IV. Spieltheorie

1. Gegenstand der Spieltheorie
2. Einführung in Matrixspiele
3. Strategien bei Matrixspielen
4. Weitere Beispiele
5. Mögliche Erweiterungen

1. Gegenstand der Spieltheorie

Diese Theorie hat ihren Ursprung in der Untersuchung von Gesell-schaftsspielen.

Der Zusammenhang zwischen Spielen und ökonomischen Problemen wurde erstmals 1943 umfassend durch von Neumann und Morgenstern dargestellt.

Anwendung der Spieltheorie:

ökonomische Probleme
Militärwesen,
soziologische Fragen,
technische Wissenschaften u. a.

Def.

Ein Spiel ist ein mathematisches Modell für eine Konfliktsituation.

Solche Situationen, in denen die Beteiligten verschiedene, z. T. entgegengesetzte Interessen haben, kommen oft vor.

Bei militärischen Auseinandersetzungen ist dies offensichtlich; es lassen sich aber auch andere Probleme als Spiele formulieren, in denen die Konfliktsituation erst konstruiert werden muss.

An einem Spiel sind *Spieler* beteiligt, die keine Personen sein müssen. Den Spielern stehen bestimmte *Handlungsweisen* zur Verfügung, die sie zur Erreichung ihres Zieles einsetzen können.

Aufgabe der Spieltheorie ist es, diese globale Darstellung mathematisch exakt zu fassen (zu modellieren) und (wenn möglich) Angaben über das günstigste Verhalten der Spieler zu ermitteln.

Für Matrixspiele wird dies vollständig durchgeführt und Anwend-ungsmöglichkeiten werden angegeben, für andere Spiele werden einige grundsätzliche Überlegungen dargestellt.

2. Einführung in Matrixspiele

Konfliktsituationen mit zwei Beteiligten und der Gegebenheit, dass der Gewinn des einen Beteiligten einem gleich hohen Verlust des anderen Beteiligten entspricht, lassen sich als Matrixspiele (Zweipersonen-Nullsummen-Spiele) modellieren.

Die am Spiel beteiligten Spieler können Personen, Betriebe, Armeen u. a. sein.

Jeder Spieler hat eine feste Anzahl von Handlungsweisen, von denen er eine bestimmte bei einer Realisierung (Partie) des Spiels auswählt.

Diese Auswahl erfolgt unabhängig voneinander und ohne gegenseitigen Informationsaustausch. Sie soll dem Spieler den größten Nutzen bringen.

Nach der Auswahl der Handlungsweisen durch beide Spieler ist eine Partie des Spieles beendet, und es soll feststehen, wie hoch dabei der Gewinn des einen (und damit der Verlust des anderen) Spielers ist.

Matrixspiele stehen unmittelbar im Zusammenhang mit der linearen Optimierung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Darstellung eines Matrixspieles

Die m Handlungsweisen H_i des Spielers P_1 seien den m Zeilen einer Matrix A zugeordnet.

Analog ordnet man den n Handlungsweisen h_j des Spielers P_2 die n Spalten derselben Matrix A zu.

Wählt P_1 bei einer Partie des Spieles die Handlungsweise H_i (Zeile i) und P_2 zugleich die Handlungsweise h_j (Spalte j), so ist damit das Element a_{ij} der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$ bestimmt.

Diese Zahl a_{ij} soll den Gewinn von P_1 beschreiben, dieser Gewinn kann als Auszahlung der Höhe a_{ij} von P_2 an P_1 gedeutet werden.

Deshalb heißt die Matrix A Auszahlmatrix für P_1.

In vielen Beispielen ist die Auszahlung nur symbolisch zu verstehen.

Mit der Angabe der Auszahlmatrix A in der folgenden Art ist ein Spiel vollkommen beschrieben:

\P2 / P1 \		Handlungsweise 1	2	...	j	...	n
	1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
Hw.	...	...					
	i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}
	...	...					
	m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

Man denkt sich nun immer wieder neue Partien dieses Spieles durchgeführt.
Das Ziel des Spielers P_1 besteht dabei darin, durch geschickte Auswahl seiner Zeilen, die den Handlungsweisen entsprechen, seinen Gewinn zu maximieren.
Das Ziel von P_2 besteht analog in der Minimierung seines Verlustes durch geeignete Wahl der Spalten.

Die eingeführten Begriffe sollen am Knobelspiel Stein-Papier-Schere erläutert werden.
Beide Spieler haben die Handlungsweisen "Stein", "Papier" und "Schere".

Bei einer Partie muss bekanntlich gleichzeitig von beiden Spielern ihre Wahl durch die Fingerstellung gezeigt werden, wobei die Regeln gelten:

Stein schlägt Schere,
Papier schlägt Stein,
Schere schlägt Papier.

Diese Regeln legen die Elemente der Auszahlmatrix fest, dabei soll für Spieler P_1 mit

1 : gewonnen, 0 : unentschieden bzw. –1 : verloren

bezeichnet werden.

Das Spiel wird somit durch folgende Matrix vollkommen beschrieben:

P_1 \ P_2		h_1 Stein	h_2 Papier	h_3 Schere
H_1	Stein	0	-1	1
H_2	Papier	1	0	-1
H_3	Schere	-1	1	0

Der Spieler P_1 hat die m Zeilen der Matrix A als seine Handlungsweisen. Jeder Vektor

$x = (x_1, ..., x_m)$ mit $0 \leq x_i \leq 1$, $i=1,...,m$ und $x_1 + ... + x_m = 1$

heißt eine Strategie von P_1. Die Zahlen x_i können wegen ihrer Definition als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden.

Eine Strategie x von P_1 gibt damit an, mit welcher Wahrscheinlichkeit x_i die Handlungsweise H_i bei einer Partie des Spieles gewählt wird.

Entsprechend heißt jeder Vektor

$y = (y_1, ..., y_n)$ mit $0 \leq y_i \leq 1, i=1,...,n$ und $y_1 + ... + y_m = 1$

eine Strategie von P_2.

Mit dem Begriff der Strategie können jetzt die Ziele der beiden Spieler mathematisch exakt ausgedrückt werden.

Gesucht ist eine optimale Strategie x_0 von P_1 und eine optimale Strategie y_0 von P_2, so dass P_1 seinen Gewinn maximiert und gleichzeitig P_2 seinen Verlust minimiert.

Maximaler Gewinn von P_1:

Für die Handlungsweise h_j ist der Erwartungswert des Verlustes von P_2

$$\sum_i x_i a_{ij} = f(x, j)$$

P_2 kann durch die Wahl von j das Minimum dieses Erwartungswertes

$$\min_j \sum_i x_i a_{ij} = f(x)$$

erreichen. Danach legt P_1 seine Strategie x fest, so daß sein Gewinn maximal wird. Damit ist die Zahl $v_1 = v_1(x_0) = \max_x f(x) = \max_x \min_j f(x, j)$, also

(*) $v_1 = \max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$

festgelegt. Analog ergibt sich als minimaler Verlust von P_2 die Zahl

(+) $v_2 = \min_y \max_i \sum_j y_j a_{ij}$

Das Symbol "max min" bedeutet, daß erst über die angegebene Größe minimiert und anschließend über die angegebene Größe maximiert wird, bei "min max" ist diese Reihenfolge umgekehrt.

Hauptsatz der Theorie der Matrixspiele (John von Neumann)**:**

Sind bei einem Spiel mit den endlichen Handlungsweisen $\{H_i\}$ und $\{h_i\}$ sowie der Auszahlmatrix $A = (a_{ij})$ die Zahlen v_1 und v_2 durch (*) und (+) festgelegt, so gilt

$$v_1 = v_2 = v.$$

<u>Beweis:</u> Die Lösungen beider Probleme existieren, da die Mengen, über die minimiert wird, abgeschlossen und beschränkt sind, und die Funktionen stetig sind.

Der Rest ist Anwendung der linearen Optimierung:

(*) $v_1 = \max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$ als Vorschrift zur Bestimmung von x kann als LOP geschrieben werden:

$\xi = \text{Max!}$

$\sum_j x_j = 1,$

$\sum_j x_j a_{jk} \geq \xi$, $k=1,\dots,n,$

$x_j \geq 0$, $j=1,\dots,m$, ξ nicht vz.-beschränkt,

Analog erhält man zu (+) $v_2 = \min_y \max_i \sum_j y_j a_{ij}$ das LOP

$\eta = \text{Min!}$

$\sum_k y_k = 1,$

$\sum_k a_{jk} y_k \leq \eta$, $j=1,\dots,m,$

$y_k \geq 0$, $k=1,\dots,n$, η nicht vz.-beschränkt, Dies ist ein Paar zueinander dualer LOPs. Beide besitzen Lösungen. Also sind diese gleich: v1 = v2.

Definition:

(i) Die gemeinsame Zahl v heißt Wert des Spiels.

(ii) Die optimalen Stategien x_0 und y_0 und der Wert v heißen Lösung des Spiels.

(iii) Ein Spiel heißt fair, falls v = 0 ist.

Definition:

Ein Matrixspiel heißt symmetrisch, wenn $\{H_i\} = \{h_i\}$ und $A = -A^T$ ist.

Satz:

Ein symmetrisches Spiel hat den Wert v = 0, und beide Spieler können dieselbe optimale Strategie benutzen.

Weicht ein Spieler von seiner optimalen Strategie ab, so erlangt der andere Spieler einen Vorteil.

Erläuterung am Stein-Papier-Schere-Spiel

Strategien von P_1 sind Vektoren

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \text{ mit } 0 \le x_i \le 1,\ i=1,2,3 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Es gilt

$$f(x, 1) = x_2 - x_3,\ f(x, 2) = -x_1 + x_3,\ f(x, 3) = x_1 - x_2,$$

ferner

$$f(x) = \min (x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2).$$

Es folgt schließlich:

$$x_0 = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)^T \text{ und } y_0 = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)^T,\ v = 0.$$

Beide Spieler müssen die drei Handlungsweisen mit gleichen Wahrscheinlichkeiten wählen.

Der Wert $v = 0$ des Spieles bedeutet, daß bei Verwendung der optimalen Strategien x_0 und y_0 die Auszahlung von P_2 an P_1 bei vielen Partien im Mittel gleich Null ist. Bei jeder einzelnen Partie kann natürlich P_1 gewinnen, verlieren oder unentschieden spielen.

3. Strategien bei Matrixspielen

Eine *reine Strategie* ist ein Vektor x, in dem eine Komponente $x_i = 1$ ist und alle anderen Komponenten Null sind; die Auszahlmatrix $A = (a_{ij})$ ist dabei gegeben.

Wählt P_1 in jeder Partie des Spieles nur reine Strategien, so ist sein Gewinn wenigstens

$$w_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

Wählt P_2 nur reine Strategien, so ist sein Verlust höchstens

$$w_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

Weil beide Spieler bei dieser Spielweise ihre Möglichkeiten nicht voll ausnutzen, ist

$$w_1 \leq v \leq w_2.$$

w_1 ist das größte Zeilenminimum, w_2 ist das kleinste Spalten-maximum.

Ist für ein bestimmtes Spiel $w_1 = w_2 = v$, so heißt dieses Spiel Sattelpunktspiel.

Ein Element a_{ij}, für das $w_1 = w_2$ gilt, heißt Sattelpunkt.

Die optimalen Strategien bei Sattelpunktspielen sind reine Strategien, die mit einem Sattelpunkt festliegen.

Diese Spiele sind ein Sonderfall der Matrixspiele. Die Bezeichnung der Spiele hängt mit geometrischen Deutungen des Spielwertes zusammen.

Beispiel

\P2 P1 \	h1	h2	h3	Zeilen-minimum
H1	3	2	3	**2**
H2	4	2	0	0
Spalten-maximum	4	**2**	3	

Die fetten Zahlen sind w_1 und w_2. Der Sattelpunkt ist rot.

Die Lösung des Spiels ist $x_0 = (1, 0)$, $y_0 = (0, 1, 0)$, $v = 2$,

d.h. P_1 wählt H_1 und P_2 wählt h_2 bei jeder Partie des Spiels.
Die Auszahlung von P_2 an P_1 beträgt immer 2.

Ein Vektor, der keine reine Strategie darstellt, heißt gemischte Strategie.

Ein Matrixspiel ohne Sattelpunkt besitzt gemischte optimale Strategien.

Der Wert von Spielen mit gemischten Strategien und ihre optimalen Strategien können mit dem Simplex-Algorithmus berechnet werden.

Wir betrachten das Spiel

P_1 \ P_2	h_1	h_2	h_3	h_4
H_1	2	-3	-1	1
H_2	0	2	1	2

Anstelle der oben betrachteten LOPs verwendet man in der Praxis etwas einfachere, äquivalente Formulierungen.

e^k sei ein Vektor, bestehend aus Einsen. Dann sind die LOPs

(P) $A^T w \geq e^n$, $w \geq 0$, $w^T e^m$ = Min!

(D) $Az \leq e^m$, $z \geq 0$, $z^T e^n$ = Max!

äquivalent dem dualen Paar von oben. Der Optimalwert beider Aufgaben ist 1/v. Hat man Lösungen w_0 und z_0 der beiden Aufgaben gefunden, so gilt $x_0 = v\, w_0$ und $y_0 = v\, z_0$ für die optimalen Strategien.

Für das Beispiel lösen wir hier das Problem (D) (warum?):

	1	2	3	4	5	6	
5	2	-3	-1	1	1	0	1
6	0	2	1	2	0	1	1
	1	1	1	1	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	
1	1	-3/2	-1/2	1/2	1/2	0	1/2
6	0	2	1	2	0	1	1
	0	5/2	3/2	1/2	-1/2	0	-1/2

	1	2	3	4	5	6	
1	1	-1/2	0	3/2	1/2	1/2	1
3	0	2	1	2	0	1	1
	0	-1/2	0	-5/2	-1/2	-3/2	-2

Der Wert der Zielfunktion ist 2, damit der Wert $v = \frac{1}{2}$.

$z_{opt} = (1, 0, 1, 0)^T$, daraus folgt für die Strategie $y_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$.

Die Lösung des Problems (P) kann man aus dem Endtableau ablesen: $w_{opt} = (\frac{1}{2}, {}^3/_2)^T$. Damit ist die Strategie $x_0 = ({}^1/_4, \frac{3}{4})^T$.

Beispiel: Skin-Spiel

P_1 und P_2 haben je drei Spielkarten auf der Hand und zwar:

P_1 die Karten Pik As, Karo As und Karo Zwei,
P_2 die Karten Pik As, Karo As und Pik Zwei.

Beide Spieler legen jeweils zugleich eine ihrer Karten auf den Tisch. P_1 gewinnt, wenn die hingelegten Karten die gleiche Farbe haben, andernfalls P_2. Ein As hat den Wert 1, eine Zwei den Wert 2. Die Höhe des Gewinnes ist gleich dem Wert derjenigen Karte, die der Gewinner hinlegt.

Auszahlmatrix:

$\backslash$ P_2 P_1 $\backslash$	Karo As	Pik As	Pik Zwei
Karo As	1	-1	-2
Pik As	-1	1	1
Karo Zwei	2	-1	-2 / 0

Ist das Spiel fair? 4 positive Einträge vs. 5 negative Einträge!

Etwaige Zusatzregel: wenn beide Spiele ihre Zweierkarte ausspielen, so ist die Auszahlung 0 (rot).

Ausrechnung ergibt:
mit Zusatzregel: $x = (0, 0.6, 0.4)^T$, $y = (0.4, 0.6, 0)^T$, $v = 0.2$
ohne Zusatzregel: $x = (0, {}^2/_3, {}^1/_3)^T$, $y = ({}^1/_2, 0, {}^1/_2)^T$, $v = 0$

4. Weitere Beispiele

Auch an Hochschulen kann es zu Entscheidungssituationen zwischen Lehrenden und Lernenden kommen, speziell im Lehr- und Prüfungs-betrieb.

So kann der Lehrende gegen den Lernenden spielen, indem er ihm möglichst viele Kenntnisse aufzudrängen versucht.

Gegen deren Aufnahme sperrt sich der Lernende auf Grund der jedem Menschen innnewohnenden Trägheit.

Wegen der späteren Prüfungen ist aber der Lernende gezwungen, sich zumindest ein geringes Wissen anzueignen.

Ein sehr vereinfachtes Beispiel:

Ein Student habe drei gleich aufwendige Möglichkeiten zur Prüfungsvorbereitung:

1. Besuch der Vorlesung
2. Lesen des Buches A
3. Lesen des Buches B

Der Prüfer kann entsprechende Fragen stellen, die sich auf die Vorlesung oder die einzelnen Bücher beziehen.

Die Auszahlungsmatrix (gemessen in Noten) des Dozenten sei dabei

\ Student Dozent	Vorlesung	Buch A	Buch B
Vorlesung	2	4	4
Buch A	3	1	5
Buch B	4	3	3

Der Student will insgesamt nicht mehr Arbeit investieren, als eine der reinen Strategien erforderlich macht.

Er kann diese reinen Strategien jedoch mischen, indem er z.B. die Bücher A und B nur oberflächlich liest. Andererseits kann auch der Dozent seine Prüfungsstrategie mischen.

Der Student möchte eine möglichst gute Note erreichen. Der Dozent strebt die schlechteste Note an.
Die Optimalstrategien lassen sich mit dem Simplexalgorithmus berechnen:

Dozent: x = (2/3 Vorlesung, 0 Buch A, 1/3 Buch B)
Student: y = (1/3 Vorlesung, 2/3 Buch A, 0 Buch B)

Wert des Spieles: Note 3,333

Dieses Beispiel ist stark vereinfacht, mag aber als Denkmodell dem Studenten Anregungen für die Prüfungsvorbereitung geben.

5. Mögliche Erweiterungen

Die bisher betrachteten Zweipersonen-Nullsummenspiele sind nur der allereinfachste Fall.

- n-Personen-Spiele
- Nullsummenspiele vs. Nicht-Nullsummenspiele
- Kooperative Spiele vs. nicht kooperative Spiele
- Koalitionen zwischen Spielern
- Endliche vs. kontinuierliche Handlungsweisen