Př: Vyřešte rovnici:

$$3\cos 2x + \cos x \quad = \quad 1 - 4' sin^2 x$$

Př: Vyřešte rovnici:

$$\sin x + \sin 2x = \mathrm{tg} x$$

§9. Vzdálenost

Def: Nechť $A, B \in \mathbb{E}_3$. *Vzdáleností dvou bodů* A,B nazýváme délku úsečky AB a označujeme ji $\rho(A, B)$.

Pozn: Vzdálenost bodů A, B je tedy reálné číslo $\rho(A, B) = |AB|$.

Pozn: Vzdálenost $\rho(A, B)$ můžeme považovat za zobrazení $\rho : \mathbb{E}_3 \times \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$, které má vlastnosti: $\forall A, B, C \in \mathbb{E}_3$:

1. $\rho(A, B) \geq 0$, přičemž $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$, přičemž rovnost nastává $\Leftrightarrow B \in AC$

Pozn: Uvedené vlastnosti se používají při axiomatické definici vzdálenosti.

Def: Necť $A \in \mathbb{E}_3$ je bod $\alpha \subset \mathbb{E}_3$ je rovina.
Kolmým průmětem bodu A do roviny α nazýváme bod A_0 definovaný takto:

- $A \in \alpha \Rightarrow A_0 = A$
- $A \notin \alpha \Rightarrow A_0 \Rightarrow \cap \alpha, p \perp \alpha, A \in p$

V.9.1.: Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ je bod, $\alpha \subset \mathbb{E}_3$ je rovina. Pak platí: $\rho(A, \alpha) = \min\{\rho A, X, X \in \alpha\}$

Př: Vypočtěte vzdálenost V od podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, je li $|AB| = a, |\sphericalangle VAB| = \frac{\pi}{3}$:

$\frac{i}{a\sqrt{2}}2$

Def: Necť $A \in \mathbb{E}_3$ je bod $p \subset \mathbb{E}_3$ je přímka.
Kolmým průmětem bodu A na přímku p nazýváme bod A_0 definovaný takto:

- $A \in p \Rightarrow A_0 = A$
- $A \notin p \Rightarrow A_0 \in p \cap \alpha, p \perp \alpha, A \in p$

V.9.2.: Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ je bod, $p \subset \mathbb{E}_3$ je přímmka. Pak platí: $\rho(A, \alpha) = \min\{\rho A, X, X \in p\}$

Př: Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky VC v pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCV$, je li $|AB| = a$, $|AV| = s$

V.9.3.: Nechť $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny.
Pak platí: $\forall A, B \in \alpha : \rho(A, \beta) = \rho(B, \beta)$

Def: Nechť $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny. Pak *vzdáleností dvou rovnoběžných rovin* $\alpha, \beta)$ definujeme takto: $\rho(\alpha, \beta)$, $A\alpha$ je libovolný bod.

Pozn: 1)

- $\alpha = \beta \Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = 0$
- Vzdálenosti různoběžných rovin klademe hodnotu 0.

Př: Vypočtěte vzdálenost $\rho(F, \overleftrightarrow{BEG})$ v pravidelném čtyřbokém hranolu (kvádru) $ABCDEFGH$, kde $|AB| = |CD| = a, |AE| = b$:

- Porovnáním objemů $BEGT, BGFE$. $V_{BGEF} =$
- Porovnáním obsahů BSF
- Pomocí podobných $\triangle BSF$ a $\triangle FF_0S$

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$