§1. Lineárni závislost a nezávislost

Př: Dokažte, že vektory $\overrightarrow{e_1} = (1,1,1,1), \overrightarrow{e_1} = (1,1,-1,-1), \overrightarrow{e_1} = (1,-1,1,-1), \overrightarrow{e_1} = (1,-1,-1,1)$ tvoří bázy VP $\mathbb{R}^{(4)}$. Určete souřadnice vektorů $\overrightarrow{x} = (1,2,1,1)$, $\overrightarrow{=}(0,0,0,1)$ v této bázi.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&2&2&-1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&2&2&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&2&2&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&4&-1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&4&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&4&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}4&0&0&0&5\\0&4&0&0&1\\0&0&4&0&-1\\0&0&0&4&-1\end{array}\right)$$

$$\overrightarrow{x} = \frac{5}{4} \cdot \overrightarrow{e_1} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_2} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_3} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\1&1&-1&-1&0\\1&-1&1&-1&0\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&0\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&2&2&0&-1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&2&2&0&-1\\0&0&1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&2&-2&-1\\0&0&1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&2&-2&-1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&-4&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&4&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&4&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&4&1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4&0&0&0&1\\0&4&0&0&-1\\0&0&4&0&-1\\0&0&0&4&1\end{array}\right)$$

$$\overrightarrow{y} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_1} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_2} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_3} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{e_4}$$