§1. Elipsa

Pozn: Termín *elipsa* už známe, máme představu o eliptickém tvaru např vodní hladiny v šikmo postavené válcové nádobě. V geometrii se elipsa definuje pomocí součtu vzdáleností.

Def: Nechť jsou dány dva různé body F, G v rovině a číslo $2a > |FG|$. Množinu všech bodů X roviny, pro kttերá platí $|FX|+|GX| = 2a$ nazýváme *elipa s ohnisky* F, G *a s hlavní osou o velikosti* $2a$. Stručně ji značíme $E(F, G, 2a)$

Def: U elipsy používáme tyto pojmy:

F, G	ohniska
A_1, A_2	hlavní vrcholy
B_1, B_2	vedlejší vrcholy
S	střed
a	velikost hlavní poloosy
b	velikost vedejší poloosy
e	excentricita

"""10-1".pdf

Př: Odvoďte analitické vyjádření elipsy $E(F, G, 2a)$:

Zvolíme souřadnice $F[-e, 0]; G[e, 0]; X[x, y]$. Přitom $|FG| = 2e < 2a; a^2 - e^2 = b^2$. Analitické vyjádříme $|FX| + |GX| = 2a$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 2a \\
(x+e)^2+y^2+(x-e)^2+y^2+2\sqrt{(x^2+e^2+y^2+2ex)(x^2+e^2+y^2-2ex)} &= 4a^2 \\
(x^2+e^2+y^2)^2 - 4e^2x^2 &= 4a^2 + (x^2+e^2+y^2)^2 - 4a^2(x^2+e^2+y^2) \\
x^2(a^2-e^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2-e^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Pozn: Rovnice $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. vyjadřují elipsy s velikostmi polooos rovnými 2, resp. 3. Elipsy se liší polohou ohnisek na osách x, y.

Ohniska leží na té ose souřadnic, kde je poloosa s větší velikostí.

"""10-2".pdf

Pozn: Když je jmenovatel prvníhgho zlomku menší než druhého, tak si x, y prohodí role.

Pozn: Proto někdy raději značíme jmenovatele p, q, aby neinformovali o tom, která je hlavní poloosa.

V.1.1.: Analytické vyjádření elipsy:
Každá elipsa, která má osy rovnoběžné s osami x, y a střed $S[m, n]$ má právě jednu rovnici typu

$$\frac{(x-m)^2}{p^2} + \frac{(y-n)^2}{q^2} = 1$$

kde $p, q > 0$.

V.1.2.: Každá rovnice tohoto typu vyjadřuje právě jednu elipsu se středem $S[m, n]$. Je-li $p > q$, je $2a = 2p$ a hlavní osa elipsy leží na $y = n$. Je-li $p < q$, je $2a = 2q$ a hlavní osa elipsy leží na $x = m$. Je-li $p = q$, je elipsa kružnicí s poloměrem $r = p = q$.

Př: 249/3: Zakreslete střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí

$$5(x+2)^2 + 3(y-4)^2 - 30 = 0$$

Z rovnce určíme $S[-2; -4]$. Dále upravím na $\frac{(x+2)}{6} + \frac{(y-4)^2}{10} = 1$. Tedy $q^2 = a^2 = 10$ a $p^2 = b^2 = 6$. Hlavní osa s ohnisky leží na přímce rovnoběžné s osou y. Dále určíme excentricitu $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ Tedy:

$$\begin{array}{rl} A_1 & [\;-2\;; 4-\sqrt{10}] \\ A_2 & [\;-2\;; 4+\sqrt{10}] \\ B_1 & [-5-\sqrt{6}; \;4\;] \\ B_1 & [-5+\sqrt{6}; \;4\;] \\ F & [\;-5\;;\;6\;] \\ G & [\;-2\;;\;2\;] \end{array}$$

Př: 250/4:

Určete společné body elipsy a přímky KL, kde $K[3; -1]$ a $L[1; 6]$. Elipsa má rovnici $2(x+4)^2 + 3(y+1)^2 = 10$.

$\overleftrightarrow{KL} = \{[3 - 2t; -1 + 7t] | t \in \mathbb{R}\}$ Dosadím:

$$2(7-2t)^2 + 3(7t)^2 = 10$$

$$155t^2 - 56t + 88 = 0$$

$D = 56^2 - 4 \cdot 155 \cdot 88 < 0 \Rightarrow$ Není řešení, tedy není průsečík.

Př: 250/18:

a) Ze symetrie dle osy platí $|FB_1| = |GB_1|$. Ovšem jelikož B_1 leží na elipse, tak $|FB_1| + |GB_1| = 2|FB_1| = 2a \Rightarrow a = |FB_1| = |GB_1|$. *QED*

   Pro B_2 analogicky (nebo dle symetrie dle hlavní osy). *QED*

b) Z kolmosti os: $b^2 + e^2 = |B_1F|^2 = a^2$. *QED*

   Upravíme na $e^2 = a^2 - b^2$. *QED*

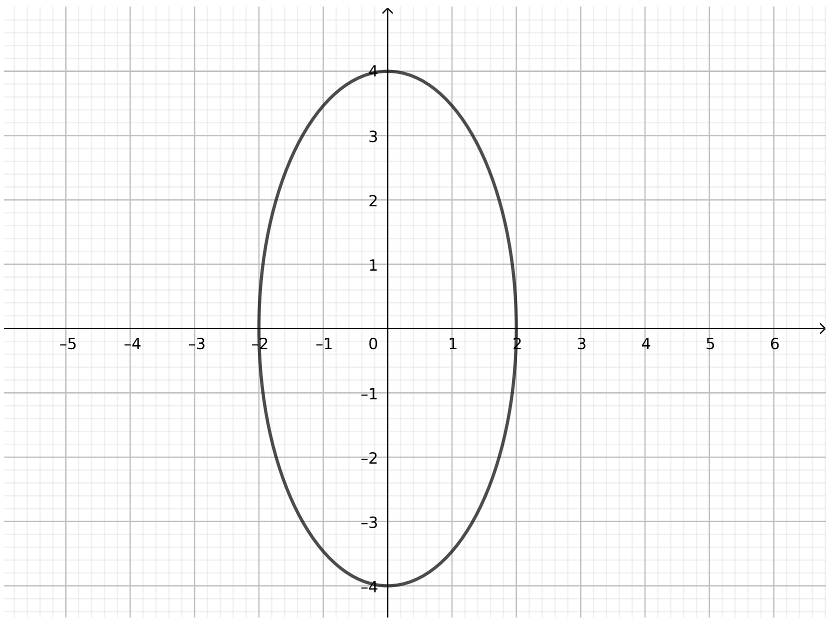
   Jelikož SA_1 a SA_2 jsou hlavní poloosy, tak $|SA_1| = a = |SA_2|$. *QED*

   Jelikož A_1SA_2 jsou kolineární v tomto pořadí, tak $|A_1A_2| = |A_1S| + |A_2S| = 2a$. *QED*

Př: 251/19:

a) Evidentně $S[0, 0]$. Hlavní poloosa ve směru osy y délky $a = 4$, vedlejší $b = 2$, tedy $e = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{rl} A_1 & [\;0\;;\;4\;] \\ A_2 & [\;0\;;\;-4\;] \\ B_1 & [\;2\;;\;0\;] \\ B_1 & [-2;\;0\;] \\ F & [\;0\;;\;2\sqrt{3}\;] \\ G & [\;0\;;-2\sqrt{3}] \end{array}$$

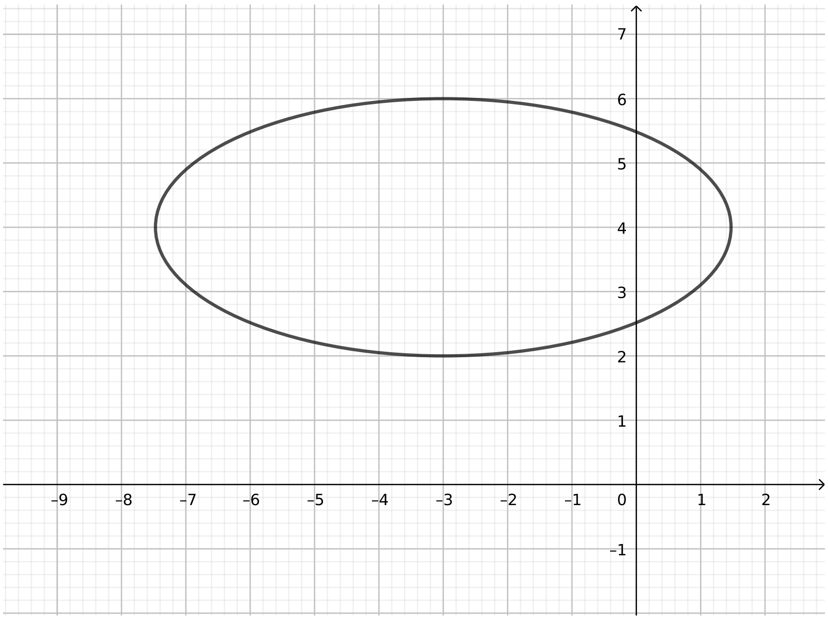


b,c,d,e) Analogicky. Střed je vždy stejný a pouze se mění směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/20:

a) Evidentně $S[-3, 4]$. Hlavní poloosa ve směru osy x délky $a = \sqrt{20}$, vedlejší $b = 2$, tedy $e = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4$.

$$\begin{array}{rlcl}
A_1 & [-3 + \sqrt{20} & ;4] \\
A_2 & [-3 - \sqrt{20} & ;4] \\
B_1 & [\quad -3 & ;6] \\
B_1 & [\quad -3 & ;2] \\
F & [\quad 1 & ;4] \\
G & [\quad -7 & ;4]
\end{array}$$



b,c,d) Analogicky. Pouze se mění střed, směr a velikost poloos. V některých bodech je potřeba rovnici vydělit číslem na pravé straně.

Př: 251/21:

a) $\overrightarrow{AB} = (2; -5) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} = \{[3 + 2t; -5t] | t \in \mathbb{R}\}$
Dosadím: $\frac{(3+2t)^2}{4} + \frac{(-5t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 21t^2 + 48t + 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{39}}{21}$
$\left[\frac{15-4\sqrt{39}}{21}; \frac{120+10\sqrt{39}}{21}\right]$
$\left[\frac{15+4\sqrt{39}}{21}; \frac{120-10\sqrt{39}}{21}\right]$
$\overrightarrow{AC} = (6; -3) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left\{[1 + 2t; 5 - t] | t \in \mathbb{R}_0^+\right\}$
Dosadím: $\frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 17t^2 + 6t + 13 = 0 \Rightarrow D36 - 4 \cdot 17 \cdot 13 < 0$
Průsečík není.
$\overrightarrow{BC} = (4; 2) \Rightarrow BC = \{[3 + 2t; t] | t \in \langle 0; 2\rangle\}$ Dosadím: $\frac{(1+2t)^2}{4} + \frac{(5-t)^2}{16} = 1 \Rightarrow 17t^2 + 48t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{59}}{17} < 0$
Průsečík je pouze s přímkou, nikoliv úsečkou.

b,c,d,e) Analogicky. Vždyť je to jenom dosazení toho samého do jiné rovnice a výpočet kvadratické rovnice. Já nemám zájem celý den dosazovat a počítat kvadratické rovnice.