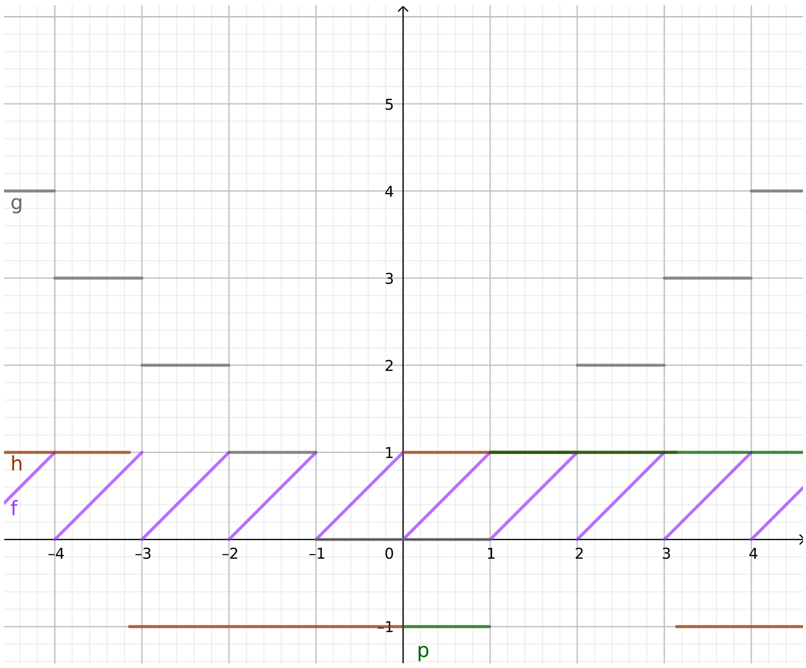
§1. Kartézkský součin, binární relace, zobrazení

Př:

V intervalu $\langle -3;3 \rangle$ nakreslete grafy funkcí: a) y = x – [x], e) y = [|x|], g) y = sgn (sin x), i) y = sgn |log x|. Určete všechny jejich základní vlastnosti (také nejmenší periodu).

	$y = x - [x]$	$x = [\lvert x \rvert]$	$y = \operatorname{sgn}(\sin x)$	$y = \operatorname{sgn}(\log x)$
Definiční obor	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Obor hodnot	$\langle 0; 1)$	$\mathbb{N}_0$	$\{0; \pm 1\}$	$\{0; \pm 1\}$
Monotonost	neklesajíci	ne	ne	neklesající
Omezenost	ano	zdola	ano	ano
Minima	0	0 pro $(-1; 1)$	-1	-1 pro $(0, 1)$
Maxima	1	ne	1	1 pro $(1, \infty)$
Perioda	1	ne	2π	ne



Př:

$$^{*}227.\ \frac{r+2}{r-2} - 1 = \frac{3r^2 + r + 9}{3(r^2 - 4)} - \frac{r-2}{r+2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{r+2-r+2}{r-2} &= \frac{3r^2+r+9-3(r-2)^2}{3(r^2-4)^2} \\
\frac{4}{r-2} &= \frac{3r^2+r+9-3r^2-12r+12}{3(r^2-4)^2} \\
0 &= \frac{3r^2+r+9-3r^2-12r+12-12r-12}{3(r^2-4)^2} \\
0 &= \frac{9-23r}{3(r^2-4)^2} \\
r = \frac{9}{23} &
\end{aligned}$$

Př:

***242.** $\frac{96}{x^2-16} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}} - \frac{3-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-1} - 5\,.$

$$\begin{aligned}
\frac{-96}{(x-4)(x+4)} &= \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+4}{x}} - \frac{\frac{3x-1}{x}}{\frac{4-x}{x}} - 5 \\
\frac{-96}{(x-4)(x+4)} &= \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} - 5 \\
\frac{-96}{x^2-16} &= \frac{8x-4-2x^2+x}{x^2-16} - \frac{3x^2-x+12x-4}{x^2-16} - \frac{5x^2-80}{x^2-16} \\
0 &= \frac{-10x^2-2x+16}{x^2-16} \\
x &= \frac{1\pm\sqrt{161}}{10}
\end{aligned}$$

Př:

***248. Nádrž se naplní otvorem A za 15 minut. Otvorem B může voda odtékat. Otevřeme-li oba otvory současně, vyprázdní se plná nádrž za 1 hodinu. Za kolik minut by se vyprázdnila plná nádrž otvorem B? (Otvor A uzavřeme.)**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{15}-\frac{1}{x} &= \frac{1}{60} \\
\frac{1}{15}-\frac{1}{60} &= \frac{1}{x} \\
\frac{3}{60} &= \frac{1}{x} \\
20 &= x
\end{aligned}$$

Př:

***e)** $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2\,.$

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{x^2+5x+1} &= -3x^2 - 15x + 2 \\
4x^2 + 20x + 4 &= 9x^4 + 90x^3 + 213x^2 - 60x + 4 \\
4x^2 + 20x + 4 &= 9x^4 + 90x^3 + 213x^2 - 60x + 4 \\
0 &= 9x^4 + 90x^3 + 209x^2 - 80x \\
0 &= x(x+5)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{16}{3}\right) \\
0 &= x(x+5)
\end{aligned}
$$

Zkouška evidentně u všech hodnot vyhoví.

Př:

***e)** $\sqrt{25x^2 - 28x - 8} = 5x - 4\,.$

$$
\begin{aligned}
25x^2 - 28x - 8 &= 25x^2 - 40x + 16 \\
12x - 8 &= 24 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Zkouška evidentně vyhoví ($6 = 6$).

Př:

$$
\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 2
$$

Když $x > 1$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + 1 &> 2\sqrt{x} - 2 \\
3 &> \sqrt{x} \\
9 &> x
\end{aligned}
$$

Když $x < 1$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + 1 &> -2\sqrt{x} + 2 \\
3\sqrt{x} &> 1 \\
x &> \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

$$
x \in \left(-\frac{1}{9}; 9\right) - \{1\}
$$