1) Důkaz sporem:

- Předpokládáme, že $(L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_3$, pak dle Pumping lemma:
  - Uvažme libovolné $k > 0$ a zvolme $(w = a^k bb a^k) \in L_1 \cup L_2$, $|w| = 2k + 2 \geq k$, slovo $w \in L_1$ a $w \notin L_2$, protože $\#_b \bmod 2 = 0$
  - Pro slovo w existuje následující rozdělení x, y, z:

$x = a^{\alpha_1}$

$y = a^{\alpha_2}$ $\quad \alpha_2 > 0$

$z = a^{k-\alpha_1-\alpha_2} bb a^k$

Pro $i = 0$:

$xy^iz = a^{k-\alpha_2} bb a^k \notin (L_1 \cup L_2)$, protože $\alpha_2 > 0$, tak $xy^iz \notin L_1$ a $\#_b \bmod 2 = 0$, takže $xy^iz \notin L_2$

- Jelikož slovo w nenáleží do sjednocení L_1, L_2, došli jsme ke sporu, můžeme tedy psát, že $(L_1 \cup L_2) \notin \mathcal{L}_3$

- $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, protože z jazyka L_1 plyne, že $|ww^R| = 2|w|$, $2|w| \bmod 2 = 0$, ať zvolíme jakékoliv slovo w, tak dle L_1 se každý symbol musí v jazyce vyskytnat v sudém počtu, což ale odporuje definici jazyka L_2, tedy jejich průnik je $\emptyset$
- $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in \mathcal{L}_3$, protože můžeme sestrojit KA, který $\emptyset$ popisuje:

KA $\emptyset$: $\rightarrow (s_0)$

2)

a) $G_3 = (\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}, \{a, b, c, d\}, P, S_0)$, kde P obsahuje pravidla

$S_0 \to S_1 S_2 \mid S_4 S_3 \mid \varepsilon$

$S_1 \to a S_1 a \mid S_2 \mid b S_1 b \mid \varepsilon$

$S_2 \to c S_2 \mid d S_2 \mid \varepsilon$

$S_3 \to c S_3 c \mid d S_3 d \mid S_4 \mid \varepsilon$

$S_4 \to a S_4 \mid b S_4 \mid \varepsilon$

b) $Z_3 = (\{q\}, \{a, b, c, d\}, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, a, b, c, d\}, \delta, q, S_0, \emptyset)$,

kde

$\delta(q, \varepsilon, S_0) = \{(q, \varepsilon), (q, S_1 S_2), (q, S_4 S_3)\}$

$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, d, d) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_1) = \{(q, a S_1 a), (q, S_2), (q, b S_1 b), (q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_2) = \{(q, c S_2), (q, d S_2), (q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_3) = \{(q, c S_3 c), (q, d S_3 d), (q, S_4), (q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, S_4) = \{(q, a S_4), \cancel{(q, b S_4)}, (q, \varepsilon), (q, b S_4)\}$

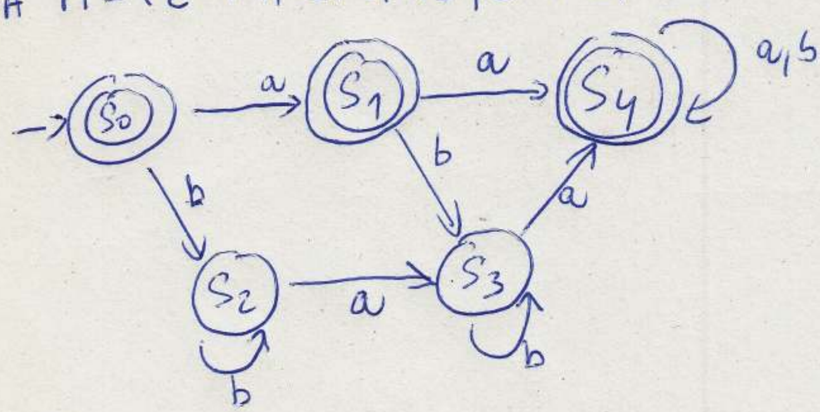
3) a) Neplatí
$\forall L \in \mathcal{L}_{Fin} : L \in \mathcal{L}_3$, také platí z uzávěrových vlastností, že regulární jazyky jsou uzavřeny na doplněk, tedy musí platit, že doplněk všech konečných jazyků je také regulární.

b) Neplatí.
$\forall L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : \forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 = \emptyset \in \mathcal{L}_3$

c) Platí.
Zvolme $L_1 = \Sigma^*$, pak platí, že $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_1 \cap L_2 = L_2$, tedy musí platit, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$.

4.) Sestrojíme KA M pro tento jazyk a minimalizujeme jej.

KA $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0, s_1, s_4\})$, kde δ je znázorněno diagramem



Minimalizace:

	a	b
s_0	s_1	s_2
s_1	s_4	s_3
s_2	s_3	s_2
s_3	s_4	s_3
s_4	s_4	s_4

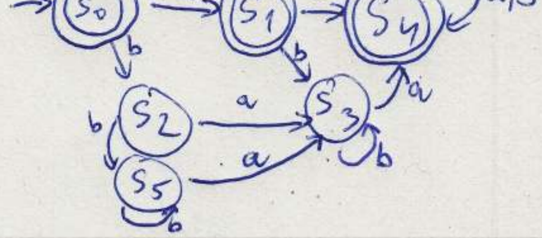
	$\overset{0}{\equiv}$	a	b
I	s_2	I	I
	s_3	II	I
II	s_0	II	I
	s_1	II	I
	s_4	II	II

	$\overset{1}{\equiv}$	a	b
I	s_2	II	I
II	s_3	IV	II
III	s_0	III	I
	s_1	IV	II
IV	s_4	IV	IV

	$\overset{2}{\equiv}$	a	b
I	s_2	II	I
II	s_3	V	II
III	s_0	IV	I
IV	s_1	V	II
V	s_4	V	V

- Z minimalizace plyne, že již původní automat je minimální!
- Abychom splnili podmínku, že index $\sim$ je o jedna větší než index $\sim_L$, tak musíme do minimálního automatu přidat 1 stav, který je nerozlišitelný od nějakého dalšího stavu automatu
- Přidáme stav s_5, který je nerozlišitelný od s_2
- Finální KA bude vypadat následovně:

KA $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0, s_1, s_4\})$, kde δ je znázorněno diagramem:



$\Sigma^*/\sim = \{\{\varepsilon\}, \{a\}, \{b\}, \{w \in \{a,b\} \mid \#_a = 0 \wedge \#_b > 1\}, \{w \in \{a,b\} \mid \#_a = 1 \wedge \#_b > 0\}, \{a \in \{a,b\} \mid \#_a \geq 2\}\}$

$|\Sigma^*/\sim| = 6$

$|\Sigma^*/\sim_L| = 5$

$\forall u, v \in \Sigma^*$:

$u \sim v \iff (\#_a(u) = \#_a(v) = 1 \wedge \#_b(u) = \#_b(v) = 0) \vee$
$(\#_a(u) \geq 2 \wedge \#_a(v) \geq 2) \vee (\#_a(u) = \#_a(v) = 0 \wedge \#_b(u) = \#_b(v) = 1) \vee$
$(\#_a(u) = \#_a(v) = 0 \wedge (\#_b(u) > 1 \wedge \#_b(v) > 1)) \vee$
$(\#_a(u) = \#_a(v) = 1 \wedge (\#_b(u) \geq 1 \wedge \#_b(v) \geq 1)) \vee (u = v = \varepsilon)$