

## §1. Polynomy, kořeny polynomů

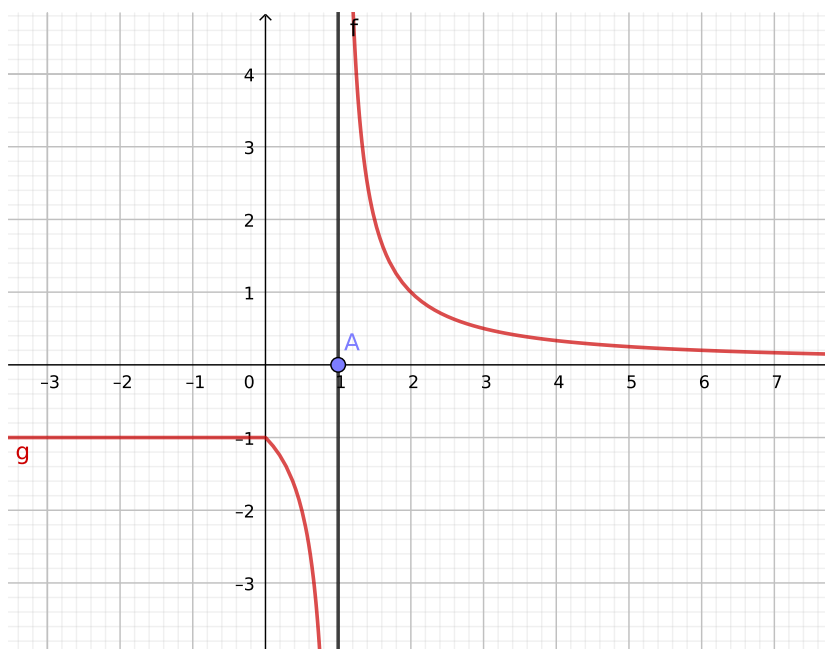
**\*128.** Sestrojte graf funkce a)  $y = \frac{2}{x + |x| - 2}, x \neq 1$ ;

Když  $x \geq 0$ :

$$\frac{2}{2x - 2} = \frac{1}{x - 1}$$

Když  $x \leq 0$ :

$$\frac{2}{0 - 2} = -1$$



**\*141.** Vypočítejte integrály:

a)  $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$ ; b)  $\int (1-x)^5 dx$ ; c)  $\int (ax+b)^n dx$ ,  $n$  číslo přirozené;

d)  $\int \frac{1}{(2x-3)^3} dx$ ; e)  $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ ,  $x \neq a$ ,  $n$  číslo přirozené;

f)  $\int e^{at} dt$ ; g)  $\int \sqrt[5]{9-3x} dx$  ( $a, b$  čísla reálná).

[Návod: a) nahraďte  $x - 2 = t$ , potom  $dx = dt$ ; b)  $1 - x = t$ ,  $dx = -dt$ , atd.]

a)

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{1}{2(x-2)^2} + C$$

d)

$$2 \int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^3} = \frac{2}{2(2x-3)^2} + C$$

$$2 \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

e) /

**\*191. Vypočtete integrály:**

a)  $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ ; b)  $\int \frac{x^4}{x-3} dx$ ; c)  $\int \frac{2+3x^3}{1+x^2} dx$ ; d)  $\int \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} dx$ .

Vždyť takové křivky jsme se určitě neučili.

Indefinite integral:

☒ Step-by-step solution

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}(x) + \text{constant}$$

**150.)** Zpaměti určete obsah obrazce vymezeného danou křivkou, osou  $x$

a druhými souřadnicemi bodů křivky: a)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $A \equiv (1, 5)$ ;  $B \equiv$

$\equiv (5, 1)$ ; b)  $y = \cos x$ ,  $A \equiv (0, 1)$ ,  $B \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ; c)  $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,

$A \equiv (0, 1)$ ,  $B \equiv \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ ; d)  $y = e^x$ ,  $A \equiv (0, 1)$ ,  $B \equiv (2, 1)$ ;

\*e)  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $A \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ ,  $B \equiv (\sqrt{3}, 1)$ .

e)

$$\frac{\pi}{6}$$

**\*371.** Jsou-li  $x, y, z$  neznámé a parametr  $p$  libovolné číslo, řešte soustavu a proveďte diskusi jejího řešení.

a)  $x + y + z = 6$ ,  
 $x + py = 9$ ,  
 $y = z - 1$ ;

b)  $x + y + z = 3$ ,  
 $x + p(y + z) = 5$ ,  
 $y - z = 0$ ;

c)  $x + y + pz = p$ ,  
 $x + pz = 0$ ,  
 $y + pz = 1$ ;

d)  $x + py = 1$ ,  
 $y + pz = 0$ ,  
 $z + px = p$ .

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - p$$

$$\text{Když } p = 2: \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P = \emptyset$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & p & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 5p$$

$$x = \frac{18 - 5p}{2 - p}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$y = \frac{-4}{2 - p}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & p & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -p - 2$$

$$z = \frac{p + 2}{p - 2}$$

$$\left\{ \left[ \frac{18 - 5p}{2 - p}; \frac{-4}{2 - p}; \frac{p + 2}{p - 2} \right] \right\}$$

b,c,d) Analogicky.

**\*373. Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy, jsou-li  $x, y, z$  neznámé a parametr  $p$  libovolné číslo.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & px + y + z = 1, \\ & x + py + z = p, \\ & x + y + pz = p^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & x - py + p^2z = 1, \\ & -p^3x + y - pz = 1, \\ & p^2x - p^3y + z = 1. \end{aligned}$$

a)

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = p^3 + 3p + 2 = (p - 1)^2(p + 2)$$

Když  $p = 1$ :

$$x + y + z = 1$$

$$P = \{[x, y, 1 - x - y] | x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Když } p = -2: \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$P = \emptyset$$

Jinak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{vmatrix} = -p^3 + p^2 + p - 1$$

$$x = \frac{-p^3 + p^2 + p - 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & p^2 & 1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 1$$

$$y = \frac{p^2 - 2p + 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & p \\ 1 & p & p^2 \end{vmatrix} = p^4 - 2p^2 + 1$$

$$z = \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$P = \left\{ \left[ \frac{-p^3 + p^2 + p - 1}{(p-1)^2(p+2)}; \frac{p^2 - 2p + 1}{(p-1)^2(p+2)}; \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{(p-1)^2(p+2)} \right] \right\}$$

b) Analogicky.

**\*376. V oboru reálných čísel řešte soustavu**

$$(a+1)x + y + z = a+1,$$

$$x + (a+1)y + z = a+3,$$

$$x + y + (a+1)z = -2a-4, \text{ jsou-li } x, y, z \text{ neznámé a } a \text{ parametr.}$$

**Proveďte diskusi vzhledem k číslu } a.**

Nechť  $b = a + 1$ :

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b^3 + 3b + 2 = (b-1)^2(b+2) = a^2(a+3)$$

Když  $a = 0$ :

$$3 = x + y + z = 1$$

Nemá řešení. Když  $a = -3$ :  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim$   
 $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right)$   

$$\left\{ \left[ \frac{4+3a}{3}; \frac{2+3a}{3}; a \right] : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Jinak:

$$\left| \begin{array}{ccc} b & 1 & 1 \\ b+2 & b & 1 \\ -b & 1 & b \end{array} \right| = b^3 + b^2 - 4b + 2 = a^3 + 4a^2 + 1$$

$$x = \frac{a^2 + 4 + 1}{a(a+3)}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} b & 1 & b \\ 1 & b+2 & 1 \\ 1 & -2b & b \end{array} \right| = p^3 + 3p^2 - 2p - 2 = a^3 + 6a^2 + 7a$$

$$y = \frac{a^2 + 6a + 7}{a(a+3)}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} b & 1 & b \\ 1 & b & b+2 \\ 1 & 1 & -2b \end{array} \right| = -2p^3 - 2p^2 + 2p + 2 = -2a^3 - 8a^2 - 8a$$

$$z = \frac{-2a^2 - 8a - 8}{a^2(a+3)}$$

$$\left\{ \left[ \frac{a^2 + 4 + 1}{a(a+3)}; \frac{a^2 + 6a + 7}{a(a+3)}; \frac{-2a^2 - 8a - 8}{a^2(a+3)} \right] \right\}$$

**\*420. Řešte soustavu**

$$ax + y + z = 4,$$

$$x + by + z = 3,$$

$x + 2by + z = 4$ , jsou-li parametry  $a, b$  libovolná čísla a  $x, y, z$  neznámé. Proveďte diskusi řešení soustavy vzhledem k číslům  $a, b$ .

$$\left| \begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{array} \right| ab + 1 + 2b - b - 2ab - 1 = b(1 - a)$$

1. Když  $b = 0$ :

$$3 = x + z = 4$$

Nemá řešení.

2. Když  $a = 1$ :

$$x + y + z = 4 = z + 2by + z$$

(a) Když  $b = \frac{1}{2}$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$P = \{[2 - 1z; 2; z] : z \in \mathbb{R}\}$$

(b) Když  $a \neq 1$ :  $y = 0$

$$3 = x + z = 4$$

Nemá řešení.

3. Jinak

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{array} \right| = 1 - 2b$$

$$x = \frac{1 - 2b}{b(1 - a)}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4b & 1 \end{array} \right| = 1 - a$$

$$x = \frac{1}{b}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b & 1 \end{array} \right| = -2ab + 7b - 1$$

$$x = \frac{-2ab + 7b - 1}{b(1 - a)}$$

$$\left\{ \left[ \frac{1 - 2b}{b(1 - a)}; \frac{1}{b}; \frac{-2ab + 7b - 1}{b(1 - a)} \right] \right\}$$