

Zkoumání faktorů, které vedou ke kyvadlu kmitajícímu vzhůru nohama

J. Půček, L. Košárková, M. Fuksa

Univerzita Karlova, Česká republika

April 15, 2021

Naší zkoumanou diferenciální rovnicí bude rovnice (1) též zvaná Mathieuova rovnice

$$\frac{d^2\theta_*}{dt_*^2} + (\alpha + \beta \cos(t_*)) \theta = 0, \quad (1)$$

pro nás konkrétně ve tvaru

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\Omega^2}{l} \cos(\Omega t) \right) \theta = 0, \quad (2)$$

kde $\alpha = \frac{g}{l\Omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$, $\beta = -\frac{A}{l}$ a $t_* = \Omega t$. Za parametry jsme volili $g = 9.81$, $l = 1$, $A = 0.5$ a nefixní parametr Ω .

Z perturbační metody zjistíme podmínku stability kyvadla v horní poloze:

$$\frac{-\beta}{\sqrt{\alpha}} \geq \sqrt{2}$$

neboli:

$$\frac{A}{l} \frac{\Omega}{\omega_o} \geq \sqrt{2}$$

Volme například $\Omega = 5$ (ostatní parametry volíme dle str.2), pak je nerovnost splněna:

$$3.19275 \geq \sqrt{2}$$

a podle teorie tyto podmínky vedou ke stabilizaci kyvadla v horní poloze, což potvrzuje i numerické řešení:

Převrácené kyvadlo - stabilní

Nyní naopak volme $\Omega = 20$, pro které nerovnost splněna není:

$$0.798189 \not\approx \sqrt{2}$$

Podle teorie takto volená vstupní data nevedou k stabilizaci kyvadla v horní poloze. Numerickým řešením lze vidět, že teoretická předpověď nelže.

Převrácené kyvadlo - nestabilní