Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14
Školní rok 2008/2009
třída 4. A

<u>ZÁVĚREČNÁ MATURITNÍ PRÁCE</u>

IX. Stereometrie

Autor: Lenka Franců

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Boucník

Brno, 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou závěrečnou maturitní práci zpracovala samostatně a že jsem použila pouze materiál uvedený v seznamu literatury.

V Brně dne: 2. 1. 2009

Lenka Franců

Obsah

IX. Stereometrie

§1. Základní pojmy

Pozn.: V kapitole o stereometrii, což je geometrie v prostoru, budeme pracovat v základní množině E_3 – množina všech bodů v prostoru = Euklidovský prostor dimenze 3.V této množině jsou dva typy podmnožin:

- přímky (*p, q,* $\leftrightarrow AB$), množinu všech přímek označíme *P*
- roviny (*α, β,* $\leftrightarrow ABC$)

Def.: Body, které leží na jedné přímce, nazýváme kolineární. Body, respektive přímky, které leží v jedné rovině, nazýváme komplanární.

Tři základní axiomy stereometrie

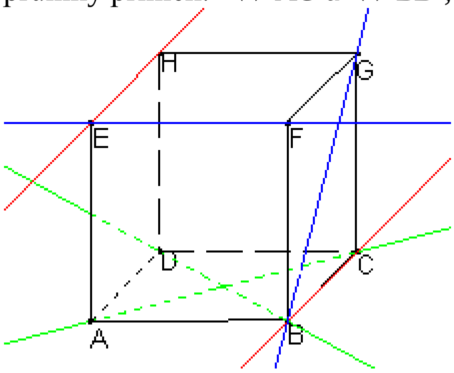
A$_1$: Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
$\forall A, B \in E_3, A \neq B : \exists! p \in P : A \in p \wedge B \in p$

A$_2$: Každá rovina je jednoznačně určena:
a) 3 nekolineárními body
b) přímkou a bodem, který na ni neleží
c) 2 různými rovnoběžnými přímkami
d) 2 různoběžnými přímkami

A$_3$: Jestliže 2 různé body dané přímky leží v dané rovině, pak i celá tato přímka leží v této rovině.
$\forall p \in P, \forall \rho \subseteq E_3, \exists A, B \in p, A \neq B : A \in \rho \wedge B \in \rho \Rightarrow p \subseteq \rho$

§2. Dvě přímky v prostoru

Př. Je dána krychle ABCDEFGH, zobrazte ji ve volném rovnoběžném promítání a určete průniky přímek: $\leftrightarrow AC$ a $\leftrightarrow BD$, $\leftrightarrow EH$ a $\leftrightarrow BC$, $\leftrightarrow EF$ a $\leftrightarrow BG$



Řešení:
$\leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD = \{S\}$ - jedná se o různoběžky
$\leftrightarrow EH \cap \leftrightarrow BC = \phi$ - jedná se o různé rovnoběžky
$\leftrightarrow EF \cap \leftrightarrow BG = \phi$ - jedná se o mimoběžky

Pozn.: Pokud mají přímky dva společné různé body, pak podle A_3 mají všechny body společné – splývají.

Def.: Nechť $p,q \in P$ jsou dvě přímky. Jestliže platí:

a) $p \cap q = \phi \wedge p,q$ jsou komplanární $\Rightarrow$ různé rovnoběžky

b) $p \cap q = \phi \wedge p,q$ jsou nekomplanární $\Rightarrow$ mimoběžky

c) $p \cap q = \{P\} \Rightarrow$ různoběžky a P je průsečík

d) $p \cap q = p \Rightarrow$ splývající (totožné) rovnoběžky

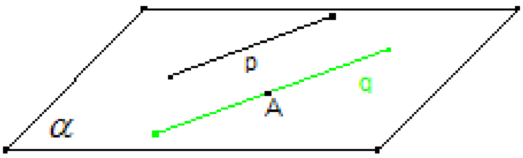
A₄: Axiom rovnoběžnosti
Každým bodem v E_2 lze vést ke každé přímce právě jednu rovnoběžku.

V.2.1.: $\forall A \in E_3; \forall p \in P; p \subseteq E_3 : \exists! q \in P, q \subseteq E_3 : A \in q \wedge p \parallel q$.

[Dk.: Pokud $A \in p \Rightarrow p = q$.

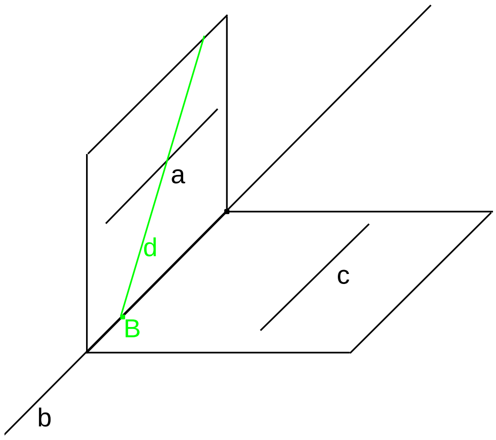
Nechť $A \notin p \overset{A_2}{\Rightarrow} \exists \alpha \subseteq E_3 : A \in \alpha \wedge p \subseteq \alpha$.

V rovině α vedeme bodem *A* rovnoběžku *q* s přímkou *p* (podle A_4). Ukažme, že je právě 1:



Nechť $q_2 \parallel p \wedge A \in q_2 \Rightarrow \exists \beta \subseteq E_3$ určená přímkami p a q_2 $\Rightarrow A \in \beta \Rightarrow \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow q = q_2 \Rightarrow q$ je jediná přímka s danou vlastností.]

V.2.2.: Tranzitivnost rovnoběžnosti přímek
$\forall a,b,c \subseteq E_3, a,b,c \in P : a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$



[Dk.: Existuje-li rovina α tak, že $a \subseteq \alpha \wedge b \subseteq \alpha \wedge c \subseteq \alpha$, plyne tvrzení z planimetrie. V opačném případě označme β (respektive γ) rovinu určenou rovnoběžkami *a,b* (resp. *b,c*). Nechť $A \in a$ je lib. bod. Pak podle A_2 je přímkou *c* a bodem *A* určena rovina δ. Označme $\beta \cap \delta = d$.
Ukažme,že $d \parallel b$:
Sporem: Nechť $d \cap b = \{B\}$.
$B \in \delta \wedge B \in \gamma \Rightarrow B \in \delta \cap \gamma = c \Rightarrow b \cap c \neq \phi$ - spor!
$\Rightarrow d \parallel b \Rightarrow d = a$. (V.2.1.)
Platí: přímky *a.c* leží v 1 rovině(δ) a $a \cap c = \phi \Rightarrow a \parallel c$.]

Důsledek V.2.1: Všechny přímky rovnoběžné s danou přímou jsou navzájem rovnoběžné a vytvářejí tzv. směr.

§3. Dvě roviny

Axiom průniku 2 rovin:

A_5: Nechť α, β jsou takové dvě různé roviny, že $\alpha \cap \beta \neq \phi$, pak jejich průnikem je přímka.

Pozn.: Klasifikaci vzájemné polohy 2 rovin provedeme podle jejich průniku:

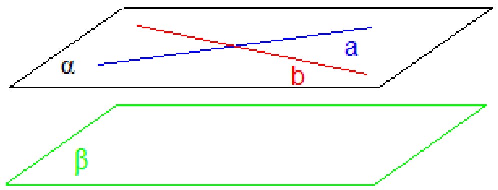
a) $\alpha = \beta$

b) $\alpha \neq \beta$, pak i) $\alpha \cap \beta = \phi$

ii) $\alpha \cap \beta \neq \phi \Rightarrow \exists p \subseteq E_3 : \alpha \cap \beta = p$

Def.: Nechť α, β jsou dvě roviny. Jestliže platí:
a) $\alpha = \beta$, pak se jedná o rovnoběžné splývající roviny
b) $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = \phi$, pak se jedná o rovnoběžné různé roviny
c) $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = p$, pak se jedná o různoběžné roviny a přímka p je jejich průsečnicí.

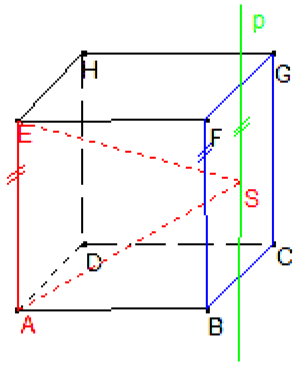
V.3.1: Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin
Nechť α, β jsou 2 roviny. Jestliže rovina α obsahuje 2 různoběžky *a*, *b* takové, že $a \cap \beta = \phi \wedge b \cap \beta = \phi$, pak $\alpha \parallel \beta$.



[Dk.: Je-li $\alpha = \beta$, předpoklad tvrzení neplatí $\Rightarrow$ implikace platí triviálně.
Nechť $\alpha \neq \beta$, nechť $a \subseteq \alpha, b \subseteq \alpha, a \cap b = \{A\}$.
Dále sporem: Nechť $a \nparallel b \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \phi \Rightarrow \exists c = \alpha \cap \beta$.
Protože *a*, *b* jsou různoběžky $\Rightarrow$ alespoň 1 z těchto přímek protíná přímku *c*, nechť je to např. přímka *a* $\Rightarrow a \cap c = \{B\}$. Pak platí: $c \subseteq \beta \Rightarrow$ průsečík $B \in \beta \Rightarrow a \cap \beta \neq \phi \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \phi$-spor!]

V.3.2: Každým bodem lze ke každé rovině vést právě jednu rovnoběžnou rovinu.
$\forall A \in E_3, \forall \alpha \subseteq E_3 : \exists! \beta \subseteq E_3 : A \in \beta \wedge \alpha \parallel \beta$.

Př.: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte průsečnici *p* roviny $\leftrightarrow AES$ s rovinou $\leftrightarrow BCG$, kde *S* je střed čtverce *BCGF*.



Řešení:
$p \subseteq \leftrightarrow AES \wedge p \subseteq \leftrightarrow BCG \Rightarrow p \parallel \leftrightarrow AE \wedge S \in p$

§4. Přímka a rovina

Pozn.: Klasifikaci vzájemné polohy přímky a roviny provedeme podle jejich společného průniku:
a) prázdná množina
b) jednoprvková množina
c) aspoň dva prvky, pak je průnikem celá přímka.

Def.: Nechť $a \subseteq E_3$, $\alpha \subseteq E_3$. Jestliže platí:
a) $a \cap \alpha = \phi \Rightarrow$ Přímka a je s rovinou α rovnoběžná.
b) $a \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow$ Přímka a je s rovinou α různoběžná, bod *P* je jejich průsečík.
c) $a \cap \alpha = a \Rightarrow$ Přímka a leží v rovině α ,($a \subseteq \alpha$).

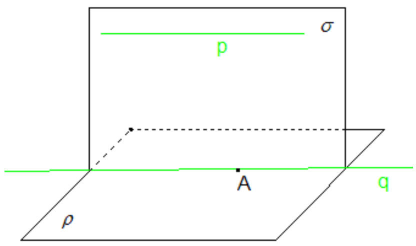
Pozn.: Je-li $a \subseteq \alpha$, pokládáme přímku a též za rovnoběžnou s rovinou α.

V.4.1.: <u>Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:</u>

Pro $\forall p \in P$ a $\forall \rho \subseteq E_3$ platí: $p \parallel \rho \Leftrightarrow \exists q \subseteq \rho : p \parallel$ q.

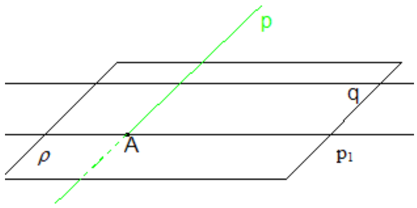
[Dk.: Nechť $p \subseteq \rho$: hledaná přímka q je $p = q$ a tvrzení platí.

Nechť $p \not\subset \rho$:



1. „$\Rightarrow$“:$p \parallel \rho \Rightarrow p \cap \rho = \phi$. Nechť $A \in \rho$ je lib. bod. Pak bodem A a přímkou p je určena rovina σ. Přitom $A \in \rho \cap \sigma$, označme $\rho \cap \sigma = q$.
Pak platí: přímka p a přímka q musí být komplanární (obě leží v rovině σ) a zároveň $p \cap \rho = \phi \Rightarrow p \cap q = \phi$. Pak $p \parallel q$.

2. „$\Leftarrow$“ sporem:
$\exists q \subseteq \rho : p \parallel q \wedge p \nparallel \rho \Rightarrow \exists A \in E_3 : A \in p \cap \rho$.
A4 $\Rightarrow \exists! \, p_1 : A \in p_1 \wedge p_1 \parallel q$. Protože $p \parallel q \Rightarrow p_1 \parallel p$ (z V.2.2.) – spor! neboť p_1, p mají společný bod.]

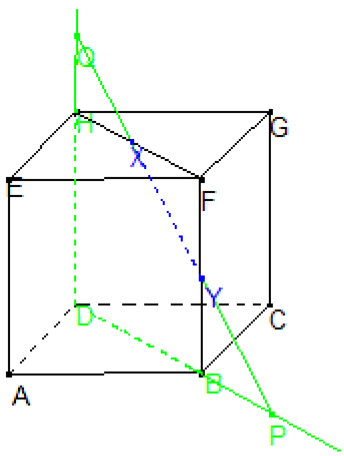


V.4.2.: Nechť $\forall p \in P, \forall \rho \subseteq E_3 : p \parallel \rho \Rightarrow \forall \sigma \subseteq E_3 : p \subseteq \sigma \wedge \sigma \nparallel \rho$: Pak rovina σ protne rovinu ρ v průsečnici q, $q = \rho \cap \sigma$ a platí: že $p \parallel q$.

[Dk.: a) $p \subseteq \rho : p = q$ - tvrzení platí.

b) $p \not\subset \rho : p \cap \rho = \phi$. Nechť σ je taková rovina, že $p \subseteq \sigma \wedge \rho \nparallel \sigma \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho \cap \sigma = q$. Ukážeme, že $q \parallel p$:
Sporem: Nechť p $\nparallel$ q $\Rightarrow q \cap p = \{A\} \Rightarrow A \in q \wedge A \in p$. Platí
$q \subseteq \rho \Rightarrow A \in \rho \Rightarrow p \cap \rho \neq \phi$ – spor!]

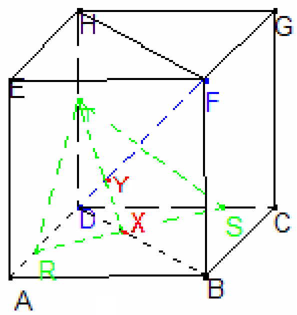
Př.: Sestrojte průnik přímky $\leftrightarrow PQ$ a krychle $ABCDEFGH$, kde $P \in \leftrightarrow DB$ za bodem B, $Q \in \leftrightarrow DH$ za bodem H.



Řešení: $\leftrightarrow PQ \subseteq \leftrightarrow DBF \Rightarrow X \in HF, Y \in BF$

Pozn.: Obecný postup při stanovení průniku přímky p a oviny ρ:

1) Přímkou p proložíme libovolnou rovinu $\sigma, \sigma \nparallel \rho$.
2) Sestrojíme průsečnici q rovin ρ a σ.
3) Průsečíkem $p \cap \rho$ je průsečík p a q (pokud existuje).
Pokud $\sigma \cap \rho = \phi \vee p \cap q = \phi \Rightarrow p \parallel \rho$, $(p \cap \rho = \phi)$.



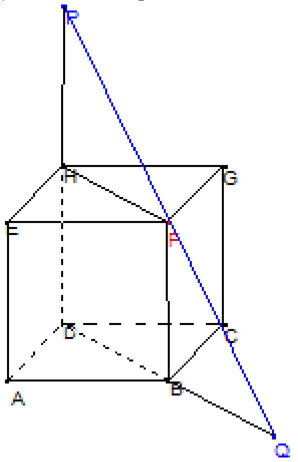
Př.!: Je dána krychle *ABCDEFGH*, na jejích hranách body *R,S,T* (podle obr.). Určete $\leftrightarrow FD \cap \leftrightarrow RST$.
Řešení:
1) $\leftrightarrow FD \subseteq \leftrightarrow FDB$
2) $q; q = \leftrightarrow TX, X \in \leftrightarrow RS \cap \leftrightarrow DB; T, X \in \leftrightarrow RST \cap \leftrightarrow FDB$
3) $q \cap \leftrightarrow FD = \{Y\}$

Př.: Sestrojte průnik přímky $\leftrightarrow PQ$ a krychle *ABCDEFHG*.

a) $H =$ střed úsečky *DP*,
$B =$ střed úsečky *DQ*

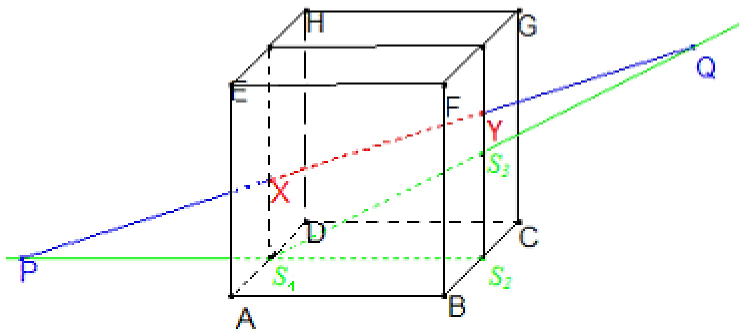
b) $P \in \rightarrow S_2S_1, Q \in \rightarrow S_1S_3$,
kde S_1, S_2, S_3 jsou po řadě středy úseček *AD, BC a BG.*

a) Řešením je bod



F.

b) Řešením je úsečka *XY.*

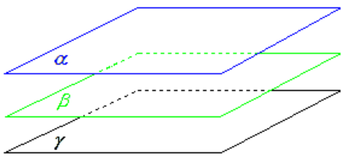


<u>§5. Tři různé roviny</u>

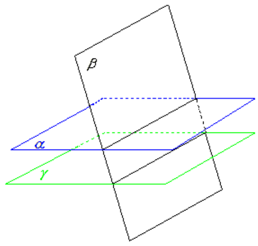
V.5.1: Tranzitivnost rovnoběžnosti rovin:
$\forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3 : \alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.
[Dk.: Analogicky jako ve V.2.2.]

V.5.2: <u>Vzájemná poloha 3 různých rovin:</u>
Nechť $\forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3$ jsou navzájem tři různé roviny, pak jejich vzájemná poloha v prostoru je jedním z následujících 5 typů:
1) $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ - všechny tři roviny jsou navzájem rovnoběžné
2) Některé dvě roviny (např. α, β) jsou různoběžné, označme $\alpha \cap \beta =$ přímka *a*, pak nastane některý z těchto 3 případů:
a) $a \cap \gamma = \phi \Rightarrow I.: \alpha \parallel \gamma$ - dvě rovnoběžné roviny protínají třetí (přitom obě průsečnice jsou rovnoběžné).
$\Rightarrow II.: \alpha \nparallel \gamma$ – všechny tři průsečnice dvojic těchto rovin jsou navzájem rovnoběžné.
b) $a \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$ - všechny tři roviny tvoří tzv. <u>trs</u>.
c) $a \cap \gamma = a \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = a$ - všechny tři roviny se protínají v přímce *a*.

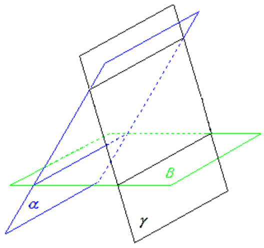
1)



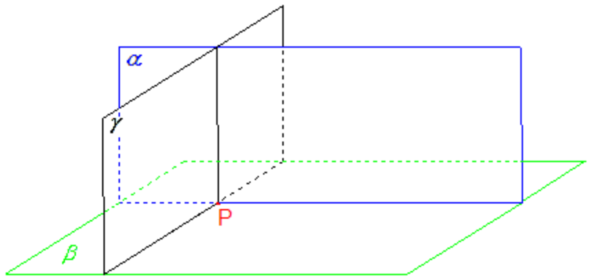
2) a) *I.*



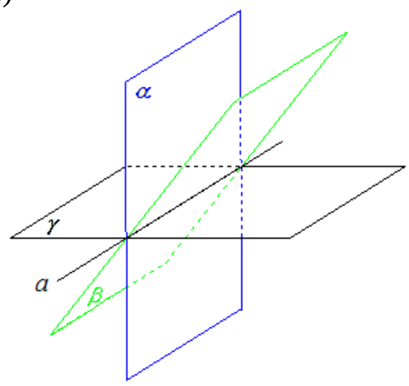
2) a) *II.*



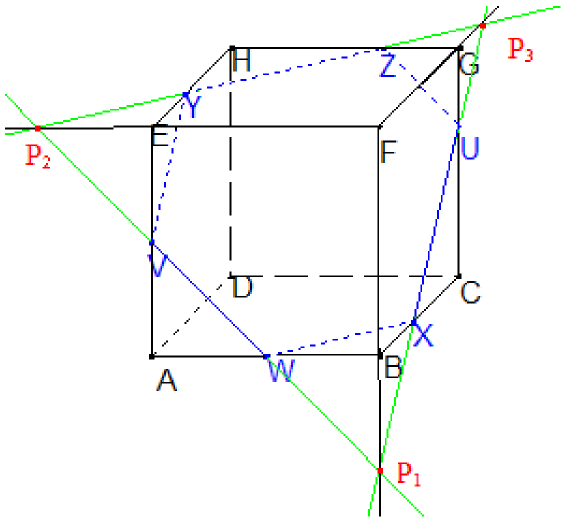
2) b)



2) c)



Př.: Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\rho = \leftrightarrow VWU$, kde V = střed úsečky *AE*, *W* je střed úsečky *AB*. *U* je bodem hrany *CG* tak, že platí: */CU/:/UG/ = 2:1*.



Řešení:

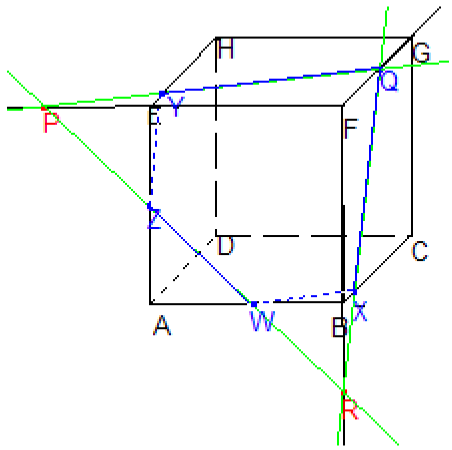
1) $P_1 = \leftrightarrow VW \cap \leftrightarrow BF$
2) $P_2 = \leftrightarrow VW \cap \leftrightarrow EF$
3) $P_3 = \leftrightarrow FG \cap \leftrightarrow P_1U$
4) $X = \leftrightarrow P_1P_3 \cap \leftrightarrow BC$
5) $Y = \leftrightarrow P_2P_3 \cap \leftrightarrow EH$
6) $Z = \leftrightarrow P_2P_3 \cap \leftrightarrow GH$
7) řezem je šestiúhelník *VWXUZY*

Př.: Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\leftrightarrow PQR$. Body Q, P, R umístěte podle obrázku:

$Q \in \leftrightarrow FG, P \in \leftrightarrow EF, R \in \leftrightarrow FB$

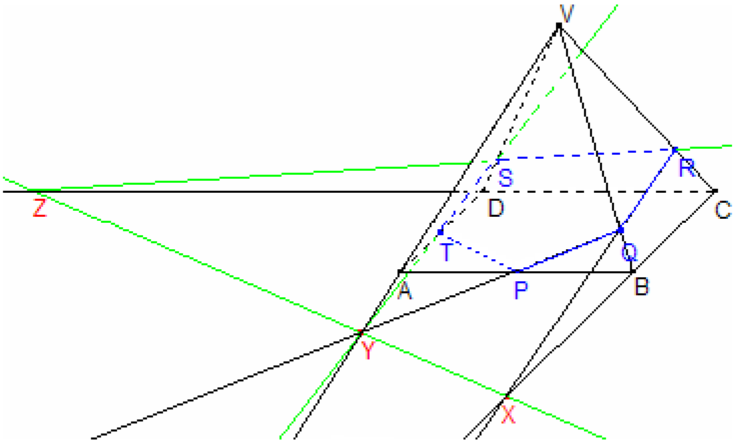
Řešení: $W \in \leftrightarrow PR \cap \leftrightarrow AB$
$X \in \leftrightarrow RQ \cap \leftrightarrow BC$
$Y \in \leftrightarrow PQ \cap \leftrightarrow EH$
$Z \in \leftrightarrow PR \cap \leftrightarrow AE$

Řezem je pětiúhelník *WXQYZ*.



Př.: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou $\rho = \leftrightarrow PQR$, kde
P je střed úsečky *AB*.
$Q \in BV : /BQ/ : /QV/ = 1:5$
$R \in CV : /CR/ : /RV/ = 1:3$

Řešení: $X \in \leftrightarrow QR \cap \leftrightarrow BC$
$Y \in \leftrightarrow AV \cap \leftrightarrow PQ$
$Z \in \leftrightarrow XY \cap \leftrightarrow CD$
$S \in \leftrightarrow RZ \cap \leftrightarrow DV$
$T \in \leftrightarrow YS \cap \leftrightarrow AD$
Řezem je pětiúhelník *PQRST*.



§6. Kolmost přímek v rovině a v prostoru

Pozn.: Dvě přímky v rovině nazveme kolmými právě tehdy, když všechny 4 úhly, které svírají, jsou shodné, a tedy pravé.

Def.: Přímky $p, q \subseteq E_3$ se nazývají navzájem kolmé $(p \perp q)$, právě když: $\exists p', q' \subseteq E_3$:
1) $p' \| p \wedge q' \| q$
2) p', q' leží v jedné rovině
3) $p' \perp q'$ (ve smyslu předchozí poznámky)

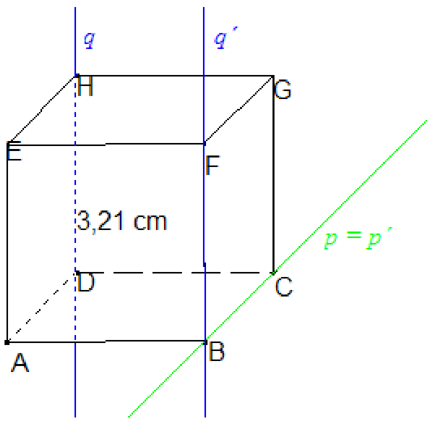
Pozn.: Uvedená definice je i kritériem kolmosti přímek v prostoru, ale není vhodná k dokazování toho, že přímky *p,q* na sebe kolmé nejsou.

V.6.1: Nechť $p, q \subseteq E_3, p \perp q$.
Pak $\forall p', q' \subseteq E_3 : p' \parallel p, q' \parallel q \Rightarrow p' \perp q'$

Pozn.: Máme-li dokázat, že přímky *p, q* kolmé nejsou, použijeme negaci V.6.1.
Stačí nalézt 1dvojici přímek p', q':
$\exists p', q' \subseteq E_3$: 1) $p' \| p \wedge q' \| q$
2) p', q' leží v jedné rovině
3) $p' \not\perp q'$

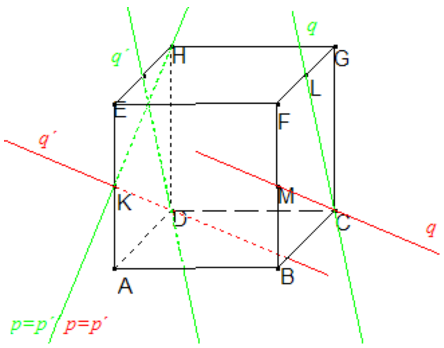
Př.: Je dána krychle *ABCDEFGH*, bod *K* je střed úsečky *AE*, bod *L* je střed úsečky *FG* a bod *M* je střed úsečky *BF*. Rozhodněte, zda následující dvojice přímek jsou kolmé.

a) $\leftrightarrow DH$ a $\leftrightarrow BC$
Řešení: (obr.)
$q = \leftrightarrow DH, q' = FB, p = \leftrightarrow BC$
$\Rightarrow p \perp q' \Rightarrow p \perp q \Rightarrow \leftrightarrow DH \perp \leftrightarrow BC$

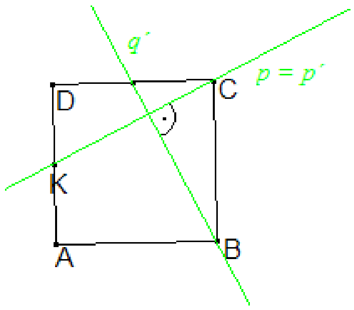


b) $\leftrightarrow CL$ a $\leftrightarrow KH$
c) $\leftrightarrow BK$ a $\leftrightarrow KH$

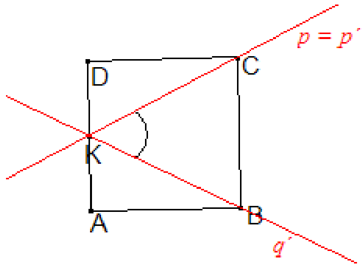
Řešení:



b) $p \perp q' \Rightarrow p \perp q \Rightarrow$
$\leftrightarrow CL \perp \leftrightarrow KH$



c) $p \perp q' \Rightarrow p \perp q \Rightarrow$
$\leftrightarrow BM \not\perp \leftrightarrow KH$



§7. Kolmost přímky a roviny

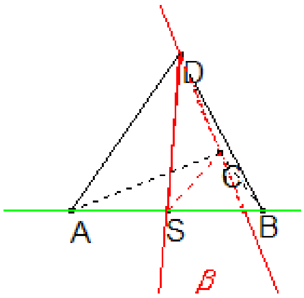
Def.: Nechť $p \subseteq E_3$ je přímka a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Řekneme,že přímka p je kolmá k rovině $\alpha \Leftrightarrow \forall q \subseteq \alpha : q \perp p$.

Pozn.: Předchozí definice je pro dokazování kolmosti neefektivní, použijeme V.7.1.

V.7.1.: Kritérium kolmosti přímky a roviny:
Nechť $p \subseteq E_3$ je přímka a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak platí:
$p \perp \alpha \Leftrightarrow \exists q, r \subseteq \alpha : q \nparallel r : q \perp p \wedge r \perp p$

Př.: Nechť je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Dokažte, že $\leftrightarrow AB$ je kolmá na $\leftrightarrow CD$.

Řešení:
Jednou přímkou proložíme rovinu a dokážeme, že tato rovina je kolmá k druhé přímce.
Přímkou $\leftrightarrow CD$ proložíme rovinu β, $\beta = \leftrightarrow SCD$.
Přímky $\leftrightarrow CS$ a $\leftrightarrow DS$ jsou kolmé na přímku $\leftrightarrow AB$ (výšky v jednotlivých trojúhelnících) $\leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow SCD \Rightarrow \leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$.

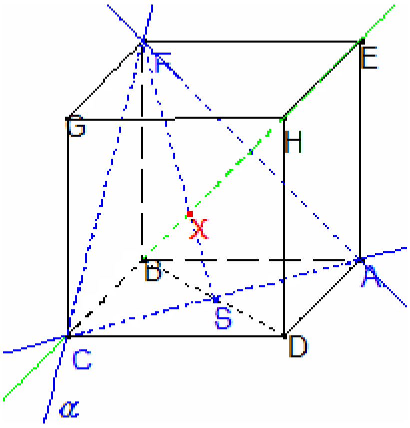


Pozn.: K důkazu toho, že přímka není kolmá k rovině, používáme obměnu definice.

V.7.2: $\forall p, q \subseteq E_3, \forall \alpha, \beta \subseteq E_3, p \perp \alpha$: a) $q \parallel p \Leftrightarrow q \perp \alpha$
b) $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow p \perp \beta$

V.7.3: Každým bodem lze vést právě 1 přímku, která je kolmá k dané rovině.
Daným bodem prochází právě jedna rovina kolmá k dané přímce.

Př.: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Dokažte: $\leftrightarrow BH \perp\leftrightarrow AF$ a najděte rovinu α : $\alpha \perp\leftrightarrow BH \wedge \leftrightarrow AF \subseteq \alpha$.



Řešení:
$\leftrightarrow BH \perp\leftrightarrow AF$, protože
$\leftrightarrow BH \perp\leftrightarrow ACF = \alpha \wedge \leftrightarrow AF \subseteq \alpha$.
Jehlan *ACFH* je pravidelný čtyřstěn (všechny jeho délky stran jsou stejně dlouhé), pak *HX* je výška z vrcholu *H* na podstavu $ACF \Rightarrow \leftrightarrow HX \perp\leftrightarrow ACF$.

§8. Kolmost rovin

Def.: Řekneme, že <u>rovina</u> α je <u>kolmá k rovině</u> β ($\alpha \perp \beta$), jestliže $\exists a \subseteq \alpha : a \perp \beta$.

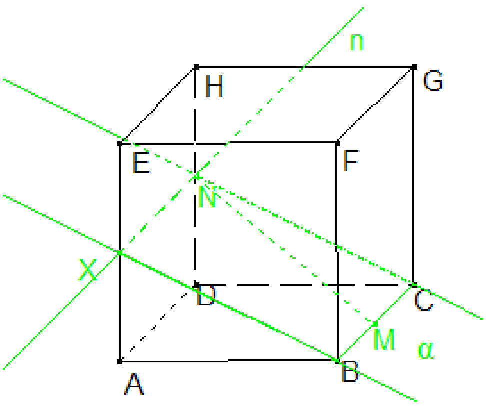
Pozn.: a) Definice je současně <u>kritériem kolmosti dvou rovin</u>.
b) Kolmost rovin je symetrickou relací, proto mluvíme o vzájemné kolmosti dvou rovin.

V.8.1.: $\forall p \subseteq E_3, \forall \alpha, \beta, \gamma \subseteq E_3$ platí:
a) $p \perp \alpha \wedge p \parallel \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
b) $p \perp \alpha \wedge \alpha \perp \beta \Rightarrow p \parallel \beta$
c) $\alpha \perp \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \perp \gamma$

V.8.2.: Ke každé přímce *p*, která není kolmá k rovině α, existuje právě 1 rovina β taková, že: $\beta \perp \alpha$, $p \subseteq \beta$.

Pozn.: Průsečnice rovin z předchozí věty se nazývá <u>kolmým průmětem přímky</u> *p* <u>do roviny</u> α.

Př.: Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou α : $\alpha \perp\leftrightarrow ABF, \leftrightarrow MN \subseteq \alpha$



M je střed úsečky *BC*
N je střed úsečky *DH*

Řešení:
$n \perp\leftrightarrow ABF \wedge N \in n$
$X \in n \cap \leftrightarrow ABF$
Řezem je obdélník *XBCN*.

§9. Vzdálenost

Def.: Nechť $A, B \in E_3$. Vzdáleností dvou bodů *A, B* nazýváme délku úsečky *AB* a označujeme ji $\rho(A,B)$.

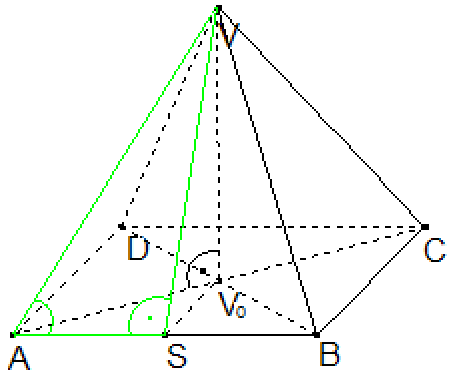
Pozn.: a) Vzdálenost bodů A, B je tedy reálné číslo $\rho(A,B) = /AB/$.
b) Vzdálenost $\rho(A,B)$ můžeme tedy považovat za zobrazení $\rho : E_3 \times E_3 \to R$, které má vlastnosti:
$\forall A,B,C \in E_3 : 1)\ \rho(A,B) \geq 0$, přičemž $\rho(A,B)=0 \Leftrightarrow A = B$
2) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$
3) $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$, přičemž
$\rho(A,B) + \rho(B,C) = \rho(A,C) \Leftrightarrow B \in AC$
c) Uvedených vlastností se používá k axiomatické definici vzdálenosti 2 bodů v E_3 (dokonce i v jiném prostoru).

Def.: Nechť $A \in E_3$ je bod a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina.
Kolmým průmětem bodu *A* do roviny α nazýváme bod A_0 definovaný takto:
1) $A \in \alpha \Rightarrow A_0 = A$
2) $A \notin \alpha \Rightarrow A_0 \in p \cap \alpha, p \perp \alpha, A \in p$
Vzdáleností bodu *A* od roviny α nazýváme reálné číslo označované $\rho(A,\alpha)$ a definované $\rho(A,\alpha) = \rho(A,A_0) = /AA_0/$, kde A_0 je kolmý průmět bodu *A* do roviny α.

Pozn.: $A \in \alpha \Rightarrow \rho(A,\alpha) = 0$

V.9.1.: Nechť $A \in E_3$ je bod, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak platí:
$\rho(A,\alpha) = \min\{\rho(A,X), lib. X \in \alpha\}$
[Dk.:
1) $A \in \alpha \Rightarrow \rho(A,\alpha) = 0$, což je minimální vzdálenost, neboť vzdálenost je nezáporná.
2) $A \notin \alpha \Rightarrow$ označme A_0 kolmý průmět bodu *A* do roviny α. Nechť $X \in \alpha, X \neq A_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$pravoúhlý trojúhelník AA_0X s přeponou *AX*
$\Rightarrow /AX/ \rangle /AA_0/ \Rightarrow \rho(A,\alpha) = \rho(A,A_0) \langle \rho(A,X)$.]

Př.: Vypočtěte vzdálenost vrcholu V od podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*, je-li $/AB/ = a, /\angle VAB/ = \frac{\pi}{3}$



Řešení:

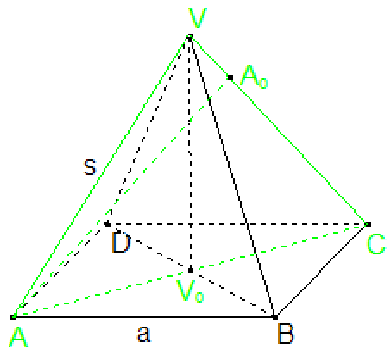
$\Delta ASV : tg\frac{\pi}{3} = \frac{/VS/}{\frac{a}{2}} \Rightarrow /VS/ = \frac{a}{2} \cdot tg\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\Delta VV_0S : \rho(V,\alpha) = /VV_0/ = \sqrt{/VS/^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

Def.: Nechť $A \in E_3$ je bod, $p \subseteq E_3$ je přímka.
<u>Kolmým průmětem bodu</u> *A* <u>na přímku</u> *p* nazýváme bod A_0 definovaný takto:
1) $A \in p \Rightarrow A = A_0$
2) $A \notin p \Rightarrow A_0 = p \cap \alpha, \alpha \perp p, A \in \alpha$.
<u>Vzdáleností bodu</u> *A* <u>od přímky</u> *p* nazýváme reálné číslo označené $\rho(A,p)$ a definované takto: $\rho(A,p) = \rho(A,A_0)$, kde A_0 je kolmým průmětem bodu *A* na přímku *p*.

Pozn.: Jestliže $A \in p \Rightarrow \rho(A,p) = 0$.

V.9.2.: Nechť $A \in E_3$ je bod, $p \subseteq E_3$ je přímka. Pak platí:
$\rho(A,p) = \min\{\rho(A,X), X \in p\}$
[Dk.: Analogicky jako V.9.1.]



Př.: Vypočtěte vzdálenost bodu *A* od přímky *VC* v pravidelném čtyřbokém jehlanu *ABCDV*, je-li */AB/=a, /AV/=s.*

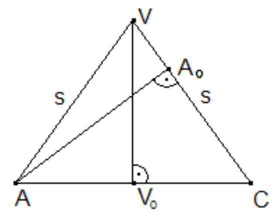
Řešení:

$$\Delta VV_0A : /VV_0/ = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$$

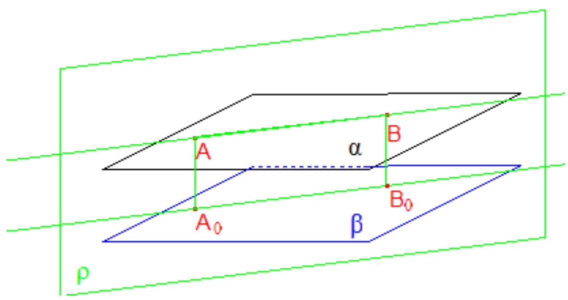
$$S_{\Delta ACV} = \frac{1}{2} \cdot /AC/ \cdot /VV_0/ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot /VC/ \cdot /AA_0/ = \frac{1}{2} \cdot s \cdot /AA_0/$$

$$a\sqrt{2} \cdot \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} = s \cdot /AA_0/$$

$$a \cdot \sqrt{2s^2 - a^2} = s \cdot /AA_0/ \Rightarrow /AA_0/ = \frac{a}{s} \cdot \sqrt{2s^2 - a^2}$$



V.9.3.: Nechť $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny.
Pak $\forall A, B \in \alpha : \rho(A,\beta) = \rho(B,\beta)$.



[Dk.: a) $\alpha = \beta \Rightarrow \rho(A,\beta) = 0 = \rho(B,\beta)$
b) $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ Nechť $A \neq B$. Sestrojme A_0, B_0 – kolmé průměty bodů *A*, *B* do roviny β. Platí:
$\leftrightarrow AA_0 \parallel \leftrightarrow BB_0 \wedge \leftrightarrow AA_0 \neq \leftrightarrow BB_0 \Rightarrow \exists \rho \subseteq E_3 : \leftrightarrow AA_0, \leftrightarrow BB_0 \subseteq \rho \Rightarrow$
$\Rightarrow A_0B_0BA$ je rovnoběžník $\Rightarrow /AA_0/ = /BB_0/ \Rightarrow \rho(A,\beta) = \rho(B,\beta)$.]

Def.: Nechť $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny. Pak <u>vzdáleností dvou rovnoběžných rovin</u> α, β nazýváme reálné číslo označené $\rho(\alpha,\beta)$ a definované takto: $\rho(\alpha,\beta) = \rho(A,\beta)$, kde $A \in \alpha$ lib.bod.

Pozn.: a) $\alpha = \beta \Rightarrow \rho(\alpha,\beta) = 0$
b) Vzdálenost různoběžných rovin klademe rovnu 0.

V.9.4.: Nechť $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina, $p \parallel \alpha$. Pak $\forall A,B \in p: \rho(A,\alpha) = \rho(B,\alpha)$.
[Dk.: Analogicky s Dk. V.9.3.]

Def.: Nechť $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Nechť $p \parallel \alpha$. Vzdáleností přímky p od roviny α s ní rovnoběžné nazýváme reálné číslo označené $\rho(p,\alpha)$ a definované takto:
$\rho(p,\alpha) = \rho(A,\alpha)$, kde $A \in p$ lib.bod.

Pozn.: a) $p \subseteq \alpha \Rightarrow \rho(p,\alpha) = 0$
b) Je-li přímka p různoběžná s rovinou α, klademe jejich vzdálenost rovnu 0.

V.9.5.: Nechť $p, q \subseteq E_3$ jsou rovnoběžné přímky. Pak $\forall A,B \in p: \rho(A,q) = \rho(B,q)$.
[Dk.: Analogicky s Dk. V.9.3.]

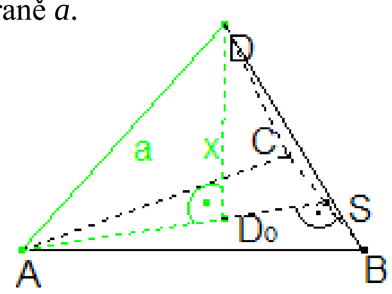
Def.: Nechť $p, q \subseteq E_3$ jsou rovnoběžné přímky. Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek p, q nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, q)$ a definované takto:
$\rho(p,q) = \rho(A,p)$, kde $A \in p$ lib.bod.

Pozn.: a) $p = q \Rightarrow \rho(p,q) = 0$
b) Vzálenost různoběžných přímek klademe rovnu 0.

Def.: Nechť $p,q \subseteq E_3$ jsou mimoběžné přímky. Vzdáleností dvou mimoběžných přímek p,q nazýváme reálné číslo označené $\rho(p,q)$ a definované takto:
$\rho(p,q) = \rho(\alpha,\beta)$, kde $\alpha \parallel \beta$, $p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta$.

Pozn.: Rovnoběžné roviny α, β procházející dvěma mimoběžkami p,q v předchozí definici jsou určené jednoznačně.

Př.: Vypočítejte $\rho(D, \leftrightarrow ABC)$ v pravidelném čtyřstěnu o hraně a.



Řešení:

$$\Delta ABS: |AS| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

D_0 je těžištěm v $\Delta ABC \Rightarrow |AD_0| = \frac{2}{3} \cdot |AS| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$

$$x = |DD_0| = \sqrt{|AD|^2 - |AD_0|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$$

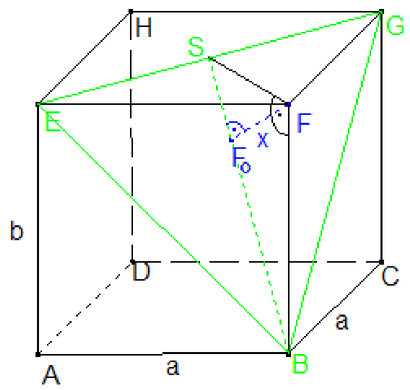
Př.: Vypočtěte $\rho(F, \leftrightarrow BEG)$ v pravidelném čtyřbokém hranolu (kvádru) *ABCDEFGH*, kde */AB/=/BC/ =a, /AE/=b.*

<u>I.způsob řešení</u>: Porovnáním obsahů ΔBFS nebo porovnáním objemů trojbokého jehlanu EFGB a *EGBF*:

$$V = S_{\Delta EFG} \cdot \frac{b}{3} = \frac{a^2 b}{6} = S_{\Delta EGB} \cdot \frac{x}{3} = \frac{/EG/ \cdot /SB/}{6} \cdot x =$$

$$= \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{6} \cdot x = \frac{a \cdot \sqrt{a^2 + 2b^2}}{6} \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$



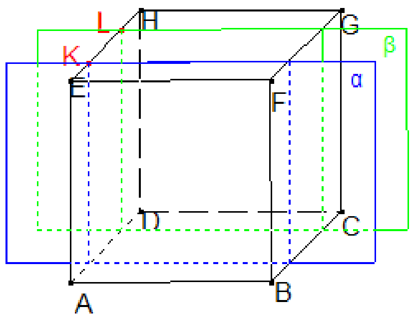
<u>II. způsob řešení</u>: Z podobnosti trojúhelníků: $\Delta BFS \sim \Delta FF_0 S$ (podle věty *uu* - pravé úhly a jeden vrchol mají společný)

$$\Rightarrow \frac{/BF/}{/BS/} = \frac{/FF_0/}{/FS/} \Rightarrow x = /FF_0/ = \frac{/BF/}{/BS/} \cdot /FS/ = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2b^2 + a^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Př.: Je dána krychle *ABCDEFGH* o hraně *a*. Body *K,L* jsou vnitřními body *EH*, přičemž $/EK/ = \frac{a}{5}, /ML/ = \frac{a}{4}$, body *P, Q, R, X, Y* a *Z* jsou středy stran (viz obr.). Určete $\rho(\alpha, \beta)$, kde a) $K \in \alpha, L \in \beta, \alpha \parallel \beta \parallel \leftrightarrow ABE$; b) $\alpha = \leftrightarrow XYZ, \beta = \leftrightarrow PQR$.

a)

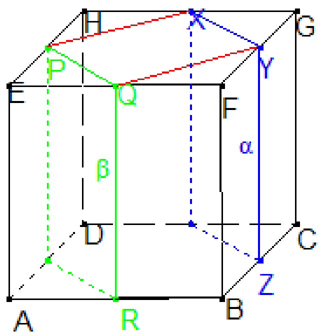


Řešení:

$$\rho(\alpha, \beta) = /EH/ - /EK/ - /HL/ = a - \frac{a}{5} - \frac{a}{4} =$$

$$= \frac{20a - 4a - 5a}{20} = \frac{11a}{20}$$

b)



Řešení:

$/PX/ = /XY/ = /YQ/ = /QP/ \wedge PY \perp XQ \Rightarrow$

$\Rightarrow PQXY$ je

čtverec $\Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = /QY/ = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

Př.: Vypočítejte vzdálenost horní podstavy od dolní podstavy kvádru *ABCDEFGH*, kde */AH/=8, /BH/=10, /BE/=*7.
Řešení: *a=/AB/, b=/BC/* a *c=/AE/*
Ze vztahů o úhlopříčkách:
$$b^2+c^2=64, a^2+b^2+c^2=100, a^2+c^2=49 \Rightarrow c^2=64+49-100 \Rightarrow c^2=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$$

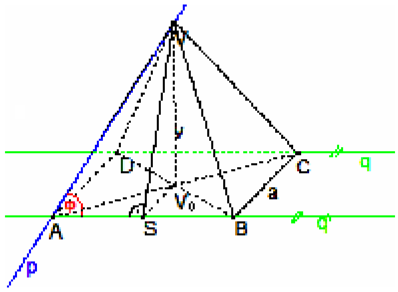
<u>§10. Odchylka</u>

Def.: Nechť $p,q \subseteq E_3$ jsou dvě komplanární přímky. <u>Odchylku dvou komplanárních přímek</u> *p,q* označujeme $/\angle\ p,q/$ a definujeme takto:
1) Je-li $p \parallel q \Rightarrow /\angle p,q/=0^\circ$
2) Je-li $p \nparallel q \Rightarrow$ odchylkou *p,q* rozumíme velikost ostrého úhlu nebo pravého úhlu, který přímky *p,q* svírají.

V.10.1.: Nechť $p', q', p,q \subseteq E_3$ jsou takové přímky, že $p' \parallel p$, $q' \parallel q$ (tedy dvojice *p, p' a q, q'* jsou komplanární). Pak platí: $/\angle p,q/ = /\angle\ p', q'/$.

Def.: Nechť $p,q \subseteq E_3$ jsou dvě mimoběžné přímky. <u>Odchylku dvou mimoběžných přímek</u> *p,q* označujeme $/\angle\ p,q/$ a definujeme takto: $/\angle p,q/ = /\angle\ p', q'/$, kde $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$. a *p',q'* jsou komplanární a různoběžné.

Př.: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* s podstavnou hranou délky *a* a s výškou *v*.
Určete $/\angle\ p,q/$, kde $p=\leftrightarrow AV, q=\leftrightarrow CD$.



Řešení:
$$q' = \leftrightarrow AB, q' \parallel q, /\angle p,q/ = /\angle p,q'/ = \varphi$$

$$\Delta AVS: tg\varphi = \frac{/VS/}{/AS/} = \frac{\sqrt{/VV_0/^2+/SV_0/^2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{v^2+\frac{a^2}{4}}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{v^2+\frac{a^2}{4}}}{a} = \frac{\sqrt{4v^2+a^2}}{a} \Rightarrow$$

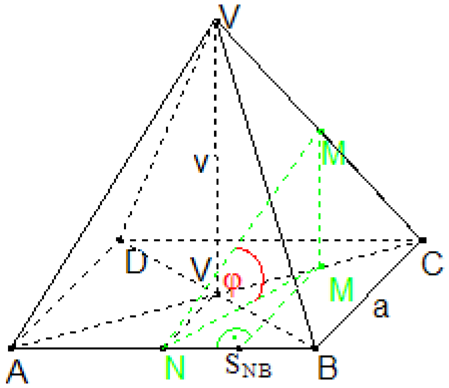
$$\Rightarrow \varphi = acrtg\frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{a}$$

Def.: Nechť $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak <u>odchylku přímky</u> *p* <u>od roviny</u> α označujeme $/\angle p,\alpha/$ a definujeme takto:
1) Je-li $p \parallel \alpha \Rightarrow /\angle p,\alpha/ = 0^\circ$.
2) Je-li $p \nparallel \alpha \Rightarrow /\angle p,\alpha/ = /\angle p, q/$, kde *q* je průsečnice roviny α s rovinou β, která je kolmá na rovinu α a obsahuje přímku *p*.

Pozn.: a) Jestliže $p \not\perp \alpha$ je přímka *q* z předchozí definice kolmý průmět *p* do roviny α, tzn. rovina β je určena jednoznačně.

b) Jestliže $\alpha \perp p$, rovina β není jednoznačně určena, ale vždy platí, že $p \perp q$.
c) Zřejmě platí: $p \perp \alpha \Leftrightarrow /\angle p,\alpha/ = 90°$

Př.: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavnou hranou a a výškou v. Body M,N jsou po řadě středy úseček VC a AB. Určete $/\angle \leftrightarrow MN, \leftrightarrow ABC/$:



Řešení:
$\varphi = /\angle \leftrightarrow MN, \leftrightarrow ABC/ = /\angle \leftrightarrow MN, \leftrightarrow M_0N/$, kde bod M_0 je střed úsečky V_0C.

$$tg\varphi = \frac{/MM_0/}{/NM_0/} = \frac{\frac{v}{2}}{a\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}} = \frac{v}{a}\cdot\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{5}} = \frac{v}{a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{v}{a}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$/MM_0/ = \frac{v}{2}, /NM_0/ = ?:$$

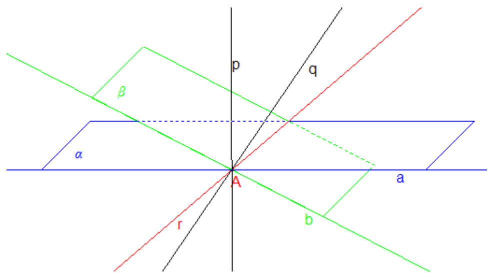
$$/NM_0/ = \sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{9a^2}{16}} = \sqrt{\frac{5}{8}a^2} = a\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}$$

Def.: Nechť $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě roviny. <u>Odchylku dvou rovin</u> α, β označujeme $/\angle\alpha,\beta/$ a definujeme ji takto:
1) Je-li $\alpha \parallel \beta \Rightarrow /\angle\alpha,\beta/ = 0$
2) Je-li $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow /\angle\alpha,\beta/ = /\angle p,q/$, kde $p \subseteq \alpha$, $q \subseteq \beta$ a obě přímky jsou kolmé k průsečnici rovin α, β.

V.10.2.: Nechť $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě různoběžné roviny. $\alpha \cap \beta = r$, pak platí:
$/\angle\alpha,\beta/ = /\angle p,q/$, kde $p = \alpha \cap \gamma$, $q = \beta \cap \gamma$, $\gamma \perp r$.
[Dk.: Podle definice stačí dokázat, že $p \perp r \wedge q \perp r$ - to je zřejmé, neboť $p \subseteq \gamma \wedge \gamma \perp r \Rightarrow p \perp r$. Analogicky pro přímku q.]

V.10.3.: Nechť $\alpha, \alpha', \beta', \beta \subseteq E_3$ jsou takové roviny, že $\alpha \parallel \alpha'$, $\beta \parallel \beta'$. Pak platí:
$/\angle\alpha,\beta/ = /\angle\alpha',\beta'/$.

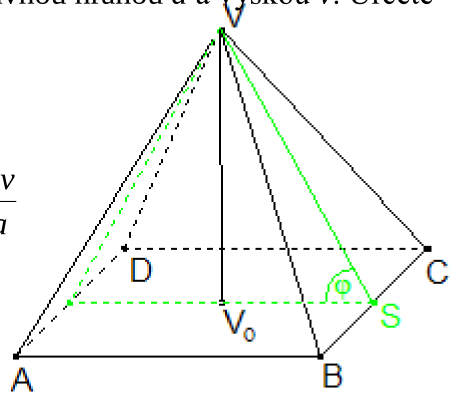
V.10.4.: Nechť $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě roviny a $p,q \subseteq E_3$ dvě přímky, $p \perp \alpha, q \perp \beta$, pak
$/\angle\alpha,\beta/ = /\angle p,q/$.
[Dk.:
1) Je-li $\alpha \parallel \beta \Rightarrow /\angle\alpha,\beta/ = 0°$, pak platí:
$p \perp \alpha \wedge q \perp \alpha \Rightarrow p \parallel q \Rightarrow /\angle p,q/ = 0°$.
Tedy $/\angle\alpha,\beta/ = /\angle p,q/$.



2) Je-li $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow$ veďme libovolným bodem $A \in r, r = \alpha \cap \beta$ přímky p', q', a, b: $p' \| p,\ q' \| q,\ a \subseteq \alpha \wedge a \perp r, b \subseteq \beta \wedge b \perp r$. Tedy $p' \perp \alpha \wedge q' \perp \beta \Rightarrow p' \perp a \wedge q' \perp b$. Také $p' \perp r \wedge q' \perp r \Rightarrow$ všechny 4 přímky procházejí jedním bodem a jsou kolmé k r. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ leží v jedné rovině kolmé k r. Tedy $|\angle \alpha, \beta| = |\angle a, b| = |\angle p', q'| = |\angle p, q|$]

Pozn.: V.10.4. se výhodně využívá pro výpočet odchylky dvou rovin v analytické geometrii.

Př.: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* s podstavnou hranou *a* a výškou *v*. Určete odchylku boční stěny od podstavy.



Řešení:

$$|\angle \leftrightarrow ABC, \leftrightarrow BCV| = |\angle \leftrightarrow V_0S, VS| = arctg\,\frac{2v}{a}$$

$$tg\,\varphi = \frac{v}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{2v}{a}$$

§11. Shodná zobrazení v E_3

Def.: <u>Shodným zobrazením v prostoru (shodností v prostoru)</u> nazýváme zobrazení $Z: E_3 \rightarrow E_3$ jestliže platí:
$\forall X, Y \in E_3 : |Z(X)Z(Y)| = |XY|$

Pozn.: a) Nejjednodušším shodným zobrazením v E_3 je identita.
b) Shodná zobrazení v E_3 mají stejné vlastnosti jako v E_2.

V.11.1.: a) Každé shodné zobrazení je bijekce.
b) Inverzní zobrazení k danému shodnému zobrazení je rovněž shodné.

Pozn.: a)Obrazem libovolné bodové množiny (útvaru) je táž bodová množina. Tedy obrazem úsečky je úsečka, polopřímky polopřímka,...
b) Shodné zobrazení v E_3 zachovává vzájemnou polohu přímek, rovin, přímek a rovin.

V.11.2.: Nechť $p, q \subseteq E_3$ jsou přímky nechť α, $\beta \subseteq E_3$ jsou roviny a nechť $Z: E_3 \rightarrow E_3$ je shodné zobrazení.
Nechť $p'=Z(p)$, $q'=Z(q)$; $\alpha'=Z(\alpha)$; $\beta'=Z(\beta)$, pak platí:
a) $p \perp q \Rightarrow p' \perp q'$
b) $\alpha \perp \beta \Rightarrow \alpha' \perp \beta'$
c) $p \perp \alpha \Rightarrow p' \perp \alpha'$

V.11.3.: Nechť F, G jsou shodné zobrazení v E_3, pak složené zobrazení $H = G \circ F$ je shodné zobrazení v E_3.

§12. Druhy shodných zobrazení v E_3

A, Středová souměrnost v E_3

Def.: Nechť $S \in E_3$ je bod,pak zobrazení $S_S : E_3 \to E_3$ nazýváme středovou souměrností se středem S, jestliže platí:
1) $X=S \Rightarrow X' = X$
2) $S \neq X \Rightarrow S =$ střed úsečky XX', kde $X' = S_S(X)$.

V.12.1.: Středová souměrnost v E_3 je shodné zobrazení v E_3.

V.12.2.: Středová souměrnost v E_3 je involutorní zobrazení.
(Involutorní zobrazení: $S_S \circ S_S = I(identita); S_S^{-1} = S_S$)

V.12.3.: Středová souměrnost v E_3 zachovává rovnoběžnost.
(To znamená, že pro $\forall p \subseteq E_3$, kde p je přímka, a $\forall \alpha \subseteq E_3$, kde α je rovina, platí:
a) $p \parallel p'$, kde $p' = S_S(p)$, přitom bod S leží v rovině, kterou přímky p a p' určují.
b) $\alpha \parallel \alpha'$, kde $\alpha' = S_S(\alpha)$.)

Pozn.: Jestliže S leží na přímce p, pak $p' = p$ a jestliže S leží v rovině α ,pak $\alpha' = \alpha$ (zobrazení není bodově samodružné).

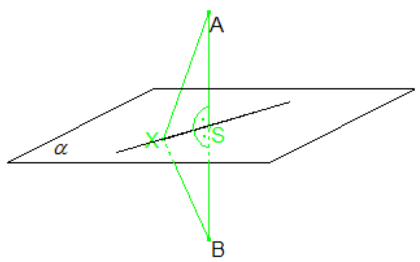
Def.: Každou neprázdnou množinu U v E_3 nazveme útvarem v prostoru.

Def.: Bod $S \in E_3$ nazveme středem souměrnosti útvaru U, jestliže se zobrazí sám do sebe, tedy $U=S_S(U)$.
Útvar $U \subseteq E_3$ nazveme středově souměrným, má-li alespoň 1 střed souměrnosti.

B, Rovinová souměrnost v E_3

Def.: Nechť $A,B \subseteq E_3$ jsou dva body, $A \neq B$. Pak rovinu $\alpha \subseteq E_3$, která prochází středem úsečky AB a je k ní kolmá, nazýváme rovinou souměrnosti bodů A,B.

V.12.4.: Nechť $A, B \in E_3$ jsou dva různé body, nechť $\alpha \subseteq E_3$ je rovina souměrnosti bodů A,B.
Pak platí: $\alpha = \{X \in E_3 : /AX/ = /BX/\}$
[Dk.: Nechť $M = \{X \in E_3 : /AX/ = /BX/\}$.
1)„ $\Rightarrow$ ”,tj.: $\alpha \subseteq M$: Nechť $X \in \alpha$
a) $X = S$, kde S je středem úsečky AB
$\Rightarrow /AX/ = /BX/ \Rightarrow X \in M$.
b) $X \neq S \Rightarrow \exists \leftrightarrow SX \subseteq \alpha : \leftrightarrow SX \perp \leftrightarrow AB$
$\Rightarrow \Delta XSA \cong \Delta XSB \overset{(sus)}{\Rightarrow} /XA/ = /XB/ \Rightarrow$
$\Rightarrow X \in M \Rightarrow \alpha \subseteq M$.



2)„ $\Leftarrow$ “, tj. $M \subseteq \alpha$: Nechť $X \in M \Rightarrow /AX/ = /BX/$.
a) $X = S \Rightarrow X \in \alpha$
b) $X \neq S \Rightarrow \exists$ rovnoramenný ΔABX se základnou AB, kde $t_x = v_x = SX \Rightarrow$
$\Rightarrow \leftrightarrow SX \perp \leftrightarrow AB \Rightarrow X \in \alpha \Rightarrow M \subseteq \alpha$.]

Pozn.: Rovinová souměrnost je prostorovou obdobou osové souměrnosti v E_3.

Def.: Nechť $\alpha \subseteq E_3$ je rovina, pak zobrazení $S_\alpha : E_3 \to E_3$ nazýváme <u>rovinovou souměrností</u> s rovinou α, jestliže platí:
1) $X \in \alpha,\ X' = X$
2) $X \notin \alpha, \leftrightarrow XX' \perp \alpha \wedge$ střed úsečky $XX' \in \alpha$, kde $X' = S_\alpha(X)$.

V.12.5.: Rovinová souměrnost je shodné zobrazení v E_3.

V.12.6.: Rovinová souměrnost je involutorní zobrazení.

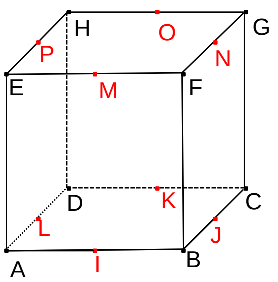
V.12.7.: Nechť je dána rovinová souměrnost s rovinou $\alpha \subseteq E_3$, nechť $p \subseteq E_3$ je přímka a p' její obraz, pak platí:
a) $p \parallel \alpha \Rightarrow p' \parallel p$
b) $p \perp \alpha \Rightarrow p' = p$
c) $p \nparallel \alpha \wedge p \not\perp \alpha \Rightarrow p \cap p' \in \alpha$ (Přímky se protínají v rovině α, určují tedy rovinu kolmou k rovině α.)

V.12.8.: Nechť je dána rovinová souměrnost s rovinou $\alpha \subseteq E_3$, nechť $\rho \subseteq E_3$ je rovina a $\rho' \subseteq E_3$ je její obraz. Pak platí:
a) $\rho \parallel \alpha \Rightarrow \rho' \parallel \rho$
b) $\rho \perp \alpha \Rightarrow \rho' = \rho$
c) $\rho \nparallel \alpha \wedge \rho \not\perp \alpha \Rightarrow \rho \cap \rho' = r$, kde r je průsečnicí rovin, a $r \subseteq \alpha$.

Def.: a) Rovina $\alpha \subseteq E_3$ se nazývá <u>rovina souměrnosti útvaru</u> $U \subseteq E_3$, jestliže $U = S_\alpha(U)$
b) <u>Útvar</u> $U \subseteq E_3$ se nazývá <u>rovinově souměrný</u>, když má alespoň 1 rovinu souměrnosti.

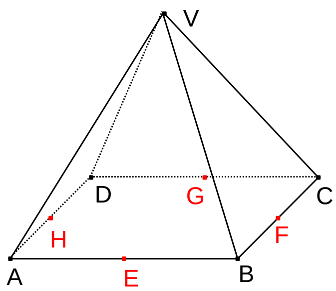
Př.: Najděte všechny roviny souměrnosti a) krychle, b)pravidelného čtyřbokého jehlanu, c)pravidelného čtyřstěnu.

a)



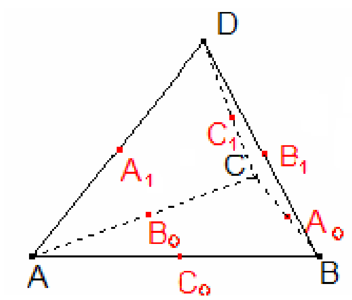
$\leftrightarrow LJN, \leftrightarrow IKO, \leftrightarrow QRS,$
$\leftrightarrow BFH, \leftrightarrow ACG, \leftrightarrow EBC,$
$\leftrightarrow ACG, \leftrightarrow BGH, \leftrightarrow CFE$

b)



$\leftrightarrow HVF, \leftrightarrow EGV, \leftrightarrow ACV$
$\leftrightarrow BDV$

c)

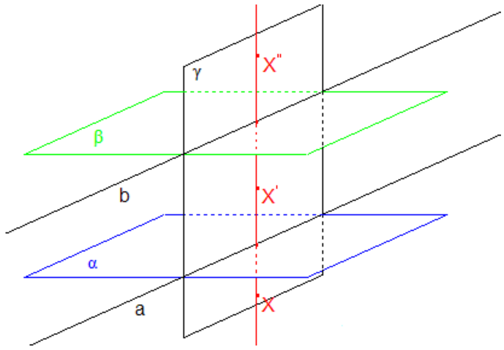


$\leftrightarrow AA_0D, \leftrightarrow BB_0D, \leftrightarrow CC_0D,$
$\leftrightarrow A_1BC, \leftrightarrow AB_1C, \leftrightarrow ABC_1$

C, Skládání rovinových souměrností

Pozn.: Nyní se budeme zabývat dalšími typy shodných zobrazení v E_3, která vzniknou složením dvou rovinových souměrností podle rovin α, β.

V.12.9.: Nechť $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \to E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.
Nechť $\alpha \parallel \beta$, pak $\forall X \in E_3 : S_\beta \circ S_\alpha(X) = O_b \circ O_a(X)$, kde $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$, kde $\gamma \subseteq E_3$ je taková rovina, že: $\alpha \perp \gamma \wedge \beta \perp \gamma, X \in \gamma$.



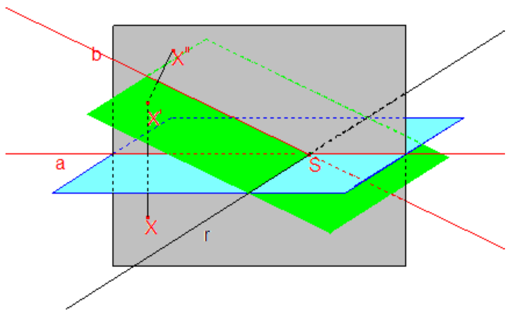
Pozn.: Přímky a,b v předchozí větě jsou rovnoběžné a leží v rovině γ. V této rovině vznikne složením osových souměrností $O_b \circ O_a$ s rovnoběžnými osami posunutí ve směru kolmém na obě přímky a,b o vzdálenosti $2\rho(\alpha, \beta)$.

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s rovnoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme posunutím (translací) v E_3. Směr kolmý k těmto rovinám nazýváme směrem posunutí.

Pozn.: Identita I je tedy zvláštním případem posunutí pro $\alpha = \beta$.

V.12.10.: Nechť $T = S_\beta \circ S_\alpha$, kde $\alpha \parallel \beta$, $\alpha, \beta \subseteq E_3$, je posunutí v E_3. Pak platí:
a) $\forall\ A, B \in E_3 : / AA' / = / BB' / = 2\rho(\alpha, \beta)$
b) $T \neq I$ (identita), pak $\forall A, B \in E_3 : \leftrightarrow AA' \parallel \leftrightarrow BB'$, přičemž tyto přímky tvoří směr posunutí.
c) Posunutí T nemá žádný samodružný bod, pro $T \neq I$, nebo má všechny body samodružné, jestliže $T=I$.

V.12.11. Nechť $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \to E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.
Nechť $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$ (průsečnice), pak platí:
$\forall X \in E_3 : S_\beta \circ S_\alpha(X) = O_b \cdot O_a(X)$, kde
$a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$, kde $\gamma \subseteq E_3$ je taková rovina, že: $r \perp \gamma, X \in \gamma$.



Pozn.: Přímky a, b z předchozí věty jsou různoběžné. Protínají se v bodě S a leží v rovině γ. V této rovině vznikne složením osových souměrností $O_b \circ O_a$ s různoběžnými osami $a.b$ otočení se středem S o úhel $/ \angle XSX'' / = 2\alpha$, kde α je velikost orientovaného úhlu, který svírají osy a, b. (Není to odchylka, protože to může být i úhel tupý.) Tedy celé zobrazení $S_\beta \circ S_\alpha$ se děje v rovině γ, kolmé na průsečnici r rovin α a β.

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s různoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme <u>otočením</u>, nebo-li <u>rotací</u> v E_3. Průsečnici těchto rovin nazýváme <u>osou otočení</u>.

Pozn.: Jestliže $\alpha \perp \beta$, dostáváme zvláštní případ otočení – osovou souměrnost v E_3.

V.12.12.: Nechť $R = S_\beta \circ S_\alpha$, kde $\alpha \nparallel \beta$ je otočení v E_3. Pak platí:

a) $\forall A, B \in E_3 : |\angle ASA'| = |\angle BSB'|$, kde S je průnik trsu rovin α, β, γ, kde $\gamma \perp \alpha \wedge \gamma \perp \beta$.

b) Všechny vzory X a jejich obrazy X' leží v rovině γ kolmé k α i β (kolmé k jejich průsečnici).

c) Všechny body průsečnice r rovin α, β jsou v zobrazení R samodružné.

V.12.13.: Nechť $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \to E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.

Nechť $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$ (průsečnice), pak zobrazení $S_\beta \circ S_\alpha$ má tyto vlastnosti:

1) $X \in r : X = X'$

2) $X \notin r : XX' \perp r$, střed úsečky XX' leží na r, kde $X' = S_\beta \circ S_\alpha (X)$.

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s navzájem kolmými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme <u>osovou souměrností</u> v E_3. Průsečnici těchto rovin nazýváme <u>osou osové souměrnosti</u>.

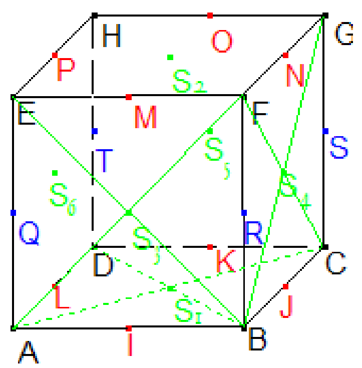
Pozn.: Osová souměrnost je další, tedy již třetí, druh souměrnosti v E_3. Za její definici se častěji používá V.12.13.

Def.: a) Přímka $p \subseteq E_3$ se nazývá <u>osa souměrnosti útvaru</u> $U \subseteq E_3$, jestliže útvar U je samodružný v osové souměrnosti s osou p.

b) Útvar $U \subseteq E_3$ se nazývá <u>osově souměrný</u>, má-li alespoň 1 osu souměrnosti.

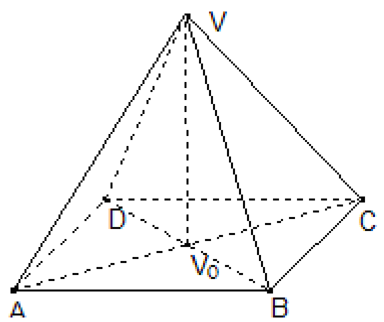
Př.: Najděte všechny osy souměrnosti a)krychle, b)pravidelného čtyřbokého jehlanu, c)pravidelného čtyřstěnu:

a)



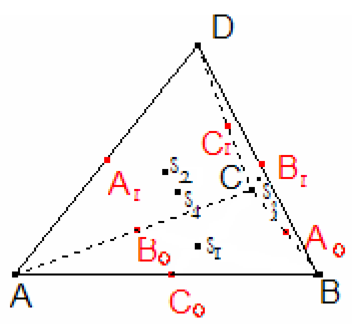
$\leftrightarrow S_1S_2, S_3S_5, S_4S_6,$
$AG, BH, CE, DF, IO,$
JK, KM, LN, KT, SQ

b)



$\leftrightarrow VV_0$

c)



$\leftrightarrow DS_1, AS_3, BS_2, CS_4,$
C_0C_1, A_0A_1, B_0B_1

Pozn.: Každé shodné zobrazení v E_3 lze vyjádřit jako složení rovinových souměrností. Prvni souměrnost zvolíme tak, aby se bod A zobrazil na A', druhou tak, aby se při složeném zobrazení zobrazil bod B na B' a bod A' aby zůstal samodružný, ...

§13. Podobná zobrazení v E_3, stejnolehlost

Def.: Podobným zobrazením v prostoru (podobností v prostoru) nazýváme zobrazení $Z : E_3 \rightarrow E_3$, jestliže existuje $k \in R^+ : \forall X, Y \in E_3 : /Z(X)Z(Y)/ = k/XY/$. Číslo k nazýváme koeficientem podobnosti.

Pozn.: a) Každé shodné zobrazení je tedy podobné pro $k=1$.
b) Podobná zobrazení v E_3 mají stejné vlastnosti jako v E_2.

V.13.1.: a) Každé podobné zobrazení v E_3 je bijekce.
b) Inverzní zobrazení k danému podobnému zobrazení je rovněž podobné, má koeficient $\frac{1}{k}$, pokud původní má k.

V.13.2.: Nechť F,G jsou podobná zobrazení v E_3 s koeficienty k_1, k_2. Pak složené zobrazení $H=G \circ F$ je rovněž podobné zobrazení s koeficientem $k = k_1 \cdot k_2$.

V.13.3.: Nechť $A,B,C,D \in E_3$ jsou 4 nekomplanární body, nechť $A', B', C', D' \in E_3$ jsou jejich obrazy v podobném zobrazení s koeficientem k. Pak platí:
a) $/A'B'/=k \cdot /AB/$
b) $S_{\Delta A'B'C'} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC}$
c) $V_{A'B'C'D'} = k^3 \cdot V_{ABCD}$,
kde $S_{\Delta ABC}$ je obsah trojúhelníku ABC, V_{ABCD} je objem čtyřstěnu $ABCD$.

Pozn.: a) Tedy při podobnosti s koeficientem k se délky zvětší k-*krát*, obsahy a povrchy se zvětší k^2-*krát* a objemy se zvětší k^3-*krát*.
b) Je-li povrch tělesa S, jeho objem V, pak poměr $\frac{S^3}{V^2}$ je stejný pro těleso i jeho obraz v libovolné podobnosti.

Př.: Vypočtěte poměr $\frac{S^3}{V^2}$ pro: a) krychli, b) kouli.:

a) $S = 6 \cdot a^2, V = a^3 \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} = \frac{6^3 \cdot a^6}{a^6} = 6^3 = 216$ (Nezávislé na délce hrany krychle a.)

b) $S = 4 \cdot \pi r^2, V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} = \frac{4^3 \cdot \pi^3 \cdot r^6}{\frac{4^2}{3^2} \cdot \pi^2 \cdot r^6} = 36\pi$ (Opět nezávislé na délce poloměru r.)

Stejnolehlost v E_3

Def.: Nechť $S \in E_3$ je bod, $\lambda \in R \setminus \{0\}$ je číslo. Zobrazení $H_{S,\lambda} : E_3 \rightarrow E_3$ se nazývá stejnolehlostí (homotetií) se středem v bodě S a koeficientem lambda λ, jestliže platí:
1) $X = S : X' = X = S$

2) $X \neq S : /SX'/ = /\lambda/ \cdot /SX/$, přičemž i) $\lambda \rangle 0$, pak X´leží na polopřímce $\rightarrow SX$
ii) $\lambda \langle 0$, pak X´leží na polopřímce opačné k $\rightarrow SX$,
kde $X' = H_{S,\lambda}(X)$

V.13.4.: Stejnolehlost v E_3 je podobné zobrazení v E_3 s koeficientem podobnosti $k = /\lambda/$.

V.13.4.: Stejnolehlost v E_3 zachovává rovnoběžnost přímek a rovin. To znamená, že

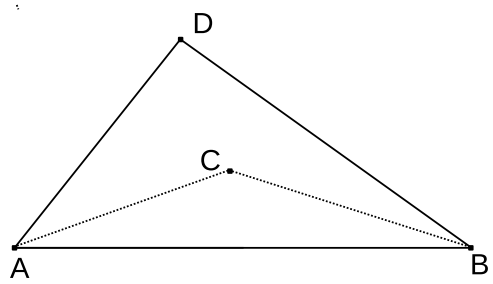
$\forall p, \alpha \subseteq E_3 : p \parallel p'$, kde $p' = H_{S,\lambda}(p)$

$\alpha \parallel \alpha'$, kde $\alpha' = H_{S,\lambda}(\alpha)$.

Pozn.: Všechna podobná zobrazení v E_3 lze vyjádřit složením stejnolehlosti a shodnosti, nebo shodnosti a stejnolehlosti (vždy lze oběma způsoby).

§14. Čtyřstěn

Def.: Zvolme v prostoru body *A,B,C,D*, které neleží v jedné rovině. Čtyřstěnem *ABCD* rozumíme množinu bodů, které jsou ohraničené trojúhelníky $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$. Tyto trojúhelníky tvoří stěny čtyřstěnu *ABCD*, úsečky *AB, AC, AD, BC, BD, CD* jsou jeho hranami a body *A,B,C,D* jeho vrcholy.



Pozn.: Ty hrany čtyřstěnu, které nejsou různoběžné, ale mimoběžné, se nazývají protější hrany čtyřstěnu. V čtyřstěnu *ABCD* jsou tři dvojice protějších hran (*AB, CD*), (*AC,BD*), (*AD,BC*).

V.14.1.: Středy všech tří úseček, které spojují vždy středy dvou protějších hran čtyřstěnu, splývají.

Def.: Spojnice lib. vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny, se nazývá těžnice čtyřstěnu.

V.14.2.: Všechny čtyři těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem (tzv. těžištěm čtyřstěnu), který dělí úsečku s krajními body ve vrcholu čtyřstěnu a v těžišti protější stěny v poměru 3:1.

Def.: Úsečka procházející vrcholem čtyřstěnu, která je kolmá na rovinu, v níž leží protější stěna čtyřstěnu, se nazývá výška čtyřstěnu.

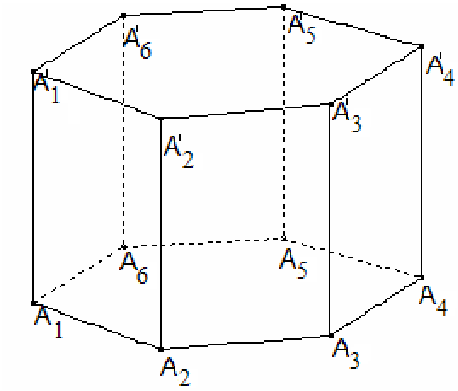
V.14.3.: Výšky čtyřstěnu *ABCD* vedené body *A, D* jsou právě tehdy různoběžné, je-li hrana *AD* kolmá k protější hraně *BC*. Je-li tato podmínka splněna, leží průsečík *V* výšek čtyřstěnu vedených body *A,D* na přímce, která je s oběma přímkami *AD, BC* různoběžná a k nim kolmá.

Pozn.: Výšky čtyřstěnu *ABCD* vedené body *A, D* jsou právě tehdy různoběžné, jsou-li různoběžné výšky čtyřstěnu vedené body *B,C*. To nastane právě tehdy, když jsou přímky *AD* a *BC* navzájem kolmé.

V.14.4.: V čtyřstěnu mohou nastat právě tyto 3 navzájem se vylučující situace:
a) Žádné dvě protější hrany čtyřstěnu nejsou navzájem kolmé a každé dvě výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné.
b) Pouze jedna dvojice protějších hran čtyřstěnu je tvořena dvojicí navzájem kolmých přímek, výšky čtyřstěnu vedené vrcholy na každé z těchto hran jsou různoběžné, každé dvě jiné výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné.
c) Každé dvě protější hrany jsou navzájem kolmé, všechny čtyři výšky čtyřstěnu procházejí jedním bodem. Takovýto bod čtyřstěnu se nazývá ortocentrum a takovýto čtyřstěn ortocentrický.

§15. Hranol, Válec

Def.: Hranol
Mějme v prostoru rovinu ρ, v ní konvexní mnohoúhelník $A_1A_2A_3...A_n$ a nechť A_1' je bod, který v rovině ρ neleží. Nechť $T: E_3 \to E_3$ je takové posunutí, že $A_1'=T(A_1)$. Při tomto zobrazení se rovina ρ zobrazí na rovinu ρ', tyto dvě roviny jsou rovnoběžné. Množinu všech bodů X, všech úseček BB' takových, že $B \in A_1A_2A_3...A_n$ a B' je obraz bodu B v posunutí T, nazýváme hranolem.



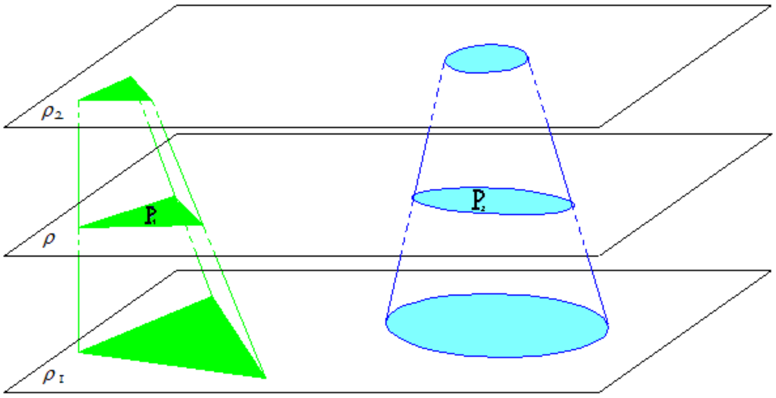
Mnohoúhelníky $A_1A_2A_3...A_n$ a $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nazýváme podstavami, rovnoběžníky $A_iA_{i+1}A_{i+1}'A_i'$, kde $(i \in \{1,2,...,n\}$, $n+1 \to 1)$ nazýváme bočními stěnami hranolu. Všechny boční stěny tvoří plášť hranolu. Podstavy spolu s bočními stěnami tvoří stěny hranolu. Úsečky A_iA_i' (respektive A_iA_{i+1}) se nazývají boční (respektive podstavné) hrany hranolu. Body $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ a $A_1', A_2', A_3', ..., A_n'$ se nazývají vrcholy.

Pozn.: Podle hodnoty n rozlišujeme hranoly na trojboký, čtyřboký, …a n-boký hranol.

Def.: Je-li směr posunutí kolmý k rovině podstavy, mluvíme o hranolu kolmém, jinak jde o hranol kosý. Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky, se nazývá pravidelný
n - boký hranol. Hranol, jehož podstavy jsou rovnoběžníky, se nazývá rovnoběžnostěn. Rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou pravoúhelníky (resp. čtverce), nazýváme kvádr (respektive krychle).

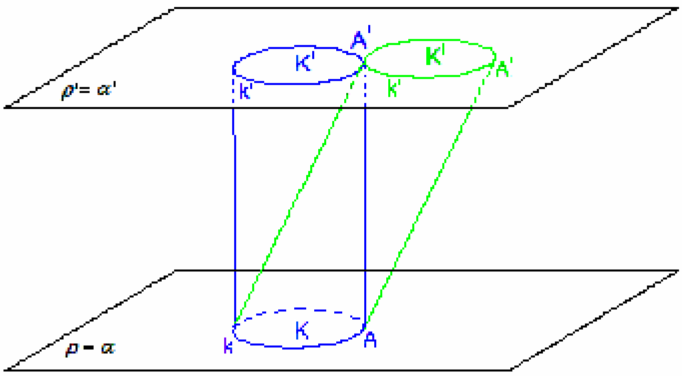
Pozn.: Čtyři zřejmé vlastnosti objemu $V(T)$ tělesa T:
a) Dvě shodná tělesa mají tentýž objem.
b) Skládá-li se těleso T z nepřekrývajících se těles T_1,T_2, je objem tělesa T součtem objemů těles T_1,T_2: $V(T)=V(T_1)+V(T_2)$.
c) Za jednotku objemu bereme objem krychle o hraně délky 1.
d) Cavalieriho princip:
Nechť tělesa T_1,T_2 leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami ρ_1, ρ_2 a každá rovina ρ rovnoběžná s rovinami ρ_1, ρ_2 protne tělesa T_1,T_2 v konvexních rovinných útvarech

s obsahy P_1, P_2. Jestliže pro každou rovinu ρ platí, že $P_1 = P_2$, mají tělesa T_1, T_2 stejný objem.
Jestliže pro každou rovinu ρ, platí, že $P_1 = m \cdot P_2$, kde m je pevné číslo, nezávislé na volbě roviny ρ, je objem tělesa T_1 m-násobkem objemu tělesa T_2: $V(T_1) = m \cdot V(T_2)$



V.15.1.: Nechť P je obsah podstavy a Q je obsah pláště, v je vzdálenost rovin obou podstav, o je obvod n-úhelníku podstavy, pak pro objem V a povch S hranolu platí:
$V = P \cdot v, S = 2P + Q$ (-pro každý hranol, pro kolmý hranol: $S = 2P + o \cdot v$).

Def.: <u>Válec</u>
Mějme v prostoru rovinu ρ, v ní kruh K ohraničený kružnicí k, na kružnici k leží bod A a nechť A' je bod, který v rovině ρ neleží. Nechť $T: E_3 \to E_3$ je takové posunutí, že $A' = T(A)$. Označme $T(\alpha) = \alpha', T(k) = k', T(K) = K'$.



Všechny body všech úseček XX', kde $X \in K$ a X' je obraz bodu X, vytvoří <u>válec</u>. Omezíme-li se pouze na body X ležící na kružnici k, dostaneme <u>plášť válce</u>. Kruhy K, K' tvoří <u>podstavy válce</u>. Je-li směr posunutí T kolmý k rovině ρ, mluvíme o <u>kolmém válci</u>, v opačném případě o <u>kosém válci</u>.

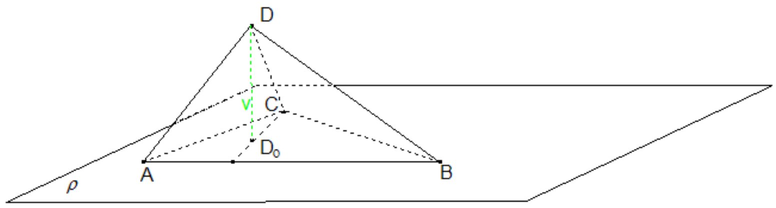
V.15.2.: Pro kolmý válec s poloměrem podstavy r a výškou v platí:
$P = \pi \cdot r^2$
$Q = 2\pi \cdot r \cdot v$
$S = 2\pi \cdot r \cdot v + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot (v + r)$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ (-platí pro každý válec)

<u>§16. Jehlan, Kužel</u>

Def.: <u>Jehlan</u>
Mějme v prostoru rovinu ρ, v ní konvexní mnohoúhelník $A_1A_2A_3...A_n$ a nechť V je bod, který v rovině ρ neleží. Množinu všech bodů všech úseček VX, kde X probíhá všemi body

mnohoúhelníku $A_1A_2A_3...A_n$, nazýváme <u>jehlanem</u>. Bod *V* se nazývá <u>hlavním vrcholem</u> jehlanu, jeho dalšími <u>vrcholy</u> jsou $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Mnohoúhelník $A_1A_2A_3...A_n$ je <u>podstava</u> jehlanu. Trojúhelníky $A_iA_{i+1}V, (i \in \{1,2,...,n-1\})$ a A_nA_1V jsou <u>bočními stěnami jehlanu</u>. Úsečky A_iV ($i \in \{1,2,...,n\}$) jsou <u>bočními hranami jehlanu</u>. Úsečky A_iA_{i+1} jsou <u>podstavnými hranami</u>. Boční stěny tvoří <u>plášť</u> jehlanu.

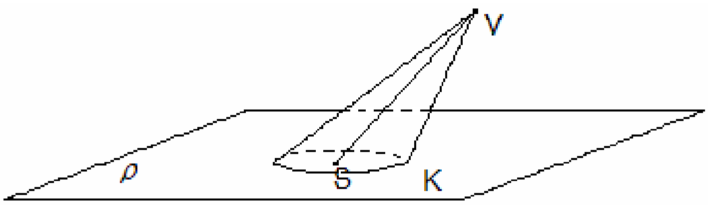
<u>Jehlan</u> se nazývá <u>pravidelný</u>, jestliže je jeho podstavou pravidelný mnohoúhelník a jeho hlavní vrchol má stejně velké vzdálenosti od všech vrcholů podstavy.



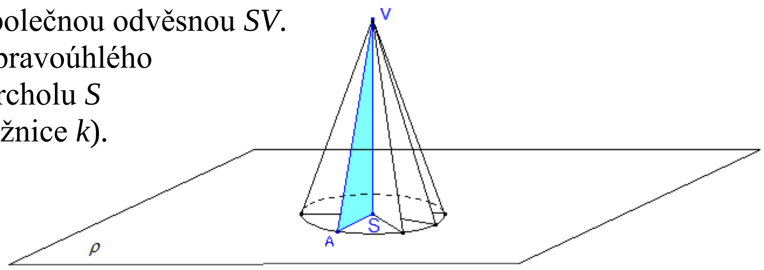
Pozn.: Trojboký jehlan není nic jiného než čtyřstěn. Každý jeho vrchol může být hlavním vrcholem, každá stěna podstavou.

Def.: <u>Kužel</u>

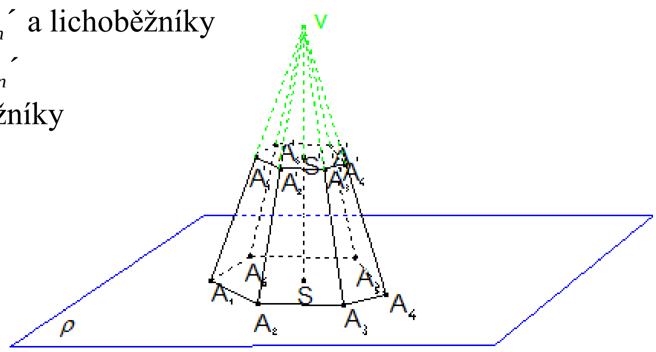
Nechť v rovině ρ je kruh *K* s hraniční kružnicí *k* a středem *S* a mimo rovinu ρ bod *V*. Množina všech bodů všech úseček *VX*, $X \in K$, tvoří těleso, které se nazývá <u>kužel</u>. Jestliže $X \in k$, tvoří body úseček *VX* <u>plášť kužele</u>, kruh *K* je <u>podstavou kužele</u>, bod *V* je <u>vrcholem kužele</u>. Je-li přímka $\leftrightarrow SV \perp \rho$, nazývá se <u>kužel kolmý (rotační).</u>



Pozn.: a) V případě rotačního kužele jsou všechny úsečky *VX*, kde $X \in k$, shodné. Jsou to přepony pravoúhlých trojúhelníků se společnou odvěsnou *SV*.
b) Rotační kužel vzniká také otáčením pravoúhlého trojúhelníku *SVA* s pravým úhlem při vrcholu *S* kolem jeho odvěsny *SV* (*A*-lib. bod kružnice *k*).



Def.: Nechť je jehlan s hlavním vrcholem *V* a s podstavou $A_1A_2A_3...A_n$ v rovině ρ. Zvolme číslo $k \rangle 0, k \neq 1, k \in R$. Nechť obrazem uvažovaného jehlanu ve stejnolehlosti se středem *V* a koeficientem *k* je jehlan $A_1{'}A_2{'}A_3{'}...A_n{'}V$. Těleso ohraničené stejnolehlými mnohoúhelníky $A_1A_2A_3...A_n$, $A_1{'}A_2{'}A_3{'}...A_n{'}$ a lichoběžníky $A_iA_{i+1}A_{i+1}{'}A_i{'} (i \in \{1,2,...,n-1\})$, $A_nA_1A_1{'}A_n{'}$ nazýváme <u>komolý jehlan</u>, popsané lichoběžníky tvoří jeho plášť a uvedené 2 stejnolehlé mnohoúhelníky jeho podstavy.



Def.: Nechť je dán kužel vrcholem V a podstavou K, nechť $k\rangle 0, k \neq 1, k \in R$. Nechť je dán jeho obraz ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem k, kde obrazem kruhu K je kruh K'. Kruhy K a K' jsou podstavy komolého kužele. Množinu všech bodů všech úseček XX', kde $X \in K, X' = H_{V,k}(X)$, nazýváme komolým kuželem. Úsečky XX', pro které je X bodem hraniční kružnice kruhu K, tvoří plášť komolého kužele.

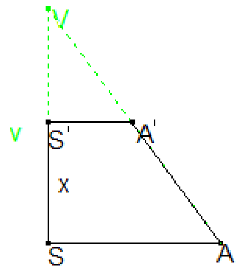
Def.: Komolý jehlan, který dostaneme z pravidelného jehlanu, se nazývá pravidelný komolý jehlan. Komolý kužel, který dostaneme z rotačního kužele, se nazývá rotační komolý kužel.

Def.: Vzdálenost hlavního vrcholu jehlanu od roviny jeho podstavy je výška jehlanu, vzdálenost vrcholu kužele od roviny jeho podstavy je výška kužele.

Pozn.: Objem kužele nebo jehlanu závisí pouze na výšce v a obsahu P jeho podstavy.

V.16.1: Pro objem V jehlanu nebo kužele o výšce v a obsahu podstavy P platí: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v$.

Př.: Odvoďte vzorec pro V komolého jehlanu nebo kololého kužele s obsahem podstav P, P_2 a s výškou w.



Řešení:

$$V = V_1 - V_2,\ V_1 = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v,\ V_2 = \frac{1}{3} \cdot P_2 \cdot (v - w)$$

$$P_2 : \frac{P_2}{P} = \left(\frac{v-w}{v}\right)^2 \Rightarrow P_2 = P \cdot \left(\frac{v-w}{v}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v - \frac{1}{3} \cdot P \cdot \left(\frac{v-w}{v}\right)^2 \cdot (v-w) = \frac{1}{3} \cdot \left(P \cdot v - P \cdot \frac{(v-w)}{v} \cdot \frac{(v-w)}{v} \cdot v + w \cdot P_2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(P \cdot v - P \cdot \frac{(v-w)}{v} \cdot v + \sqrt{P \cdot P_2} \cdot w + w \cdot P\right) = \frac{1}{3} \cdot w \cdot \left(P + \sqrt{P \cdot P_2} + P_2\right)$$

Př.: a) Odvoďte vztah pro obsah podstavy S_p a pláště Q pravidelného n-bokého jehlanu o výšce v a s podstavnou hranou délky a.

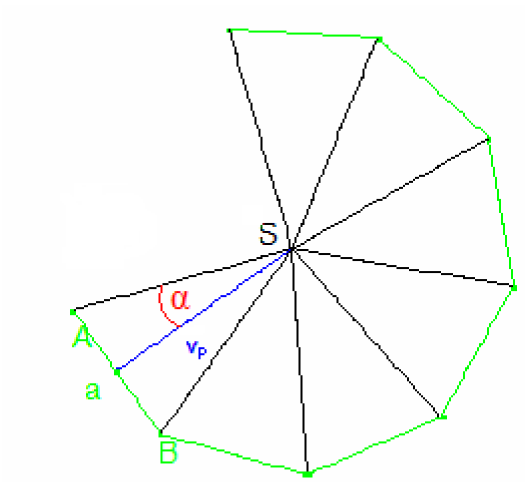
Řešení:

$$\alpha = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$$

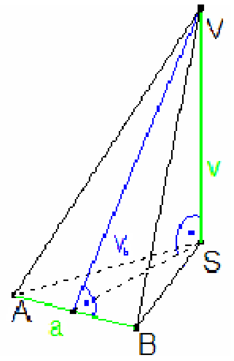
$$tg\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{v_p} \Rightarrow v_p = \frac{a}{2tg\alpha}$$

$$S_p = n \cdot \frac{a \cdot v_p}{2} = n \cdot \frac{a^2}{4 \cdot tg\alpha} = n \cdot \frac{a^2}{4 \cdot tg\frac{180°}{n}}$$

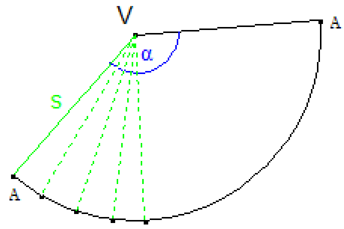
$$v_b^2 = v_p^2 + v^2 = \frac{a^2}{4 \cdot tg^2\alpha} + v^2$$



$$Q = n \cdot \frac{a \cdot v_b}{2} = \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4 \cdot tg^2 \alpha} + v^2} = \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4 \cdot tg^2 \frac{180}{n}} + v^2}$$

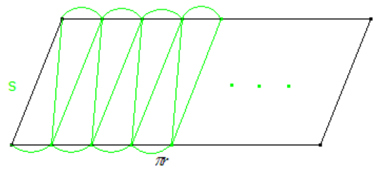


b) Odvoďte vztah pro S pláště rotačního kužele o výšce v a s poloměrem podstavy délky r.:



Řešení:
Síť pláště rozřežeme na nekonečně mnoho malých rovnoramenných trojúhelníků (jako na obr.) S pláště je pak roven obsahu obdélníku se stranami πr a s.

$$s = \sqrt{v^2 + r^2} \Rightarrow S = \pi \cdot r \cdot \sqrt{v^2 + r^2}$$



§17. Mnohostěny, Eulerova věta

Def.: Mnohostěnem rozumíme takovou omezenou a konvexní část prostoru (jež není částí roviny), do které patří i její hranice, přičemž je tato hranice tvořena konečným počtem mnohoúhelníků. Tyto mnohoúhelníky se nazývají stěny a jejich strany hrany mnohostěnu. Vrcholy hraničních mnohoúhelníků jsou vrcholy mnohostěnu. Každá hrana mnohostěnu je průnikem právě dvou jeho stěn, které se nazývají sousedními stěnami mnohostěnu.

Pozn.: a) Každý mnohostěn lze rozložit na konečný počet čtyřstěnů, ale sjednocením konečného počtu čtyřstěnů nemusí být vždy mnohostěn.
b) Někdy se za mnohostěny považují i nekonvexní útvary.
c) Mnohostěny se někdy nazývají polyedry.

V.17.1.: Eulerova věta:
Označíme-li v mnohostěnu s počet jeho stěn, h počet hran a v počet vrcholů, pak platí:
$s - h + v = 2$
$s + v = h + 2$

Pozn.: Pravidelné mnohostěny: Mnohostěny, jejichž stěny jsou vořeny navzájem shodnými pravidelnými mnohoúhelníky.

pravidelný mnohostěn	tvar stěny	v	s	h	
čtyřstěn	trojúhelník	4	4	6	tetraedr
šestistěn (krychle)	čtverec	8	6	12	hexaedr
osmistěn	trojúhelník	6	8	12	oktaedr
dvanáctistěn	prav. 5ti-úhelník	20	12	30	dodekaedr
dvacetistěn	trojúhelník	12	20	30	ikosaedr

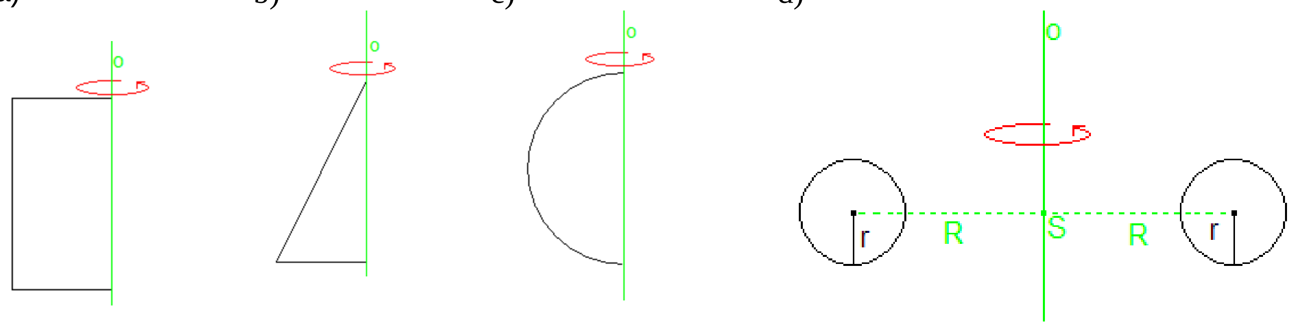
§18. Rotační tělesa

Def.: O tělesu *M* v prostoru říkáme, že má přímku *p* za svou <u>osu rotace</u> a že je <u>rotačním tělesem</u>, jestliže se zobrazí samo na sebe při každém otočení kolem přímky *p*.

Pozn.: Druhy rotačních těles:

a) <u>Rotační válec</u> – vznikne rotací pravoúhelníku kolem jeho jedné strany
b) <u>Rotační kužel</u> – vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho jedné z odvěsen
c) <u>Koule</u> – vznikne rotací půlkruhu nad průměrem kolem tohoto průměru (hranicí koule je <u>kulová plocha</u>, nebo-li <u>sféra</u>)
d) <u>Torus</u> (<u>anuloid</u>, kruhový prstenec) – vznikne rotací kruhu se středem *S* a poloměrem *r*. kolem osy ležící v rovině tohoto kruhu ve vzdálenosti *R*, kde $R \rangle r$, od bodu *S*.

a) b) c) d)



V.18.1.: Objem a povrch koule o poloměru *r* je:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3, \; S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Pozn.: Vzorce pro objem a povrch částí koule:

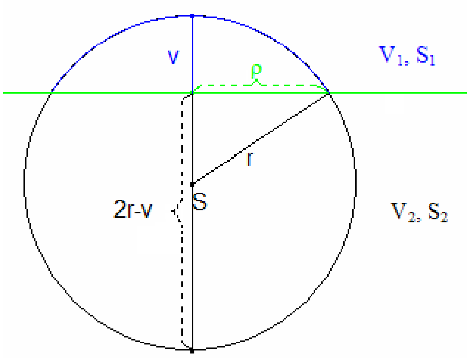
Nechť je koule rozdělena rovinou, která dělí její průměr délky *2r* na dvě úsečky délek *v* a *2r-v*. Objemy obou částí koule, na které je koule touto rovinou rozdělena (tzv. <u>kulových úsečí</u>), jsou:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot v + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{v}{2})^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v^2 \cdot (3r - v)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot (2r - v) + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{2r - v}{2})^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r - v)^2 \cdot (r + v), \text{ protože}$$

$$\rho^2 = r^2 - (r - v)^2 = v \cdot (2r - v).$$



Pro povrchy obou kulových úsečí platí:

$$S_1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot v \cdot (4r - v)$$

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2r - v) + \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot (2r - v) \cdot (2r + v).$$

Odečteme-li od S_1 a S_2 obsah kruhu o poloměru ρ, dostaneme povrchy příslušných kulových vrchlíků, které jsou $2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$ a $2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2r - v)$. <u>Kulový vrchlík</u> je plášť kulové úseče.

Seznam použité literatury

Literatura

BočekL., Kadleček J.: Základy stereometrie pro II. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku. SPW, Praha 1986.

Přednášky

Boucník Pavel - Přednášky v matematické třídě pro II. ročník gymnázií

Resumé

Úkolem mé závěrečné maturitní práce bylo obsáhnout a systematizovat učivo 3. ročníku matematiky, konkrétně stereometrii.
Převedla jsem do elektronické podoby přednášky z vlastních hodin matematiky a doplnila je o příklady ze cvičení a učebnice.
Tato práce bude užitečná pro zefektivnění a usnadnění další výuky.

Lenka Franců