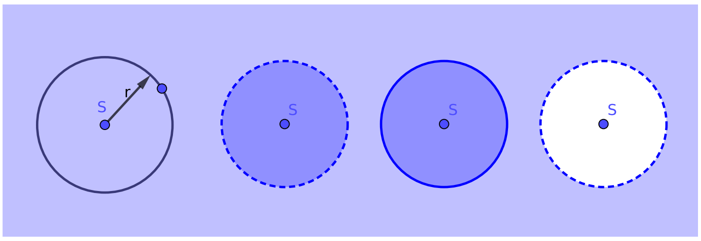
§1. Analytické vyjádření kružnice a kruhu

Def: Kružnice: $k(S, r = \{X \in \rho; |SX| = r\}$
Kruh: $k(S, r = \{X \in \rho; |SX| \leq r\}$

V.1.1.: Útvary uvedené v levém sloupc mají analitická vyjádření v pravém sloupci:

kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$	$\|SX\|^2 = r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$
vnitřní oblast kružnice $k(S, r)$	$\|SX\|^2 < r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$
kruh $K(S, r)$	$\|SX\|^2 \leq r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 \leq r^2$
vnější oblast kružnice $k(S, r)$	$\|SX\|^2 > r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$



Př: 205/2: Napište analitické vyjádření kruhu $k(S, r)$, je li dáno $S[2; -5]$ a $r = 3$:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 \geq 9$$

Zakreslete kružnici, která má rovnici $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 8$.

$$k(S[-3; -2]; r = 2\sqrt{2})$$

Př: 205/2:

- $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4^2$
- $(x-5)^2 + (y+3)^2 \leq 6^2$
- $(x-2)^2 + (y+4)^2 < 5$
- $(x-5)^2 + (y-1)^2 > (1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Př: 206/3:

- Kružnice a její vnější oblast: Střed $[4; -2]$, poloměr 1.
- Kružnice: Střed $[-2; -5]$, poloměr 5.
- Vnější oblast: Střed $[-3; \sqrt{3}]$, poloměr $\sqrt{13}$.
- Vnitřní oblast: Střed $[-3; -2]$, poloměr 4.
- Kruh: Střed $[-1; \sqrt{2}]$, poloměr $2\sqrt{2}$.
- Kružnice: Střed $[2; -\sqrt{12}]$, poloměr $2\sqrt{5}$.

§2. Kružnice

V.2.1.: Je li v rovině dána kartézká soustava souřadnic, pak platí:

- Každou kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$ lze analiticky vyjádřit právě jednou rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$. Každá rovnice $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$, kde $r > 0$, analyticky vyjadřuje právě jednu kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem r.

Def: Rovnice $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$, kde $r > 0$ se nazývá *středový tvar rovnice kružnice.*

Pozn: Jestliže rozepíšeme mocnny dvojčlenů ve středovém tvaru rovnice kružnice a získané členy uspořádáme sestupně, dostaneme $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$, což je rovnice typu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Def: Pokud rovnice $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ vyjadřuje některou kružnici k, nazývá se *obecný tvar rovnice kružnice k.*

Př: Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + 4x - 6y14 = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 14 &= 0\\ (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 14 &= 0\\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= -1\end{aligned}$$

Rovnce neodpovídá kružnici.

Př: Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4} + (y^2 + \frac{b}{2}) - \frac{b^2}{4} + c &= 0\\ (x + \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\end{aligned}$$

Musí tedy platiti $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$.

Př: Určete rovnice všech kružnic, které prochází body $A[-1; 3]; B[0; 2]; C[-1; -1]$:

$$\begin{aligned}1 + 9 - a + 3b + c &= 0 && (1)\\ 4 + 2b + c &= 0 && (2)\\ 1 + 1 - a - b + c &= 0 && (3)\\ & && (4)\end{aligned}$$

Toto upravím na:

$$\begin{aligned}a - 3b - c &= 10 && (5)\\ 2b + c &= -4 && (6)\\ a + b - c &= 2 && (7)\\ & && (8)\end{aligned}$$

Soustava jediné má řešení $[4;-2;0]$, které odpovídá rovnici $x^2+y^2+4x-2y=0$ Po úpravé: $(x+2)^2v+(y-1)^2=5$

Jedná se o kružnici $k(S[-2;1], r=\sqrt{5})$.

Př: 210/5:

- $(x-2)^2+y^2=5+4$ Střed $[2;0]$, poloměr 3.
- $(x+1)^2+(y-1)^2=7+1+1$ Kruh: Střed $[-1;1]$, poloměr 3.
- $(x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=2.5+\frac{25}{4}+\frac{49}{4}$ Střed $[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}]$, poloměr $\sqrt{21}$.
- $(x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{83}{2}+\frac{25}{4}+\frac{9}{4}$ Kruh: Střed $[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}]$, poloměr $\sqrt{50}$.

Př: 210/6:

$$
\begin{aligned}
9+3a+c &= 0 && (9)\\
4+2a+4-2b+c &= 0 && (10)\\
36+6a+36+6b+c &= 0 && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3a+c &= -9 && (13)\\
2a-2b+c &= -8 && (14)\\
6a+6b+c &= -72 && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}
$$

$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&-9\\2&-2&1&-8\\6&6&1&-72\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-8\\3&0&1&-9\\6&6&1&-72\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-8\\0&6&-1&6\\0&12&-2&-48\end{array}\right)\sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-8\\0&6&-1&6\\0&6&-1&-24\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-8\\0&6&-1&6\\0&0&0&-30\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-8\\0&6&-1&6\\0&0&0&1\end{array}\right)$ Zádně řešení $\Rightarrow$ kružnice neexistuje, protože body jsou kolineárí.

Př: Určete rovnice vešech kružnic, které prochází bodem $A[1;2]$, dotýká se osy y a mají střed na přímce p, která má rovnici $y+x=4$:

Hledám $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$
k se dotýká $y \Rightarrow m^2=r^2$
$S \in P \Rightarrow m+n=4$
$A \in k \Rightarrow (1-m)^2+(2-n)^2=r^2$

$m+n=4$
$(11-m)^2+(2-n)^2=m^2$

Řešení: $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ a $(x-5)^2+(y+1)^2=25$

Př: 210/7: Hledám $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$:

Dotýká se $x \Rightarrow r^2=m^2$.
Dotýká se $x \Rightarrow r^2=n^2$.
$K \in k \Rightarrow (9-n)^2+(2-m)^2=r^2$

Když $m=n=\pm r$ $K \in k \Rightarrow (9-n)^2+(2-n)^2=n^2 \Rightarrow x^2-22x+85=0$

$m = n = r = 5 \vee m = n = r = 17$

$$(x+5)^2 + (y+5) = 5^2$$
$$(x+17)^2 + (y+17) = 5^2$$

Když $m = -n = \pm r$ $K \in k \Rightarrow (9+n)^2 + (2-n)^2 = n^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 85 = 0 \Rightarrow D = 255 - 4 \cdot 85 = -115 < 0$

Př: 210/8: Hledám $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$:

$m + 3n - 6 = 0 \Rightarrow m = 6 - 3n$
$r = 5$
$M[6;9] \in k \Rightarrow (6-m)^2 + (9-n)^2 = 25 \Rightarrow (6-6+3n)^2 + (9-n)^2 = 25 \Rightarrow 9n^2 - 18n + 56 = 0 \Rightarrow D = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = -1692 < 0.$

Neexistuje řešení.

Př: 210/9/a:

Osa přímek, na které musí náležet střed je buď $x = 0$ nebo $y = 0$:

Jelikož $p \perp q$, průsečík přímek, body doteku a střed tvoří čtverec o straně r, tedy $|[0;0]S| = 2\sqrt{2}$:

Řešením tedy jsou:

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

Př: 210/9/a:

$(m-4)^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \vee m = 6$
$S \in r \parallel p$ $\rho(r,q) = 2 \Rightarrow r : x - y + 2 \pm 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n = 2 \pm 2\sqrt{2} + m$

$$(x-2)^2 + (y - 4 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 4 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 8 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 8 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

§3. Analytické vyjádření kružnice a kruhu

Def:

§4. Vzájemná poloha kružnic, kruhů a lineárních útvarů

Pozn: Úloha požadující určení průniku dvou útvarů vede k řešení soustavy rovnic či nerovnic, ve kterých jsou zahrnuta anaitická vyjádření těchto útvarů.

Př:

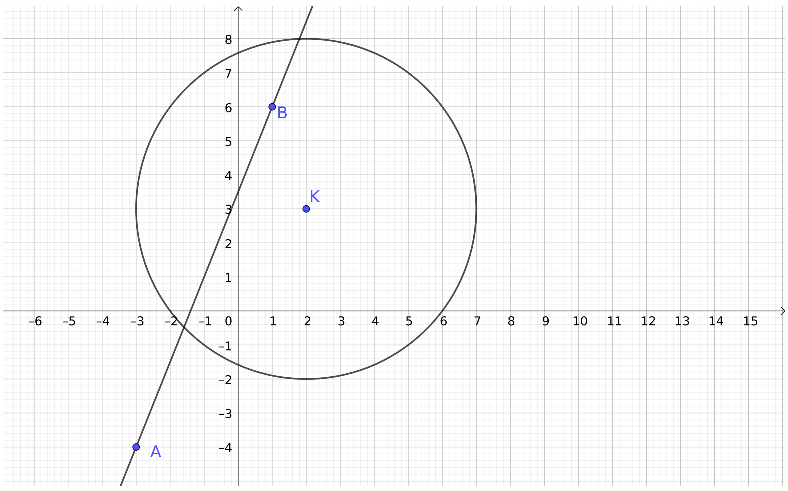
Je dána kružnice $k(S[2;3, r=5)$ a body $A[-3;-4]$ a $B[1;6]$. Určete průsečík k s:

1. s úsečkou AB
2. s polopřímkou AB
3. s přímkou AB

Kružnici vyjádřím: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.
Přímku vyjádřím parametricky: $x=-3+4t; y=-4+10t|t \in \mathbb{R}$.

Dosadím: $(-5+4t)^2+(-7+10t)^2=25$
$116t^2-180t+49=0$
$t_{1,2}=\frac{180\pm\sqrt{9664}}{232}$

1. Úsečka: $t \in \langle 0;1\rangle$. Zde leží pouze t_2: tedy $\{[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$
2. Polopříka: $t>0$: Zde leží obě dvě hodnoty: tedy $\{[-3+4t_1;-4+10t_1],[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$
3. Přímka:
   tedy $\{[-3+4t_1;-4+10t_1],[-3+4t_2;-4+10t_2]\}$



Př: 214/10:

1. $(x-2)^2+(y+1)^2=100$
   $x=0: y^2-6y=0 \Rightarrow y^2-95=0 \Rightarrow y=-1\pm 4\sqrt{6}$

$A_1[0; -1+4\sqrt{6}]$
$A_2[0; -1-4\sqrt{6}]$
$y = 0 : ix^2 - 2x + 4 + 1 = 100 \Rightarrow y^2 - 4x - 95 = 0 \Rightarrow y = 2 \pm 3\sqrt{11}$
$B_1[2+3\sqrt{11}; 0]$
$B_2[2-3\sqrt{11}; 0]$

2. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$
   $x = 0 : y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 6$
   $A_1[0; 0]$
   $A_2[0; 6]$
   $y = 0 : x^2 - 8x = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 8$
   $B_1[0; 0]$
   $B_2[8; 0]$

3. $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$
   $x = 0 : y^2 + 8y + 16 + 9 = 16 \Rightarrow y = -4 \pm \sqrt{7}$
   $A_1[0; -4+\sqrt{7}]$
   $A_2[0; -4-\sqrt{7}]$
   $y = 0 : (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3\ B[3; 0]$.

Př: 214/13:
$K : x^2 + (y-3)^2 \leq= 25$

1. $\overleftrightarrow{HL} = \{[-4+4t; 8t] | t \in \mathbb{R}\}\ (-4+4t)^2 + (8t-3)^2 \leq 25 \Rightarrow 80t^2 - 80t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; 1 \rangle$
$$\{[-4+4t; 8t] | t \in \langle 0; 1 \rangle\}$$
2. $\overleftrightarrow{HM} = \{[-4+12t; 4t] | t \in \mathbb{R}\}\ (-4+12t)^2 + (4t-3)^2 \leq 25 \Rightarrow 160t^2 - 120t \leq 0 \Rightarrow t \in \langle 0; \frac{3}{4} \rangle$
$$\left\{[-4+12t; 4t] | t \in \left\langle 0; \frac{3}{4} \right\rangle i \right\}$$
3. Analogicky

Př: 214/14:
$y = 2x + c$
$(x-3)^2 + (2x+c+1)^2 = 4$
$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$
$x^2 - 6x + 9 + c^2 + 4cx + 2c + 4x^2 + 4x + 1 = 4$
$5x^2 + (4c-2)x + (2c + c^2 + 6) = 0$
$D = (4c-2)^2 - 4 \cdot 5(2c + c^2 + 6) = -4c^2 - 56c - 116 = (c - (-7+2\sqrt{5}))(c - (-7-2\sqrt{5}))$

- prázdný: $c \in (-\infty; -7-2\sqrt{5}) \cup (-7+2\sqrt{5}; \infty)$
- jednobodový: $c \in \left\{-7-2\sqrt{5}; -7+2\sqrt{5}\right\}$
- výcebodový: $c \in (-7-2\sqrt{5}; -7+2\sqrt{5})$

§5. Tečna kružnice

Pozn: Jak víme, tečna je přímka, která leží v rovině kružnice a má tyto vlastnosti:

- Obsahuje právě jeden bod kružnice
- Střed kružnice má od ní vzdálenost poloměru kružnice.
- Je kolmá k poloměru kružnice, který obsahuje bod dotyku

Pozn: Rovnice tečny v daném bodě:

Je dána $k(S[m,n],r)$ a $T[x_0,y_0] \in k$. $X[x,y]$ je libovolným bode tečny t.

$\overrightarrow{ST} = (x_0 - m, y_0 - n)$
$\overrightarrow{SX} = (x - m, y - n)$

Pro každý bod $X \neq T$ existuje pravoúhlý trojúhelník STX, přitom $|ST| = r$ a $|SX| \cos \alpha = r$, tedy $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SX} = |ST| \cdot |SX| \cdot cos\alpha = r^2$. oKaždá tečna kružnice má tedy rovnici:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$$

V.5.1.: Rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n)$ je analitickým řešením tečny kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$.

Př: Je dána kružnice k s rovnicí $(x - 3)^2 + (y + 12)^2 = 100$ a body $L[9; -4]$ a $M[5; 2]$. Určete tečny ke k procházející L resp M.

- Daosazením L do rovnice k zjistime, že $l \in k$. Tedy tečna $l : (9 - 3)(x - 3) + (-4 + 12)(y + 12) = 100$. Po úpraavě: $3x + 4y - 11 = 0$

  Dosazením M do k zjistíme, že M leží ve vnější oblasti.

  Hledám bod dotyku:
  $T \in k \Rightarrow (x_0 - 3)^2(y_0 + 12)^2 = 100$
  $T \in t \Rightarrow (x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 - 12)(y + 12) = 100$
  $M \in t \Rightarrow (x_0 - 3)(5 - 3) + (y_0 + 12)(2 + 12) = 100$

  $(x_0 - 3)^2 + (y_0 + 12)^2 = 100$
  $x_0 + 7y + 0 + 31 = 0$

  Řešení: $[-3; -4]$ a $[11, -6]$.

$$t_1 : -6(x - 3) + 8(y + 12) = 100 \ldots - 3x + 4y + 7 = 0$$

$$t_1 : -8(x - 3) + 6(y + 12) = 100 \ldots 7x + 3y - 26 = 0$$

Př: 217/16: $x = \frac{4y+7}{3}$

$(\frac{4y+7}{3} - 3)^2 + (y + 12)^2 = 100$
$\frac{25}{9}y^2 + \frac{200}{9}t + \frac{400}{9} = 0$
$D = 200^2 - 4 \cdot 25 \cdot 400 = 0$

Je tečnou

$x = \frac{-4y+26}{3}$

$(\frac{-4y+26}{3} - 3)^2 + (y+12)^2 = 100$
$\frac{25}{9}y^2 + \frac{80}{9}t + \frac{1859}{9} = 0$
$D = 80^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1859 = -179500$

Není tečnou

Př: 218/19:

1. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$ $(x+2)(3+2) + (y+2)(7+2) = 5 \Rightarrow 5x + 5y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$

   $(x+2)^2 + (1-x-2)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = -3$

   $T_1[0,1]; T_2[-3, r4]$

   $\overrightarrow{u} = (3,6); \overrightarrow{v} = (6,3)$

   $\alpha = \arccos \frac{|3\cdot6+6\cdot3|}{\sqrt{3^2+6^2}\cdot\sqrt{6^2+3^2}} = \arccos \frac{4}{5} = 36.87°$

§6. Kulová plocha, koule

Def: Nechť je dán bod S a kladné reálné číslo r. *Kulovou plochu se středem S a poloměrem r* nazýváme množinu všech bodů X prostoru, pro které platí $|SX| = r$ *Koulí se středem S a poloměrem* r se nazývá množina všech bodů X prostoru, pro která platí, že $|SX| \leq r^2$.

Pozn: Při analitickém vyjadřování těchto útvarů uplatníme ekvivalenci charakteristických vlastností:

$$|SX| = r \quad \Leftrightarrow \quad |SX|^2 = r^2$$
$$|SX| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad |SX|^2 \leq r^2$$

V.6.1.: Má-li bod S souřadnice $[m,n,q]$ a bod $X[x,y,z]$, pak kulová plocha $k(S,r)$ je analyticka vyjádřena rovnicí:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-q)^2 = r^2$$

a koule $K(S,r)$ nerovnicí:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-q)^2 \leq r^2$$

Pozn: Úloha o vzájemné poloze přímky a kulové plochy povede obdobným způsobem ke kvadratické rovnici. Může tedy mít následující typy výsledků:

- prázdná množina
- jednobodová množina
- dvoubodová množina

Př: Určete hodnotu parametru k, pro kterou má rovina $\rho : 2x - 3y + z + k = 0$ neprázdný průnik s kulovou plochou k středu $S[2; -3; 1]$ a poloměru 3.

$\rho \cap k \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \rho(S, \rho) \leq 3$

Nerovnici vyjádřím analiticky:

$$\begin{aligned} \frac{|2\cdot 2-3(-3)+1\cdot 1+k|}{\sqrt{4+9+1}} &\leq 3 \\ |14+k| &\leq 3\cdot 14 \end{aligned}$$

Hledané hodnoty parametru k patří do intervalu $\langle -14-3\sqrt{14}; -14+3\sqrt{14}\rangle$.

Pozn: Jak víme ze stereometrie, tečnou rovinu kulové plochy můžeme charakterizovat kteroukoliv z těchto tří vlastností:

- Má s kulovou plochou jednobodový průnik
- Má od středu vzdálenost rovnou poloměru
- je kolmá k poloměru kulové plochy obsahující bod dotyku

Bod X je libovolným bodem roviny $\tau, X \neq T$. Z rovnosti $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{SX} = r^2$ můžeme odvodit rovnici tečné kruhové roviny τ kulové plochy K zcela obdobně jako rovnici tečny kružnice.

V.6.2.: Rovnice $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(t-n)+(z_0-q)(z-q) = r^2$ je analytickým vyjádřením tečné roviny kulové plochy $K: (x-m)^2+(y-n)^2+(z-q)^2 = r^2$ v jejím bodě $T[x_0, y_0, z_0]$.

Pozn: Úpravy obecné rovnice kulové plochy na středový tvar se provádí stejnými kroky jako úpravy rovnice kružnice. Platí také, že ne každá rovnice typu $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0$ vyjadřuje kulovou plochu.

Př: 222/21: $\overrightarrow{SA} = (0,-2,3) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{13}$ $\overrightarrow{SB} = (0,-5,3) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{34}$ $\overrightarrow{SC} = (5,0,4) \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{41}$

$r = \sqrt{41}$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 \leq 41$$

Př: 22/24: $(1-t-1)^2+(2+t)^2+(3-2t-1)^2 = r^2$
$(1-t)^2+(2+t)^2+(3-2t-6)^2 = r^2$

$(1-t-1)^2+(2+t)^2+(3-2t-1)^2 = (1-t)^2+(2+t)^2+(3-2t-6)^2$
$6t^2-4t+8 = 6t^2+14t+14$
$18t = 6$
$t = -\frac{1}{3}$
$S\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right]$
$r^2 = 10$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2+\left(z-\frac{7}{5}\right)^2 = 10$$

Př: 222/25:

$\overrightarrow{AB} = (1;-2;2)$

$\overleftrightarrow{AB} = \{[4+t; 5-2t; 6+2t] | t \in \mathbb{R}\}$

$$(4+t-2)^2+(5-2t-3)^2+(6+2t-5)^2=36$$
$$9t^2-27=0$$

$t=\pm\sqrt{3}$

1. $\emptyset$
2. $\{[4+\sqrt{3};5-2\sqrt{3};6+2\sqrt{3}]\}$
3. $\{[4-\sqrt{3};5+2\sqrt{3};6-2\sqrt{3}];[4+\sqrt{3};5-2\sqrt{3};6+2\sqrt{3}]\}$

§7. Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic

Př: Vyšetřetřete množinu bodů X roviny, pro které platí $\rho(X,p)\geq 3\cdot\rho(X,q)$, kde p,q jsou dvě kolmé přímky v rovině.

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby p byla osou x a q osou y.

$p: y=0, X[x,y]$
$q: x=0, |y|| \geq |X|$

Útvar U, který má toto analytické vyjádření, sestrojíme na základě znalostí, které máme o grafech funkcí. Diskuzí o hodnotách proměnné y získám soustavu nerovnic:
$y\geq 0\wedge y\geq 3|x|$ nebo $y\leq 0\wedge -y\geq 3|x|$
Část roviny „nad grafem" funkce $y=3|x|$ a Část roviny „pod grafem" funkce $y=-3|x|$

Útvar U je sjednocením dvou vrcholových úhlů, jejíž osy leží na q. Pro α platí $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{3}$, tj $\alpha\doteq 36°$

Př: Vyšetřete množinu bodů M všech bodů X roviny, pro které platí $|AX|\geq 2|BX|$. Body A,B jsou dva různé body roviny.

Nechť $A[-3;0];B[3;0];X[x,y]\in M$:

$$\begin{aligned}
|AX| &\geq 2|BX|\\
\sqrt{(x+3)^+y^2} &\geq 2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\\
(x+3)^2+y^2 &\geq 4(x-3)^2+4y^2\\
-9 &\geq x^2-10x+y^2\\
4^2=16 &\geq (x-5)^2+y^2
\end{aligned}$$

Každý bod, který splňuje první nerovnici splňuje i tu poslední vyjadřující $K([5;0],4)$.

Obrácením postupu úprav prokážeme, že každý bod tohoto kruhu K má charakteristickou vlastnost vyšetřované množiny M.

Př: 227/32:A

1. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2^2$
   $2y^2+2x^2-2x+2x+2=4$
   $2y^2+2x^2=2$
   $y^2+x^2=2$

   $k([0;0],1)$

2. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
   $(x+1)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$
   $x^2+2x+1+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$
   $0=3x^2-10x+3+3y^2$
   $0=x^2-\frac{10}{3}x+1+y^2$
   $0=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1+y^2$
   $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2$

   $k([\frac{5}{3};0],\frac{4}{3})$

3. Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=4\cdot 2^2$
   $2y^2+2x^2-2x+2x+2=16$
   $2y^2+2x^2=14$
   $y^2+x^2=7$

   $k([0;0],\sqrt{7})$ Nechť $A[-1,0]; B[1,0]; X[x,y]$: $(x+1)^2+y^2+2((x-1)^2+y^2)=3\cdot 2^2$
   $3y^2+3x^2-2x+3=3\cdot 4$
   $y^2+x^2-\frac{2}{3}x=3$
   $y^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$
   $k\left(\left[\frac{1}{3};0\right],\frac{28}{9}\right)$

§8. Analytické vyjádření obrazu útvaru

V.8.1.: Předpokládejme, že posunutí T je dáno rovnicí $x'=x+m, y'=y+n$ a zobrazuje U na U' Potom platí:

Má li útvar U rovnici $V(x,y)=0$, pak útvar U' má v téže soustavě souřadnic rovnici $V(x-m,y-n)=0$.

[Dk: Jde o rovnici, v níž dvojčleny $x-m, y-n$ nahrazují x,y na všech místech, kde se vyskytují x,y v původní rovnici útvaru U.]

Pozn: Aplikace předchozí věty:

1. Přímka, která prochází počátkem a má směrnici k, má také velmi jednoduchou rovnici $y=kx$
   Přímka, která prochází bodem $[x_1,y_1]$ a má směrnici k se dá považovat za obraz první v posunutí $x'=x+x_1, y'=y+y_1$, má rovnici $y-y_0=k(x-x_0)$.

2. Kružnice, která má střed v počátku a poloměr r, má rovnici $x^2+y^2=r^2$.
   Kružnice se středem $S[m,n]$ a poloměrem r se dá považovat za obraz první kružnice v posunutí $x'=x+m, y'=y+n$ a má rovnici $(x-m)^2+(x-n)^2=r^2$.

3. Tečna kružnice $k(O,r)$ v jejím bodě $T[x_0,y_0]$ má rovnici $xx_0+yy_0=r^2$. Tečna kružnice $k(S,r)$ je obrazem tečny první kružnice v posunutí $x'=x+m, y'=y+n$ a má rovnici $(x-m)(x_0-m)+(y-n)(y_0-n)=r^2$.

V.8.2.: Má li útvar U rovnici $V(x,y)=0$, pak jeho obraz U' v souměrnosti, která vyměňuje kladné poloosy x,y má rovnici $V(y,x)=0$.

[Dk: Jde o rovnici, v níž je každé x nahrazeno za y a x je nahrazeno za y.]

Př: Kružnice $k(S,r)$ zobrazíme v souměrnosti podle osy 1. kvadrantu na kružnici $k'(S',r)$; tečna t kružnice v bodě T se zobrazí na tečnu t' kružnice k' v bodě T'. Určete rovnici kružnice k' a tečny t', je-li dáno:

$$S[-3,6], r=5, T[0;10]$$

Umíme zapsat rovnici kružnice k: $(x+3)^2+(y-6)^2=25$ a rovnice tečny t v jejím bodě T: $(x+3)3+(y-6)425$, tj $3x+4y-40=0$

Zobrazením v osové souměrnosti získáme $S'[6;-3], T'[10;0]$. Rovnice kružnice k': $(x-6)^2+(y+3)^2=25$. rovnice tečny t' v jejím bodě T': $4x+3y-0=0$.

Př: 233/2:
Pro rovnici $ax+by=0$ je posunutí $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$.

Př: 233/4:
Má li útvar U rovnici $V(x,y,z)=0$, pak v posunutí $[a,b,c]$ má rovnici $V(x-a,y-b,z-c)=0$.

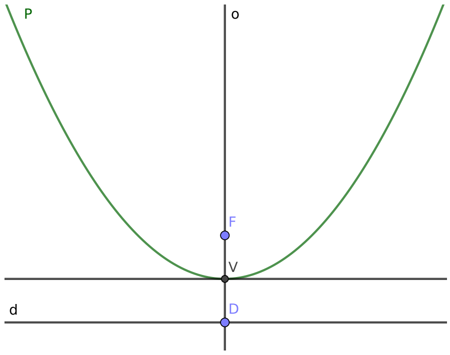
§9. Parabola

Pozn: Paraboly známe jako grafy kvadratických funkcí $y=ax^2+bx+c$, kde $a\neq 0$. Graf každé kvadratick funkce lze získat vhodným posunutím grfu $y=ax^2$. K těmto poznatkům dojdeme opět znovu uplatněním obecného analitického vyjádření parabol.

Geometrická definice paraboly pomocí vzdáleností jejíc bodů od dané přímky a daného bodu.

Def: Nechť je dána přímka d a bod $F\notin d$. Množinu všech bodů X rovniny dF, pro která platí $\rho(X,d)=|FX|$, nazýváme *parabola s ohnismek F a řídící přímkou d*. Označme ji $P(F,d)$.

Pozn:

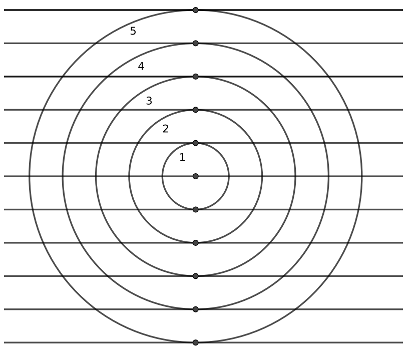


F – ohnisko
d – řídící přímka
o – osa
V – vrchol

Pozn: Vliv $\rho(F, d)$ na tvar paraboly budeme zkoumat pomocí sítě na obrázku, kde jsou ke ružnici se středem F přípsaná čísla udávající vzdálenost jejich bodů od F.

Návod k práci s obrázkem:

1. Položte průsvitku a vyznačte F a jednu z přímek jako d. Na prímky v polorovnině $\overrightarrow{dF}$ připište vzdálenosti od d.
2. Vyznačte body, které leží na kružnici a přímce se steným číslem.
3. Zhustěte síť a opakujte
4. spojete body hladkým obloukem.



Pozn: Odvozujeme analitické vyjádření parabol $P(F, d)$ pro $V[0; 0]$ a osu y: Pomocí vzorců pro vzdálenosti vyjádřime charakteristicku vlastnost bodů parabol.

$$\begin{aligned}
\rho(X,d) &= |FX| \\
|y \pm 0.5q| &= \sqrt{x^2+(y-0.5q)^2} \\
y^2 \pm qy + 0.250.5q^2 &= x^2+(y-0.5q)^2 \\
y^2 \pm qy + 0.25q^2 &= x^2+y^2 \mp qy + 0.25q^2 \\
\pm 2qy &= x^2
\end{aligned}$$

Snadno ověříme, že každý bod X, který svými souřadnicemi splňuje poslední rovnici, má charakteristickou vlastnost bodu paraboly.

V.9.1.: Každá parabola $P(F,d)$, která má vrchol $V[0;0]$ a svou osu v ose y, má analitické vyjádření $2py = x^2$, přitom $F[0;2.5p], d: y = -0.5p$.

[Dokázáno výše]

V.9.2.: Každá parabola, která má rovnici $2py = x2$, kde $a \neq 0$ je grafem kvadratické funkce $y = sx^2$. Zároveň graf každé kvadratické funkce $y = ax^2$ je parabolou o rovnici $2py = x^2$, přitom $p = \frac{1}{2a}, a = \frac{1}{2p}$.

[Dk: plyne z toho, že rovnice $y = ax^2, 2py = x^2$ jsou ekvivalentní při uvedeném vzttau mezi a, p.].

Př: Určete rovnici všech parabl P, které mají osu rovnoběžnou s osou x a procházi body $A[-4;-2]; B[4;2]; C[2;4]$.

Z podmínky rovnoběžnosti plyne, že se jedná o kvadratickou funkci $x = f(y)$, tedy $x = ay^2 + by + c$.

Dosadíme:

$$\begin{aligned}
-4 &= 4a - 2b + c && (17) \\
4 &= 4a + 2b + c && (18) \\
2 &= 16a + 4b + c && (19) \\
& && (20)
\end{aligned}$$

$8 = 4b \Rightarrow 2 = b$
$4a = -c$
$2 = -4c + 8 + c \Rightarrow 3c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}y^2 + 2y + 3 = x$$

Př: 239/6:

a) $V[3,0]$, $q = 2 \Rightarrow 4(y) = (x-3)^2$y

b) $V[-3,-6]$, $q = -8 \Rightarrow -16(y+6) = (x+3)^2$y

c) $V[4,1]$, $q = -6 \Rightarrow -12(y-1) = (x-4)^2$y

d) $V[-2,\frac{1}{2}]$, $q = -3 \Rightarrow -6(y-\frac{1}{2}) = (x+2)^2$

Př: 239/8: $y = \pm x^2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow p: y = \mp\frac{1}{4} \wedge F[0, \pm\frac{1}{4}]$

a) $p: y = -\frac{1}{4}$ $F[3; \frac{1}{4}]$

b) $p: y = 5 - \frac{1}{4}$ $F[0; 5\frac{1}{4}]$

c) $p: y = 2 + \frac{1}{4}$ $F[0; 2 - \frac{1}{4}]$

d) $y - 3 = (x-2)^2$ $p: y = -\frac{1}{4}$ $F[0; \frac{1}{4}]$

e) $y - 13 = -(x+2)^2$ $p: y = 13 + \frac{1}{4}$ $F[-2; 13 - \frac{1}{4}]$

f) $y + 4 = -4(x-1)$ $p: y = -4 + \frac{1}{4}$ $F[1; -4 - \frac{1}{4}]$

Př: 240/10:

Př: $y = ax^2 + bx + c$

$$-2 = 16a - 4b + c \tag{21}$$
$$2 = 16a + 4b + c \tag{22}$$
$$4 = 4a + 2b + c \tag{23}$$

$4 = 8b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
$-16a = c$
$4 = 4a + 1 - 16a \Rightarrow 12a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

§10. Vzájemná poloha parabol a přímek, tečna paraboly

Př: Mějme parabolu s rovnicí $2py = x^2$, její bod $T[x_0, y_0]$ a hledejme rovnice všech přímkek, které prochází T a mají s paraboloy právě jeden společný bod.

Libovolná přímka procházejicí T má rovnici $x = x_0$ nebo $y - y_0 = k(x - x_0)$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Pro $x = x_0$ má přímka právě jeden společný bod, protože $f(x)$ je funkcí.

Pro $y - y_0 = k(x - x_0)$ řešíme soustavu:

$$2py = x^2 \tag{24}$$
$$2p(y - y_0) = 2pk(x - x_0) \tag{25}$$
$$\tag{26}$$

Po dosazení $2py$ získám kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 2pkx - 2p(y_0 - kx_0) = 0$$

Disriminant rovice lze upravit na mocninu dvojčlenu:

$$D = (2pk)^2 - 4(-2p)(y_0 - kx_0) = 4p^2k^2 - 8pkx_0 + 4x_0^2 = (2pk - 2x_0)^2$$

Rovnice má jediný kořen když $D = 0 \Rightarrow pk = x_0$, tedy:

$$y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$$

Po dosazenía roznásobení:

$$py + py_0 = xx_0$$

Existují ted dvě přímky s požadovanými vlastnostmi.

Pozn: Chceme-li definovat tečnu paraboly, musíme použít pojem vnitřní oblast paraboly. Charakteristické vlastnosti jejich bodů snadno vyšetříme:

$$\rho(X, d) = \rho(Z, d) + |ZX| = |FZ| + |ZX| > |FX|$$

Přímka t je tečnou paraboly, nebosahuje-li žádný bod vnitřní oblasi paraboly.

Def: *Vnitřní oblastí paraboly* $P(F, d)$ nazýváme množinu všech bodů X rovniny, pro keré platí $\rho(X, d) > |FX|$.

Def: *Tečnou paraboly* nazýváme přímku, která obsahuje jeden bod paraboly a neobsahuje žádný vnitřní bod paraoly.

V.10.1.: Má-li parabola rovnici $2py = x^2$, pak její vnitřní oblast je analyticky vyjádřena nerovnicí typu $2py > x^2$.

[Postačí v úvahách o parabole zaměnit rovnost za nerovnost.]

V.10.2.:

1. Má-li parabola rovnici $2py = x^2$ a je-li $T[x_0, y_0]$ jejím bodem, pak tečna paraboly v T má rovnici $p(y + y_0) = xx_0$.
2. Každá rovnice $p(y + y_0) = xx_0$, kde $p \neq 0$, vyjadřuje tečnu paraboly $2py = x^2$ v bodě $T[x_0, y_0]$ paraboly.

[První tvrzení je důsledkem příkladu.
U druhého tvrzení potvrdíme tří vlastnosti přímky:

1. Rovnice $x_0x - py - py_0 = 0$ vyjadřuje přímku, protože $(x_0, -p) \neq \overrightarrow{0}$.
2. Obsauje jedinný bod T paraboly:
   Soustava rovnic $p(y+y_0) = xx_0; 2py = x^2$ vede po dosažení k rovnici $(x-x_0)^2 = 0$ s jedinným kořenem x_0, proto přímka obsahuje jedinný bod paraboly.
3. Neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti paraboly:
   Předpokládejme, že nějaký bod $X[x, y]$ přímky je bodem vnitřní oblasti paraboly, pak platí: $2py_0 = x_0^2, p(y + y_0) = xx_0; 2py > x^2$
   $2xx_0 = 2py + 2py_0 > x^2 + x_0^2, 0 > (x - x_0)^2$.

   To je spor, neplatí tedy předpoklad a přímka má požadovanou vlastnost.

]

Př: 245/13:
$V[2, 1]$, $q = 4 \Rightarrow P : y = \frac{1}{8}(x - 2)^2 + 1$

1. $\overrightarrow{AC} = (9,6) \Rightarrow AC = \{[-4+9t; -3+6t] | t \in \langle 0,1 \rangle\}$
   $-3+6t = \frac{1}{8}(-4+9t-2)^2+1$
   $-\frac{81}{8}t^2 + \frac{39}{2}t - \frac{17}{2}$
   $t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{34}{27} > 1$
$$X = [-4+6; -3+4]$$

2. $\overrightarrow{BA} = (-4;-8) \sim (-1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left\{[-t; 5-2t] | t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$
   $5-2t = \frac{1}{8}(-t-2)^2+1$
   $-\frac{t^2}{8} - \frac{5}{2}t + \frac{7}{2} = 0$
   $t = -10 \pm 8\sqrt{2} \Rightarrow t = -10+8\sqrt{2}$
$$Y = [10-8\sqrt{2}; 25-16\sqrt{5}]$$

3. $\overrightarrow{BC} = (5,-2) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \{[5t; 5-2t] | t \in \mathbb{R}\}$
   $5-2t = \frac{1}{8}(5t-2)^2+1$ $0 = \frac{25}{8}t^2 - \frac{t}{2} - \frac{7}{2} = 0$ $t = \frac{2}{25} \pm \frac{8\sqrt{11}}{25}$
$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} - \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} + \frac{16\sqrt{11}}{25}\right]$$
$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} + \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} - \frac{16\sqrt{11}}{25}\right]$$

Př: 245/14:
Analogicky.

Př: 244/4:
Je dána parabola, která má rovnici $0.8(y+2) = (x-3)^2$ a přímka $q : x+5y-3 = 0$. Určete rovnici všech tečen paraboly, které jsou kolmé k q.

Rovnice tečny v bodě $T[x_0, y_0]$:
$$t : 0.4(y+2) + 0.4(y_0+2) = (x-3)(x_0-3)$$
Po úpravé:
$$(x_0-3)x - 0.4y + \cdots = 0$$
Tedy vektor kolmý k tečně je $\overrightarrow{n} = (x_0-3; -0.4)$. Vektor kolmý k q je $\overrightarrow{m} = (1,5)$, tedy $0 = \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = (x_0-3) - 2 \Rightarrow x_0 = 5$. Z rovnice paraboly pak $y_0 = 3$. Tedy rovnice tečny po dosazení je
$$t : 2x - 0.4y - 3 \cdot 5 - 0.8 - 0.4(3+2) = 0$$
$$t : 2x - 0.4y - 22 = 0$$

Př: 244/5:
Je dána parabola $P : -4(x+2) = (y-5)^2$ a bod $M[0;4]$. Určete rovnice všech tečen paraboly procházejících M.

Rovnice tečny je:
$$t : -2(x+2) - 2(x_0+5) = (y-5)(y_0-5)$$

Jelikož $M \notin P$, budeme hledat všechny body $T[x_0, y_0] \in P$, ve kterých má parabola tečnu t procházející M.

$$\begin{aligned} T \in P: \qquad\qquad -4(x_0+2) &= (y_0-5)^2 \\ -4(x_0+2) &= (y-5)^2 \\ M \in t: -2(0+2)-2(x_0+2) &= (4-5)(y_0-5) \\ -2(x_0+2) &= -(y_0-5)+4 \end{aligned}$$

Odečtením dvojnásobku druhé rovnice získám:

$$0 = (y_0-5)^2 + 2(y_0-5)$$

Rovnice má dva kořeny $y_0 = 1$ a $y_0' = 7$. K nim dopočítáme body dotyku a tečny: $T[-6; 1]; T'[-3; 7]$

$$t: x - 2y + 8 = 0$$

$$t': x + y - 4 = 0$$

Př: 245/16:

a)

$$y = \frac{x^2+2x+9}{4}$$

$\overrightarrow{AB} = (-5-4)$ tedy rovnoběžka v $\overleftrightarrow{AB}$ má rovnici $y = \frac{4}{5}x + c$.

$$P': y = \frac{2x+2}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Derivace (směrnice) paraboly musí být v bodě dotyku stejná jako směrnice tečny, tedy

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Dosadím: $y = \frac{\frac{9+30+225}{25}}{4} = \frac{284}{100}$. Z rovnice tečmy: $2.84 = \frac{4}{5}0.6 + c \Rightarrow c = 10.8$

$$t: 4x - 5y = -10.8$$

b,c,d) Analogicky

Př: 245/16

a) Zavedy si posunuté souřadnice $y'+2 = y; x'-1 = x$. Dále v těchto souřadnicích:

$$P: 2 \cdot 2y = x^2$$

$$M[1; -3]$$

Hledám tečnu procházející $T[x_0, y_0]$:

$$\begin{aligned} T \in P: \qquad 4y_0 &= x_0^2 \\ M \in t: 2(-3) + 2y_0 &= x_0 \\ 2y_0 &= x_0 + 6 \end{aligned}$$

Odečteme dvojnásobek:

$$0 = x_0^2 - 2x_0 - 12 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{13} \wedge x_0' = 1 - \sqrt{13}$$

Dosazením: $T[1+\sqrt{13}; \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}2}{]}$, $T'[1-\sqrt{13}; \frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}2}{]}$,

$$t: 2y + 2\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = x(1+\sqrt{13})$$

$$t': 2y + 2\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = x(1-\sqrt{13})$$

V původních souřadnicích:

$$t: 2y + 3 + \sqrt{13} = (x+1)(1+\sqrt{13})$$
$$t': 2y + 3 - \sqrt{13} = (x+1)(1-\sqrt{13})$$

$$t: 2y + 2 - x(1+\sqrt{13}) = 0$$
$$t': 2y + 2 - x(1-\sqrt{13}) = 0$$

§11. Elipsa

Pozn: Termín *elipsa* už známe, máme představu o eliptickém tvaru např vodní hladiny v šikmo postavené válcové nádobě. V geometrii se elipsa definuje pomocí součtu vzdáleností.

Def: Nechť jsou dány dva různé body F, G v rovině a číslo $2a > |FG|$. Množinu všech bodů X roviny, pro ktterá platí $|FX|+|GX| = 2a$ nazýváme *elipa s ohnisky F, G a s hlavní osou o velikosti $2a$*. Stručně ji značíme $E(F, G, 2a)$

Def: U elipsy používáme tyto pojmy:

F, G	ohniska
A_1, A_2	hlavní vrcholy
B_1, B_2	vedlejší vrcholy
S	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedejší poloosy
e	excentricita

"""10-1".pdf

Př: Odvoďte analitické vyjádření elipsy $E(F, G, 2a)$:

Zvolíme souřadnice $F[-e, 0]; G[e, 0]; X[x, y]$. Přitom $|FG| = 2e < 2a; a^2 - e^2 = b^2$. Analitické vyjádříme $|FX| + |GX| = 2a$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 2a \\
(x+e)^2+y^2+(x-e)^2+y^2+2\sqrt{(x^2+e^2+y^2+2ex)(x^2+e^2+y^2-2ex)} &= 4a^2 \\
(x^2+e^2+y^2)^2 - 4e^2x^2 &= 4a^2 + (x^2+e^2+y^2)^2 - 4a^2(x^2+e^2+y^2) \\
x^2(a^2-e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2-e^2) \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Pozn: Rovnice $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$. vyjadřují elipsy s velikostmi polooos rovnými 2, resp. 3. Elipsy se liší polohou ohnisek na osách x, y.

Ohniska leží na té ose souřadnic, kde je poloosa s větší velikostí.

"""10-2".pdf

Pozn: Když je jmenovatel prvníhgho zlomku menší než druhého, tak si x, y prohodí role.

Pozn: Proto někdy raději značíme jmenovatele p, q, aby neinformovali o tom, která je hlavní poloosa.

V.11.1.: Analytické vyjádření elipsy:
Každá elipsa, která má osy rovnoběžné s osami x, y a střed $S[m,n]$ má právě jednu rovnici typu

$$\frac{(x-m)^2}{p^2} + \frac{(y-n)^2}{q^2} = 1$$

kde $p, q > 0$.

V.11.2.: Každá rovnice tohoto typu vyjadřuje právě jednu elipsu se středem $S[m,n]$. Je-li $p > q$, je $2a = 2p$ a hlavní osa elipsy leží na $y = n$. Je-li $p < q$, je $2a = 2q$ a hlavní osa elipsy leží na $x = m$. Je-li $p = q$, je elipsa kružnicí s poloměrem $r = p = q$.

Př: 249/3: Zakreslete střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí

$$5(x+2)^2 + 3(y-4)^2 - 30 = 0$$

Z rovnce určíme $S[-2; -4]$. Dále upravím na $\frac{(x+2)}{6} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$. Tedy $q^2 = a^2 = 10$ a $p^2 = b^2 = 6$. Hlavní osa s ohnisky leží na přímce rovnoběžné s osou y. Dále určíme excentricitu $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ Tedy:

$$\begin{array}{rl}
A_1 & [\;-2\;;4-\sqrt{10}] \\
A_2 & [\;-2\;;4+\sqrt{10}] \\
B_1 & [-5-\sqrt{6};\;4\;] \\
B_1 & [-5+\sqrt{6};\;4\;] \\
F & [\;-5\;;\;6\;] \\
G & [\;-2\;;\;2\;]
\end{array}$$

Př: 250/4:

Určete společné body elipsy a přímky KL, kde $K[3; -1]$ a $L[1; 6]$. Elipsa má rovnici $2(x+4)^2 + 3(y+1)^2 = 10$.

$\overleftrightarrow{KL} = \{[3-2t; -1+7t] | t \in \mathbb{R}\}$ Dosadím:

$$2(7-2t)^2 + 3(7t)^2 = 10$$

$$155t^2 - 56t + 88 = 0$$

$D = 56^2 - 4 \cdot 155 \cdot 88 < 0 \Rightarrow$ Není řešení, tedy není průsečík.

Př: 250/18:

a) Ze symetrie dle osy platí $|FB_1| = |GB_1|$. Ovšem jelikož B_1 leží na elipse, tak $|FB_1| + |GB_1| = 2|FB_1| = 2a \Rightarrow a = |FB_1| = |GB_1|$. *QED*

Pro B_2 analogicky (nebo dle symetrie dle hlavní osy). *QED*

b) Z kolmosti os: $b^2 + e^2 = |B_1F|^2 = a^2$. *QED*

Upravíme na $e^2 = a^2 - b^2$. *QED*

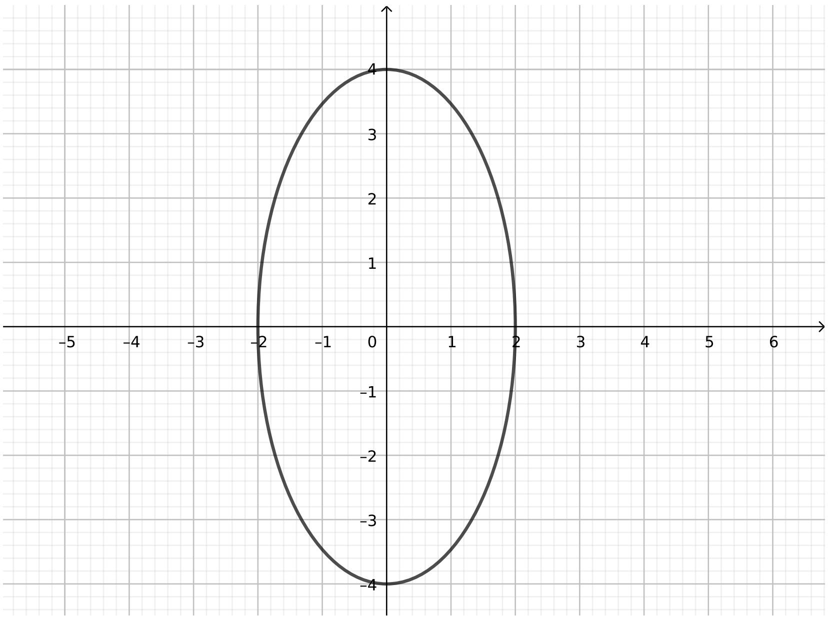
Jelikož SA_1 a SA_2 jsou hlavní poloosy, tak $|SA_1| = a = |SA_2|$. *QED*

Jelikož A_1SA_2 jsou kolineární v tomto pořadí, tak $|A_1A_2| = |A_1S| + |A_2S| = 2a$. *QED*

Př: 251/19:

a) Evidentně $S[0,0]$. Hlavní poloosa ve směru osy y délky $a = 4$, vedlejší $b = 2$, tedy $e = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{rl} A_1 & [\ 0\ ;\ \ 4\ ] \\ A_2 & [\ 0\ ;\ -4\ ] \\ B_1 & [\ 2\ ;\ \ 0\ ] \\ B_1 & [-2;\ \ 0\ ] \\ F & [\ 0\ ;\ 2\sqrt{3}\ ] \\ G & [\ 0\ ;-2\sqrt{3}] \end{array}$$



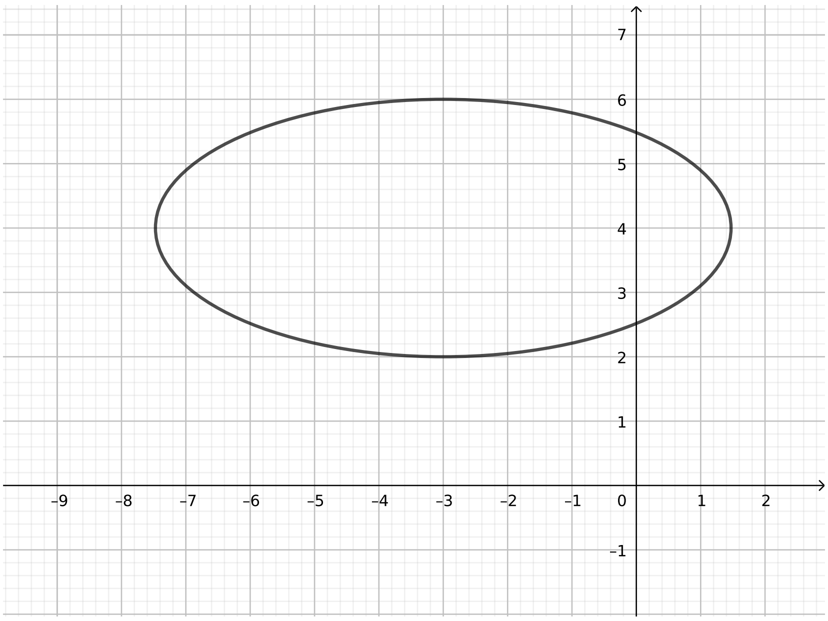
b,c,d,e) Analogicky. Střed je vždy stejný a pouze se mění směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/20:

a) Evidentně $S[-3,4]$. Hlavní poloosa ve směru osy x délky $a = \sqrt{20}$, vedlejší

$b = 2$, tedy $e = \sqrt{20-4} = \sqrt{16} = 4$.

$$\begin{array}{rl} A_1 & [-3+\sqrt{20};4] \\ A_2 & [-3-\sqrt{20};4] \\ B_1 & [\quad -3 \quad ;6] \\ B_1 & [\quad -3 \quad ;2] \\ F & [\quad 1 \quad ;4] \\ G & [\quad -7 \quad ;4] \end{array}$$



b,c,d) Analogicky. Pouze se mění střed, směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/21:

a) $\overrightarrow{AB} = (2;-5) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} = \{[3+2t;-5t] | t \in \mathbb{R}\}$
Dosadím: $\frac{(3+2t)^2}{4} + \frac{(-5t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 21t^2 + 48t + 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{39}}{21}$
$\left[\frac{15-4\sqrt{39}}{21}; \frac{120+10\sqrt{39}}{21}\right]$
$\left[\frac{15+4\sqrt{39}}{21}; \frac{120-10\sqrt{39}}{21}\right]$
$\overrightarrow{AC} = (6;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left\{[1+2t; 5-t] | t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$
Dosadím: $\frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 17t^2 + 6t + 13 = 0 \Rightarrow D36 - 4 \cdot 17 \cdot 13 < 0$
Průsečík není.
$\overrightarrow{BC} = (4;2) \Rightarrow BC = \{[3+2t;t] | t \in \langle 0;2 \rangle\}$ Dosadím: $\frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow$ $17t^2 + 48t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{59}}{17} < 0$
Průsečík je pouze s přímkou, nikoliv úsečkou.

b,c,d,e) Analogicky. Vždyť je to jenom dosazení toho samého do jiné rovnice a výpočet kvadratické rovnice. Já nemám zájem celý den dosazovat a počítat kvadratické rovnice.

§12. Hyperbola

Def: Mějme dány dva ruzné body F, G a takové číslo $2a$, že $0 < 2a < |FG|$. Množinu všech bodů roviny X, pro než platí $||fx| - |GX|| = 2a$ nazýváme i*hyperbolou s ohnisy* FG *a s hlavní osou* $2a$. Stručně ji ozmačujeme $H(F, G, 2a)$. *Větví hyperboly* nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX| = 2a$. Stejně jako množinu, pro kterou platí $|GX| - |FX| = 2a$.

Pozn: Zvláštní tvar hyperboly působí nesnáze; hyperboly nemají na ose úsečky FG zádné body, proto nemají vedlejší vrcholy.

Číslo $b > 0$ se definuje jinak: Pomocí vztahu $b^2 = e^2 - a^2$ a stále se nazývá velikostí vedlejši poloosy. Ale jelikož hyperbola nemá vedlejší vrcholy, nemá ani žádnou vedlejší poloosu.

Př: Odvoďte analitické vyjádření hyperboly $H(F, G, 2a)$, jejíž ohniska F, G, leží na ose x.

Zvolíme $F[-e; 0]; G[e; 0]; X[x, y]$, přitom $|FG| = 2e > 2a, b^2 = e^2 - a^2$. Vyjádřím charakteristickou vlastnost jednoho bodu:

$$\begin{aligned}
||FX| - |GX|| &= 2a \\
|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2) - 4e^2x^2} &= (x^2 + e^2 + y^2) - 2a^2 \\
a^2x^2 + a^2y^2 - e^2x^2 &= a^4 - a^2e^2 \\
x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2) \\
-b^2x^2 + a^2y^2 &= -a^2 - b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Poslední rovnice je ekvivalentní s první, proto slouží jako analytické vyjádření hyperboly, jejíž osy leží na osách soustavy souřadnic a ohniska na ose x.

Př: Ověřte, zda pro každou dvojici a, b kladných reálných čísel muže rovnice odvozená v příkladě 1 vyjadřovat hyperbolu s ohnisky F, G na ose x a s hlavní osou $2a$.

Je-li dána rovnice $\frac{x^2}{s^2} - \frac{y^2}{b^2}$, kde $a > 0; b > 0$, můžeme sestrojit $A_1[-a; 0]; A_2[a; 0]; K[a; b]$. Přepona OK udává $e > a$, kružnice $k(O, e)$ protíná osu x v bodech $F[-e;]; G[e; 0]$. Snadno ověříme (viz předhozí příkjlad), že hyperbola $H(F, G, 2a)$ má analitické vyjádření, které bylo dáno.

Pozn: Na rozdíl od elips nerozhoduje nerovnost mezi a, b o tom, na které z os leži ohniska hyperboly. O tom rozhoduje prohození členů rozdílu.

Def: Směry, jejichž každá přímka má s hyperbolou nejvýše jeden spolecný bod, se nazyvají *asymptotické směry hyperboly.* Přímky těchto směrů, které neobsahují žádný bod hyperboly, nazyváme *asymptoty hyperboly*

Def: U hyperboly používáme následující termíny:

F, G	ohniska
A_1, A_2	(hlavní) vrcholy
S nebo O	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedlejší poloosy
e	výstřednost
a_1, a_2	asymptoty

"""11-1".pdf

Př: Najdět analytické vyjádření rovnoosých hyperbol $H(F, G, 2a)$, jejicž kolmé asymptoty jsou rovnoběžné s x, y.

Pracujme s hyperbolami, které mají přímo osy x, y jako asymptoty. Střed je tedy $[0; 0]$ a F, G mají na osách 1. a 3. kvadrantu. Protože $a = b$, je $e = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$. Ohniska mají pak souřadnice $F[-a; -a]; G[a, a]; X[x, y]$.

$$\begin{aligned} ||FX| - |GX|| &= 2a \\ |\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}| &= 2a \\ y &= cx^{-1} \end{aligned}$$

V.12.1.: Uvažme $H(F, G, 2a)$, které mají střed $S[m, n]$, excentricitu $e = \frac{|FG|}{2}$, velikost vedlejší poloosy $b = e^2 - a^2$.

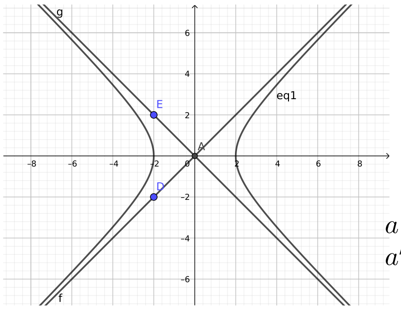
1. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rvnoběžná s x má právě jednu rovnici
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$
2. Každá hyperbola, jejíž osa FG je rvnoběžná s y má právě jednu rovnici
$$\frac{(y-m)^2}{a^2} - \frac{(x-n)^2}{b^2} = 1$$
3. Každá rovnoosá hyperbla, která má asymptoty rovoběžné s x, y má právě jednu rovnici
$$2(x-m)(y-n) = a^2$$

Každá z rovnic vyjadřuje právě jednu hyperbolu v poloze výše popsané.

Př: 257/22:

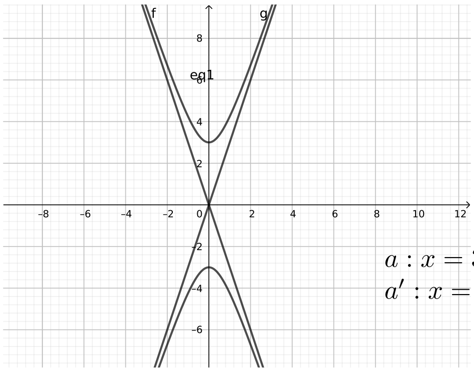
1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$
3. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$
4. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Př: 257/23:

a) 

$$\begin{array}{rl} F & [-2\sqrt{2};0] \\ G & [\ 2\sqrt{2}\ ;0] \\ S & [\quad 0 \quad ;0] \\ A_1 & [\quad -2 \quad ;0] \\ A_2 & [\quad 2 \quad ;0] \end{array}$$

$a : x = y$
$a' : x = -y$

d) 

$$\begin{array}{rl} F & [0;-\sqrt{10}] \\ G & [0;\ \sqrt{10}\ ] \\ S & [0;\quad 0 \quad] \\ A_1 & [0;\ \ -3 \ \ ] \\ A_2 & [0;\quad 3 \quad] \end{array}$$

$a : x = 3y$
$a' : x = -3y$

Př: 258/24: $p : y = 2x + 3$
$\overrightarrow{UV} = \left\{[3-t;t] | t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$

a) $x^2 - y^2 = 4$:
$x^2 - (2x+3)^2 = 4$
$0 = 3x^2 + 12x + 13$
$D = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 13 < 0$

$$H \cap p = \emptyset$$

$(3-t)^2 - t^2 = 4$
$5 - 6t = 0$
$t = \frac{5}{6}$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \left\{\left[\frac{13}{6}; \frac{5}{6}\right]\right\}$$

d) $y^2 - 9x^2 = 9$ $x^2 - 9(2x+3)^2 = 9$
$0 = 35x^2 + 108x + 90$
$D = 108^2 - 4 \cdot 35 \cdot 90 < 0$

$$H \cap p = \emptyset$$

$(3-t)^2 - 9t^2 = 9$
$0 = 8t^2 + 6t$
$t = 0 \vee t = -\frac{3}{4} < 0$

$$F \cap \overrightarrow{UV} = \{[3;0]\}$$

§13. Středové kuželosečky a jejich tečny

Def: Kružnice, elipsy a hyperboly nazýváme středové křivky 2. stupně neboli *středové kuželosečky*. Jejich rovnice ve kterých vystupují souřadnice středu, nazýváme rovnice ve středovém tvaru.

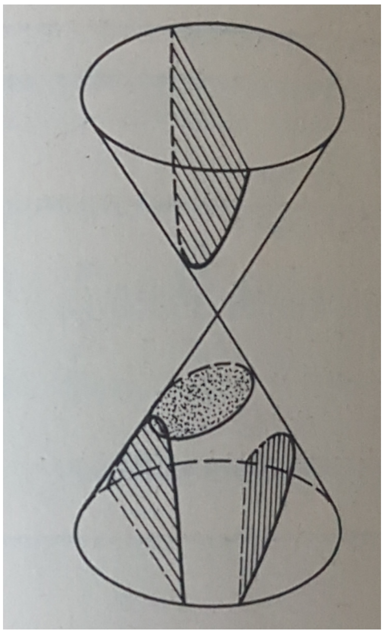
Pozn: Zapíšeme rovnice z předchozích definic:

$$\begin{array}{ccc} (x-m)^2+(y-n)^2=r^2 & \frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 & \frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \\ (x-m)^2r^2+(y-n)^2r^2=1 & \frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1 & -\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \end{array}$$

Všechny rovnice jsou tedy tvaru

$$\pm p^2(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^1 = \pm s^2$$

Pozn:



Název kuželosečky vystihuje možnost její vytvoření jako průniku rotační kružních kuželových ploch a roviny (viz obrázek).

Povšimneme si *vnitřku kuželové plochy* a jejího tečkoveného průniku s rovinou kuželesečky. U kružnice a paraboly zřejmě dostaneme útvary, kter jsem nazvali vnitřními oblastmi. Obdobný pojem zavedeme i pro středové kuželosečky. Vidíme, že zatímco elipsa má jednu vnitřní oblast hyperbola má dvě. Vyslovíme však definici jen dle vzdáleností bodů v rovině:

Def: *Vnitřní oblstí elipsy* s ohnisky F, G a s hlavní poloosou a nezveme množinu všech bosů X roviny, pro které platí $|FX| + |GX| < 2a$

Def: *Vnitřní oblastí jedné větve hyperboly* $H(F, G, 2a)$ se nazývá množina všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| - |GX \gg 2a$ a druhé větve $|GX| - |FX| > 2a$.

V.13.1.:

1. Má-li elipsa rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak její oblast má v téže soustavě souřadnic analytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$
2. Má-li hyperbola rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pak sjednocení vnitřních oblastí jejích větví má alalytické vyjádření $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$

[Dk: Při odvozování se zachovává znaménko]

Def: *Tečnou středové kuželosečky* se nazývá přímka, která obsahuje jediný bod kuželosečky a neobsahuje žádný bod její vnitřní oblasti.

V.13.2.: Má-li středová kuželosečka rovnici

$$\pm p^1(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^2 \pm s^2$$

pak v její tečna t v $T[x_0, y_0]$ má rovnici

$$\pm p^2(x-m)(x_0-m) \pm q^2(y-n)(y_0-n) = \pm s^2$$