§1. Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic

Př: Vyšetřetřete množinu bodů X roviny, pro které platí $\rho(X,p) \geq 3 \cdot \rho(X,q)$, kde p,q jsou dvě kolmé přímky v rovině.

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby p byla osou x a q osou y.

$p : y = 0, X[x,y]$
$q : x = 0, |y|| \geq |X|$

Útvar U, který má toto analytické vyjádření, sestrojíme na základě znalostí, které máme o grafech funkcí. Diskuzí o hodnotách proměnné y získám soustavu nerovnic:
$y \geq 0 \wedge y \geq 3|x|$ nebo $y \leq 0 \wedge -y \geq 3|x|$
Část roviny „nad grafem" funkce $y = 3|x|$ a Část roviny „pod grafem" funkce $y = -3|x|$

Útvar U je sjednocením dvou vrcholových úhlů, jejíž osy leží na q. Pro α platí $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}$, tj $\alpha \doteq 36°$

Př: Vyšetřete množinu bodů M všech bodů X roviny, pro které platí $|AX| \geq 2|BX|$. Body A, B jsou dva různé body roviny.

Nechť $A[-3;0]; B[3;0]; X[x,y] \in M$:

$$\begin{aligned} |AX| &\geq 2|BX| \\ \sqrt{(x+3)^{+}y^2} &\geq 2\sqrt{(x-3)^2+y^2} \\ (x+3)^2+y^2 &\geq 4(x-3)^2+4y^2 \\ -9 &\geq x^2-10x+y^2 \\ 4^2 = 16 &\geq (x-5)^2+y^2 \end{aligned}$$

Každý bod, který splňuje první nerovnici splňuje i tu poslední vyjadřující $K([5;0],4)$.

Obrácením postupu úprav prokážeme, že každý bod tohoto kruhu K má charakteristickou vlastnost vyšetřované množiny M.

Př: 227/32:A

1. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2 = 2^2$
   $2y^2+2x^2-2x+2x+2 = 4$
   $2y^2+2x^2 = 2$
   $y^2+x^2 = 2$

   $k([0;0],1)$
2. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
   $(x+1)^2+y^2 = 4(x-1)^2+4y^2$
   $x^2+2x+1+y^2 = 4x^2-8x+4+4y^2$
   $0 = 3x^2-10x+3+3y^2$
   $0 = x^2-\frac{10}{3}x+1+y^2$
   $0 = \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1+y^2$

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2$

$k([\frac{5}{3}; 0], \frac{4}{3})$

3. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4 \cdot 2^2$
$2y^2 + 2x^2 - 2x + 2x + 2 = 16$
$2y^2 + 2x^2 = 14$
$y^2 + x^2 = 7$

$k([0;0], \sqrt{7})$ Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2 + y^2 + 2((x-1)^2 + y^2) = 3 \cdot 2^2$
$3y^2 + 3x^2 - 2x + 3 = 3 \cdot 4$
$y^2 + x^2 - \frac{2}{3}x = 3$
$y^2 + \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$
$k\left(\left[\frac{1}{3}; 0\right], \frac{28}{9}\right)$