Zkoumání faktorů, které vedou ke kyvadlu kmitajícímu vzhůru nohama

J. Púček, L. Košárková, M. Fuksa

Univerzita Karlova, Česká republika

Naší zkoumanou diferenciální rovnicí bude rovnice (1) též zvaná Mathieuova rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_*}{\mathrm{d}{t_*}^2} + (\alpha + \beta\cos(t_*))\,\theta = 0, \tag{1}$$

pro nás konkrétně ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\Omega^2}{l}\cos(\Omega t)\right)\theta = 0, \tag{2}$$

kde $\alpha = \frac{g}{l\Omega^2} = \frac{\omega_o^2}{\Omega^2}$, $\beta = -\frac{A}{l}$ a $t_* = \Omega t$. Za parametry jsme volili $g = 9.81$, $l = 1$, $A = 0.5$ a nefixní parametr Ω.

Z perturbační metody zjistíme podmínku stability kyvadla v horní poloze:

$$\frac{-\beta}{\sqrt{\alpha}} \geq \sqrt{2}$$

neboli:

$$\frac{A}{l}\frac{\Omega}{\omega_o} \geq \sqrt{2}$$

Volme například $\Omega = 5$ (ostatní parametry volíme dle str.2), pak je nerovnost splněna:

$$3.19275 \geq \sqrt{2}$$

Podle teorie tyto podmínky vedou ke stabilizaci kyvadla v horní poloze, což potvrzuje i numerické řešení:
Převrácené kyvadlo - stabilní

Nyní naopak volme $\Omega = 20$, pro které nerovnost splněna není:

$$0.798189 \ngeq \sqrt{2}$$

Podle teorie takto volená vstupní data nevedou k stabilizaci kyvadla v horní poloze. Numerickým řešením lze vidět, že teoretická předpověď nelže.
Převrácené kyvadlo - nestabilní