

§8. Vzdálenost

Def: Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru. Vzdáleností podprostorů \mathcal{A}, \mathcal{B} nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definované takto: $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min \{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, kde $|AB|$ je délka úsečky AB .

Pozn: Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:
Necht' $M \in \mathbb{R}$ je množina. Pak číslo $i \in \mathbb{R}$ nazýváme infimem množiny M , je-li největší dolní závorou množiny M , tj. jestliže platí:

1. $\forall m \in M : i \leq m$
2. $\forall r \in \mathbb{R} : i(\forall m \in M : r \leq m) \Rightarrow i \geq r$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E}_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a necht' $D = \{AB : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak vzdáleností podprostorů \mathcal{A}, \mathcal{B} nazýváme infimum množiny D .

Platí: Má-li množina D nejmenší prvek n , pak tento prvek je infimum $\Rightarrow n = \rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Pozn: Jestliže \mathcal{A}, \mathcal{B} mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

A) Vzdálenost 2 bodů v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

Pozn:

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Necht' $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body.

Pak platí $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (b_j - a_j)^2}$ [Dk. viz V.7.3 a pozn. v §7 kap.X]

Př: Určete $\rho(A, B)$:

1. $A[3; -1], B[0; 2]$
 $\rho(A, B) = 3\sqrt{2}$
2. $A[1; 0; 2]; B[-1; 2; 1]$ $\rho(A, B) = 3$

B) Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{E}_2

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p .

$p : ax + by + c = 0; \vec{n} = (a, b) \neq \vec{0}; A[a_1, a_2]$

$q \perp p - q : x = \{[a_1 + ta; a_2 + tb] | t \in \mathbb{R}\}$

$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q$

$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$

$t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - c}{a^2 + b^2}$

$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA_0}|$

$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b)$$

$$|AA_0| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.2.: Necht' $A[a_1; a_2] \in \mathbb{E}_2$ je bod, $p: ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$ je přímka. Pak platí:

$$\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + bb_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př: Určete $\rho(A, p): A[-1; 2]; p: x - 2y + 1 = 0$

$$\rho(A, p) = \frac{|-1-2 \cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Př: 200/47:

$$A[3; 2]; p: 3x - 4y - 7 = 0$$

$$\rho(A, p) = \frac{|9-8-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{6}{5}$$

Př: 200/48:

Určete velikosti výšek trojúhelníku ABC :

$$A[0; 0]$$

$$B[7; 0]$$

$$C[4; 5]$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3, 5) \Rightarrow a: 5x + 3y + ? = 0; 35 + 0 + ? = 0 \Rightarrow a: 5x + 3y - 35 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (7, 0) \Rightarrow c: 0x + y = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5) \Rightarrow b: 5x - 4y + ? = 0; 0 - 0 + ? = 0 \Rightarrow b: 5x - 4y = 0$$

$$\rho(A, a) = \frac{|-35|}{\sqrt{25+9}} = \sqrt{34} \frac{35}{34} \quad \rho(B, b) = \frac{|35|}{\sqrt{25+16}} = \sqrt{41} \frac{35}{41} \quad \rho(C, c) = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = 1$$

C) Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět A na p .

I. způsob: $p(P, \vec{u}); P[p_1, p_2, p_3]; \vec{u}(u_1, u_2, u_3), A[a_1, a_2, a_3]$

$$A_0[p_1 + t^*u_1 + p_2 + t^*u_2, p_3 + t^*u_3]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AA_0} = (p_1 - a_1 + t^*u_1, p_2 - a_2 + t^*u_2, p_3 - a_3 + t^*u_3)$$

$$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

Jedna rovnice o jedné neznámé t^* , po určení t^* určíme A_0 .

II. způsob: Určení rovnice roviny ρ , která prochází A a je kolmá k přímce p .

$$p \cap \rho = \{A_0\}$$

III. způsob: Vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod p jako funkce proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

Př: Určete $\rho(A, p)$

$$A[1; 0; 1], p = [2 - t; t; 0], t \in \mathbb{R}.$$

I. způsob: $\overrightarrow{AA_0} = (1 - t^*; t^*; -1)$
 $\vec{u} = (-1; 1; 0)$
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t^* - 1 + t^*$
 $t^* = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = [\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0] \quad \overrightarrow{AA_0} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1) \Rightarrow \rho(A, A_0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

II. způsob: $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 1; 0)$
 $\rho: -x + y + d = 0$
 $A \in \rho \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$
 $\rho: -x + y + 1 = 0$
 $p \cap \rho: -(2 - t) + t + 1 = 0$
 $-2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{(1 - t)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

minimum nastane pro $t = \frac{1}{2}$ a nabývá hodnoty $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Př: $200/45$
 $p = \{[1 - 1t; 2 + 3t; 4 + t] | t \in \mathbb{R}\}; M[1; 4; 5]$

I. způsob: $\overrightarrow{MM_0} = (-t; -2 + 3t; -1 + t)$
 $\vec{u} = (-1; 3; 1)$
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = t - 6 + 9t - 1 + t \Rightarrow t = \frac{7}{11}$
 $M_0 = [\frac{4}{11}; \frac{43}{11}; \frac{51}{11}]$
 $|\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{\left(\frac{4}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{43}{11} - 4\right)^2 + \left(\frac{51}{11} - 5\right)^2} = \frac{2\sqrt{286}}{11}$

II. způsob: $\vec{n}_\rho = \vec{u} = (-1; 3; 1)$
 $\rho: -x + 3y + z + d = 0$
 $M \in \rho \Rightarrow -1 + 12 + 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$
 $\rho: -x + 3y + z - 16 = 0$
 $p \cap \rho: -1 + t + 6 + 9t + 4 + t - 16 = 0$
 $11t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}$. (dále stejně jako v předchozím bodě)

III. způsob: $X[2 - t; t; 0]; \overrightarrow{AX} = (1 - t; t; -1)$

$$|\overrightarrow{MX}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t - 2)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{t^2 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 2t + 1} =$$

$$= \sqrt{11t^2 - 14t + 5} = \sqrt{11\left(t - \frac{7}{11}\right)^2 - \frac{49}{11} + 5}$$

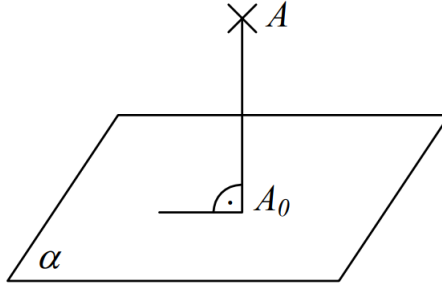
minimum nastane pro $t = \frac{7}{11}$ a nabývá hodnoty $\frac{2\sqrt{286}}{11}$.

Př: $200/46$
 $p = \{[5 + 5t; 3 - 4t; 2] | t \in \mathbb{R}\}; C[4; 12; 4]$
 $|CX| = \sqrt{(1 + 5t)^2 + (9 + 4t)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 10t + 25t^2 + 81 + 72t + 16t^2 + 4} = \sqrt{41x^2 + 82x + 86} =$
 $\sqrt{41(x^2 + 1)^2 + 86r - 41}$ Minimum je $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Př: $200/49$
 $p = \{[t; 1 - t; 2t] | t \in \mathbb{R}\}; A[1, 0, 5] \quad |AX| = \sqrt{(t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (2t - 5)^2} =$
 $= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 20t + 25} = \sqrt{6t^2 - 24t + 27} = \sqrt{6(t^2 - 2t + 3)}$
Minimum je $\sqrt{3}$.

D) Vzdálenost bodu od roviny v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α .



$$\alpha : ax + by + cz + d = 0; [a, b, c] \neq [0, 0, 0]; A[a_1, a_2, a_3]$$

$$q \perp \alpha \Rightarrow p = [a_1 + ta; b_1 + tb; c_1 + tc] | t \in \mathbb{R}$$

$$A_0[a_1 + t^*a; b_1 + t^*b; c_1 + t^*c] \in \alpha \cap q$$

$$a(a_1 + t^*a) + b(b_1 + t^*b) + c(c_1 + t^*c) = 0$$

$$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d \quad t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - ca_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\rho(A, \alpha) = |\overrightarrow{AA_0}|$$

$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b, t^*c)$$

$$|\overrightarrow{AA_0}| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2 + (t^*c)^2} = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.3.: Nechť $A[a_1; a_2; a_3]$ je bod a $\alpha : ax + by + cz + d = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$ je rovina. Pak platí:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(A, \alpha)$

$$A[1; -1; 0], \alpha : x - y + 2z - 1 = 0$$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Př: 200/50 Určete $\rho(A, \alpha)$

$$A[1; 0; 5]; \alpha : 12x + 3y - 4z = 0$$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|12 + 0 - 20|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{169}} = \frac{8}{13}$$

E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímk v E_3

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(A, q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

$$p : ax + by + c_1 = 0 \quad q : ax + by + c_2 = 0; (a, b) \neq \vec{0}$$

Zvolíme $A[a_1, a_2] \in p$:

$$\rho(A, q) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 = -c_1$$

$$\Rightarrow \rho(p, q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.4.: Necht' $p : ax + by + c_1 = 0; q : ax + by + c_2 = 0$ jsou dvě rovnoběžky, $(a, b) \neq \vec{0}$. Pak platí:

$$\rho(p, q) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Př.: Určete $\rho(p, q)$:
 $p : 4x - 2y + 1 = 0 \sim 2x - y + 0.5 = 0$
 $q : 2x - y + 3 = 0$

$$\rho(p, q) = \frac{|3 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(A, q)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz C).

Př.: Určete $\rho(p, q)$:
 $p = \{[1 + 2t; -2t; -4t] | t \in \mathbb{R}\}$
 $q = \{[1 - s; s; 2 + 2s] | s \in \mathbb{R}\}$

$$A[1; 0; 0] \in p$$

$$B \in q$$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(1 - s - 1)^2 + s^2 + (2 + 2s)^2} = \sqrt{6s^2 + 8s + 4} = \sqrt{6(s + \frac{2}{3}) - \frac{4}{9} \cdot 6 + 4} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\rho(A, q) = \rho(p, q) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha)$, kde $A \in p$ je libovolný bod.

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz D).

Př.: Určete $\rho(p, \alpha)$:
 $p = \{[-1 + 2t; 1 - t; 2 + 3t] | t \in \mathbb{R}\}$
 $\alpha : x + 5y + z - 3 = 0$

$$\text{Ověření } p \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0:$$

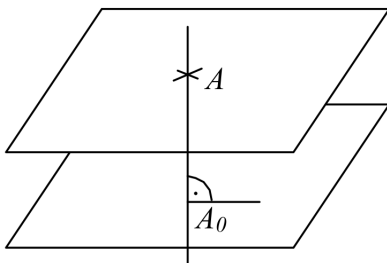
$$(2; -1; 3) \cdot (1; 5; 1) = 2 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow \text{platí.}$$

$$A[-1; 1; 2] \in p:$$

$$\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha) = \frac{|-1 + 5 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$, kde $A \in \alpha$ je libovolný bod.



$$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0; (a, b, c) \neq \vec{0}$$

$$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha.$$

$$\rho(A, \beta) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$A \in \alpha : aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$$

$$\Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.5.: Necht' $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0, \beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ jsou dvě různé rovnoběžné roviny, $(a, b, c) \neq \vec{0}$. Pak platí:

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Př: Určete $\rho(\alpha, \beta)$:

$$\alpha : 3x - y + 2z - 1 = 0$$

$$\beta : -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - z + 5 = 0 \quad 3x - y + 2z - 0 = 0$$

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|-10+1|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

I) Vzdálenosti dvou mimoběžných přímk v \mathbb{E}_3

Pozn: $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta)$, kde $p \subset \alpha; q \subset \beta; \alpha \parallel \beta$.

I. způsob: Z definice:

$$p(A, \vec{u}); q(B, \vec{v})$$

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$\alpha : n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0$$

$A \in \alpha \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_1 .

$$\beta : n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0$$

$B \in \beta \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_2 .

Dále viz H).

II. způsob: Pomocí osy mimoběžek:

Necht' o je osa mimoběžek p, q .

Určíme průniky $o \cap p = \{P\}, o \cap q = \{Q\}$

Př:

Určete $\rho(p, q)$:

$$p = \{[9 + 4t; -2 - 3t; t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$q = \{[-2r; -7 + 9r; 2 + 2r] | r \in \mathbb{R}\}$$

I. zp.: $\vec{u} = (4; -3; 1); \vec{v} = (-2; 9; 2)$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9; 4 \cdot (-2) - 4 \cdot ; 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-2)) = (-15; -10; 30) \rightarrow (3; 2; -6)$$

$$\alpha : 3x + 2y - 6z + d_1 = 0$$

$$A[9; 2; -1] \in \alpha \Rightarrow 27 - 4 + 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = -23.$$

$$\beta : 3x + 2y - 6z + d_2 = 0$$

$$B[0; -7; 2] \in \beta \Rightarrow 0 - 14 - 12 + d_2 \Rightarrow d_2 = 26.$$

$$\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta) = \frac{|26+3|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7$$

II. zp.: Hledáme $o(P, \vec{w})$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \dots = (3; 2; -6)$$

Přímka p, q rovnoběžná s \vec{w} :

$$\vec{AB} = (-9; -5; 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = A + k\vec{u} \\ Q = B + l\vec{v} \end{array} \right\} \vec{PQ} = B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & | & -9 \\ 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ -6 & 1 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & | & -9 \\ 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 6 & -1 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 3 & 4 & 2 & | & -9 \\ 6 & -1 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 17 & 31 & | & -3 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 17 & 31 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & -245 & | & -245 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 & | & -5 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 15 & | & -1 \\ 0 & 8 & 29 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & | & -16 \\ 0 & 8 & 0 & | & -16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = [9; -2; 0] - 2(4; -3; 1) = [1; 4; -2]$$

$$Q = [0; -7; 2] + (-2; 9; 2) = [-2; 2; 4]$$

$$\Rightarrow |PQ| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \rho(p, q) = 7$$

Př:

96/100:

100. Určete osu mimoběžek $x_1 = 7 + t, x_2 = 3 + 2t, x_3 = 9 - t$ a $x_1 = 3 - 7s, x_2 = 1 + 2s, x_3 = 1 + 3s$ a vypočtěte jejich vzdálenost.

$$p = \{[7 + t; 3 + 2t; 9 - t] | t \in \mathbb{R}\}$$

$$q = \{[3 - 7s; 1 + 2s; 1 + 3s] | s \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{u} = (1; 2; -1)$$

$$\vec{v} = (-7; 2; 3)$$

$$\vec{AB} = (-4; -2; -8)$$

$$\vec{w} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2; 7 - 3; 2 + 14) = (8; 4; 16) \sim (-4; 2; 8) \Rightarrow \text{příčkou je } AB.$$

$$P = [7; 3; 9]$$

$$Q = [3; 1; 1]$$

$$|PQ| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$$

Př: 92/82

82. Určete rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou $4x - 3y - 12 = 0$ a mají od bodu $A = (2, 3)$ vzdálenost rovnou 5.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: 4x - 3y + c = 0$ (z rovnoběžnosti). Vzdálenost tedy je $\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-1+c|}{5} = 5 \Rightarrow c = 5 \cdot 5 + 1 = 26 \vee c = 1 - 5 \cdot 5 = -24$

$$p_1: 4x - 3y + 26$$

$$q_2: 4x - 3y - 24$$

Př: 92/83

83. Na ose y najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku i od přímky $3x - 4y + 12 = 0$.

Hledám bod $A[0, y]$. Vzdálenost k počátku: $|y|$.

Vzdálenost k přímce: $\frac{|-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5} \cdot |y-3|$.

Když $y \leq 0$: $-y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow -5y = -4y+12 \Rightarrow y = -12 \in (-\infty; 0)$

Když $0 \leq y \leq 3$: $y = \frac{4}{5}(-y+3) \Rightarrow 5y = -4y+12 \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{9}{12} \in \langle 0, 3 \rangle$

Když $3 \leq y$: $y = \frac{4}{5}(y-3) \Rightarrow 5y = 4y-12 \Rightarrow y = -12 \notin \langle 3, \infty \rangle$

$$A_0 = [0; -12]$$

$$A_1 = \left[0; \frac{9}{12}\right]$$

Př: 92/84

84. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = (-2, 1)$ a od bodu $B = (3, 1)$ má vzdálenost rovnou 4.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.

Když $a = 0$: $A \in p \Rightarrow 1b + c = 0 \Rightarrow p: 0x + y - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 0 \neq 3 \Rightarrow \text{spor.}$

BÚNO tedy $a = 1$.

$$A \in p \Rightarrow -2 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$$

$$\rho(p, B) = 4 \Rightarrow \frac{|3+b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+b^2}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow \frac{25}{16} = 1+b^2 \Rightarrow b =$$

$$\pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}.$$

$$\text{Když } b = \frac{3}{4}: c = \frac{5}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3 + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{\sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$\text{Když } b = -\frac{3}{4}: c = \frac{11}{4}. \text{ Zkouška: } \rho(p, B) = \frac{3 - \frac{3}{4} + \frac{11}{4}}{\sqrt{1 + (-\frac{3}{4})^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 4$$

$$p_1: x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x + 3y + 5 = 0$$

$$p_1: x - \frac{3}{4}y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow p_1: 4x - 3y + 11 = 0$$

Př: 92/85

85. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = (1, 2)$ a má stejnou vzdálenost od bodů $B = (3, 3)$ a $C = (5, 2)$.

Nechť hledaná přímka je tvaru $p: ax + by + c = 0$.

Když $b = 0$: $A \in p \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow p: x - 1 = 0 \Rightarrow \rho(B, p) = 3 \neq 5 = \rho(C, p) \Rightarrow \text{spor.}$
BÚNO tedy $b = 1$.

$$A \in p \Rightarrow a + 2 + c = 0 \Rightarrow a + c = -2$$

$$\rho(p, B) = \rho(p, C) \Rightarrow \frac{|3a+3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5a+2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |3a+3+c| = |5a+2+c| \Rightarrow |2a+1| = |4a|$$

$$\text{Když } a \leq -\frac{1}{2} \vee a \geq 0: 2a + 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Když } a \geq -\frac{1}{2} \wedge a \leq 0: 2a + 1 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{6}.$$

$$p_1: \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow p: x + 2y - 5 = 0$$

$$p_2: -\frac{1}{6}x + y - \frac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow p: x - 6y + 11 = 0$$