§1. Kvadratické rovnice v $\mathbb{C}$

A) Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Pozn: S kvadratickou rovnicí s reálnými koeficienty a reálnou neznámou jsme se seznámili ve IV. kapitole.

Pozn: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Binomická rovnice $z^2 = -a^2; a \neq 0$ má v $\mathbb{C}$ právě dva kořeny. $z_1 = a \cdot i; z_2 = -a \cdot i$.

Def: Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou $z \in \mathbb{C}$ a reálnými koeficienty a, b, c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Pozn: Kvadratickou rovnici řešíme doplněním na čtverec:

$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{ca-b^2-4ac}{4a^2}$

$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

V.1.1.: Nechť $az^1 + bz + z = 0; a \neq 0$ (*) je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a nechť $D = b^2 - 4ac$ je její diskriminant. Pak platí:

1. $D > 0 \Rightarrow$ (*) má 2 různé reálné kořeny $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
2. $D = 0 \Rightarrow$ (*) má 1 reálný dvonásobný kořeny $z_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
3. $D < 0 \Rightarrow$ (*) má 2 komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

Př: Řešte c $\mathbb{C}$ rovnice:

1. $z^2 + z + 1 = 0$
   $z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$
2. $3z^2 - 2z\sqrt{3} - 1 = 0$
   $z_{1,2} = \frac{2\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{6}}{3}$

Př: 155/6:

1. $x^2 - 4x + 6 = 0$
   $x = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$
2. $5x^2 - 6x + 2 = 0$
   $x = \frac{6\pm\sqrt{36-40}}{10} = \frac{3\pm i}{5}$
3. $x^2 - 2x + 5 = 0$
   $x = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$
4. $2x^2 - 11x + 14 = 0$ $x = \frac{11-\sqrt{121-112}}{2} = \frac{11\pm3}{4} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{7}{2}$

Def: *Kvadratickou rovnicí s (komplexní) neznámou* $z \in \mathbb{C}$ a komplexními koeficienty a, b, c nazýváme každou rovnici tvaru $az^2 + bz + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{C}; a \neq 0$.

V.1.2.: Každá kvadratická rovnice s komplexními koeficienty má v množině komplexních čísel právě dva kořeny, počítáme-li dvojnásobný kořen za dva.

Př:

1. $z^2 + 2iz + 1 = (z+1)^2 - i^2 + 1 = 0$
   $t^2 = (z+i)^2 = -1$
   $t = \pm i\sqrt{2}$
   $z = -i \pm i\sqrt{2}$
2. $z = \frac{-2i \pm \sqrt{-8}}{2} = -i \pm i\sqrt{2} = i(-1+\sqrt{2})$
3. $z = x + iy$

$$(x+iy)^2 + (x+iy) + 2i + 1 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix - 2y + 1 = 0$$

   Porovnání koeficientů:
   $i^0 : x^2 - y^2 - 2y + 1 = 0$
   $i^1 : 2xy + 2x = x(y+1) = 0$

   (a) $x = 0$:
   $y^2 + 2y - 1 = 0$ $y = \frac{-2+pm\sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$
   $z = i(-1 \pm \sqrt{2})$

   (b) $y = -1$: $x^2 = -2 \Rightarrow$ nelze

Pozn: Pokud vyjde diskriminant D imaginární (s i), tak je potřeba vyřešit $\sqrt{D}$ pomocí binomické rovnice, nebo III. způsobu – viz následující příklad (spojení II. a III. způsobu).

Př: $z^2 + 3z + 10i = 0$

$D = 9 - 40i$
$\sqrt{D} = \sqrt{9-40i} = x + yi$
$9 - 40i = x^2 + 2xyi - y^2$

$i^0 : 9 = x^2 - y^2$
$i^1 : -40 = 2xy$

$9 = x^2 - 400x^2$
$0 = x^4 - 9x^2 - 400$
$x^2 = \frac{9 \pm 41}{2}$

$x^2 = 25$:
$x = 5; y = -4 \Rightarrow \sqrt{D} = 5 - 4i$
$x = -5; y = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = -5 + 4i$

$$z = \frac{-3 \pm (5-4i)}{2}$$
$$z_1 = 1 - 2i$$
$$z_2 = -4 + 2i$$