§1. Rekurentně určené posloupnosti

Pozn: 1) *Rekurentním určením posloupnosti* rozumíme vyjádření n-tého členu pomocí jednoho nebo několika (až všech) předchozich členů (případně pomocí n).

Např:
AP: $a_n = a_{n-1} + f$ pro $'foralln > 1$ GP: $a_n = a_{n-1} \cdot q$ pro $'foralln > 1$

K jednoznačnému zadání je třeba stanovit počáteční podmínky, tzn. je-li n-tý člen zadán pomocí $a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$ je třeba zadat prvních k členů.

2) Jestliže n-tý člen posloupnosti je vyjádřen přímo pomocí n hovoříme o *explicitním určením posloupnosti*.

Pozn: *Fibonačiho posloupnost*:
$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, její členy jsou tzv. Fibonaciho čísla.

Př: Nalezněte explicitní vyjádření posloupnosti zadané rekurentně:

$a_{n+1} = 3a_n + 1, a_1 = 2$

$a_1 = 2$ $a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ $a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot (3 \cdot 2 + 1) + 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 + 1 = 22$
$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot 2 + 1) + 1) + 1 = 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 1 = 67$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 1 = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2}) + 3^n - 1 = \frac{3^n - 1}{3-1} + 3^{n-1} = \frac{53^{n-1} - 1}{2}$

Nalezenou hypotézu je ale nutno dokázat indukcí:

1. $\frac{5-1}{2} = 2$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 1}{2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$
   $a_{n+1} = 3a_n + 1 = \frac{5 \cdot 3^n - 3}{2} + 1 = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$

Př: : Nalezněte rekurentní vyjádření posloupnosti zadané explicitně:

$$\left\{ \frac{1}{n(n+)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Podílem: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+1}n} = \frac{n}{n+2}$
$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}, a_1 = \frac{1}{2}$
Rozdílem: $a_n + 1 - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1} = \frac{n-n-2}{n-n+1} n(n+1)(n+2)$
$a_n + 1 = a_n - \frac{2}{n(n+1)(n+2)}, a_1 = \frac{1}{2}$

DÚ:

1. Rekurent na explic:
   (a) $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 1$
   $a_1 = 1$
   $a_2 = 1 \cdot 3$
   $a_3 = 1 \cdot 3 \cdot$
   $a_4 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$a_n = 3^{n-1}$$

[Dk: MI

i. $3^0 = 0$

ii. $a_n = 3^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 3^{n-1} \cdot 3 = 3^n$

]

(b) $b_{n+1} = 2 - b_n, b_1 = 0$
$b_1 = 0$
$b_2 = 2 - 0 = 0$
$b_3 = 2 - 2 = 0$
$b_4 = 2 - 0$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{pro lichá } n \\ 2 & \text{pro sudá } n \end{cases}$$

[Dk: MI

i. $0 = 0$

ii. $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro lichá } n \\ 2 & \text{pro sudá } n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = 3^{n-1} \cdot 3 = 3^n \begin{cases} 2 - 0 = 2 & \text{pro lichá } n \\ 2 - 2 = 0 & \text{pro sudá } n \end{cases}$

]

(c) $c_{n+1} = 2c_n - c_{n-1}, c_1 = 1, c_2 = 2$ $c_1 = 1$
$c_2 = 2$
$c_3 = 2 + 2 - 1 = 3$
$c_4 = 3 + 3 - 2 = 4$

$$c_n = n$$

[Dk: MI

i. $1 = 1$

ii. $a_n = n \Rightarrow a_{n+1} = 2n - (n-1) = n + 1$

]

2. Explicitní na rekurentní:

(a) $\left\{n^2 + 1\right\}_{n=1}^{\infty}$
$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 - 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
$a_{n+1} = a_m + 2n + 1; a_1 = 2$

(b) $\{\log 10^n\}_{n=1}^{\infty}$
$a_n = \log 10^n = n \log 10 = n \cdot 1 = n$
$a_n = a_{n-1} + 1; a_1 = 1$

(c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
$a_n = -a_{n-1}; a_1 = -1$

17. Stroj ztrácí opotřebováním každý rok p procent ze své ceny. Za jakou dobu klesne jeho cena na polovinu?

18. Kuřák prokouří ročně průměrně 1 800 Kčs. Kolik by si uspořil za 10 let, kdyby tuto částku ukládal koncem každého roku do spořitelny při 2% celoročním složeném úrokování?

19. Jakou částkou, vloženou počátkem roku, se zajistí důchod ročních 1 000 Kčs, splatný vždy koncem každého roku a trvající 10 let při 2% celoročním složeném úrokování?

20. Kolik je nutno ukládat počátkem každého roku po dobu 10 let, chceme-li mít koncem desátého roku nastřádáno 10 000 Kčs při 2% složeném úrokování?

Př: 23/17:

Po x letech:
$c_x = c_0 p^x = \frac{1}{2} c_0$
$p^x = \frac{1}{2}$ $\log_p p^x = \log_p \frac{1}{2}$ $x = \log_p \frac{1}{2} = -\frac{1}{\log_2 p}$

Př: 23/18: $p_1 = 1800$
$p_{n+1} = 1.02 p_n + p_1$

$p_n = p_1(1.02^{n-1} + 1.02^{n-2} + 1.02^{n-3} + \dots + 1.02^0) = p_1 \frac{1.02^n - 1}{0.02} = 85\,000(1.02^n - 1)$

$p_{10} = 85\,00(1.02^{10} - 1) = 18645.52$

Př: 23/19: $p_{n+1} = (p_n + 1000) \cdot \frac{1}{1.02}$ $p_0 = 0$

$$p_n = 1000(\left(\frac{1}{1.02}\right)^n + \left(\frac{1}{1.02}\right)^{n-1} + \cdots \frac{1}{1.02}) = 1000 \frac{1}{1.02} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.02}\right)^n - 1}{\frac{1}{1.02} - 1}$$

$$p_{10} = 8982.58$$

Př: 23/20: $p_0 = 0$ $p_{n+1} = 1.02(p_n + x)$
$p_n = x 1.02(1.02^{n-1} + 1.02^{n-2} + \dots + 1.02^0) = x \frac{1.02^n - 1}{0.02}$
$10000 = p_{10} = x \frac{1.02^{10} - 1}{0.02}$
$x = \frac{200}{1.02^{10} - 1} = 913.26$