§1. Nekonečné řady

Def: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálých čísel. Číslo

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad n \in \mathbb{N}$$

Nazývejme *n-tým částečným součtem posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *posloupností částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Nekonečnu řadu (číselnou) nazýváme posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme stručně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Čísla $a_n; n \in \mathbb{N}$ nazýváme *členy řady*, čísla $S_n; n \in \mathbb{N}$ nazýváme *částečné součty řasy.*

Pozn: Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty}$ označujeme jak nekonečnou řadu, tak její součet.

Def: Má-li posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu S, řekneme, že *nekonečná řada konverguje* a číslo S nazveme jejím součtem (zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$).

Je-li $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností divergentní, řekneme, že *nekonečná řada diverguje.*

Pozn:
1) *Chováním řady* budeme rozumět to, zda řada konverguje či diverguje.
2) Někdy se rozlišují 2 možnosti divergence řady (posloupnosti):
   (a) *Řada diverguje*, jestliže má nevlastní limitu ($\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$).
   (b) *Řada osciluje*, jestliže nemá vlastní ani nevlastní limitu.

Př: Určete chování řady:

$$\sum_{n=1}^{infty} a_n = 1 + 2 + 3 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 6$$

$S_1 = 1; S_2 = 3; S_3 = 6; S_4 = 6; \dots$
$\lim_{n\to\infty} S_n = S = 6$ řada konverguje.

Pozn:
1) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní, pak také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.
2) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, může být řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní i kovnergentní.

V.1.1.: Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pozn: Jedná se pouze o padmínku nutnou nikoliv dostačující.

V.1.2.: Dvě řady lišící se pouze v *konečném* počtu členů se chovají stejně (i když mohou mít jiné částečné součty i jiný součet), zejména se chování řady nezmění, jestliže z ní vyškrtneme konečně mnoho členů, přidáme k ní konečně mnoho členů nebo změníme konečně mnoho členů.

Př:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

V.1.3.:

1. Jestliže konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. pak konvergují i řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. pak konvergují i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Pozn:

1) Jestliže z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje pouze jedna, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ nekonverguje, chová se jako druhá řada.

2) Nekonverguje-li žádná z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ může jejich součet konvergovat. (Např. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)$ – jejich součet konverguje k nule.)

Př: Určete chování řady:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$
   $S_i = i \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ řada diverguje.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \quad S_1 = 1; S_2 = 0; S_3 = 1; S_4 = 0; \ldots$ řada osciluje

Př: Určete součt řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2)(3n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}\right)$$

$1 = A(3n+1) + B(3n-2)$
$n^0 : 1 = A - 2B$
$n^1 : 0 = 3A + 3B$

$A = \frac{1}{3}; B = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2)(3n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9n-6} - \frac{1}{9n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \cdots \right) = \frac{1}{3}$$

Př: Určete chování řady:

$$\sum (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Jevidentně rouzdíl každých dvou po sobě jdoucích členů v posloupnosti součtů je ± 1, tedy řada evidentně osciluje.

Př: Dokažtte, že aritmetrická posloupnost s $d \neq 0$ diverguje.

Pro dostatečně vysoké $n_0 < n$ evidentně platí $a_n \notin (-1; 1)$, tedy $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, což je nutnou podmínkou konvergence.

Př:

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{9}{4 * 5 * 6} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k+1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{k(k+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \frac{1}{1} = \frac{7}{4}$$