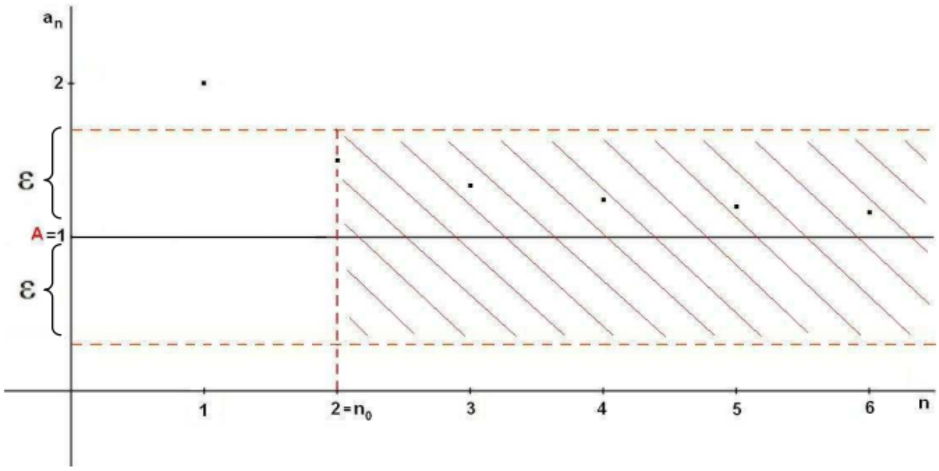
# §1. Limita posloupnosti

Př: Určete několik prvních členů posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. nakreslete její graf a určete, jak se posloupnost chová pro vzrůstající $n$:




Def: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ číslo. Řekneme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*má limitu* rovnu číslu $A$, jestliže $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$, zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Pozn: $|a_n - A| < s \Leftrightarrow a_n \in (A - s; A + s)$

Def: Má-li posloupnost limitu, pak se nazývá *konvergentní*, v opačném případě *divergentní*.

V.1.1.: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

[Dk: Sporem: Nechť má posloupnsost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$limitu $A$ a $B$, $A < B$.

Položme $\epsilon = \frac{B-A}{2}$. Musí platit:
$a_n \in (A - \epsilon; A + \epsilon) \cap a_n \in (B - \epsilon; B + \epsilon) \Rightarrow a_n \in \emptyset$, což je spor.]

V.1.2.: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Př: Obrácení předchozí věty neplatí: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pozn: Důsledek: Jestliže posloupnost není omezená, pak je divergentní.

Př: Určete limitu posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, hypotéza z předchozího příkladu: Máme dokázat:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$$

$|a_n - A| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{n+n}{n} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n}| < s\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$, neboť $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

V.1.3.: Každá nekonečná posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti je konvergentní a má stejnou limitu.

Pozn: Pokud lze vybrat z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$dvě konvergentní posloupnosti s různou limitou, je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$divergentní. (např.: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$)

V.1.4.: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \cap \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

[Dk: $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : b_n < \epsilon \Rightarrow \forall\epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq b_n < \epsilon$ ]

Pozn: Předpoklady předchozí věty lze zeslabit, nerovnosti nemusejí platit pro konečný počet členů posloupnosti.

V.1.5.: Věta o třech limitách:
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti takové, že $\exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n \leq b_n \leq c_n \cap \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$. Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Př:

1. $\{1\}_{n=1}^{\infty}$

   $\forall\epsilon > 0 : \forall n : a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$

2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   $\forall\epsilon > 0 : \forall n > \frac{1}{\epsilon} : 0 < a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = 0 + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

3. $\left\{1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   $\forall\epsilon > 0 : \forall n > \frac{1}{\epsilon} : 1 - \epsilon = 1 - \frac{1}{1/\epsilon} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + (-1)^n\frac{1}{n} = a_n = 1 + (-1)^n\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = 1 + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

4. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

   Na sudých členech $\lim(-1)^{2n} = \lim 1 = 1$. Na lichých členech $\lim(-1)^{2n+1} = \lim -1 = -1$.

   Diverguje!