§1. ...

Př: $p = \{[1+t, 2-t]; t \in \mathbb{R}\}$

- Způsob vyloučení parametru:
  $x = 1 + t$
  $y = 2 - t$ $x + y - 3 = 0$
- Přes normálový vektor:
  směrový vektor: $\overrightarrow{u} = (1, -1)$
  normálový vektor: $\overrightarrow{n} = (1, 1)$

$$\begin{aligned} ax + bx + c &= 0 \\ x + y + c &= 0 \end{aligned}$$

Dosadím $A[1, 2] \in p$: $1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$.

Př: Napište parametrické rovnice $p : x - 2y + 1 = 0$.

- Substitucí: $x = 2t - 1$
  $y = t$
  $p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}$.
- Přes normálový vektor:
  normálnový vektor: $\overrightarrow{u} = (-2, 1)$. směrnvý vektor: $\overrightarrow{u} = (2, 1)$. $[2t + a, t] \in p \Rightarrow$ $2t + a - 2t + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ $p = [2t - 1, t]; t \in \mathbb{R}$.

DÚ: 145/17,18 $A = [0, 5]$
$B = [6, 7]$
$C = [1, 4]$
$A_0 = [\frac{7}{2}; \frac{11}{2}]$
$B_0 = [\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$
$C_0 = [\frac{6}{2}; \frac{12}{2}]$
$x - 7y + 35 = 0$
$5x - 11y + 47$
$x - y + 3 = 0$
$6x - y - \frac{3}{2} = 0$
...

Př: Dáno $A = [0, 2], B = [3; 0]$. Napište rovnice přímky: Úsekový:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Obecný

$$2x + \frac{3}{y} - 6 = 0$$

Směrnicový

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Parametrický:

$$p = \{[t, -\frac{2}{3}t + 2]; t \in \mathbb{R}\}$$

Dú: 150/21,22,23,24

§2. ...

§3. ...

§4. ...

§5. Vzájemná poloha dvou rovin

V.5.1.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi Nechť $\rho : ax + by + cz + d = 0, \sigma : ex + fy + gz + h = 0$ jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, d, ci, d) = k \cdot (e, f, g, d)$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a, b, c) = k \cdot (e, f, g) \wedge d \neq k \cdot h$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} : (a, b, c) \neq k \cdot (e, f, g)$.

Př: Určete vzájemnou polohu dvou rovin:
$\rho : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$
$\sigma : x - y - z + 1 = 0$
$\overrightarrow{n_\rho} = (2; 3; 4)$
$\overrightarrow{n_\sigma} = (1; -1; -1)$
vektory jsou lin. nezávislé: $\rho \nparallel \sigma$

Určení průsečnice rovin ρ, σ (hledáme parametrickou rovnici přímky v E_3):
volíme $z = t; t \in \mathbb{R}$:
$2x + 3y + 4t + 5 = 0$
$x - y - t + 1 = 0$
$\Rightarrow 5x + t + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{5} - \frac{t}{5}$
$y = x - t + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t.$
Průsečnice: $\left\{\left[-\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t; -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t; t\right] | t \in \mathbb{R}\right\}$

V.5.2.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi:
Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v}), \sigma(B, \vec{k}, \vec{l})$ jsou roviny. Pak platí:

- $\rho = \sigma \Leftrightarrow \dim \left\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \right\rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 2/$
- $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \dim \left\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \right\rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \rightarrow\overrightarrow{AB} \right\rangle = 3$
- $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \dim \left\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 3.$

Př: Určete vzájemnou polohu rovin ρ a $\sigma : \rho = \{[1+t_1+2t_2; 2t_1+3t_2; -2-2t_1+t_2]; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \rho(A = [1; 0; -2]; \overrightarrow{u} = (1; 2; -2); \overrightarrow{v} = (2; 3; 1))$
$\sigma = \{[r_1; -3 + r_2; 1 + 4r_1 - r_2]; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow \sigma(B = [0; -3; 1]; \overrightarrow{k} = (1; 0; 4); \overrightarrow{l} = (0; 1; -1))$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; -3; 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dim $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l} >= 3 \Rightarrow$ roviny jsou různaběžné.

Rovnice průsečnice ρ, σ: – porovnání souřadnic ρ a σ:
$1 + t_1 + 2t_2 = r_1$
$2t_1 + 3t_0 = +3 + r_2$
$-2 - 2t_1 + t_1 = 1 + 4r_1 - r_2$
soustava 3 rovnic o 4 neznámých, po vyjádření z 2. a 3.rovnice $t = r_1 = t$, odsud a z 1. rovnice $t_1 = -1 - t, r_2 = t + 1$.
Dosazením do rovnice roviny ρ :

$$p = \{[t; -2 + t; 3t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: 182/19,20

Rozhodněte, jakou maji roviny vzájemnou polohu a určete průsečnice:

$$\begin{aligned} \rho &: \quad 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ \sigma &: \quad 4x + y - 5z + 3 = 0 \\ \tau &: \quad x + 2y - z + 1 = 0 \\ \varphi &: \quad -4x + 6y - 2z + 5 = 0 \\ \alpha &: \quad 3x - y - x + 5 = 0 \\ \beta &: \quad x + y + z - 7 = 0 \end{aligned}$$

- ρ a σ:
  Nerovnoběžné:
  $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -14 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & -11 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-5 + 14a}{14}; \frac{-11 + 7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$
- ρ a τ:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & -6 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{5 + 1a}{7}; \frac{-6 + 3a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\sigma \text{ a } \tau}$:
  Nerovnoběžné:
  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -7 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -9 & | & -5 \\ 0 & 7 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-5+9a}{7}; \frac{-1-1a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\rho \text{ a } \varphi}$:
  $(2, -3, 1) = -\frac{1}{2}(-4, 3, -2) \wedge -4 \cdot \frac{-1}{2} = -2 \neq 5$
  Rovnoběžné.

- $\underline{\sigma \text{ a } \varphi}$:
  Nerovnoběžné:
  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & -7 & 7 & | & 8 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 28 & 0 & -28 & | & -13 \\ 0 & 7 & -7 & | & -8 \end{pmatrix}$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-13+28a}{28}; \frac{-8+7a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\tau \text{ a } \varphi}$:
  Nerovnoběžné:
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ -4 & 6 & -2 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 4 & -6 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -14 & 6 & | & 9 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 14 & -6 & | & -9 \end{pmatrix}$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{2+1a}{7}; \frac{-9+6a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\rho \text{ a } \alpha}$:
  Nerovnoběžné:
  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 & | & -38 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & | & -19 \\ 0 & 7 & -5 & | & -22 \end{pmatrix}$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-19+4a}{7}; \frac{-22+5a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\sigma \text{ a } \alpha}$:
  Nerovnoběžné:
  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & | & -3 \\ 3 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 4 & 1 & -5 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} 21 & 0 & -18 & | & -24 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 & | & -8 \\ 0 & 7 & -11 & | & 11 \end{pmatrix}$
  Průsečnice:
  $$\mathrm{P} = \left\{ \left[\frac{-8+6a}{7}; \frac{11+11a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\tau \text{ a } \alpha}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-11+3a}{7}; \frac{2+2a}{7}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\varphi \text{ a } \alpha}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -14 & 10 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 14 & -10 & -35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 42 & 0 & -24 & -105 \\ 0 & 14 & -10 & -35 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -8 & -35 \\ 0 & 14 & -10 & -35 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-35+8a}{14}; \frac{-35+10a}{14}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\rho \text{ a } \beta}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 4 & 25 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{25-4a}{5}; \frac{10-1a}{5}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\sigma \text{ a } \beta}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -9 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & 31 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 31 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{ \left[\frac{-10+6a}{3}; \frac{31-9a}{3}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\underline{\tau \text{ a } \beta}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\{[15-3a; -8+2a; a] : a \in \mathbb{R}\}$$

- $\underline{\varphi \text{ a } \beta}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & -2 & -23 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 10 & 2 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 8 & 47 \\ 0 & 10 & 2 & 23 \end{array}\right)$

Průsečnice:

$$\left\{\left[\frac{47-8a}{10};\frac{23-2a}{10};a\right]:a\in\mathbb{R}\right\}$$

- $\underline{\alpha \text{ a } \beta}$:
  Nerovnoběžné:
  $\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&-1&-5\\1&1&1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\3&-1&-1&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&-4&-4&-26\end{array}\right)\sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&2&2&13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&1\\0&2&2&13\end{array}\right)$
  Průsečnice:
  $$\left\{\left[\frac{1}{2};\frac{13-2a}{2};a\right]:a\in\mathbb{R}\right\}$$

Př: 183/21

$$\rho(A=[1,2,0],\overrightarrow{r}=(2,-1,1),\overrightarrow{s}=(-1,1,-1))$$
$$\sigma(B=[2,3,-1],\overrightarrow{t}=(-2,2,-2),\overrightarrow{u}=(2,-2,-2))$$
$$\tau(C=[4,3,2],\overrightarrow{m}=(-1,1,1),\overrightarrow{n}=(1,-2,-3))$$

Což mohu ekvivalentně převést na:

$$\rho(A=[1,2,0],\overrightarrow{r}=(2,-1,1),\overrightarrow{s}=(1,-1,1))$$
$$\sigma(B=[2,3,-1],\overrightarrow{t}=(1,-1,1),\overrightarrow{u}=(1,-1,-1))$$
$$\tau(C=[4,3,2],\overrightarrow{m}=(1,-1,-1),\overrightarrow{n}=(1,-2,-3))$$

$\overrightarrow{BA}=(-1,-1,1)$
$\overrightarrow{AC}=(3,1,2)$
$\overrightarrow{BC}=(2,0,3)$

- $\underline{\rho \text{ a } \phi}$:
  $\bar{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim$
  $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
  $\Rightarrow \dim\left\langle\overrightarrow{r},\overrightarrow{s},\overrightarrow{t},\overrightarrow{u}\right\rangle=3\Rightarrow$ nerovnoběžné.
  Průsečnice:
  $\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&-2&1\\-1&1&-2&2&1\\1&-1&2&2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&-2&1\\1&-1&2&-2&-1\\1&-1&2&2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-1\\1&-1&2&2&-1\\2&-1&2&-2&1\end{array}\right)\sim$
  $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-1\\0&0&0&4&0\\0&1&-2&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-1\\0&0&0&1&0\\0&1&-2&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-1\\0&1&-2&2&3\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\sim$
  $\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&-2&2&3\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$
  $$u=0\wedge t\in\mathbb{R}\Rightarrow p=\{[2-2t;3+2t;-1-2t]|t\in\mathbb{R}\}$$

- $\underline{\rho \text{ a } \tau}$:
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \dim \langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = 3 \Rightarrow$ nerovnoběžné.

- $\underline{\varphi \text{ a } \tau}$:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \dim \left\langle \vec{t}, \vec{u}, \vec{m}, \vec{n} \right\rangle = 3 \Rightarrow$ nerovnoběžné.

§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi:
Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka,$\rho(B, \vec{v}, \vec{w})$ rovina. Pak platí:

- $p \subset \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 2$
- $p \parallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 3$
- $p \nparallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 3$

Př: Rozhodněte vzájemnou polohu přímky a roviny: $p = \{[3 + t; 1 + 2t; 2 - t] | t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ $p : A = [3; 1; 2], \vec{u} = (1; 2; -1)$
$\rho = \{[1 - 3r + s; 2r - s; 1 + 4r - s] | r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho : B = [1; 0; 1], \vec{v} = (-3; 2; 4), \vec{w} = (1; -1; -1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\dim \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3 \Rightarrow$ přímka je různoběžná.

Určení průsečíku:
porovnáme souřadnice p a ρ: $3 + t = 1 - 3r + s$
$1 + 2t = 2r - s$
$2 - t = 1 + 4r - s$
$\Rightarrow$ 3 rovnice o třech neznámích – vyřešením dostaneme $t = -2$. Dosadím: $\underline{P = [1; -3; 4]}$

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí:

Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka, $\rho : ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0, 0, 0]$ rovina. Nechť $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

- $p \subset \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \wedge A \in \rho$
- $p \parallel \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \wedge A \notin \rho$
- $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$

Př: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

- $p = [1 - t, 1 + 3t; -2]|t \in \mathbb{R}, rho : 3x + y + 5z + 7 = 0$
  $\Rightarrow \overrightarrow{u} = (-1; 3; 0), \overrightarrow{n} = (3; 1; 5).$
  $\overleftrightarrow{u} \cdot \overleftrightarrow{n} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow$ přímka je s rovinou rovnoběžná. Rozhodneme, jestli p leží v rovině ρ, tzn. jestli $A \in \rho$:
  $A[1; 1; -2]$
  $3 + 1 - 10 + 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow 0$ rovnoběžné různé.
- $p = [3 + t; 1 - t; 2t]|t \in \mathbb{R}, \rho : x - 2y + z - 3 = 0$
  $\overrightarrow{u} = (1; -1; 2)$
  $\overrightarrow{n} = (1; -2; 1)$
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow p \nparallel \rho$

  Určení průsečíku:
  Dosadíme rovnici přímky do rovnice roviny ρ: $3 + t - 2 + 2t + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}$.

$$p = \left[\frac{17}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$$

Př: 188/26:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = (1; 0; 2)$
$\overrightarrow{n} = (2; 1; 1)$
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 2 + 0 + 2 = 4 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné.

$2 \cdot t + 0 + 2t + 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} \cap \rho = P + \overrightarrow{PQ} \cdot (-2) = [-2; 0; -4]$

Př: 188/27:
Určím rovnoběžnou rovinu procházející A:

$$2 \cdot 3 - 2 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Rovnicí tedy je $\varphi : 2x - y - z - 3 = 0$.
Dosadím: $6 - y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{y = 5}$.

Př: 189/28:

- $\overrightarrow{t} = (-1, 1, -3)$
  $\overrightarrow{n} = (-1; 2; 1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné

  $A = [1, 0, 2]$. Dosadím: $-1 + 0 + 2 - 1 = 0$. Průnikem je p.
- $\overrightarrow{t} = (-1, 3, 1)$
  $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné.

  Průsečík: $2 - t + 3t - t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow q \cap \sigma = [-1, 1, -4]$.

- $\overrightarrow{t} = (3; -4; 2)$
  $\overrightarrow{n} = (2; 1; -1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné.
  $A[2; 1; 0]$ dosadím: $4 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow m \cap \tau = \emptyset$.

Př: 189/29: Průsečnice p: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -13 & 7 & 31 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right)$

$$p = \left\{\left[\frac{-11 + 5t}{13}; \frac{-31 + 7t}{13}; a\right] : t \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow p\left(A\left[-\frac{11}{13}; -\frac{31}{13}; 0\right]; \overrightarrow{u} = (5; 7; 13)\right)$$

$$\rho(B[5; 3; 1], \overrightarrow{v} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{w} = (2, -1, 5)$$

$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nejsou rovnoběžné.

Převedu ρ na obecnou rovnici roviny: $x + y = 8 + s \Rightarrow 5x + 5y - z = 40 - 1 = 39$
Spočítám průsečím všech rovnic:

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 5 & 5 & -1 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -1 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -13 & 7 & 31 \\ 0 & -10 & 9 & 79 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 7 & 157 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 470 & 0 & 0 & 2360 \\ 0 & 470 & 0 & 2740 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 47 & 0 & 0 & 236 \\ 0 & 47 & 0 & 274 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right)$

$$P = \left\{\left[\frac{236}{47}; \frac{274}{47}; \frac{717}{47}\right]\right\}$$

Př: Převedu γ na obecnou rovnici: $x + z = -6 + r \Rightarrow x - y + z = -5$

Průsečík: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$

$$P = \{[2; 0; -7]\}$$

Převedu δ na obecnou: $x + 3y = 12 + 7t \Rightarrow x + 3y + 7z = 19$

$$1+0-49+a=0 \Rightarrow a=48$$

$\underline{\epsilon : x+3y+7z+48=0}$

Př: 32 Jelikož se roviny prtínají v právě jednom bodě, musí průsečnice protínat γ v jednom bodě.

Spočítám dimenzi vektorového prostoru tvořeného normálovými vektory k rovinám: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Jelikož dimenze je 3,roviny se protínají v právě jednom bodě. Jelikož ϵ má stejný normálový vektor jako δ, výsledk se nezmění.

§7. Příčka mimoběžek

Def: Nechť p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Přímka r, která je různoběžná s oběma přímkami p, q, se nazývá *příčka mimoběžek p, q* .

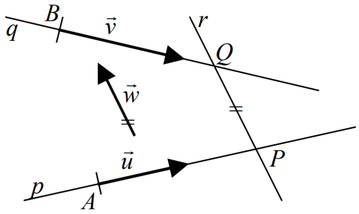
Pozn: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}); q(B, \overrightarrow{v})$ jsou přímky. Pak pro příčku mimoběžek $r(Q, \overrightarrow{w})$ platí: $\overrightarrow{w} \in \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{AB} \right\rangle$.

A) Nalezení příčky r mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s daným vektorem

Pozn: Dáno: $p(A, \overrightarrow{u}); q(B, \overrightarrow{v}); \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$

Rozbor:

1) $\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \Rightarrow 0$ řešení
2) $\overrightarrow{w} \notin \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \Rightarrow 1$ řešení



$$\left.\begin{array}{l} P = A + k \cdot \overrightarrow{u} \\ Q = B + l \cdot \overrightarrow{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{w}$

$\Rightarrow B + l \cdot \overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{w}$

$\underline{\overrightarrow{A}B = x\overrightarrow{w} + k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v}}$

Př: Jsou dány mymoněžky $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$, a vektor $\overrightarrow{w}$:

$A[1;-2;5]$; $B[-1;1;-5]$; $\overrightarrow{u}(1;3;-1)$, $\overrightarrow{v}(1;1;2)$, $\overrightarrow{w}(1;1;4)$
Najděte příčku p, q, která je rovnoběžná s $\overrightarrow{w}$.

$\overrightarrow{AB} = (-2;3;-10) \Rightarrow (-2;3;-10) = x(1;1;4) - l(1;1;2) + k(1;3;-1)$. Hledáme body P, Q, pro které platí: $P = A + k \cdot \overrightarrow{u}$; $Q = B + l \cdot \overrightarrow{v}$ a zároveň $\overrightarrow{PQ} = x \cdot \overrightarrow{w}$.
$\Rightarrow x \cdot \overrightarrow{w} = Q - P = B - A + l\overrightarrow{v} - k\overrightarrow{u}$
$k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (-2,3;-10)$.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right)$$
$k = \frac{5}{2} \Rightarrow P = \left[\frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} = \left\{\left[\frac{7}{2} + t; \frac{11}{2} + t; \frac{5}{2} + 4t\right] | t \in \mathbb{R}\right\}$

Př: Cvičení 1:
Jsou dány mymoněžky $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$, a vektor $\overrightarrow{w}$:
$A[10;-7;0]$; $B[-3;5;0]$; $\overrightarrow{u}(5;4;1)$, $\overrightarrow{v}(2;1;1)$, $\overrightarrow{w}(8;7;1)$
Najděte příčku p, q, která je rovnoběžná s $\overrightarrow{w}$.

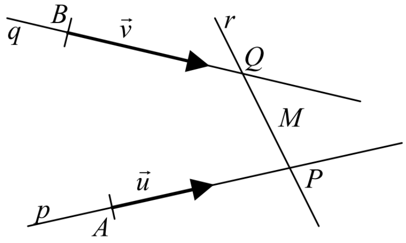
$k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{w}\overrightarrow{AB} = (-13;12;0)$. $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 8 & -13 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 8 & -13 \end{array}\right) \sim$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ hledaná příčka neexistuje.

B) Nalezení příčky r mimoběžek p, q, která prochází bodem M

Pozn: Dáno: $p(A, \overrightarrow{u})$; $q(B, \overrightarrow{v})$, bod M.

Rozbor:

1) $M \in p \cap q \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení
2) $M \notin p \cap q \Rightarrow$
   (a) jedna přímka je rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem $M \Rightarrow 0$ řešení.
   (b) ani jedna přímka není rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem $M \Rightarrow 1$ řešení.



$P = A + k\overrightarrow{u}$
$Q = B + l\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{MP} = x \cdot \overrightarrow{MQ}$
$A + k\overrightarrow{u} = x(\overrightarrow{MB} + l\overrightarrow{v})$
$-k\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$, kde $m = x \cdot l$

$\Rightarrow$ 3 rovnice o 3 neznámých k, m, x.

Př: Jsou dány mimoběžky $p(A, u), q(B, v)$, bod M. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, procházející bodem M.
$A[1; 5; 2]; B[0; -1; 1]; M[0; 1; -5]; \overrightarrow{u}(1; 2; 1), \overrightarrow{v}(3; 1; 0)$

$\overrightarrow{MA} = (1; 4; 7)$
$\overrightarrow{MB} = (0; -2; 6)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{P} = \left\{ \left[-3; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right] \right\}$$

$$k = -3; m = -\frac{2}{3}; x = \frac{2}{3}$$

$P = [1; 5; 2] - 3(1; 2; 1) = [-2; -1; -1]$
$Q = [0; -1; 1] - 1(3; 1; 0) = [-3; -2; 1]$
$\overleftrightarrow{PQ} = \{[t; 1 + t; -5 - 2t] | t \in \mathbb{R}\}$.

Př: Jsou dány mimoběžky $p(A, u), q(B, v)$, bod M. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, procházející bodem M.
$A[3; 1; 2]; B[-2; 1; 0]; M[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0]; \overrightarrow{u}(1; 2; -1), \overrightarrow{v}(3; -1; 1)$

$\overrightarrow{MA} = (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}; 2)$
$\overrightarrow{MB} = (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0)$

$P = A + k\overrightarrow{u}$
$Q = B + l\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{MP} = x \cdot \overrightarrow{MQ}$
$A + k\overrightarrow{u} = x(\overrightarrow{MB} + l\overrightarrow{v})$
$-k\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$, kde $m = x \cdot l$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & -3 & 7 \\ -4 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 15 & 13 \end{array}\right)$$

$$k = -\frac{3}{5}; m = \frac{7}{5}; x = \frac{13}{15}$$

$P = [3 - \frac{3}{5}; 1 - \frac{6}{5}; 2 + \frac{3}{5}] = [\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{13}{5}]$
$Q = [-2 + \frac{21}{5}; 1 - \frac{7}{5}; 0 + \frac{7}{5}] = [\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{7}{5}]$

$\overrightarrow{QP} = [\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{6}{5}]$

$$\overleftrightarrow{PQ} = \left\{ \left[[\frac{12}{5} + k; -\frac{1}{5} + k; \frac{13}{5} + 6k \right] | k \in \mathbb{R} \right\}$$

C) Nalezení osy o mimoběžek p, q

Def: Nechť p, q jsou mimoběžné přímky. Pak příčka mimoběžek o, která je kolmá k přímkám p i q, se nazývá osa mimoběžek p, q.

Př: nalezněte osu mimoběžek p, q.
$p = \{[8 + t; 5 + 2t; 8 - t] | t \in \mathbb{R}\}$ $q = \{[-4 - 7r; 3 + 2r; 4 + 3r], r \in \mathbb{R}\}$

Hledáme osu $o(P, \overrightarrow{w})$; $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, máme dáno:
$A[8; 5; 8]$, $\overrightarrow{u}(1; 2; -1)$
$B[-4; 3; 4]$, $\overrightarrow{u}(-7; 2; 3)$

$p \perp o : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = w_1 + 2w_2 - w_3 = 0 \Rightarrow w_2 = \frac{w_1}{2}$
$q \perp o : \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = -7w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = 2w_1$

w_1 – libovolný (jedná se jen o násobek) $\Rightarrow \overrightarrow{w} = (2; 1; 4)$.

tento vektor lze také zistat jako vektorový součin $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Nyní hledáme příčku p, q rovnoběžnou s $\overrightarrow{w}$.

$$\left.\begin{array}{l} P = A + k \cdot \overrightarrow{u} \\ Q = B + l \cdot \overrightarrow{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{w}$
$\Rightarrow B + l \cdot \overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{w}$
$\underline{\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{w} + k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v}}$

$k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (-12; -2; -4)$.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & -12 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & | & -12\\ 0 & -4 & -6 & | & 16\\ 0 & -16 & -3 & | & 22\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & | & -12\\ 0 & 2 & 3 & | & -8\\ 0 & 16 & 3 & | & -22\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & | & -12\\ 0 & 2 & 3 & | & -8\\ 0 & 0 & -21 & | & 42\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & | & -12\\ 0 & 2 & 3 & | & -8\\ 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -17 & | & 32\\ 0 & 2 & 3 & | & -8\\ 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & | & -2\\ 0 & 2 & 0 & | & -2\\ 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & -1\\ 0 & 1 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix}$$

$k = 1 \Rightarrow P = [7; 3; 9]$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \{[7 + 2t; 3 + t; 9 + 4t] | t \in \mathbb{R}\}$$

Př: Úkol 3

Nalezněte příčku mimoběžek, která je rovnoběžná s rovinami ρ, σ.

$p : A[-5; 2; 2]; \overrightarrow{u} = (2; 0; 1)$
$q : z - 2 = 0 \wedge 5x - 8y + 9z + 100 = 0 \Rightarrow B[\frac{-118}{5}; 0; 2]; \overrightarrow{v}(8; 5; 0)$

$\rho \{[3 + 3r + s; 2r; 2s]; r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho : 2x - 3y - 3z = 6$
$\sigma : x - 4u - 3z + 12 = 0$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}2 & -3 & -3 & | & 6\\ 1 & -4 & -3 & | & -12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4 & -3 & | & -12\\ 2 & -3 & -3 & | & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4 & -3 & | & -12\\ 0 & 5 & 3 & | & 30\end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix}5 & 0 & -3 & | & 60\\ 0 & 5 & 3 & | & 30\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{w}(3; -3; 5)$

$$\left.\begin{array}{r}P = A + k \cdot \overrightarrow{u}\\ Q = B + l \cdot \overrightarrow{v}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{w}$
$\Rightarrow B + l \cdot \overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{w} + k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v}$

$$k\overrightarrow{u} - l\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (\tfrac{-93}{5}; -2; 0).\ \bar{A} = \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & -5 & -10 & | & -40\\ 15 & -93 & 0 & | & -5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\\ 15 & -93 & 0 & | & -5\end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 15 & -93 & 0 & | & -5\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & -66 & -45 & | & 269\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & 66 & 45 & | & -269\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\\ 0 & 66 & 45 & | & -269\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\\ 0 & 0 & -87 & | & -797\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}10 & -40 & 15 & | & -93\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\\ 0 & 0 & 87 & | & 797\end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix}10 & 0 & 95 & | & 227\\ 0 & 1 & 2 & | & 8\\ 0 & 0 & 87 & | & 797\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}870 & 0 & 0 & | & -55966\\ 0 & 87 & 0 & | & -898\\ 0 & 0 & 87 & | & 797\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}435 & 0 & 0 & | & -27983\\ 0 & 87 & 0 & | & -898\\ 0 & 0 & 87 & | & 797\end{pmatrix}$$

$k = \frac{27983}{435} \Rightarrow P = [-5 + 2\frac{27983}{435}; 2; 2 + \frac{27983}{435}]$

$$o = \overleftrightarrow{PQ} = \left\{\left[-5 + 2\frac{27983}{435} + 3k; 2 - 3k; 2 + \frac{27983}{435} + 5k\right] | k \in \mathbb{R}\right\}$$

Př: úkol 4:

Nalezněte příčku mimoběžek, která leží v rovině ρ:

$p : x + y = 2 \wedge 2x + z = 5.$
$q : x + 2y = 1 \wedge -3y + z = 2$

$\rho : x + 2y - x = -2$

Určím $P = p \cap \rho$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -9 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$

$$P = [-1; 3; 7]$$

Určím $Q = q \cap \rho$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$Q = \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 3\right]$$

$\overrightarrow{PQ} = (\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; -4)$

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{[-1 + 4t; 3 - 8t; 7 - 12t] \, | t \in \mathbb{R}\}$$

§8. Vzdálenost

Def: Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. Vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definované takto: $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min\{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, kde $|AB|$ je délka úsečky AB.

Pozn: Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:
Nechť $M \in \mathbb{R}$ je množina. Pak číslo $i \in R$ nazýváme infimem množiny M , je-li největší dolní závorou množiny M , tj. jestliže platí:

1. $\forall m \in M : i \leq m$
2. $\forall r \in \mathbb{R} : i(\forall m \in M : r \leq m) \Rightarrow i \geq r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Nechť i$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a nechť $D = \{AB : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme infimum množiny D .

Platí: Má-li množina D nejmenší prvek n, pak tento prvek je infimum $\Rightarrow n = \rho(A, B)$.

Pozn: Jestliže $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

A) Vzdálenost 2 bodů v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

Pozn:

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Nechť $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body.

Pak platí $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3(2)} (b_j - a_j)^2}$ [Dk. viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

Př: Určete $\rho(A, B)$:

1. $A[3; -1], B[0; 2]$
   $\rho(A, B) = 3\sqrt{2}$

2. $A[1; 0; 2]; B[-1; 2; 1]$ $\rho(A, B) = 3$

B) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_2$

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p.
$p : ax + by + c = 0; \overrightarrow{n} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}; A[a_1, a_2]$
$q \perp p - q : x = \{[a_1 + ta; a_2 + tb] | t \in \mathbb{R}\}$
$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q$

$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$
$t^* = \frac{-aa_1 - b_a 2 - c}{a^2 + b^2}$
$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA + 0}|$
$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b)$

$$|AA_0| = \sqrt{(t^*a)^2 (t^*b^2)} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.2.: Nechť $A[a_1; a_2] \in \mathbb{E}_2$ je bod, $p : ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$ je přímka. Pak platí:

$$\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př: Určete $\rho(A, p)$: $A[-1; 2]; p : x - 2y + 1 = 0$
$\rho(A, p) = \frac{|-1-2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Př: 200/47:
$A[3; 2];; p : 3x - 4y - 7 = 0$
$\rho(A, p) = \frac{|9-8-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{6}{5}$

Př: 200/48:
Určete velikosti výšek trojúhelníku ABC:
$A[0; 0]$
$B[7; 0]$
$C[4; 5]$

$\overrightarrow{BC} = (-3, 5) \Rightarrow a : 5x + 3y + ? = 0; 35 + 0 + ? = 0 \Rightarrow a : 5x + 3y - 35 = 0$
$\overrightarrow{AB} = (7, 0) \Rightarrow c : 0x + y = 0$
$\overrightarrow{AC} = (4, 5) \Rightarrow b : 5x - 4y + ? = 0; 0 - 0 + ? = 0 \Rightarrow b : 5x - 4y = 0$

$\rho(A, a) = \frac{|-35|}{\sqrt{25+9}} = \sqrt{34}\frac{35}{34}$ $\rho(B, b) = \frac{|35|}{\sqrt{25+16}} = \sqrt{41}\frac{35}{41}$ $\rho(C, c) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = 1$

C) Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(A,p)=\rho(A,A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p.

I. způsob: $p(P,\overrightarrow{u}); P[p_1,p_2,p_3]; \overrightarrow{u}(u_1,u_2,u_3), A[a_1,a_2,a_3]$
$A_0[p_1+t^*u_1+p_2+t^*u_2,p_3+t^*y_3]$
$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AA_0}=(p_1-a_1+t^*u_1p_2-a_2+t^*u_2p_3-a_3+t^*u_3)$
$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{u}\Rightarrow\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0.$

Jedna rovnice o jedné neznámé t^*, po určení t^* určíme A_0.

II. způsob: Určení rovnice roviny ρ, která prochází A a je kolmá k přímce p.

$$p\cap\rho=\{A_0\}$$

III. způsob: Vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod p jako funkce proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

Př: Určete $\rho(A,p)$
$A[1;0;1], p=[2-t;t;0], t\in\mathbb{R}.$

I. způsob: $\overrightarrow{AA_0}=(1-t^*;t^*;-1)$
$\overrightarrow{u}=(-1;1;0)$
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=t^*-1+t^*$
$t^*=\frac{1}{2}\Rightarrow A_0=\left[\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right]\ \overrightarrow{AA_0}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)\Rightarrow\rho(A,A_0)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

II. způsob: $\overrightarrow{n_\rho}=\overrightarrow{u}=(-1;1;0)$
$\rho:-x+y+d=0$
$A\in\rho\Rightarrow-1+d=0\Rightarrow d=1$
$\rho:-x+y+1=0$
$p\cap\rho:-(2-t)+t+1=0$
$-2+2t+1=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2-t;t;0]; \overrightarrow{AX}=(1-t;t;-1)$

$$|\overrightarrow{AX}|=\sqrt{(1-t)^2+t^2+(-1)^2}=\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

minimum nastane pro $t=\frac{1}{2}$ a nabývá hodnoty $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Př: 200/45
$p=\{[1-1t;2+3t;4+t]|t\in\mathbb{R}\}; M[1;4;5]$

I. způsob: $\overrightarrow{MM_0}=(-t;-2+3t;-1+t)$
$\overrightarrow{u}=(-1;3;1)$
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=t-6+9t-1+t\Rightarrow t=\frac{7}{11}$
$M_0=\left[\frac{4}{11};\frac{43}{11};\frac{51}{11}\right]$
$|MM_0|=\sqrt{\left(\frac{4}{11}-1\right)^2+\left(\frac{43}{11}-4\right)^2+\left(\frac{51}{11}-5\right)^2}=\frac{2\sqrt{286}}{11}$

II. způsob: $\overrightarrow{n_\rho} = \overrightarrow{u} = (-1; 3; 1)$
$\rho : -x + 3y + z + d = 0$
$M \in \rho \Rightarrow -1 + 12 + 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$
$\rho : -x + 3y + z - 16 = 0$
$p \cap \rho : -1 + t + 6 + 9t + 4 + t - 16 = 0$
$11t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{MX}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t-2)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{t^2 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 2t + 1} =$$

$$= \sqrt{11t^2 - 14t + 5} = \sqrt{11(t - \frac{7}{11})^2 - \frac{49}{11} + 5}$$

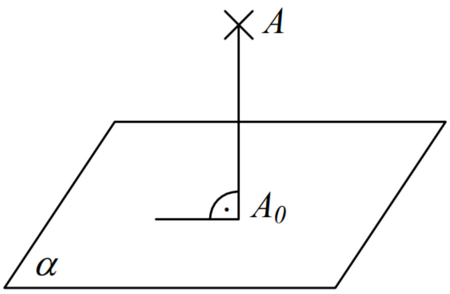
minimum nastane pro $t = \frac{7}{11}$ a nabývá hodnoty $\frac{2\sqrt{286}}{11}$.

Př: 200/46
$p = \{[5 + 5t; 3 - 4t; 2] | t \in \mathbb{R}\}; C[4; 12; 4]$
$|CX| = \sqrt{(1+5t)^2 + (9+4t)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 10t + 25t^2 + 81 + 72t + 16t^2 + 4} = \sqrt{41x^2 + 82x + 86} =$
$\sqrt{41(x^2+1)^2 + 86r - 41}$ Minimum je $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Př: 200/49
$p = \{[t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}\}; A[1, 0, 5]$ $|AX| = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t-5)^2} =$
$= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 20t + 25} = \sqrt{6t^2 - 24t + 27} = \sqrt{6(t^2-2)^2 + 3}$
Minimum je $\sqrt{3}$.

D) Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α.



$\alpha : ax + by + cz + d = 0; [a, b, c] \neq [0, 0, 0]; A[a_1, a_2, a_3$

$q \perp \alpha \Rightarrow p = [a_1 + ta; b_1 + tb; c_1 + tc] | t \in \mathbb{R}$
$A_0[a_1 + t^*a; b_1 + t^*b; c_1 + t^*c] \in \alpha \cap q$
$a(a_1 + t^*a) + b(b_1 + t^*b)c(c_1 + t^*c) = 0$
$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d$ $t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - ca_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$

$\rho(A, \alpha) = |\overrightarrow{AA_0}|$
$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b, y^*c)$
$|\overrightarrow{AA_0} = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2 + (y^*c)^2} = \frac{|aa_1 + ba_1 + ca_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

V.8.3.: Nechť $A[a_1; a_2; a_3]$ je bod a $\alpha : ax + by + cz + d = 0; (a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$ je rovina. Pak platí:

$$\rho(A,\alpha) = \frac{|aa_1 + ba_1 + ca_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(A,\alpha)$
$A[1;-1;0], \alpha : x - y + 2z - 1 = 0$

$$\rho(A,\alpha) = \frac{|1+1+0-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Př: 200/50 Určete $\rho(A,\alpha)$
$A[1;0;5]; \alpha : 12x + 3y - 4z = 0$

$$\rho(A,\alpha) = \frac{|12+0-20|}{\sqrt{144+9+16}} = \frac{8}{\sqrt{169}} = \frac{8}{13}$$

E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3

Pozn: $\rho(p,q) = \rho(A,q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.
$p : ax + by + c_1 = 0$ $p : ax + by + c_2 = 0; (a,b) \neq \overrightarrow{0}$

Zvolíme $A[a_1,a_2] \in p$:

$\rho(A,q) = \frac{|aa_1+ba_2+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba2 = -c$

$\Rightarrow \rho(p,q) = \frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

V.8.4.: Nechť $p : ax + by + c_1 = 0; q : ax + by + c_2 = 0$ jsou dvě rovnoběžky, $(a,b) \neq \overrightarrow{0}$. Pak platí:

$$\rho(p,q) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př: Určete $\rho(p,q)$:
$p : 4x - 2y + 1 = 0 \sim 2x - y + 0.5 = 0$
$q : 2x - y + 3 = 0$

$\rho(p,q) = \frac{|3-\frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2+(-1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2

Pozn: $\rho(p,q) = \rho(A,q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz C).

Př: Určete $\rho(p,q)$:
$p = \{[1+2t; -2t; -4t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[1-s; s; 2+2s] | s \in \mathbb{R}\}$

$A[1;0;0] \in p$
$B \in q$

$\rho(A,B) = \sqrt{(1-s-1)^2+s^2+(2+2s)^2} = \sqrt{6s^2+8s+4 = 6(s+\frac{2}{3}) - \frac{4}{9}\cdot 6+4} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

$$\rho(A,q) = \rho(p,q) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(p,\alpha) = \rho(A,\alpha)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz D).

Př: Určete $\rho(p,\alpha)$:
$p = \{[-1+2t; 1-t; 2+3t] | t \in \mathbb{R}\}$
$\alpha: x + 5y + z - 3 = 0$

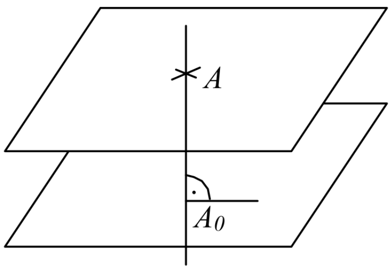
Ověření $p \parallel \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{u_p} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$:
$(2;-1;3)\cdot(1;5;1) = 2-5+3 = 0 \Rightarrow$ platí.

$A[-1;1;2] \in p$:

$$\rho(p,\alpha) = \rho(A,\alpha) = \frac{|-1+5+2-3)}{\sqrt{1+25+1}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(\alpha,\beta) = \rho(A,\beta)$, kde $A \in \alpha$ je libovolný bod.



$\alpha: ax + by + cz + d_1 = 0$
$\beta: ax + by + cz + d_2 = 0$; $(a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$

$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha$.

$\rho(A,\beta) = \frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$A \in \alpha: aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$

$\Rightarrow \underline{\rho(\alpha,\beta) = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

V.8.5.: Nechť $\alpha: ax+by+cz+d_1 = 0, \beta: ax+by+cz+d_2 = 0$ jsou dvé různé rovnoběžné roviny, $(a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$. Pak platí:

$$\rho(\alpha,\beta) = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Př: Určete $\rho(\alpha,\beta)$:
$\alpha: 3x - y + 2z - 1 = 0$
$\beta: -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0 \; 3x - y + 2z - 0 = 0$
$\rho(\alpha,\beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$

I) Vzdálenosti dvou mimoběžných přímek v $\mathbb{E}_3$

Pozn: $\rho(p,q) = \rho(\alpha,\beta)$, kde $p \subset \alpha; q \subset \beta; \alpha \parallel \beta$.

I. způsob: Z definice:

$p(A, \overrightarrow{u}); q(B, \overrightarrow{v})$
$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (n_1, n_2, n_3)$
$\alpha: n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0$
$A \in \alpha \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_1.
$\beta: n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0$
$B \in \beta \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_2.

Dále viz H).

II. způsob: Pomocí osy mimoběžek:

Nechť o je osa mimoběžek p, q.
Určíme průniky $o \cap p = \{P\}, o \cap q = \{Q\}$

Př: Určete $\rho(p,q)$:
$p = \{[9+4t; -2-3t; t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-2r; -7+9r; 2+2r] | r \in \mathbb{R}\}$

I. zp.: $\overrightarrow{u} = (4; -3; 1); \overrightarrow{v} = (-2; 9; 2)$
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9; 4 \cdot (-2) - 4 \cdot ; 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-2)) = (-15; -10; 30) \rightarrow (3; 2; -6)$

$\alpha: 3x + 2y - 6z + d_1 = 0$
$A[9; 2; -1] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = -23.$

$\beta: 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$
$B[0; -7; 2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 \Rightarrow d_1 = 26.$

$\rho(p,q) = \rho(\alpha,\beta) = \frac{|26+3|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7$

II. zp.: Hleddáme $o(P, \overrightarrow{w})$
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \cdots = (3; 2; -6)$

Příčka p, q rovnoběžná s $\overrightarrow{w}$:
$\overrightarrow{AB} = (-9; -5; 2)$
$$\left.\begin{array}{l} P = A + k\overrightarrow{u} \\ Q = B + l\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = B + l\overrightarrow{v} - A - k\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{w}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ -6 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & -5 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -9 \\ 6 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 17 & 31 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & -245 & -245 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 15 & -1 \\ 0 & 8 & 29 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$P = [9; -2; 0] - 2(4; -3; 1) = [1; 4; -2]$
$Q = [0; -7; 2] + (-2; 9; 2) = [-2; 2; 4]$
$\Rightarrow |PQ| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \rho(p, q) = 7$

Př: 96/100:

100. Určete osu mimoběžek $x_1 = 7 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 9 - t$ a $x_1 = 3 - 7s$, $x_2 = 1 + 2s$, $x_3 = 1 + 3s$ a vypočtěte jejich vzdálenost.

$p = \{[7 + t; 3 + 2t; 9 - t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[3 - 7s; 1 + 2s; 1 + 3s]; s \in \mathbb{R}\}$
$\overrightarrow{u} = (1; 2; -1)$
$\overrightarrow{v} = (-7; 2; 3)$
$\overrightarrow{AB} = (-4; -2; -8)$
$\overrightarrow{w} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2; 7 - 3; 2 + 14) = (8; 4; 16) \sim (-4; 2; 8) \Rightarrow$ příčkou je AB.
$P = [7; 3; 9]$
$Q = [3; 1; 1]$
$|PQ| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$

Př: 92/82

82. Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou $4x - 3y - 12 = 0$ a mají od bodu $A = (2,3)$ vzdálenost rovnou 5.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p : 4x - 3y + c = 0$ (z rovnoběžnosti). Vzdálenost tedy je $\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-1+c|}{5} = 5 \Rightarrow c = 5 \cdot 5 + 1 = 26 \vee c = 1 - 5 \cdot 5 = -24$

$$p_1 : 4x - 3y + 26$$

$$q_2 : 4x - 3y - 24$$

Př: 92/83

83. Na ose y najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku i od přímky $3x - 4y + 12 = 0$.

Hledám bod $A[0, y]$. Vzdálenost k počátku: $|y|$.
Vzdálenost k přímce: $\frac{|-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5} \cdot |y - 3|$.

Když $y \le 0$: $-y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow -5y = -4y + 12 \Rightarrow y = -12 \in (-\infty; 0\rangle$
Když $0 \le y \le 3$: $y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow 5y = -4y + 12 \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{9}{12} \in \langle 0, 3\rangle$
Když $3 \le y$: $y = \frac{4}{5}(y-3) \Rightarrow 5y = 4y - 12 \Rightarrow y = -12 \notin \langle 3, \infty)$

$$A_0 = [0; -12]$$
$$A_1 = \left[0; \frac{9}{12}\right]$$

Př: 92/84

84. Určete rovnici přímky, která prochází bodem A = (-2,1) a od bodu B = (3,1) má vzdálenost rovnou 4.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.
Když $a = 0$: $A \in p \Rightarrow 1b + c = 0 \Rightarrow p: 0x + y - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 0 \neq 3 \Rightarrow$ spor.
BÚNO tedy $a = 1$.
$A \in p \Rightarrow -2 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$
$\rho(p, B) = 4 \Rightarrow \frac{|3+b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow \frac{25}{16} = 1 + b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$.

Když $b = \frac{3}{4}$: $c = \frac{5}{4}$. Zkouška: $\rho(p, B) = \frac{3+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$
Když $b = -\frac{3}{4}$: $c = \frac{11}{4}$. Zkouška: $\rho(p, B) = \frac{3-\frac{3}{4}+\frac{11}{4}}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$

$$p_1: x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x + 3y + 5 = 0$$
$$p_1: x - \frac{3}{4}y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x - 3y + 11 = 0$$

Př: 92/85

85. Určete rovnici přímky, která prochází bodem A = (1,2) a má stejnou vzdálenost od bodů B = (3,3) a C = (5,2).

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.
Když $b = 0$: $A \in p \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow p: x - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 3 \neq 5 = \rho(C, p) \Rightarrow$ spor.
BÚNO tedy $b = 1$.
$A \in p \Rightarrow a + 2 + c = 0 \Rightarrow a + c = -2$
$\rho(p, B) = \rho(p, C) \Rightarrow \frac{|3a+3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5a+2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |3a+3+c| = |5a+2+c| \Rightarrow |2a+1| = |4a|$

Když $a \le -\frac{1}{2} \vee a \ge 0$: $2a + 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
Když $a \ge -\frac{1}{2} \wedge a \le 0$: $2a + 1 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$.

$$p_1: \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p: x + 2y - 5 = 0$$
$$p_2: -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p: x - 6y + 11 = 0$$

§9. Odchylka

Def: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. *Odchylkou dvou vektorů* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ označujeme $\varphi = |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0°$
2. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^- \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0180°$
3. Je-li $\overrightarrow{u} \neq k\overrightarrow{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \Rightarrow$ odchylkou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn: $0° \leq |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| \leq 180°$

V.9.1.: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = \arccos \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk: Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn: Jestliže jsou dva podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je $0°$.

A) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_2$

Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají. $0° \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90°$

V.9.2.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce $y = \arccos x$ má pro definiční obor $\langle 0; 1\rangle$ obor hodnot $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$].

V.9.3.: Nechť $p : ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$, $p : ex + fy + g = 0 \quad ((e, f) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_p} = (a, b), \overrightarrow{n_q} = (e, f)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2. a z toho, že normálové vektory přímek svírají stejný úhel jako přímky samé.]

V.9.4.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$, $p : ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_q} = (a, b)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2., z toho, že odchylka normálového vektoru 1 přímky a směrového vektoru 2.přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$ (φ je odchylka obou přímek).]

Př: Určete $\sphericalangle p, q|$:

a) $p(A,\overrightarrow{u}), q(B,\overrightarrow{v}); A[1;0], B[3;1], \overrightarrow{u}(1;1), \overrightarrow{(}-1;0)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arccos\frac{|-1|}{\sqrt{2}+\cdot\sqrt{1}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $p: 5x+3y-7=0; q: 4x-y+5=0$
$\overrightarrow{n_p} = (5,3); \overrightarrow{n_q} = (4;-1)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arccos\frac{|20-3|}{\sqrt{25+9}+\cdot\sqrt{16+1}} = \arccos\frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

c) $p = \overrightarrow{AB}; A[1;0]; B[2;1]; q: x+2y-6=0$
$\overrightarrow{u} = (1;1); \overrightarrow{n_q} = (1,2)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arcsin\frac{|1+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/69:

69. Určete odchylku α přímek
a) $2x + y - 5 = 0$ a $6x - 2y + 7 = 0$;
b) $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 3 - t$ a $2x + 4y - 1 = 0$.

a) $\overrightarrow{n_p} = (2;1); \overrightarrow{n_q} = (6;-2)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arccos\frac{|12-2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $\overrightarrow{u} = (1;-1); \overrightarrow{n_q} = (2;4) \sim (1;2)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arcsin\frac{|1-2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/70:

70. Určete rovnici přímky, která má od přímky $x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y.

$\overrightarrow{n} = (1;-2)$
Otočím o $+30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (1-2i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)i$
$p_1: (\sqrt{3}+2)x + (1-2\sqrt{3})y + c_1 = 0$
$A[0;\frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3}+1\right) = c_1$

$$p_1: (2\sqrt{3}+4)x + (-4\sqrt{3}+2) + \left(6\sqrt{3}-3\right) = 0$$

Otočím o $-30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) i$
$p_1 : (\sqrt{3}-2)x + (-1-2\sqrt{3})y + c_2 = 0$
$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3}-1\right) = c_1$

$$p_2 : (2\sqrt{3}-4)x + (-4\sqrt{3}-2)y + \left(6\sqrt{3}+3\right) = 0$$

Př: 86/71:

71. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku je dán vrchol ostrého úhlu A = (5,7) a přímka 6x + 4y - 9 = 0 , ve které leží jedna z odvěsen. Určete rovnice přímek, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníku.

$p : 6x + 4y + 9$
$\overrightarrow{n_p} = (6; 4) \sim (3, 2)$
$6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 9 \neq 0 \Rightarrow A \notin p \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = p$
Najdu $\overleftrightarrow{AC} \perp BC$: $\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + c = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow 10 - 21 + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$$\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + 11 = 0$$

Najdu $\overleftrightarrow{AB}$:
Otočím p o $+45°$:
$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y + d = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_1 \Rightarrow 5 + 5 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = -40$

$$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y - 40 = 0$$

Otočím p o $-45°$:
$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y + e = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_2 \Rightarrow 5 \cdot 5 - 7 + e = 0 \Rightarrow e = -18$

$$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y - 18 = 0$$

Př: 86/73:

73. Určete kosiny vnitřních úhlů trojúhelníku o vrcholech A = (1,1), B = (-1,3), C = (3,1).

$\overrightarrow{AB} = (-2,2)\sin(-1;1)$
$\overrightarrow{BC} = (4,-2)\sin(2;-1)$
$\overrightarrow{AC} = (2,0)\sin(1;0)$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\beta = \frac{2+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

B) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_3$

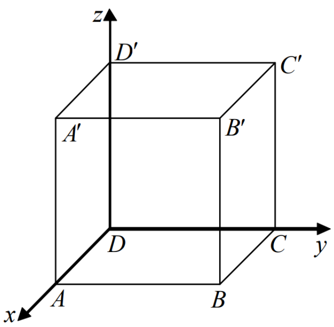
Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.
Nechť p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\sphericalangle p', q'|$, kde $p' \parallel p, q' \parallel q$ jsou různoběžky.
$0° \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90°$

V.9.5.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{p}, q| = \arccos\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: viz V.9.2].

Př: Určete odchylku přímek $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC'}$ krychle $ABCDA'B'C'D'$:



Analytické řešení:
$A[1;0;0]; A'[1;0;1]$,
$B[1;1;0]; B'[1;1;1]$,
$C[0;1;0]; C'[0;1;1]$,
$D[0;0;0]; D'[0;0;1]$,
$\overrightarrow{A'B} = (0;1;-1); \overrightarrow{BC'} = (-1;0;1)$
$\underline{|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{B,C'}|} = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \arccos\frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$

Stereometrické řešení:
Celý problém se evidentně odehrává v rovině $A'BC'$: Úsečky $A'B, BC'$ a $A'C'$ mají evidentně stejnou vzdálenost, protože se jedná o stěnové úhlopříčky. $\triangle A'BC'$ je tedy rovnostroný, pročež $|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC'}| = |\sphericalangle A'BC'| = \frac{\pi}{3}$.

Př: 177/11:
$\overrightarrow{u} = (-1;1;-1)$
$\overrightarrow{v} = (1;1;1)$

$$|\sphericalangle p, \overleftrightarrow{AB}| = \arccos\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$$
.

Př: 177/12:

$\overrightarrow{u}(2;2;10) \sim (1;1;5)$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, x| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, y| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, z| = \arccos \frac{|5|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 7581 = \frac{81}{81} = 1$ *QED.*

Př: 178/17:

1. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,1)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

   .

2. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,0)$

$$|\sphericalangle p,q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

   .

Př: 178/18:

1. $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$:
   $\overrightarrow{u}(-6;5;0)$
   $\overrightarrow{v}(-3;-3;8)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|18-15|}{\sqrt{36+25}\cdot\sqrt{9+9+64}} = \arccos \frac{3\sqrt{5002}}{5002}$$

2. $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BD}$:
   $\overrightarrow{u}(-1;6;0)$
   $\overrightarrow{v}(2;-2;8) \sim (1;-1;4)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1+36}\cdot\sqrt{1+1+8}} = \arccos \frac{7\sqrt{370}}{370}$$

3. $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$:
   $\overrightarrow{u}(-4;3;8)$
   $\overrightarrow{v}(5;1;0)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|-20+3|}{\sqrt{16+9+64}\cdot\sqrt{25+1}} = \arccos \frac{17\cdot\sqrt{2314}}{2314}$$

C) Odchylka přímky od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn: Nechť p, α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné. Pak platí: $|\sphericalangle p, \alpha| = |\sphericalangle p, q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subset \beta$.
$0° \leq |\sphericalangle p, \alpha| \leq 90°$

V.9.6.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka a $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \overrightarrow{0})$ je rovina a nechť $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5., z toho, že odchylka normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ (φ je odchylka přímky od roviny).]

Př: Určete $|\sphericalangle p, \alpha|$:
$p = \overleftrightarrow{AB}; A[1; 1; -2]; B[-1; 0; -1]$
$\alpha 2x - 3y + z + 4 = 0$

$$|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|-4 + 3 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow p \parallel \alpha$$

D) Odchylka dvou rovin v $\mathbb{E}_3$

Pozn: Nechť α, β jsou dvě různoběžné roviny. Pak platí: $|\sphericalangle \alpha, \beta| = |\sphericalangle p, q|$, kde $p \subset r\alpha; q \subset \beta; p \perp r; q \perp r; r = \alpha \cap \beta$.
$0° \leq |\sphericalangle \alpha, \beta| \leq 90°$

V.9.7.: Nechť
$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \overrightarrow{0})$
$\beta : ex + fy + gz + h = 0 \quad ((e, f, q) \neq \overrightarrow{0})$
jsou dvě roviny. Nechť $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ a $\overrightarrow{n_\beta} = (e, f, g)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5. a z toho, že normálové vektory rovin svírají stejný úhel jako roviny samé.]

Př: Určete $|\sphericalangle \alpha, \beta|$:
$\alpha : 2x + 3y + z - 5 = 0$
$\beta : x - y + z + 12 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2 - 3 + 1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Př: 192/34:

$A[0; 0; 0]; A'[0; 0; 1]$,
$B[0; 1; 0]; B'[0; 1; 1]$,
$C[1; 1; 0]; C'[1; 1; 1]$,

$D[1;0;0]; D'[1;0;1]$,

$\overleftrightarrow{ACB'} = \{[s, s+t, t]; s, t \in \mathbb{R}\}$
$\overleftrightarrow{ACB'} : x - y + z = 0$
$\overleftrightarrow{ACB} = \{[s, s+t, 0]; s, t \in \mathbb{R}\}$
$\overleftrightarrow{ACB} : 0x + 0y + z = 0$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{ACB'}, \overleftrightarrow{ACB}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Př: 192/35:

a) $\alpha : x + y + 0z - 2 = 0$
$\beta : 0x + 9y + 2z - 16 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0+9+0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{85}} = \arccos \frac{9\sqrt{170}}{170}$$

b) $\alpha : -3x + y - 2z + 16 = 0$
$\beta : 0x + 1y + 4z + 2 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0+1-8|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{238}}{34}$$

c) $\alpha : 13x - 2y + 5z - 56 = 0$
$\beta : 3x + 0y + 2x - 16 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|39+10|}{\sqrt{198} \cdot \sqrt{13}} = \arccos \frac{49\sqrt{286}}{858}$$

d) Analogicky.

e) $p([3;-1;3], (1;-1;-3))$
$\alpha : 6x + 3y + 4z - 32 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, p| = \arcsin \frac{|6-3-12|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{61}} = \arcsin \frac{9\sqrt{671}}{671}$$

f) $p([2;0;5], (4;2;-6) \sim (2;1;-3))$
$\alpha : 13x - 2y + 5z - 56 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, p| = \arcsin \frac{|26-2-5|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{198}} = \arcsin \frac{19\sqrt{77}}{462}$$

Př:

75. Najděte parametrické vyjádření přímky, která prochází počátkem, protíná přímku $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 1 - 3t$ a jejich odchylka je 30°.

$q = \{[4+t; 3+4t; 1-3t] | t \in \mathbb{R}\}$
$p \in \overleftrightarrow{[0;0;0]q} = \alpha = \{[4s+t; 3s+4t; s-3t] | s, t \in \mathbb{R}\}$
$\alpha : x - y - z = 0$
$p = \{[at, bt, ct] | t \in \mathbb{R}\}$
BŮNO $a = 1$ (když $a = 0$, tak $b = 1 \wedge c = -1$, což evidentně nesedí)
$p \in \alpha \Rightarrow a - b - c = 0 \Rightarrow c = 1 - b \; \overrightarrow{u} = (1, b, 1-b)$
$\overrightarrow{v} = (1, 4, -3)$
$\cos 30° = \frac{|1+4b-3+3b|}{\sqrt{26}\sqrt{2x^2-2x+2}}$
$\sqrt{3}\sqrt{26}\sqrt{2x^2 - 2x + 2} = 2 \cdot |7b - 2|$
$3 \cdot 26 \cdot (2b^2 - 2b + 2) = 196b^2 - 112b + 16$
$0 = 40b^2 + 44b - 140$
$b = -\frac{5}{2} \vee b = \frac{7}{5}$

$\underline{p_1 = \{[2t; 5t; 3t] | t \in \mathbb{R}\}}$
$\underline{p_2 = \{[5t; 7t; -2t] | t \in \mathbb{R}\}}$

Př:

76. Najděte pravoúhlý průmět přímky $x_1 = 4t$, $x_2 = 4 + 3t$, $x_3 = -1 - 2t$ do roviny $x - y + 3z + 2 = 0$.

$\overrightarrow{n} = (1; -1; 3)$

$A[0; 4; -1] \in p$
$A_0 = k \cdot \overrightarrow{n} + A \in \alpha$:
$k - (4 - k) + 3(-1 + 3k) + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{11}$
$A_0[0 + 1 \cdot \frac{5}{11}; 4 - 1 \cdot \frac{5}{11}; -1 + 3 \cdot \frac{5}{11}] = [\frac{5}{11}; \frac{39}{11}; \frac{4}{11}]$
$B[-4; 1; 1] \in p$
$B_0 = k \cdot \overrightarrow{n} + B \in \alpha$:
$-4 + k - (1 - k) + 3(1 + 3k) + 2 = 0 \Rightarrow k = 0$
$B_0 = B[-4; 1; 1]$

$\overrightarrow{B_0A_0} = \left(\frac{49}{11}; \frac{28}{11}; \frac{-7}{11}\right) = (49; 28; -7)$

$$\underline{p_0 = \{[-4 + 49t; 1 + 28t; 1 - 7t] | t \in \mathbb{R}\}}$$

Př:

77. Určete odchylku přímky $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ od roviny $2x + y + z = 0$.

$p = \{[t; 2t; -t] | t \in \mathbb{R}\}$
$\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$
$\overrightarrow{n} = (2, 1, 1)$

$$|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \arcsin \frac{3}{6} = \underline{\frac{\pi}{6}}$$

Př:

79. Určete odchylku α rovin $x_1 = 3t + 3s$, $x_2 = -t - s$, $x_3 = 2t - 5s$ a $2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$.

$x = 3t + 3s$
$y = -t - s$
$z = 2t - 5s$
$\alpha : x + 3y = 0$

$\beta : 2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2+3|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \arccos \frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

Př: 177/14: $\overrightarrow{a} = (-2;1)$
$\overrightarrow{b} = (0.5;1)\ (1,2)$
$\overrightarrow{c} = (-1;1)$
$\overrightarrow{d} = (0;1)$

1. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}| = \arccos \frac{|-2+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \arccos \frac{0}{5} = \frac{\pi}{2}$
2. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}| = \arccos \frac{|2+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$
3. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$
4. $|\sphericalangle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}| = \arccos \frac{|-1+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$
5. $|\sphericalangle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$
6. $|\sphericalangle \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Př: 177/15: $\overrightarrow{u} = (2,9)$
$\overrightarrow{v} = (9,-2)$

$p : 9x - 2y + c = 0$
$A \in p : 9 \cdot 0 - 2(-5) + c = 0 \Rightarrow c = -10$

$$p : 9x - 2y - 10 = 0$$

Př: 192/36: $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$

1. $\overrightarrow{a} = (0;1;-1)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|2+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}4$$

2. $\overrightarrow{b} = (1;3;-5)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|1+6+5|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{35}} = \arcsin \frac{2\sqrt{210}}{36}$$

3. $\overrightarrow{c} = (8; -1; 3)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|8-2-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{77}} = \arcsin \frac{\sqrt{462}}{154}$$

Př: 192/37:

$x = 5 - r + 2s$
$y = -3 + 2r - 5s$
$z = 1 - 3r + 3s$

$2x + y = 7 - s$
$3x - z = 14 + 3s$

$3(2x + y) + (3x - z) = 9x + 3y - z = 35$

$\overrightarrow{v} = (9; 3; -1)$

1. $\overrightarrow{a} = (0; 1; -1)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|3+1|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}4$$

2. $\overrightarrow{b} = (1; 3; -5)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|9+9+5|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{35}} = \arcsin \frac{2\sqrt{210}}{36}$$

3. $\overrightarrow{c} = (8; -1; 3)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|72-3-3|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{77}} = \arcsin \frac{\sqrt{462}}{154}$$