§8. Vzdálenost

Def: Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. Vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definované takto: $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min\{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, kde $|AB|$ je délka úsečky AB.

Pozn: Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:
Nechť $M \in \mathbb{R}$ je množina. Pak číslo $i \in R$ nazýváme infimem množiny M , je-li největší dolní závorou množiny M , tj. jestliže platí:

1. $\forall m \in M : i \leq m$
2. $\forall r \in \mathbb{R} : i(\forall m \in M : r \leq m) \Rightarrow i \geq r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Nechť i$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a nechť $D = \{AB : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme infimum množiny D .

Platí: Má-li množina D nejmenší prvek n, pak tento prvek je infimum $\Rightarrow n = \rho(A, B)$.

Pozn: Jestliže $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

A) Vzdálenost 2 bodů v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

Pozn:

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Nechť $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body.

Pak platí $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3(2)} (b_j - a_j)^2}$ [Dk. viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

Př: Určete $\rho(A, B)$:

1. $A[3; -1], B[0; 2]$
   $\rho(A, B) = 3\sqrt{2}$
2. $A[1; 0; 2]; B[-1; 2; 1]$ $\rho(A, B) = 3$

B) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_2$

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p.
$p : ax + by + c = 0; \overrightarrow{n} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}; A[a_1, a_2]$
$q \perp p - q : x = \{[a_1 + ta; a_2 + tb] | t \in \mathbb{R}\}$
$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q$

$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$
$t^* = \frac{-aa_1 - b_a 2 - c}{a^2 + b^2}$
$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA + 0}|$

$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b)$

$$|AA_0| = \sqrt{(t^*a)^2(t^*b^2)} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

V.8.2.: Nechť $A[a_1; a_2] \in \mathbb{E}_2$ je bod, $p : ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$ je přímka. Pak platí:

$$\rho(A,p) = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Př: Určete $\rho(A,p)$: $A[-1; 2]; p : x - 2y + 1 = 0$
$\rho(A,p) = \frac{|-1-2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Př: 200/47:
$A[3; 2]; ; p : 3x - 4y - 7 = 0$
$\rho(A,p) = \frac{|9-8-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{6}{5}$

Př: 200/48:
Určete velikosti výšek trojúhelníku ABC:
$A[0; 0]$
$B[7; 0]$
$C[4; 5]$
$\overrightarrow{BC} = (-3, 5) \Rightarrow a : 5x + 3y + ? = 0; 35 + 0 + ? = 0 \Rightarrow a : 5x + 3y - 35 = 0$
$\overrightarrow{AB} = (7, 0) \Rightarrow c : 0x + y = 0$
$\overrightarrow{AC} = (4, 5) \Rightarrow b : 5x - 4y + ? = 0; 0 - 0 + ? = 0 \Rightarrow b : 5x - 4y = 0$

$\rho(A,a) = \frac{|-35|}{\sqrt{25+9}} = \sqrt{34}\frac{35}{34}$ $\rho(B,b) = \frac{|35|}{\sqrt{25+16}} = \sqrt{41}\frac{35}{41}$ $\rho(C,c) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = 1$

C) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(A,p) = \rho(A,A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p.

I. způsob: $p(P, \overrightarrow{u}); P[p_1, p_2, p_3]; \overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3), A[a_1, a_2, a_3]$
$A_0[p_1 + t^*u_1 + p_2 + t^*u_2, p_3 + t^*y_3]$
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AA_0} = (p_1 - a_1 + t^*u_1 p_2 - a_2 + t^*u_2 p_3 - a_3 + t^*u_3)$
$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u} \Rightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$
Jedna rovnice o jedné neznámé t^*, po určení t^* určíme A_0.

II. způsob: Určení rovnice roviny ρ, která prochází A a je kolmá k přímce p.

$$p \cap \rho = \{A_0\}$$

III. způsob: Vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod p jako funkce proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

Př: Určete $\rho(A,p)$
$A[1; 0; 1], p = [2 - t; t; 0], t \in \mathbb{R}.$

I. způsob: $\overrightarrow{AA_0} = (1 - t^*; t^*; -1)$
$\overrightarrow{u} = (-1; 1; 0)$
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = t^* - 1 + t^*$
$t^* = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = \left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right]$ $\overrightarrow{AA_0} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) \Rightarrow \rho(A, A_0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

II. způsob: $\overrightarrow{n_\rho} = \overrightarrow{u} = (-1; 1; 0)$
$\rho : -x + y + d = 0$
$A \in \rho \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$
$\rho : -x + y + 1 = 0$
$p \cap \rho : -(2 - t) + t + 1 = 0$
$-2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{(1-t)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

minimum nastane pro $t = \frac{1}{2}$ a nabývá hodnoty $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Př: 200/45
$p = \{[1 - 1t; 2 + 3t; 4 + t] | t \in \mathbb{R}\}; M[1; 4; 5]$

I. způsob: $\overrightarrow{MM_0} = (-t; -2 + 3t; -1 + t)$
$\overrightarrow{u} = (-1; 3; 1)$
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = t - 6 + 9t - 1 + t \Rightarrow t = \frac{7}{11}$
$M_0 = \left[\frac{4}{11}; \frac{43}{11}; \frac{51}{11}\right]$
$|MM_0| = \sqrt{\left(\frac{4}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{43}{11} - 4\right)^2 + \left(\frac{51}{11} - 5\right)^2} = \frac{2\sqrt{286}}{11}$

II. způsob: $\overrightarrow{n_\rho} = \overrightarrow{u} = (-1; 3; 1)$
$\rho : -x + 3y + z + d = 0$
$M \in \rho \Rightarrow -1 + 12 + 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$
$\rho : -x + 3y + z - 16 = 0$
$p \cap \rho : -1 + t + 6 + 9t + 4 + t - 16 = 0$
$11t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{MX}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t-2)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{t^2 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 2t + 1} =$$

$$= \sqrt{11t^2 - 14t + 5} = \sqrt{11(t - \frac{7}{11})^2 - \frac{49}{11} + 5}$$

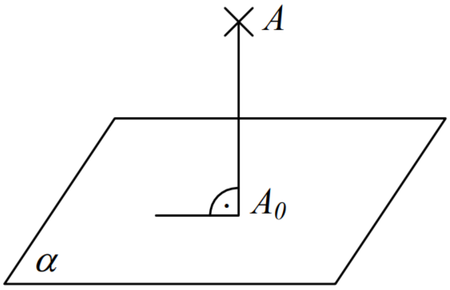
minimum nastane pro $t = \frac{7}{11}$ a nabývá hodnoty $\frac{2\sqrt{286}}{11}$.

Př: 200/46
$p = \{[5 + 5t; 3 - 4t; 2] | t \in \mathbb{R}\}; C[4; 12; 4]$
$|CX| = \sqrt{(1 + 5t)^2 + (9 + 4t)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 10t + 25t^2 + 81 + 72t + 16t^2 + 4} = \sqrt{41x^2 + 82x + 86} =$
$\sqrt{41(x^2 + 1)^2 + 86r - 41}$ Minimum je $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Př: 200/49
$p = \{[t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}\}; A[1, 0, 5]$ $|AX| = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t-5)^2} =$
$= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 20t + 25} = \sqrt{6t^2 - 24t + 27} = \sqrt{6(t^2 - 2)^2 + 3}$
Minimum je $\sqrt{3}$.

D) Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(A,\alpha)=\rho(A,A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α.



$\alpha: ax+by+cz+d=0; [a,b,c]\neq[0,0,0]; A[a_1,a_2,a_3$

$q\perp\alpha \Rightarrow p=[a_1+ta; b_1+tb; c_1+tc]|t\in\mathbb{R}$
$A_0[a_1+t^*a; b_1+t^*b; c_1+t^*c]\in\alpha\cap q$
$a(a_1+t^*a)+b(b_1+t^*b)c(c_1+t^*c)=0$
$t^*(a^2+b^2+c^2)=-aa_1-ba_2-ca_3-d\ t^*=\frac{-aa_1-ba_2-ca_3-d}{a^2+b^2+c^2}$

$\rho(A,\alpha)=|\overrightarrow{AA_0}|$
$\overrightarrow{AA_0}=A_0-A=(t^*a,t^*b,y^*c)$
$|\overrightarrow{AA_0}=\sqrt{(t^*a)^2+(t^*b)^2+(y^*c)^2}=\frac{|aa_1+ba_1+ca_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

V.8.3.: Nechť $A[a_1;a_2;a_3]$ je bod a $\alpha: ax+by+cz+d=0; (a,b,c)\neq\overrightarrow{0}$ je rovina. Pak platí:

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|aa_1+ba_1+ca_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Př: Určete $\rho(A,\alpha)$
$A[1;-1;0], \alpha: x-y+2z-1=0$

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|1+1+0-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Př: 200/50 Určete $\rho(A,\alpha)$
$A[1;0;5]; \alpha: 12x+3y-4z=0$

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|12+0-20|}{\sqrt{144+9+16}}=\frac{8}{\sqrt{169}}=\frac{8}{13}$$

E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3

Pozn: $\rho(p,q)=\rho(A,q)$, kde $A\in p$ je libovolný bod.
$p: ax+by+c_1=0\ p: ax+by+c_2=0; (a,b)\neq\overrightarrow{0}$

Zvolíme $A[a_1,a_2]\in p$:

$\rho(A,q)=\frac{|aa_1+ba_2+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$A\in p: aa_1+ba_2+c_1=0\Rightarrow aa_1+ba2=-c$

$\Rightarrow \rho(p,q) = \frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

V.8.4.: Nechť $p: ax+by+c_1=0; q: ax+by+c_2=0$ jsou dvě rovnoběžky, $(a,b) \neq \overrightarrow{0}$. Pak platí:

$$\rho(p,q) = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Př: Určete $\rho(p,q)$:
$p: 4x-2y+1=0 \sim 2x-y+0.5=0$
$q: 2x-y+3=0$
$\rho(p,q) = \frac{|3-\frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2+(-1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2

Pozn: $\rho(p,q) = \rho(A,q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz C).

Př: Určete $\rho(p,q)$:
$p = \{[1+2t; -2t; -4t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[1-s; s; 2+2s] | s \in \mathbb{R}\}$
$A[1;0;0] \in p$
$B \in q$
$\rho(A,B) = \sqrt{(1-s-1)^2+s^2+(2+2s)^2} = \sqrt{6s^2+8s+4 = 6(s+\frac{2}{3})-\frac{4}{9}\cdot 6+4} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

$$\rho(A,q) = \rho(p,q) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(p,\alpha) = \rho(A,\alpha)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

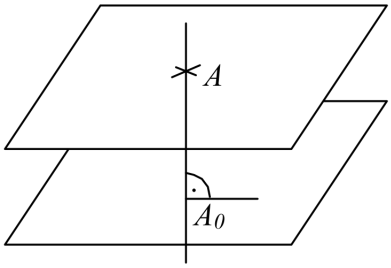
Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz D).

Př: Určete $\rho(p,\alpha)$:
$p = \{[-1+2t; 1-t; 2+3t] | t \in \mathbb{R}\}$
$\alpha: x+5y+z-3=0$
Ověření $p \parallel \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{u_p} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$:
$(2;-1;3)\cdot(1;5;1) = 2-5+3 = 0 \Rightarrow$ platí.
$A[-1;1;2] \in p$:

$$\rho(p,\alpha) = \rho(A,\alpha) = \frac{|-1+5+2-3)}{\sqrt{1+25+1}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$, kde $A \in \alpha$ je libovolný bod.



$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$
$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0;\; (a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$

$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha.$

$\rho(A, \beta) = \frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$A \in \alpha : aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$

$\Rightarrow \underline{\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

V.8.5.: Nechť $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0, \beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ jsou dvé různé rovnoběžné roviny, $(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$. Pak platí:

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(\alpha, \beta)$:
$\alpha : 3x - y + 2z - 1 = 0$
$\beta : -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0\; 3x - y + 2z - 0 = 0$

$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$

I) Vzdálenosti dvou mimoběžných přímek v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta)$, kde $p \subset \alpha; q \subset \beta; \alpha \parallel \beta$.

I. způsob: Z definice:

$p(A, \overrightarrow{u}); q(B, \overrightarrow{v})$
$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (n_1, n_2, n_3)$
$\alpha : n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0$
$A \in \alpha \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_1.
$\beta : n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0$
$B \in \beta \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_2.

Dále viz H).

II. způsob: Pomocí osy mimoběžek:

Nechť o je osa mimoběžek p, q.
Určíme průniky $o \cap p = \{P\}, o \cap q = \{Q\}$

Př: Určete $\rho(p,q)$:

$p = \{[9+4t; -2-3t; t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-2r; -7+9r; 2+2r] | r \in \mathbb{R}\}$

I. zp.: $\overrightarrow{u} = (4;-3;1)$; $\overrightarrow{v} = (-2;9;2)$
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9; 4 \cdot (-2) - 4 \cdot ; 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-2)) = (-15;-10;30) \to (3;2;-6)$

$\alpha : 3x + 2y - 6z + d_1 = 0$
$A[9;2;-1] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = -23.$

$\beta : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$
$B[0;-7;2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 \Rightarrow d_1 = 26.$

$\rho(p,q) = \rho(\alpha,\beta) = \frac{|26+3|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7$

II. zp.: Hleddáme $o(P, \overrightarrow{w})$
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \cdots = (3;2;-6)$

Příčka p, q rovnoběžná s $\overrightarrow{w}$:
$\overrightarrow{AB} = (-9;-5;2)$

$$\left.\begin{array}{l} P = A + k\overrightarrow{u} \\ Q = B + l\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = B + l\overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{w}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ -6 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -9 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & -245 & -245 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 15 & -1 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$P = [9;-2;0] - 2(4;-3;1) = [1;4;-2]$
$Q = [0;-7;2] + (-2;9;2) = [-2;2;4]$
$\Rightarrow |PQ| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \rho(p,q) = 7$

Př: 96/100:

100. Určete osu mimoběžek $x_1 = 7 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 9 - t$ a $x_1 = 3 - 7s$, $x_2 = 1 + 2s$, $x_3 = 1 + 3s$ a vypočtěte jejich vzdálenost.

$p = \{[7+t; 3+2t; 9-t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[3-7s; 1+2s; 1+3s]; s \in \mathbb{R}\}$

$\overrightarrow{u} = (1;2;-1)$
$\overrightarrow{v} = (-7;2;3)$
$\overrightarrow{AB} = (-4;-2;-8)$

$\overrightarrow{w} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2; 7 - 3; 2 + 14) = (8;4;16) \sim (-4;2;8) \Rightarrow$ příčkou je AB.

$P = [7; 3; 9]$
$Q = [3; 1; 1]$
$|PQ| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$

Př: 92/82

82. Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou $4x - 3y - 12 = 0$ a mají od bodu $A = (2,3)$ vzdálenost rovnou 5.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p : 4x - 3y + c = 0$ (z rovnoběžnosti). Vzdálenost tedy je $\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-1+c|}{5} = 5 \Rightarrow c = 5 \cdot 5 + 1 = 26 \vee c = 1 - 5 \cdot 5 = -24$

$$p_1 : 4x - 3y + 26$$

$$q_2 : 4x - 3y - 24$$

Př: 92/83

83. Na ose y najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku i od přímky $3x - 4y + 12 = 0$.

Hledám bod $A[0, y]$. Vzdálenost k počátku: $|y|$.
Vzdálenost k přímce: $\frac{|-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5} \cdot |y - 3|$.

Když $y \leq 0$: $-y = \frac{4}{5}(-y + 3) \Rightarrow -5y = -4y + 12 \Rightarrow y = -12 \in (-\infty; 0\rangle$
Když $0 \leq y \leq 3$: $y = \frac{4}{5}(-y + 3) \Rightarrow 5y = -4y + 12 \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{9}{12} \in \langle 0, 3\rangle$
Když $3 \leq y$: $y = \frac{4}{5}(y - 3) \Rightarrow 5y = 4y - 12 \Rightarrow y = -12 \notin \langle 3, \infty)$

$$A_0 = [0; -12]$$

$$A_1 = \left[0; \frac{9}{12}\right]$$

Př: 92/84

84. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = (-2,1)$ a od bodu $B = (3,1)$ má vzdálenost rovnou 4.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p : ax + by + c = 0$.
Když $a = 0$: $A \in p \Rightarrow 1b + c = 0 \Rightarrow p : 0x + y - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 0 \neq 3 \Rightarrow$ spor.
BÚNO tedy $a = 1$.
$A \in p \Rightarrow -2 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$
$\rho(p, B) = 4 \Rightarrow \frac{|3+b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{1 + b^2} \Rightarrow \frac{25}{16} = 1 + b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$.

Když $b = \frac{3}{4}$: $c = \frac{5}{4}$. Zkouška: $\rho(p, B) = \frac{3+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$

Když $b = -\frac{3}{4}$: $c = \frac{11}{4}$. Zkouška: $\rho(p, B) = \frac{3-\frac{3}{4}+\frac{11}{4}}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$

$$p_1 : x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1 : 4x + 3y + 5 = 0$$

$$p_1 : x - \frac{3}{4}y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1 : 4x - 3y + 11 = 0$$

Př: 92/85

85. **Určete rovnici přímky, která prochází bodem A = (1,2) a má stejnou vzdálenost od bodů B = (3,3) a C = (5,2).**

Nechť hledaná přímka je tvaru $p : ax + by + c = 0$.
Když $b = 0$: $A \in p \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow p : x - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 3 \neq 5 = \rho(C, p) \Rightarrow$ spor.
BÚNO tedy $b = 1$.
$A \in p \Rightarrow a + 2 + c = 0 \Rightarrow a + c = -2$
$\rho(p, B) = \rho(p, C) \Rightarrow \frac{|3a+3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5a+2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |3a+3+c| = |5a+2+c| \Rightarrow |2a+1| = |4a|$

Když $a \leq -\frac{1}{2} \vee a \geq 0$: $2a + 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
Když $a \geq -\frac{1}{2} \wedge a \leq 0$: $2a + 1 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$.

$$p_1 : \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p : x + 2y - 5 = 0$$

$$p_2 : -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p : x - 6y + 11 = 0$$