

Kuželosečky - úlohy k procvičení

1. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [-3; 2]$, $B = [-1; 4]$ a $C = [3; 0]$.
2. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [3; 2]$, $B = [1; 4]$ a dotýká se osy x .
3. Napište rovnici kružnice, která má střed $S = [-5; 4]$ a na přímce $p : y = 2x + 4$ vytíná tětivu délky 8.
4. Napište rovnici elipsy, která prochází bodem $M = [-2\sqrt{3}; 1]$, má hlavní poloosu délky 4, její hlavní osou je osa x a její střed leží v počátku soustavy souřadnic.
5. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S = [-3; 1]$ a prochází body $K = [9; 9]$ a $L = [13; -5]$.
6. Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy $A = [0; -3]$ a $B = [-4; -3]$ a jedno její ohnisko je $F = [-5; -3]$.
7. Napište rovnici hyperboly, jejíž asymptoty mají rovnice $a_1 : y = 1 + 3x$ a $a_2 : y = 1 - 3x$ a jedno její ohnisko je $F = [-20; 1]$.
8. Napište rovnici paraboly, která má ohnisko $F = [3; -1]$ a řídící přímku $d : x = 7$.
9. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic, její osa je shodná s osou x a prochází bodem $A = [-4; -1]$.
10. Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V = [1; -4]$, její osa je rovnoběžná s osou y a na ose x vytíná úsečku délky 8.
11. Upravte dané obecné rovnice do středového, resp. vrcholového tvaru, rozhodněte, zda se jedná o regulární kuželosečku, pokud ano, určete o jakou kuželosečku jde a najděte souřadnice jejích ohnisek, vrcholů a středu (má-li střed), případně rovnici řídící přímky

$$k_1 : 4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0,$$

$$k_2 : x^2 - 4y^2 + 4x - 8y = 0,$$

$$k_3 : 2x^2 - 6x - 10y - 3 = 0.$$

12. Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ je přímka $p : y = kx - k$ tečnou, resp. sečnou, resp. vnější přímkou kuželosečky $k : x^2 + y^2 + 2x = 0$. O jakou kuželosečku se jedná?
13. Určete obecné rovnice všech tečen kuželosečky $k : (x + 1)^2 = 4(y - 2)$, které jsou kolmé k přímce \overleftrightarrow{AB} , kde $A = [2; 5]$ a $B = [-3; 1]$. Najděte i souřadnice příslušných dotykových bodů. O jakou kuželosečku se jedná?
14. Určete obecné rovnice všech tečen kuželosečky $k : 4x^2 + 9y^2 = 36$, které mají směrnici $k = -1$. Najděte i souřadnice příslušných dotykových bodů. O jakou kuželosečku se jedná?
15. Určete obecné rovnice všech tečen kuželosečky $k : (x - 3)^2 + (y + 12)^2 = 100$, které prochází bodem $A = [5; 2]$. Najděte i souřadnice příslušných dotykových bodů. O jakou kuželosečku se jedná?

Výsledky:

1. $x^2 + (y - 1)^2 = 10$
2. $(x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 100$ a $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
3. $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

5. $\frac{(x+3)^2}{400} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$
6. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$
7. $\frac{x^2}{40} - \frac{(y-1)^2}{360} = 1$
8. $(y+1)^2 = -8(x-5)$
9. $y^2 = -\frac{1}{4}x$
10. $(x-1)^2 = 4(y+4)$
11.
 - k_1 je elipsa, $S = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, $a = 2$, $b = 1$, $e = \sqrt{3}$, $F = [-\sqrt{2}; \sqrt{2} - \sqrt{3}]$, $G = [-\sqrt{2}; \sqrt{2} + \sqrt{3}]$, $A = [-\sqrt{2}; \sqrt{2} - 2]$, $B = [-\sqrt{2}; \sqrt{2} + 2]$, $C = [-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2}]$ a $D = [-\sqrt{2} + 1; \sqrt{2}]$
 - k_2 není regulární kuželosečka; rovnici lze doplněním na čtverec upravit do tvaru $(x+2)^2 - 4(y+1)^2 = 0$ a užitím vzorce rozložit na součin $[x+2-2(y+1)][x+2+2(y+1)] = 0$, tj. $(x-2y)(x+2y+4) = 0$; rovnici vyhoví dvojice různoběžných přímků $x-2y=0$ a $x+2y+4=0$
 - k_3 je parabola $V = [\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}]$, $F = [\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$ a $d: y=2$
12. Pro $|k| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ sečna, pro $|k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tečna, pro $|k| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ vnější přímka
13. $t: 20x - 25y + 54 = 0$, $T = [\frac{3}{5}; \frac{66}{25}]$, parabola
14. $t_1: x + y + \sqrt{13} = 0$, $t_2: x + y - \sqrt{13} = 0$, $T_1 = [-\frac{9}{\sqrt{13}}; -\frac{4}{\sqrt{13}}]$, $T_2 = [\frac{9}{\sqrt{13}}; \frac{4}{\sqrt{13}}]$, elipsa
15. $t_1: 3x - 4y - 7 = 0$, $t_2: 4x + 3y - 26 = 0$, $T_1 = [-3; -4]$, $T_2 = [11; -6]$, kružnice