POHYB VZDUCHOLODĚ V LINEÁRNÍM VĚTRNÉM POLI

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

1. Teoretický postup

V případě větrného pole závislého lineárně na pozici se problém hledání nejkratšího letu výrazně zjednoduší. Uvažujme tedy následující větrné pole:

$$u = -\frac{V}{h}y, \tag{1a}$$

$$v = 0. \tag{1b}$$

Pro toto speciální pole se náš systém diferenciálních rovnic zredukuje na:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\mathrm{ext}} - \frac{V}{h}y_{\mathrm{ext}}, \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\mathrm{ext}}, \tag{2b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h}\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}. \tag{2c}$$

Kde poslední rovnici lze vyřešit explicitně pomocí separace proměnných,

$$\tan\beta_{\mathrm{ext}} - \tan\beta_{\mathrm{ext,konec}} = \frac{V}{h}(t - t_{\mathrm{konec,ext}}), \tag{3}$$

kde jsme využili následující značení $\beta_{\mathrm{ext,konec}} =_{\mathrm{def}} \beta_{\mathrm{ext}}|_{t=t_{\mathrm{konec,ext}}}$. (Řešení rozepisujeme záměrně tak aby obsahovalo konečný čas, protože ten je co chceme.) Jelikož β_{ext} je ryze rostoucí funkcí času t, tak můžeme provést záměnu proměnných a přepsat (2b) jako $\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\mathrm{ext}}$, což vede na

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}} = h\frac{\sin\beta_{\mathrm{ext}}}{\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}}. \tag{4}$$

Důsledkem toho je, že můžeme také vyřešit rovnici pro y_{ext}

$$y_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext}}) = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}}\right). \tag{5}$$

(Pro zjednodušení si určíme konečnou polohu v počátku souřadnic, díky tomu dostáváme $y_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext,konec}}) = 0$.) Nyní provedeme podobnou záměnu proměnných jako která vedla k rovnici (5), ale aplikovanou na (2a), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}} = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos^3\beta_{\mathrm{ext}}} + \frac{1}{\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}}\right), \tag{6}$$

což implikuje

$$x_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext}}) = h\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext}}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}}\right)\frac{\sin\beta_{\mathrm{ext}}}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}}\right), \tag{7}$$

v předchozím jsme znovu využily faktu, že konečná poloha je v počátku, takže platí: $x_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext,konec}}) = 0$. Nyní sjednotíme rovnici (7) a (5). Počáteční pozice musí splňovat $\mathbf{x}|_{t=t_{\mathrm{start}}} =_{\mathrm{def}} \mathbf{x}_{\mathrm{start}}$, takže dostáváme následující systém rovnic

$$\mathbf{x}_{\mathrm{start}} = \begin{bmatrix} h\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}}\right)\frac{\sin\beta_{\mathrm{ext,start}}}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}}\right) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}}\right) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Jelikož známe $\mathbf{x}_{\mathrm{start}}$, tak je nám jasné, že (8) je systém dvou nelineárních algebraických rovnic pro dvě neznámé: $\beta_{\mathrm{ext,konec}}$ a $\beta_{\mathrm{ext,start}}$. Jakmile získáme jejich hodnoty, tak už jen stačí použít rovnice (3) k získání konečného času.

Ve výsledku můžeme prohlásit, že k vyřešení problému pro dané V, h a $\mathbf{x}_{\mathrm{start}} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{start}} & y_{\mathrm{start}} \end{bmatrix}^\top$ stačí první vyřešit náš systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{start}} \\ y_{\mathrm{start}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,start}}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} + \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2} - \sin\frac{\beta_{\mathrm{ext,konec}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}}\right)\frac{\sin\beta_{\mathrm{ext,start}}}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}}\right) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,start}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext,konec}}}\right) \end{bmatrix}, \tag{9a}$$

z něho získáme hodnoty $\beta_{\mathrm{ext,start}}$ a $\beta_{\mathrm{ext,konec}}$. V rovnici

$$\tan \beta_{\mathrm{ext,start}} - \tan \beta_{\mathrm{ext,konec}} = \frac{V}{h}(t_{\mathrm{start}} - t_{\mathrm{konec,ext}}) \tag{9b}$$

následně najdeme hodnotu konečného času $t_{\mathrm{konec,ext}}$. Optimální trajektorie je poté jednoznačně určena jako řešení následujícího systému ODR 1. řádu:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V \cos \beta_{\mathrm{ext}} - \frac{V}{h} y_{\mathrm{ext}}, \tag{9c}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V \sin \beta_{\mathrm{ext}}, \tag{9d}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\mathrm{ext}}, \tag{9e}$$

které řešíme na časovém intervalu $t \in (t_{\mathrm{start}}, t_{\mathrm{konec,ext}})$ v souladu s počátečními podmínkami:

$$x_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_{\mathrm{start}}} = x_{\mathrm{start}}, \tag{9f}$$

$$y_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_{\mathrm{start}}} = y_{\mathrm{start}}, \tag{9g}$$

$$\beta_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_{\mathrm{start}}} = \beta_{\mathrm{ext,start}}. \tag{9h}$$

Problém (9) lze vyřešit standardními numerickými metodami.

2. Konkrétní řešení v programu Mathematica