Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše 14
Školní rok 2008/2009
třída 4.A

ZÁVĚREČNÁ MATURITNÍ PRÁCE

Rovnice a nerovnice

Autor: Ondřej Hrabec

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Boucník

Brno, 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou závěrečnou maturitní práci zpracoval samostatně a že jsem použil pouze materiál uvedený v seznamu literatury.

Dne 19. ledna 2009

Ondřej Hrabec

Obsah:

IV. Rovnice a nerovnice

§1. Lineární rovnice a nerovnice

Def.: Rovnicí s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ rozumíme každou výrokovou formu tvaru: $L(x) = P(x)$, kde $L(x)$, $P(x)$ jsou výrazy s proměnnou $x \in \boldsymbol{R}$.
Kořenem nebo-li řešením rovnice nazýváme taková $c \in \boldsymbol{R}$, pro která platí $L(c) = P(c)$.
Řešit rovnici znamená stanovit množinu P jejich kořenů (zpravidla výčtem prvků, případně rozhodnout, že P je prázdná).
Oborem pravdivosti rovnice nazýváme množinu P.

Def.: Lineární rovnicí s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ nazýváme každou rovnici, kterou lze úpravami převést do tvar $ax + b = 0$; $a,b \in \boldsymbol{R}$.

Pozn.: Při úpravě lineární rovnice na konečný tvar užíváme zpravidla úprav založených na platnosti těchto vět $\boldsymbol{R}$:
$\forall a,b,c \in \boldsymbol{R}$: a) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
b) $a = b \wedge c \neq 0 \Leftrightarrow ac = bc$
Lze tedy (aniž se změní obor pravdivosti P) provádět tyto úpravy:
a) přičítat k oběma stranám rovnice stejné číslo (stejný výraz);
b) násobit obě strany rovnice týmž nenulovým číslem (rovnice nenásobíme výrazem s proměnnou (může se změnit obor pravdivosti) a NIKDY nedělíme proměnnou.

V.1.1.: Nechť $ax + b = 0$; $a,b \in \boldsymbol{R}$; $x \in \boldsymbol{R}$. Pak platí:
1) $a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \{-\frac{b}{a}\}$
2) $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow P = \mathbf{R}$
3) $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow 0x \neq 0 \Rightarrow P = \phi$

Def.: Nerovnicí s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ rozumíme každou výrokovou formu tvaru $L(x) < P(x)$, $L(x) \leq P(x), L(x) > P(x), L(x) \geq P(x)$, kde $L(x)$ a $P(x)$ jsou výrazy s proměnnou $x \in \boldsymbol{R}$.
Řešením nerovnice nazýváme každé $c \in \boldsymbol{R}$, pro něž po dosazení za neznámou přejde nerovnice v pravdivý výrok.
Všechna řešení zpravidla zapisujeme pomocí intervalů, eventuálně množinových operací s nimi.

Def.: Lineární nerovnicí s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ nazýváme každou nerovnici, kterou lze úpravami převést do některého z tvarů:
$ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$; $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Pozn.: Při úpravách nerovnice na hledaný tvar využíváme následujících vět v $\boldsymbol{R}$:
$\forall a,b,c \in \boldsymbol{R}$: a) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
b) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
c) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

Analogické věty platí pro $>, \leq, \geq$.

V.1.2.: Nechť $ax + b < 0$; $a,b \in \boldsymbol{R}$ pak platí:

1) $a > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
2) $a < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
3) $a = 0 \wedge b > 0 \Rightarrow 0x < -b \Rightarrow P = \{\}$
4) $a = 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0x < -b \Rightarrow P = \boldsymbol{R}$
5) $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x < 0 \Rightarrow P = \{\}$

Analogicky se řeší další typy nerovnic.

Př.: Řešte nerovnice:

a) $4x - 1 \leq 3(2 - x) + 7(x - 1)$

$$4x - 1 \leq 6 - 3x + 7x - 7$$
$$4x - 1 \leq 4x - 1$$
$$0 \leq 0$$
$$x \in \mathbf{R}$$

b) $\frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{4} \geq x + 3$

$$8x - 16 - 5x + 5 \geq 20x + 60$$
$$3x - 11 \geq 20x + 60$$
$$-17x \geq 71$$
$$17x \leq -71$$
$$x \leq -\frac{71}{17}$$
$$x \in \left(-\infty; -\frac{71}{17}\right\rangle$$

Druhý příklad řešte také v **Z.**

$P_Z = \{\ldots; -6; -5\}$

§2. Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Def.: Rovnicí v součinovém tvaru s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ nazveme každou výrokovou formu tvaru $a(x) \cdot b(x) = 0$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou výrazy s proměnou $x \in \boldsymbol{R}$.

Pozn.: Řešení rovnice v součinovém tvaru se opírá o větu:
$\forall x, y \in \mathbf{R} : xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

V.2.1.: Nechť P_1 je množina kořenů rovnice $a(x) = 0$ a P_2 je množina kořenů rovnice $b(x) = 0$. Označme P množinu kořenů rovnice $a(x) \cdot b(x) = 0$. Pak $P = P_1 \cup P_2$.

[Dk.: a) $\underline{P \subseteq P_1 \cup P_2}$: Nechť $c \in P \Rightarrow a(c) \cdot b(c) = 0 \Rightarrow a(c) = 0 \vee b(c) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c \in P_1 \vee c \in P_2 \Rightarrow c \in P_1 \cup P_2$

b) $\underline{P_1 \cup P_2 \subseteq P}$: Nechť $c \in P_1 \cup P_2 \Rightarrow c \in P_1 \vee c \in P_2 \Rightarrow a(c) = 0 \vee b(c) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a(c) \cdot b(c) = 0 \Rightarrow c \in P$]

Př.: Řešte v **R**:

a) $(x-2)(x+5) = 0$

$x_1 = 2; x_2 = -5; P = \{2;-5\}$

b) $x^3 = 4x$

$x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x(x+2)(x-2) = 0$

$P = \{-2;0;2\}$

Def.: <u>Nerovnicí v součinovém tvaru</u> s neznámou x ∈ ***R*** nazýváme každou výrokovou formu tvaru $a(x) \cdot b(x) < 0, a(x) \cdot b(x) > 0, a(x) \cdot b(x) \leq 0, a(x) \cdot b(x) \geq 0$, kde $a(x), b(x)$ jsou výrazy s proměnnou x ∈ ***R***.

Pozn.: Řešení nerovnice v součinovém tvaru se opírá o platnost těchto vět:
Pro $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ **:** a) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0) \vee (x < 0, y < 0)$
b) $xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0, y \geq 0) \vee (x \leq 0, y \leq 0)$
c) $xy < 0 \Leftrightarrow (x > 0, y < 0) \vee (x < 0, y > 0)$
d) $xy \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0, y \leq 0) \vee (x \leq 0, y \geq 0)$

V.2.2.: Nechť P_1 je množina řešení nerovnice $a(x) > 0$, P_2 nerovnice $b(x) > 0$, P_3 nerovnice $a(x) < 0$, P_4 nerovnice $b(x) < 0$. Nechť P je množina všech řešení nerovnice $a(x) \cdot b(x) > 0$. Pak platí: $P = (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$.

[Dk.: a) $\underline{P \subseteq (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)}$: Nechť $c \in P \Rightarrow a(c) \cdot b(c) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow [a(c) > 0 \wedge b(c) > 0] \vee [a(c) < 0 \wedge b(c) < 0] \Rightarrow (c \in P_1 \wedge c \in P_2) \vee$
$\vee (c \in P_3 \wedge c \in P_4) \Rightarrow c \in (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$

b) $\underline{(P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4) \subseteq P}$: analogicky]

Př.: Řešte v ***R***:

a) $(4-x)(x+1) < 0 \Leftrightarrow (4 - x > 0 \wedge x + 1 < 0) \vee (4 - x < 0 \wedge x + 1 > 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x < 4 \wedge x < -1) \vee (x > 4 \wedge x > -1)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$P_1 = (-\infty, -1) \qquad P_2 = (4, \infty)$

$P = P_1 \cup P_2 = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

b) $\dfrac{2x-3}{7-3x} > 0 \Leftrightarrow (2x - 3 > 0 \wedge 7 - 3x > 0) \vee (2x - 3 < 0 \wedge 7 - 3x < 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x > \frac{3}{2} \wedge x < \frac{7}{3}) \vee (x < \frac{3}{2} \wedge x > \frac{7}{3})$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P_1 = (\frac{3}{2}, \frac{7}{3}) \qquad\qquad P_2 = \phi$$

$$P = (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$$

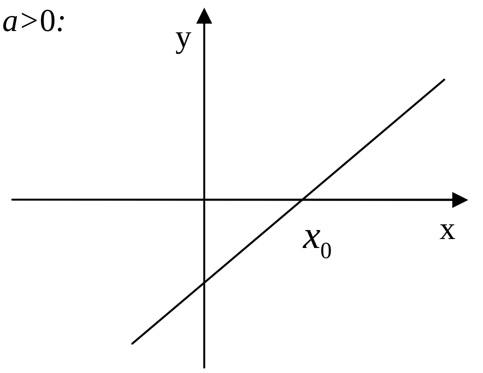
Def.: Výraz $V(x) = ax + b;\ a, b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0$ se nazývá <u>lineární dvojčlen.</u>

V.2.3.: Lineární dvojčlen $V(x) = ax + b;\ a, b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0$ nabývá všech reálných hodnot, každé právě jednou.

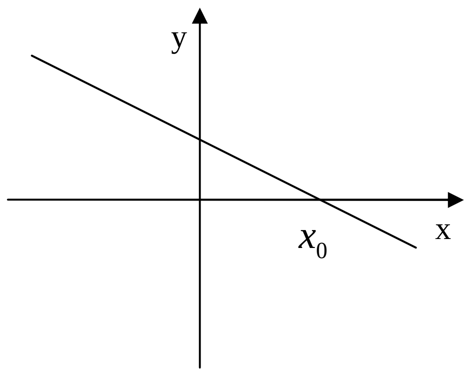
[Dk.: $y = ax + b, a \neq 0; y \in \boldsymbol{R} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$]

Pozn.: Představu o průběhu hodnot lineárního dvojčlenu poskytuje graf lineární funkce: $y=ax+b$

$a>0$:



$a<0$:



$$y = 0 : 0 = ax_0 + b \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$

V.2.4.: Nechť $ax + b, a \neq 0$ je lineární dvojčlen, $x_0 = -\dfrac{b}{a}$. Pak pro $\forall x \in \boldsymbol{R}$ platí:

a) $a > 0 : (x < x_0 \Rightarrow ax + b < 0) \wedge (x > x_0 \Rightarrow ax + b > 0)$

b) $a < 0 : (x < x_0 \Rightarrow ax + b > 0) \wedge (x > x_0 \Rightarrow ax + b < 0)$

[Dk.: a) $a > 0 : x < x_0 \Rightarrow ax < ax_0 \Rightarrow ax + b < ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax + b < 0$

$x > x_0 \Rightarrow ax > ax_0 \Rightarrow ax + b > ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax + b > 0$

b) analogicky]

Pozn.: Předchozí větu lze stručně zformovat takto:

a) Je-li $a>0$, pak v bodě $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ přechází funkce $y=ax+b$ ze záporných hodnot do kladných.

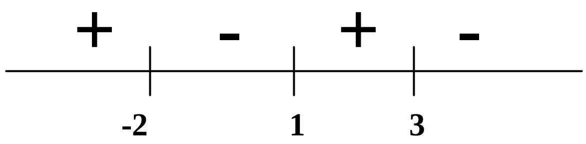
b) Je-li $a<0$, pak v bodě $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ přechází funkce $y=ax+b$ z kladných hodnot do záporných.

c)

Pozn.: Pomocí věty V.2.4. lze efektně řešit nerovnice v součinovém a podílovém tvaru (především v případě, že se v nich vyskytuje větší počet lineárních dvojčlenů).

Př.: Řešte v $\boldsymbol{R}$ nerovnice:

a) $(x-3)(x+2)(1-x)<0$



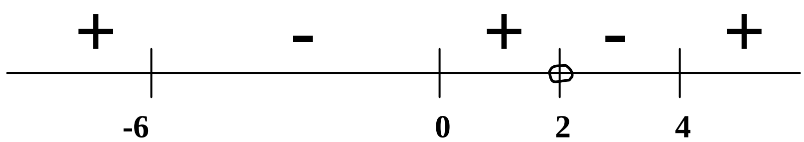
$P=(-2,1)\cup(3,\infty)$

Jiné řešení:

	$(-\infty,-2>$	$\langle -2,1\rangle$	$<1,3>$	$<3,\infty)$
x - 3	-	-	-	+
x + 2	-	+	+	+
1 - x	+	+	-	-
	+	-	+	-

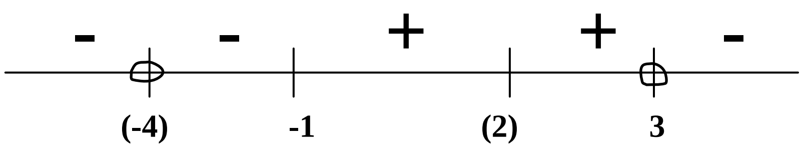
$\Rightarrow P=(-2,1)\cup(3,\infty)$

b) $\dfrac{(4-x)(6+x)x}{2-x}\le 0$



$\Rightarrow P=<-6,0>\cup(2,4>$

c) $\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(3-x)^3(4+x)^4}\le 0$



$\Rightarrow P=(-\infty,-4)\cup(-4,-1>\cup\{2\}\cup(3,\infty)$

Funkce mění znaménko jen v těch bodech, u nichž je lichý exponent.

§3. Absolutní hodnota

Def.: Absolutní hodnotou nazýváme číslo $a\in\boldsymbol{R}$, zapisujeme $|a|$, pro které platí:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad a>0 \Rightarrow |a|=a \\ 2.\quad a=0 \Rightarrow |a|=0 \\ 3.\quad a<0 \Rightarrow |a|=-a \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1)\quad a\geq 0 \Rightarrow |a|=a \\ 2)\quad a\leq 0 \Rightarrow |a|=-a \end{array}$$

Pozn.: Nechť $a\in R$ je číslo, pak platí:

1. $|a|\geq 0$
2. $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$
3. $\sqrt{a^2}=|a|$

V.3.1.: Nechť $a,b\in R$, pak $|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

V.3.2.: Nechť a je nezáporné reálné číslo a $x\in R$. Pak platí:

1. $|x|<a \Leftrightarrow x\in(-a;a)$
2. $|x|\leq a \Leftrightarrow x\in<-a;a>$
3. $|x|>a \Leftrightarrow x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$
4. $|x|\geq a \Leftrightarrow x\in(-\infty;-a>\cup<a;\infty)$

[Dk.: 1. $|x|<a$ a) „$\Rightarrow$“ : $\alpha)\quad x\geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x<a \Rightarrow x\in\langle 0;a)$

$\beta)\quad x\leq 0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow -x<a \Rightarrow x\in(-a;0\rangle$

$\Rightarrow x\in(-a;a)$

b) „$\Leftarrow$“ : $x\in(-a;a) \Rightarrow |x-0|<a \Rightarrow |x|<a$

ostatní analogicky]

A) <u>Zjednodušování výrazů s absolutní hodnotou</u>

Př.: Zjednodušte v $\boldsymbol{R}$:

a) $$A(x)=\frac{x^3+x^2-x-1}{\sqrt{x^2}+1}=\frac{x^3+x^2-x-1}{|x|+1}=\frac{x(x^2-1)+(x^2-1)}{|x|+1}=\frac{(x+1)(x^2-1)}{|x|+1}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{|x|+1}=\frac{(x+1)^2(x-1)}{|x|+1}$$

1) $\underline{x\geq 0} \Rightarrow \underline{\underline{A(x)}}=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x+1}=\underline{\underline{x^2-1}}$

2) $\underline{x\leq 0} \Rightarrow \underline{\underline{A(x)}}=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{1-x}=\dfrac{-(x+1)^2(1-x)}{1-x}=\underline{\underline{-(x+1)^2}}$

b) $B(x)=(x-|x|)(x+|x|)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$

V.3.3.: Nechť $a,b\in R; a<b$.

Nechť $(a,b);\langle a,b\rangle$ je omezený otevřený (uzavřený) interval.

Označme $s=\dfrac{a+b}{2}, k=\dfrac{b-a}{2}$.

Pak platí: 1) $x\in(a,b)\Leftrightarrow |x-s|<k$

2) $x\in\langle a,b\rangle \Leftrightarrow |x-s|\le k$

[Dk.: $s=\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow 2s=a+b$

$k=\dfrac{b-a}{2}\Rightarrow 2k=b-a$

$2s+2k=2b$

$b=s+k$

$2s-2k=2a$

$a=s-k$

1) „$\Leftrightarrow$“: $x\in(a,b)\Leftrightarrow x\in(s-k,s+k)\Leftrightarrow s-k<x<s+k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k<x-s<k\Leftrightarrow |x-s|<k$

2) analogicky]

Pozn.: a) Číslo <u>s</u> z V.3.3. se nazývá <u>střed intervalu</u> $(a,b);\langle a,b\rangle$. Číslo <u>$2k$</u> se nazývá <u>délka intervalu</u>.

b) Intervaly $(a,b);\langle a,b\rangle$ mají společný střed a stejnou délku.

c) Uvedeným způsobem lze charakterizovat pouze oboustranně otevřený nebo oboustranně uzavřený interval.

d) Logickým důsledkem V.3.3. je: 1) $x\in(-\infty;a)\cup(b;\infty)\Leftrightarrow |x-s|>k$

2) $x\in(-\infty;a\rangle\cup\langle b;\infty)\Leftrightarrow |x-s|\ge k$

Př.: Charakterizujte dané intervaly pomocí vzdálenosti jejich prvků od středu.

a) $(5;9)$ $x\in(5;9)\Leftrightarrow |x-7|<2$

b) $\langle -4;2\rangle$ $x\in\langle -4;2\rangle\Leftrightarrow |x-(-1)|\le 3\Leftrightarrow |x+1|\le 3$

B) <u>Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou</u>

Př.: a) $|3x-5|=2x+10$

1) $3x-5\ge 0$

$\underline{x\ge\frac{5}{3}}\Rightarrow 3x-5=2x+10$

$\underline{x=15}$

2) $\underline{x\le\frac{5}{3}}\Rightarrow -3x+5=2x+10$

$5x=-5$

$\underline{x=-1}$

$\underline{\underline{P=\{15;-1\}}}$

b) $2\cdot|4+3x|=6x+11$

1) $x \geq -\frac{4}{3} \Rightarrow 8+6x = 6x+11$

$0x = 3 \Rightarrow P_1 = \phi$

2) $x \leq -\frac{4}{3} \Rightarrow -8-6x = 6x+11$

$-19 = 12x$

$x = -\frac{19}{12}$

$\underline{\underline{P = \left\{-\frac{19}{12}\right\}}}$

c) $|x+2| + |x-2| = 2x+2$

$|x+2| + |x-2| = 2(x+1)$

	$(-\infty;-2\rangle$	$\langle -2;2\rangle$	$\langle 2;\infty)$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	$x-2$

1) $x \geq 2 \Rightarrow x+2+x-2 = 2(x+1)$

$2x = 2x+2$

$0x = 2 \Rightarrow P_1 = \phi$

2) $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x+2-x+2 = 2(x+1)$

$4 = 2x+2$

$2x = 2$

$x = 1 \Rightarrow P_2 = \{1\}$

3) $x \leq -2 \Rightarrow -x-2-x+2 = 2(x+1)$

$-2x = 2x+2$

$-4x = 2$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_3 = \phi$

$\underline{\underline{P = \{1\}}}$

Př.: $|3x-2| < 5+|x+1|$

	$(-\infty;-1\rangle$	$\left\langle -1;\frac{2}{3}\right\rangle$	$\left\langle \frac{2}{3};\infty\right)$
$\lvert 3x-2\rvert$	$2-3x$	$2-3x$	$3x-2$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

1) $x \leq -1 \Rightarrow -(3x-2) < 5-(x+1)$

$-3x+2 < 5-x-1$

$-3x+2 < 4-x$

$2 < 2x+4$

$2x > -2$

$x > -1 \Rightarrow P_1 = \phi$

2) $-1 < x < \frac{2}{3} \Rightarrow -(3x-2) < 5+(x+1)$

$-3x+2 < 6+x$

$2 < 6+4x$

$1 < 3+2x$

$2x > -2$

$$x > -1 \Rightarrow P_2 = \left(-1; \frac{2}{3}\right\rangle$$

3) $x \geq \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 < 5 + x + 1$

$3x - 2 < 6 + x$

$2x < 8$

$x < 4 \Rightarrow P_3 = \left\langle \dfrac{2}{3}; 4\right)$

$\underline{\underline{P = (-1;4)}}$

Př.: $3|x-1| + 2|x-2| \leq x + 10$

	$(-\infty;1\rangle$	$\langle 1;2\rangle$	$\langle 2;\infty)$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$x-1$	$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	$x-2$

1) $x \leq 1 \Rightarrow -3(x-1) - 2(x-2) \leq x + 10$

$-3x + 3 - 2x + 4 \leq x + 10$

$-5x + 7 \leq x + 10$

$7 \leq 6x + 10$

$6x \geq -3$

$x \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow P_1 = \left\langle -\dfrac{1}{2}; 1\right\rangle$

2) $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3(x-1) - 2(x-2) \leq x + 10$

$3x - 3 - 2x + 4 \leq x + 10$

$x + 1 \leq x + 10$

$1 \leq 10 \Rightarrow P_2 = \langle 1;2\rangle$

3) $x \geq 2 \Rightarrow 3(x-1) + 2(x-2) \leq x + 10$

$3x - 3 + 2x - 4 \leq x + 10$

$5x - 7 \leq x + 10$

$4x \leq 17$

$x \leq \dfrac{17}{4} \Rightarrow P_3 = \left\langle 2; \dfrac{17}{4}\right\rangle$

$\underline{\underline{P = \left\langle -\dfrac{1}{2}; \dfrac{17}{4}\right\rangle}}$

§4. Úpravy kvadratických výrazů

Def.: Každý výraz $V(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R, a \neq 0; x \in \boldsymbol{R}$ nazýváme kvadratickým trojčlenem.

Výraz ax^2 se nazývá kvadratický, bx lineární a c absolutní člen výrazu $V(x)$.

Je-li $a = 1$ nazýváme daný kvadratický trojčlen normovaný.

Pozn.: Je-li některý z koeficientů b, c roven nule, hovoříme o tzv. neúplném kvadratickém trojčlenu, případně o kvadratickém výrazu bez lineárního (absolutního) členu.

Pozn.: Upravme $(rx+s)(tx+u); r,s,t,u \in R; r \neq 0; t \neq 0 \Rightarrow$

$$(rx+s)(tx+u) = \underbrace{rt}_{a}x^2 + \underbrace{(st+ru)}_{b}x + \underbrace{su}_{c} = ax^2 + bx + c$$

Součinem dvou lineárních dvojčlenů dostaneme kvadratický trojčlen a naopak kvadratický trojčlen lze rozložit na součin dvou lineárních dvojčlenů (ne vždy v ***R***).

A) Rozklad neúplných kvadratických trojčlenů

a) bez absolutního členu: $c = 0 : ax^2 + bx = x(ax+b)$

b) bez lineárního členu: $b = 0 : ax^2 + c = a(x^2 + \frac{c}{a}) = a \cdot \left(x^2 - \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2} \right) =$

$= a\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}} \right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}} \right)$ trojčlen bez lineárního členu lze rozložit v ***R*** jen tehdy, když $ac < 0$.

B) Rozklad úplných kvadratických trojčlenů

Provádí se metodou „doplnění na úplný čtverec“.

Př.: a) $x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} =$

$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(x-3)$

b) $x^2 + 4x - 21 = (x+2)^2 - 2^2 - 21 = (x+2)^2 - 25 = (x+2)^2 - 5^2 =$

$= (x+2-5)(x+2+5) = (x-3)(x+7)$

c) $2x^2 + 9x - 5 = 2\left(x^2 + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] =$

$= 2\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2\right] = 2\left[\left(x + \frac{9}{4} - \frac{11}{4}\right)\left(x + \frac{9}{4} + \frac{11}{4}\right)\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5)\right] =$

$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5)$

Pozn.: Úpravy trojčlenů užíváme v těchto případech:

a) při úpravě výrazů
b) při řešení kvadratických rovnic a nerovnic
c) při hledání nejmenší a největší hodnoty výrazu

Př.: Nalezněte nejmenší hodnotu výrazu $V(x) = x^2 + 16x - 17$

Pomocí doplnění na čtverec: $V(x) = x^2 + 16x - 17 = (x+8)^2 - 8^2 - 17 = (x+8)^2 - 81$

minimum nastane pro $x_{\min} = -8$ je pro nulovou hodnotu výrazu $(x+8)^2$

$V(-8)=-81$, neboť $V(-8)=(-8)^2+16\cdot(-8)-17=-81$

§5. Kvadratické rovnice

Def.: Kvadratickou rovnicí s neznámou $x\in \boldsymbol{R}$ nazýváme každou rovnici tvaru $ax^2+bx+c=0;\ a,b,c\in \boldsymbol{R},\ a\neq 0$. Čísla a,b,c jsou koeficienty kvadratické rovnice.

Pozn.: Při řešení rovnice $y^2=k;\quad k,y\in \boldsymbol{R}$ s neznámou y rozlišíme tyto případy:

a) $k<0\Rightarrow P=\phi$

b) $k=0\Rightarrow P=\{0\}$

c) $k>0\Rightarrow P=\{-\sqrt{k};\sqrt{k}\}$

Při řešení kvadratické rovnice lze postupovat shodně, hledáme vhodný dvojčlen s proměnnou x, který označíme y a získáme rovnici $y^2=k$.

Obecné odvození $ax^2+bx+c=0$:

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$a\left(x+\underbrace{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{-x_1}\right)\left(x+\underbrace{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{-x_2}\right)=0$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{array}\right\} x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vztah pro kořeny kvadratické rovnice.

Def.: Nechť $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$ je kvadratická rovnice. Pak $b^2-4ac=D$ se nazývá diskriminant kvadratické rovnice.

V.5.1.: Nechť $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$ je kvadratická rovnice, b^2-4ac její diskriminant, pak platí: a) $D>0 \Rightarrow P=\left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$

b) $D=0 \Rightarrow P=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

c) $D<0 \Rightarrow$ nemá řešení v $\boldsymbol{R}$

Pozn.: Při zápisu kořenů kvadratické rovnice dodržujeme následující pravidla:

a) Racionální kořeny krátíme (zapíšeme v základním tvaru).
b) Iracionální kořeny zapisujeme ve tvaru $p+q\sqrt{n}; p,q\in Q; n\in N$.
Pokud lze z odmocniny něco vytknout, uděláme to $\left(\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}\right)$.

§6. Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Pozn.: Z předchozích úvah plyne, že každá kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$ (◊) má v $\boldsymbol{R}$ nejvýše 2 kořeny.
Obměna: Jestliže má (◊) alespoň 3 kořeny, pak a=0.
Hledejme podmínky pro koeficienty b,c v rovnici $bx+c=0$, tak aby měla alespoň 3 různé kořeny v $\boldsymbol{R}$. Jde o lineární rovnici, jestliže platí $b=0 \wedge c=0 \Rightarrow P=\boldsymbol{R}$, platí tedy následující věta:

V.6.1.: Pro každou kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$ platí: $P=\boldsymbol{R} \Leftrightarrow a=b=c=0$

V.6.2: Pro každé 2 kvadratické trojčleny $a_1x^2+b_1x+c_1=0; a_2x^2+b_2x+c_2=0$ platí:
$\forall x\in R: a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \wedge b_1=b_2 \wedge c_1=c_2$
[Dk.: „$\Leftarrow$“: zřejmé
„$\Rightarrow$“: $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2 \Rightarrow (a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+$
$+(c_1-c_2)=0 \Rightarrow a_1-a_2=0 \wedge b_1-b_2=0 \wedge c_1-c_2=0 \Rightarrow$
$a_1=a_2 \wedge b_1=b_2 \wedge c_1=c_2$]

Def.: Je-li x_1 kořenem kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$, nazýváme dvojčlen $x-x_1$ <u>kořenovým činitelem</u>.
Zápis $a(x-x_1)(x-x_2)$ nazýváme <u>rozkladem</u> trojčlenu ax^2+bx+c <u>na součin kořenových činitelů</u>.

Pozn.: Je-li $x_1=x_2$, pak platí $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ a mluvíme o tzv. <u>dvojnásobném kořenu</u> (pokud D=0).

V.6.3: Rovnice $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$ má v $\boldsymbol{R}$ dva reálné kořeny právě tehdy, když kvadratický trojčlen ax^2+bx+c lze rozložit na součin kořenových činitelů $a(x-x_1)(x-x_2)$.

V.6.4: Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice neboli Viètovy vztahy (Newton-Viètovy vztahy): Nechť x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$. Pak platí: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

[Dk.: Nechť x_1, x_2 jsou kořeny: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=$

$$=a(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2)=ax^2-ax(x_1+x_2)+ax_1x_2\Rightarrow$$

x^1: $b=-a(x_1+x_2)\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

x^0: $c=ax_1x_2\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$]

Př.: Určete druhý kořen rovnice $8x^2-2x-3=0$, jestliže $x_1=\frac{3}{4}$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\qquad \frac{3}{4}+x_2=\frac{2}{8}\Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}$$

Př.: Aniž byste kvadratickou rovnici řešili, napište takovou rovnici, jejíž kořeny jsou:

a) opačná čísla

b) převrácená čísla, než kořeny rovnice $4x^2-11x+5=0$

a) $4x^2-11x+5=0$ - původní rovnice

$4\cdot(x-x_1)(x-x_2)=0$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\qquad x_1\cdot x_2=\frac{5}{4}$

$x\ +x_2=-\frac{b}{a}\qquad x_1+x_2=\frac{11}{4}$

nová rovnice:

$4\cdot(x+x_1)(x+x_2)=0$

$4\cdot(x^2+(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

$4\cdot\left(x^2+\frac{11}{4}x+\frac{5}{4}\right)=0$

$4x^2+11x+5=0$

b) $4x^2-11x+5=0$ - původní rovnice

nová rovnice:

$4\cdot\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0$

$$4\cdot\left(x^2-\frac{x}{x_1}-\frac{x}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}\right)=0$$

$$4\cdot\left(x^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x+\frac{1}{x_1x_2}\right)=0$$

$$4\cdot\left(x^2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\cdot x+\frac{1}{x_1x_2}\right)=0$$

$$4\cdot\left(x^2-\frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{4}}\cdot x+\frac{1}{\frac{5}{4}}\right)=0$$

$$4\cdot\left(x^2-\frac{11}{5}x+\frac{4}{5}\right)=0$$

$$x^2-\frac{11}{5}x+\frac{4}{5}=0$$

$$5x^2-11x+4=0$$

§7. Kvadratické nerovnice

Def.: Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x\in \boldsymbol{R}$ nazýváme každou nerovnici, kterou lze převést do tvaru $ax^2+bx+c<0$ $(>;\leq;\geq)$; $a,b,c\in\ \boldsymbol{R}\ ,a\neq 0$.
Řešit kvadratickou nerovnici znamená stanovit její obor pravdivosti P v **R**, a to výčtem prvků nebo pomocí intervalů a množinových operací s nimi.

Př.:

a) $x^2-6x+9<0$

$(x-3)^2<0$

$\underline{\underline{P=\phi}}$

b) $x^2-6x+9\leq 0$

$(x-3)^2\leq 0$

$\underline{\underline{P=\{3\}}}$

c) $x^2-6x+10>0$

$(x-3)^2+1>0$

$(x-3)^2>-1$

$\underline{\underline{P=R}}$

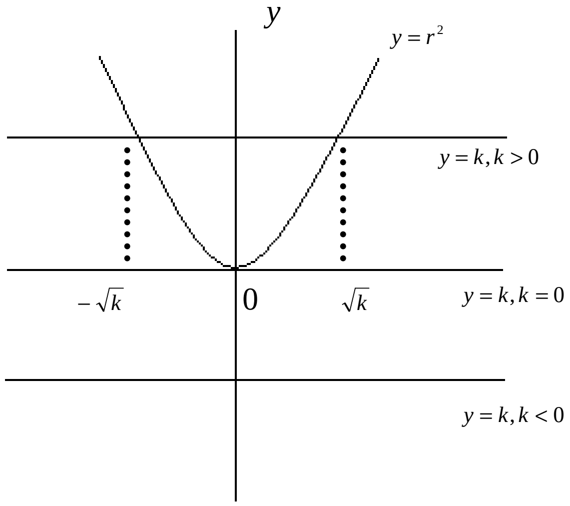
d) $x^2-6x+8>0$

$(x-3)^2>1$

$\underline{\underline{P=(-\infty;2)\cup(4;\infty)}}$

Pozn.: Klasifikace řešení kvadratické nerovnice bez lineárního členu:

	$k<0$	$k=0$	$k>0$
$z^2 < k$	ϕ	ϕ	$\left(-\sqrt{k};\sqrt{k}\right)$
$z^2 \le k$	ϕ	$\{0\}$	$\left\langle -\sqrt{k};\sqrt{k}\right\rangle$
$z^2 > k$	R	$R-\{0\}$	$\left(-\infty;-\sqrt{k}\right)\cup\left(\sqrt{k};\infty\right)$
$z^2 \ge k$	R	R	$\left(-\infty;-\sqrt{k}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{k};\infty\right)$



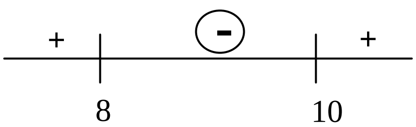
Pozn.: I při řešení kvadratické nerovnice s lineárním členem lze předchozí tabulky použít, doplníme-li kvadratický trojčlen na úplný čtverec:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Po substituci $z=x+\dfrac{b}{2a}$ přejdeme na výše uvedený tvar.

Př.: Řešte v $\boldsymbol{R}$ nerovnici : a) $x^2-18x+80\le 0$

$(x-10)(x-8)\le 0$



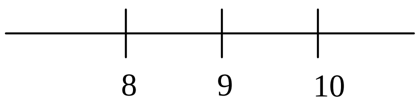
$P=\langle 8;10\rangle$

$(x-9)^2-81+80\le 0$

$(x-9)^2-1\le 0$

$(x-9)^2\le 1$

$|x-9|\le 1$



$P=\langle 8;10\rangle$

b) $2x^2+8x+1>0$

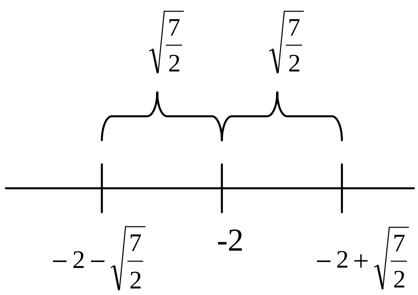
$x^2+4x+\dfrac{1}{2}>0$

$(x+2)^2-4+\dfrac{1}{2}>0$

$(x+2)^2-\dfrac{7}{2}>0$

$(x+2)^2>\dfrac{7}{2}$

$|x+2|>\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ $\quad P=\left(-\infty;-2-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\right)\cup\left(-2+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{14};\infty\right)$



§8. Důsledkové úpravy rovnic

Def.: Přechod od rovnice $L_1(x)=P_1(x)$ s oborem pravdivosti P_1 k rovnici $L_2(x)=P_2(x)$ s oborem pravdivosti P_2 a se společným definičním oborem *D*, založený na platnosti věty: $\forall x\in D: L_1(x)=P_1(x)\Rightarrow L_2(x)=P_2(x)$ nazýváme důsledkovou úpravou rovnice $L_1(x)=P_1(x)$.

Pozn.: Pro P_1, P_2 zřejmě platí: $P_1\subseteq P_2$, tzn. důsledkovou úpravou rovnice lze získat rovnici, jejíž obor pravdivosti je „větší“ než u původní rovnice.

V.8.1.: Přehled důsledkových úprav rovnice $L(x)=P(x)$, $x\in$ ***R*:**

Nechť *D* je definiční obor, pak $\forall x\in D$ platí:

1) $L(x)=P(x)\Rightarrow P(x)=L(x)$ záměna stran rovnice
2) $G(x)=L(x)\wedge G(x)=P(x)\Rightarrow L(x)=P(x)$ „jakási substituce“
3) $L(x)=P(x)\Rightarrow L(x)+C(x)=P(x)+C(x)$ přičtení k oběma stranám rovnice stejného výrazu definovaného v *D*
4) $L(x)=P(x)\Rightarrow L(x)\cdot C(x)=P(x)\cdot C(x)$ násobení obou stran rovnice výrazem definovaným v *D*
5) $L(x)=P(x)\Rightarrow L^n(x)=P^n(x), n\in N$ umocnění obou stran rovnice
6) $L(x)=P(x)\Rightarrow \sqrt[n]{L(x)}=\sqrt[n]{P(x)}, n\in N; L(x)\geq 0; P(x)\geq 0$ odmocnění obou nezáporných stran rovnice

Def.: Ekvivalentní úpravou dané rovnice nazýváme její důsledkovou úpravou, při níž získáme rovnici s týmž oborem pravdivosti, jako měla rovnice původní. Dané dvě rovnice nazýváme ekvivalentní.

Pozn.: a) Je zřejmé, že ve V.8.1. nelze všechny implikace obrátit (proto ne všechny úpravy jsou ekvivalentní).

b) Při řešení rovnice důsledkovými úpravami rozlišujeme dvě fáze:

1. rozbor (řešení) – užitím V.8.1 stanovíme $P_2 : P_2 \geq P_1$
2. zkouška – určíme, které prvky P_2 patří do P_1

Př.: a) $1+\dfrac{3(x-3)}{2(x-2)}+\dfrac{15}{x(x-2)}=\dfrac{6}{x-2}$ $\qquad /\cdot 2x(x-2)$

$2x^2-4x+3x^2-9x+30=12x$

$5x^2-25x+30=0$

$x^2-5x+6=0\Rightarrow(x-3)(x-2)=0\Rightarrow x_1=3, x_2=2$

Zk.: *L*(3)=1+0+5=6
P(3)=6
L(3)=*P*(3)
L(2) – výraz nedefinován

$\Rightarrow P=\{3\}$

b) $3\sqrt{x}+x+2=0$

$3\sqrt{x}=-(x+2)$ $\qquad /()^2$

$9x=x^2+4x+4$

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=4$

Zk.: $L(1)=6 \quad P(1)=0 \quad L(1)\neq P(1)$

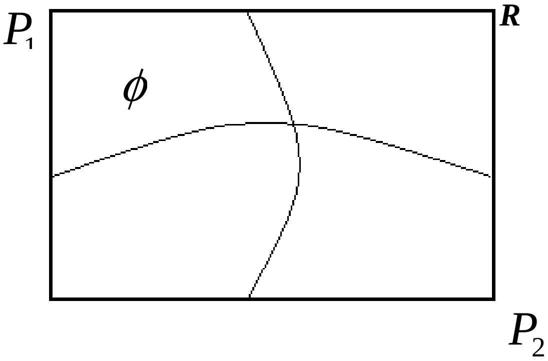
$L(4)=12 \quad P(4)=0 \quad L(4)\neq P(4)$

$\Rightarrow P=\phi$

Pozn.: Množinová podstata rozboru a zkoušky:

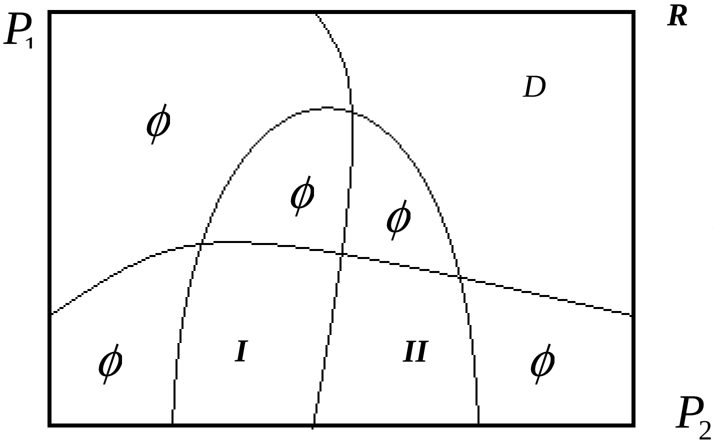
Při řešení rovnice v ***R*** důsledkovými úpravami vyjadřujeme obor pravdivosti P_1 pomocí jiné množiny P_2:

a) Neurčíme-li def. obor D dané rovnice, rozborem (řešením) zjistíme, že $P_1 \subseteq P_2$.



Pro zakreslení prvků P_2 jsou k dispozici 2 pole: $P_1 \cap P_2, P_1' \cap P_2$. Teprve zkouškou rozhodneme, do kterého pole prvky P_2 patří.

b) Určíme-li def. obor D dané rovnice, víme, že $P_1 \subseteq D$. Z rozboru plyne, že $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow P_1 \subseteq D \cap P_2$.



Znovu zbývají 2 pole: $I - P_1 \cap P_2 \cap D$, $II - P_1' \cap P_2 \cap D$ pro zakreslení prvků $D \cap P_2$. Teprve zkouškou rozhodneme, do kterého pole který prvek patří.

Př.!: Řešte v ***R*** rovnici:

$\sqrt{2(x+1)}+1=\sqrt{2x-5}$ $\qquad /()^2$

určení D:
$$\left.\begin{aligned} 2(x+1)\geq 0 &\Rightarrow x\geq -1 \\ 2-5\geq 0 &\Rightarrow x\geq \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{D=\left\langle \frac{5}{2},\infty\right)}$$

$2(x+1)+2\sqrt{2(x+1)}+1=2x-5$

$2x+3+2\sqrt{2(x+1)}=2x-5$

$2\sqrt{2(x+1)}=-8$

$\sqrt{2(x+1)}=-4 \qquad /()^2$

$2(x+1)=16$

$x+1=8$

$x=7$

$P\subseteq\{7\}$

Zk.: $L=\sqrt{16}+1=5$

$P=\sqrt{9}=3$

$L\neq P$

$\underline{P=\phi}$

Pozn.: Důsledkové úpravy rovnic lze užít i při řešení rovnic s absolutní hodnotou.

Př.: $2|x-5|=x \Rightarrow 4(x^2-10x+25)=x^2 \Rightarrow 3x^2-40x+100=0$

$$x_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{(-40)^2-4\cdot3\cdot100}}{6}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1200}}{6}=\frac{40\pm20}{6}\Rightarrow x_1=10, x_2=\frac{10}{3}$$

Zk.: $L(10)=10$ $\quad P(10)=10$

$L(\frac{10}{3})=\frac{10}{3}$ $\quad P(\frac{10}{3})=\frac{10}{3}$ $\quad \Rightarrow P=\left\{\frac{10}{3},10\right\}$

§9. Rovnice a nerovnice s parametrem

Def.: Rovnici (nerovnici) se dvěma proměnnými $x, p \in \boldsymbol{R}$ nazýváme <u>parametrickou rovnicí (nerovnicí)</u> s neznámou x a s parametrem p, považujeme-li ji jako zápis všech rovnic (nerovnic), které získáme dosazováním konstanty za parametr p.
<u>Řešit rovnici (nerovnici) s parametrem</u> znamená určit množinu všech řešení v závislosti na parametru, přičemž zpravidla řešíme tuto rovnici (nerovnici) pro všechny přípustné hodnoty parametru.

Pozn.: Analogicky definujeme rovnici (nerovnici) s více parametry.

A) <u>Lineární rovnice s parametrem</u>

Př.: Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici s parametrem $p \in \boldsymbol{R}$:

a) $p^2(x-1)=2(px-2)$

$p^2x-p^2=2px-4$

$p^2x-2px=p^2-4$

$xp(p-2)=(p-2)(p+2)$

$\underline{p=2}$

$0x=0$

$\underline{\underline{P_2=R}}$

$\underline{p\neq 2}$

$xp=p+2$

$\underline{p=0}$

$0x=2$

$P_0=\phi$

$\underline{p\neq 0}$

$x=\dfrac{p+2}{p}$

$P_p=\{\dfrac{p+2}{p}\}$

p	P
2	$\boldsymbol{R}$
0	ϕ
$\boldsymbol{R}-\{0,2\}$	$\{\dfrac{p+2}{p}\}$

b) $\dfrac{p}{x}-\dfrac{1}{px}=1-\dfrac{1}{p}$ $\underline{p\neq 0}$

$\dfrac{p^2-1}{px}=\dfrac{p-1}{p}$ $/\cdot x$ -důsledková úprava (neekvivalentní)

$p^2-1=x(p-1)$

$(p-1)(p+1)=(p-1)x$

$\underline{p=1}$

$0x=0$

$\underline{P_1\subseteq R}$

$\underline{p\neq 1}$

$x=p+1$

$\underline{P_p\subseteq\{p+1\}}$

p	P
0	nemá smysl
1	$\boldsymbol{R}-\{0\}$
-1	ϕ
$\boldsymbol{R}-\{-1,0,1\}$	$\{p+1\}$

zk.: $\underline{p=1}:\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=1-1$

$0x=0$ pro $\forall x\in R-\{0\}\Rightarrow \underline{\underline{P_1=R-\{0\}}}$

$\underline{p\neq 1},x=p+1:\ L(p+1)=\dfrac{p}{p+1}-\dfrac{1}{p(p+1)}=\dfrac{p^2-1}{p(p+1)}=\dfrac{(p+1)(p-1)}{p(p+1)}$

$\underline{p=-1}$

$\underline{\underline{P_{-1}}}=\phi$

$\underline{p\neq -1}$

$\underline{\underline{L(p+1)=\dfrac{p-1}{p}}}$

$\underline{\underline{P(p+1)}}=1-\dfrac{1}{p}=\underline{\underline{\dfrac{p-1}{p}}}$

$L(p+1)=P(p+1)$ pro $\forall p\in R-\{0,1,-1\}\Rightarrow \underline{\underline{P_p=\{p+1\}}}$

B) Kvadratické rovnice s parametrem

Př.: Řešte v ***R*** rovnici s parametrem p ∈ ***R***:

$$px^2+(2p+1)x+p-4=0$$

1. $\underline{p=0}$: rovnice lineární: $x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0=\{4\}}}$

2. $\underline{p\neq 0}$: rovnice kvadratická:

$$D=(2p+1)^2-4p(p-4)=4p^2+4p+1-4p^2+16p=20p+1$$

a) $D>0: 20p+1>0 \Rightarrow \underline{p>-\frac{1}{20}} : \underline{\underline{P_p=\{\frac{-2p-1\pm\sqrt{20p+1}}{2p}\}}}$

b) $D=0: 20p+1=0 \Rightarrow \underline{p=-\frac{1}{20}} : x=\frac{\frac{1}{10}-1}{-\frac{1}{10}}=9 \Rightarrow \underline{\underline{P_{-\frac{1}{20}}=\{9\}}}$

c) $D<0: 20p+1<0 \Rightarrow \underline{p<-\frac{1}{20}} : \underline{\underline{P_{p'}}}=\phi$

p	P
0	$\{4\}$
$(-\frac{1}{20},0)\cup(0,\infty)$	$\{\frac{-2p-1+\sqrt{20p+1}}{2p},\frac{-2p-1-\sqrt{20p+1}}{2p}\}$
$-\frac{1}{20}$	$\{9\}$
$\left(-\infty,-\frac{1}{20}\right)$	ϕ

C) Nerovnice s parametrem

Př.: Řešte v $\boldsymbol{R}$ nerovnici s parametrem $p\in\boldsymbol{R}$:

$$px<p-1$$

$\underline{p=0}$

$0x<-1$

$\underline{\underline{P_0=\phi}}$

$\underline{p>0}$

$x<\frac{p-1}{p}$

$\underline{\underline{P_p=(-\infty,\frac{p-1}{p})}}$

$\underline{p<0}$

$x>\frac{p-1}{p}$

$\underline{\underline{P_{p'}=(\frac{p-1}{p},\infty)}}$

p	P
0	ϕ
$(0,\infty)$	$\left(-\infty,\frac{p-1}{p}\right)$
$(-\infty,0)$	$\left(\frac{p-1}{p},\infty\right)$

§10. Slovní úlohy

Pozn.: Schéma řešení slovní úlohy:

$$\begin{tikzcd} \text{slovní úloha} \arrow[r, "\textit{matematizace}"] \arrow[d, dotted, no head] & \text{matematický model slovní úlohy} \arrow[d] \\ \text{vyřešená úloha} & \text{vyřešený model slovní úlohy} \arrow[l, "\text{int } \textit{erpretace}"'] \end{tikzcd}$$

Př.: V dílně se má vyrobit 200 výrobků, zlepšenou organizací práce se má denně vyrobit o 5 výrobků více než určuje plán, a skončit tak práci o 2 dny dříve. Za jakou dobu se vyrobí plánovaných 200 výrobků?

v….počet výrobků za 1 den po reorganizaci
d….počet dní výroby po reorganizaci
denní výkon po reorganizaci: $vd = 200$ výrobků
v-5…. počet výrobků za 1 den dle plánu
d+2….počet dní výroby dle plánu
denní výkon dle plánu: $(v-5)(d+2) = 200$ výrobků

$$v = \frac{200}{d}$$

$$\left(\frac{200}{d} - 5\right)(d+2) = 200$$

$$\frac{200-5d}{d}(d+2) = 200$$

$$(200-5d)(d+2) = 200d$$

$$200d - 5d^2 - 400 - 10d - 200d = 0$$

$$-5d^2 - 10d + 400 = 0$$

$$d^2 + 2d - 80 = 0$$

$$(d-8)(d+10) = 0$$

$$d_1 = 8; d_2 = -10$$

Význam má nezáporné řešení: Plánovaných 200 výrobků se vyrobí se za 8 dnů.

Př.: Petr si koupí za 180 korun stejné knihy, kdyby bylo za stejné peníze o 3 knihy více, byla by každá kniha o 3 koruny levnější. Kolik stojí každá kniha?

c….cena knihy k…počet knih

$$ck = 180$$

$$(c-3)(k+3) = 180$$

$$\left(\frac{180}{k} - 3\right)(k+3) = 180$$

$$(180-3k)(k+3) = 180k$$

$$180k - 3k^2 + 540 - 9k - 180k = 0$$

$$k^2 + 3k - 180 = 0$$

$$(k+15)(k-12) = 0$$

$$k_1 = -15; k_2 = 12 \Rightarrow c_1 = -12; c_2 = 15$$

Každá kniha stojí 15 korun.

§11. Kartézský součin

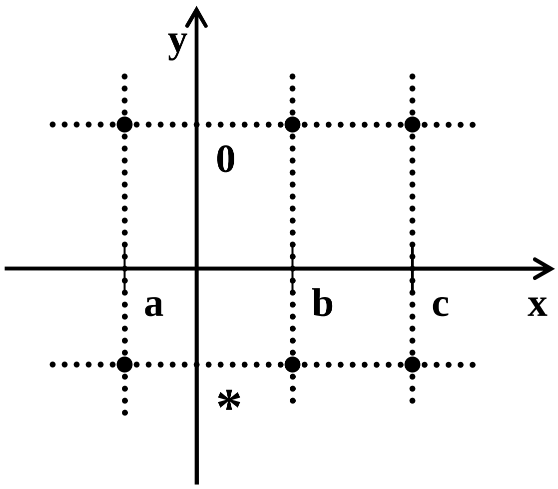
Pozn.: Uspořádanou dvojicí prvků $[x,y]$ rozumíme dvojice prvků, u nichž záleží na pořadí.
Platí: $[a,b]=[c,d] \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

Def.: Kartézským součinem množin A, B nazýváme množinu $A\times B$ všech uspořádaných dvojic $[a,b]$ takových, že $a \in A$, $b \in B$.
$A\times B = \{[a,b] : a\in A \wedge b\in B\}$

Pozn.:
a) Kartézský součin $A\times A$ zapisujeme A^2 a nazýváme druhou kartézskou mocninou množiny A nebo kartézským čtvercem množiny A.
b) Jsou-li množiny A,B konečné, je počet prvků množiny $A\times B$ (označíme jej $m(A\times B)$) také konečný a platí: $m(A\times B)= m(A)\cdot m(B)$, kde $m(A),(m(B))$ je počet prvků množiny $A(B)$.
c) Kartézský součin obecně není komutativní: $A\times B \neq B\times A$.
d) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow A=B \vee A=\phi \vee B=\phi$

Př.: Nechť $A=\{a,b,c\}; B=\{*,0\}$. Určete $A\times B$.
$A\times B = \{[a,*];[b,*];[c,*];[a,0];[b,0];[c,0]\}$

Pozn.: Kartézský součin $A\times B$ lze znázorňovat graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic – mluvíme o kartézském grafu: prvky množiny A nanášíme na osu x, prvky množiny B na osu y. Kartézským grafem z minulého příkladu je množina bodů.



§12. Binární relace a jejich grafy

Pozn.: Výroková forma $V(x,y)$ se dvěma neznámými $x\in A, y\in B$ je zápis, který se po dosazení konstant na místa proměnných x, y stává výrokem.
Protože dosazujeme uspořádané dvojice $[x,y]\in A\times B$, platí, že definiční obor i obor pravdivosti výrokové formy $V(x,y)$ jsou množiny uspořádaných dvojic.

Def.: Nechť A, B jsou 2 množiny. Pak každou podmnožinou $M \subseteq A\times B$ nazýváme binární relací mezi množinami A, B (v tomto pořadí).
Je-li speciálně $A=B$, pak relace $M \subseteq A^2$ se nazývá (binární) relací v množině A.

Pozn.: Relace, která neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici prvků, se nazývá <u>prázdná relace</u> a označuje se ϕ. Platí: $\forall A, B : \phi \subseteq A \times B$.
Relace $U = A \times B$ se nazývá <u>univerzální relace</u>.

Pozn.: Binární relace budeme někdy nazývat jen relace.

Pozn.: Způsoby zadání binární relace:
a) výčtem prvků (pouze konečné relace)
např. $A = \{1,2,3\}; B = \{a,b\}; M = \{[1,a],[1,b]\}$
b) jako obor pravdivosti výrokové formy *V(x,y)* s definičním oborem *D*
např. $A = B = R; M_1 = \{[x,y] \in R^2 : y \leq x\}$
$A = B = E_2$ (E_2...množina všech bodů v rovině);
$M_2 = \{[x,y] \in E_2^2 : |xy| = 1\}$
A=*Ž* (množina žáků), *B*=*U* (množina učebnic); $M_3 = \{[ž,u] \in ŽxU$: žák *ž* je majitelem učebnice *u*$\}$
Obecný zápis: $M = \{[x,y] \in AxB : V(x,y)\}$

Pozn.: Protože relace jsou definovány jako jisté množiny, má smysl s nimi provádět množinové operace (průnik, sjednocení, doplněk,…).

Pozn.: Grafickým vyjádřením binární relace je u konečných množin množina bodů.

Def.: Výrokovou formu tvaru *ax+by+c=0*, kde $x, y \in R$ jsou neznámé a $a,b,c \in R; [a,b] \neq [0,0]$ jsou koeficienty, nazýváme <u>lineární rovnicí se dvěma neznámými *x, y*</u>.
<u>Řešením</u> rovnice se 2 neznámými je množina všech uspořádaných dvojic $[x_0, y_0] \in R^2$, které po dosazení za neznámé (v příslušném pořadí) převádí výrokovou formu *V(x,y)* v pravdivý výrok.

Pozn.: Je-li $[a,b] \neq [0,0]$, pak grafickým znázorněním množiny (grafem) $L = \{[x,y] \in R^2 : ax + by + c = 0\}$ je přímka.
Je-li $[a,b] = [0,0]$, pak zřejmě platí: a) $c = 0 \Rightarrow L = R^2 = E_2$ (množina všech bodů v rovině)
b) $c \neq 0 \Rightarrow L = \phi$

Pozn.: V zájmu stručného vyjadřování budeme v dalším množinu *L* ztotožňovat s jejím grafickým obrazem.

Def.: Výrokovou formu tvaru $ax + by + c > 0$ ($ax + by + c \geq 0; ax + by + c < 0; ax + by + c \leq 0$) nazýváme <u>lineární nerovnicí se 2 neznámými</u> $x, y \in R$ a s koeficienty $a,b,c \in R$; $[a,b] \neq [0,0]$.

Pozn.: Je-li $[a,b] \neq [0,0]$, je grafem lineární nerovnice s 2 neznámými $L = \{[x,y] \in R^2 : ax + by + c > 0\}$ polorovina s hraniční přímkou $ax + by + c = 0$.

§13. Systém lineárních rovnic

Pozn.: V tomto paragrafu se budeme zabývat lineárními rovnicemi s n neznámými $x_1, x_2, ..., x_n \in R$. Je tedy nutno rozšířit pojem kartézského součinu na součin n množin: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, jehož prvky jsou uspořádané n-tice:
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{[x_1, x_2, ..., x_n] : x_i \in A_i \text{ pro } \forall i \in \{1,2,...,n\}\}$.
Zpravidla budeme pracovat se součinem $R \times R \times ... \times R = R^n = \{[x_1, x_2, ..., x_n] : x_i \in R$ pro $\forall i \in \{1,2,...,n\}\}$.
n-ární relace je pak každá podmnožina tohoto kartézského součinu.

Def.: Nechť $a_1, a_2, ..., a_n, b \in R$. Výrokovou formu tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ s neznámými $x_1, x_2, ..., x_n$ a koeficienty $a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme lineární rovnicí s n neznámými. Číslo $b \in R$ nazýváme absolutním členem této rovnice.
Řešením rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ nazýváme každou uspořádanou n-tici $[p_1, p_2, ..., p_n] \in R^n$, jestliže výrok $a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n = b$ je pravdivý.

Př.: a) Rovnice $2x - 3y = 4$ je lineární rovnice se 2 neznámými $x, y \in R$.
Řešením je například uspořádaná dvojice $[2,0]$.
b) Rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ je lineární rovnice se 4 neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.
Řešením je například $[0,0,0,0];[1,-1,1,-1]$.

Def.: Systém rovnic

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

kde $m, n \in N; a_{ij} \in R, b_i \in R; i \in \{1,2,...,m\}; j \in \{1,2,...,n\}$ nazýváme systémem (soustavou) m lineárních rovnic o n neznámých.
Číslo a_{ij} nazýváme koeficientem v i-té rovnici u j-té neznámé, b_i absolutním členem i-té rovnice.
Řešením systému $(*)$ nazýváme každou uspořádanou n-tici $[p_1, p_2, ..., p_n] \in R^n$ takovou, že po dosazení p_j za x_j přecházejí všechny rovnice $(*)$ v pravdivé výroky.

Def.: Systém $(*)$ se nazývá řešitelný (resp. neřešitelný), jestliže existuje (resp. neexistuje) alespoň jedno jeho řešení.
Dva systémy lineárních rovnic o n neznámých se nazývají ekvivalentní, jestliže množiny jejich řešení jsou si rovny.
Jakoukoli úpravu daného systému, po níž vznikne systém ekvivalentní původnímu, nazýváme ekvivalentní úpravou systému.

Pozn.: Úlohou dalších paragrafů bude nalezení a vyšetřování všech řešení daného systému lineárních rovnic (budeme zkracovat SLR).
Přitom mohou nastat tyto 3 případy:
a) $(*)$ nemá žádné řešení – je neřešitelný
b) $(*)$ má právě jedno řešení
c) $(*)$ má více než jedno řešení, pak v množině R^n jich má nekonečně mnoho. V tomto případě se snažíme nalézt jednoduchý předpis, pomocí něhož lze vypsat libovolné řešení tohoto systému.

§14. Matice

Def.: Nechť $m,n \in N$. (Reálnou) maticí typu m/n nazýváme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ kde } a_{ij} \in R, i \in \{1,2,\dots,m\}, j \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Označení: $A = (a_{ij})$ typu m/n.

Čísla a_{ij} nazýváme prvky matice.

Uspořádanou n-tici čísel $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$ nazýváme i-tým řádkem matice A, uspořádanou m-tici čísel $[a_{1j} \quad a_{2j} \quad \dots \quad a_{mj}]$ nazýváme j-tým sloupcem matice A.
Je-li $m=n$, pak hovoříme o čtvercové matici řádu n.

Př.: a) Matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{14} & 17 \end{pmatrix}$ je typu 2/3.

b) Matice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu 3.

Def.: Dvě matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ se rovnají, jestliže jsou téhož typu a platí: $a_{ij} = b_{ij}$ pro $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}; \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$.
Matice 0_{mn} se nazývá nulová, jestliže všechny její prvky jsou rovny 0.

Def.: Nechť $A = (a_{ij})$ je nenulová matice typu m/n. Řekneme, že matice A je ve schodovitém tvaru, jestliže každý její následující řádek začíná větším počtem nul než předchozí.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1_{j1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{2_{j2}} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{m_{jn}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pozn.: První řádek matice ve schodovitém tvaru může, ale nemusí začínat nulami.

Př.: a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ typu 3/6 – je ve schodovitém tvaru

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ řádu 4 – není ve schodovitém tvaru

Def.: Počet nenulových řádků matice *A* ve schodovitém tvaru se nazývá <u>hodnost matice</u> *A* a označuje se *h(A)*.

Pozn.: Každou nenulovou matici lze převést pomocí tzv. <u>řádkových elementárních transformací</u> na schodovitý tvar.
Mezi řádkové elementární transformace řadíme následující úpravy:
1. záměna 2 řádků
2. vynásobení řádku nenulovým číslem
3. k danému řádku přičtení jiného řádku, vynásobeného libovolným nenulovým číslem

<u>Matice</u> *B* vzniklá z matice *A* řádkovými elementárními transformacemi se nazývá <u>ekvivalentní</u> s maticí *A*. Zapisujeme $A \sim B$.
Provedení těchto transformací nemění hodnost matice: *h(A)=h(B)*.

Př.: Danou matici převeďte na schodovitý tvar a určete její hodnost:

a) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 3.(1)+(2) \\ 2.(1)-(3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (2)-7.(3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A)=3$$

b) $$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (1)+(3) \\ 2.(1)-(4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3.(2)-(3) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(B) = 3$$

Pozn.: Nulové řádky při výpočtu můžeme vynechat.

§15. Gaussova eliminační metoda

Def.: Nechť je dán systém lineárních rovnic
$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\}(*)$$

Pak matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, resp. $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

nazýváme <u>maticí systému</u> $(*)$, resp. <u>rozšířenou maticí systému</u> $(*)$.

V.15.1.: Nechť $(*)$ je systém lineárních rovnic. Pak následující úpravy jsou ekvivalentními úpravami tohoto systému:

1. záměna 2 rovnic
2. vynásobení celé rovnice nenulovým reálným číslem
3. přičtení libovolného násobku (s výjimkou 0) jedné rovnice k jiné rovnici

Pozn.: Je vidět, že uvedené úpravy odpovídají řádkovým elementárním transformacím rozšířené matice systému $(*)$ $\overline{A}$.

Pozn.: Gaussova eliminace je metoda, při níž užitím řádkových elementárních transformací převádíme $\overline{A}$ na schodovitý tvar, přičemž zřejmě platí:

Nechť matice B je ekvivalentní s maticí $\overline{A}$ ve schodovitém tvaru. Nechť v posledním řádku matice B je prvních <u>n</u> nul a v <u>$n+1$</u>-ím sloupci je nenulové číslo. Pak systém $(*)$ nemá řešení. V opačném případě pak systém $(*)$ má alespoň jedno řešení.

V.15.2.: <u>Kronecker-Capelliho věta (Frobeniova věta)</u>:

Nechť $(*)$ je systém m lineárních rovnic o n neznámých. Nechť A (resp. $\overline{A}$) je matice (resp. rozšířená matice) systému $(*)$. Pak platí:

systém $(*)$ je řešitelný $\Leftrightarrow h(A) = h(\overline{A})$

[Dk. – náznak:

1. „$\Rightarrow$“: sporem: Nechť $(*)$ je řešitelný a $h(A) \neq h(\overline{A})$. Nechť tedy $h(A) < h(\overline{A})$. Pak ve schodovitém tvaru matice $\overline{A}$ je poslední nenulový řádek tvaru $(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|a), a \in R, a \neq 0 \Rightarrow (*)$ nemá řešení – spor.
2. „$\Leftarrow$“: sporem: Nechť $h(A) = h(\overline{A})$ a $(*)$ nemá řešení. Pak poslední řádek matice $\overline{A}$ ve schodovitém tvaru je tvaru $(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|a)$, $a \in R - \{0\} \Rightarrow h(A) < h(\overline{A})$ – spor.]

Pozn.: Z V.15.2 plyne jednoduché kritérium toho, zda $(*)$ má nebo nemá řešení. Tato věta však nic neříká o tom, jak v případě, že $(*)$ je řešitelný, stanovit počet řešení a jak řešení nalézt. K tomu užíváme Gaussovy eliminace – viz následující příklady:

Př.: Řešte v R^3:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 0 & 35 & 35 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} h(A) = h(\overline{A}) = 3 \\ \underline{x_3 = 1} \end{array} \Rightarrow 11x_2 - 6 = 16 \Rightarrow \underline{x_2 = 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + 8 \cdot 2 - 7 = 12 \Rightarrow \underline{x_1 = 3} \qquad \underline{\underline{P = \{[3;2;1]\}}}$$

b)
$$\begin{aligned} 9x - 6y - 4z &= 12 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 9x - 6y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -4 & 12 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 9 & -6 & 6 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow h(B) = 2 < h(\overline{B}) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P = \phi}}$$

V.15.3.: Nechť $(*)$ je řešitelný systém m rovnic o n neznámých. Pak platí:
1. systém $(*)$ má právě jedno řešení $\Leftrightarrow h(A) = n$ ((A je regulární))
2. systém $(*)$ má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$ ((A je singulární))

Pozn.: Jestliže má systém $(*)$ nekonečně mnoho řešení, pak můžeme libovolně volit některé neznámé – tzv. <u>volné neznámé</u>. Ostatní neznámé pak vyjádříme pomocí nich.

Př.: Řešte v R^3:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 \quad - x_3 = 0$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \underline{x_3 = r} \\ \underline{x_2 = 1 - 2r} \end{array} \Rightarrow \underline{x_1 = 1 - r - (1 - 2r) = r}$$

$\underline{\underline{P = \{[r; 1-2r; r]; r \in R\}}}$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $\qquad \underline{x_3 = r}, \underline{x_2 = s}, \underline{x_1 = -r - s}$

$\underline{\underline{P = \{[-r-s; s; r]; r, s \in R\}}}$

Pozn.: Jestliže má systém $(*)$ právě jedno řešení, je často vhodné převést matici systému $\overline{A}$ do tzv. diagonálního tvaru – mluvíme pak o <u>diagonální matici řádu *n*</u>:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}$$

Jestliže prvky matice $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, mluvíme o tzv. <u>jednotkové matici řádu *n*</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & | & b_n \end{pmatrix}$$

Zde prvky $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou přímo kořeny systému $(*)$ $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Diagonální, resp. jednotkovou matici získáme Gaussovou eliminací.
Např. řešení příkladu a) před V.15.3. – pokračování:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & | & 12 \\ 0 & 11 & -6 & | & 16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1)+7.(3) \\ (2)+6.(3) \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & | & 19 \\ 0 & 11 & 0 & | & 22 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & | & 19 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1)-8.(2) \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P = \{[3; 2; 1]\}}}$$

Def.: Systém rovnic
$$\left.\begin{array}{lcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} (\Delta)$$
nazýváme <u>homogenním systémem *m* lineárních rovnic o *n* neznámých</u>.

V.15.4.: 1. Systém (Δ) má vždy alespoň jedno řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, tzv. nulové řešení.
2. Toto nulové řešení je jediné $\Leftrightarrow h(A) = n$.
3. Systém (Δ) má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$.

Př.: Řešte v R^3:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = r$$

$$7x_2 + r = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7}r$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{7}r - 2r = -\frac{11}{7}r$$

$$P = \left\{\left[-\frac{11}{7}r; -\frac{1}{7}r; r\right]; r \in R\right\}$$

<u>§16. Determinanty, Cramerovo pravidlo</u>

Pozn.: Je dán systém
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 .$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-a_{21}) \\ /\cdot a_{11} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{array}\right)$$

Nechť $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

$$a_{11} \cdot x_1 = b_1 - a_{12} \cdot \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{21}a_{12} - b_2a_{12}a_{11} + b_1a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} =$$
$$= \frac{a_{11}(b_1a_{22} - b_2a_{12})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Def.: Nechť $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice <u>řádu 2</u>.

<u>Determinantem matice</u> A nazýváme reálné číslo $|A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Označení: $|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$-$ $+$

Pozn.: Platí: $b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = |A_1|$, $b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{21} \\ b_1 & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = |A_2|$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Def.: a) Nechť $A = (a_{11})$ je matice řádu 1.

Determinantem matice A nazýváme reálné číslo $|A| = a_{11}$.

b) Nechť $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu 3.

Determinantem matice A nazýváme reálné číslo

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$.

Pozn.: Pro výpočet determinantu matice řádu 3 používáme tzv. Sarrusovo pravidlo:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

Pozn.: Analogicky bychom mohli zavést pojem determinant matic vyšších řádů.

Př.: Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1) + 0 - 0 - (-1) - (-2) = 3$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 8 + 6 = 0$

V.16.1.: <u>Vlastnosti determinantů, věty o počítání s determinanty</u>:

Nechť $|A|$ je determinant čtvercové matice řádu *n*. Pak platí:

a) Nechť 1 řádek matice *A* je nulový. Pak $|A| = 0$.

b) Nechť matice *B* vznikne z matice *A* záměnou 2 řádků. Pak $|B| = -|A|$.

c) Nechť matice *B* vznikne z matice *A* vynásobením 1 řádku číslem $r \in R$. Pak $|B| = r \cdot |A|$.

d) Nechť v matici *A* jsou 2 řádky shodné. Pak $|A| = 0$.

e) Nechť matice *B* vznikne z matice *A* tak, že k 1 řádku matice *A* přičteme libovolný násobek jiného řádku. Pak $|B| = |A|$.

[Dk.: pro *n* = 2:

a) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0$

b) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -|A|$

c) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$|B| = \begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ra_{11}a_{22} - ra_{12}a_{21} = r(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = r \cdot |A|$

d) Zaměníme-li v matici 2 řádky, které jsou shodné, pak podle b) platí $|A| = -|A| \Rightarrow 2 \cdot |A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$

e) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ra_{11} & a_{22} + ra_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ra_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - ra_{11}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$]

Pozn.: V.16.1. v lze analogicky formulovat pro změny sloupců.

Pozn.: Nyní si ukážeme jednoduchý způsob <u>výpočtu determinantů vyšších řádů</u>:

Nechť $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ je determinant řádu <u>*n*</u>.

Gaussovou eliminací a využitím V.16.1. e) dostaneme na místech prvků $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ samé nuly.

Nyní platí: $|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - tento determinant je řádu n-1.

Postup takto opakujeme, až získáme determinant řádu 3, resp. 2, který už umíme jednoduše řešit.
Uvedená metoda je jednoduchým případem Laplaceovy věty o rozvoji determinantů (říkáme, že jsme provedli rozvoj podle 1. sloupce).

Př.: Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -(-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (4 + 1 + 1) = 48$

V.16.2.: <u>Cramerovo pravidlo</u>:
Nechť je dán systém n lineárních rovnic o n neznámých. Nechť A je matice tohoto systému a $|A| \neq 0$. Pak platí:

Systém má právě 1 řešení $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde A_i je matice, která vznikne z matice A nahrazením koeficientů u i-té neznámé sloupcem absolutních členů.
[Dk.: pro n=1 zřejmý
pro n=2 v úvodní poznámce paragrafu]

Pozn.: Cramerovo pravidlo lze užít jen tehdy, když platí:
1. počet rovnic = počet neznámých
2. $|A| \neq 0$

V opačném případě musíme použít Gaussovy eliminace.

Př.: Řešte v R^3 soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1-2=-1$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=1+1=2 \qquad x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=-2$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-1-1=-2 \qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=2$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-1-1+1=-1 \qquad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=1$$

$$P=\{[-2;2;1]\}$$

§17. Soustavy rovnic s parametrem

Př.: Řešte v R^3 soustavu s parametrem $a\in R$: a) Gaussovou eliminací $x-y=2$
b) Cramerovým pravidlem $ax+y=4$

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&2\\a&1&4\end{array}\right)/\cdot(-a) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&2\\0&a+1&-2a+4\end{array}\right)$

- k danému řádku mohu přičíst libovolný a-násobek jiného řádku (nemusím tedy uvažovat případ $a=0$)
- ale nemohu násobit řádek a – pak bych musel uvažovat případ $a=0$

$(a+1)y=-2a+4$

$(a+1)y=2(2-a)$

$\underline{a=-1}$

$0y=6$

$\underline{\underline{P_{-1}=\Phi}}$

$\underline{a\neq-1}$

$\underline{y=\frac{2(2-a)}{a+1}}$, $\underline{x}=2+y=2+\frac{2(2-a)}{a+1}=\frac{2a+2+4-2a}{a+1}=\frac{6}{a+1}$

$$\underline{\underline{P_a=\left\{\left[\frac{6}{a+1};\frac{2(2-a)}{a+1}\right]\right\}}}$$

a	P
-1	Φ
$R-\{-1\}$	$\left\{\left[\frac{6}{a+1};\frac{2(2-a)}{a+1}\right]\right\}$

b) $|A|=\begin{vmatrix}1&-1\\a&1\end{vmatrix}=1+a$

$|A_1|=\begin{vmatrix}2&-1\\4&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=2\cdot3=6$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2(2-a)$$

1. $|A| = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}: \overline{A_{-1}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_1 = \Phi}}$

2. $|A| \neq 0 \Rightarrow \underline{a \neq -1}: x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{6}{1+a}$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2(2-a)}{1+a} \qquad \underline{\underline{P_a = \left\{\left[\frac{6}{1+a}; \frac{2(2-a)}{1+a}\right]\right\}}}$$

Př.: Řešte v R^3 soustavu
$$\begin{aligned} ax_1 + ax_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ -a^2x_2 + x_3 &= a \\ ax_1 \phantom{{}-a^2x_2} + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$
s parametrem $a \in R$: a) Gaussovou eliminací b) Cramerovým pravidlem

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & a \\ 0 & -a & 1 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 0 & +a & -1 & -a^2 \\ 0 & 0 & -a+1 & -a^3+a \end{array}\right)$

$(1-a)x_3 = a(1-a)(1+a)$

nemohu násobit daný řádek *a*, proto vyměním řádky a budu k danému řádku přičítat *a*-násobek jiného řádku

$\underline{a = 1}$

$0x_3 = 0$

$\overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = t-1 \\ x_1 = 1-t \end{array}$

$\underline{\underline{P_1 = \{[1-t; t-1; t]; t \in R\}}}$

$\underline{a \neq 1}$

$\underline{x_3 = a(1+a)}$

$ax_2 = a(1+a) - a^2 = a$

$\underline{a = 0}$

$0x_2 = 0$

$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 0; x_2 = r; x_1 = s$

$\underline{\underline{P_0 = \{[s; r; 0]; s, r \in R\}}}$

$\underline{a \neq 0}$

$\underline{x_2 = 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax_1 + a = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow$

$\underline{\underline{P_a = \{[-1; 1; a(a+1)]\}}}$

a	P
1	$\{[1-t; t-1; t]; t \in R\}$
0	$\{[s; r; 0]; s, r \in R\}$
$R - \{0; 1\}$	$\{[-1; 1; a(a+1)]\}$

b) $|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2(-a+1) = a^2(1-a)$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & -a^2 & 1 \\ a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2(a-1)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2(1-a)$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a^2 & a \\ a & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3(-a^2+1) = a^3(1-a^2)$$

$$\underline{a=0}: \overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3 = 0; x_2 = r; x_1 = s$ $\underline{\underline{P_0 = \{[s;r;0]; s,r \in R\}}}$

1. $|A| = 0$

$$\underline{a=1}: \overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3 = t; x_2 = t-1; x_1 = 1-t$ $\underline{\underline{P_1 = \{[1-t;t-1;t]; t \in R\}}}$

2. $|A| \neq 0 \Rightarrow \underline{a \neq 0, a \neq 1}: x_1 = \dfrac{a^2(a-1)}{a^2(1-a)} = -1;\ x_2 = \dfrac{a^2(1-a)}{a^2(1-a)} = 1;$

$x_3 = \dfrac{a^3(1-a)(1+a)}{a^2(1-a)} = a(1+a)$ $\underline{\underline{P_a = \{[-1;1;a(1+a)]\}}}$

§18. Lineární diofantovské rovnice

Def.: Lineární diofantovskou rovnicí s dvěma neznámými nazýváme každou rovnici tvaru $ax + by + c = 0$ $(\bullet)$, kde $a,b,c \in Z; a \neq 0; b \neq 0$ jsou koeficienty; $x, y \in Z$ neznámé. Řešením rovnice $(\bullet)$ nazýváme každou uspořádanou dvojici $[x_0; y_0]$, pro kterou platí $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Např. $4x + 2y = 1$ je diofantovská rovnice (nemá řešení, protože levá strana je vždy sudá).

V.18.1.: Nechť $a,b,c \in Z; a \neq 0; b \neq 0$. Nechť $d = (a,b)$. Pak $\exists t_1, t_2 \in Z : d = at_1 + bt_2$ -

- Bezoutova rovnost.

V.18.2.: <u>Věta o řešitelnosti lineární diofantovské rovnice</u>:

Rovnice $(\bullet)$ má v Z^2 řešení $\Leftrightarrow D(a,b)/c$.

[Dk.: „$\Rightarrow$“: Nechť $[x_0; y_0] \in Z^2$ je řešení $(\bullet)$ $\Rightarrow ax_0 + by_0 = c$. Označme $d = D(a,b) \Rightarrow d/a \wedge d/b \Rightarrow d/(ax_0 + by_0) = c \Rightarrow D(a,b)/c$.

„$\Leftarrow$“: Nechť $\left.\begin{array}{r} D(a,b) = d/c \Rightarrow \exists k \in Z : c = k \cdot d \\ D(a,b) = d \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in Z : d = at_1 + bt_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underbrace{k \cdot d}_{c} = akt_1 + bkt_2 \\ c = a(\underbrace{kt_1}_{x_0}) + b(\underbrace{kt_2}_{y_0}) \Rightarrow \end{array}$

$\Rightarrow [x_0; y_0] = [kt_1; kt_2]$ je řešením $(\bullet)$.]

V.18.3.: Má-li rovnice $(\bullet)$ alespoň 1 řešení v Z^2, pak jich má nekonečně mnoho.

[Dk.: Nechť $[x_0; y_0]$ je řešení $(\bullet)$ $\Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$.

Nechť $[x; y]$ je jiné řešení $(\bullet) \Rightarrow \underline{ax + by + c = 0}$.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Označme $d = D(a,b) \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in Z : a = dq_1; b = dq_2; D(q_1, q_2) = 1$.

Dosazení: $dq_1(x - x_0) + dq_2(y - y_0) = 0 \Rightarrow q_1(x - x_0) + q_2(y - y_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1(x - x_0) = -q_2(y - y_0) \Rightarrow q_1 / q_2(y - y_0) \wedge q_1 \dagger q_2 \Rightarrow q_1/(y - y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r \in Z : y - y_0 = rq_1 \Rightarrow y = y_0 + \overline{q_1 r}$ dosazení $\Rightarrow q_1(x - x_0) =$

$= -q_2(y_0 + q_1 r - y_0) \Rightarrow q_1(x - x_0) = -q_1 q_2 r \Rightarrow x = x_0 - q_2 r$, kde $q_1 = \dfrac{a}{d}$;

$q_2 = \dfrac{b}{d} \Rightarrow$ rovnice $(\bullet)$ má nekonečně mnoho kořenů tvaru

$\left[x_0 - \dfrac{br}{d}; y_0 + \dfrac{ar}{d}\right]$, kde $r \in Z$.]

Pozn.: V.18.3. neplatí pro řešitelnost rovnice $(\bullet)$ v N^2.

Pozn.: Je-li $[x_0; y_0]$ jedno řešení $(\bullet)$, dostaneme každé další její řešení $[x; y]$ ve tvaru $x = x_0 - \dfrac{b}{d}r; y = y_0 + \dfrac{a}{d}r$, kde $r \in Z$. Lze tedy danou rovnici řešit tak, že jedno její řešení uhádneme a další získáme aplikací výše uvedených vzorců.

Př.: a) Řešte v Z^2: $2x + 5y = 97$ $\qquad D(2;5) = 1/97$

Položme $\underline{x_0 = 1} \Rightarrow \underline{y_0 = 19}$

$$x = 1 - \frac{5}{1}t = 1 - 5t$$

$$y = 19 + \frac{2}{1}t = 19 + 2t$$

$\underline{\underline{P = \{[1 - 5r; 19 + 2r]; r \in Z\}}}$

mohlo by být i opačně $\underline{\underline{P = \{[1 + 5r; 19 - 2r]; r \in Z\}}}$

b) Určete, jakými způsoby lze vyplatit 97 korun ve 2 a 5-korunových mincích.

Hledáme řešení předchozí rovnice v N_0^2:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 5r \geq 0 \Rightarrow r \leq \frac{1}{5} \\ y = 19 + 2r \geq 0 \Rightarrow r \geq -\frac{19}{2} \end{array}\right\} r \in \{-9;-8;-7;\ldots;-1;0\}$$

$$\downarrow$$

$x: 46 \quad 41 \quad 36 \quad \ldots \quad 6 \quad 1 \quad \ldots$ 2 korunové mince

$z: \;1 \quad 3 \quad 5 \quad \ldots \quad 17 \quad 19 \quad \ldots$ 5 korunové mince

Př.: Řešte v Z^2: $5x - 13y = 2$

<u>Obecný postup</u>: <u>modifikace Euklidova algoritmu:</u> Z rovnice osamostatníme tu neznámou, jejíž koeficient je v absolutní hodnotě menší.

$$\underline{x} = \frac{13y+2}{5} = 2y + \underbrace{\frac{3y+2}{5}}_{\in Z}$$

$$\exists u \in Z: \frac{3y+2}{5} = u \Rightarrow 3y = 5u - 2 \Rightarrow \underline{y} = \frac{5u-2}{3} = u + \frac{2u-2}{3} = \underline{u + \frac{2}{3}(u-1)}$$

$$\exists v \in Z: \frac{2}{3}(u-1) = v \Rightarrow 2u - 2 = 3v \Rightarrow \underline{u} = \frac{3v+2}{2} = v + \frac{v+2}{2} = \underline{v + 1 + \frac{v}{2}}$$

$$\exists w \in Z: \frac{v}{2} = w \Rightarrow \underline{v = 2w}$$

Nyní zpětně dosazujeme: $\underline{u} = \dfrac{3 \cdot 2w + 2}{2} = \underline{3w+1}$

$$\underline{y} = \frac{5(3w+1)-2}{3} = \frac{15w+3}{3} = 5w+1$$

$$\underline{x} = \frac{13(5w+1)+2}{5} = \frac{13 \cdot 5w + 15}{5} = \underline{13w+3}$$

$$\underline{\underline{P = \{[3+13w;1+5w];w \in Z\}}}$$

<u>§19. Algebraické rovnice</u>

Def.: <u>Algebraickou rovnicí n-tého stupně s jednou neznámou</u> $x \in R$ nazýváme každou rovnici tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\circ)$, kde $n \in N; a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ jsou koeficienty rovnice, $a_n \neq 0$.

Řešit rovnici $(\circ)$ znamená určit všechna čísla $x_0 \in R$ taková, pro něž platí $a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0$.

Pozn.: a) Levou stranu algebraické rovnice n-tého stupně tvoří polynom n-tého stupně.

b) Lineární, resp. kvadratická rovnice je zvláštním případem rovnice $(\circ)$ pro $n=1$, resp. $n=2$.

c) V tomto paragrafu si ukážeme pouze některé speciální případy řešení rovnic $(\circ)$.

Pozn.: <u>Hornerovo schéma</u>:

Pomocí tohoto schématu můžeme uhádnout nějaký kořen <u>c</u> rovnice $(\circ)$. Pro něj je hodnota polynomu $a(c)=0$. Není-li <u>c</u> kořenem $(\circ)$, pak platí $a(c)\neq 0$. Rozložíme polynom $a(x)$:
$a(x)=(x-c)\cdot b(x)+a(c)$, kde $b(x)$ je polynom stupně n-1.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-c)\cdot(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + a(c)$$

$$\begin{array}{llcl}
x^n: & a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\
x^{n-1}: & a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} \\
x^{n-2}: & a_{n-2} = b_{n-3} - c\cdot b_{n-2} & \Rightarrow & b_{n-3} = a_{n-2} + c\cdot b_{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x^1: & a_1 = b_0 - c\cdot b_1 & \Rightarrow & b_0 = a_1 + c\cdot b_1 \\
x^0: & a_0 = a(c) - c\cdot b_0 & \Rightarrow & a(c) = a_0 + c\cdot b_0
\end{array}$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_0	$a(c)$

Podle $a(c)$ tedy určíme, zda <u>c</u> je kořenem rovnice $(\circ)$.

Př.: Zjistěte, zda rovnice $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$ á kořeny 1,-1.

	1	-6	5	4	-4
1	1	-5	0	4	0
-1	1	-7	12	-8	4

$\Rightarrow a(1)=0 \Rightarrow 1$ je kořen
$\Rightarrow a(-1)=4 \Rightarrow -1$ není kořen

Tedy rovnici můžeme rozložit: $(x-1)(x^3 - 5x^2 + 4) = 0$

.

Pozn.: a) Podobně jako kvadratická rovnice mohla mít 1 kořen dvojnásobný, algebraická rovnice n-tého stupně může mít také vícenásobné kořeny – nejvýše 1 n-násobný kořen.
b) Algebraická rovnice n-tého stupně může mít nejvýše n kořenů.

Př.: Určete násobnost kořene $x_0 = 1$ algebraické rce $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27 = 0$.
Zapište tuto rovnici jako součin $(x-1)^k b(x) = 0$, kde k je násobnost kořene 1.

	1	0	-15	8	51	-72	27
1	1	1	-14	-6	45	-27	0
1	1	2	-12	-18	27	0	
1	1	3	-9	-27	0		
1	1	4	-5	-32			

$\Rightarrow 1$ je trojnásobný kořen
$\Rightarrow (x-1)^3 \cdot (x^3 + 3x^2 - 9x - 27) = 0$

<u>Hledání racionálních kořenů algebraické rovnice *n*-tého stupně s racionálními koeficienty</u>:
(také 2.ročník, VII. kapitola, § 3.)

V.19.1.: Nechť je dána algebraická rovnice $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0; a_n \neq 0$ s <u>celočíselnými koeficienty</u>. Nechť $\frac{r}{s}; r \in Z; s \in N; D(r,s) = 1$ je kořenem této rovnice. Pak platí: $r / a_0 \wedge s / a_n$.

[Dk.: 1. $r=0$ (kořen je 0, $s=1$): $a_0 = 0 \Rightarrow 0/0; 1/a_n$

2. $r \neq 0$: kořen $x_0 = \frac{r}{s}$:

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + a_{n-2}\frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \quad /.s^{n-1} \quad /.r^{-1}s^n$$

$$a_n \frac{r^n}{s} + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2}s + \ldots + a_1 rs^{n-2} + a_0 s^{n-1} = 0$$

$$\underbrace{a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2}s + \ldots + a_1 rs^{n-2} + a_0 s^{n-1}}_{\in Z \Rightarrow s \text{ nedìlí } r \Rightarrow s \text{ nedìlí } r^n \Rightarrow \underline{\underline{s/a^n}}} = \underbrace{-a_n \frac{r^n}{s}}_{\in Z}$$

$$\underbrace{a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}s + a_{n-2}r^{n-3}s^2 + \ldots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^{n-1}}_{\in Z \Rightarrow r \text{ nedìlí } s \Rightarrow r \text{ nedìlí } s^n \Rightarrow \underline{\underline{r/a_0}}} = \underbrace{-a_0 \frac{s^n}{r}}_{\in Z}$$]

V.19.2.: Nechť $\frac{r}{s}$ je racionální kořen algebraické rovnice $(\circ)$ s celočíselnými koeficienty. Nechť $\underline{m}$ je pevné celé číslo. Pak platí: $(r - ms)/a(m)$, kde $a(m)$ je hodnota polynomu $a(x)$ pro $x = m$.

[Dk.: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - m)\cdot\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) + a(m) = 0$

kořen $x_0 = \frac{r}{s}$: $\left(\frac{r}{s} - m\right)\left(b_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + b_{n-2}\frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \ldots + b_1\frac{r}{s} + b_0\right) + a(m) = 0$

$$\frac{r - ms}{s}\left(b_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + b_{n-2}\frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \ldots + b_1\frac{r}{s} + b_0\right) = -a(m) \qquad /\cdot \frac{s^n}{r - ms}$$

1. $r = ms : a(m) = 0 \Rightarrow$ věta platí

2. $r \neq ms : \underbrace{b_{n-1}r^{n-1} + b_{n-2}r^{n-2}\cdot s + \ldots + b_1 rs^{n-2} + b_0 s^{n-1}}_{\in Z \Rightarrow (r-ms) \text{ nedìlí } s \Rightarrow (r-ms) \text{ nedìlí } s^n \Rightarrow \underline{\underline{(r-ms)/a(m)}}} = \underbrace{-a(m)\cdot\frac{s^n}{r - ms}}_{\in Z}$]

Pozn.: Věta se užívá pro $m = \pm 1$: $(r - s)/a(1)$
$(r + s)/a(-1)$

Př.: Najděte racionální kořeny algebraické rovnice $x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = 0$.

$6x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$ $\qquad r/(-2) \Rightarrow r \in \{1;-1;2;-2\}$

$s/6 \Rightarrow s \in \{1;2;3;6\}$

$$\frac{r}{s} \in \left\{1; \cancel{-1}; \cancel{2}; -2; \cancel{\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}; \cancel{\frac{1}{3}}; -\frac{1}{3}; \cancel{\frac{2}{3}}; -\frac{2}{3}; \cancel{\frac{1}{6}}; \cancel{-\frac{1}{6}}\right\}$$

$(r-s)/a(1)$
$(r+s)/a(-1)$

	6	1	-5	-2
1	6	7	2	0
-1	6	-5	0	-2

$\Rightarrow$ kořen 1
$\Rightarrow (r+s)/-2 \Rightarrow$
vyškrtáme v tabulce ta čísla, která nemohou být kořeny

ostatní vyzkoušíme Hornerovým schématem:

	6	7	2
-2	6	-5	12
$-\frac{1}{2}$	6	-4	0
$-\frac{1}{3}$	6	2	
$-\frac{2}{3}$	6	0	

$$P=\left\{1;-\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right\}$$

§20. Reciproké rovnice

Def.: Reciprokou rovnicí n-tého stupně prvního, resp. druhého druhu nazýváme algebraickou rovnici $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0; a_n \neq 0$; pro jejíž koeficienty $a_k\,(k=0;1;\ldots;n)$ platí: $a_k = a_{n-k}$, resp. $a_k = -a_{n-k}$.

Pozn.: a) U reciproké rovnice sudého stupně $n=2m; m\in N$ I.druhu může být koeficient a_m libovolný, II.druhu musí být $a_m = 0$.

b) Reciproké rovnice mají všechny kořeny různé od nuly.

c) Má-li reciproká rovnice kořen $x=x_0$, má také kořen $x=\dfrac{1}{x_0}$.

Pozn.: a) Postup řešení reciproké rovnice I.druhu:

α) $n=2m; m\in N$: 1. dělíme rovnici x^m

2. z dvojic koeficientů a^k, a_{n-k} vytkneme jejich společný koeficient

3. zavedeme substituci $z = x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2;$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y; x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2;\ldots$$

β) $n = 2m+1; m \in N$: Reciproká rovnice I.druhu stupně lichého má vždy kořen $x = -1$. Tedy po dělení výrazem $x+1$ dostaneme reciprokou rovnici I.druhu stupně sudého.

b) Postup řešení reciproké rovnice II.druhu:
Reciproká rovnice II.druhu má vždy kořen $x = 1$. Tedy po dělení výrazem $x-1$ dostaneme reciprokou rovnici I.druhu.

Př.: a) Řešte v ***R*** rovnici $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$ - reciproká rovnice I.druhu, stupně sudého

1. $2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

2. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$

3. $\underline{x + \frac{1}{x} = y} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$

$2y^2 + 3y - 16 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4} = \left\langle \begin{matrix} \underline{\frac{10}{4}} \\ \\ \underline{-4} \end{matrix} \right.$$

I. $\underline{x + \frac{1}{x} = \frac{10}{4}}$

$4x^2 - 10x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{8} = \frac{10 \pm 6}{8} = \left\langle \begin{matrix} \underline{2} \\ \\ \underline{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right.$$

II. $\underline{x + \frac{1}{x} = -4}$

$x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{P = \left\{2; \frac{1}{2}; -2+\sqrt{3}; -2-\sqrt{3}\right\}}}$$

b) Řešte v ***R*** rovnici $12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$ - reciproká rovnice II.druhu

$\underline{x_1 = 1}$:

$\underline{x_2 = -1}$:

	12	-25	0	25	-12
1	12	-13	-13	12	0
-1	12	-25	12	0	

I.druh stupně lichého

$12x^2 - 25x + 12 = 0$ I.druh stupně sudého

$$x_{3,4} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24} = \frac{25 \pm 7}{24} = \begin{cases} \dfrac{32}{24} = \underline{\dfrac{4}{3}} \\[2ex] \dfrac{18}{24} = \underline{\dfrac{3}{4}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{P = \left\{1; -1; \frac{4}{3}; \frac{3}{4}\right\}}}$$

Seznam použité literatury:

A. Literatura

- *Petr Liebl*: ROVNICE A NEROVNICE – pro I. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku, Praha, SPN 1989
- *František Vejsada/František Talafous* : SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY – pro SVVŠ, Praha, SNP 1969

B. Přednášky

- *Boucník Pavel* – Přednášky v matematické třídě pro I. ročník gymnázií

Resumé

Úkolem mé závěrečné maturitní práce bylo obsáhnout a systematizovat učivo 1. ročníku z matematiky a to části rovnice a nerovnice.

Převedl jsem do elektronické podoby přednášky z vlastních hodin matematiky a doplnil je o příklady ze cvičení a dalších učebnic.

Tato práce bude užitečná pro zefektivnění a usnadnění další výuky.

Ondřej Hrabec