§1. Vzájemná poloha parabol a přímek, tečna paraboly

Př: Mějme parabolu s rovnicí $2py = x^2$, její bod $T[x_0, y_0]$ a hledejme rovnice všech přímkek, které prochází T a mají s paraboloy právě jeden společný bod.

Libovolná přímka procházejicí T má rovnici $x = x_0$ nebo $y - y_0 = k(x - x_0)$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Pro $x = x_0$ má přímka právě jeden společný bod, protože $f(x)$ je funkcí.

Pro $y - y_0 = k(x - x_0)$ řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 2py &= x^2 && (1) \\ 2p(y - y_0) &= 2pk(x - x_0) && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Po dosazení $2py$ získám kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 2pkx - 2p(y_0 - kx_0) = 0$$

Disriminant rovice lze upravit na mocninu dvojčlenu:

$$D = (2pk)^2 - 4(-2p)(y_0 - kx_0) = 4p^2k^2 - 8pkx_0 + 4x_0^2 = (2pk - 2x_0)^2$$

Rovnice má jediný kořen když $D = 0 \Rightarrow pk = x_0$, tedy:

$$y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$$

Po dosazenía roznásobení:

$$py + py_0 = xx_0$$

Existují ted dvě přímky s požadovanými vlastnostmi.

Pozn: Chceme-li definovat tečnu paraboly, musíme použít pojem vnitřní oblast paraboly. Charakteristické vlastnosti jejich bodů snadno vyšetříme:

$$\rho(X, d) = \rho(Z, d) + |ZX| = |FZ| + |ZX| > |FX|$$

Přímka t je tečnou paraboly, nebosahuje-li žádný bod vnitřní oblasi paraboly.

Def: *Vnitřní oblastí paraboly* $P(F, d)$ nazýváme množinu všech bodů X rovniny, pro keré platí $\rho(X, d) > |FX|$.

Def: *Tečnou paraboly* nazýváme přímku, která obsahuje jeden bod paraboly a neobsahuje žádný vnitřní bod paraoly.

V.1.1.: Má-li parabola rovnici $2py = x^2$, pak její vnitřní oblast je analyticky vyjádřena nerovnicí typu $2py > x^2$.

[Postačí v úvahách o parabole zaměnit rovnost za nerovnost.]

V.1.2.:

1. Má-li parabola rovnici $2py = x^2$ a je-li $T[x_0, y_0]$ jejím bodem, pak tečna paraboly v T má rovnici $p(y + y_0) = xx_0$.

2. Každá rovnice $p(y + y_0) = xx_0$, kde $p \neq 0$, vyjadřuje tečnu paraboly $2py = x^2$ v bodě $T[x_0, y_0]$ paraboly.

[První tvrzení je důsledkem příkladu.
U druhého tvrzení potvrdíme tří vlastnosti přímky:

1. Rovnice $x_0x - py - py_0 = 0$ vyjadřuje přímku, protože $(x_0, -p) \neq \overrightarrow{0}$.
2. Obsauje jedinný bod T paraboly:
Soustava rovnic $p(y+y_0) = xx_0; 2py = x^2$ vede po dosažení k rovnici $(x-x_0)^2 = 0$ s jedinným kořenem x_0, proto přímka obsahuje jedinný bod paraboly.
3. Neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti paraboly:
Předpokládejme, že nějaký bod $X[x, y]$ přímky je bodem vnitřní oblasti paraboly, pak platí: $2py_0 = x_0^2, p(y + y_0) = xx_0; 2py > x^2$
$2xx_0 = 2py + 2py_0 > x^2 + x_0^2, 0 > (x - x_0)^2$.

   To je spor, neplatí tedy předpoklad a přímka má požadovanou vlastnost.

]

Př: 245/13:
$V[2, 1]$, $q = 4 \Rightarrow P : y = \frac{1}{8}(x - 2)^2 + 1$

1. $\overrightarrow{AC} = (9, 6) \Rightarrow AC = \{[-4 + 9t; -3 + 6t]|t \in \langle 0, 1\rangle\}$
$-3 + 6t = \frac{1}{8}(-4 + 9t - 2)^2 + 1$
$-\frac{81}{8}t^2 + \frac{39}{2}t - \frac{17}{2}$
$t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{34}{27} > 1$
$$X = [-4 + 6; -3 + 4]$$
2. $\overrightarrow{BA} = (-4; -8) \sim (-1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left\{[-t; 5 - 2t]|t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$
$5 - 2t = \frac{1}{8}(-t - 2)^2 + 1$
$-\frac{t^2}{8} - \frac{5}{2}t + \frac{7}{2} = 0$
$t = -10 \pm 8\sqrt{2} \Rightarrow t = -10 + 8\sqrt{2}$
$$Y = [10 - 8\sqrt{2}; 25 - 16\sqrt{5}]$$
3. $\overrightarrow{BC} = (5, -2) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \{[5t; 5 - 2t]|t \in \mathbb{R}\}$
$5 - 2t = \frac{1}{8}(5t - 2)^2 + 1$ $0 = \frac{25}{8}t^2 - \frac{t}{2} - \frac{7}{2} = 0$ $t = \frac{2}{25} \pm \frac{8\sqrt{11}}{25}$
$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} - \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} + \frac{16\sqrt{11}}{25}\right]$$
$$Z_1 = \left[\frac{2}{5} + \frac{8\sqrt{11}}{5}; \frac{121}{25} - \frac{16\sqrt{11}}{25}\right]$$

Př: 245/14:
Analogicky.

Př: 244/4:
Je dána parabola, která má rovnici $0.8(y + 2) = (x - 3)^2$ a přímka $q : x + 5y - 3 = 0$. Určete rovnici všech tečen paraboly, které jsou kolmé k q.

Rovnice tečny v bodě $T[x_0, y_0]$:

$$t : 0.4(y + 2) + 0.4(y_0 + 2) = (x - 3)(x_0 - 3)$$

Po úpravé:

$$(x_0 - 3)x - 0.4y + \cdots = 0$$

Tedy vektor kolmý k tečně je $\overrightarrow{n} = (x_0 - 3; -0.4)$. Vektor kolmý k q je $\overrightarrow{m} = (1, 5)$, tedy $0 = \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = (x_0 - 3) - 2 \Rightarrow x_0 = 5$. Z rovnice paraboly pak $y_0 = 3$. Tedy rovnice tečny po dosazení je

$$t : 2x - 0.4y - 3 \cdot 5 - 0.8 - 0.4(3 + 2) = 0$$

$$t : 2x - 0.4y - 22 = 0$$

Př: 244/5:
Je dána parabola $P : -4(x + 2) = (y - 5)^2$ a bod $M[0; 4]$. Určete rovnice všech tečen paraboly procházejících M.

Rovnice tečny je:

$$t : -2(x + 2) - 2(x_0 + 5) = (y - 5)(y_0 - 5)$$

Jelikož $M \notin P$, budeme hledat všechny body $T[x_0, y_0] \in P$, ve kterých má parabola tečnu t procházející M.

$$\begin{aligned} T \in P : \quad & -4(x_0 + 2) = (y_0 - 5)^2 \\ & -4(x_0 + 2) = (y - 5)^2 \\ M \in t : -2(0 + 2) - 2(x_0 + 2) &= (4 - 5)(y_0 - 5) \\ -2(x_0 + 2) &= -(y_0 - 5) + 4 \end{aligned}$$

Odečtením dvojnásobku druhé rovnice získám:

$$0 = (y_0 - 5)^2 + 2(y_0 - 5)$$

Rovnice má dva kořeny $y_0 = 1$ a $y_0' = 7$. K nim dopočítáme body dotyku a tečny: $T[-6; 1]; T'[-3; 7]$

$$t : x - 2y + 8 = 0$$

$$t' : x + y - 4 = 0$$

Př: 245/16:

a)

$$y = \frac{x^2 + 2x + 9}{4}$$

$\overrightarrow{AB} = (-5 - 4)$ tedy rovnoběžka v $\overleftrightarrow{AB}$ má rovnici $y = \frac{4}{5}x + c$.

$$P' : y = \frac{2x + 2}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Derivace (směrnice) paraboly musí být v bodě dotyku stejná jako směrnice tečny, tedy

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Dosadím: $y = \frac{\frac{9+30+225}{25}}{4} = \frac{284}{100}$. Z rovnice tečmy: $2.84 = \frac{4}{5}0.6 + c \Rightarrow c = 10.8$

$$t : 4x - 5y = -10.8$$

b,c,d) Analogicky

Př: 245/16

a) Zavedy si posunuté souřadnice $y'+2=y; x'-1=x$. Dále v těchto souřadnicích:

$$P : 2 \cdot 2y = x^2$$

$$M[1; -3]$$

Hledám tečnu procházející $T[x_0, y_0]$:

$$\begin{aligned} T \in P : \quad\quad\quad 4y_0 &= x_0^2 \\ M \in t : 2(-3) + 2y_0 &= x_0 \\ 2y_0 &= x_0 + 6 \end{aligned}$$

Odečteme dvojnásobek:

$$0 = x_0^2 - 2x_0 - 12 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{13} \wedge x_0' = 1 - \sqrt{13}$$

Dosazením: $T[1+\sqrt{13}; \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}2}{]}$, $T'[1-\sqrt{13}; \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}2}{]}$,

$$t : 2y + 2\left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = x(1+\sqrt{13})$$

$$t' : 2y + 2\left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = x(1-\sqrt{13})$$

V původních souřadnicích:

$$t : 2y + 3 + \sqrt{13} = (x+1)(1+\sqrt{13})$$

$$t' : 2y + 3 - \sqrt{13} = (x+1)(1-\sqrt{13})$$

$$t : 2y + 2 - x(1+\sqrt{13}) = 0$$

$$t' : 2y + 2 - x(1-\sqrt{13}) = 0$$