§1. Podprostory vektorového prostoru

Def: Nechť V je vektorový prostor $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \in V$ vektory, $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}$. Vektor $\overrightarrow{x} = \sum_{i-1}^{k} p_i \overrightarrow{u_i}$ nazýváme lineární kombinací vektorů. Reálná čísla p_i nazyváme *koeficienty lineárni kombinace.*

Lineární kombinaci, kde $\forall i : p_i = 0$, tedy $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ nazyváme triviální lineárni kombinací.

Def: Podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme *podprostorem vektorového prosotoru* V právě tehdy, když W je vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání a vnějšího násobení definovaným ve V.

V.1.1.: ňeprázdná množina W je podprostorem vektorového prostoru V právě tehdy, když platí:

- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W : \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in W$
- $\forall p \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in W : p \cdot \overrightarrow{u} \in W$

[Dk:

„⇒“ Z definice.

„⇐“ kommutativita a asociativita plyne z komutativity a asociativity ve V, platí $\overrightarrow{u} \in W \Rightarrow 0 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \in W^(- 1) \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \in W$. Wlastnost 5.-8. z definice vektorového prostoru platí ve W, protože platí ve V.

]

Př: Nechť $\mathbb{R}^{(2)}$ je aritmetrický prostor. Rozhodnéte, zda nálsledujíci množiny jsou podprostory $\mathbb{R}^{(2)}$

1. $S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$:
   S je podprostorem.
2. $S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$:
   Není: $2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin T$
3. $U = \{(z, z); z \in \mathbb{R}\}$:
   Nechť $\overrightarrow{u} = (u, u)$; $\overrightarrow{v} = (v, v)$, pak $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u + v, u + v) \in U$. je podprostorem.

V.1.2.: Nechť S je podmnožina vektorového prostoru V. Pak množina $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů množiny S je podprostorem V.

[Dk: Nechť $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}\}$. Nechť $\overrightarrow{x} \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R} : x = p_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + p_k \cdot \overrightarrow{u_k}$. Nechť $\overrightarrow{y} \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R} : x = q_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{q_2} \cdot u_2 + \dots + q_k \cdot \overrightarrow{u_k}$. Pak $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (p_1 + q_1) \cdot \overrightarrow{u_1} + (p_2 + q_2) \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + (p_k + q_k) \cdot \overrightarrow{u_k} \in \langle S \rangle$.

Nechť $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}\}$. Nechť $\overrightarrow{x} \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R} : x = p_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + p_k \cdot \overrightarrow{u_k}$. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Pak $q \cdot \overrightarrow{x} = (p_1 \cdot q) \cdot \overrightarrow{u_1} + (p_2 \cdot q) \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + (p_k \cdot q) \cdot \overrightarrow{u_k} \in \langle S \rangle$.

$\langle S \rangle$ je tedy podprostorem V]

Def: Nechť $S \subset V$ je podmnožina vektorového prostoru V. Podprostor $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů množiny S nazýváme *podprostorem generovanym množinou* S nebo *lineárním obalem množiny* S. Množinu S nazýváme *systémem generátorů (množinou generátorů) podprostoru* $\langle S\rangle$.

Př: V geometrickém mmodelu vektorového prostoru je dána množina $S = \{\overrightarrow{a}\}; a \neq 0$. Nalezněte $\langle S\rangle$:

Je to přímka.

Př: Je dán aritmetrický vektorový prostor $\mathbb{R}^{(2)}, S \subset \mathbb{R}^{(2)}, S = \{(1,2),(4,3)\}$. Rozhodněte, jestli $(7,4) \in \langle S\rangle$.

$$2(1,2) + -1(4,3) = (7,4)$$