§1. Vzájemná poloha kružnic, kruhů a lineárních útvarů

Pozn: Úloha požadující určení průniku dvou útvarů vede k řešení soustavy rovnic či nerovnic, ve kterých jsou zahrnuta anaitická vyjádření těchto útvarů.

Př:

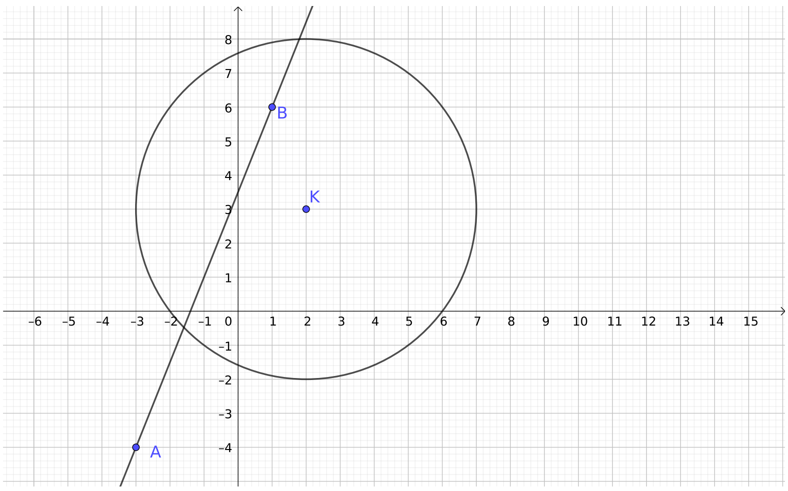
Je dáná kružnice $k(S[2;3,r=5)$ a body $A[-3;-4]$ a $B[1;6]$. Určete průsečík k s:

1. s úsečkou AB
2. s polopřímkou AB
3. s přímkou AB

Kružnici vyjádřím: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.
Přímku vyjádřím parametricky: $x=-3+4t; y=-4+10t|t\in\mathbb{R}$.

Dosadím: $(-5+4t)^2+(-7+10t)^2=25$
$116t^2-180t+49=0$
$t_{1,2}=\frac{180\pm\sqrt{9664}}{232}$

1. Úsečka: $t\in\langle 0;1\rangle$. Zde leží pouze t_2: tedy $\{[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$
2. Polopříka: $t>0$: Zde leží obě dvě hodnoty: tedy $\{[-3+4t_1;-4+10t_1],[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$
3. Přímka:
   tedy $\{[-3+4t_1;-4+10t_1],[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$



Př: 214/10:

1. $(x-2)^2+(y+1)^2=100$
   $x=0: y^2-6y=0\Rightarrow y^2-95=0\Rightarrow y=-1\pm 4\sqrt{6}$

$A_1[0; -1 + 4\sqrt{6}]$
$A_2[0; -1 - 4\sqrt{6}]$
$y = 0 : ix^2 - 2x + 4 + 1 = 100 \Rightarrow y^2 - 4x - 95 = 0 \Rightarrow y = 2 \pm 3\sqrt{11}$
$B_1[2 + 3\sqrt{11}; 0]$
$B_2[2 - 3\sqrt{11}; 0]$

2. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
   $x = 0 : y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 6$
   $A_1[0; 0]$
   $A_2[0; 6]$
   $y = 0 : x^2 - 8x = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 8$
   $B_1[0; 0]$
   $B_2[8; 0]$

3. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
   $x = 0 : y^2 + 8y + 16 + 9 = 16 \Rightarrow y = -4 \pm \sqrt{7}$
   $A_1[0; -4 + \sqrt{7}]$
   $A_2[0; -4 - \sqrt{7}]$
   $y = 0 : (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3\ B[3; 0]$.

Př: 214/13:
$K : x^2 + (y - 3)^2 \leq= 25$

1. $\overleftrightarrow{HL} = \{[-4 + 4t; 8t] | t \in \mathbb{R}\}\ (-4 + 4t)^2 + (8t - 3)^2 \leq 25 \Rightarrow 80t^2 - 80t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; 1\rangle$
$$\{[-4 + 4t; 8t] | t \in \langle 0; 1\rangle\}$$

2. $\overleftrightarrow{HM} = \{[-4 + 12t; 4t] | t \in \mathbb{R}\}\ (-4 + 12t)^2 + (4t - 3)^2 \leq 25 \Rightarrow 160t^2 - 120t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; \frac{3}{4}\rangle$
$$\left\{[-4 + 12t; 4t] | t \in \left\langle 0; \frac{3}{4}\right\rangle i\right\}$$

3. Analogicky

Př: 214/14:
$y = 2x + c$
$(x - 3)^2 + (2x + c + 1)^2 = 4$
$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$
$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$
$5x^2 + (4c - 2)x + (2c + c^2 + 6) = 0$
$D = (4c - 2)^2 - 4 \cdot 5(2c + c^2 + 6) = -4c^2 - 56c - 116 = (c - (-7 + 2\sqrt{5}))(c - (-7 - 2\sqrt{5}))$

- prázdný: $c \in (-\infty; -7 - 2\sqrt{5}) \cup (-7 + 2\sqrt{5}; \infty)$
- jednobodový: $c \in \{-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\}$
- výcebodový: $c \in (-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5})$