§1. Polynomy, kořeny polynomů

*6. Rozložte v reálném a komplexním oboru: a) $x^4 + 4$ (b) $x^6 + 8$)

1.

$$\left(x^2\right)^2 + 2^2 = (2 - ix^2)(2 + ix^2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (1-i)(1+i)(-1+i)(-1-i)$$

2.

$$\left(x^2\right)^3 + 2^3 = (x^2+2)(x^4r - 2x^2 + 4) = (x^2+2)(x^2 - \sqrt{6}x + 2)(x^2 + \sqrt{6}x + 2) =$$

$$= (x - \sqrt{1 + i\sqrt{3}})(x - \sqrt{1 + -\sqrt{3}})(x - \sqrt{-1 + i\sqrt{3}})(x - \sqrt{-1 - i\sqrt{3}})(x+1-i)(x+1+i)$$

*7. Určete kořeny a číslo k∈ **R** polynomu $x^3 - 27x^2 + 242x + k$, jestliže kořeny daného polynomu jsou 3 za sebou jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Nechť kořeny jsou $a - b; a; a + b$.

$x^2 : -27 = -(a - b + a + a + b) = -3a \Rightarrow a = 9$
$x^1 : 242 = a^2 - ab + a^2 + ab + a^2 - b^2 = 3a^2 - b^2 \Rightarrow b = \pm 2$
$x^0 : k = -(a - b)a(a + b) = a(b^2 - a^2) = 9(4 - 81) = -693$

***289. Lístek na koncert stál pro dospělého *n* Kčs, pro děti 1 Kčs. Jestliže přišlo na koncert celkem 320 osob a na vstupném bylo vybráno 520 Kčs, kolik bylo na koncertu dospělých? Pro která přirozená čísla *n* má tato úloha řešení? Určete ze zkušenosti, které číslo *n* nejpravděpodobněji vyhovuje úloze?**

$$520 = 320 - x + nx$$

$$200 = x(n-1)$$

$$\frac{200}{n-1} = x$$

Musí platit $200 \mid n - 1$.

$$\text{a)}\ \frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2 - a^2}\ ;$$

$$\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{a^2 - a^2}$$

$$\frac{x^2 + ax - 2ax + 2a^2 - 8a^2}{x^2 - a^2} = 0$$

$$\frac{-6a^2 - ax + x^2}{x^2 - a^2} = 0$$

$$\frac{-6a^2 - ax + x^2}{x^2 - a^2} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x}{a} + \frac{1}{ax - bx} + \frac{b}{a^2x - abx} = \frac{2}{a - b};$$

$$\frac{x(ax - bx) + a + b - 2ax}{a(a - b)x} = 0$$

$$\frac{ax^2 - 2ax + a - bx^2 + b}{ax(a - b)} = 0$$

$a = b$	NDEF
$a = 0$	NDEF
JINAK	$\left\{ \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a-b)(a+b)}}{2(a-b)} \right\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y + z &= 3, \\ x + p(y + z) &= 5, \\ y - z &= 0; \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & p & p & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & p-1 & p-1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Nemá řešení.

$$\begin{aligned} \text{c) } x + y + pz &= p, \\ x + pz &= 0, \\ y + pz &= 1; \end{aligned}$$

$$
\text{a)}\quad \begin{aligned} px + y + z &= 1, \\ x + py + z &= p, \\ x + y + pz &= p^2; \end{aligned}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r \\ 1 & & r & 0 \\ & 1 & r & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & r & 0 \\ & 1 & r & 1 \\ & & -r & r-1 \end{array}\right)$$

$r=0$: $0z=-1 \Rightarrow$ NŘEŠ

$r \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & r-1 \\ & 1 & & r \\ & & -r & r-1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x &= r-1 \\ y &= \text{[illegible]} \\ z &= \frac{1-r}{r} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & r \\ 1 & 1 & r & r^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & 1-r & 1-r^2 & 1-r^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & & 2-r^2-r & \text{[illegible]} \end{array}\right) \sim$$

$(r-1)(r+2)$

$r=1$: $0z=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ NR

$r=-2$: $0z=3 \Rightarrow$ NR

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r-1 & & r^2-\cancel{r}-1 & r^3-r^2-r-r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & & (r-1)(r+2) & 1+r-r^2-r^3 \end{array}\right) \sim$$

$$x = \frac{(r-2)(r^3-r^2-r-r) + (r+1)(1+r-r^2-r^3)}{(r-1)(r+2)(r+1)}; \quad y = \frac{(r+2)(r-r^2)+1+r-r^2-r^3}{(r-1)(r+2)}; \quad z = \frac{1+r-r^2-r^3}{(r-1)(r+2)}$$