VII. Funkce

A) Základní vlastnosti funkcí
§1. Funkce

Def.: <u>Funkcí</u> *f* nazýváme každé zobrazení z **R** do **R**, tedy $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $f \subseteq \mathbf{R}^2$ (tedy zobrazení v množině **R**).

Pozn.: a) Je-li $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pak pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje nejvýše jedno $y \in \mathbf{R} : y = f(x)$.
Číslo $y \in \mathbf{R}$ se nazývá <u>funkční hodnotou</u> funkce *f* v bodě *x*.
b) Takto je definována <u>reálná funkce reálné proměnné</u> – my to ztotožňujeme s pojmem „<u>funkce</u>“.

Def.: Nechť $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je funkce:
$D(f) = \{x \in \mathbf{R} : \exists!\, y \in \mathbf{R}, y = f(x)\}$…<u>definiční obor</u> funkce *f*
$H(f) = \{y \in \mathbf{R} : \exists\, x \in \mathbf{R} : y = f(x)\}$…<u>obor hodnot</u> funkce *f*

Pozn.: Způsoby zadání funkce: 1) výčtem prvků
2) tabulkou
3) předpisem (tzn. udáme pravidlo, pomocí něhož lze jednoznačně ke každému $x \in \mathbf{R}$ přiřadit nejvýše jedno $y \in \mathbf{R} : y = f(x)$).

Proměnnou *x* nazýváme <u>nezávisle proměnnou</u> a proměnnou *y* nazýváme <u>závislou proměnnou.</u>

Př.: Určete D(*f*) a H(*f*)

a) $f_1 : y = x^2 + x + 1$ $D(f_1) = \mathbf{R}$

$a \in H(f_1) \subseteq \mathbf{R} \iff a = x^2 + x + 1$

$$x^2 + x + 1 - a = 0$$
$$D = 1 - 4 + 4a = 4a - 3 \geq 0$$
$$a \geq \frac{3}{4}$$

$H(f_1) = \langle \frac{4}{3}; \infty)$

b) $f_2 : y = \dfrac{x-1}{x+1}$ $D(f_2) = \mathbf{R} - \{-1\}$

$a \in H(f_2) \subseteq \mathbf{R} \iff a = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$ax + a = x - 1$$
$$x(a - 1) = -a - 1$$
$$H(f_2) = \mathbf{R} - \{1\}$$

Pozn.: Obecně rychlejší způsob určování oboru hodnot je z grafu funkce (průběhu funkce).

Def.: Nechť v $\mathbf{E}_2$ jsou dány 2 navzájem kolmé osy x, y s jednotkovou délkou. Pak <u>grafem funkce</u> *f* rozumíme množinu všech bodů $X[x; f(x)]$, kde *x* náleží definičnímu oboru.

Def.: Nechť f, g jsou funkce se společným definičním oborem D.
Funkci k_1 nazveme součet funkcí f, g (zapisujeme $k_1 = f + g$), jestliže
$\forall x \in$ D: $k_1(x) = f(x) + g(x)$
Funkci k_2 nazveme součinem funkcí f, g (zapisujeme $k_2 = f \,.\, g$), jestliže
$\forall x \in$ D: $k_2(x) = f(x) \,.\, g(x)$

§2. Základní vlastnosti funkcí

A) PARITA FUNKCÍ

Def.: Funkce f se nazývá sudá, resp. lichá, jestliže platí:
1) $\forall x \in$ D(f) : $(-x) \in$ D(f)
2) $\forall x \in$ D(f) : $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$

Pozn.: a) Vlastnosti sudost a lichost funkce nazýváme pojmem parita.
b) Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.
Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku.

Př.: Určete paritu následujících funkcí.

a) $f_1 : y = x^2$
1) D(f_1) = **R** – splněno
2) $f_1(-x) = (-x^2) = x^2 = f_1(x)$
f_1 – sudá

b) $f_2 : y = 1/x$
1) D(f_2) = **R** – {0} – splněno
2) $f_2(-x) = -1/x = -f_2(x)$
f_2 – lichá

c) $f_3 : y = x + 1$
1) D(f_3) = **R** – splněno
2) $f_3(-x) = -x + 1 \neq \pm(x + 1) = \pm f_3(x)$
f_3 – není sudá ani lichá

Pozn.: Je-li f lichá funkce taková, že $0 \in$ D(f), pak platí $f(0) = 0$.

V.2.1.: Nechť f, g jsou funkce se společným definičním oborem D. Nechť $h = f \,.\, g$. Pak platí:
1) (f – sudá $\wedge$ g – sudá) $\vee$ (f – lichá $\wedge$ g – lichá) => h – sudá
2) (f – lichá $\wedge$ g – sudá) $\vee$ (f – sudá $\wedge$ g – lichá) => h – lichá
[Dk.:
1) Nechť f – sudá a g – sudá => $\forall x \in$ D : $f(-x) = f(x) \wedge g(-x) = g(x)$ =>
=> $h(-x) = f(-x) \,.\, g(-x) = f(x) \,.\, g(x) = h(x)$ => h – sudá
2) Nechť f – lichá a g – lichá => $\forall x \in$ D : $f(-x) = -f(x) \wedge g(-x) = -g(x)$ =>
=> $h(-x) = (-f(x)) \,.\, (-g(x)) = f(x) \,.\, g(x) = h(x)$ => h – sudá
3) Nechť f – sudá a g – lichá => $\forall x \in$ D : $f(-x) = f(x) \wedge g(-x) = -g(x)$ =>
=> $h(-x) = f(-x) \,.\, -g(x)$ => h – lichá
4) Nechť f – lichá a g – sudá => $\forall x \in$ D : $f(-x) = -f(x) \wedge g(-x) = g(x)$ =>
=> $h(-x) = -f(x) \,.\, g(-x)$ => h – lichá]

B) MONOTÓNNOST FUNKCE

Def.: Funkce f se nazývá prostá, právě když platí: $\forall x_1, x_2 \in$ D(f) : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def.: Nechť f je funkce a M alespoň 2-prvková množina, $M \subseteq$ D(f).
Řekneme, že funkce f je v množině M:

a) rostoucí : právě když $\forall x_1,x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
b) klesající : právě když $\forall x_1,x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
c) neklesající : právě když $\forall x_1,x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
d) nerostoucí : právě když $\forall x_1,x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, hovoříme stručně o rostoucí, resp. klesající, neklesající, nerostoucí funkci.
b) Neklesající a nerostoucí funkce nazýváme souhrnně monotónními funkcemi. Rostoucí a klesající funkce nazýváme souhrnně ryze monotónními funkcemi.

Př.: Určete monotónnost funkce $f: y = x^2$ na daných množinách:
a) $M_1 = \mathbf{R}^+_0$: $x_1 < x_2 \quad /.\ x_1 > 0$ $\qquad x_1 < x_2 \quad /.\ x_2 > 0$
$x_1^2 < x_2x_1 \qquad x_2x_1 < x_2^2$
$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ je v M_1 rostoucí
b) $M_2 = \mathbf{R}^-_0$: $x_1 < x_2 \quad /.\ x_1 < 0$ $\qquad x_1 < x_2 \quad /.\ x_2 < 0$
$x_1^2 > x_2x_1 \qquad x_2x_1 > x_2^2$
$x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ je v M_2 klesající
c) $M_3 = \mathbf{R} : x_1 < x_2$; z případu a), b) plyne, že funkce není klesající ani rostoucí

Pozn.: Vlastnost být rostoucí (resp. klesající) funkcí nezávisí jen na funkci, ale i na množině M.

V.2.2.: Nechť f je funkce. Pak platí:
Je-li f ryze monotónní, pak je prostá.
[Dk.: Nechť např. f je rostoucí. Zvolme $x_1, x_2 \in D(f)$ tak, že $x_1 \neq x_2 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ je prostá funkce].

Pozn.: Obrácení předchozí věty obecně neplatí.

V.2.3.: Nechť f je funkce, $M \subseteq D(f)$ je alespoň 2-prvková množina. Pak platí: Je-li f ryze monotónní v M, pak je funkce f ryze monotónní v každé alespoň 2-prvkové množině M_1, $M_1 \subseteq M$.

Pozn.: a) Objasnění pojmu funkce: Aby graf binární relace v soustavě souřadnic byl grafem funkce, nesmí existovat dvojice bodů „nad sebou".
b) Objasnění pojmu prosté funkce: Aby graf funkce byl grafem prosté funkce, nesmí existovat ani dvojice bodů „vedle sebe".

C) OHRANIČENOST FUNKCE

Def.: Nechť f je funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je v množině M:
a) shora omezená, právě když $\exists k \in \mathbf{R} : \forall x \in M: f(x) \leq k$
b) zdola omezená, právě když $\exists k \in \mathbf{R} : \forall x \in M: f(x) \geq k$
c) omezená, právě když je omezená zdola i shora současně.

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, hovoříme stručně o shora omezené, resp. zdola omezené nebo omezené funkci.
b) Definici omezené funkce lze vyslovit i takto:
funkce f je v M omezená $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{R}^+: \forall x \in M: |f(x)| \leq k$.

c) Je-li M konečná množina, je funkce f vždy omezená.
d) Místo pojmu omezenost se také mluví o ohraničenosti funkce.

D) EXTRÉMY FUNKCE

Def.: Nechť f je funkce $M \subseteq D(f)$, v ní 2 prvky $a,b \in M$.
Řekneme, že funkce f má v bodě a:
a) ostré maximum na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M; x \neq a: f(x) < f(a)$
b) maximum (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$
Řekneme, že funkce f má v bodě a:
c) ostré minimum na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M; x \neq b: f(x) > f(b)$
d) minimum (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M : f(x) \geq f(b)$

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, řekneme, že funkce f má v bodě a ostré maximum resp. maximum nebo že funkce f má v bodě b ostré minimum resp. minimum.
b) Maxima a minima funkce nazýváme extrémy funkce.

Př.: Je dána funkce $f : y = x + 1$. Udejte $M \subseteq D(f)$ tak, aby funkce f:

a) neměla ostré maximum a měla ostré minimum	$M = \langle 0;\infty)$
b) neměla ostré minimum a měla ostré maximum	$M = (-\infty;0\rangle$
c) měla oba extrémy ostré	$M = \langle 0;1\rangle$
d) neměla ostré extrémy	$M = \mathbf{R}$

E) PERIODICITA FUNKCE

Def.: Nechť f je funkce. Funkce f se nazývá periodická, právě když $\exists p \in \mathbf{R}^+ : \forall x \in D(f)$.
1) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$
2) $f(x) = f(x \pm p)$
Číslo p se nazývá periodou této funkce. V opačném případě se funkce nazývá neperiodická.

Pozn.: a) Matematickou indukcí se dokáže, že definici periodické funkce lze říci i takto:
Funkce f je periodická s periodou $p \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{R}^+ : \forall x \in D(f)$.
1) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm kp \in D(f)$
2) $f(x) = f(x \pm kp)$, kde $k \in \mathbf{Z}$
b) Funkce f není periodická $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{R}^+ : \exists x \in D(f)$ tak, že:
$x \in D(f) \wedge x + p \notin D(f)$ nebo $f(x) \neq f(x+p)$
c) Má-li periodická funkce f periodu p, pak kladné číslo kp, kde $k \in \mathbf{N}$, je též periodou funkce f.

Def.: Nechť f je periodická funkce, pak periodu p_0, s vlastností, že pro každou jinou periodu p platí: $p > p_0$, nazýváme nejmenší periodou funkce f (pokud existuje).

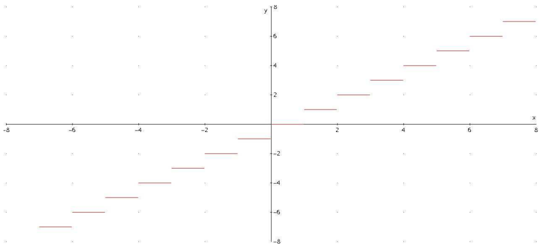
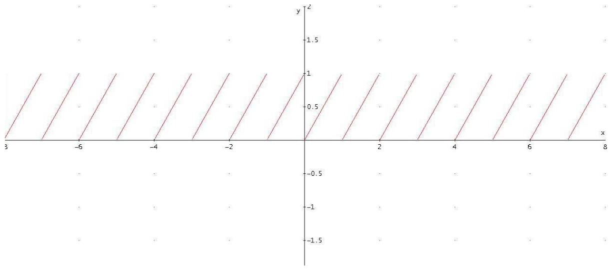
Př.: a) $f : y = c; c \in \mathbf{R}$, periodou je jakákoliv kladná reálná hodnota, nejmenší hodnota neexistuje.
b) **Dirichletova funkce** $\mathscr{D}(x) = 1$ pro $\forall x \in \mathbf{Q}$
0 pro $\forall x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$
Ekvivalentně lze definovat: $D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\pi x)$

Je periodická, periodou je libovolné $n \in$ **Q** a žádné jiné, nejmenší periodu nemá.

Pozn.: Nechť $x \in$ **R** je libovolné číslo. Pak existuje právě jedna dvojice $z \in$ **Z**, $a \in \langle 0;1)$ tak, že $x = z + a$.
Číslo z nazýváme <u>celou částí čísla</u> x a zapisujeme $[x] = z$.

Př. Nakreslete grafy funkcí.

a) $f : y = [x]$ b) $g : y = x - [x]$

1. Je dána funkce $f : y = x + 1$, udejte M tak, že $M \subseteq$ D(f) a funkce f na ní byla.

a) omezená shora, ne zdola	$M = (-\infty;4)$
b) omezená zdola, ne shora	$M = \mathbf{R}^+$
c) omezená	$M = \langle 0;4)$
d) neomezená shora ani zdola	$M = \mathbf{R}$

2. Dokažte: a) funkce $f : y = \dfrac{1}{x^2+1}$ je omezená

b) funkce $f : y = 2x + 1$ není omezená v intervalu $(-\infty;0\rangle$

a) $\forall x \in \mathbf{R} : \dfrac{1}{x^2+1} \geq 0$ => f je zdola omezená

$\dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ => $1 \leq x^2 + 1$ (je vždy kladná) => $0 \leq x^2$ => obrácením úvah plyne, že f je shora omezená.

Tedy f je omezená. (Také jsme ukázali, že H(f) $\subseteq \langle 0;1\rangle$)

b) $f : y = 2x + 1$ – rostoucí => $\forall x \in (-\infty;0\rangle : f(x) \leq f(0)$ => $f(x) \leq 1$ => f - shora omezená v $(-\infty;0\rangle$.

[Dk. omezenosti zdola: Nechť f je zdola omezená v $(-\infty;0\rangle$ => $\exists k \in \mathbf{R}$:

$\forall x \in (-\infty;0\rangle : f(x) \geq k$ => $x \geq \dfrac{k-1}{2}$

Tedy všechna nekladná čísla $\geq \dfrac{k-1}{2}$ - spor => f není zdola omezená v $(-\infty;0\rangle$

=> f není v $(-\infty;0\rangle$ omezená.]

3. Určete zda-li je funkce periodická. Pokud ano, určete nejmenší periodu.
Funkce $f : y = (-1)^x, x \in \mathbf{Z}$: $x = 2k,\ k \in \mathbf{Z}$ => $y = (-1)^x = 1$
$x = 2k + 1,\ k \in \mathbf{Z}$ => $y = (-1)^x = -1$
funkce je periodická s periodou 2. Perioda je kladné číslo $2m,\ m \in \mathbf{N}$. Nejmenší perioda je 2.

B) Polynomické, racionální lomené a mocninné funkce
§1. Konstantní a lineární funkce

Def.: a) Nechť $b \in$ **R**. Funkci $f: y = b$ nazveme konstantní funkcí.
b) Nechť $a, b \in$ **R**, $a \neq 0$. Pak funkci $f: y = ax + b$ nazveme lineární funkcí.

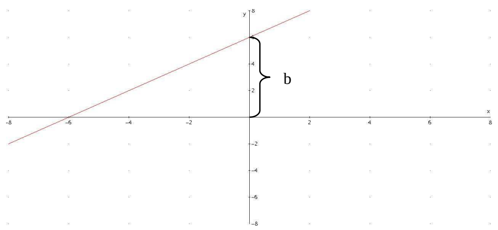
Pozn.: Velmi často se konstantní funkce chápe jako speciální případ lineární funkce pro $a = 0$.

Pozn.: a) Definičním oborem konstantní i lineární funkce je **R**.
Oborem hodnot konstantní funkce je $\{b\}$.
Oborem hodnot lineární funkce je **R**.
b) Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x.
Grafem lineární funkce je přímka, která není rovnoběžná s osou x ani s osou y.

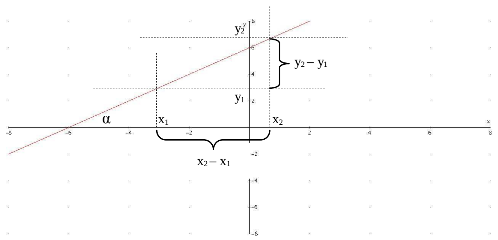
V.1.1.: Nechť $f: y = ax + b, a \neq 0$ je lineární funkce. Pak platí:
1) $b = 0 \Rightarrow f$ je lichá
$b \neq 0 \Rightarrow f$ není ani sudá, ani lichá
2) $a > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí
$a < 0 \Rightarrow f$ je klesající
3) f není ani shora, ani zdola omezená
4) f nemá extrémy
5) f není periodická

[Dk.:1) $b = 0 \Rightarrow f: y = ax = f(x) \wedge -ax = -f(x) \Rightarrow f$ je lichá
$b \neq 0 \Rightarrow f: y = ax + b = f(x) \wedge f(-x) = -ax + b \Rightarrow f$ není ani sudá ani lichá
2) $a > 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f$ je rostoucí
$a < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f$ je klesající
3) Obor hodnot je **R** $\Rightarrow f$ není omezená
4) Plyne z grafu
5) Plyne z grafu nebo z toho, že f je ryze monotónní]

Pozn.: Geometrický význam koeficientů a,b u rovnice lineární funkce $f: y = ax + b$:



$f(0) = a \cdot 0 + b = b$
b = hodnota funkce v bodě 0



$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

a … směrnice přímky dané rovnicí y = ax + b

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

α … směrový úhel

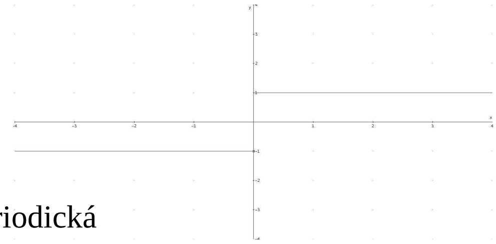
Př.: Funkce signum:

$y = \mathrm{sgn}\, x$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pro všechna } x \in \mathbf{R}^- \\ 0 \text{ pro } x = 0 \\ 1 \text{ pro všechna } x \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$$

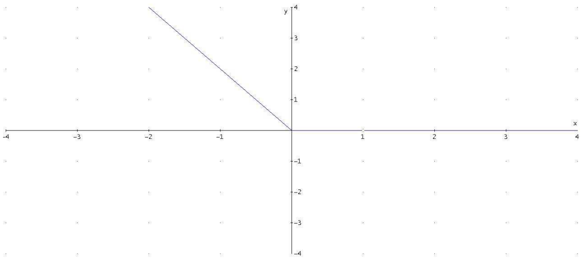
$H(f) = \{-1; 0; 1\}$

Funkce signum má neostré extrémy a není periodická

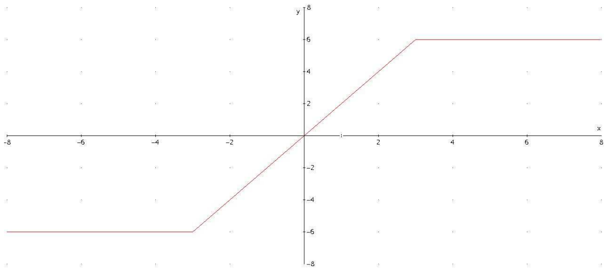


Př.: Nakreslete grafy funkcí

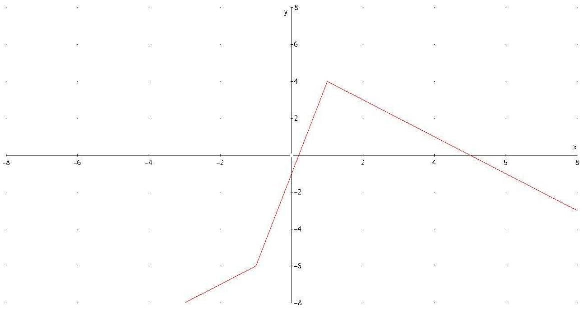
a) $f_1 : y = |x| - x$



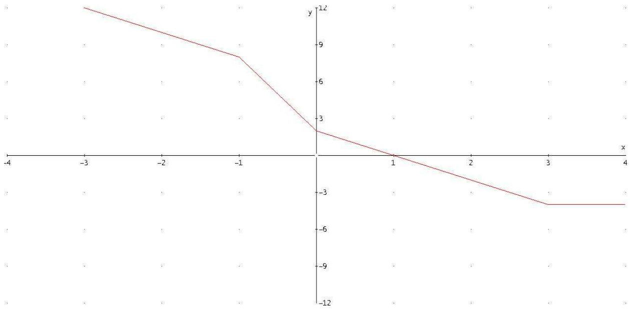
b) $f_2 : y = |x + 3| - |x - 3|$



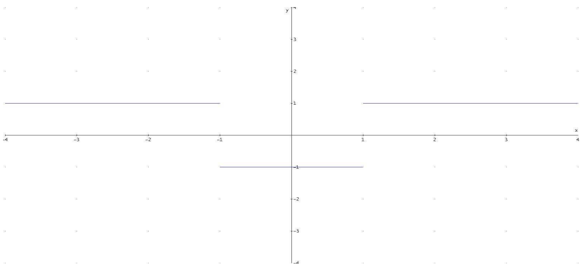
c) $f_3 : y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$



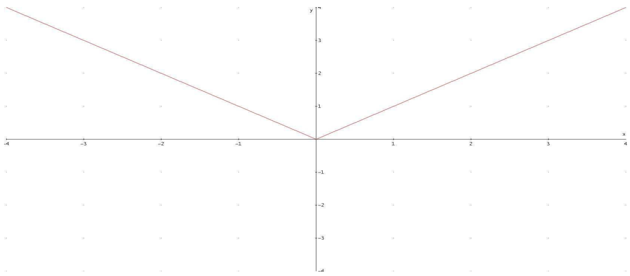
d) $f_4 : y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - (x - 1)$



e) $f_5 : y = \mathrm{sgn}(|x| - 1)$



f) $f_6 : y = x \,.\, \mathrm{sgn}\, x$



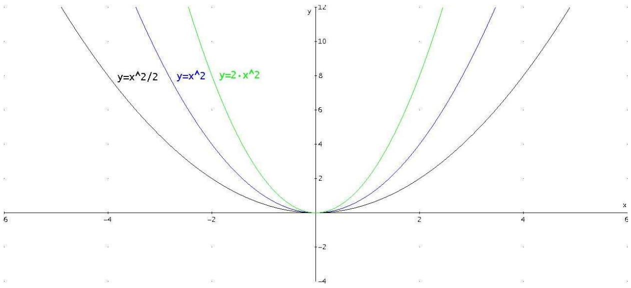
§2. Kvadratická funkce

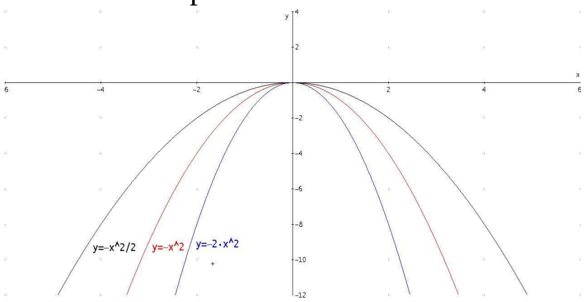
Def.: Nechť $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Pak $f: y = ax^2 + bx + c$ nazýváme <u>kvadratickou funkcí</u>.

Pozn.: a) Definičním oborem kvadratické funkce je **R**.
b) Grafem kvadratické funkce je parabola.

V.2.1.: Nechť $f: y = ax^2$, $a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

	$\underline{a > 0}$	$\underline{a < 0}$
1) obor hodnot	$H(f) = \mathbf{R_0}^+$	$H(f) = \mathbf{R_0}^+$
2) parita	sudá	sudá
3) monotónnost	$x \in (-\infty;0\rangle$ …klesající $x \in \langle 0;\infty)$…rostoucí	$x \in (-\infty;0\rangle$ …rostoucí $x \in \langle 0;\infty)$… klesající
4) omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
5) extrémy	ostré minimum v bodě $x_0 = 0$	ostré maximum v bodě $x_0 = 0$
6) periodita	neperiodická	neperiodická





Pozn.: Vlastnost obecné kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ vyšetřujeme doplněním na úplný čtverec: $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

V.2.2.: Nechť $f: y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

	$\underline{a > 0}$	$\underline{a < 0}$
1) obor hodnot	$H(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a};\infty)$	$H(f) = (-\infty; c - \frac{b^2}{4a}\rangle$
2) parita	obecně není sudá ani lichá	obecně není sudá ani lichá
3) monotónnost	$x \in (-\infty;-\frac{b}{2a}\rangle$ …klesající $x \in \langle -\frac{b}{2a}; \infty)$…rostoucí	$x \in (-\frac{b}{2a};\infty\rangle$ …klesající $x \in (-\infty;-\frac{b}{2a})$…rostoucí
4) omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
5) extrémy	ostré min.v bodě $x = -\frac{b}{2a}$	ostré max.v bodě $x = -\frac{b}{2a}$
6) periodita	neperiodická	neperiodická

Pozn.: Grafy parametrického systému funkcí $f: y = ax^2 + bx + c$

Parametr a: $a > 0$ parabola otevřená nahoru
$a < 0$ parabola otevřená dolů
vliv na roztažení paraboly

Parametr c: parabola se posouvá po ose y

Parametr b: posun po ose x ale i po ose y

1. Dané kladná číslo a rozložte na 2 sčítance tak, aby:

a) jejich součin byl největší.

$a = x + y \quad => y = a - x$

$$S = x.y = x(a-x) = ax - x^2 = -(x^2 - ax) = -(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$S_{\max} = \frac{a^2}{4} \text{ pro } x = \frac{a}{2} => y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

b) Součet jejich druhých mocnin byl nejmenší.

$$S = x^2 + y^2 = x^2 + (a-x)^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) + a^2$$

$$= 2(x - \frac{a}{2})^2 - 2\frac{a^2}{4} + a^2 = 2(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$S_{\min} = \frac{a^2}{2} \text{ pro } x = \frac{a}{2} => y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

2. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $\overrightarrow{v_0}$. Určete výšku výstupu a čas, kdy tato maximální výška nastane.

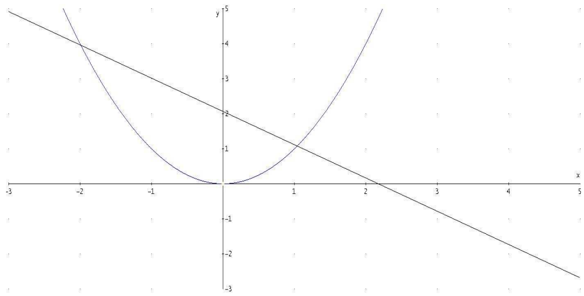
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t^2 - \frac{2v_0 t}{g}) = -\frac{1}{2}g(t - \frac{v_0}{g})^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \text{ pro } t = \frac{v_0}{g}$$

3. Řešte graficky kvadratickou rovnici $2x^2 + 1{,}9x - 4{,}13 = 0$

$x^2 = -0{,}95x + 2{,}065$
$f: y = x^2$
$g: y = -0{,}95x + 2{,}065$

$x_1 = -2$; $x_2 = 1$

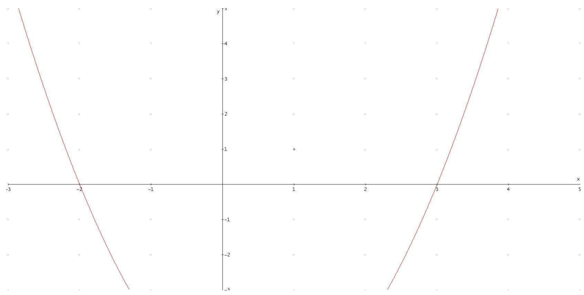


4. S využitím grafu kvadratické funkce řešte kvadratickou nerovnici $x^2 - x - 6 \geq 0$

$y = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

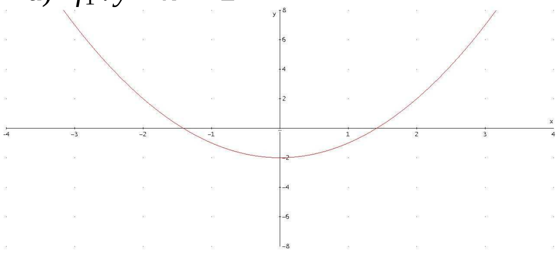
$x_1 = -2$; $x_2 = 3$

P = $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$

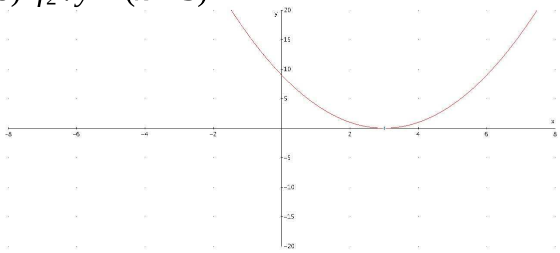


5. Sestrojte grafy následujících funkcí

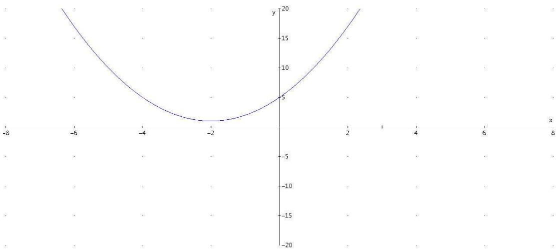
a) $f_1 : y = x^2 - 2$



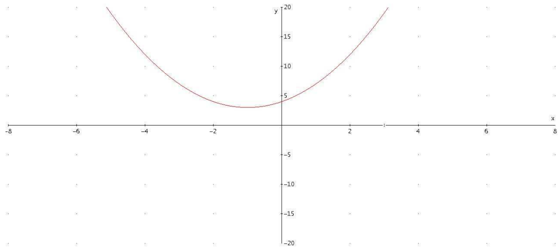
b) $f_2 : y = (x - 3)^2$



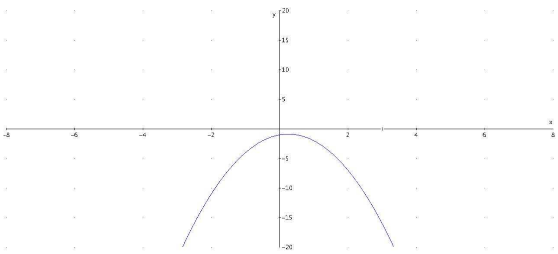
c) $f_3 : y = (x + 2)^2 + 1$



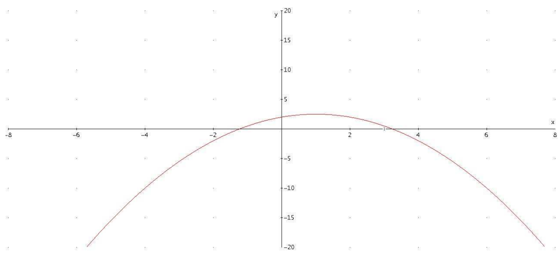
d) $f_4 : y = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$



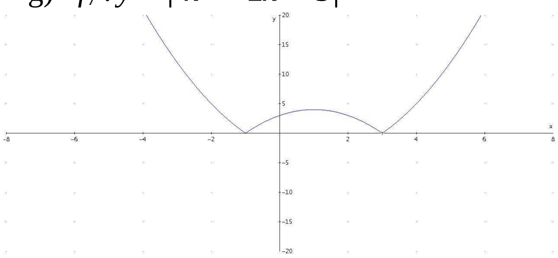
e) $f_5 : y = -2x^2 + x - 1 = 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{7}{8}$



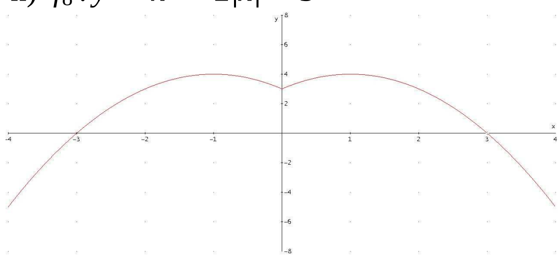
f) $f_6 : y = -0{,}5x^2 + x + 2$



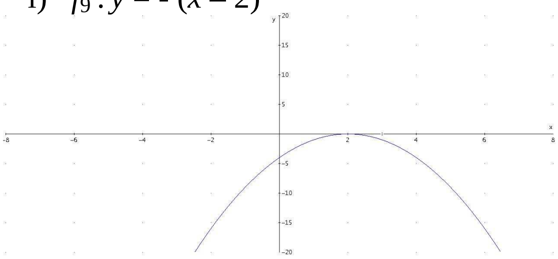
g) $f_7 : y = |-x^2 + 2x + 3|$



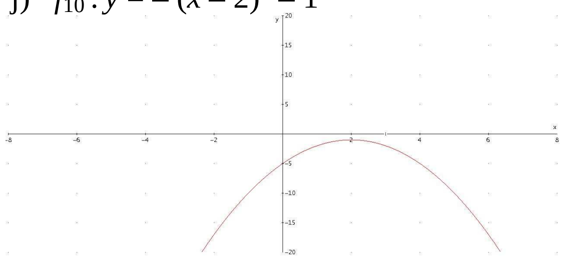
h) $f_8 : y = -x^2 + 2|x| + 3$



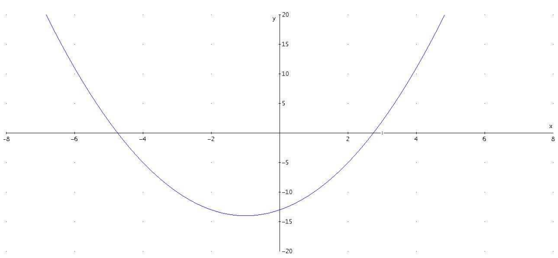
i) $f_9 : y = -(x - 2)^2$



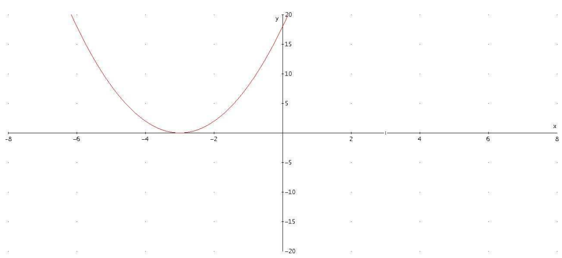
j) $f_{10} : y = -(x - 2)^2 - 1$



k) $f_{11} : y = x^2 + 2x - 13$



l) $f_{12} : y = 2(x + 3)^2$



§3. Polynomy

Def.: Polynomem (reálným polynomem s 1 proměnnou) nazýváme každý výraz P(x) tvaru:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde $a_i \in$ **R**; $i \in \{0;1;\ldots;n\}$, $n \in$ **N**.
Čísla a_i se nazývají koeficienty polynomu P(x).
Sčítance a_ix^i nazýváme členy polynomu P(x).
Je-li $a_n \neq 0$, číslo n se nazývá stupeň polynomu a označujeme n = st (P(x)).
Je-li $a_i = 0$ pro všechna $i \in \{0;1;\ldots;n\}$, pak klademe st (P(x)) = $-\infty$ a P(x) se nazývá nulovým polynomem. Označujeme jej 0(x)

Př.: Udejte příklady některých stupňů polynomů.
Polynom třetího stupně: $5x^3 + 6x^2 + 12x + 5$
Polynom prvního stupně: $5x - 4$
Polynom nultého stupně: $P(x) = 4$
Polynom $-\infty$ stupně: $P(x) = 0 = 0(x)$

Def.: Polynom stupně 0 nazýváme konstantní.
Polynom stupně 1 nazýváme lineární.
Polynom stupně 2 nazýváme kvadratický.
Polynom stupně 3 nazýváme kubický.

Pozn.: a) Množinu všech polynomů proměnné x označíme **R**[x].
Množinu všech polynomů proměnné x stupně nejvýše n značíme $\mathbf{R}_n[x]$.
b) Každému polynomu stupně n lze přiřadit uspořádanou ($n + 1$)-tici jeho koeficientů: $[a_n; a_{n-1}; \ldots; a_1; a_0]$ Toto zobrazení je prosté.
c) Polynom P(x) a Q(x) se rovnají a zapisujeme P(x) = Q(x), právě tehdy když jsou oba stejného stupně a shodují se koeficienty odpovídajících si členů.

V.3.1.: Nechť P(x) a Q(x) $\in$ **R**[x] (jsou polynomy). Pak P(x) + Q(x); P(x) – Q(x); P(x) . Q(x) jsou rovněž polynomy a platí:
$st(P(x) \pm Q(x)) \leq \max\{st(P(x)), st(Q(x))\}$
$st(P(x) . Q(x)) = st(P(x)) + st(Q(x))$
[Dk.: Tvrzení zřejmé.]

Pozn.: a) Na množině **R**[x] definujeme sčítání a odčítání obvyklým způsobem: sčítáme nebo odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné x.
b) Při násobení násobíme každý člen jednoho polynomu každým členem druhého polynomu a vzniklé součiny sečteme.

V.3.2.: Věta o dělení dvou polynomů se zbytkem:
Nechť A(x), B(x) $\in$ **R**[x] a B(x) $\neq$ 0(x). Pak existuje právě 1 dvojice polynomů Q(x), R(x) $\in$ **R**[x] tak, že platí:
$$A(x) = B(x) . Q(x) + R(x), \text{ kde } R(x) = 0(x) \text{ a } stR(x) < stB(x)$$
[Dk.: Analogicky jako u dělení dvou čísel se zbytkem]

Def.: Polynom Q(x) z předchozí věty se nazývá neúplný podíl a R(x) zbytek při dělení polynomu A(x) polynomem B(x).

Př.: a) $A(x) = x^2 + 1$
$B(x) = x + 1$

1) normálním dělením
$(x^2 + 1) : (x + 1) = x - 1\ (2)$

2) pomocí Hornerova schématu

	1	0	1
-1	1	-1	2

3) metodou porovnání koeficientů
$x^2 + 1 = (x + 1)(ax + b) + r$ … odvodíme si výsledky polynomu
$x^2 + 1 = ax^2 + x(a + b) + b + r$

b) $A(x) = x$
$B(x) = x^2$
$x = x^2 . 0 + x$
$\mathrm{st}(A(x)) = 1 < 2 = \mathrm{st}(B(x))$

Def.: Nechť $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Řekneme, že polynom $B(x)$ dělí polynom $A(x)$ právě když existuje polynom $C(x) \in \mathbf{R}[x]$ tak, že platí: $A(x) = B(x) . C(x)$. Zapisujeme $B(x) \mid A(x)$.

Pozn.: a) Zbytek při dělení polynomu $A(x)$ polynomem $B(x)$ je nulový polynom $0(x)$.
b) Jestliže $B(x) \mid A(x)$ a $\mathrm{st}(A(x)) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{st}(B(x)) \leq \mathrm{st}(A(x))$.
c) Jestliže $\mathrm{st}(B(x)) = 0 \Rightarrow B(x) \mid A(x)$.
d) Jestliže $\mathrm{st}(A(x)) = \mathrm{st}(B(x)) \wedge \exists c \in \mathbf{R} - \{0\} : A(x) = B(x) . c \Rightarrow B(x) \mid A(x)$.
e) Jestliže $B(x) \mid A(x) \wedge \exists c \in \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow (B(x) . c) \mid A(x)$.

Kořeny polynomu

Def.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Nechť $c \in \mathbf{R}$ je libovolné číslo. Hodnotou polynomu $P(x)$ v čísle (v bodě) c nazýváme reálné číslo $P(c) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1c + a_0$.
Číslo $c \in \mathbf{R}$ nazveme kořenem polynomu $P(x)$, právě když $P(c) = 0$.

Pozn.: a) Je-li $P(x) = 0(x)$, pak jeho kořenem je každé reálné číslo.
b) Je-li $P(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$, pak polynom nemá žádný kořen.
c) Je-li $P(x) = a_1x + a_0$; $a_1 \neq 0$, pak polynom má právě 1 kořen $c = -\dfrac{a_0}{a_1}$.
d) Hodnotou polynomu a zjištění, zda číslo c je kořenem, určujeme Hornerovým schématem.

V.3.3.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$. Pak platí:
Číslo $c \in \mathbf{R}$ je kořenem $P(x) \Leftrightarrow (x - c)/P(x)$.

Def.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ a $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen.
Lineární polynom $(x - c)$ nazýváme kořenovým činitelem (příslušnýmu kořenu c).

Pozn.: Podle V.3.3. je každý polynom dělitelný všemi svými kořenovými činiteli.

V.3.4.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen.
Pak existuje polynom $Q(x) \in \mathbf{R}[x] : P(x) = (x - c) . Q(x)$.

Důsledek.: Je-li $\mathrm{st}(P(x)) = n \geq 1$, pak $\mathrm{st}(Q(x)) = n - 1$ a jeho koeficient u nejvyšší mocniny $(n - 1)$-vá je a_n. Koeficientem polynomu $Q(x)$ z V.3.4. určíme Hornerovým schématem. (viz 1.ročník II. Kapitola §19). Takto lze určit i koeficienty neúplného podílu a zbytek při dělení polynomu lineárním polynomem.

Př.: Určete, které $c \in$ **R** je kořenem polynomu $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$;
$c \in \{-2;-1;1;2\}$

	1	1	-1	1	-1	-1	**P(c)**
-2	1	-1	1	-1	1	-3	**-3**
-1	1	0	-1	2	-3	2	**2**
1	1	2	1	2	-1	0	**0**
2	1	3	5	11	21	41	**41**

Kořenem polynomu P(x) je c = 1.

Def.: Nechť $P(x) \in$ **R** $[x]$, $c \in$ **R** je jeho kořen a $k \in$ **N**.
Číslo $c \in$ **R** nazýváme k-násobným kořenem polynomu $P(x)$, právě když platí:
$(x - c)^k \mid P(x) \wedge (x - c)^{k-1}$ nedělí $P(x)$.

Pozn.: a) Jestliže platí $(x - c)^k \mid P(x)$, pak říkáme, že c je alespoň k-násobným kořenem polynomu $P(x)$.
b) Pro $k = 1$ neříkáme jednonásobný, ale jednoduchý kořen.
c) Někdy místo k-násobný kořen říkáme kořen násobnosti k.

V.3.5.: Nechť $P(x) \in$ **R** $[x]$, $c \in$ **R** je jeho k-násobný kořen.
Pak $\exists Q(x) \in$ **R** $[x]$ tak že: $P(x) = (x - c)^k \,.\, Q(x) \wedge Q(c) \neq 0$
Platí to i jako ekvivalence.

Př.: Určete násobnost k kořene 1 polynomu $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

	1	-1	-3	5	-2		
1	1	0	-3	2	0	=>	k = 1
1	1	1	-2	0		=>	k = 2
1	1	2	0			=>	k = 3
1	1	3					

$P(x) = (x - 1)^3 \,.\, Q(x) = (x - 1)^3 \,.\, (x + 3)$

V.3.6.: Každý polynom $P(x) \in$ **R** $[x]$, pro něž $st(P(x)) = n \geq 0$, má v množině **R** nejvýše n kořenů. ((V množině komplexních čísel **C** je právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.))

Pozn.: a) Nechť x_1, x_2 jsou kořeny kvadratického polynomu $x^2 + px + q$ resp. $ax^2 + bx + c$
Pak metodou porovnání koeficientů dostáváme tzv. Vietovy vztahy pro kořeny kvadratického polynomu nebo resp. kvadratické rovnice:

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x^1 : $\quad p = -x_1 - x_2 \Rightarrow -p = x_1 + x_2$ $\qquad$ $x^1 : b = a(-x_1 - x_2) \Rightarrow \mathbf{-b \mid a = x_1 + x_2}$

x^0 : $\quad q = x_1 x_2$ $\qquad$ $x^0 : c = a(x_1 x_2) \Rightarrow \mathbf{c \mid a = x_1 x_2}$

b) Obdobné vztahy dostaneme i u kubického polynomu $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ s kořeny x_1, x_2, x_3.

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x^2 : a_2 = a_3 = (-x_1 - x_2 - x_3) \Rightarrow \mathbf{-a_2 \mid a_3 = x_1 + x_2 + x_3} = \sum_{n=1}^{3} x_i$$

$$x^1 : a_1 = a_3 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow \mathbf{a_1 \mid a_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}$$

$$x^0 : a_0 = a_3 = (-x_1x_2x_3) \Rightarrow \mathbf{-a_0 \mid a_3 = x_1x_2x_3} = \pi_{n=1}^{3} x_i$$

V.3.7.: **Vietovy vztahy (Newtonovy) vztahy:**

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ je polynom stupně n, který má v množně **R** právě n kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost). Pak platí:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{n=1}^{n} x_i$$

$$+\frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{n} x_{i_1}x_{i_2}$$

$$(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} = x_1x_2\ldots x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots i_k=1\\ i_1<i_2<\ldots<i_k}}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$$

$$(-1)^n\frac{a_0}{a_n} = x_1x_2x_3\ldots x_n = \mathop{\pi}_{n=1}^{n} x_i$$

[Dk.: Vyjádříme-li polynom $P(x)$ ve tvaru součinu kořenových činitelů a koeficientu a_n (to znamená $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$) pak tvrzení věty dostaneme analogicky jako v předchozí poznámce srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin proměnné x.]

Pozn.: V k-tém Vietově vzorci má $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ sčítanců, každý sčítanec vznikne jako součin některých k čísel vycházející z n-tice $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Př.: Je dán obecný normovaný polynom st = 3 s kořeny x_1, x_2, x_3. Napište polynom, který má n-násobky kořenů dané rovnice $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a = 0$

$$-a_2 = x_1 + x_2 + x_3 \qquad -b_2 = nx_1 + nx_2 + nx_3$$
$$a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \qquad b_1 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)n^2$$
$$-a_0 = x_1x_2x_3 \qquad -b_0 = x_1x_2x_3\, n^3$$

$\downarrow$ Dosadíme

$$-b_2 = -a_2n \Rightarrow b_2 = na_2$$
$$b_1 = a_1n^2 \Rightarrow b_1 = n^2a_1$$
$$-b_0 = -a_0n^3 \Rightarrow b_0 = n^3 a_0$$

Hledaný polynom je $x^3 + na_2x^2 + n^2a_1x + n^3a_0$.

Př.: Jsou dány polynomy $A(x) = x^3 + px + q$, $B(x) = x^2 + mx + 1$. Určete koeficienty p, q, m tak, aby $B(x) \mid A(x)$.

$A(x) = B(x) . C(x)$, kde $st(C(x)) = 1 \Rightarrow C(x) = x + k$

$$x^3 + px + q = x^3 + (k+m)x^2 + (km+1)x + k$$

x^2: $0 = k + m$ $\qquad m = -q$

x^1: $p = km + 1$ $\qquad p = 1 - q^2$

x^0: $q = h$ $\qquad q$ je parametr, volná neznámá

$A(x) = x^3 + (1-q^2)x + q$, $B(x) = x^2 - qx + 1$

Hledání racionálních kořenů polynomů s racionálními koeficienty

Pozn.: a) Množinu všech polynomů s racionálními koeficienty označíme **Q** [x], s celými koeficienty **Z** [x].
b) Celá tato část vychází již v dokázaných tvrzení hledání racionálních kořenů algebraické rovnice v 1.ročník, 2. kapitola paragraf 19.

V.3.8.: Nechť P(x) ∈ **Q** [x], $c \in$ **R** je jeho kořen. Označme n nejmenší společný násobek jmenovatelů všech koeficientů polynomu P(x). Pak c je kořen polynomu T(x) ∈ **Z** [x], kde T(x) = n . P(x).
[Dk. : Nechť $c \in$ **R** je kořen P(x) => P(c) = 0
T(x) = n . P(x)
T(c) = n . P(x) = 0 => T(c) = 0 => c je kořen T(x).]

Pozn.: Podle předchozí věty lze hledání kořenů polynomu s racionálními koeficienty převést na hledání kořenů polynomu s koeficienty celými.

V.3.9.: Nechť P(x) ∈ **Z** [x], P(x) = $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in$ **Z**, $i \in \{0; 1; \dots; n\}$. Nechť racionální číslo $c = \frac{r}{s}$, $r \in$ **Z** ; $s \in$ **N**, D(r,s) = 1 je kořen P(x). Pak platí: $\boldsymbol{r \mid a_0 \wedge s \mid a_n}$
[Dk.: 1.ročník 2.kapitola V.19.1.]

Důsledek.: a) Je-li $c \in$ **Z** kořenem P(x) ∈ **Z** [x], pak platí: $c \mid a_0$.
b) je-li P(x) ∈ **Z** [x] normovaný ($a_n = 1$), pak je jeho každý racionální kořen celé číslo.

V.3.10.: Nechť racionální číslo $c = \frac{r}{s}$, $r \in$ **Z**, $s \in$ **N**, D(r,s) = 1 je kořen P(x) ∈ **Z** [x].
Nechť m je pevné celé číslo. Pak platí **($r – ms$) | P(m).**
[Dk.: 1.ročník 2.kapitola V.19.2.]

Pozn.: V.3.10. se užívá hlavně v polynomu pro $m = \pm 1$: ($r – s$) | P(1)
($r + s$) | P(-1)

Pozn.: Pomocí V.3.9. a V.3.10. lze snadno určit všechny racionální kořeny polynomu P(x) s celými koeficienty:
1) Nalezneme všechny celočíselné dělitele r absolutního členu a_0.
2) Nalezneme všechny přirozené dělitele s vedoucího členu a_n.
3) Utvoříme všechny zlomky tvaru $\frac{r}{s}$, (r, s) = 1.
4) Hornerovým schématem určíme P(1), příp. P(-1),… (čísla 1, -1,… mohou být kořeny).
5) Podle splněné podmínky ($r – s$) | P(1), příp. ($r + s$) | P(-1),… vyškrtáme ty zlomky $\frac{r}{s}$, které nemohou být kořeny.
6) Ostatní zlomky vyzkoušíme Hornerovým schématem, zda jsou kořeny daného polynomu.

Př.: Najděte racionální kořeny polynomu $P(x) = \frac{3}{5}x^4 + x^3 + \frac{1}{5}x^2 + x - \frac{2}{5}$.

$3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$

1) r | -2 => r ∈ {1;-1;2; 2}

2) s | 3 => s ∈ {1;3}

3) $\frac{r}{s} \in \left\{1;-1;2;-2;\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$

4)

	3	5	1	5	-2
1	3	8	9	14	12
-1	3	2	-1	6	-8

=> P(1) = 12 => (r – s) | 12

=> P(-1) = -8 => (r + s) | -8

6)

	3	5	1	5	-2
-2	3	-1	3	-1	0
1/3	3	0	3	0	
-1/3	3	-1	10/3		

=> -2 je kořen

=> 1/3 je kořen

Polynom P(x) má 2 racionální kořeny: -2 a 1/3.

Můžeme tedy psát: $P(x) = (x + 2)(x - 1/3)(3x^2 + 3)$.

Rozklad polynomu v reálném oboru

V.3.11.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde $st(P(x)) \geq 1$.
Pak P(x) lze vyjádřit jako součin polynomů 1. a 2. stupně a koeficientu a_n:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_k)^{kl} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{r_2} \dots}$$
$$\boldsymbol{\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{r_s}},$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_k$ jsou všechny jeho reálné různé kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbf{N}$; $p_1, p_2, \dots, p_s$ a $q_1, q_2, \dots, q_s$ jsou reálná čísla, $r_1, r_2, \dots, r_s \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$.
Polynomy $(x^2 + p_1x + q_1), (x^2 + p_2x + q_2), \dots, (x^2 + p_sx + q_s)$ jsou kvadratické polynomy se záporným diskriminantem. Uvedený rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný a platí $st(P(x)) = k_1 + k_2 + \dots + k_l + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_s)$.
Jestliže $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_s \pm ib_s$ jsou všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobností $r_1, r_2, \dots, r_s$, P(x) můžeme psát ve tvaru:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_k)^{kl} [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{r_1} [(x - a_2)^2 + b_2^2]^{r_2} \dots}$$
$$\boldsymbol{\dots [(x - a_s)^2 + b_s^2]^{r_s}}.$$

[Dk.: Neuveden (Plyne z rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů (kořeny ale obecně komplexní) a z toho, že má-li reálný polynom s reálnými koeficienty k-násobná kořen $a + ib$ ($b \neq 0$), má také k-násobný kořen $a - ib$ a platí že:
$[x - (a + ib)]\,[x - (a - ib)] \Rightarrow \boldsymbol{i^2 = -1}$].

Důsledek.: Polynom lichého stupně má alespoň 1 reálný kořen.
Polynom má sudý počet komplexních řešení.

Pozn.: Vyjádření polynomu P(x) ve V.3.11. se nazývá rozklad polynomu v reálném oboru.

V.3.12.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$. Nechť $c_1, c_2, \dots, c_l$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny s lichou násobností. Nechť $c_1 < c_2 < \dots < c_l$. Pak v intervalech $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{l-1}, c_l), (c_l, \infty)$ polynom P(x) je stále nekladný nebo nezáporný. Jsou-li dány 2 sousední intervaly, pak v jednom z nich je P(x) nekladný a v druhém nezáporný.

[Dk.: Plyne z rozkladu polynomu v reálném oboru a z toho, že na znaménko jeho součinu mají vliv pouze reálné kořeny s lichou násobností.]

Největší společný dělitel dvou polynomů

Def.: Nechť $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Polynom $C(x) \in \mathbf{R}[x]$ se nazývá společným dělitelem polynomů $A(x), B(x)$, právě když platí: $C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x)$.
Polynom $D(x) \in \mathbf{R}[x]$ se nazývá největší společný dělitel polynomů $A(x), B(x)$, který označujeme $NSD(A(x), B(x))$, nebo $D(A(x), B(x))$ právě tehdy, když platí:
1) $D(x) \mid A(x) \wedge D(x) \mid B(x)$.
2) $\forall C(x) \in \mathbf{R}[x] : C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x) => C(x) \mid D(x)$.

V.3.13.: Ke každým dvěma polynomů $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$, z nichž aspoň 1 je nenulový, existuje jejich největší společný dělitel.
[Dk.: Konstruktivní – Euklidův algoritmus:
a) $A(x) = 0(x) => D(A(x), B(x)) = B(x)$.
b) $st(A(x)) \geq st(B(x)) \geq 0$.
Proveďme následující posloupnost dělení se zbytkem. Toto dělení ukončíme, až dostaneme zbytek – nulový polynom. Vzhledem k nerovnosti na pravé straně, tento nulový zbytek existuje.

$A(x) = B(x) . Q_1(x) + R_1(x)$,	$st\, R_1(x) < st\, B(x)$
$B(x) = R_1(x) . Q_2(x) + R_2(x)$,	$st\, R_2(x) < st\, R_1(x)$
$R_1(x) = R_2(x) . Q_3(x) + R_3(x)$,	$st\, R_3(x) < st\, R_2(x)$
… … … …	… …
$R_{n-2}(x) = R_{n-1}(x) . Q_n(x) + R_n(x)$,	$st\, R_n(x) < st\, R_{n-1}(x)$
$R_{n-1}(x) = R_n(x) . Q_{n+1}(x)$,	$st\, R_{n-1}(x) < 0(x)$]

Pozn.: a) Největších společných dělitelů 2 polynomů je více: Jestliže $R_n(x)$ je NSD, pak každý polynom $c . R_n(x)$; $c \in \mathbf{R} - \{0\}$ je také největším společným dělitelem.
b) Ale normovaný největší společný dělitel 2 polynomů existuje právě 1 (koeficient u nejvyšší mocniny je roven 1). Tento NSD se označuje $(A(x), B(x))$.

Def.: Nechť $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Polynomy $A(x), B(x)$ nazýváme nesoudělné, právě tehdy když platí normovaný největší společný dělitel se rovná 1, ($NSD(A(x), B(x)) = c$; $c \in \mathbf{R} - \{0\}$).

Pozn.: Z Euklidova algoritmu je patrno, že je jedno, zda k výpočtu používáme zbytek $R_i(x)$, $i \in \{1, 2, \dots n\}$, nebo jako nenulový násobek. Lze tedy v kterémkoliv bodu Euklidova algoritmu, kdykoliv polynom násobit kterýmkoliv nenulovým číslem. Znehodnotí se tím neúplný podíl, ale normovaný největší společný dělitel se nezmění.

Derivace polynomu

Pozn.: Derivaci funkce si zavedeme ve 3. ročníku. Zde se pouze seznámíme s derivací polynomu, kterou využijeme při hledání vícenásobných kořenů polynomu. Všechny věty si zde uvedeme bez důkazů.

Def.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
Derivací polynomu $P(x)$ rozumíme polynom $P'(x)$, definovaný takto:

$$P'(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li st}(P(x)) \le 0 \\ a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + a_{n-2}(n-2)x^{n-3} + \dots + a_2(2)x + a_1, & \text{je-li st}(P(x)) \ge 1 \end{cases}$$

Je-li $k \in \mathbf{N}$, pak definujeme rekurentně $(k+1)$-ní derivaci polynomu P(x) jako polynom a zapisujeme $P^{(k+1)}(x) = (P^{(k)}(x))'$.

Pozn.: Obecný vztah $(x^n)' = nx^{n-1}$.
$[c \,.\, f(x)]' = c \,.\, f'(x)$

V.3.14.: Nechť P(x), Q(x) $\in$ **R** [x]. Pak platí:
a) $[P(x) \pm Q(x)]' = P'(x) \pm Q'(x)$
b) $[P(x) \,.\, Q(x)]' = P'(x) \,.\, Q(x) + P(x) \,.\, Q'(x)$

V.3.15.: Nechť P(x) $\in$ **R** [x], $c \in$ **R** jeho k-násobný kořen, $k \in$ **N**. Pak platí:
c je k-násobný kořen P(x) <=> $P(c) = P'(c) = P''(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0 \wedge P^{(k)}(c) \neq 0$.

Důsledek.: Nechť P(x) $\in$ **R** [x], $c \in$ **R** jeho k-násobný kořen, k $\in$ **N**, pak platí:
a) $k = 1 \Rightarrow P'(c) \neq 0$; c není kořenem P'($x$).
b) $k > 1 \Rightarrow c$ je $(k-1)$ násobným kořenem P'(x).

Př.: Je dán polynom $P(x) = x^3 - 3x - 2$, který má jeden dvojnásobný kořen. Určete všechny kořeny. Má-li P(x) dvojnásobný kořen, potom tento kořen je kořenem P'(x).
$P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$ – kořeny první derivace je $\pm$ 1, ale oba nemusí být kořeny polynomu P(x).

	1	0	-3	-2	
1	1	1	-2	-4	
-1	1	-1	-2	0	$x_1 = -1$
-1	1	-2	0		$x_2 = -1$
2	1	0			$x_3 = 2$

V.3.16.: Nechť P(x) $\in$ **R** [x], st(P(x)) $\ge$ 1. Potom polynom Q(x) $\in$ **R** [x], splňující vztah $P(x) = (P(x), P'(x)) \,.\, Q(x)$, má tytéž kořeny jako P(x), ale každý reálný pouze jednoduchý.

1. Dělte:
a) $(x^4 + 2x^2 + 1):(x^3 - 1) = x$ (zb. $2x^2 + x + 1$)
b) $(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1):(x^2 + x + 1) = 5x^2 - x - 1$ (zb. $4x + 2$)
c) $(3x^6 + 2x^4 + 1):(x^2 + 3) = 3x^4 - 7x^2 + 21$ (zb. -62)

2. Určete hodnotu polynomu P(x) = $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1$ v bodě -2.
[Hornerovým schématem P(2) = 11]

3. Polynom P(x) = $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$ má kořen 1. Určete jeho násobnost k a přesvědčte se, že je kořenem 1., 2., …, (k-1). derivace, a že není kořenem k-té derivace. [Hornerovým schématem k = 3]

4. Najděte polynom, který má za kořeny dvojnásobky kořenů polynomu $x^3 + 3x + 2$.
[$x^3 + 12x + 16$]

5. Jsou dány polynomy A(x) = $x^4 - 2x^2 + 4x - 8$ a B(x) = $x^4 - a_3x^2 + a_2x - a_1x + a_0$, určete a_3, a_2, a_1, a_0 tak, že x_1, x_2, x_3, x_4 jsou kořeny A(x) a $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1$ jsou kořeny B(x).

$$0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$-2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$
$$-4 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$
$$-8 = x_1x_2x_3x_4$$
$$-a_3 = x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 + x_4 - 1 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a_3 = 4}}$$
$$a_2 = (x_1-1)(x_2-1) + (x_1-1)(x_3-1) + (x_1-1)(x_4-1) + (x_2-1)(x_3-1) + (x_2-1)(x_4-1) + (x_3-1)(x_4-1)$$
$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 6 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a_2 = 4}}$$
$$-a_1 = (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1) + (x_1-1)(x_2-1)(x_4-1) + (x_1-1)(x_3-1)(x_4-1) + (x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = -4 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a_1 = 4}}$$
$$a_0 = (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1) = x_1x_2x_3x_4 - (-4) + (-2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 1 = -5 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a_0 = -5}}$$

6. Určete (A(x), B(x)):
a) A(x) = $x^4 - x^2 - x + 1$, B(x) = $15x^2 + 5x + 10$ [1]
b) A(x) = $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$, B($x$) = $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ [$x^2 + 1$]
c) A(x) = $2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, B($x$) = $5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ [$x^2 + 1$]
d) A(x) = $2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, B($x$) = $5x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ [$x^2 + 1$]
e) A(x) = $x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, B($x$) = $6x^3 + 20x^2 + 4x - 6$ [$x + 3$]

7. Najděte **Q** kořeny.
a) $x^4 - x^3 - 3x^2 - 7x - 6$ [$x_1 = -1, x_2 = 3$]
b) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$ [$x_1 = -2, x_2 = 3$]

8. Dokažte, že pro libovolné nenulové hodnoty parametrů α, β vyhovují kořeny x_1, x_2, x_3 polynomu $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ rovnosti $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-\alpha}{\alpha} = 1$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_1x_2x_3}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = -1$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1(-1) = -1$$

§4. Polynomické funkce

Def.: Nechť $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ je polynom, pak funkci $f : y = P(x)$ nazveme polynomickou funkcí.

Pozn.: Konstantní, lineární a kvadratická funkce je zvláštním případem polynomické funkce.

Pozn.: a) definičním oborem polynomické funkce je **R**.
b) jestliže st(P(x)) je lichý => $H(f) = \mathbf{R}$.
jestliže st(P(x)) je sudý => $a_n > 0 \Rightarrow H(f) = \langle c; \infty), c \in \mathbf{R}$.
$a_n < 0 \Rightarrow H(f) = (-\infty; c\rangle, c \in \mathbf{R}$.

V.4.1.: Nechť $f : y = P(x)$, $P(x) \neq 0(x)$ je polynomická funkce. Nechť st(P(x)) = n. Pak platí:

f je sudá <=> $2 \mid n \wedge a_{2i-1} = 0$ pro $\forall i \in \{1; 2; \dots \frac{n}{2}\}$ <=> všechny koeficienty s lichým indexem = 0.

f je lichá <=> 2 nedělí $n \wedge a_{2i} = 0$ pro $\forall i \in \{1; 2; \dots \frac{n-1}{2}\}$ <=> všechny koeficienty se sudým indexem = 0.

Def.: Nechť $y = f(x)$ je polynomická funkce. Pak $c \in \mathbf{R}$ nazveme nulovým bodem polynomické funkce, právě když $f(c) = 0$.

Pozn.: a) Nulový bod polynomické funkce je kořen polynomu.
b) Hledání nulových bodů je totéž jako hledání kořenů polynomu.

Přibližné určování reálných nulových bodů polynomické funkce (reálných kořenů polynomů)

Př.: Přibližně určete reálný kořeny polynomu $P(x) = x^3 + x - 3$.
Nejdříve zkusmo určíme celou část hledaného kořenu, tedy určíme, mezi kterými celými čísly polynomická funkce protne osu x (Počítáme funkční hodnoty v celých číslech a zjišťujeme, kde funkční hodnota změní znaménko).

$f(-1) = -5$
$f(0) = -3$
$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 7 \end{array}\right\}$ kořen bude ležet v intervalu (1; 2) => zapisujeme 1+k

Dosadíme do rovnice: $(1 + k)^3 + 1 + k - 3 = \underbrace{k^3 + 3k^2}_{\text{zanedbáme}} + 4k - 1 = 4k - 1 = 0$
$k = ¼$ (zaokrouhlujeme dolů) => $k = 0{,}2$

Hledaný kořen je přibližně 1,2 => leží v (1,2; 1,3) = > zapisujeme 1,2 + k a znovu dosadíme.
Takto můžeme pokračovat podle potřeby … 1,21341…

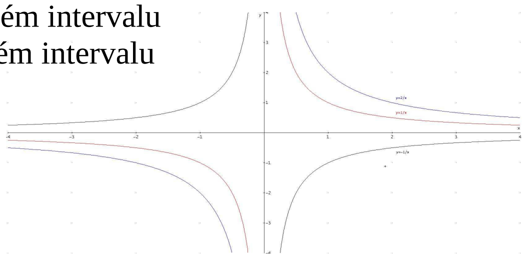
§5. Lineární lomená funkce

Def.: Nechť $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$. Pak funkci $f: y = \frac{k}{x}$ nazýváme nepřímou úměrností s koeficientem k.

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
$H(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
b) Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola s asymptotami na svých osách.

V.5.1.::Nechť $f: y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ je nepřímá úměrnost. Pak platí:

1) f je lichá
2) $k > 0$ f je klesající $(-\infty; 0)(0; \infty)$ v každém intervalu
$k < 0$ f je rostoucí $(-\infty; 0)(0; \infty)$ v každém intervalu
3) f není omezená ani shora ani zdola
4) f nemá extrémy
5) f není periodická
6) f je prostá



Def.: Nechť $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$. Pak funkce $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nazýváme lineární lomenou funkcí.

Pozn.: Nepřímá úměrnost je speciálním případem lineární lomené funkce pro $a = d = 0$ => $k = \frac{b}{c}$.

Pozn.: Vlastnosti lineární lomené funkce vyšetříme dělením $(ax + b)$ a $(cx + d)$ a úpravou:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}$$ úpravou potřebujeme získat tento tvar $A + \frac{K}{x - B}$

K – koeficient nepřímé úměrnosti, který budu posouvat

B – posun grafu nepřímé úměrnosti po ose x o $-\frac{d}{c}$

A – posun grafu nepřímé úměrnosti po ose y o $\frac{a}{c}$

Pozn.: Úpravu lineární lomené funkce můžeme provést i následovně:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{k}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

$H(f) = \mathbf{R} - \{\frac{a}{c}\}$

b) Grafem lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami: $x = -\frac{d}{c}$

$y = \frac{a}{c}$

V.5.2.: Nechť $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ je lineární lomená funkce. Pak platí:

1) parita – obecně není ani sudá ani lichá

2) $bc > ad$, pak f je klesající v intervalu $(-\infty; -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}; \infty)$

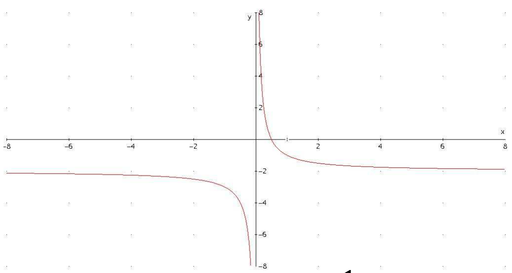
$bc < ad$, pak f je rostoucí v intervalu $(-\infty; -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}; \infty)$

3) f není ani shora ani zdola omezená
4) f nemá extrémy
5) f není periodická
6) f je prostá

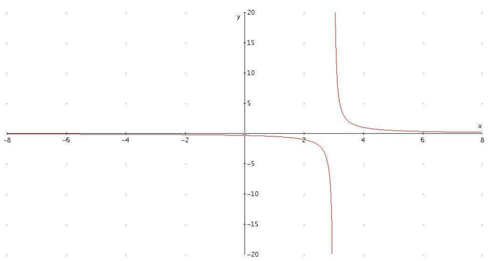
Pozn.: Při kreslení grafu obecné lineární lomené funkce je výhodnější než dělit výraz $ax + b$ výrazem $cx + d$ použít postup v předchozím příkladu.

1. Nakreslete grafy následujících funkcí.

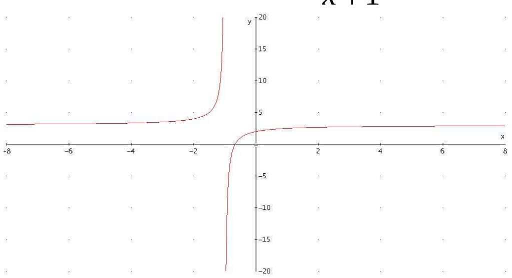
a) $y = \frac{1}{x} - 2$



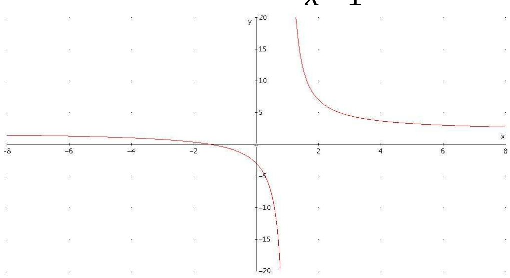
b) $y = \frac{1}{x-3}$



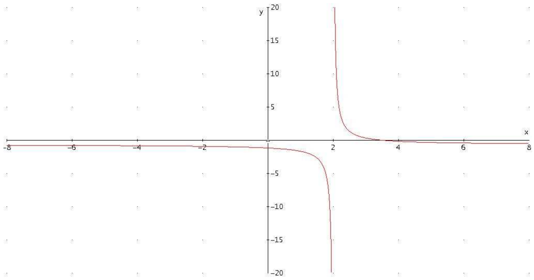
c) $y = 3 - \frac{1}{x+1}$



d) $y = \frac{2x+3}{x-1}$

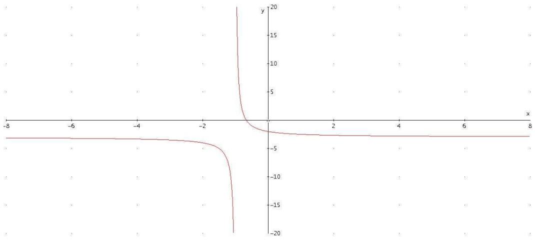


e) $y = \dfrac{-2x+7}{3x-6}$

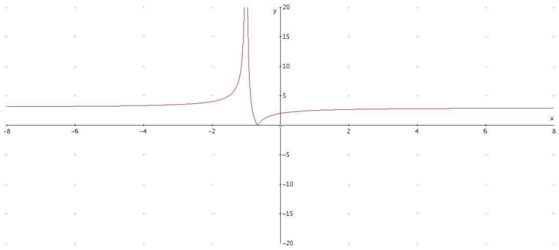


2. Nakreslete grafy následujících funkcí:

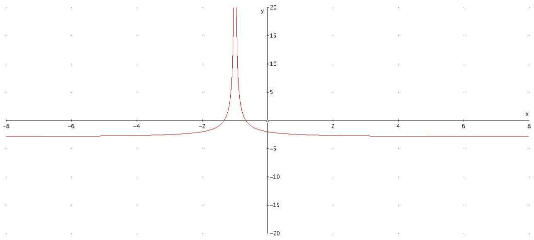
a) $y = \dfrac{1}{x+1} - 3$



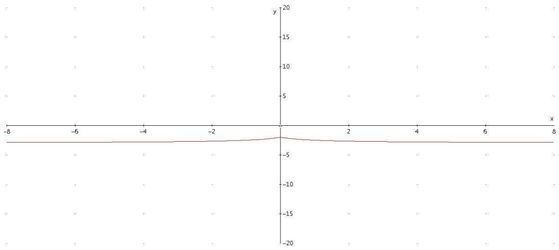
b) $y = \left| \dfrac{1}{x+1} - 3 \right|$



c) $y = \left| \dfrac{1}{x+1} \right| - 3$



d) $y = \dfrac{1}{|x|+1} - 3$



§6. Racionální lomená funkce

Def.: Nechť P(x), Q(x) $\in$ **R**[x]jsou polynomy, Q(x) $\neq$ 0(x), pak funkci $f : y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nazýváme <u>racionální lomenou funkcí.</u>

Pozn.: a) Polynomická funkce je speciálním případem racionální lomené funkce pro konstantní polynom Q(x).
b) Lineární lomená funkce je speciálním případem racionální lomené funkce pro lineární polynom Q(x) a konstantní nebo lineární P(x).

Pozn.: D(f) = **R** – {c_1; c_2; … ; c_n}, kde c_1, c_2, … , c_n jsou reálné kořeny polynomu Q(x).

Pozn.: Pro vyšetření vlastností obecné racionální lomenné funkce nemáme dostatečné prostředky, proto se omezíme na zkoumání speciálních případů.

V.6.1.: Nechť $f: y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, Q($x$) $\neq$ 0(x) je racionální lomená funkce, kde P(x) a Q(x) nemají společné kořeny. Nechť $c_1, c_2, \dots, c_k$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomů P(x) a Q(x) s lichou násobností (Nechť $c_1 < c_2 < \dots < c_k$). Pak v každém z intervalu $(-\infty, c_1\rangle$ $\langle c_1, c_2\rangle \dots \langle c_{k-1}, c_k\rangle$ $\langle c_k, \infty)$ je racionální lomená funkce $f: y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ stále nekladná nebo nezáporná (v těch bodech, v níž je definována). V sousedních intervalech se znaménka střídají.

Př.!: Určete znaménka racionální lomené funkce $f: y = \dfrac{x^2(x+1)^3(x^2-9)(x+4)^5}{(x-2)^4(x+2)(x^2+1)}$ a řešte rovnici $y \leq 0$.

−		+		−		+		−		−		−		+
	-4		-3		-2		-1		(0)		(2)		3	

Def.: Racionální lomená funkce $f: y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; Q($x$) $\neq$ 0(x) se nazývá:

a) Ryze lomená racionální funkce, právě když st(P(x)) < st(Q(x)).
b) Neryze lomená racionální funkce, právě když st(P(x)) $\geq$ st(Q(x)).

V.6.2.: Neryze lomená racionální funkce je buď polynom, nebo se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Př.: Racionální lomenou funkci $f: y = \dfrac{x^4-3x^3+2x^2+3x-2}{x^2+x+1}$ vyjádřete pomocí ryze lomené racionální funkce.

$$(x^4-3x^3+2x^2+3x-2):(x^2+x+1) = x^2-4x+5+\frac{2x-7}{x^2+x+1}$$

V.6.3.: Věta o rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky:

Nechť $f: y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; Q($x$) $\neq$ 0(x) je ryze lomená racionální funkce, kde polynomy P(x) a Q(x) nemají společné kořeny. Nechť

Q(x) = $a_n(x-c_1)^{k_l}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}$

je rozklad polynomu Q(x) v reálném oboru. Pak existují čísla $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1k_1}$; C_{21}, $C_{22}, \dots, C_{2k_2}$; …; $C_{l1}, C_{l2}, \dots, C_{lk_l}$; $P_{11}\ Q_{11}$, $P_{12}\ Q_{12}, \dots, P_{1r_1}\ Q_{1r_1}$; $P_{21}\ Q_{21}$, $P_{22}\ Q_{22}$, …, $P_{2r_2}\ Q_{2r_2}$; …; $P_{s1}\ Q_{s1}$, $P_{s2}\ Q_{s2}, \dots, P_{sr_s}\ Q_{sr_s}$ tak, že pro $\forall\ x \in$ **R** platí: y =

$$\left[\frac{C_{11}}{x-c_1}+\frac{C_{12}}{(x-c_1)^2}+\dots+\frac{C_{1k_1}}{(x-c_1)^{k_1}}+\frac{C_{21}}{x-c_2}+\frac{C_{22}}{(x-c_2)^2}+\dots+\frac{C_{2k_2}}{(x-c_2)^{k_2}}+\dots\right.$$

$$\dots+\frac{C_{l1}}{x-c_l}+\frac{C_{l2}}{(x-c_l)^2}+\dots+\frac{C_{lk_l}}{(x-c_l)^{k_l}}+\frac{P_{11}x+Q_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{P_{12}x+Q_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots$$

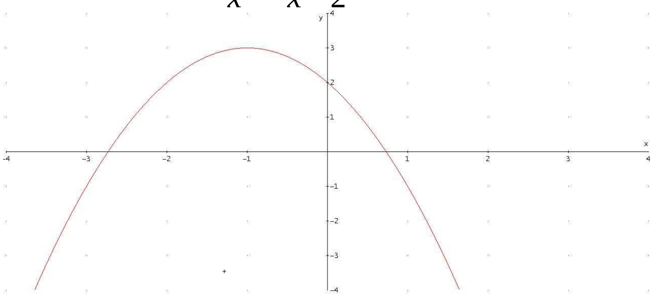
$$\dots+\frac{P_{1r_1}x+Q_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+\frac{P_{21}x+Q_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{P_{22}x+Q_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\dots+\frac{P_{2r_2}+Q_{2r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}}+\dots$$

$$\left.\dots+\frac{P_{s1}+Q_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{P_{s2}+Q_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\dots+\frac{P_{sr_s}+Q_{sr_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}}\right]\frac{1}{a_n}$$

Pozn.: Věta 6.3. zaručuje existenci konstant C_{11}, C_{12}, …, C_{1k_1}; C_{21}, C_{22}, …, C_{2k_2}; …; C_{l1}, C_{l2}, …, C_{lk_l}; P_{11} Q_{11}, P_{12} Q_{12}, …, P_{1r_1} Q_{1r_1}; P_{21} Q_{21}, P_{22} Q_{22}, …, P_{2r_2} Q_{2r_2}; …; P_{s1} Q_{s1}, P_{s2} Q_{s2}, …, P_{sr_s} Q_{sr_s}, ale neudává návod k jejich výpočtu. Tyto konstanty vypočítáme metodou porovnání koeficientů. V rozkladu na parciální zlomky odstraníme zlomek, dostaneme tak rovnost 2 polynomů. Protože 2 polynomy se rovnají, právě když mají shodné koeficienty odpovídajících si členů, můžeme porovnat koeficienty jednotlivých mocnin proměnné *x*.

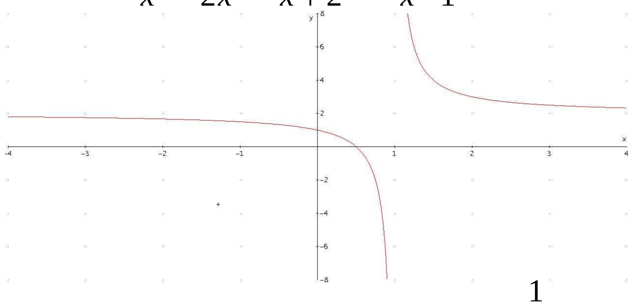
1. Nakreslete grafy následujících funkcí a popište jejich vlastnosti

a) $f: y=\dfrac{-x^4-x^3+6x^2+2x-4}{x^2-x-2}=-(x+1)^2+3$



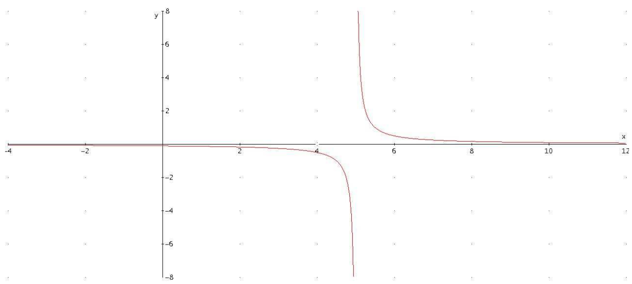
D(*f*) = **R**
H(*f*) = (-∞;3)
není sudá ani lichá
rostoucí v (-∞;-1)
klesající v (-1;∞)
shora omezená
maximum v bodě [-1;3]
není periodická

b) $f: y=\dfrac{2x^3-3x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2}=\dfrac{1}{x-1}+2$



D(*f*) = **R** – {1}
H(*f*) = **R** – {2}
není sudá ani lichá
klesající v (-∞;1) ∩ (1;∞)
není omezená
nemá extrémy
není periodická

c) $f: y=\dfrac{2x^3+x^2-8x-4}{2x^4-9x^3-13x^2+36x+20}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-5}$



D(*f*) = **R** – $\{\frac{1}{2};\pm 2;5\}$
H(*f*) = **R** – {0}
není sudá ani lichá
klesající v (-∞;5) ∩ (5;∞)
není omezená
nemá extrémy
není periodická

2. Rozložte na parciální zlomky následující racionální lomené funkce.

a) $y = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{(x-2)} + \dfrac{B}{(x-3)} = \dfrac{2}{(x-2)} + \dfrac{-1}{(x-3)}$

$$\left.\begin{array}{l} x-4 = A(x-3) + B(x-2) \\ x^1 : 1 = A + B \\ x^0 : -4 = -3A - 2B \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow A = 1 - B \\ \Rightarrow -4 = -3(1-B) - 2B \\ \quad -4 = -3 + 3B - 2B \\ \quad B = -1 \\ \quad \Rightarrow A = 2 \end{array}$$

b) $y = \dfrac{3x-2}{x^5+x^4+4x^3+4x^2} = \dfrac{3x-2}{(x+1)(x^2+4)x^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+4} =$

$$= \frac{-1}{x+1} + \frac{\frac{5}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}}{x^2+4}$$

$$3x - 2 = A(x^4 + 4x^2) + B(x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x) + C(x^3 + x^2 + 4x + 4) + $$
$$+ D(x^4 + x^3) + E(x^3 + x^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 : 0 = A + B + D \\ x^3 : 0 = B + C + D + E \\ x^2 : 0 = 4A + 4B + C + E \\ x^1 : 3 = 4B + 4C \\ x^0 : -2 = 4C \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \Rightarrow C = -\frac{1}{2} & \Rightarrow -\frac{5}{4} = A + D \\ \Rightarrow B = \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} = D + E \\ & -4{,}5 = 4A + E \\ \Rightarrow A = -1 & \\ \Rightarrow E = -0{,}5 & \\ \Rightarrow D = -\frac{1}{4} & \end{array}$$

c) $y = \dfrac{1}{x^3 - x} = \dfrac{1}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$

$$1 = A(x^2 - 1) + B(x^2 - x) + C(x^2 + x)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 : 0 = A + B + C \\ x^1 : 0 = -B + C \\ x^0 : 1 = -A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow A = -1 \\ \Rightarrow B = 0{,}5 \\ \Rightarrow C = 0{,}5 \end{array}$$

d) $y = \dfrac{3x-2}{x^6-1} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-x+1} + \dfrac{E}{x+1} + \dfrac{F}{x-1}$

$$y = \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{7}{3}x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x-1}$$

$$3x - 2 = (Ax + B)(x^4 - x^3 + x - 1) + (Cx + D)(x^4 + x^3 - x - 1) + $$
$$+ E(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) + F(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
x^5: & 0 = A + C + E + F \\
x^4: & 0 = -A + B + C + D - E + F \\
x^3: & 0 = -B + D + E + F \\
x^2: & 0 = A - C - E + F \\
x^1: & 3 = -A + B - C - D + E + F \\
x^0: & -2 = -B - D - E + F
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\
\Rightarrow B = \frac{7}{3} \\
\Rightarrow C = -\frac{7}{3} \\
\Rightarrow D = -1 \\
\Rightarrow E = 2 \\
\Rightarrow F = \frac{4}{3}
\end{array}$$

e) $y = \dfrac{17}{(x^2-2x+2)(x+1)} = \dfrac{Ax+B}{(x^2-2x+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+2} + \dfrac{E}{x+1}$

$$y = \frac{-\frac{17}{5}x+\frac{51}{5}}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{-\frac{17}{25}x+\frac{51}{25}}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{17}{25}}{x+1}$$

$$3x - 2 = (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^3 - x^2 + 2) + E(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
x^4: & 0 = C + E \\
x^3: & 0 = -C + D - 4E \\
x^2: & 0 = A - D + 8E \\
x^1: & 3 = A + B + 2C - 8E \\
x^0: & -2 = B + 2D + 4E
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\Rightarrow A = -\frac{17}{5} \\
\Rightarrow B = \frac{51}{5} \\
\Rightarrow C = -\frac{17}{25} \\
\Rightarrow D = \frac{51}{25} \\
\Rightarrow E = \frac{17}{25}
\end{array}$$

§7. Mocninná a inverzní funkce

Mocninná funkce s celým exponentem

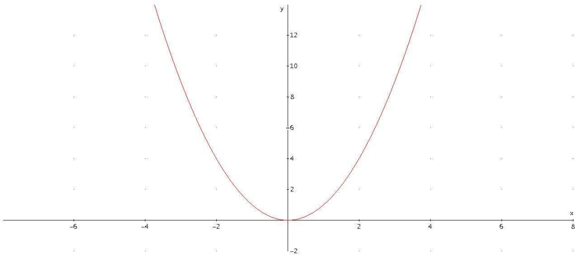
Pozn.: S mocninnou s celým exponentem jsme se seznámili, v 1.kapitole §18.

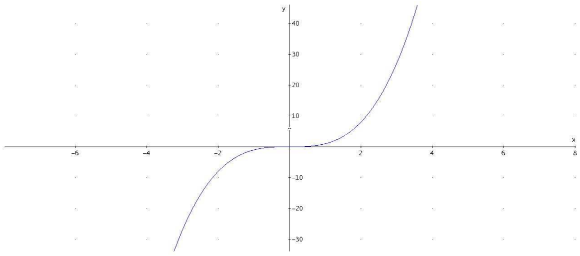
Def.: Nechť $n \in$ **R**. Pak $f : y = x^n$ nazýváme mocninnou funkcí s přirozeným exponentem.

Pozn.: Jde o speciální případ polynomické funkce $a_n = 1;\ a_i = 0;\ \forall\, i \in \{0; 1; \dots; n - 1\}$.

Pozn.: a) $f : y = x^n$
D(f) = **R**
H(f) = {$n = 2k;\ k \in$ **N** => H(f) = $\langle 0;\infty)$ }

b) $f : y = x^{n+1}$
D(f) = **R**
H(f) = {$n = 2k + 1;\ k \in$ **N** => H(f) = **R**}





V.7.1.: Nechť $f : y = x^n;\ n \in$ **N** je mocninná funkce s přirozeným exponentem. Pak platí:

	$n = 2k;\ k \in$ **N**	$n = 2k + 1;\ k \in$ **N**
1) parita	sudá	lichá
2) monotónnost	$x \in (-\infty;0\rangle$ …klesající	$x \in (-\infty;0\rangle$ …rostoucí
	$x \in \langle 0;\infty)$ …rostoucí	$x \in \langle 0;\infty)$ …rostoucí
3) omezenost	zdola omezená	není zdola omezená není shora omezená
4) extrémy	minimum v bodě [0; 0]	nemá extrémy
5) periodita	neperiodická	neperiodická

[Dk.: Plyne z grafu.]

Př.: Porovnejte čísla 3^{400} a 4^{300}

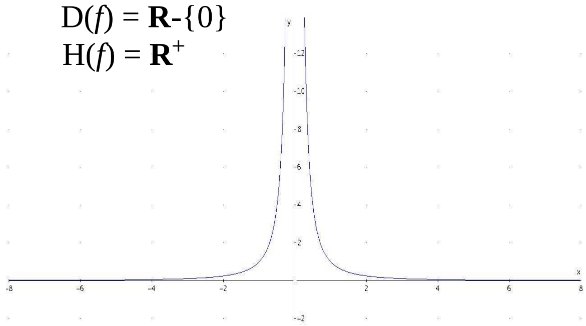
$3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$

$4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}$ => $3^{400} > 4^{300}$

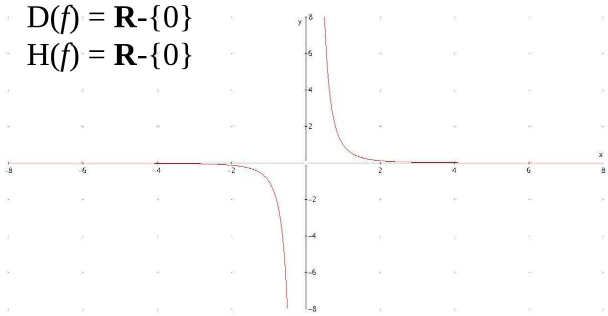
Def.: Nechť $n \in$ **N**, $x \neq 0$. Pak funkci $f : y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ nazýváme mocninnou funkcí s celým záporným exponentem.

Pozn.: a) Jde o speciální případ racionální lomené funkce.
b) Připomeňme, že $x^0 = 1;\ \forall\, x \in$ **R**-{0}.

Pozn.: a) $y = x^{-n}$; n = 2k; $k \in$ **N**
D(f) = **R**-{0}
H(f) = $\mathbf{R}^{+}$



b) $y = x^{-n}$; $n = 2k + 1$; $k \in$ **N**
D(f) = **R**-{0}
H(f) = **R**-{0}



V.7.2.: Nechť $f : y = x^{-n}$; $x \in$ **R**-{0}, $n \in$ **N** je mocninná funkce s celým záporným exponentem. Pak platí:

	$n = 2k$; $k \in$ **N**	$n = 2k + 1$, $k \in$ **N**
1) parita	sudá	lichá
2) monotónnost	$x \in (-\infty;0\rangle$ …rostoucí	$x \in (-\infty;0\rangle$ …klesající
	$x \in \langle 0;\infty)$ …klesající	$x \in \langle 0;\infty)$ …klesající
3) omezenost	zdola omezená	není zdola omezená
		není shora omezená
4) extrémy	nemá extrémy	nemá extrémy
5) periodita	neperiodická	neperiodická
		prostá

Př.: Porovnejte čísla: a) $(-5{,}55)^{-4}$ a $(-5{,}56)^{-4}$
$(-5{,}55)^{-4} > (-5{,}56)^{-4}$ – plyne z grafu
b) $(-5{,}55)^{-5}$ a $(-5{,}56)^{-5}$
$(-5{,}55)^{-5} < (-5{,}56)^{-5}$ – plyne z grafu

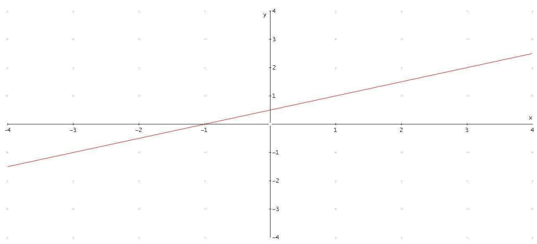
Pozn.: Ze 4.kapitoly §1 víme, co je to inverzní relace a inverzní zobrazení:
Nechť $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. Inverzní relací k α, nazýváme relaci $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$:
$\alpha^{-1} = \{[y, x] \in B \times A, [x, y] \in \alpha\}$. Inverzní relace funkce nemusí být vždy funkcí, ale platí: Nechť f je funkce. Inverzní relace f^{-1} je funkcí <=> f je prostá.

Def.: Nechť f je prostá, pak inverzní relací f^{-1} k prosté funkci f se nazývá <u>inverzní funkce</u> k funkci f.

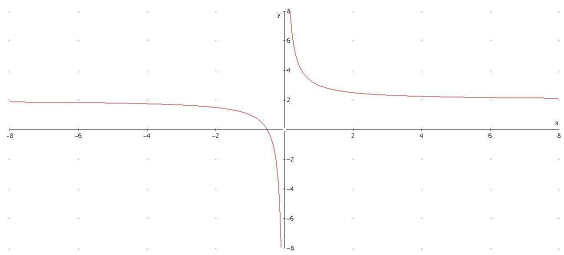
Pozn.: a) Má-li funkce f definiční obor D(f) a obor hodnot H(f), pak inverzní funkce f^{-1} má definiční obor D(f^{-1}) = H(f) a oborem hodnot H(f^{-1}) = D(f).
b) Grafy funkce f a funkce k ní inverzní f^{-1} (u nichž jsou zaměněné proměnné) jsou souměrně sdružené podle přímky o rovnici $y = x$.
c) Je-li funkce f rostoucí (klesající), je také f^{-1} rostoucí (klesající).

Př.: K funkci f určete f^{-1} a načrtněte grafy.

a) $f : y = 2x - 1$ $\qquad f^{-1} : y = \dfrac{x+1}{2}$



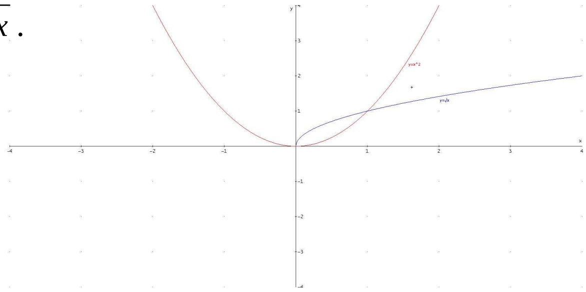
b) $f : y = \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad f^{-1} : y = 2 + \dfrac{1}{x}$



Mocninná funkce s racionálním exponentem

Pozn.: S mocninnou s racionálním exponentem jsme se seznámili v 1. ročníku.

Př.: Načrtněte inverzní funkci k funkci $f : y = x^2$.
Taková funkce neexistuje, neboť f není prostá. Proto zúžíme $D(f) = \langle 0;\infty)$ => zde je f rostoucí (tedy prostá) => $\exists f^{-1} : y = \sqrt{x}$.



Def.: Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $x \geq 0$. Pak inverzní funkcí k funkci $f : y = x^n$ nazýváme <u>n-tou odmocninou</u> a značíme $f^{-1} : y = \sqrt[n]{x}$.

Pozn.: $D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \langle 0;\infty)$

V.7.3.: Nechť $f^{-1} : y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ je n-tá odmocnina. Pak platí:
1) f není ani lichá ani sudá
2) f je rostoucí (tedy prostá)
3) zdola omezená
4) ostré minimum v bodě [0;0]
5) není periodická

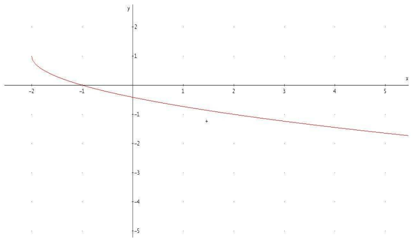
Pozn.: $\forall x, y \in \langle 0;\infty)$, $\forall n \in \mathbf{N} : y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$

Def.: Pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami:
$\forall\ r, s \in \mathbf{Q}$, $a, b \in \mathbf{R}^+$, $(r > s, b \neq 0)$ $\forall\ m, n, p \in \mathbf{N}$, platí:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$	2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3) $(a)^{r^s} = a^{rs}$	3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4) $(ab)^r = a^r b^r$	4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$	5) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

Pozn.: Zvláštním případem je $a^0 = 1$.

Př.: Načrtněte graf funkce $f: y = 1 - \sqrt{x+2}$, určete její vlastnosti a najděte inverzní funkci.



$D(f) = \langle -2, \infty)$

$H(f) = (-\infty, 1)$

není sudá ani lichá

klesající

shora omezená

neperiodická

ostré maximum v bodě [-2; 1]

$f^{-1}: x = 1 - \sqrt{y+2}$

$\sqrt{y+2} = 1 - x$

$y + 2 = x^2 - 2x + 1$

$f^{-1}: y = x^2 - 2x - 2$

Def.: Nechť $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $x \in \mathbf{R}^+$. Pak funkce $f: y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ nazýváme <u>mocninnou funkcí s racionálním exponentem</u>.

Pozn.: Definiční obor mocninné funkce s racionálním exponentem (tj. pro která a je definovaná mocnina s racionálním exponentem $a^{\frac{p}{q}}$) závisí na exponentu $\frac{p}{q} = r$:

$r \in \mathbf{N} \Rightarrow a \in \mathbf{R} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}$

$r \in \mathbf{Z} - \mathbf{N} \Rightarrow a \in \mathbf{R}-\{0\} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}-\{0\}$

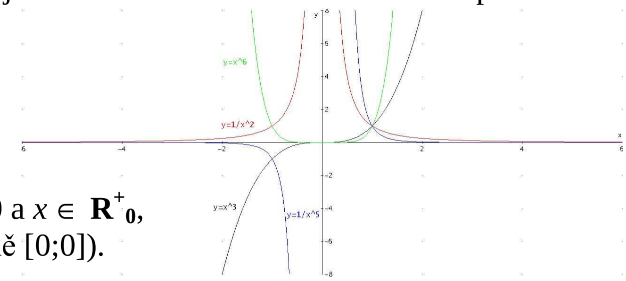
$r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z} \Rightarrow a \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}^+$ (pro $r > 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R}^+_0 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R}^+_0$)

Pozn.: Grafy mocninné funkce s racionálním exponentem také samozřejmě závisí na exp. r.

$r \in \mathbf{Q}^+ - \mathbf{Z} \Rightarrow D(f) = H(f) = \mathbf{R}^+_0 \quad \wedge \quad r \in \mathbf{Q}^- - \mathbf{Z} \Rightarrow D(f) = H(f) = \mathbf{R}^+$

V.7.4.: Nechť $f: y = x^r$, $r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}^+$ je mocninná funkce s racionálním exponentem. Pak platí:

1) funkce f není sudá ani lichá
2) $r > 0$ … f je rostoucí
   $r < 0$ … f je klesající
3) funkce f je zdola omezená
4) funkce nemá extrémy (když $r > 0$ a $x \in \mathbf{R}^+_0$, potom f má ostré minimum v bodě [0;0]).



Pozn.: Analogicky jako mocninnou funkci s racionálním exponentem bychom mohli zavést mocninnou funkci s reálným exponentem (případně mocninu s reálným exponentem). Definiční obor (základ) by byl také z $\mathbf{R}^+$ a platily by stejné vztahy jako pro racionální exponenty.

1. Upravte: a) $\sqrt[7]{a^{19}} = a^{\frac{19}{7}}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{11}{6}}$

c) $\sqrt{\frac{c}{d}\sqrt[3]{\frac{d}{c}}} = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$

2. Porovnejte čísla $\left(4\sqrt{7}\right)^{-\frac{4}{3}}$ a $\left(6\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}$: $y = x^{-\frac{4}{3}}$ => funkce je klesající

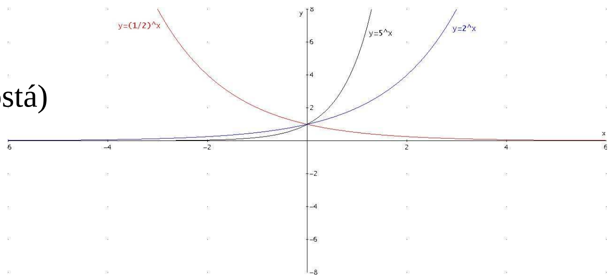
$\left(4\sqrt{7}\right) \; ? \; \left(6\sqrt{3}\right) \Rightarrow \sqrt{112} > \sqrt{108} \Rightarrow \left(4\sqrt{7}\right)^{-\frac{4}{3}} < \left(6\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}$

C) Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice
§1. Exponenciální funkce

Def.: Nechť $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$. Pak funkce $f : y = a^x$ nazýváme <u>exponenciální funkcí o základu *a*</u>.

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R}$
b) $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) > 0 \Rightarrow H(f) = \mathbf{R}^+$
c) $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}: a^0 = 1 \Rightarrow$ graf každé exponenciální funkce prochází bodem [0,1]

V.1.1.: Nechť $f : y = a^x$, $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ je exponenciální funkce. Pak platí:
1) f není ani sudá ani lichá
2) $a > 1 \Rightarrow f$ je rostoucí
$0 < a < 1 \Rightarrow f$ je klesající
f je vždy ryze monotónní (tedy prostá)
3) f je zdola omezená
4) f nemá extrémy
5) f není periodická



Př.: Porovnejte čísla $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,5}$ a $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0,4}$ a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0,5}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$ plyne z grafu

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-0,4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-0,5}$ plyne z grafu

Př.: Určete pro která $b \in \mathbf{R}$ je $f : y = \left(\frac{b}{b-1}\right)^x$ rostoucí a klesající.

a) rostoucí: $\frac{b}{b-1} > 1$

$\frac{b-b+1}{b-1} > 0$

$\frac{1}{b-1} > 0 \Rightarrow b-1 > 0 \Rightarrow b > 1$

b) klesající: $0 < \frac{b}{b-1} < 1$

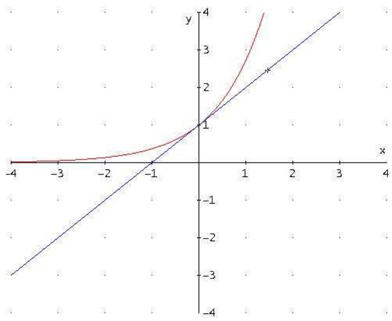
$\frac{b}{b-1} < 1 \wedge \frac{b}{b-1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in (-\infty;0)$

Pozn.: Uvažujme přímku $p : y = x + 1$. Hledáme základ <u>a</u> funkce $f : y = a^x$ tak, aby p byla tečna ke grafu funkce f.

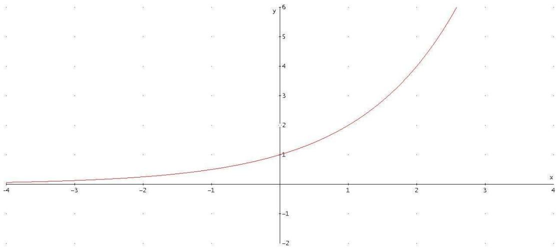
Protože graf obou funkcí prochází bodem [0;1] je tento bod i bodem dotyku. Hledaným základem je tzv. <u>Eulerovo číslo</u>, značí se $e = 2{,}71828182845904523\ldots$ (e je iracionální) Budeme tedy psát $f : y = e^x$.

$[\, e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \,]$

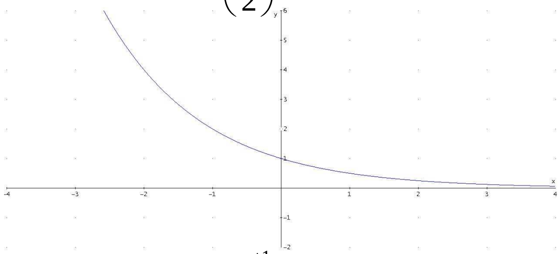


1. Sestrojte grafy následujících funkcí.

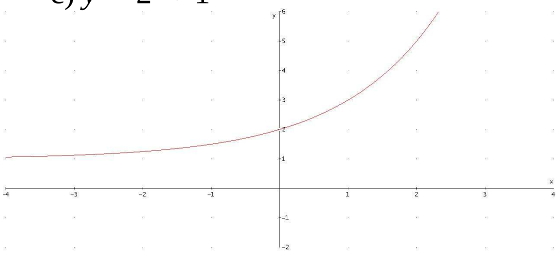
a) $y = 2^x$



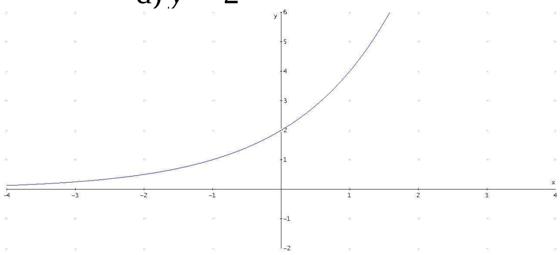
b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



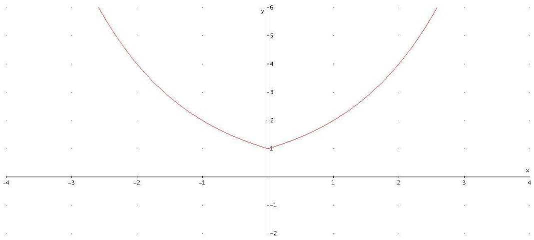
c) $y = 2^x + 1$



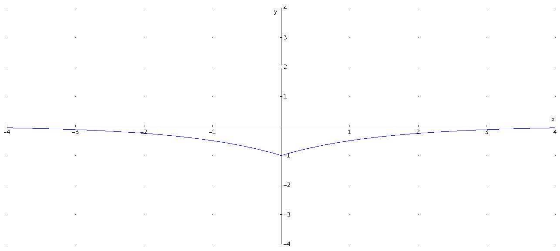
d) $y = 2^{x+1}$



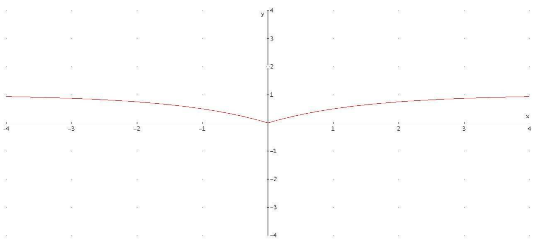
e) $y = 2^{|x|}$



f) $y = -2^{-|x|}$



g) $y = 1 - 2^{-|x|}$



§2. Exponenciální rovnice

Pozn.: Exponenciální rovnicí rozumíme rovnici s neznámou v exponentu.
Řeší se zpravidla na základě následující věty.

V.2.1.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} : a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
[Dk.: Plyne bezprostředně z toho, že exponenciální funkce je prostá]

Př.!: Řešte rovnici: a) $\frac{1}{5^{-2x+4}} = 125$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

a) $5^{-2x+4} = 5^3$

$-2x = -1$

$x = ½$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{5-2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

$-2x = -2$

$x = 1$

1. Řešte rovnice:

a) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2} \Rightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \Rightarrow x^2 - 6x - \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-7)(x+1) = 0 \Rightarrow P = \{-1; 7\}$

b) $4^{\sqrt{x}+1} = 64 \,.\, 2^{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \left(2^{\sqrt{x}+1}\right)^2 = 64 \,.\, 2^{\sqrt{x}+1} \Rightarrow a^2 = 64a \Rightarrow a = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{\sqrt{x}+1} = 2^6 \Rightarrow P = \{25\}$ – neekvivalentní úprava, nutno udělat zkoušku

c) $4^x + 2^x - 6 = 0 \Rightarrow 4^x + 2^x = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+3) = 0 \Rightarrow$
$(2^x - 2)(2^x + 3) = 0 \Rightarrow 2^x = 2^1 \vee 2^x = -3 \Rightarrow P = \{1\}$

d) $\frac{6^{x^2}}{2^{15}} = \frac{2^{-15}}{6^{10-12x}} \Rightarrow \frac{6^{x^2}}{2^{15}} = \frac{6^{10-12x}}{2^{-15}}\; 6^{x^2} = 6^{10-12x} \Rightarrow x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P = \{6 + \sqrt{26}; 6 - \sqrt{26}\}$

e) $3^2.27^{2x-3} = 81^{3x-5} \Rightarrow 3^{6x-7} = 3^{12x-120} \Rightarrow 6x = 13 \Rightarrow P = \left\{\frac{13}{6}\right\}$

f) $2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x(2+1) = 2^3.3 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow P = \{3\}$

g) $2^{x^2-5x+6} = 1 \Rightarrow 2^{x^2-5x+6} = 2^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow P = \{2; 3\}$

2. Řešte rovnice:

a) $2^x.5^x = 0{,}1(10^{x-1})^5 \Rightarrow 10^x = 10^{-1}(10^{5x-5}) \Rightarrow 10^x = (10^{5x-6}) \Rightarrow P = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $9^{x(x-1)-0{,}5} = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x(x-1)-1} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

3. Řešte pomocí substituce:

c) $2^{4x} - 50.2^{2x} = 896 \Rightarrow$ substituce $t = 2^x$: $t^2 - 50t - 896 = 0 \Rightarrow t_1 = 64, t_2 = -14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64 = 2^x \Rightarrow 2^6 = 2^x \Rightarrow P = \{3\}$

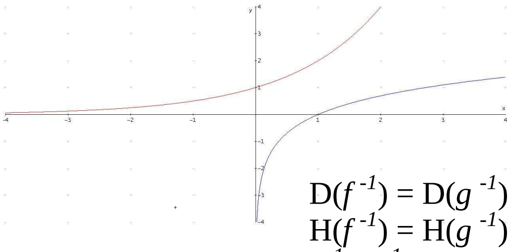
d) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \Rightarrow 3t + t^2 = 810 \Rightarrow t_1 = -30, t_2 = 27 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^3 \Rightarrow P = \{2\}$

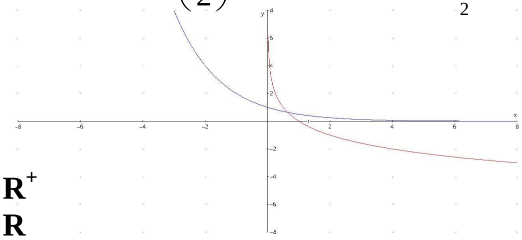
e) $3^{v-1} + 3^{v-2} + 3^{v-3} = 13 \Rightarrow \frac{t}{3} + \frac{t}{9} + \frac{t}{27} = 13 \Rightarrow t = 27 \Rightarrow 3^v = 3^3 \Rightarrow P = \{3\}$

§3. Logaritmická funkce, logaritmus

Př.: Nakreslete grafy inverzních funkcí a popište jejich vlastnosti.

a) $f : y = 2^x$ $\quad f^{-1} : y = \log_2 x$ $\qquad$ b) $g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad g^{-1} : y = \log_{\frac{1}{2}} x$





$D(f^{-1}) = D(g^{-1}) = \mathbf{R}^+$
$H(f^{-1}) = H(g^{-1}) = \mathbf{R}$
f^{-1}, g^{-1} není ani sudá ani lichá
f^{-1}- rostoucí, g^{-1} – klesající
f^{-1}, g^{-1} neomezené, bez extrémů, neperiodické

Def.: Nechť $a \in \mathbf{R}^+$-{1}. Pak inverzní funkce k exponenciální funkci $f : y = a^x$ nazýváme <u>logaritmickou funkci o základu a</u>, zapisujeme $f^{-1} : y = \log_a x$.

Pozn.: a) $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbf{R}^+$, $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbf{R}$
c) Graf každé logaritmické funkce prochází bodem [0,1].

V.3.1.: Nechť $f : y = \log_a x$, $\forall a \in \mathbf{R}^+$-{1} je logaritmická funkce. Pak platí:
1) f není ani lichá ani sudá
2) pro $a > 1$ … f je rostoucí
pro $a \in (0; 1)$ … f je klesající
3) f je vždy prostá
4) f není omezená ani shora ani zdola
5) f nemá extrémy
6) f není periodická

Def.: Nechť $f : y = \log_a x$, $a \in \mathbf{R}^+$-{1}, je logaritmická funkce a $x_0 \in D(f)$. Pak číslo $f(x_0)$ nazýváme <u>logaritmem čísla</u> x_0 <u>o základu a</u>.

Pozn.: Platí tedy, že: $\log_a b = c \iff a^c = b$

Př.: Určete D(f) následujících funkcí.

a) $y = \log_2 \dfrac{x+1}{x-2}$ $\qquad$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x}$ $\qquad$ c) $y = \sqrt{\log_3 x}$

$D(f) = (-\infty;-1) \cup (2;\infty)$ $\qquad$ $D(f) = (-\infty;4)$ $\qquad$ $D(f) = (1;\infty)$

Př.: Vypočtěte:

a) $y = \log_{0,25} 64$ $\qquad$ b) $\log_2 \sqrt[3]{4} = c$ $\qquad$ c) $\log_{0,1} x = -2$

a)
$$0{,}25^y = 64$$
$$\left(4^{-1}\right)^y = 4^3$$
$$y = -3$$

b)
$$2^c = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$
$$c = \frac{2}{3}$$

c)
$$0{,}1^{-2} = x$$
$$x = 100$$

Vlastnosti logaritmů

V.3.2.: $\forall\ a \in \mathbf{R}^+\text{-}\{1\}$: a) $\forall\ x \in \mathbf{R}^+$: $a^{\log_a x} = x$

b) $\forall\ x \in \mathbf{R}$: $\log_a a^x = x$

[Dk.: a) $\log_a x = r \iff a^r = x$ b) $a^x = r \iff \log_a r = x$

$a^{\log_a x} = a^r = x$ $\log_a a^x = \log a^r = x$]

V.3.3.: $\forall\ a \in \mathbf{R}^+\text{-}\{1\}$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2$

[Dk.: Plyne z toho, že logaritmická funkce je prostá]

V.3.4.: $\forall\ a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1, b \neq 1$: a) $\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c$

b) $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

Pozn.: a) V.3.4.a) se využívá k výpočtu logaritmů, neboť platí: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$. Položíme-li totiž a = 10, dostáváme tzv. dekadické logaritmy, které označujeme jen log ($\log_{10} x = \log x$) a hodnoty najdeme v tabulkách.

b) V.3.4. se často používá ve tvaru $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

V.3.5.: $\forall\ a \in \mathbf{R}^+\text{-}\{1\}, \forall\ x \in \mathbf{R}^+$: a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_a x$

b) $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

V.3.6.: $\forall\ a \in \mathbf{R}^+_0\text{-}\{1\}$, $\forall\ x, y \in \mathbf{R}^+$, $\forall\ r \in \mathbf{R}$:

a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^r = r.\log_a x$

Pozn.: Zápisy mocnin: $n \in \mathbf{N}$: $\log_a x^n = \log_a \left(\underbrace{x.x...x}_{n}\right)$

$\log^n{}_a x = \underbrace{\log_a x.\log_a x...\log_a x}_{n}$

Dekadický a přirozený logaritmus

Def.: Nechť $x \in \mathbf{R}^+$. <u>Dekadickým logaritmem</u> čísla x rozumíme jeho logaritmus o základu 10. Zapisujeme log x.

Pozn.: Funkce f : y = log x je rostoucí.

Pozn.: Každé reálné kladné číslo m ($m \in \mathbf{R}^+$) lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $m = m_1 \cdot 10^c$, kde $m_1 \in \langle 1;10)$, $c \in \mathbf{Z}$.

V.3.7.: Nechť $m \in \mathbf{R}^+$. Pak platí: $\log m = \log m_1 + c$, kde $\log m_1 \in \langle 0;1)$, $c \in \mathbf{Z}$, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Def.: Nechť $m \in \mathbf{R}^+$, $\log m = \log m_1 + c$, kde $\log m_1 \in \langle 0;1)$, $c \in \mathbf{Z}$. Pak číslo $\log m_1$ nazýváme <u>mantisou</u> a číslo <u>c charakteristikou čísla log m</u>.

Př.: a) 251,8 => log 251,8 = log 2,518 + 2
b) 0,0008 => log 0,0008 = log 8 – 4

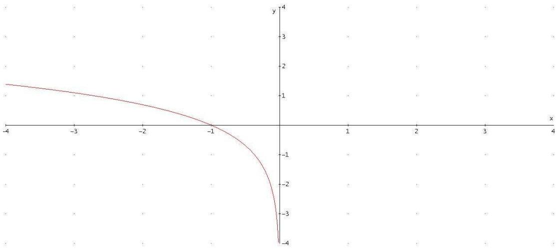
Def.: Nechť $x \in \mathbf{R}$. Přirozeným logaritmem čísla x rozumíme logaritmus o základu e- Eulerovo číslo (e = 2,718). Zapisujeme ln x.

Pozn.: Funkce $f : y = \ln x$ je rostoucí a platí: $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$ log e = 0,434294

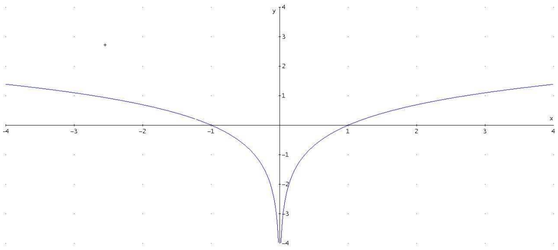
$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ log 10 = 2,302585

1. Nekreslete grafy logaritmických funkcí.

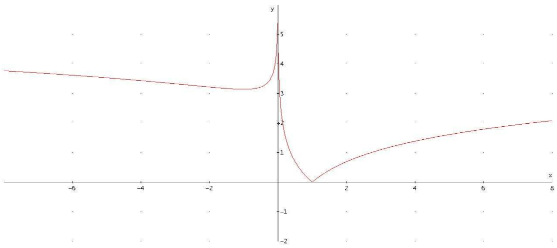
a) $y = \log_2(-x)$



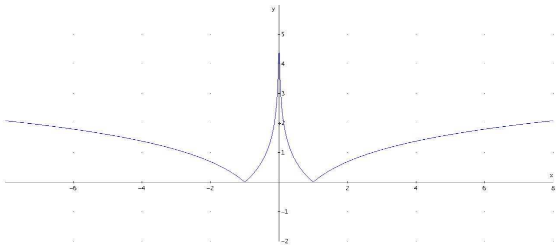
b) $y = \log_2|x|$



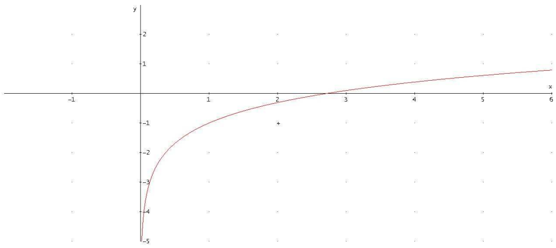
c) $y = |\log_2 x|$



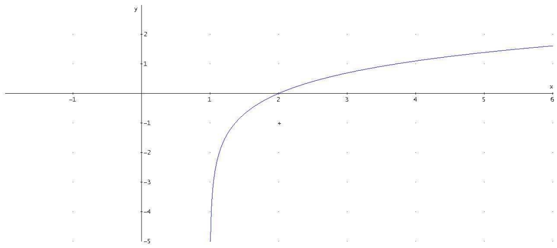
d) $y = |\log_2|x||$



e) $y = \log_2 x - 1$



f) $y = \log_2(x-1)$



2. Určete $x \in \mathbf{R}^+$, pro něž:

a) $\log_2 x = 0$ => $x = 1$

b) $\log_2 x = -3$ => $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

c) $\log_{0,1} x = -2$ => $x = (0,1)^{-2} = \frac{1}{0,01} = 100$

d) $\log_5 x = -\frac{1}{3}$ => $x = 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

§4. Logaritmické rovnice

Pozn.: a) <u>Logaritmickou rovnicí</u> nazýváme rovnici, kde se neznámá vyskytuje v logaritmickém výrazu (termu).

b) Logaritmické rovnice se řeší na základě V.3.3, případně dalších vět o logaritmech.

c) Některé exponenciální rovnice se řeší logaritmováním.

d) Protože mnoho úpravy při logaritmování nejsou ekvivalentní (rozdíl je v definičních oborech původní a upravené rovnice), je třeba vždy provádět zkoušku (nebo řešit rovnici v předem určeném definičním oboru)!

1. Řešte v **R** rovnice:

a) $\log (4^x + 6) = 1 + \log (2^x - 1)$

$$\log\frac{4x+6}{2x-1} = \log 10$$

$$\frac{4x+6}{2x-1} = 10$$

$$x = 1$$

zk.: L(1) = P(1) = 1

b) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

$$\log_2 x = t : t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x_2 = 4$$

zk.: L(2) = P(2) = 0, L(2) = P(4) = 0

c) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$

$$\log_7(6 + 7^{-x}) = \log_7 7^{1+x}$$

$$6 + 7^{-x} = 7^{1+x}$$

$$7x = t : 6 + \frac{1}{t} = 7t$$

$$7t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{7}$$

$$7^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

d) $x^{3+2\log_5 x} = 25x^{2+\log_5 x}$

$$x^{1+2\log_5 x} = 25x^{\log_5 x}$$

$$\log_5 x^{1+2\log_5 x} = \log_5(25x^{\log_5 x})$$

$$(1 + 2\log_5 x)\log_5 x = 2 + \log_5 x^{\log_5 x}$$

$$\log_5 x + 2\log_5^2 x = 2 + \log_5^2 x$$

$$\log_5 x = t : t^2 + t - 2 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -2$$

$$\log_5 x = 1 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{25}$$

e) $\log_2 \sqrt{1+x} + 3\log_2 \sqrt{1-x} = 2 + \log_2 \sqrt{1-x^2}$

$$\log_2 \sqrt{1+x} + 3\log_2 \sqrt{1-x} = 2 + \log_2 \sqrt{1-x} + \log_2 \sqrt{1-x}$$

$$2\log_2 \sqrt{1+x} = 2$$

$$\log_2(1-x) = \log_2 2^2$$

1 – x = 4 => x – 3 – není řešení, neboť –3 $\notin$ D(f) (1 + (–3)= –2 < 0)

f) $\log(x+10)+\log 4 = 2-\frac{1}{2}\log x^2$

$$\textbf{!!!}\ \frac{1}{2}\log x^2 = \log\sqrt{x^2} = \log|x|$$

$$\log(4(x+10)) = \log\frac{100}{|x|}$$

$$4|x|(x+10) = 100$$

$x>0: x^2+10x-25=0 \Rightarrow x_1 = -5+5\sqrt{2}$

$x<0: x^2+10x+25=0 \Rightarrow x_2 = -5$

(Kdybychom použili úpravu $\frac{1}{2}\log x^2 = \log x$, kořen x^2 by se „ztratil“**!!!**)

2. Vypočtěte:

a) $\log_3^2 x + \log_{\frac{1}{3}} x = 2 \Rightarrow \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0 \Rightarrow t = \log_3 x:$

$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2: x_1 = 9; t_2 = -1: x_2 = \frac{1}{3}$

b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \Rightarrow \log_{16} x + \frac{\log_{16} x}{\log_{16} 4} + \frac{\log_{16} x}{\log_{16} 2} = 7$

$\log_{16} x(1+4+2) = 7 \Rightarrow \log_{16} x.7 = 7 \Rightarrow \log_{16} x = 1 \Rightarrow x = 16$

c) $\log_2\sqrt{1+x} + 3\log_2\sqrt{1-x} = 2\log_2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \log_2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} = \log_2|1-x^2|$

$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} = |1-x^2| \Rightarrow (1+x)(1-x)^3 = (1-x)^2(1+x)^2 \Rightarrow (1-x) = (1+x) \Rightarrow x = 0$

d)

$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow x^{\log\sqrt{x}} = 100 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}\log x} = 100 \Rightarrow \log x^{\frac{1}{2}\log x} = \log 100 \Rightarrow \frac{1}{2}\log^2 x = 2$

$\log^2 x = 4 \Rightarrow \log x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100, x_2 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

3. Vypočtěte:

a) $5^{t-2} = \frac{10}{3} \Rightarrow \log_5 5^{t-2} = \log_5\frac{10}{3} \Rightarrow t-2 = \log_5 10 - \log_5 3 \Rightarrow t-2 = \log_5 2 +$

$\log_5 5 - \log_5 3 \Rightarrow t = 3 + \log_5 2 - \log_5 3 \Rightarrow t = 3 + \frac{\log 2 - \log 3}{\log 5} = 2{,}748$

b) $3^{2t-1} = 5^{3-t} \Rightarrow (2t-1)\log 3 = (3-t)\log 5 \Rightarrow 2\log 3.t - \log 3 = 3\log 5 - \log 5.t \Rightarrow$

$t(2\log 3 + \log 5) = 3\log 5 + \log 3 \Rightarrow t\log 45 = \log 375 \Rightarrow t = \frac{\log 375}{\log 45} = 1{,}557$

c) $5^{t^2+t}.2^{t^2+t} = 4.100^t \Rightarrow 10^{t^2+t} = 4.100^t \Rightarrow (t^2+t)\log 10 = \log 4 + t\log 100 \Rightarrow$

$t^2 - t - \log 4 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4\log 4}}{2} \Rightarrow t_1 = 1{,}423, t_2 = -0{,}423$

§5. Exponenciální a logaritmické nerovnice a soustavy exponenciálních a logaritmických rovnic

Pozn.: Exponenciální a logaritmické nerovnice se řeší pomocí následujících dvou vět, které plynou z V.2.1, V.3.3 a vlastnosti exponenciální a logaritmické funkce.

V.5.1.: $\forall\ a \in$ **R**$^+$-{1}, $\forall\ x_1, x_2 \in$ **R** : a) pro $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$
b) pro $a \in (0;1)$: $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2$

V.5.2.: $\forall\ a \in$ **R**$^+$-{1}, $\forall\ x_1, x_2 \in$ **R**$^+$: a) pro $a > 1$: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$
b) pro $a \in (0;1)$: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2$

1. Řešte v **R** nerovnice:

a) $3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2$

$3.3^{2x+4} \le 3^{x+2} + 2$

$3^{x+2} = t : 3t^2 \le t + 2$

$3t^2 - t - 2 \le 0$

$t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \dfrac{1 \pm 5}{6}$

$(t-1)(t+\frac{2}{3}) \le 0 \Rightarrow t \in \left\langle -\frac{2}{3};1 \right\rangle$

$-\frac{2}{3} \le 3^{x+2}$ … platí vždy

$3^{x+2} \le 1 \Rightarrow 3^{x+2} \le 3^0$

$x + 2 \le 0 \Rightarrow x \le -2$ <u>P = (-∞;-2></u>

b) $\log_x(\frac{5}{2}x - 1) \ge 2$

$x > 0, x \ne 1, \frac{5}{2}x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$

$\log_x(\frac{5}{2}x - 1) \ge \log_x x^2$

1) $x > 1$: $\frac{5}{2}x - 1 \ge x^2$

$2x^2 - 5x + 2 \le 0$

$(x-2)(x-\frac{1}{2}) \le 0 \Rightarrow x \in (1;2\rangle$

2) $0 < x < 1$: $\frac{5}{2}x - 1 \le x^2$

$(x-2)(x-\frac{1}{2}) \le 0$

$\Rightarrow x \in (0;\frac{1}{2}\rangle$

$\underline{P \subseteq (0;\frac{1}{2}\rangle \cup (1;2\rangle}$

c) $\log_{x^2-3}(4x+2) \ge 1$

$|x| > \sqrt{3}, x \ne \pm 2, x > -\frac{1}{2}$

$\log_{x^2-3}(4x+2) \ge \log_{x^2-3}(x^2-3)$

1) $x^2 - 3 > 1 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$: $4x + 2 \ge x^2 - 3$

$(x-5)(x+1) \le 0 \Rightarrow x \in (2,5\rangle$

2) $0 < x^2 - 3 < 1 \Rightarrow x^2 > 3 \wedge x^2 < 4 \Rightarrow |x| > \sqrt{3} \wedge |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2)$

$4x + 2 \le x^2 - 3 \Rightarrow (x-5)(x+1) \ge 0$ $\Rightarrow x \in (-\infty;-1\rangle \cup \langle 5;\infty)$

$\Rightarrow x \in (-2;-\sqrt{3}) \Rightarrow \underline{P = (2;5\rangle}$

2. Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic: $x^{\log y} = 4$, $xy = 40$

$\log x.\log y = \log 4$ $\qquad$ $\log x + \log y = 1 + \log 4$

$a.b = c$ $\qquad$ $a + b = 1 + c$

$b = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ $a + \dfrac{c}{a} = 1 + c$ => $a_{1,2} = \dfrac{1 + c \pm (c-1)}{2}$

Dosazení: $\log x_1 = c \Rightarrow x_1 = 10^c = 10^{\log 4} = 4 \Rightarrow y_1 = \dfrac{40}{x_1} = 10$

$\log x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow y_2 = \dfrac{40}{x_2} = 4$ $\qquad$ $P = \{[4;10],[10;4]\}$

3. Řešte nerovnice:

a) $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 2 \Rightarrow x \leq 2 \wedge x > 0 \Rightarrow P = (0;2\rangle$

b) $\log_x 3 < \log_x 11 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow P = (1;\infty)$

c) $\log_x 4 \geq 1 \Rightarrow \log_x 4 \geq \log_x x : x > 1 \Rightarrow 4 \geq x, 0 < x < 1 : 4 \leq x \Rightarrow P = (1;4\rangle$

d) $5^{|x|} < 5 \Rightarrow 5^{|x|} < 5^1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow P = (-1;1)$

e) $125.5^{2x-4} > 1 \Rightarrow 5^{2x-4+3} > 5^0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow P = (\dfrac{1}{2};\infty)$

f) $9^x \leq 3^{-x^2} \Rightarrow 3^{2x} \leq 3^{-x^2} \Rightarrow 2x \leq -x^2 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow P = \langle -2;0\rangle$

g) $3^{2x} < 7.3^x + 9\log_3 9 \Rightarrow 3x = t : t^2 - 7t - 18 < 0 \Rightarrow t \in (-2;9) \Rightarrow -2 < 3^x < 9$
$\Rightarrow 3^x < 3^2 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow P = (-\infty;2)$

h) $2^x \geq 1 + 2^{1-x} \Rightarrow 2^x = t : t \geq 1 + \dfrac{2}{t} \Rightarrow 1) t > 0 : t^2 \geq t + 2 \Rightarrow t \geq 2 \Rightarrow 2^x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$
$2) t < 0 \Rightarrow 2^x < 0$ - $spor \Rightarrow P = \langle 1;\infty)$

4. Řešte soustavu rovnic $\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, xy = 5^{12}$:

$\log_5 x + y = 7 \wedge y.\log_5 x = 12 \Rightarrow \log_5 x = t : t + y = 7 \wedge y.t = 7 \Rightarrow t = 7 - y :$

$y(7-y) = 12 \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow y_1 = 3 : x^3 = 5^{12} : x = 5^4; y_2 = 4 : x^4 = 5^{12} : x = 5^3$

$P = \{[5^4;3],[5^3;4]\}$

5. Řešte soustavu rovnic $2^{\log x}.3^{\log y} = \sqrt{54}$:

$\log x + \log y = 2 \Rightarrow \log x.\log 2 + \log y.\log 3 = \dfrac{1}{2}\log 54$

$\log x.\log 2 + \log y.\log 2 = 2\log 2$

Odečtením obou rovnic: $\log y(\log 3 - \log 2) = \dfrac{1}{2}\log(3^3.2) - 2\log 2 \Rightarrow$

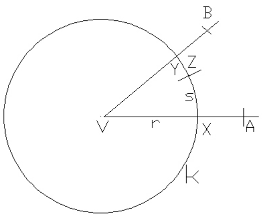
$\Rightarrow \log y.\log\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}(3\log 3 + \log 2) - 2\log 2 \Rightarrow \log y \dfrac{\frac{3}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log 2}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow y = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000}$ $\qquad$ $\log x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow P = \{[\sqrt{10}, \sqrt{1000}]\}$

D) Goniometrické funkce a rovnice
§1. Velikost úhlu v obloukové míře

Def.: Nechť *AVB* je úhel. Pak mu přiřazujeme reálné číslo $\alpha \in$ **R**, které nazýváme <u>velikostí úhlu</u> *AVB* takto:



Nechť $k(V,r)$; $X \in k \cap \overrightarrow{VA}$

$Y \in k \cap \overrightarrow{VB}$, označme s velikost oblouku XY

(přesněji $s = |XZY|$, kde $Z \in XY$)

Definujeme pak velikost úhlu $\alpha = \dfrac{s}{r}$.

Pozn.: Uvedená definice je korektní, neboť pro 2 kružnice k_1, k_2 s poloměry r_1, r_2 a oblouky $s_1 = |X_1Y_1|$ a $s_2 = |X_2Y_2|$. Pak platí $\boldsymbol{s_1/r_1 = s_2/r_2}$.
Proto zpravidla při určování velikosti úhlu volíme tzv. <u>jednotkovou kružnici</u> ($r = 1$).

Pozn.: a) Je-li $s = r$ => úhel má délku 1 <u>radián</u>, značka 1 rad.
b) Je-li dána velikost úhlu v <u>radiánech</u> (resp. ve stupních), mluvíme o <u>obloukové</u> (resp. <u>stupňové</u>) <u>míře úhlu</u>.
c) Protože jednotková kružnice má délku 2π radiánů, odpovídá 2π rad (v obloukové míře) úhel o velikosti 360° (ve stupňové míře).
d) Pro velikost úhlu v obloukové míře se obvykle používá pouze číselná hodnota velikosti úhlu (tedy místo 2π rad se říká 2π).

V.1.1.: Nechť *AVB* je úhel, α …rad, β …stupních. Pak platí:

$$\alpha = \beta \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \beta = \alpha \cdot \frac{180}{\pi}$$

Pozn.: Převody velikosti některých úhlů v míře obloukové a stupňové.

β [°]	0	30	45	60	90	180	270	360
α [rad]	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3 π/2	2π

§2. Orientovaný úhel

Def.: <u>Orientovaným úhlem</u> *AVB* nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ se společným počátkem *V*. Polopřímku $\overrightarrow{VA}$, resp. $\overrightarrow{VB}$ nazýváme <u>počátečním</u> (resp. <u>koncovým</u>) <u>ramenem orientovaného úhlu</u> *AVB*, bod *V* jeho <u>vrchol</u>.

Pozn.: a) Orientovaný úhel *AVB* může vzniknou otáčením polopřímky $\overrightarrow{VA}$ do polopřímky $\overrightarrow{VB}$ kolem bodu *V*. Toto otočení lze provést 2 směry.
Za <u>kladný</u> (resp. <u>záporný</u>) <u>smysl otáčení</u> budeme považovat otáčení proti, (resp. po) směru hodinových ručiček.
b) <u>Základní velikostí</u> α <u>orientovaného úhlu</u> *AVB* budeme rozumět velikost takového úhlu, který vznikne otočením $\overrightarrow{VA}$ do polohy $\overrightarrow{VB}$ v kladném smyslu a přitom $0° \le \alpha < 360°$.
c) Jestliže $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ splynou, hovoříme o tzv. nulovém úhlu. Jeho základní velikost je 0°.

Pozn.: Každému orientovanému úhlu lze přiřadit nekonečně mnoho reálných čísel (jeho velikostí), přičemž platí, že každé dvě velikosti se od sebe liší o $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Def.: Nechť *AVB* je orientovaný úhel o základní velikosti α. Pak <u>velikostí orientovaného úhlu</u> *AVB* rozumíme každé z čísel $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

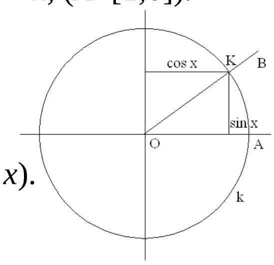
V.2.1.: Nechť $\overrightarrow{VA}$ je lib. Polopřímka, $x \in \mathbf{R}$ lib. Číslo. Pak existuje právě 1 orientovaný úhel *AVB*, jehož velikost v obloukové míře je *x*.

Pozn.: Předchozí věta zaručuje existenci zobrazení $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{M}$, kde **M** je množina všech orientovaných úhlů s pevným počátečním ramenem. Toto zobrazení je suriektivní, ale není injektivní (není prosté).

Př. Určete základní velikosti úhlu, jejichž jedna z velikostí je dána.
$1800° \to 0°$, $-333° \to 27°$, $-1100° \to 340°$, $19\pi \to \pi$, $60\pi/7 \to 4\pi/7$, $-3\pi/16 \to 29\pi/16$

§3. Funkce sinus a kosinus

Def.: Nechť je dána jednotková kružnice <u>*k*</u> se středem v počátku souřadné soustavy 0. Ztotožníme kladnou poloosu osy <u>*x*</u> s počátečním ramenem orientovaného úhlu. Ke každému $x \in \mathbf{R}$ pak existuje právě 1 polopřímka *OB* tak, že $AOB = x$, $(A=[1;0])$.
Označme $K \in OB \cap k$.
<u>Hodnotou funkce sinus</u> (resp. kosinus) <u>v bodě</u> *x* nazýváme *y*-ovou (resp. *x*-ovou) souřadnici bodu *K*. Funkci sinus (resp. kosinus) nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y_K]$ ($[x, x_K]$) pro $\forall\ x \in \mathbf{R}$ a zapisujeme $y = \sin x$ (resp. $y = \cos x$).

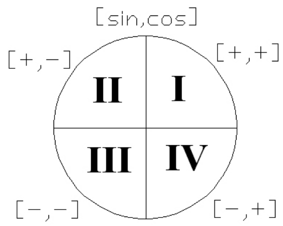


Pozn.: Přímo z definice plyne: Nechť $f : y = \sin x$
$g : y = \cos x$ Pak: $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$
$H(f) = H(g) = \langle -1;1 \rangle$

V.3.1.: Nechť $f : y = \sin x$, $g : y = \cos x$; $k \in$ **Z**. Pak platí:

1) f je lichá — g je sudá
2) rostoucí… $x \in \langle -\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi \rangle$ — rostoucí $x \in \langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$
   klesající… $x \in \langle \pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$ — klesající $x \in \langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$
3) f je omezená — g je omezená
4) f má maximum v $[\pi/2 + 2k\pi]$ — g má maximum v $[2k\pi]$
   f má minimum v $[3\pi/2 + 2k\pi]$ — g má minimum v $[\pi + 2k\pi]$
5) f, g jsou periodické s nejmenší periodou 2π

Pozn.: a) Vzhledem k periodičnosti stačí vyšetřovat funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi)$.
b) Znaménka funkcí $f : y = \sin x$, $g : y = \cos x$ v jednotlivých kvadrantech.



Pozn.: Hodnoty goniometrické funkce $f : y = \sin x$, $g : y = \cos x$ v některých důležitých bodech.

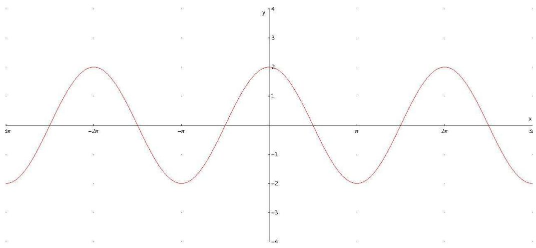
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1

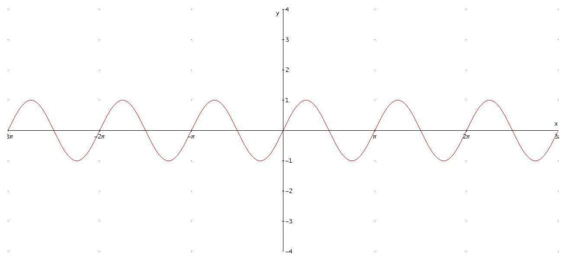
V.3.2.: Pro $\forall\ x \in$ **R**: $\sin x = \cos(x - \pi/2) = -\cos(x + \pi/2)$
$\cos x = \sin(x + \pi/2) = -\sin(x - \pi/2)$
[Dk.: Plyne z grafu funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$]

V.3.2.: Pro $\forall\ x \in$ **R**: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Pozn.: Vyjádření čísla 1 z předchozí věty se nazývá „trigonometrická jednička“.

Př.: Načrtněte grafy následujících funkcí.
a) $y = 2\cos x$ – zvýšení amplitudy
b) $y = \sin 2x$ – zvýšení frekvence





§4. Funkce tangens a kotangens

Def.: Funkcí tangens (resp. kotangens) nazýváme funkci danou rovnicí $f : y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (resp. $g : y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$). Zapisujeme $f : y = \operatorname{tg} x$ (resp. $g : y = \operatorname{cotg} x$).

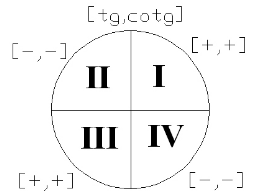
Pozn.: $D(f) = \mathbf{R} - \{(2k + 1)\,\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}$ — $D(g) = \mathbf{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbf{R}\}$
$D(f) = \bigcup_{k \in R} (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ — $D(g) = \bigcup_{k \in R} (k\pi, (k + 1)\pi)$

$\bigcup_{k \in R}$ - čti sjednocení všech $k \in$ **R**.

V.4.1.: Nechť $f : y = \text{tg } x$; $g : y = \text{cotg } x$ jsou funkcemi. Pak mají následující vlastnosti:

	f	g
1)	H(f) = **R**	H(g) = **R**
2)	f je lichá	g je lichá
3)	f je rostoucí v každém intervalů $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	klesající $(k\pi, (k + 1)\pi)$

4) nejsou omezené ani shora, ani zdola
5) nemají extrémy
6) jsou periodické s nejmenší periodou π



Pozn.: Znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech.
Obě funkce kladné v I a III kvadrantu a záporné v II a IV.

Pozn.: Hodnoty goniometrických funkcí v některých bodech.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
cotg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

V.4.2.: $\forall\ x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in R} \{k\pi/2\}$: $\text{tg } x = -\text{cotg }(x - \pi/2)$

$$\text{cotg } x = -\text{tg }(x - \pi/2)$$

V.4.3.: $\forall\ x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in R} \{k\pi/2\}$: $\text{tg } x \cdot \text{cotg } x = 1$

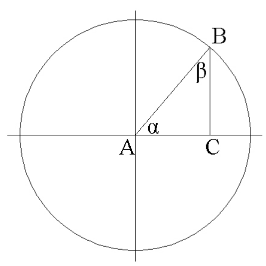
Př.: Určete: a) $\text{tg }(-19\pi/6) = -\text{tg }(3\pi + \pi/6) = \text{tg }(\pi/6) = -\sqrt{3}/3$
b) $\text{cotg }(11\pi/4) = \text{cotg }(3\pi - \pi/4) = \text{cotg }(-\pi/4) = -1$

§5. Zavedení goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

Pozn.: Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nazýváme <u>goniometrickými funkcemi</u>.

Pozn.: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB platí pro úhel $\alpha \in (0, \pi/2)$

$\sin \alpha = \dfrac{BC}{AB}$ (protilehlá / přepona)



$\cos \alpha = \dfrac{AC}{AB}$ (přilehlá / přepona)

$\text{tg } \alpha = \dfrac{BC}{AC}$ (protilehlá / přilehlá)

$\text{cotg } \alpha = \dfrac{AC}{BC}$ (přilehlá / protilehlá)

Pozn.: Kromě výše uvedených gon. funkcí se zřídka používá gon. funkce sekans (sec) a kosekans (cosec) definováno takto:

sec x = 1/cos x sec $x = \dfrac{AB}{AC}$ (přepona / přilehlá)

cosec x = 1/sin x cosec $x = \dfrac{AB}{BC}$ (přepona / protilehlá)

§6. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Pozn.: S některými jsme se již seznámili ve V.3.2., V.3.3., V.4.2. a V.4.3.

V.6.1.: $\forall\ x \in$ **R** platí: sin x = cos (π/2 – x)
cos x = sin (π/2 – x)
$\forall\ x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{k\pi/2\}$: tg x = cotg (π/2 – x)
cotg x = tg (π/2 – x)

V.6.2.: $\forall\ x \in (0, \pi/2)$ platí: sin x = - sin (2π – x)
cos x = - cos (2π – x)
tg x = - tg (π – x)
cotg x = - cotg (π – x)

Pozn.: Označíme-li f libovolnou z goniometrických funkcí z předchozí věty, lze ji zapsat ve tvaru:
$\forall\ x \in (0, \pi/2) : f(x) = \left|f(\pi - x)\right| = \left|f(x+\pi)\right| = \left|f(2\pi - x)\right|$

V.6.3.: Vyjádření gon. funkcí pomocí jiné gon. funkce stejného argumentu $x \in (0; \pi/2)$

	sin *x*	**cos *x***	**tg *x***	**cotg *x***
sin *x*	-	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{tg(x)}{\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos *x*	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	-	$\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\dfrac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tg *x*	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\dfrac{1}{\cot(x)}$
cotg *x*	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{tg(x)}$	-

[Dk.: 1. a 2. sloupec plyne z trigonometrické jedničky a definic funkcí tg x, cotg x. Poslední 2 sloupce plynou ze vztahu tg x . cotg x = 1]

Pozn.: Abychom mohli tabulku ve V.6.3. používat pro $\forall x \in \mathbf{R}$ je nutno opatřit jednotlivé vztahy znaménky příslušných funkcí v jednotlivých kvadrantech !!!

§7. Součtové vzorce

V.7.1.: Vzorce pro goniometrické funkce součtu a rozdílu argumentů (někdy jen součtové vzorce):

$\forall\ x, y \in \mathbf{R}$: $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

V.7.2.: $\forall\ x, y \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{(2k+1)\pi/2\}$, $\forall\ (x+y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{(2k+1)\pi/2\}$,

$\forall\ (x-y) \in \mathbf{R} - - \bigcup_{k\in R} \{(2k+1)\pi/2\}$ platí:

$$tg\,(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x)tg(y)} \qquad tg\,(x-y) = \frac{tg(x)-tg(y)}{1+tg(x)tg(y)}$$

V.7.3.: $\forall\ x, y \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{k\pi\}$, $\forall\ (x+y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{k\pi\}$, $\forall\ (x-y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in R} \{k\pi\}$ platí:

$$\mathrm{cotg}\,(x+y) = \frac{1-tg(x)tg(y)}{tg(x)+tg(y)} = \frac{\cot(x)\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)}$$

$$\mathrm{cotg}\,(x-y) = \frac{1+tg(x)tg(y)}{tg(x)+tg(y)} = \frac{\cot(x)\cot(y)+1}{\cot(y)-\cot(x)}$$

Př.: Vypočtěte hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě: $\alpha = 105°$, $\beta = 15°$

$\alpha = 105° = 60° + 45° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\beta = 15° = 60° - 45° = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$\sin(105°) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\cos(105°) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

$$\mathrm{tg}(105°) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = -2-\sqrt{3}$$

$$\mathrm{cotg}(105°) = \frac{1}{tg(105°)} = \frac{1}{-2-\sqrt{3}}$$

V.7.4.: Vzorce pro goniometrické funkce dvojnásobného argumentu.

$\forall x \in \mathbf{R}$: $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

[Dk.: $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

V.7.5.: Vzorce pro goniometrické funkce polovičního argumentu.

$$\forall x \in \mathbf{R}: \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

V.7.6.: Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí:

$$\forall\ x, y \in \mathbf{R}: \quad \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

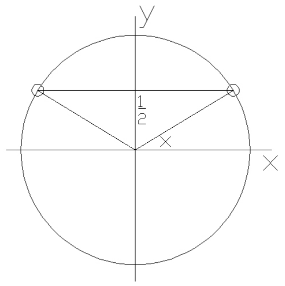
$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

§8. Goniometrické rovnice a nerovnice

Pozn.: <u>Goniometrickou rovnicí</u> (resp. <u>nerovnicí</u>) nazýváme takovou rovnici (reps. nerovnici), v níž se neznámá vyskytuje v argumentu goniometrické funkce.

Př.: Řešte v **R** rovnici:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$:

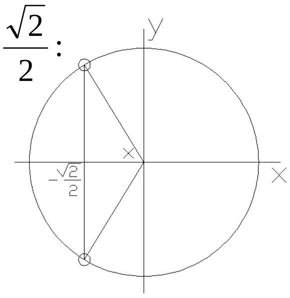


$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

b) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

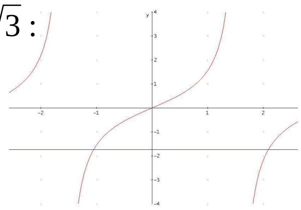


$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

c) $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$:



$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$$

d) sin $(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$
$$2x_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \;\Rightarrow\; x_2 = \pi + k\pi$$
$$P = \underset{k\in Z}{U}\left\{\frac{5\pi}{3} + k\pi; \pi + k\pi\right\}$$

1. Řešte rovnice:

a) $\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_1 + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, 2x2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$P = \underset{k\in Z}{U}\{\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi\}$

b) $2\cos^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow 2 - 2\sin^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

1) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

2) $\sin x = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow$

$x_1 = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

d) 2tg x – 3cotg x = 1=>2tg^2 x – 3 = tg $x \overset{\text{tg } x = t}{\Rightarrow}$ 2t^2 – t – 3 = 0 =>(t + 1)(2t – 3) = 0

1) tg x = –1 => $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

2) tg x = –1 => x_2 = arctg $\frac{3}{2} + k\pi$

e) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 1 + \sin^2 x + \sin x = 0 \overset{\sin x = t}{\Rightarrow} 2t^2 + t - 1 = 0$
stejné jako b)

f) $\sin 2x = \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

g) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x = \sin x + 2\sin x \cos x - \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x \Rightarrow$
$\sin x(1 + 2\cos x) = \sin x(2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x)$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$

2) $1 + 2\cos x = 3\cos^2 x - 1 + \cos^2 x \overset{\cos x = t}{\Rightarrow} 2t^2 - t - 1 = 0$

$x_2 = 2k\pi, x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$
$\sin 2x + 2\sin 2x \cos x = \cos 2x + 2\cos 2x \cos x \Rightarrow (1 + 2\cos x)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$$1)\ \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \text{a) } \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow 2x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

$$2)\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

2. Určete hodnoty všech goniometrických funkcí je-li dáno:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, kde $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$:

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cotg} x = -2\sqrt{2}$$

b) $\cos x = \frac{1}{4}$, kde $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$:

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \qquad \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

c) $\operatorname{cotg} x = -3$, kde $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \qquad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

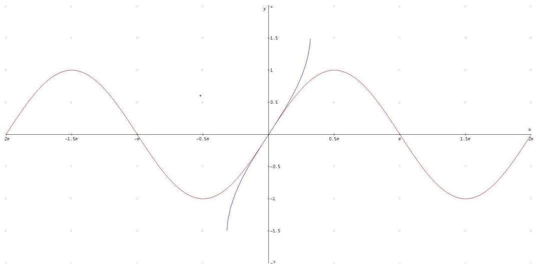
$$\cos x = \frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

§9. Cyklometrické funkce

Pozn.: <u>Cyklometrickými funkcemi</u> nazýváme funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Protože goniometrické funkce nejsou prosté, je nutno omezit jejich definiční obor na interval, v němž je dána goniometrická funkce monotónní, a tedy prostá.

Pozn.: Nechť $f : y = \sin x$, $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ =>

=> $H(f) = \langle -1;1\rangle$, f je rostoucí:



Def.: <u>Funkce arkusinus</u>, označena $f^{-1} : y = \arcsin x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $f : y = \sin x$, kde $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

V.9.1.: Funkce $f^{-1} : y = \arcsin x$ má tyto vlastnosti:

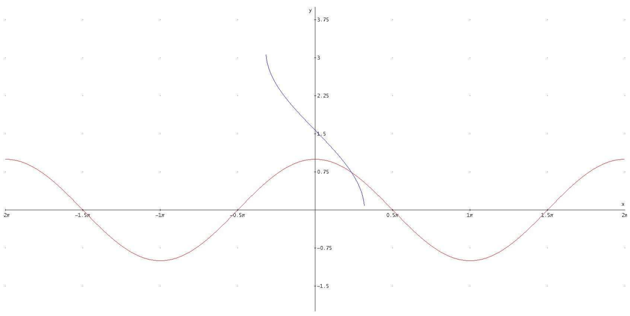
1) $D(f^{-1}) = \langle -1;1\rangle$, $H(f^{-1}) = \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

2) f^{-1} je rostoucí (v celém $D(f^{-1})$).

[Dk.: plyne z vlastností inverzní funkce.]

Pozn.: Nechť $g : y = \cos x$, $D(g) = \langle 0;\pi\rangle$ =>

=> $H(g) = \langle -1;1\rangle$, g je klesající:



Def.: <u>Funkce arkuskosinus</u>, označená $g^{-1} : y = \arccos x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $g : y = \cos x$, kde $D(g) = \langle 0;\pi\rangle$.

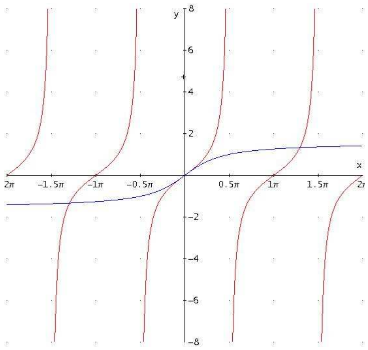
V.9.2.: Funkce $g^{-1} : y = \arccos x$ má tyto vlastnosti:

1) $D(g^{-1}) = \langle -1;1\rangle$, $H(g^{-1}) = \langle 0;\pi\rangle$.

2) g^{-1} je klesající.

Pozn.: Nechť $h : y = \mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{D}(h) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ =>

=> $\mathrm{H}(h) = \mathbf{R}$, h je rostoucí:



Def. : <u>Funkce arkustangens</u>, označena $h^{-1} : y = \mathrm{arctg}\, x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $h : y = \mathrm{tg}\, x$, kde $\mathrm{D}(h) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

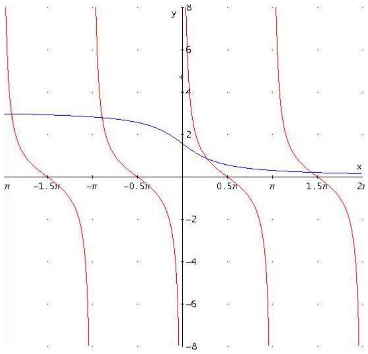
V.9.3.: Funkce $h^{-1} : y = \mathrm{arctg}\, x$ má tyto vlastnosti:

1) $\mathrm{D}(h^{-1}) = \mathbf{R}$, $\mathrm{H}(h^{-1}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

2) h^{-1} je rostoucí .

Pozn.: Nechť $k : y = \mathrm{cotg}\, x$, $\mathrm{D}(k) = \langle 0; \pi \rangle$ =>

=> $\mathrm{H}(k) = \mathbf{R}$, k je klesající:



Def.: <u>Funkce arkuskotangens</u>, označena $k^{-1} : y = \mathrm{arccotg}\, x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $k : y = \mathrm{tg}\, x$, kde $\mathrm{D}(k) = \langle 0; \pi \rangle$.

V.9.4.: Funkce $k^{-1} : y = \mathrm{arccotg}\, x$ má tyto vlastnosti:

1) $\mathrm{D}(k^{-1}) = \mathbf{R}$, $\mathrm{H}(k^{-1}) = \langle 0; \pi \rangle$.

2) k^{-1} je klesající .

V.9.5.: Platí: 1) $u = \arcsin v \iff v = \sin u$, $v \in \langle -1; 1 \rangle$, $u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

2) $u = \arccos v \iff v = \cos u$, $v \in \langle -1; 1 \rangle$, $u \in \langle 0; \pi \rangle$.

3) $u = \mathrm{arctg}\, v \iff v = \mathrm{tg}\, u$, $v \in \mathbf{R}$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

4) $u = \mathrm{arccotg}\, v \iff v = \mathrm{cotg}\, u$, $v \in \mathbf{R}$, $u \in (0; \pi)$.

[Dk.: Tvrzení zřejmé.]

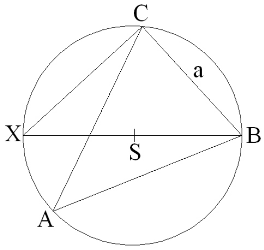
§10. Trigonometrické vztahy v trojúhelníku

Pozn.: Zavedení goniometrických funkcí v trojúhelníku jsme si uvedli v §5.

V.10.1.:Sinová věta: V každém trojúhelníku *ABC* platí:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kde R je poloměr kružnice opsané trojúhelníku *ABC*.

[Dk.: $\alpha < 90°$

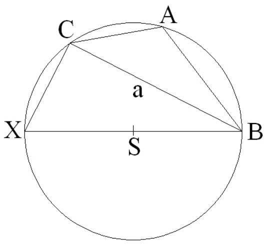


$\alpha = |BAC| = |BXC| = \delta$, neboť se jedná o dva obvodové úhly příslušné oblouku *BC*

$\sin\alpha = \sin\delta = \frac{a}{2R}$

analogicky pro $\sin\beta$ a $\sin\gamma$

$\alpha > 90°$



Čtyřúhelník *ABXC* je tětivový => $|BXC| = (180° - \alpha)$

$\sin(180° - \alpha) = \sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$

analogicky pro $\sin\beta$ a $\sin\gamma$]

Pozn.: a) Sinová věta se používá ve vztahu $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.

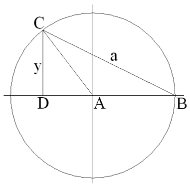
b) Sinová věta se užívá pro výpočet ostatních prvků podle usu a sus (Ssu).

c) Ze vztahu $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ dostaneme zbylé dva pomocí cyklické záměny.

V.10.2.:Kosinová věta: V každém trojúhelníku *ABC* platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

[Dk.: Zvolme souřadnou soustavu souřadnic.



$A[0;0]$

$B[c;0]$

$C[-x;y] = [b\cos\alpha ; b\sin\alpha]$

DBC: $a^2 = y^2 + (c-x)^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2$
$- 2ab\cos\alpha + b^2\cos\alpha = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Ostatní cyklickou záměnou]

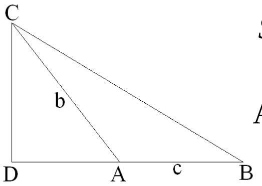
Pozn.: a) Kosinová věta se používá k výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku *ABC* podle sss, sus.

b) speciálním případem je Pythagorova věta pro $\gamma = 90°$ ($\cos\gamma = 0$).

V.10.3.:V každém trojúhelníku ABC platí:

S = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

[Dk.:



$S = \frac{1}{2}c\,v_c$

ABC: sin(180° - α) = $\frac{v_c}{b}$ => v_c = b sin(180°- α) = b sin α

V.10.4.:V každém trojúhelníku ABC platí:

$\frac{abc}{4R} = S$, kde R je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

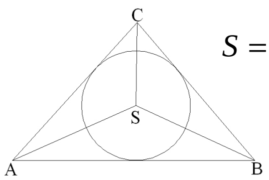
[Dk.: $\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \\ \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$

Pozn.: Nechť o je obvod trojúhelníku ABC pak označme $\frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2} = s$

V.10.5.:V každém trojúhelníku ABC platí:

$S = \rho.s$, kde ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

[Dk.



$$S = S_{ABS} + S_{ACS} + S_{BCS} = \frac{1}{2}c\rho + \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho = \frac{1}{2}\rho(a+b+c) = s\rho$$

V.10.6.:V každém trojúhelníku ABC platí:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

V.10.7.:Heronův vzorec: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Př.: Nalezněte vztah mezi ρ a R v trojúhelníku ABC.

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{abc}{4R} \\ S = \rho.s \end{array}\right\} \quad \frac{abc}{4R} = s\rho \Rightarrow \rho = \frac{abc}{4Rs}, R = \frac{abc}{4\rho s}$$