§1. Polynomy, kořeny polynomů

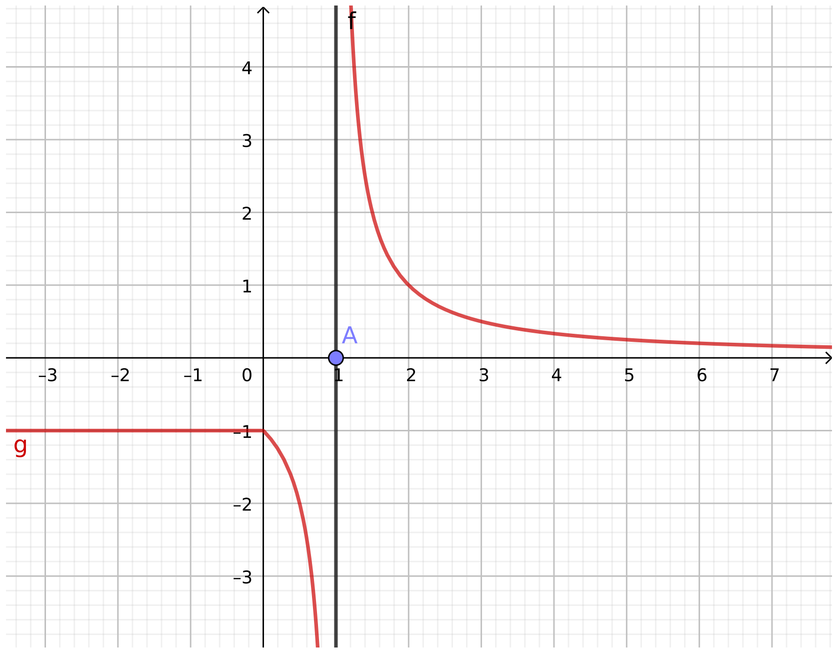
***128. Sestrojte graf funkce a)** $y = \dfrac{2}{x + |x| - 2}$, $x \neq 1$;

Když $x \geq 0$:

$$\frac{2}{2x-2} = \frac{1}{x+1}$$

Když $x \leq 0$:

$$\frac{2}{0-2} = 1$$



***141. Vypočtěte integrály:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^5}$; b) $\displaystyle\int (1-x)^5\, dx$; c) $\displaystyle\int (ax+b)^n\, dx$, n číslo přirozené;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-3)^3}\, dx$; e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, $x \neq a$, n číslo přirozené;

f) $\displaystyle\int e^{3t}\, dt$; g) $\displaystyle\int \sqrt[5]{9-3x}\, dx$ (a, b čísla reálná).

[Návod: a) nahraďte $x - 2 = t$, potom $dx = dt$; b) $1 - x = t$, $dx = -dt$, atd.]

a)

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-2)^3} = \int \frac{\mathrm{d(x-2)}}{(x-2)^3} = \frac{1}{2(x-2)^2} + C$$

d)

$$2\int \frac{\mathrm{d(2x-3)}}{(2x-3)^3} = \frac{2}{2(2x-3)^2} + C$$

$$2\int \frac{\mathrm{d(x-a)}}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

e) /

***191. Vypočtěte integrály:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-3}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{2+3x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

Vždyť takové kkekely jsme se určitě neučili.

Indefinite integral: Step-by-step solution

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}(x) + \text{constant}$$

150. Zpaměti určete obsah obrazce vymezeného danou křivkou, osou x a druhými souřadnicemi bodů křivky: a) $y = \dfrac{1}{x}$, $A \equiv (?,\ 5)$; $B \equiv (5, ?)$; b) $y = \cos x$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}, ?\right)$; c) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv \left(\dfrac{\pi}{4}, ?\right)$; d) $y = e^x$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv (2, ?)$; *e) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $A \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, ?\right)$, $B \equiv (\sqrt{3}, ?)$.

e)

$$\frac{\pi}{6}$$

***371.** Jsou-li x, y, z neznámé a parametr p libovolné číslo, řešte soustavu a proveďte diskusi jejího řešení.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6,\\ x + py &= 9,\\ y &= z - 1; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3,\\ x + p(y+z) &= 5,\\ y - z &= 0; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y + pz &= p,\\ x + pz &= 0,\\ y + pz &= 1; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + py &= 1,\\ y + pz &= 0,\\ z + px &= p. \end{aligned}$$

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - p$$

Když $p = 2$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\mathrm{P} = \emptyset$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & p & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 5p$$

$$x = \frac{18 - 5p}{2 - p}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$y = \frac{-4}{2 - p}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & p & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -p - 2$$

$$z = \frac{p + 2}{p - 2}$$

$$\left\{ \left[\frac{18 - 5p}{2 - p}; \frac{-4}{2 - p}; \frac{p + 2}{p - 2} \right] \right\}$$

b,c,d) Analogicky.

***373. Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy, jsou-li x, y, z neznámé a parametr p libovolné číslo.**

a) $px + y + z = 1$, $x + py + z = p$, $x + y + pz = p^2$;

b) $x - py + p^2 z = 1$, $-p^3 x + y - pz = 1$, $p^2 x - p^3 y + z = 1$.

a)

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = p^3 + 3p + 2 = (p - 1)^2(p + 2)$$

Když $p = 1$:

$$x + y + z = 1$$

$$P = \{[x, y, 1 - x - y] | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Když $p = -2$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\mathrm{P} = \emptyset$$

Jinak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{vmatrix} = -p^3 + p^2 + p - 1$$

$$x = \frac{-p^3 + p^2 + p - 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & p^2 & 1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 1$$

$$y = \frac{p^2 - 2p + 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & p \\ 1 & p & p^2 \end{vmatrix} = p^4 - 2p^2 + 1$$

$$z = \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$\mathrm{P} = \left\{ \left[\frac{-p^3 + p^2 + p - 1}{(p-1)^2(p+2)}; \frac{p^2 - 2p + 1}{(p-1)^2(p+2)}; \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{(p-1)^2(p+2)} \right] \right\}$$

b) Analogicky.

***376. V oboru reálných čísel řešte soustavu**
$(a+1)x + y + z = a + 1$,
$x + (a+1)y + z = a + 3$,
$x + y + (a+1)z = -2a - 4$, jsou-li x, y, z neznámé a a parametr.
Proveďte diskusi vzhledem k číslu a.

Nechť $b = a + 1$:

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} == b^3 + 3b + 2 = (b-1)^2(b+2) = a^2(a+3)$$

Když $a = 0$:

$$3 = x + y + z = 1$$

Nemá řešnení. Když $a=-3$: $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right)$

$$\left\{\left[\frac{4+3a}{3}; \frac{2+3a}{3}; a\right] : a \in \mathbb{R}\right\}$$

Jinak:

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ b+2 & b & 1 \\ -b & 1 & b \end{vmatrix} = b^3+b^2-4b+2 = a^3+4a^2+1$$

$$x = \frac{a^2+4+1}{a(a+3)}$$

$$\begin{vmatrix} b & 1 & b \\ 1 & b+2 & 1 \\ 1 & -2b & b \end{vmatrix} = p^3+3p^2-2p-2 = a^3+6a^2+7a$$

$$y = \frac{a^2+6a+7}{a(a+3)}$$

$$\begin{vmatrix} b & 1 & b \\ 1 & b & b+2 \\ 1 & 1 & -2b \end{vmatrix} = -2p^3-2p^2+2p+2 = -2a^3-8a^2-8a$$

$$z = \frac{-2a^2-8a-8}{a^2(a+3)}$$

$$\left\{\left[\frac{a^2+4+1}{a(a+3)}; \frac{a^2+6a+7}{a(a+3)}; \frac{-2a^2-8a-8}{a^2(a+3)}\right]\right\}$$

***420. Řešte soustavu**
$ax + y + z = 4$,
$x + by + z = 3$,
$x + 2by + z = 4$, jsou-li parametry a, b libovolná čísla a x, y, z neznámé. Proveďte diskusi řešení soustavy vzhledem k číslům a, b.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} ab+1+2b-b-2ab-1 = b(1-a)$$

1. Když $b=0$:

$$3 = x+z = 4$$

   Nemá řešení.

2. Když $a=1$:

$$x+y+z = 4 = z+2by+z$$

(a) Když $b = \frac{1}{2}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{P} = \{[2 - 1z; 2; z] : z \in \mathbb{R}\}$$

(b) Když $a \neq 1$: $y = 0$

$$3 = x + z = 4$$

Nemá řešení.

3. Jinak

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2b$$

$$x = \frac{1 - 2b}{b(1 - a)}$$

$$\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4b & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$x = \frac{1}{b}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b41 & \end{vmatrix} = -2ab + 7b - 1$$

$$x = \frac{-2ab + 7b - 1}{b(1 - a)}$$

$$\left\{ \left[\frac{1 - 2b}{b(1 - a)}; \frac{1}{b}; \frac{-2ab + 7b - 1}{b(1 - a)} \right] \right\}$$