X. Vektorové prostory

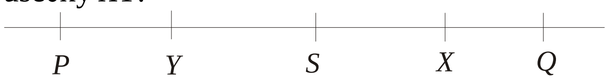
§1. Vektorový prostor vázaných vektorů

Pozn.: V tomto paragrafu ukážeme všechny podstatné vlastnosti vektorů na jednom z jejich možných modelů – na množině orientovaných úseček s pevným počátečním bodem a zformulujeme definici vektorového prostoru. V dalších paragrafech pak ukážeme jiné modely vektorových prostorů.

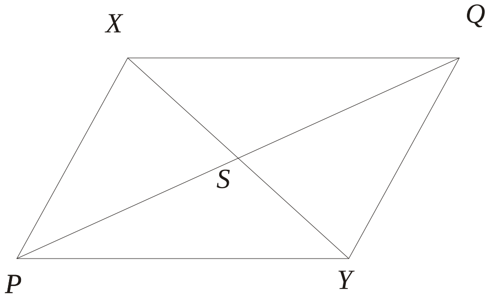
Def.: Nechť $P \in \boldsymbol{E_3}$ je libovolný pevný bod, ke každému bodu $X \in \boldsymbol{E_3}$ přiřadíme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PX}$ (P je počáteční bod, X je koncový bod této úsečky). Množinu všech těchto úseček označíme $\boldsymbol{U}$ (resp. $\boldsymbol{U_3}$) a nazveme <u>množinou všech orientovaných úseček s počátečním bodem</u> P (nebo <u>množinou všech vázaných vektorů s počátečním bodem</u> P).

Pozn.: Je-li $X=P$, jde o úsečku $\overrightarrow{PP}$, u níž počáteční a koncový bod splývají.

Def.: a) Nechť $P, X, Q, Y \in \boldsymbol{E_3}$ jsou 4 kolineární body, řekneme, že body P, X, Q, Y tvoří vrcholy <u>degenerovaného rovnoběžníku</u>, jestliže střed úsečky PQ se rovná středu úsečky XY.



b) Nechť $P, X, Q, Y \in \boldsymbol{E_3}$ jsou 4 libovolné body, řekneme, že body P, X, Q, Y tvoří vrcholy <u>zobecněného rovnoběžníku</u>, jestliže střed úsečky PQ se rovná středu úsečky XY.



Def.: <u>Na množině $\boldsymbol{U}$</u> všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in \boldsymbol{E_3}$ definujeme operaci <u>sčítání</u> takto: $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in \boldsymbol{U}: \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PQ}$, je-li bod $Q \in \boldsymbol{E_3}$ vrcholem zobecněného rovnoběžníku $PXQY$.

Pozn.: Je tedy sčítání orientovaných úseček operace na množině $\boldsymbol{U}$, tzn. zobrazení $\oplus : \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$.

V.1.1.: Operace sčítání na množině $\boldsymbol{U}$ má následující vlastnosti:

1. $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in \boldsymbol{U} : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PX}$ (K-komutativnost)
2. $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}, \overrightarrow{PZ} \in \boldsymbol{U} : (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}) + \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PX} + (\overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PZ})$ (A-asociativnost)

3. $\exists \overrightarrow{PP} \in \boldsymbol{U} : \forall \overrightarrow{PX} \in \boldsymbol{U} : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX}$ (N-existence neutrálního prvku)
4. $\forall \overrightarrow{PX} \in \boldsymbol{U} : \exists \overrightarrow{PY} \in \boldsymbol{U} : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP}$ (I-existence inverzního prvku ke každému prvku)

Pozn.: Vyhovuje-li množina ***U*** uzavřenosti a všem 4 axiomům z předchozí věty, nazývá se množina ***U*** vzhledem k operaci $\oplus$ komutativní (abelovskou) grupou a značíme ji (***U***+) (grupa je tedy struktura s 1 operací, která splňuje 4 podmínky – uzavřenost a podmínky 1.-3.).
Pokud je splněna pouze uzavřenost, mluvíme o grupoidu (***U***+).

Def.: Na množině ***U*** všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in \boldsymbol{E_3}$ definujeme operaci násobení orientovaných úseček reálným číslem (tzv. vnější násobení na množině ***U***) takto: je-li $p \in \boldsymbol{R}$ a $\overrightarrow{PX} \in \boldsymbol{U}$, pak p-násobkem orientované úsečky $\overrightarrow{PX}$ nazveme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PY}$ (zapisujeme $\overrightarrow{PY} = p \cdot \overrightarrow{PX}$), přičemž platí:

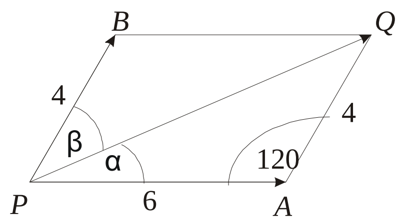
1. $p = 0 \Rightarrow Y = P$
2. $p \neq 0 \Rightarrow Y = H_{P,p}(X)$

Pozn.: Vnější násobení orientovaných úseček $\otimes$ tedy je zobrazení $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{U}$.

V.1.2.: Vnější násobení na množině ***U*** má následující vlastnosti:
$\forall p, q \in \boldsymbol{R}, \forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in \boldsymbol{U}$:

1. $p \cdot (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}) = p \cdot \overrightarrow{PX} + p \cdot \overrightarrow{PY}$
2. $(p+q) \cdot \overrightarrow{PX} = p \cdot \overrightarrow{PX} + q \cdot \overrightarrow{PX}$
3. $(p \cdot q) \cdot \overrightarrow{PX} = p \cdot (q \cdot \overrightarrow{PX})$
4. $1 \cdot \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX}$

Př.: Vázané vektory $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ o velikostech $|\overrightarrow{PA}| = 6, |\overrightarrow{PB}| = 4$ svírají úhel 60°. Určete velikost vázaného vektoru $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ a odchylky $|\angle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}|, |\angle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB}|$.



$|\angle APB| = 60° \Rightarrow |\angle PAQ| = 120°$

$\Delta PAQ : |PQ| = \sqrt{|PA|^2 + |AQ|^2 - 2 \cdot |PA| \cdot |AQ| \cdot \cos 120°} = \sqrt{36 + 16 + 2 \cdot 24 \cdot \cos 60°} =$
$= \sqrt{76} = 2 \cdot \sqrt{19}$

$$\Delta PAQ : \frac{\sin\alpha}{|AQ|} = \frac{\sin 120°}{|PQ|} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{2\cdot\sqrt{19}}\cdot\sin 60° = \frac{2}{\sqrt{19}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{19}} \Rightarrow$$
$$\alpha \cong 23° \Rightarrow \beta \cong 37°$$

§2. Definice vektorového prostoru

Def.: Nechť $\boldsymbol{V}$ je množina, jejíž prvky označíme např. $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$ Nechť je na množině $\boldsymbol{V}$ definována operace sčítání $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \boldsymbol{V} : \vec{u} + \vec{v} \in \boldsymbol{V})$ a vnější násobení reálným číslem $(\forall p \in \boldsymbol{R}, \forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : p \cdot \vec{u} \in \boldsymbol{V})$. Pak tuto množinu nazveme vektorovým prostorem (nad množinou $\boldsymbol{R}$) a její prvky vektory, jestliže platí:

$\forall p, q \in \boldsymbol{R}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \boldsymbol{V}$:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\exists \vec{o} \in \boldsymbol{V}, \forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : \exists (-\vec{u}) \in \mathrm{V} : \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{o}$
5. $p \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = p \cdot \vec{u} + p \cdot \vec{v}$
6. $(p + q) \cdot \vec{u} = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{u}$
7. $(p \cdot q) \cdot \vec{u} = p \cdot (q \cdot \vec{u})$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Vektor $\vec{o}$ z 3. nazýváme nulovým vektorem, vektor $(-\vec{u})$ ze 4. nazýváme vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$.

V.2.1.: Nechť $\boldsymbol{V}$ je vektorový prostor, pak platí:

a) $\exists! \vec{o} \in \boldsymbol{V}$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor
b) $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : \exists! (-\vec{u}) \in \boldsymbol{V}$
c) $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$
d) $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : (-1) \cdot \vec{u} = (-\vec{u})$
e) $\forall p \in \boldsymbol{R} : p \cdot \vec{o} = \vec{o}$
f) $\forall p \in \boldsymbol{R}, \forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : p \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow p = 0 \vee \vec{u} = \vec{o}$

Pozn.: Nechť $\boldsymbol{U}$ je množina všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in \boldsymbol{E_3}$, pak podle výsledku §1 je tato množina vektorovým prostorem, který nazveme vektorový prostor vázaných vektorů v prostoru a budeme jej označovat $\boldsymbol{U_3}$, jeho prvky nazveme vázanými vektory.
Provedeme-li analogickou konstrukci v $\boldsymbol{E_2}$, získáme vektorový prostor vázaných vektorů v rovině $\boldsymbol{U_2}$. Analogicky na přímce získáme prostor $\boldsymbol{U_1}$.

Př.: Na množině $\boldsymbol{R}^{(2)}=\{[x,y],\ x\in \boldsymbol{R},\ y\in \boldsymbol{R}\}$ všech uspořádaných dvojic $\boldsymbol{R}$ čísel definujeme operaci sčítání a vnější násobení takto:

$\forall \vec{u_1}=[x_1,y_1],\ \vec{u_1}\in \boldsymbol{R}^{(2)},\ \forall \vec{u_2}=[x_2,y_2],\ \vec{u_2}\in \boldsymbol{R}^{(2)} \Rightarrow \vec{u_1}\oplus\vec{u_2}=\left[\vec{x_1}+\vec{x_2},\vec{y_1}+\vec{y_2}\right]\in \boldsymbol{R}^{(2)}$;

$\forall p\in \boldsymbol{R}$: $p\cdot\vec{u_1}=[p\cdot x_1, p\cdot y_1]\in \boldsymbol{R}^{(2)}$.

Dokažte, že takto definovaná struktura je vektorovým prostorem.

Zřejmě platí, že $\vec{u_1}\oplus\vec{u_2}\in \boldsymbol{R}^{(2)}$ a $p\cdot\vec{u_1}\in \boldsymbol{R}^{(2)}$

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$:

$$[x_1,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1+x_2,y_1+y_2]=[x_2+x_1,y_2+y_1]=[x_2,y_2]+[x_1,y_1]$$

2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$:

   Analogicky jako v 1.

3. $\exists\vec{o}\in \mathrm{V}:\vec{u}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{u}=\vec{u}$:

$$\vec{o}=[0,0],[x_1,y_1]+[0,0]=[x_1+0,y_1+0]=[x_1,y_1]$$

4. $\forall\vec{u}\in \mathrm{V}:\exists(-\vec{u})\in \mathrm{V}:\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{o}$

$$\vec{u_1}+(-\vec{u_1})=[x_1,y_1]+[-x_1,-y_1]=[x_1-x_1,y_1-y_1]=[0,0]=\vec{o}$$

5. $p\cdot(\vec{u}+\vec{v})=p\cdot\vec{u}+p\cdot\vec{v}$

$$p\cdot([x_1,y_1]+[x_2,y_2])=p\cdot[x_1+x_2,y_1+y_2]=[p\cdot(x_1+x_2),p\cdot(y_1+y_2)]=$$
$$=[p\cdot x_1+p\cdot x_2,p\cdot y_1+p\cdot y_2]=[p\cdot x_1,p\cdot y_1]+[p\cdot x_2,p\cdot y_2]=p\cdot\vec{u_1}+p\cdot\vec{u_2}$$

6. $(p+q)\cdot\vec{u}=p\cdot\vec{u}+q\cdot\vec{u}$

   Analogicky jako 5.

7. $(p\cdot q)\cdot\vec{u}=p\cdot(q\cdot\vec{u})$

$$(p\cdot q)\cdot\vec{u}=(p\cdot q)\cdot[x,y]=[p\cdot q\cdot x,p\cdot q\cdot y]=p\cdot[q\cdot x,q\cdot y]=$$
$$=p\cdot(q\cdot[x,y])=p\cdot(q\cdot\vec{u})$$

8. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

$$1\cdot\vec{u}=1\cdot[x,y]=[x,y]=\vec{u}$$

Pozn.: Analogicky můžeme dokázat, že množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel $\boldsymbol{R}^{(n)}=\{(x_1,x_2,...,x_n),x_i\in \boldsymbol{R},\ i\in\{1,2,..,n\}\}$ tvoří vzhledem k analogicky definovaným operacím sčítání a vnější násobení

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$
$$p\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(p\cdot x_1,p\cdot x_2,...,p\cdot x_n)$$

vektorový prostor, který nazveme vektorový prostor uspořádaných n-tic reálných čísel (=aritmetický vektorový prostor $\boldsymbol{R}^{(n)}$) .

Př.: Dokažte V.2.1.:

a) $\exists!\vec{o}\in \boldsymbol{V}$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor:

   Sporem: Nechť $\exists\vec{o_1},\vec{o_2}$. Pak $\vec{o_1}=\vec{o_1}+\vec{o_2}\wedge\vec{o_2}=\vec{o_1}+\vec{o_2}\Rightarrow\vec{o_1}=\vec{o_2}$ …SPOR

b) $\forall\vec{u}\in \boldsymbol{V}:\exists!(-\vec{u})\in \boldsymbol{V}$:

   Sporem: Nechť $\vec{x},\vec{y}$ jsou opačné k vektoru $\vec{u}$.

   Pak $\vec{x}=\vec{x}+\vec{o}=\vec{x}+(\vec{u}+\vec{y})=(\vec{x}+\vec{u})+\vec{y}=\vec{o}+\vec{y}=\vec{y}$ …SPOR

c) $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$:

$$0 \cdot \vec{u} = (0+0) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} \Rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

d) $\forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : (-1) \cdot \vec{u} = (-\vec{u})$:

$$\vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} = (1-1) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o} \Rightarrow (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$$

e) $\forall p \in \boldsymbol{V} : p \cdot \vec{o} = \vec{o}$:

$$p \cdot \vec{o} = p \cdot (\vec{o} + \vec{o}) = p \cdot \vec{o} + p \cdot \vec{o} \Rightarrow p \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

f) $\forall p \in \boldsymbol{V}, \forall \vec{u} \in \boldsymbol{V} : p \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow p = 0 \vee \vec{u} = \vec{o}$:

„$\Leftarrow$“: c),e)

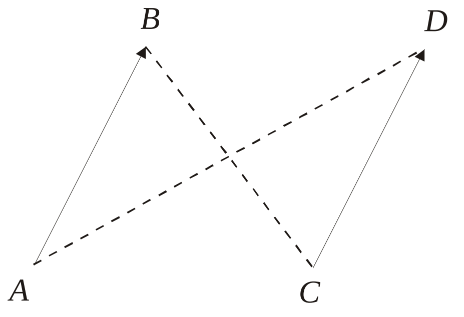
„$\Rightarrow$“: $p \cdot \vec{u} = \vec{o} \Rightarrow$ a) $p = 0 \ldots$c),e)

b) $p \neq 0 \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{1}{p} \cdot \vec{o} = \vec{o}$

§3. Geometrický model vektorového prostoru

Pozn.: Nyní zobecníme úvahy z §1 a vytvoříme model vektorového prostoru užitečný zejména v analytické geometrii.

Def.: Nechť *A*, *B*, *C*, $D \in \boldsymbol{E_3}$ jsou body. Řekneme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou ekvipolentní, jestliže střed úsečky *AD* je i středem úsečky *CB*, a zapisujeme $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD}$.



Pozn.: Z definice je zřejmé, že navzájem ekvipolentní orientované úsečky jsou stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované, body *A*, *B*, *C*, *D* tvoří vrcholy zobecněného rovnoběžníku.

Pozn.: ε je relace na množině všech orientovaných úseček, která má vlastnosti popsané v následující větě:

V.3.1.: $\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF} \subseteq \boldsymbol{E_3}$:

1. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{AB}$ (R)
2. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \varepsilon \overrightarrow{AB}$ (S)
3. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \varepsilon \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{EF}$ (T)

Pozn.!: Relace ε, která má vlastnosti R, resp. S, resp. T z předchozí věty, se nazývá reflexivní, resp. symetrická, resp. tranzitivní.

Má-li nějaká relace všechny 3 uvedené vlastnosti zároveň, nazývá se <u>relace ekvivalence</u>.
Ke každé ekvivalenci existuje <u>rozklad</u> na tzv. <u>třídy rozkladu</u>.
Množina všech orientovaných úseček se rozkládá na třídy – jisté význačné podmnožiny, přitom v téže třídě rozkladu leží všechny navzájem ekvipolentní úsečky.
Tyto třídy mají následující vlastnosti:

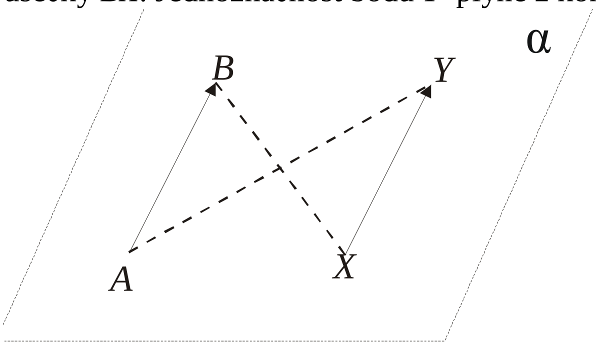
1. jsou po dvou disjunktní
2. sjednocení všech těchto tříd vytváří celou množinu orientovaných úseček.

Def.: Nechť $\boldsymbol{M}$ je množina všech orientovaných úseček v $\boldsymbol{E_3}$ a nechť $\varepsilon \subseteq \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ je relace ekvipolence. Pak třídu rozkladu množiny $\boldsymbol{M}$, který přísluší relaci ε, nazveme <u>volným vektorem.</u>

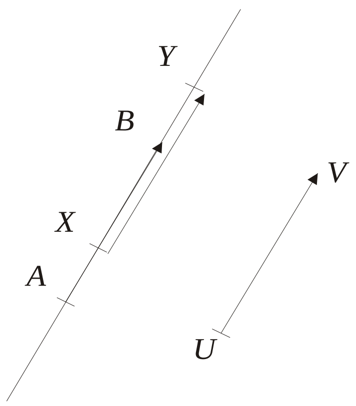
Def.: Nechť $\vec{u} \subseteq \boldsymbol{M}$ je libovolný volný vektor a $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ orientovaná úsečka, tedy $\vec{u} = \left\{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{AB}\right\}$. Pak orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ nazveme <u>umístěním vektoru</u> $\vec{u}$.

V.3.2.: Nechť $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{M}$ je orientovaná úsečka, $X \in \boldsymbol{E_3}$ libovolný bod, pak $\exists! Y \in \boldsymbol{E_3}$: $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{XY}$.

[Dk.: 1. Je-li $A=B \Rightarrow X=Y$…tvrzení platí.
2. Nechť $A \neq B$:
a) $X \notin \overleftrightarrow{AB} : \exists \alpha \subseteq \boldsymbol{E_3}$ určená body A,B,X a platí, že střed úsečky AY je i střed úsečky BX. Jednoznačnost bodu Y plyne z konstrukce.



b) $X \in \overleftrightarrow{AB}$: Nechť $U \notin \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \exists! V \in \boldsymbol{E_3}$: $\overleftrightarrow{UV} \varepsilon \overleftrightarrow{AB}$.
Pak $X \notin \overleftrightarrow{UV} \Rightarrow \exists! Y \in \boldsymbol{E_3}$: $\overleftrightarrow{XY} \varepsilon \overleftrightarrow{UV} \Rightarrow$ z tranzitivity relace ε tvrzení plyne.



]

Def.: Nechť $\boldsymbol{V}$ je množina všech volných vektorů v $\boldsymbol{E_3}$. Pak <u>na množině $\boldsymbol{V}$</u> definujeme operace <u>sčítání</u> a <u>vnější násobení</u> takto:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \subseteq \boldsymbol{V} : \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kde $\vec{w} = \left\{ \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PC} \right\}$, přitom $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}, \overrightarrow{PB} \in \vec{v}$ a $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ je součet orientovaných úseček $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ definovaný na množině $\boldsymbol{U}$, tzn. bod C je čtvrtým vrcholem zobecněného rovnoběžníku $PACB$.

2. $\forall p \in \boldsymbol{R}$ $, \forall \vec{u} \subseteq \boldsymbol{V} : p \cdot \vec{u} = \vec{z}$, kde $\vec{z} = \left\{ \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PF} \right\}$, přitom $\overrightarrow{PE} \in \vec{u}$ a $\overrightarrow{PF} = p \cdot \overrightarrow{PE}$ je vnější součin orientované úsečky $\overrightarrow{PE}$ a čísla p definovaný na množině $\boldsymbol{U}$, tzn. pomocí stejnolehlosti se středem P a koeficientem p.

Def.: Pokud $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}$, nazýváme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PA}$ též <u>reprezentantem vektoru $\vec{u}$</u>.

V.3.3.: Operace $\oplus, \otimes$ definované na množině $\boldsymbol{V}$ nezávisejí na výběru reprezentantů.

V.3.4.: Množina $\boldsymbol{V}$ všech volných vektorů v $\boldsymbol{E_3}$ s výše definovanými operacemi sčítání vektorů a vnějšího násobení tvoří vektorový prostor nad množinou $\boldsymbol{R}$.

[Dk.: Plyne z toho, že operace $\oplus, \otimes$ jsou definovány pomocí operací na množině $\boldsymbol{U}$, která je sama vektorovým prostorem $\Rightarrow$ všechny podmínky 1-8 z definice jsou splněny.]

Pozn.: Vektorový prostor $\boldsymbol{V}$ všech volných vektorů v $\boldsymbol{E_3}$ nazveme <u>vektorovým prostorem volných vektorů</u> v prostoru a budeme jej označovat $\boldsymbol{V_3}$. Analogicky v rovině a na přímce získáme vektorové prostory $\boldsymbol{V_2}$ a $\boldsymbol{V_1}$.