§1. Limity elemantárnich funkcí

V.1.1.: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Pak platí:

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
4. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |f(x)|$

Př:

1. $\lim_{x\to 1} \left(\ln x + x^2 + 3\right) = 4$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3+x^2-2x+11}{x^2+x+1} = 11$
3. $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{x} = -\frac{1}{\pi}$
4. $\lim_{x\to \pi/2} \sqrt{x\cos x + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+2^x \sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cos x} = 1$
6. $\lim_{x\to \pi/4} x\tan x = \frac{\pi}{4}$

Př:

1. $\lim_{x\to +\infty}(e^x + x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to -\infty}(e^x + x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{arctg}x = +\infty$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$
5. $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$

Př:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Př: „cvičení 182/1“

Daná strana evidentně neexistuje v daném souboru.

A) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

V.1.2.: Nechť f, g jsou funkce a nechť existuje $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť existuje $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Př:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

Kromě $x\neq -1$:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

. Tedy

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}x-1=-2$$

Př:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

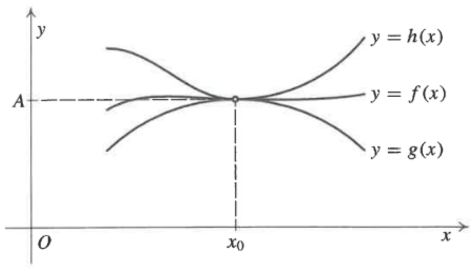
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}-(x+1)=-2$$

Př:

1. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x-3}=\frac{1}{2}$$
2. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
3. $$\lim_{x\to -\infty}x\sqrt{\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)^2}=\lim_{x\to -\infty}x\frac{(x^2+9)-(x^2-9)}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}}=$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{18x}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{18x}{|2x|}=9$$

B) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

V.1.3.: Nechť f,g,h jsou funkce a nechť existuje $P(x_0)$ bodu $x_0\in\mathbb{R}^*$, takové, že pro každé $x\in P(x_0)$ platí $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$. Nechť existuje $\lim_{x\to x_0}g(x)=h(x)=A$. Pak $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$.



C) Věta o limitě součtu „nulové“ a ohraničené funkce

V.1.4.: Nechť f, g jsou funkce a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť exsistuje $P(x_0)$, takové, že g je na tomto intervalu omezená. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Př:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Př:

$$\lim x \to 2\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim x \to 2\frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim x \to 2\frac{1}{(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x^2+11x+6}{x^3+27} = \lim_{x\to -3} \frac{3x-2}{1x^2-3x+9} = \frac{-11}{27}$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\mathrm{tg}x}{\sin 2x} = \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{2\sin x\cos x\cos x} = \lim_{x\to \pi} \frac{1}{2\cos x\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x+\sin x}$$

Př: 178/56:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x+1}{\sin x} = 1\cdot\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x+1}{\sin x} = 1\cdot\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

Př: 182/2:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-1)(x+2)}{2(x-3)(x+2)} = \frac{3(-3)}{2(-5)} = \frac{9}{10}$$

Př: 182/3:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(x+1)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{6\cdot 4} = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)} = 0$$

Př: 182/4:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^5-2x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2x^2+2}{5x^3+2x-1} = \frac{2}{5}$$

Př:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2-2x^2}}$$

Výraz není definovaný, protože $x^3 - 2x^2 < 0$.

Př: 182/6:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(4x-\pi)}{2x} = 0$$

Př: 183/8:

$$-\infty$$

$$\pm\infty$$

$$+\infty$$

$$\pm\infty$$

D) Autotest

1. nemusí být
2. je
3. vlastní
4. nejvýše
5. $\operatorname{sgn}(x-1)$
6. x

   $\frac{1}{x^2}$
7. $$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{(x-3)(x-5)} = \frac{1}{-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3+x^2) = \lim_{x\to-\infty} ((x-1)x^2) = -\infty\cdot\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 5}{4x^3 + 5} = \frac{\pm 7}{\frac{p}{m}4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$$

8.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^3 - 27} = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

Tedy neexistuje

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{x^2} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$$