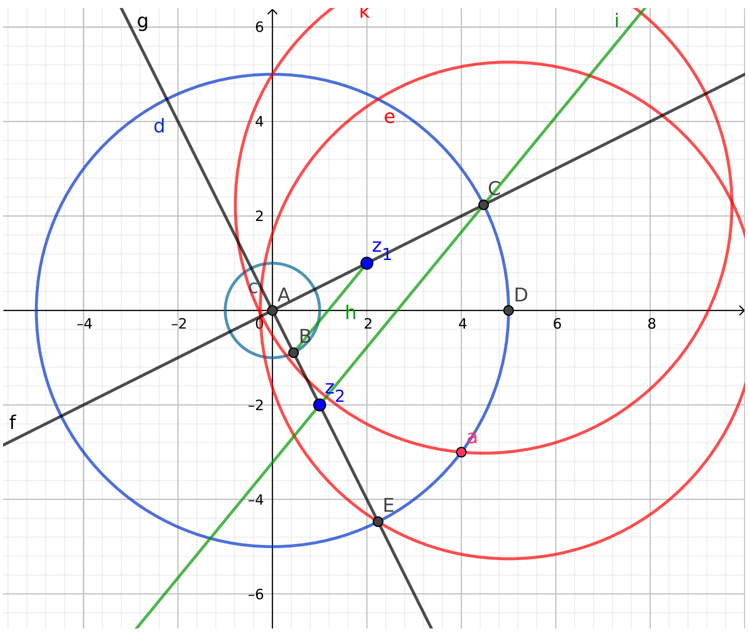
Pozn: Moivreova věta platí i pro celé exponenty.

Pozn: Součet a rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v Gaussově rovině.

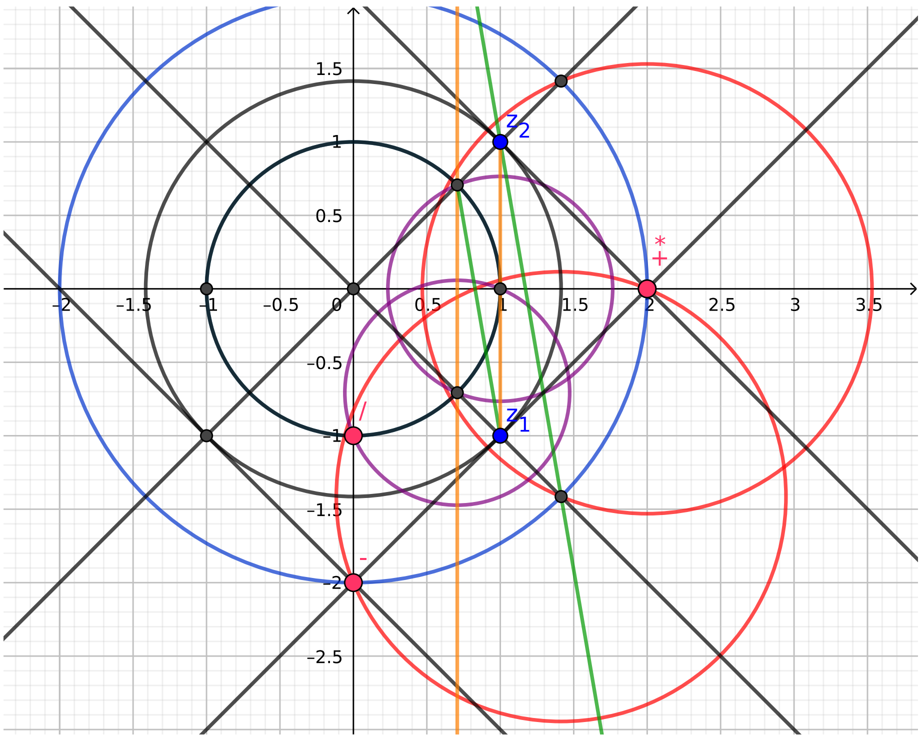
Součet a rozdíl jako sčítání a odčítání vektorů.

Součin $z_1 z_2$ (podíl $\frac{z_1}{z_2}$):

1. zobrazíme z_1 ve stejnolehnosti $H_{P,|z_2|}$ $(H_{P,|z_2|^{-1}})$: Získáme $|z_1 \cdot z_2|$.
2. zobrazíme $|z_1 \cdot z_2$ $(\left|\frac{z_1}{z_2}\right|)$ v rotaci $R_{P,\arg z_2}$ $(R_{P,-\arg z_2})$ Získáme $z_1 \cdot z_2$ $(\frac{z_1}{z_2})$.

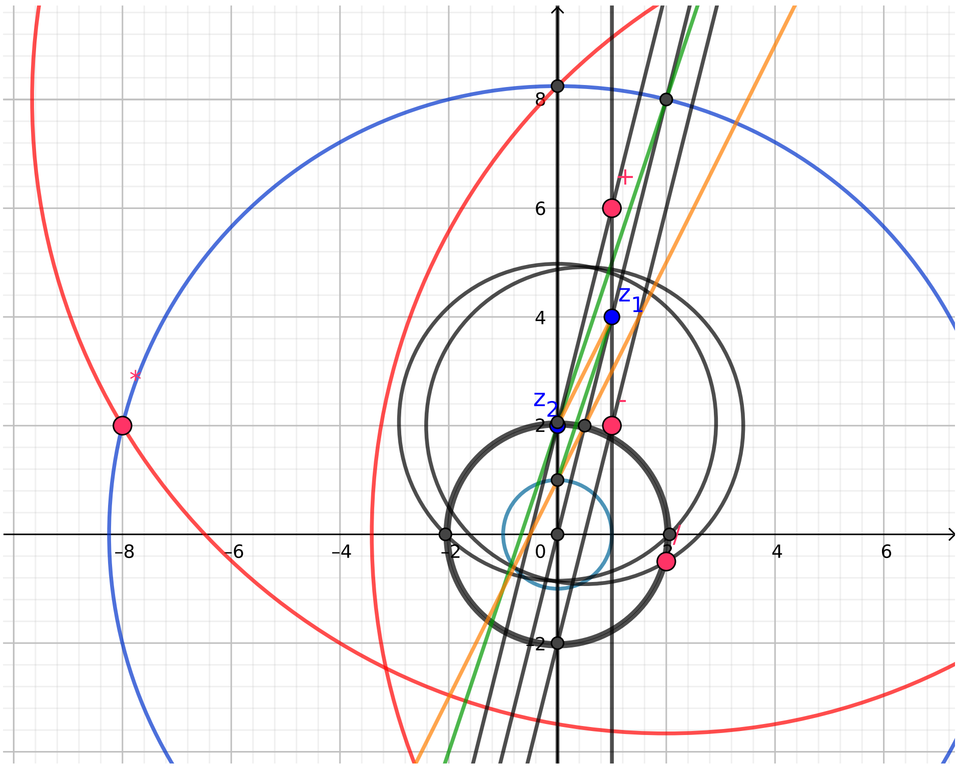


Př:



$z_1 + z_2 = 2 + 0i$
$z_1 - z_2 = 0 - 2i$

$z_1 \cdot z_2 = 1 - i + i + 1 = 2$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$



$z_1 + z_2 = 1 + 6i$
$z_1 - z_2 = 1 + 2i$
$z_1 \cdot z_2 = 2i + 4i^2 = -4 + 2i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+4i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-4+i}{-2} = 2 - \frac{1}{2}i$

Př: 147/1:

d) $(1-i)^n = \sqrt{2}^2 e^{-ni\frac{\pi}{4}}$

e) $(\sqrt{2}+i)^n = 2^n e^{-i\frac{\pi}{6}}$

f) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20} = -i^{20} = -i^2 = 1$

§3. Binomické rovnice

Pozn: Nechť $a'in\mathbb{R}$; $\sqrt[n]{a}$ v reálném ooru (pokud existuje) je jediné číslo x s vlastností $x^n = a$.
Tzn. v $\mathbb{R}$ existuje nejvýše jedna $\sqrt[n]{a}$. V množině $\mathbb{C}$ je situace jiná.

Def: *Binomickou rovnicí* s neznámou $z \in \mathbb{C}$ nazýváme každou rovnici tvaru $z^n = a$, kde $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Každý komplexní kořen binomické rovnice nazýváme *komplexní n-tou odmocninu* z čísla a.

Př: Vypočítejte: $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$
$z^2 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $|z| = \sqrt{2}$ $2\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi n \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \vee \varphi = \frac{7}{6}\pi$

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Pozn: Při řešení binomických rovnic (s využitím goniometrického tvaru komplexních čísel) jde tedy i o řešení následujícího problému:

Určit všechna $x \in \mathbb{R} : (\cos x + i \sin x)^n (\cos nx + i \sin nx) = \cos\alpha + i \sin\alpha$

Musí platiti: $nx = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$

Je zřejmé, že pro $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ získáme argumenty různých komplexních čísel.

Pro $k = n + h; h \in \mathbb{N}_0 : x_k = \frac{\alpha+2h\pi}{n} + 2\pi \Rightarrow x_h$ a x_k se liší o 2π, proto jsou to argumenty téhož čísla.

V.3.1.: Nechť $a \in \mathbb{C}$: pak binomická rovnice $z^n = a$ má v množině $\mathbb{C}$:

1. $a = 0 \Rightarrow$ jeden kořen
2. $a \neq 0 \Rightarrow$ právě n kořenů
$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$$
kde $k \in \{0; 1; \dots n-1\}$, $\alpha \dots$ argument komplexního čísla a.

Př: Řešte v $\mathbb{C}$: $z^3 = i$.

$|z|^3 = 1 \Rightarrow |z| = 1$
$3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{2}i; -i$$

Pozn: Obrazy kořenů binomické rovnice $z^n = a; n \geq 3$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$, neboť rozdíl dvou „sousedních“ kořenů je konstantní:

$$x_{i-1} - x_i = \frac{\alpha + 2(i+1)\pi}{n} - \frac{\alpha + 2i\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

§4. Kvadratické rovnice v $\mathbb{C}$

A) Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Pozn: S kvadratickou rovnicí s reálnými koeficienty a reálnou neznámou jsme se seznámili ve IV. kapitole.

Pozn: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Binomická rovnice $z^2 = -a^2; a \neq 0$ má v $\mathbb{C}$ právě dva kořeny. $z_1 = a \cdot i; z_2 = -a \cdot i$.

Def: Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou $z \in \mathbb{C}$ a reálnými koeficienty a, b, c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Pozn: Kvadratickou rovnici řešíme doplněním na čtverec:

$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{ca - b^2 - 4ac}{4a^2}$

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

V.4.1.: Nechť $az^1 + bz + z = 0; a \neq 0$ (*) je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a nechť $D = b^2 - 4ac$ je její diskriminant. Pak platí:

1. $D > 0 \Rightarrow$ (*) má 2 různé reálné kořeny $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. $D = 0 \Rightarrow$ (*) má 1 reálný dvonásobný kořeny $z_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
3. $D < 0 \Rightarrow$ (*) má 2 komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

Př: Řešte c $\mathbb{C}$ rovnice:

1. $z^2 + z + 1 = 0$
   $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
2. $3z^2 - 2z\sqrt{3} - 1 = 0$
   $z_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{6}}{3}$

Př: 155/6:

1. $x^2 - 4x + 6 = 0$
   $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$
2. $5x^2 - 6x + 2 = 0$
   $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{10} = \frac{3 \pm i}{5}$
3. $x^2 - 2x + 5 = 0$
   $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$
4. $2x^2 - 11x + 14 = 0$ $x = \frac{11 - \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{7}{2}$

Def: *Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou* $z \in \mathbb{C}$ a komplexními koeficienty a, b, c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{C}; a \neq 0$.

V.4.2.: Každá kvadratická rovnice s komplexními koeficienty má v množině komplexních čísel právě dva kořeny, počítáme-li dvojnásobný kořen za dva.

Př:

1. $z^2 + 2iz + 1 = (z + 1)^2 - i^2 + 1 = 0$
   $t^2 = (z + i)^2 = -1$
   $t = \pm i\sqrt{2}$
   $z = -i \pm i\sqrt{2}$
2. $z = \frac{-2i \pm \sqrt{-8}}{2} = -i \pm i\sqrt{2} = i(-1 + \sqrt{2})$

3. $z = x + iy$

$$(x+iy)^2 + (x+iy) + 2i + 1 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix - 2y + 1 = 0$$

Porovnání koeficientů:
$i^0 : x^2 - y^2 - 2y + 1 = 0$
$i^1 : 2xy + 2x = x(y+1) = 0$

(a) $x = 0$:
$y^2 + 2y - 1 = 0 \; y = \frac{-2+pm\sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$
$z = i(-1 \pm \sqrt{2})$

(b) $y = -1$: $x^2 = -2 \Rightarrow$ nelze

Pozn: Pokud vyjde diskriminant D imaginární (s i), tak je potřeba vyřešit $\sqrt{D}$ pomocí binomické rovnice, nebo III. způsobu – viz následující příklad (spojení II. a III. způsobu).

Př: $z^2 + 3z + 10i = 0$

$D = 9 - 40i$
$\sqrt{D} = \sqrt{9 - 40i} = x + yi$
$9 - 40i = x^2 + 2xyi - y^2$

$i^0 : 9 = x^2 - y^2$
$i^1 : -40 = 2xy$

$9 = x^2 - 400x^2$
$0 = x^4 - 9x^2 - 400$
$x^2 = \frac{9 \pm 41}{2}$

$x^2 = 25$:
$x = 5; y = -4 \Rightarrow \sqrt{D} = 5 - 4i$
$x = -5; y = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = -5 + 4i$

$$z = \frac{-3 \pm (5 - 4i)}{2}$$
$$z_1 = 1 - 2i$$
$$z_2 = -4 + 2i$$