§1. Nekonečná geometrická řada

Def: Nekonečnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrickou posloupností s kvocientem q nazýváme *nakonečnou geometrickou řadou.*

Číslo q nazýváme *kvocientem* geometrické řady.

V.1.1.: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrická řada s kvocientem q, kde $|q| < 1$. Pak je tato řada konvergentní a má součet $S = \frac{a_n}{1-q}$.

[Dk:

$$S = \lim S_n = \lim a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q-1} \lim(q^n - 1) = \frac{a_1}{1-q}$$

]

Pozn: Chování nekonečné geometrické řady $a_1 \neq 0$:

1. $-1 < q < 1 \ldots$ řada konverguje
2. $q \geq 1 \ldots$ řada diverguje
3. $q \leq 1$ řada osciluje

Př: Určete součty řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1/2} = 1$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}$

Př: V oboru přirozenych čísel řešte rovnici:

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$\frac{2/x}{1-2x} = \frac{4x-3}{3x-4}$
$\frac{1}{1-2/x} = \frac{4x-3}{3x-4}$
$\frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4}$
$3x^2 - 4x = 4x^2 - 11x + 6$
$x^2 - 7x + 6 = 0$
$(x-6)(x-1) = 0$

Zk: $1 + 2 + 4 + \ldots \neq \frac{1}{-1}$

Zk: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \neq \frac{1}{-1}$

$$p = \{6\}$$

Př: Řešte:

$$\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + \ldots$$

$$\frac{5}{3} = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) + \cdots + 2\left(x^2 + x^4 + x^6\right)$$

$$\frac{5}{3} = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) + \cdots + 2\left(x^2 + x^4 + x^6\right)$$

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{1-x} + 2\frac{x^2}{1-x^2}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)(x+1)} + 2\frac{x^2}{1-x^2}$$
$$\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x^2 = x^2 + x + x^2$$
$$5 - 5x^2 = 6x^2 + 3x$$
$$0 = 14x^2 + 3x - 5$$

$$P = \left\{-\frac{5}{7}; \frac{1}{2}\right\}$$

Př: Je dán čtverec o straně a. Spojnice středů jeho stran tvoří strany dalšího čtverce,... Určete součet obvodů a obsahů všech takto vzniklých čtverců.

$o = 4\left(a + \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}^2}\right) = 4a\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-1/2}\right)^{n-1} = \frac{4a}{1-2^{-1/2}} = 8a + 4a\sqrt{2}$

$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2}^{n-1}}\right)^2 = \frac{a^2}{2^{n-1}} = \frac{a^2}{1-1/2} = 2a^2$

Př: Vyjádřete π pomocí limity posloupností obvodů pravidelného n-úhelníku.

$$o = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2r\sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow \pi = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim \pi = \pi$$

$$o = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2r\tan\frac{\pi}{n} \Rightarrow \pi = \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n} = \lim \pi = \pi$$

Př: 56/3:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} = 3$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^n}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{1/3}\right)}{2/3} = 3\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left(1-\frac{1}{a}\right) = \frac{1-1/a}{1-1/a^2} = \frac{1}{1+1/a} = \frac{a}{1+a}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sin^3 a\right)^n = \frac{1}{1-\sin^3 a}$
5. Evidetně $\sqrt{2} = q > 1$ tedy diverguje!

Př: 56/4:

$$\frac{a}{1-1/3} = 10$$
$$a = 10\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

Př: 56/5:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/2^n}{1-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

Př: 56/7:

1. $100a = a + 13$
   $99a = 13$
   $a = \frac{13}{99}$
   $a = 13 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{0.13}{1-1/100} = \frac{13}{99}$

2. $1000(a-3) = (a-3) + 142$
   $999(a-3) = 142$
   $a = 3 + \frac{142}{999} = \frac{3139}{999}$
   $a = 2 + 142 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000^n} = \frac{0.142}{1-1/1000} = 3 + \frac{142}{999} = \frac{3139}{999}$

3. $100(a-5.137) = (a-5.137) + 0.081$
   $99(a-5.137) = 0.00081$
   $a = 5.137\frac{0.081}{99} = \frac{14129}{2750}$
   $a = 5.137 + 0.00001 \cdot \sum \frac{81}{100^n} = \frac{5137}{100} + \frac{1}{100000} \cdot \frac{80}{1-1/100} = \frac{14129}{2750}$