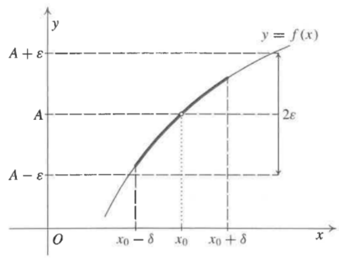
§1. Definice limity

A) Vlastní limita v vlastním bodě

Def: Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$*, jestliže ke každému $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\sigma \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) - \{x\}$, platí $f(x) \in (A - \epsilon, A + \epsilon)$. Píšeme:

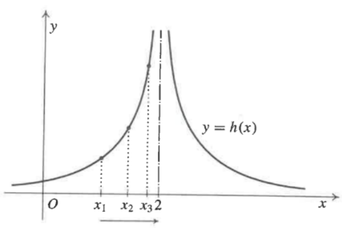
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



B) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Def: Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$*, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}^+$ existuje $\sigma \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) - \{x\}$, platí $f(x) > M$. Píšeme:

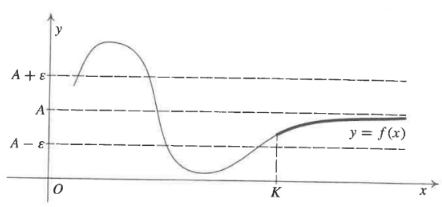
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



C) Vlastní limita v nevlastním bodě

Def: Řekneme, že *funkce f má v $+\infty$ (nebo podrobněji pro x jdoucí do $+\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$*, jestliže ke každému $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x > K$, platí $f(x) \in (A - \epsilon, A + \epsilon)$. Píšeme:

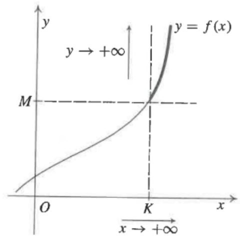
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$



D) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Def: Řekneme, že *funkce f má v $+\infty$ (nebo podrobněji pro x jdoucí do $+\infty$ limitu $+\infty$*, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x > K$, platí $f(x) > M$. Píšeme:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



E) Souhrnná definice limity

Def:

1. *Okolnímu bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme otevřený interval $(x_0 - \sigma; x_0 + \sigma)$, kde σ je kladné reálné číslo. Značíme je $O(x_0)$.

2. *Okolím bodu* $+\infty$ rozumíme každý interval $(k; +\infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(+\infty)$.

3. *Okolím bodu* $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty; k)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(-\infty)$.

4. *prstencovým okolím bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $O(x_0) - \{x_0\}$. Značíme je $P(x_0)$.

Def: Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$*, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

F) Jednosměrné limity

Def:

1. *Levým prstencovým okolím bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \sigma, x_0)$, kde σ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^-(x_0)$.

2. *Pravým prstencovým okolím bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0, x_0 + \sigma)$, kde σ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^+(x_0)$.

Def:

1. Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zleva* rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $P^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^-(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

2. Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *limitu zprava* rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$