§1. Logaritmus, logaritmická funkce

***43. Dokažte, že platí:**

$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x \,.\, \log_b x}{\log_a x + \log_b x},\; a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1\,.$$

[Návod: Pište $\log_a x = m$, $\log_b x = n$, $\log_{ab} x = p$ a hledejte vztah mezi m, n, p.]

$$\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\log_x ab} = \log_{ab} x$$

***44. Dokažte, že platí:** $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x}{1 + \log_a b}$ **za obvyklých předpokladů.**

$$\frac{\log_a x}{1 + \log_a b} = \frac{\log_a x \cdot \log_x a}{\log_x a + \log_x a \log_a b} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\log_x ab} = \log_{ab} x$$

***47. Je dáno číslo** $n = \dfrac{z+1}{z-1}$**, kde** $z = \dfrac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}$.

Určete všechna čísla x, pro která existuje logaritmus čísla n.

$0 < n = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow z \notin \langle -1; 1 \rangle$

$x^4 - 25x^2 + 72 = 72$:
$x^4 - 25x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 25) = 0$
$x^2(x-5)(x+5) = 0$

$x^4 - 25x^2 + 72 = -72$:
$D = 25^2 - 8 \cdot 72 = 49 = 7^2$ $(x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0$
$(x+3)(x-3)(x+4)(x-4) = 0$

Log je difinovaný když: $x \in (-\infty; 5) \cup (-4; -3) \cup (3; 4) \cup (5; \infty)$

***55. a)** $\log_z x = \dfrac{1}{4} \log_z a + \log_z \log_z b\,;$

$$x = z^{\frac{1}{4}\log_z a + \log_z \log_z b}$$
$$x = z^{\frac{1}{4}\log_z a} z^{\log_z \log_z b}$$
$$x = az^{\frac{1}{4}} z \log_z b$$

***221.** $\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x + 6);\; a > 0, a \neq 1\,.$

$$\log_a(x^2 + x) < \log_a 2x + 6$$

$a < 1$

$$x^2 + x > 2x + 6$$
$$x^2 - x - 6 > 0$$
$$(x-3)(x+2) > 0$$

$x \in (-\infty; -2) \cap (3; \infty)$

$a > 1$

$$x^2 + x < 2x + 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0$$
$$(x-3)(x+2) < 0$$

$x \in (-2; 3)$

***223. Dokažte bez užití tabulek, že platí:**

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2} .$$

[Návod: $\log_2 \pi = 2 \log_4 \pi$.]

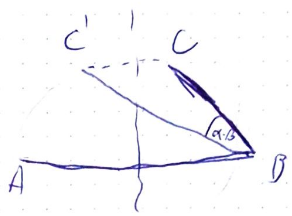
$$3 \log_4 \pi < \frac{5}{2}$$
$$\log_4 \pi < \frac{5}{6}$$
$$\pi < 4^{\frac{5}{6}}$$
$$\pi < 4^{\frac{5}{6}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$
$$\pi < 2. < 3.16 = 2 \cdot 1.58 = 2 \cdot 3.9444312^{\frac{1}{3}} < 2 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

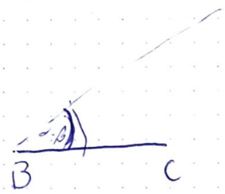
***238.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a, b, \alpha - \beta$, přičemž $\alpha > \beta$, $a > b$. [Návod: Uvažujte souměrnost, jejíž osou je osa úsečky AB.]

***239.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ o základnách AB, CD, je-li dáno: $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a rozdíl $\alpha - \beta = \varepsilon$, kde $\alpha = \sphericalangle DAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$.

238)

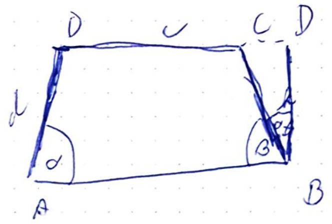
Nechť $C' = \sigma_{o(AB)}(C)$





239)

Nechť $D' = \sigma_{o(AB)}(D)$



$\alpha - \beta$

1) Sestrojím BCD' dle SUS.

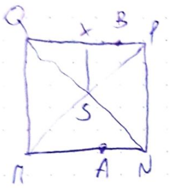
2) Sestrojím D dle $\overleftrightarrow{CD'} = \overleftrightarrow{CD}$ a $|DC|$

3) Sestrojím $A = \sigma_{o(DD')}(B)$.

***258.** Jsou dány tři body A, B, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$ tak, aby měl střed v bodě S, aby přímka MN procházela bodem A a přímka PQ bodem B. Dokažte, že úloha má vždy právě jedno řešení.

***259.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána jeho strana $AB = c$, těžnice t_a a ostrý úhel φ, který svírá těžnice t_a se stranou AC. Proveďte též diskusi

258)



nechť $A' = S_S(A)$

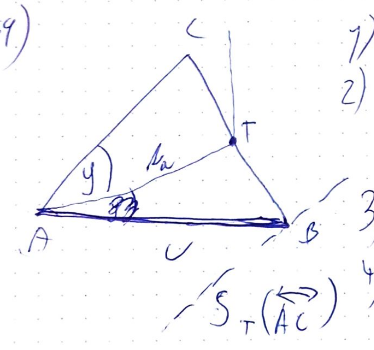
$A \in \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow A' \in S_S(\overleftrightarrow{MN}) = QP$

Sestrojím $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{A'B}$

~~Těžiště~~ Nechť X je kolmý průmět S na PQ.

$|SX| = \frac{a}{2} = |XP| = |QX|$, tedy mohu sestrojit zbylé body.

259)



1) Sestrojím AT
2) ~~Do~~ úhlu sestrojím $\overleftrightarrow{AC}$

$B = S_T(C) \Rightarrow B \in S_T(\overleftrightarrow{AC})$

3) $B = k(A, c) \cap S_T(\overleftrightarrow{AC})$

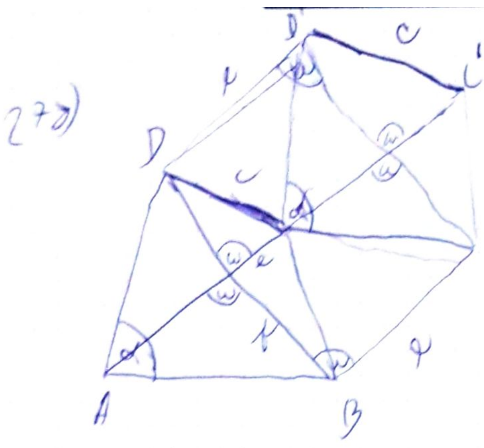
4) $C = S_T(B)$

Počet řešení dle počtu průsečíků $S_T(\overleftrightarrow{AC})$

***278.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: e, f, c, α, ω. ($e = AC, f = BD, c = CD, \alpha = \sphericalangle BAD, \omega = \sphericalangle AUB$, kde U je průsečík úhlopříček.) [Návod: Užijte posunutí o vektor **AC**.]

***279.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno: a, c, e, f. ($a = AB, c = CD, e = AC, f = BD$.)

278)



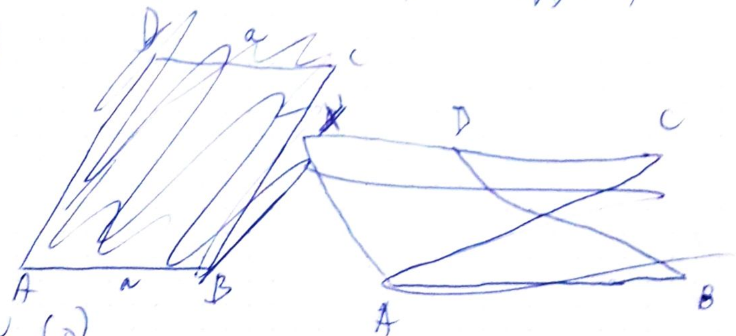
$A'B'C'D' = P_{\overrightarrow{AC}}(ABCD)$

1) Sestrojím rovnoběžník $BB'D'D$
kde $|BB'| = e$
$|BD| = f$
$\omega = |\sphericalangle B'BD|$

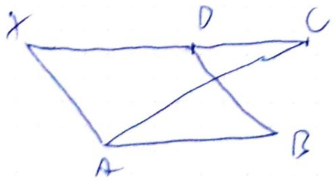
2) Sestrojím C:
$C \in$ kruž$(B'D', \alpha)$
$|CD| = c$

3) $A = P_{\overrightarrow{B'B}}(C)$

279)



nakr. $X = T_{\overrightarrow{DA}}(D)$



1) Sestrojím ACX (sss)

2) Sestrojím D: $D \in \overrightarrow{CX}$, $|DC|$

3) $B = T_{\overrightarrow{AD}}(A)$