

Př: Na množině $\mathbb{R}^{(2)} = \{[x, y]\}$ všech uspořádaných dvojic \mathbb{R} čísel definujeme operaci sčítání a vnějšího násobení takto:

$$\forall \vec{u}_1 = [x_1, y_1]; \forall \vec{u}_2 = [x_2, y_2] : \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \in \mathbb{R}^{(2)}$$

$$\forall \vec{u}_1 = [x_1, y_1]; \forall p \in \mathbb{R} : p \cdot \vec{u}_1 = [p \cdot x_1, p \cdot y_1] \in \mathbb{R}^{(2)}$$

Dokažte, že takto definovaná struktura je vektorovým prostorem:

1. Komutativita:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{u}_2 + \vec{u}_1$$

2. Asociativita:

$$\vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3 = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

3. Nulový prvek: $\exists \vec{o} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = u :$

$$\vec{o} = (0, 0) : (x + y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x + y)$$

4. Roznásobení

5. Roznásobení

6. Existence neutrálního prvku násobení:

Pozn: Analogicky můžeme dokázat, že množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel tvoří vzhledem k analogickým definicím sčítání a vnějšího násobení vektorový prostor.

• • •

Def: Nechť M je množina všech orientovaných úseček v \mathbb{E}_3 a nechť $\epsilon \subset M \times M$ je relace ekvivalence. Pak třídu množiny M , která přísluší relaci ϵ , nazveme *volným vektorem*.

Def: Nechť $\vec{u} \subset M$ je libovolná úsečka, $X \in \mathbb{E}_3$ libovolný bod, pak $\forall Y \in \mathbb{E}_3 : \overrightarrow{AB} \epsilon \overrightarrow{XY}$.

Def: Nechť V je množina všech volných vektorů v \mathbb{E}_3 . Pak na množině V definujeme operace *sčítání* a *vnější násobení* takto:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \subset V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kde $\vec{w} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \epsilon \overrightarrow{PC}\}$, přitom $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}$ a $\overrightarrow{PB} \in \vec{v}$ a $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC}$.

Def: Pokud $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}$, nazýváme orientovanou úsečku \overrightarrow{PA} též *ireprezentantem vektoru* \vec{u} .

V.0.1.: Operace $+$ a \times definované na množině V nezávisí na výběru reprezentantů.

V.0.2.: Množina V všech volných vektorů v \mathbb{E}_3 s výše definovanými operacemi sčítání ve a vnějšího násobení tvoří vektorový prostor nad množinou \mathbb{R} .