§9. Odchylka

Def: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. *Odchylkou dvou vektorů* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ označujeme $\varphi = |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0^\circ$
2. Je-li $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}; k \in \mathbb{R}^- \Rightarrow |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0180^\circ$
3. Je-li $\overrightarrow{u} \neq k\overrightarrow{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \,| \Rightarrow$ odchylkou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn: $0^\circ \leq |\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| \leq 180^\circ$

V.9.1.: Nechť $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou dva nenulové vektory. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = \arccos \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk: Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn: Jestliže jsou dva podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je 0°.

A) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_2$

Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají. $0^\circ \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90^\circ$

V.9.2.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.1. a z toho, že funkce $y = \arccos x$ má pro definiční obor $\langle 0; 1\rangle$ obor hodnot $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$].

V.9.3.: Nechť $p: ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$, $p: ex + fy + g = 0 \quad ((e, f) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_p} = (a, b), \overrightarrow{n_q} = (e, f)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2. a z toho, že normálové vektory přímek svírají stejný úhel jako přímky samé.]

V.9.4.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$, $p: ax + by + c = 0 \quad ((a, b) \neq \overrightarrow{0})$ jsou 2 různoběžné přímky a nechť $\overrightarrow{n_q} = (a, b)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.2., z toho, že odchylka normálového vektoru 1 přímky a směrového vektoru 2.přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ (φ je odchylka obou přímek).]

Př: Určete $\sphericalangle p, q|$:

a) $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v}); A[1;0], B[3;1], \overrightarrow{u}(1;1), \overrightarrow{(}-1;0)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|-1|}{\sqrt{2} + \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $p: 5x + 3y - 7 = 0; q: 4x - y + 5 = 0$
$\overrightarrow{n_p} = (5,3); \overrightarrow{n_q} = (4;-1)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|20-3|}{\sqrt{25+9} + \cdot \sqrt{16+1}} = \arccos \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

c) $p = \overrightarrow{AB}; A[1;0]; B[2;1]; q: x + 2y - 6 = 0$
$\overrightarrow{u} = (1;1); \overrightarrow{n_q} = (1,2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|1+2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/69:

69. Určete odchylku α přímek
a) $2x + y - 5 = 0$ a $6x - 2y + 7 = 0$;
b) $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 3 - t$ a $2x + 4y - 1 = 0$.

a) $\overrightarrow{n_p} = (2;1); \overrightarrow{n_q} = (6;-2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|12-2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) $\overrightarrow{u} = (1;-1); \overrightarrow{n_q} = (2;4) \sim (1;2)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arcsin \frac{|1-2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Př: 86/70:

70. Určete rovnici přímky, která má od přímky $x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y.

$\overrightarrow{n} = (1;-2)$
Otočím o $+30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) i$
$p_1 : (\sqrt{3}+2)x + (1-2\sqrt{3})y + c_1 = 0$
$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3}+1\right) = c_1$

$$p_1 : (2\sqrt{3}+4)x + (-4\sqrt{3}+2) + \left(6\sqrt{3}-3\right) = 0$$

Otočím o $-30°$: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1-2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) i$
$p_1 : (\sqrt{3}-2)x + (-1-2\sqrt{3})y + c_2 = 0$
$A[0; \frac{3}{2}] \in p_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\left(-2\sqrt{3}-1\right) = c_1$

$$p_2 : (2\sqrt{3}-4)x + (-4\sqrt{3}-2)y + \left(6\sqrt{3}+3\right) = 0$$

Př: 86/71:

71. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku je dán vrchol ostrého úhlu A = (5,7) a přímka 6x + 4y - 9 = 0 , ve které leží jedna z odvěsen. Určete rovnice přímek, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníku.

$p : 6x + 4y + 9$
$\overrightarrow{n_p} = (6; 4) \sim (3, 2)$
$6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 9 \neq 0 \Rightarrow A \notin p \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = p$
Najdu $\overleftrightarrow{AC} \perp BC$: $\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + c = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow 10 - 21 + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$$\overleftrightarrow{AC} : 2x - 3y + 11 = 0$$

Najdu $\overleftrightarrow{AB}$:
Otočím p o $+45°$:
$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y + d = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_1 \Rightarrow 5 + 5 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = -40$

$$\overleftrightarrow{BC}_1 : x + 5y - 40 = 0$$

Otočím p o $-45°$:
$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_p} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+2i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y + e = 0$
$A \in \overleftrightarrow{AB}_2 \Rightarrow 5 \cdot 5 - 7 + e = 0 \Rightarrow e = -18$

$$\overleftrightarrow{BC}_2 : 5x - y - 18 = 0$$

Př: 86/73:

73. Určete kosiny vnitřních úhlů trojúhelníku o vrcholech A = (1,1), B = (-1,3), C = (3,1).

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2) \sin(-1; 1)$
$\overrightarrow{BC} = (4, -2) \sin(2; -1)$
$\overrightarrow{AC} = (2, 0) \sin(1; 0)$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\beta = \frac{2+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

B) Odchylka dvou přímek v $\mathbb{E}_3$

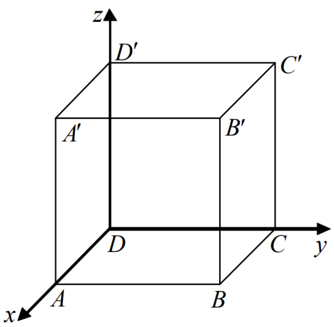
Pozn: Nechť p, q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.
Nechť p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\sphericalangle p', q'|$, kde $p' \parallel p, q' \parallel q$ jsou různoběžky.
$0° \leq |\sphericalangle p, q| \leq 90°$

V.9.5.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u}), q(B, \overrightarrow{v})$ jsou dvě různoběžné přímky, pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \overrightarrow{p}, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}}$$

[Dk.: viz V.9.2].

Př: Určete odchylku přímek $\overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC'}$ krychle $ABCDA'B'C'D'$:



Analytické řešení:
$A[1; 0; 0]; A'[1; 0; 1]$,
$B[1; 1; 0]; B'[1; 1; 1]$,
$C[0; 1; 0]; C'[0; 1; 1]$,
$D[0; 0; 0]; D'[0; 0; 1]$,
$\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1); \overrightarrow{BC'} = (-1; 0; 1)$
$\underline{|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{B, C'}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$

Stereometrické řešení:
Celý problém se evidentně odehrává v rovině $A'BC'$: Úsečky $A'B, BC'$ a $A'C'$ mají evidentně stejnou vzdálenost, protože se jedná o stěnové úhlopříčky. $\triangle A'BC'$ je tedy rovnostroný, pročež $|\sphericalangle \overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC'}| = |\sphericalangle A'BC'| = \frac{\pi}{3}$.

Př: 177/11:
$\overrightarrow{u} = (-1; 1; -1)$
$\overrightarrow{v} = (1; 1; 1)$

$$|\sphericalangle p, \overleftrightarrow{AB}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$$

.

Př: 177/12:

$\overrightarrow{u}(2;2;10) \sim (1;1;5)$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, x| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, y| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$

$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, z| = \arccos \frac{|5|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{27}} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 7581 = \frac{81}{81} = 1 \ \textit{QED.}$

Př: 178/17:

1. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,1)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3}$$

   .

2. $\overrightarrow{u}(1,1,1)$
   $\overrightarrow{v}(-1,1,0)$

$$|\sphericalangle p, q| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

   .

Př: 178/18:

1. $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$:
   $\overrightarrow{u}(-6;5;0)$
   $\overrightarrow{v}(-3;-3;8)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|18-15|}{\sqrt{36+25} \cdot \sqrt{9+9+64}} = \arccos \frac{3\sqrt{5002}}{5002}$$

2. $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BD}$:
   $\overrightarrow{u}(-1;6;0)$
   $\overrightarrow{v}(2;-2;8) \sim (1;-1;4)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1+36} \cdot \sqrt{1+1+8}} = \arccos \frac{7\sqrt{370}}{370}$$

3. $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$:
   $\overrightarrow{u}(-4;3;8)$
   $\overrightarrow{v}(5;1;0)$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}| = \arccos \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{|-20+3|}{\sqrt{16+9+64} \cdot \sqrt{25+1}} = \arccos \frac{17 \cdot \sqrt{2314}}{2314}$$

C) Odchylka přímky od roviny v $\mathbb{E}_3$

Pozn: Nechť p, α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné. Pak platí: $|\sphericalangle p, \alpha| = |\sphericalangle p, q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subset \beta$.
$0° \leq |\sphericalangle p, \alpha| \leq 90°$

V.9.6.: Nechť $p(A, \overrightarrow{u})$ je přímka a $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \overrightarrow{0})$ je rovina a nechť $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5., z toho, že odchylka normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky svírá úhel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ (φ je odchylka přímky od roviny).]

Př: Určete $|\sphericalangle p, \alpha|$:
$p = \overleftrightarrow{AB}; A[1; 1; -2]; B[-1; 0; -1]$
$\alpha 2x - 3y + z + 4 = 0$

$$|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|-4 + 3 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow p \parallel \alpha$$

D) Odchylka dvou rovin v $\mathbb{E}_3$

Pozn: Nechť α, β jsou dvě různoběžné roviny. Pak platí: $|\sphericalangle \alpha, \beta| = |\sphericalangle p, q|$, kde $p \subset r\alpha; q \subset \beta; p \perp r; q \perp r; r = \alpha \cap \beta$.
$0° \leq |\sphericalangle \alpha, \beta| \leq 90°$

V.9.7.: Nechť
$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad ((a, b, c) \neq \overrightarrow{0})$
$\beta : ex + fy + gz + h = 0 \quad ((e, f, q) \neq \overrightarrow{0})$
jsou dvě roviny. Nechť $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ a $\overrightarrow{n_\beta} = (e, f, g)$. Pak platí:

$$\boxed{|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}}$$

[Dk.: Plyne z V.9.5. a z toho, že normálové vektory rovin svírají stejný úhel jako roviny samé.]

Př: Určete $|\sphericalangle \alpha, \beta|$:
$\alpha : 2x + 3y + z - 5 = 0$
$\beta : x - y + z + 12 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2 - 3 + 1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Př: 192/34:

$A[0; 0; 0]; A'[0; 0; 1]$,
$B[0; 1; 0]; B'[0; 1; 1]$,
$C[1; 1; 0]; C'[1; 1; 1]$,

$D[1;0;0]; D'[1;0;1]$,

$\overleftrightarrow{ACB'} = \{[s, s+t, t]; s, t \in \mathbb{R}\}$
$\overleftrightarrow{ACB'} : x - y + z = 0$
$\overleftrightarrow{ACB} = \{[s, s+t, 0]; s, t \in \mathbb{R}\}$
$\overleftrightarrow{ACB} : 0x + 0y + z = 0$

$$|\sphericalangle \overleftrightarrow{ACB'}, \overleftrightarrow{ACB}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Př: 192/35:

a) $\alpha : x + y + 0z - 2 = 0$
$\beta : 0x + 9y + 2z - 16 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0 + 9 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{85}} = \arccos \frac{9\sqrt{170}}{170}$$

b) $\alpha : -3x + y - 2z + 16 = 0$
$\beta : 0x + 1y + 4z + 2 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|0 + 1 - 8|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{\sqrt{238}}{34}$$

c) $\alpha : 13x - 2y + 5z - 56 = 0$
$\beta : 3x + 0y + 2x - 16 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|39 + 10|}{\sqrt{198} \cdot \sqrt{13}} = \arccos \frac{49\sqrt{286}}{858}$$

d) Analogicky.

e) $p([3;-1;3], (1;-1;-3))$
$\alpha : 6x + 3y + 4z - 32 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, p| = \arcsin \frac{|6 - 3 - 12|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{61}} = \arcsin \frac{9\sqrt{671}}{671}$$

f) $p([2;0;5], (4;2;-6) \sim (2;1;-3))$
$\alpha : 13x - 2y + 5z - 56 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, p| = \arcsin \frac{|26 - 2 - 5|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{198}} = \arcsin \frac{19\sqrt{77}}{462}$$

Př:

75. Najděte parametrické vyjádření přímky, která prochází počátkem, protíná přímku $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 1 - 3t$ a jejich odchylka je 30°.

$q = \{[4+t; 3+4t; 1-3t] | t \in \mathbb{R}\}$
$p \in \overleftrightarrow{[0;0;0]q} = \alpha = \{[4s+t; 3s+4t; s-3t] | s, t \in \mathbb{R}\}$
$\alpha : x - y - z = 0$
$p = \{[at, bt, ct] | t \in \mathbb{R}\}$
BŮNO $a = 1$ (když $a = 0$, tak $b = 1 \wedge c = -1$, což evidentně nesedí)
$p \in \alpha \Rightarrow a - b - c = 0 \Rightarrow c = 1 - b$ $\overrightarrow{u} = (1, b, 1-b)$
$\overrightarrow{v} = (1, 4, -3)$
$\cos 30^\circ = \frac{|1+4b-3+3b|}{\sqrt{26}\sqrt{2x^2-2x+2}}$
$\sqrt{3}\sqrt{26}\sqrt{2x^2-2x+2} = 2 \cdot |7b-2|$
$3 \cdot 26 \cdot (2b^2 - 2b + 2) = 196b^2 - 112b + 16$
$0 = 40b^2 + 44b - 140$
$b = -\frac{5}{2} \vee b = \frac{7}{5}$
$\underline{p_1 = \{[2t; 5t; 3t] | t \in \mathbb{R}\}}$
$\underline{p_2 = \{[5t; 7t; -2t] | t \in \mathbb{R}\}}$

Př:

76. Najděte pravoúhlý průmět přímky $x_1 = 4t$, $x_2 = 4 + 3t$, $x_3 = -1 - 2t$ do roviny $x - y + 3z + 2 = 0$.

$\overrightarrow{n} = (1; -1; 3)$

$A[0; 4; -1] \in p$
$A_0 = k \cdot \overrightarrow{n} + A \in \alpha$:
$k - (4-k) + 3(-1+3k) + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{11}$
$A_0[0 + 1 \cdot \frac{5}{11}; 4 - 1 \cdot \frac{5}{11}; -1 + 3 \cdot \frac{5}{11}] = [\frac{5}{11}; \frac{39}{11}; \frac{4}{11}]$
$B[-4; 1; 1] \in p$
$B_0 = k \cdot \overrightarrow{n} + B \in \alpha$:
$-4 + k - (1-k) + 3(1+3k) + 2 = 0 \Rightarrow k = 0$
$B_0 = B[-4; 1; 1]$

$\overrightarrow{B_0A_0} = \left(\frac{49}{11}; \frac{28}{11}; \frac{-7}{11}\right) = (49; 28; -7)$

$$\underline{p_0 = \{[-4+49t; 1+28t; 1-7t] | t \in \mathbb{R}\}}$$

Př:

77. Určete odchylku přímky $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ od roviny $2x + y + z = 0$.

$p = \{[t; 2t; -t] | t \in \mathbb{R}\}$
$\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$
$\overrightarrow{n} = (2, 1, 1)$

$$|\sphericalangle p, \alpha| = \arcsin \frac{|2+2-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \arcsin \frac{3}{6} = \underline{\frac{\pi}{6}}$$

Př:

79. Určete odchylku α rovin $x_1 = 3t + 3s$, $x_2 = -t - s$, $x_3 = 2t - 5s$ a $2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$.

$x = 3t + 3s$
$y = -t - s$
$z = 2t - 5s$
$\alpha : x + 3y = 0$

$\beta : 2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$

$$|\sphericalangle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|2+3|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \arccos \frac{1}{2} = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

Př: 177/14: $\overrightarrow{a} = (-2; 1)$
$\overrightarrow{b} = (0.5; 1)\ (1, 2)$
$\overrightarrow{c} = (-1; 1)$
$\overrightarrow{d} = (0; 1)$

1. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}| = \arccos \frac{|-2+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \arccos \frac{0}{5} = \frac{\pi}{2}$
2. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}| = \arccos \frac{|2+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$
3. $|\sphericalangle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$
4. $|\sphericalangle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}| = \arccos \frac{|-1+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$
5. $|\sphericalangle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$
6. $|\sphericalangle \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}| = \arccos \frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Př: 177/15: $\overrightarrow{u} = (2, 9)$
$\overrightarrow{v} = (9, -2)$

$p : 9x - 2y + c = 0$
$A \in p : 9 \cdot 0 - 2(-5) + c = 0 \Rightarrow c = -10$

$$p : 9x - 2y - 10 = 0$$

Př: 192/36: $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$

1. $\overrightarrow{a} = (0; 1; -1)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|2+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}4$$

2. $\overrightarrow{b} = (1; 3; -5)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}| = \arcsin \frac{|1+6+5|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{35}} = \arcsin \frac{2\sqrt{210}}{36}$$

3. $\overrightarrow{c} = (8; -1; 3)$

$$|\sphericalangle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{a}\,| = \arcsin \frac{|8-2-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{77}} = \arcsin \frac{\sqrt{4}62}{154}$$

Př: 192/37:

$x = 5 - r + 2s$
$y = -3 + 2r - 5s$
$z = 1 - 3r + 3s$