§1. Derivace

Def: Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

značíme je $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 vlasní derivaci.

Je-li $f'(x_0) \in \{\pm\infty\}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 nevlasní derivaci.

Def: Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

značíme je $f'_+(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 zprava.

Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

značíme je $f'_+(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 zleva.

V.1.1.: Funkce f má derivaci v bodě x_0 právě tehdy když exisstují obě jednostrané derivace a jsou si rovny.

Př:

$f(x) = x^2$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim \frac{x^2}{x} = \lim x = 0$$

V.1.2.: Bolzanova věta:
Má-li funkce derivaci v nějakém bodě, pak je v tomto bodě spojitá.

Def: Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ pro všechna $x \in M$. Kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f : y = f'(x), x \in M$ nazvěme *derivací funkce f na M*.

Pozn: Geometricky je derivace f v bodě x_0 směrnici sečny grafu funkce f v x_0.

Př: 191/6:

1. $(x^4 + 1)' = 4x^3 = 0$
2. $(\sqrt[3]{x^2})'$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \frac{1}{x^{1/3}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = -\frac{1}{x^{1/3}} = -\infty$$

   Není :-(

3. $\operatorname{sgn}(x)$ Funkce není spojitá a tdy nemuže mít derivaci.

Př: 218/1:

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 3x^2 + 2 - 2}{x - 0} = 0$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; x_0 = \sqrt{5}$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2-1} - 2}{x - \sqrt{5}} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x^2 - 1 - 4}{(x-\sqrt{5})(\sqrt{x^2-1}+2)} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}+2} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$