§1. Nekonečné řady

Pozn: V tomto paragrafu budeme studovat řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$. Posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neklesající a ke konvergenci takové řady podle V.6.2. stačí, aby byla shora omezená.

V.1.1.: Srovnávací kritérium konvergence:
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy s vlastností $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \geq a_n \geq b_n$, pak platí:

1. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Def: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ z předešlé věty se nazyvá *majorita řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Př: Dokažte divergenci harmonické řady:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$

Př: Dokažte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + 1 = 2.$

V.1.2.: Řaada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konverguje $\Leftrightarrow a > 2, a \in \mathbb{R}^+$.

V.1.3.: Limitní srovnávací kritérium:
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými čísli. Nechť $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pak platí:

1. $c \neq 0 \wedge c \neq \infty \Rightarrow$ řady se chovájí stejně.
2. $c = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
3. $c = \infty \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Př: Roozhodněte, zda řada konverguje či diverguje:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, která konverguje. Tedy konverguje.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3}{n^3+1} = 1$, tedy řada se chová stejně jako $\frac{1}{n^3}$, které divergují.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n+1}{n^4+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4+n^3+n^2}{n^4+1} = 1$, tedy řada se chová stejně jako $\frac{1}{n^2}$, které konvergují.

Př: 54/4:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6}$
   Porovnám s $\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1n^2+6}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+6} = 1$. Konverguje.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-2}$

   Porovnám s $\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n3n^2-2}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{3n^2-2} = \frac{1}{3}$. Diverguje.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+5}$

   Porovnám s $\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-12n^2+5}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^2-n}{2n^2+5} = \frac{2}{2} = 1$. Diverguje.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{2n^3-1}$

   Porovnám s $\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n-72n^3-1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3-7n^2}{2n^3-1} = \frac{1}{2}$. Konverguje.