§1. Polynomy, kořeny polynomů

*6. Rozložte v reálném a komplexním oboru: a) $x^4 + 4$ (b) $x^6 + 8$)

1.

$$\left(x^2\right)^2+2^2 = (2-ix^2)(2+ix^2) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2) = (1-i)(1+i)(-1+i)(-1-i)$$

2.

$$\left(x^2\right)^3+2^3 = (x^2+2)(x^4r-2x^2+4) = (x^2+2)(x^2-\sqrt{6}x+2)(x^2+\sqrt{6}x+2) =$$

$$= (x-\sqrt{1+i\sqrt{3}})(x-\sqrt{1+-\sqrt{3}})(x-\sqrt{-1+i\sqrt{3}})(x-\sqrt{-1-i\sqrt{3}})(x+1-i)(x+1+i)$$

*7. Určete kořeny a číslo $k\in \mathbf{R}$ polynomu $x^3 - 27x^2 + 242x + k$, jestliže kořeny daného polynomu jsou 3 za sebou jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Nechť kořeny jsou $a-b; a; a+b$.

$x^2 : -27 = -(a-b+a+a+b) = -3a \Rightarrow a = 9$
$x^1 : 242 = a^2 - ab + a^2 + ab + a^2 - b^2 = 3a^2 - b^2 \Rightarrow b = \pm 2$
$x^0 : k = -(a-b)a(a+b) = a(b^2-a^2) = 9(4-81) = -693$

***289.** **Lístek na koncert stál pro dospělého *n* Kčs, pro děti 1 Kčs. Jestliže přišlo na koncert celkem 320 osob a na vstupném bylo vybráno 520 Kčs, kolik bylo na koncertu dospělých? Pro která přirozená čísla *n* má tato úloha řešení? Určete ze zkušenosti, které číslo *n* nejpravděpodobněji vyhovuje úloze?**

$$520 = 320 - x + nx$$
$$200 = x(n-1)$$
$$\frac{200}{n-1} = x$$

Musí platit $200 \mid n-1$.

$$\textbf{a)}\quad \frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}\,;$$

$$\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{a^2-a^2}$$
$$\frac{x^2+ax-2ax+2a^2-8a^2}{x^2-a^2} = 0$$

$$\frac{-6a^2 - ax + x^2}{x^2 - a^2} = 0$$

$$\frac{-6a^2 - ax + x^2}{x^2 - a^2} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x}{a} + \frac{1}{ax - bx} + \frac{b}{a^2x - abx} = \frac{2}{a - b};$$

$$\frac{x(ax - bx) + a + b - 2ax}{a(a - b)x} = 0$$

$$\frac{ax^2 - 2ax + a - bx^2 + b}{ax(a - b)} = 0$$

$$\left|\begin{array}{c|c} a = b & \text{NDEF} \\ a = 0 & \text{NDEF} \\ \text{JINAK} & \left\{\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a-b)(a+b)}}{2(a-b)}\right\} \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y \quad + z &= 3, \\ x + p(y + z) &= 5, \\ y - z &= 0; \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & p & p & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & p-1 & p-1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Nemá řešení.

$$\begin{aligned} \text{c) } x + y + pz &= p, \\ x + pz &= 0, \\ y + pz &= 1; \end{aligned}$$

$$
\text{a) }\begin{aligned}
px + y + z &= 1\,,\\
x + py + z &= p\,,\\
x + y + pz &= p^2;
\end{aligned}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r \\ 1 & & r & 0 \\ & 1 & r & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & r & 0 \\ & 1 & r & 1 \\ & & -r & r-1 \end{array}\right)$$

$r=0$: $0z=-1 \Rightarrow$ NŘEŠ

$r\neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & r-1 \\ & 1 & & r \\ & & -r & r-1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x &= r-1 \\ y &= \cancel{r} \\ z &= \frac{1-r}{r} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & r \\ 1 & 1 & r & r^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & 1-r & 1-r^2 & 1-r^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r & r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & & \underset{(r-1)(r+2)}{2-r^2-r} & \cancel{1+r-r^2-r^3} \end{array}\right) \sim$$

$r=1$: $0z=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ NR

$r=-2$: $0z=3 \Rightarrow$ NR

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r-1 & & r^2-1 & r^3-r^2-r-r^2 \\ & r-1 & 1-r & r-r^2 \\ & & (r-1)(r+2) & 1+r-r^2-r^3 \end{array}\right) \sim$$

$$x = \frac{(r-2)(r^3-r^2-r-r)+(r+1)(1+r-r^2-r^3)}{(r-1)(r+2)(r+1)} \quad y = \frac{(r+2)(r-r^2)+1+r-r^2-r^3}{(r-1)(r+2)} \quad z = \frac{1+r-r^2-r^3}{(r-1)(r+2)}$$