§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi:
Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka,$\rho(B, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ rovina. Pak platí:

- $p \subset \phi \Leftrightarrow \dim \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 2$
- $p \parallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 2 \wedge \dim \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 3$
- $p \nparallel \phi \Leftrightarrow \dim \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 3$

Př: Rozhodněte vzájemnou polohu přímky a roviny: $p = \{[3+t; 1+2t; 2-t] | t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow p : A = [3; 1; 2], \overrightarrow{u} = (1; 2; -1)$
$\rho = \{[1-3r+s; 2r-s; 1+4r-s] | r, s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \rho : B = [1; 0; 1], \overrightarrow{v} = (-3; 2; 4), \overrightarrow{w} = (1; -1; -1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 3 \Rightarrow$ přímka je různoběžná.

Určení průsečíku:
porovnáme souřadnice p a ρ: $3 + t = 1 - 3r + s$
$1 + 2t = 2r - s$
$2 - t = 1 + 4r - s$
$\Rightarrow$ 3 rovnice o třech neznámích – vyřešením dostaneme $t = -2$. Dosadím: $\underline{P = [1; -3; 4]}$

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí:
Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka, $\rho : ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0, 0, 0]$ rovina. Nechť $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

- $p \subset \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \wedge A \in \rho$
- $p \parallel \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \wedge A \notin \rho$
- $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$

Př: Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

- $p = [1-t, 1+3t; -2] | t \in \mathbb{R}, rho : 3x + y + 5z + 7 = 0$
  $\Rightarrow \overrightarrow{u} = (-1; 3; 0), \overrightarrow{n} = (3; 1; 5)$.
  $\overleftrightarrow{u} \cdot \overleftrightarrow{n} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow$ přímka je s rovinou rovnoběžná. Rozhodneme, jestli p leží v rovině ρ, tzn. jestli $A \in \rho$:
  $A[1; 1; -2]$
  $3 + 1 - 10 + 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow 0$ <u>rovnoběžné různé.</u>
- $p = [3+t; 1-t; 2t] | t \in \mathbb{R}, \rho : x - 2y + z - 3 = 0$
  $\overrightarrow{u} = (1; -1; 2)$

$\overrightarrow{n} = (1;-2;1)$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 1+2+2 = 5 \neq 0 \Rightarrow p \nparallel \rho$
Určení průsečíku:
Dosadíme rovnici přímky do rovnice roviny ρ: $3+t-2+2t+2t-3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}$.

$$p = \left[\frac{17}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$$

Př: 188/26:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = (1;0;2)$
$\overrightarrow{n} = (2;1;1)$
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 2+0+2 = 4 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné.

$2 \cdot t + 0 + 2t + 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} \cap \rho = P + \overrightarrow{PQ} \cdot (-2) = [-2;0;-4]$

Př: 188/27:
Určím rovnoběžnou rovinu procházející A:

$$2 \cdot 3 - 2 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Rovnicí tedy je $\varphi : 2x - y - z - 3 = 0$.
Dosadím: $6 - y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{y = 5}$.

Př: 189/28:

- $\overrightarrow{t} = (-1,1,-3)$
  $\overrightarrow{n} = (-1;2;1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = 1+2-3 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné

  $A = [1,0,2]$. Dosadím: $-1+0+2-1 = 0$. Průnikem je p.
- $\overrightarrow{t} = (-1,3,1)$
  $\overrightarrow{n} = (1,1,-1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = -1+3-1 = 1 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné.
  Průsečík: $2 - t + 3t - t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow q \cap \sigma = [-1,1,-4]$.
- $\overrightarrow{t} = (3;-4;2)$
  $\overrightarrow{n} = (2;1;-1)$
  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{n} = 6-4-2 = 0 \Rightarrow$ rovnoběžné.
  $A[2;1;0]$ dosadím: $4+1 = 5 \neq 0 \Rightarrow m \cap \tau = \emptyset$.

Př: 189/29: Průsečnice p: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -13 & 7 & 31 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right)$

$$p = \left\{\left[\frac{-11+5t}{13}; \frac{-31+7t}{13}; a\right] : t \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow p\left(A\left[-\frac{11}{13}; -\frac{31}{13}; 0\right]; \overrightarrow{u} = (5;7;13)\right)$$

$$\rho(B[5;3;1], \overrightarrow{v} = (-1;1;0), \overrightarrow{w} = (2,-1,5)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejsou rovnoběžné.

Převedu ρ na obecnou rovnici roviny: $x + y = 8 + s \Rightarrow 5x + 5y - z = 40 - 1 = 39$
Spočítám průsečím všech rovnic:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 5 & 5 & -1 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -1 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -13 & 7 & 31 \\ 0 & -10 & 9 & 79 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 13 & -7 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 7 & 157 \\ 0 & 10 & -9 & -79 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 470 & 0 & 0 & 2360 \\ 0 & 470 & 0 & 2740 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 47 & 0 & 0 & 236 \\ 0 & 47 & 0 & 274 \\ 0 & 0 & 47 & 717 \end{array}\right)$$

$$P = \left\{ \left[\frac{236}{47}; \frac{274}{47}; \frac{717}{47} \right] \right\}$$

Př: Převedu γ na obecnou rovnici: $x + z = -6 + r \Rightarrow x - y + z = -5$

Průsečík: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$

$$P = \{[2; 0; -7]\}$$

Převedu δ na obecnou: $x + 3y = 12 + 7t \Rightarrow x + 3y + 7z = 19$

$$1 + 0 - 49 + a = 0 \Rightarrow a = 48$$

$\underline{\epsilon : x + 3y + 7z + 48 = 0}$

Př: 32 Jelikož se roviny prtínají v právě jednom bodě, musí průsečnice protínat γ v jednom bodě.

Spočítám dimenzi vektorového prostoru tvořeného normálovými vektory k rovinám:

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Jelikož dimenze je 3,roviny se protínají v právě jednom bodě. Jelikož ϵ má stejný normálový vektor jako δ, výsledk se nezmění.