§9. Odchylka

Def: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. *Odchylkou dvou vektorů* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ označujeme $\varphi = |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^{+} \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0°$
2. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0180°$
3. Je-li $\overrightarrow{u} \neq k\overrightarrow{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \,| \Rightarrow$ odchylkou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn: $0° \leq |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| \leq 180°$

V.9.1.: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = \arccos \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk: Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn: Jestliže jsou dva podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je $0°$.

A) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_2$

Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají. $0° \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90°$

V.9.2.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce $y = \arccos x$ má pro definiční obor $\langle 0; 1\rangle$ obor hodnot $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$].

V.9.3.: Nechť $p : ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$, $p : ex + fy + g = 0 \quad ((e, f) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_p} = (a, b), \overrightarrow{n_q} = (e, f)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2. a z toho, že normálové vektory přímek svírají stejný úhel jako přímky samé.]

V.9.4.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$, $p : ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_q} = (a, b)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2., z toho, že odchylka normálového vektoru 1 přímky a směrového vektoru 2.přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ (φ je odchylka obou přímek).]

Př: Určete $\sphericalangle p, q|$:

a) $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v}); A[1;0], B[3;1], \overrightarrow{u}(1;1), \overrightarrow{(}-1;0)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|-1|}{\sqrt{2} + \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $p: 5x + 3y - 7 = 0; q: 4x - y + 5 = 0$
$\overrightarrow{n_p} = (5,3); \overrightarrow{n_q} = (4;-1)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|20-3|}{\sqrt{25+9} + \cdot \sqrt{16+1}} = \arccos \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

c) $p = \overrightarrow{AB}; A[1;0]; B[2;1]; q: x + 2y - 6 = 0$
$\overrightarrow{u} = (1;1); \overrightarrow{n_q} = (1,2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|1+2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/69:

69. Určete odchylku α přímek
a) $2x + y - 5 = 0$ a $6x - 2y + 7 = 0$;
b) $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 3 - t$ a $2x + 4y - 1 = 0$.

a) $\overrightarrow{n_p} = (2;1); \overrightarrow{n_q} = (6;-2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|12-2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $\overrightarrow{u} = (1;-1); \overrightarrow{n_q} = (2;4) \sim (1;2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|1-2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/70:

70. Určete rovnici přímky, která má od přímky $x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y.

$\overrightarrow{n} = (1;-2)$
Otočím o $+30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) i$
$p_1: (\sqrt{3}+2)x + (1-2\sqrt{3})y + c_1 = 0$
$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3}+1\right) = c_1$

$$p_1: (2\sqrt{3}+4)x + (-4\sqrt{3}+2) + \left(6\sqrt{3} - 3\right) = 0$$

Otočím o $-30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) i$
$p_1 : (\sqrt{3} - 2)x + (-1 - 2\sqrt{3})y + c_2 = 0$
$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3} - 1\right) = c_1$

$$p_2 : (2\sqrt{3} - 4)x + (-4\sqrt{3} - 2)y + \left(6\sqrt{3} + 3\right) = 0$$

Př: 86/71:

71. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku je dán vrchol ostrého úhlu A = (5,7) a přímka 6x + 4y - 9 = 0 , ve které leží jedna z odvěsen. Určete rovnice přímek, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníku.

$p : 6x + 4y + 9$
$\overrightarrow{n_p} = (6; 4) \sim (3, 2)$
$6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 9 \neq 0 \Rightarrow A \notin p \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = p$
Najdu $\overleftrightarrow{AC} \perp BC$: $\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + c = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow 10 - 21 + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$$\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + 11 = 0$$

Najdu $\overleftrightarrow{AB}$:

Otočím p o $+45°$:
$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y + d = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_1 \Rightarrow 5 + 5 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = -40$

$$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y - 40 = 0$$

Otočím p o $-45°$:
$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y + e = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_2 \Rightarrow 5 \cdot 5 - 7 + e = 0 \Rightarrow e = -18$

$$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y - 18 = 0$$

Př: 86/73:

73. Určete kosiny vnitřních úhlů trojúhelníku o vrcholech A = (1,1), B = (-1,3), C = (3,1).

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2) \sin(-1; 1)$
$\overrightarrow{BC} = (4, -2) \sin(2; -1)$
$\overrightarrow{AC} = (2, 0) \sin(1; 0)$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\beta = \frac{2+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

B) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_3$

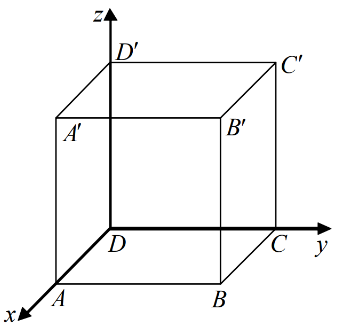
Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.
Nechť p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\sphericalangle p', q'|$, kde $p' \parallel p, q' \parallel q$ jsou různoběžky.
$0^\circ \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90^\circ$

V.9.5.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{p}, q| = \arccos\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: viz V.9.2].

Př: Určete odchylku přímek $\overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC'}$ krychle $ABCDA'B'C'D'$:



Analytické řešení:
$A[1; 0; 0]; A'[1; 0; 1]$,
$B[1; 1; 0]; B'[1; 1; 1]$,
$C[0; 1; 0]; C'[0; 1; 1]$,
$D[0; 0; 0]; D'[0; 0; 1]$,
$\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1); \overrightarrow{BC'} = (-1; 0; 1)$
$\underline{|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{B, C'}|} = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \arccos\frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$

Stereometrické řešení:
Celý problém se evidentně odehrává v rovině $A'BC'$: Úsečky $A'B, BC'$ a $A'C'$ mají evidentně stejnou vzdálenost, protože se jedná o stěnové úhlopříčky. $\triangle A'BC'$ je tedy rovnostroný, pročež $|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC'}| = |\sphericalangle A'BC'| = \frac{\pi}{3}$.

Př: 177/11:
$\overrightarrow{u} = (-1; 1; -1)$
$\overrightarrow{v} = (1; 1; 1)$

$$|\sphericalangle p, \overleftrightarrow{AB}| = \arccos\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$$
.

Př: 177/12:

$\overrightarrow{u}(2;2;10) \sim (1;1;5)$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, x| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, y| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, z| = \arccos \frac{|5|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 7581 = \frac{81}{81} = 1$ *QED.*

Př: 178/17:

1. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,1)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

   .

2. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,0)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

   .

Př: 178/18:

1. $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$:
   $\overrightarrow{u}(-6;5;0)$
   $\overrightarrow{v}(-3;-3;8)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|18-15|}{\sqrt{36+25} \cdot \sqrt{9+9+64}} = \arccos \frac{3\sqrt{5002}}{5002}$$

2. $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BD}$:
   $\overrightarrow{u}(-1;6;0)$
   $\overrightarrow{v}(2;-2;8) \sim (1;-1;4)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1+36} \cdot \sqrt{1+1+8}} = \arccos \frac{7\sqrt{370}}{370}$$

3. $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$:
   $\overrightarrow{u}(-4;3;8)$
   $\overrightarrow{v}(5;1;0)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-20+3|}{\sqrt{16+9+64} \cdot \sqrt{25+1}} = \arccos \frac{17 \cdot \sqrt{2314}}{2314}$$

C) Odchylka přímky od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn: Nechť p, α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné. Pak platí: $|\sphericalangle p, \alpha| = |\sphericalangle p, q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subset \beta$.
$0° \leq |\sphericalangle p, \alpha| \leq 90°$

V.9.6.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka a $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \overrightarrow{0})$ je rovina a nechť $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5., z toho, že odchylka normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$ (φ je odchylka přímky od roviny).]