§1. Kružnice

V.1.1.: Je li v rovině dána kartézká soustava souřadnic, pak platí:

- Každou kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$ lze analiticky vyjádřit právě jednou rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$. Každá rovnice $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$, kde $r > 0$, analyticky vyjadřuje právě jednu kružnici se středem $S[m, n]$ a poloměrem r.

Def: Rovnice $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$, kde $r > 0$ se nazývá *středový tvar rovnice kružnice.*

Pozn: Jestliže rozepíšeme mocnny dvojčlenů ve středovém tvaru rovnice kružnice a získané členy uspořádáme sestupně, dostaneme $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$, což je rovnice typu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Def: Pokud rovnice $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ vyjadřuje některou kružnici k, nazývá se *obecný tvar rovnice kružnice* k.

Př: Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + 4x - 6y14 = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}(x^2+4x)+(y^2-6y)+14 &= 0\\ (x+2)^2-4+(y-3)^2-9+14 &= 0\\ (x+2)^2+(y-3)^2 &= -1\end{aligned}$$

Rovnce neodpovídá kružnici.

Př: Rozhodněte, da rovnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ vyjadřuje kružnici.

$$\begin{aligned}\left(x^2+\frac{a}{2}\right)-\frac{a^2}{4}+(y^2+\frac{b}{2})-\frac{b^2}{4}+c &= 0\\ (x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2 &= \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\end{aligned}$$

Musí tedy platiti $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$.

Př: Určete rovnice všech kružnic, které prochází body $A[-1; 3]; B[0; 2]; C[-1; -1]$:

$$\begin{aligned}1+9-a+3b+c &= 0 &&(1)\\ 4+2b+c &= 0 &&(2)\\ 1+1-a-b+c &= 0 &&(3)\\ & &&(4)\end{aligned}$$

Toto upravím na:

$$\begin{aligned}a-3b-c &= 10 &&(5)\\ 2b+c &= -4 &&(6)\\ a+b-c &= 2 &&(7)\\ & &&(8)\end{aligned}$$

Soustava jediné má řešení $[4; -2; 0]$, které odpovídá rovnici $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ Po úpravé: $(x + 2)^2 v + (y - 1)^2 = 5$

Jedná se o kružnici $k(S[-2; 1], r = \sqrt{5})$.

Př: 210/5:

- $(x - 2)^2 + y^2 = 5 + 4$ Střed $[2; 0]$, poloměr 3.
- $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 7 + 1 + 1$ Kruh: Střed $[-1; 1]$, poloměr 3.
- $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 2.5 + \frac{25}{4} + \frac{49}{4}$ Střed $[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}]$, poloměr $\sqrt{21}$.
- $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{83}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$ Kruh: Střed $[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}]$, poloměr $\sqrt{50}$.

Př: 210/6:

$$\begin{aligned} 9 + 3a + c &= 0 && (9) \\ 4 + 2a + 4 - 2b + c &= 0 && (10) \\ 36 + 6a + 36 + 6b + c &= 0 && (11) \\ & && (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a + c &= -9 && (13) \\ 2a - 2b + c &= -8 && (14) \\ 6a + 6b + c &= -72 && (15) \\ & && (16) \end{aligned}$$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 1 & -8 \\ 6 & 6 & 1 & -72 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & -9 \\ 6 & 6 & 1 & -72 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 12 & -2 & -48 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -1 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zádně řešení $\Rightarrow$ kružnice neexistuje, protože body jsou kolineárí.

Př: Určete rovnice vešech kružnic, které prochází bodem $A[1; 2]$, dotýká se osy y a mají střed na přímce p, která má rovnici $y + x = 4$:

Hledám $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$
k se dotýká $y \Rightarrow m^2 = r^2$
$S \in P \Rightarrow m + n = 4$
$A \in k \Rightarrow (1 - m)^2 + (2 - n)^2 = r^2$

$m + n = 4$
$(11 - m)^2 + (2 - n)^2 = m^2$

Řešení: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ a $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Př: 210/7: Hledám $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$:

Dotýká se $x \Rightarrow r^2 = m^2$.
Dotýká se $x \Rightarrow r^2 = n^2$.
$K \in k \Rightarrow (9 - n)^2 + (2 - m)^2 = r^2$

Když $m = n = \pm r$ $K \in k \Rightarrow (9 - n)^2 + (2 - n)^2 = n^2 \Rightarrow x^2 - 22x + 85 = 0$

$m = n = r = 5 \vee m = n = r = 17$

$$(x+5)^2 + (y+5) = 5^2$$
$$(x+17)^2 + (y+17) = 5^2$$

Když $m = -n = \pm r$ $K \in k \Rightarrow (9+n)^2 + (2-n)^2 = n^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 85 = 0 \Rightarrow D = 255 - 4 \cdot 85 = -115 < 0$

Př: 210/8: Hledám $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$:

$m + 3n - 6 = 0 \Rightarrow m = 6 - 3n$
$r = 5$
$M[6;9] \in k \Rightarrow (6-m)^2 + (9-n)^2 = 25 \Rightarrow (6-6+3n)^2 + (9-n)^2 = 25 \Rightarrow 9n^2 - 18n + 56 = 0 \Rightarrow D = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = -1692 < 0.$

Neexistuje řešení.

Př: 210/9/a:

Osa přímek, na které musí náležet střed je buď $x = 0$ nebo $y = 0$:

Jelikož $p \perp q$, průsečík přímek, body doteku a střed tvoří čtverec o straně r, tedy $|[0;0]S| = 2\sqrt{2}$:

Řešením tedy jsou:

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 = 2$$

Př: 210/9/a:

$(m-4)^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \vee m = 6$
$S \in r \parallel p$ $\rho(r,q) = 2 \Rightarrow r : x - y + 2 \pm 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n = 2 \pm 2\sqrt{2} + m$

$$(x-2)^2 + (y - 4 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 4 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 8 - 2\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y - 8 + 2\sqrt{2})^2 = 2$$