POHYB VZDUCHOLODĚ V LINEÁRNÍM VĚTRNÉM POLI

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

1. Teoretický postup

V případě větrného pole závislého lineárně na pozici se problém hledání nejkratšího letu výrazně zjednoduší. Uvažujme tedy následující větrné pole:

$$u = -\frac{V}{h}y, \tag{1a}$$

$$v = 0. \tag{1b}$$

Pro toto speciální pole se náš systém diferenciálních rovnic zredukuje na:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y_{\text{ext}}, \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\text{ext}}, \tag{2b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h}\cos^2\beta_{\text{ext}}. \tag{2c}$$

Kde poslední rovnici lze vyřešit explicitně pomocí separace proměnných,

$$\tan\beta_{\text{ext}} - \tan\beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t - t_{\text{end,ext}}), \tag{3}$$

kde jsme využili následující značení $\beta_{\text{ext,end}} =_{\text{def}} \beta_{\text{ext}}\big|_{t=t_{\text{end,ext}}}$. (Řešení rozepisujeme záměrně tak, aby obsahovalo konečný čas, protože ten je co chceme.) Jelikož β_{ext} je ryze rostoucí funkcí času t, tak můžeme provést záměnu proměnných a přepsat (2b) jako $\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\text{ext}}$, což vede na

$$\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}} = h\frac{\sin\beta_{\text{ext}}}{\cos^2\beta_{\text{ext}}}. \tag{4}$$

Důsledkem toho je, že můžeme také vyřešit rovnici pro y_{ext}

$$y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right). \tag{5}$$

(Pro zjednodušení si určíme konečnou polohu v počátku souřadnic, díky tomu dostáváme $y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext,end}}) = 0$.) Nyní provedeme podobnou záměnu proměnných jako která vedla k rovnici (5), ale aplikovanou na (2a), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}} = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos^3\beta_{\text{ext}}} + \frac{1}{\cos^2\beta_{\text{ext}}\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right), \tag{6}$$

což implikuje

$$x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = \left\{-\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}} - \ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext}}} - \frac{2}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right)\tan\beta_{\text{ext}} + \frac{\tan\beta_{\text{ext,end}}}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right)\right\}, \tag{7}$$

v předchozím jsme znovu využily faktu, že konečná poloha je v počátku, takže platí: $x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext,end}}) = 0$. Nyní sjednotíme rovnici (7) a (5). Počáteční pozice musí splňovat $\mathbf{x}\big|_{t=t_{\text{start}}} =_{\text{def}} \mathbf{x}_{\text{start}}$, takže dostáváme následující systém rovnic

$$\mathbf{x}_{\text{start}} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}} - \ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,start}}} - \frac{2}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right)\tan\beta_{\text{ext,start}} + \frac{\tan\beta_{\text{ext,end}}}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,start}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Jelikož známe $\mathbf{x}_{\text{start}}$, tak je nám jasné, že (8) je systém dvou nelineárních algebraických rovnic pro dvě neznámé: $\beta_{\text{ext,end}}$ a $\beta_{\text{ext,start}}$. Jakmile získáme jejich hodnoty, tak už jen stačí použít rovnice (3) k získání konečného času.

Ve výsledku můžeme prohlásit, že k vyřešení problému pro dané V, h a $\mathbf{x}_{\text{start}} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} x_{\text{start}} & y_{\text{start}} \end{bmatrix}^\top$ stačí první vyřešit náš systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} x_{\text{start}} \\ y_{\text{start}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext,end}}}{2}} - \ln\frac{\cos\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}+\sin\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}}{\cos\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}-\sin\frac{\beta_{\text{ext,start}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,start}}} - \frac{2}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right)\tan\beta_{\text{ext,start}} + \frac{\tan\beta_{\text{ext,end}}}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,start}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) \end{bmatrix}, \tag{9a}$$

z něho získáme hodnoty $\beta_{\text{ext,start}}$ a $\beta_{\text{ext,end}}$. V rovnici

$$\tan\beta_{\text{ext,start}} - \tan\beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t_{\text{start}} - t_{\text{end,ext}}) \tag{9b}$$

následně najdeme hodnotu konečného času $t_{\text{end,ext}}$. Optimální trajektorie je poté jednoznačně určena jako řešení následujícího systému ODR 1. řádu:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y_{\text{ext}}, \tag{9c}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\text{ext}}, \tag{9d}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h}\cos^2\beta_{\text{ext}}, \tag{9e}$$

které řešíme na časovém intervalu $t \in (t_{\text{start}}, t_{\text{end,ext}})$ v souladu s počátečními podmínkami:

$$x_{\text{ext}}\big|_{t=t_{\text{start}}} = x_{\text{start}}, \tag{9f}$$

$$y_{\text{ext}}\big|_{t=t_{\text{start}}} = y_{\text{start}}, \tag{9g}$$

$$\beta_{\text{ext}}\big|_{t=t_{\text{start}}} = \beta_{\text{ext,start}}. \tag{9h}$$

Problém (9) lze vyřešit standardními numerickými metodami.

2. Konkrétní řešení v programu Mathematica

Pro náš speciální případ pole (3) postupujeme, jak je popsáno výše tedy:

Krok 1. Vyřešíme nelineární algebraickou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\beta_{\text{ext,start}}$ a $\beta_{\text{ext,end}}$. Rovnici (9a) vyřešíme pomocí příkazu

```
FindRoot[{-(h/2)*(Log[(Cos[be/2]+Sin[be/2])/(Cos[be/2]-Sin[be/2])]-
Log[(Cos[bs/2]+Sin[bs/2])/(Cos[bs/2]-Sin[bs/2])]+(1/Cos[bs]-2/Cos[be])*Tan[bs]+Tan[be]/Cos[be])==x0,
h*((1/(Cos[bs])-1/Cos[be]))==y0},{{bs,a},{be,b}}],
```

kde *be* a *bs* jsou značení pro $\beta_{\text{ext,end}}$ a $\beta_{\text{ext,start}}$ a parametry a a b volíme vhodně tak, aby řešení zkonvergovalo do počátku.

Krok 2. Vypočítáme $t_{\text{end,ext}}$ z rovnice (9b) pomocí příkazu

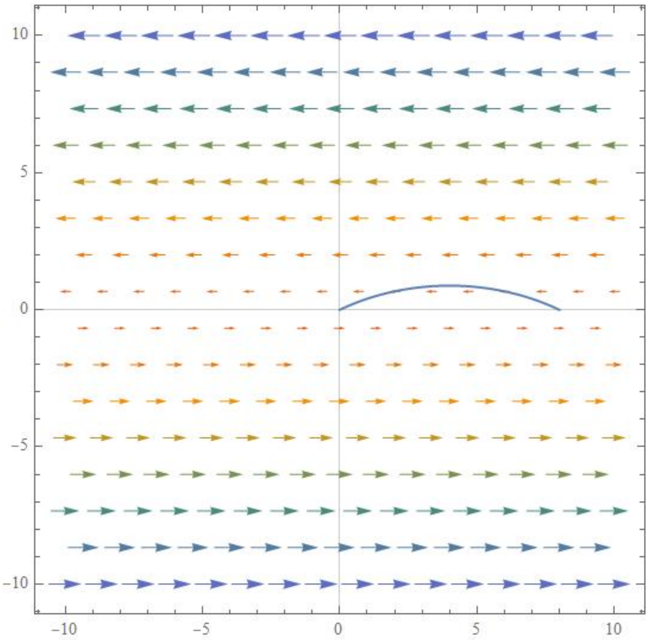
```
Solve[{Tan[bs]-Tan[be]==(V/h)*(ts-te)}/.bsbe,te].
```

Krok 3. Nyní máme všechny počáteční podmínky a stačí vyřešit soustavu rovnic (9c) až (9e) s počátečními podmínkami (10) až (12). Využijme příkazu

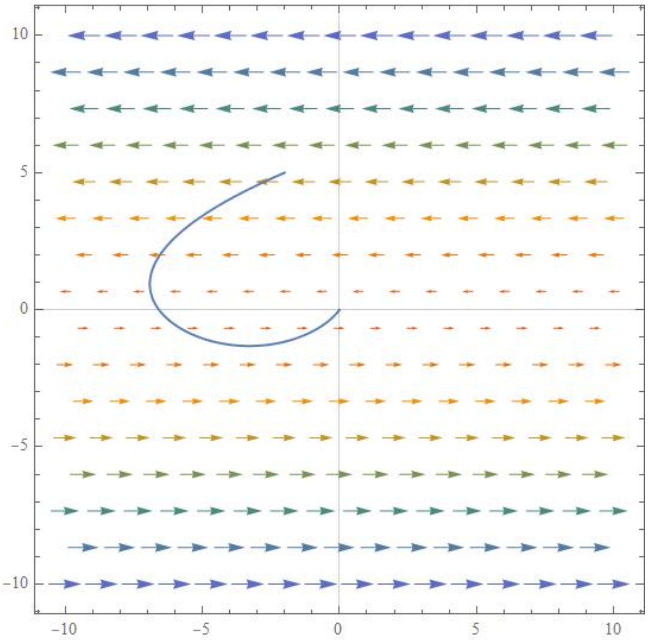
```
eqs={x'[t]==V*Cos[b[t]]-(V/h)*y[t],y'[t]==V*Sin[b[t]],b'[t]==(V/h)*(Cos[b[t]])^2}

time={t,ts,Re[te/.tend]}

sol=NDSolve[Join[eqs,{x[0]==x0,y[0]==y0,b[0]==Re[bs/.bsbe]}],{x[t],y[t],b[t]},time].
```

Krok 4. Vykreslíme graf a blaženě pozorujeme, jak se nám to povedlo (viz obrázky).

```
trajektorie=ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.sol,{t,ts,te},Frame->True,GridLines->Automatic,PlotRange->
{{-10,10},{-10,10}}]

Show[field,trajektorie]
```



Obrázek 1. $x_0 = 8, y_0 = 0, V = 8, h = 15$



Obrázek 2. $x_0 = -2, y_0 = 5, V = 2, h = 15$

Počáteční podmínka $y_0 = 0$. Všimněme si, že případ na obrázku (2) přejde pro $y = 0$ na úlohu případu obrázku (1). Tento závěr není nijak překvapivý, protože pro tento model nepředpokládáme žádné zpoždění zatáčení a navíc její rychlost je čistě dána její polohou a parametry V a h (tedy v tomto systému nepředpokládáme žádné "nabrání"kinetické energie z předchozí části trajektorie). Rovněž není překvapivé, že pro $y_0 = 0$ je ideální trajektorie symetrická podle osy $x = \frac{x_0}{2}$. Toto tvrzení si nyní dokažme.

Z informace $y_0 = 0$ a vztahu (9a) dostáváme

$$\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}} = \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,start}}} \equiv \cos\beta_{\text{ext,end}} = \cos\beta_{\text{ext,start}}. \tag{10}$$

Nyní využijme fyzikálního nadhledu. Jelikož se musíme dostat z počátečního bodu na ose $y = 0$ do počátku, jistě musí platit

$$\beta_{\text{ext,end}} = -\beta_{\text{ext,start}}. \tag{11}$$

Dále využijme toho, že $\tan x$ je lichá funkce. S tímto poznatkem a vztahy (9b), (11) dostáváme, že pro $t_{\text{end,ext}}$ volbou $t_{\text{start}} = 0$ platí

$$\tan\beta_{\text{ext,start}} - \tan\beta_{\text{ext,end}} = -\tan\beta_{\text{ext,end}} - \tan\beta_{\text{ext,end}} = -2\tan\beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t_{\text{start}} - t_{\text{end,ext}}) = -\frac{V}{h}t_{\text{end,ext}} \implies$$

$$t_{\text{end,ext}} = \frac{2h}{V}\tan\beta_{\text{ext,end}}. \tag{12}$$

Opět využijme vztahu (9b) a vyjádřeme β jako $\beta(t)$

$$\tan\beta_{\text{ext}} = \frac{V}{h}(t - t_{\text{end,ext}}) + \tan\beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t - \frac{2h}{V}\tan\beta_{\text{ext,end}}) + \tan\beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}} \implies$$

$$\beta_{\text{ext}} = \arctan\left(\frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right). \tag{13}$$

V závěrečné fázi našeho dokazování si pomocí funkce $y(\beta_{\text{ext}})$, kterou si vyjádříme jako $y(t)$, ukážeme, že je symetrická podle času $\frac{t_{\text{end,ext}}}{2}$, tedy že platí $y(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} + \epsilon) = y(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} - \epsilon)$.
Začněme vyjádřením $y = y(t)$ ze vztahu (5)

$$y(\beta_{\text{ext}}(t)) = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\text{ext}}(t)} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) = h\left(\frac{1}{\cos\arctan(\frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}})} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) =$$

$$= h\left(\frac{1}{\cos\arctan(\frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}})} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) = h\left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) \implies$$

$$y(t) = h\left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}t - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right). \tag{14}$$

Ve výpočtu se nám objevila zajímavá identita cos arctan, pro kterou platí $\cos\arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Nyní nám už zbývá dosadit hodnotu $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon$ do $y(t)$.

$$
\begin{aligned}
y\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) &= h\left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) = \\
&= h\left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}\left(\frac{\frac{2h}{V}\tan\beta_{\text{ext,end}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) = \\
&= h\left(\sqrt{(\tan\beta_{\text{ext,end}} \pm \epsilon - \tan\beta_{\text{ext,end}})^2 + 1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right) = h\left(\sqrt{\epsilon^2+1} - \frac{1}{\cos\beta_{\text{ext,end}}}\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Tedy jsme ukázali, že řešení se pohybuje symetricky podle času $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2}$. To ovšem nedává tvrzení, jelikož nevíme, jak se řešení chová pro x-ovou souřadnici. Ta je ovšem analyticky složitá na řešení, avšak máme jiný způsob, jak získat dodatečnou informaci a to pomocí okamžitého natočení $\beta_{\text{ext}}(t)$, kterou jsme si při výpočtu odvodili.
Aby naše tvrzení bylo dokázáno musíme ukázat, že platí $\beta_{\text{ext}}(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} + \epsilon) = -\beta_{\text{ext}}(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} - \epsilon)$. To již není žádný problém, jelikož platí

$$
\beta_{\text{ext}}\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) = \arctan\left(\frac{V}{h}\left(\frac{\frac{2h}{V}\tan\beta_{\text{ext,end}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right) = \arctan\left(\tan\beta_{\text{ext,end}} \pm \epsilon - \tan\beta_{\text{ext,end}}\right) = \arctan(\pm\epsilon)
$$

$$
\implies \beta_{\text{ext}}\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) = \pm\arctan(\epsilon). \tag{16}
$$

Tedy z (16) vidíme, že natočení je rovněž symetrické podle času $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2}$ (přesněji řečeno lichá vzhledem k tomuto času). S touto a ještě informací o závislosti y-ové složky (která je naopak sudá vzhledem k tomuto času) dostáváme tvrzení. □

3. Obecné větrné pole

Nyní budeme pracovat s obecným statickým silovým polem tedy s

$$u = u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \tag{17}$$

$$v = v(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}). \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) se nám soustava obyčejných diferenciálních rovnic změní na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\sin^2\beta_{\text{ext}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\right)\sin\beta_{\text{ext}}\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{\partial u}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\cos^2\beta_{\text{ext}}, \tag{21}$$

kde poslední rovnice (21) je známá jako *Zermelova navigační rovnice*.