

POHYB VZDUCHOLODĚ V LINEÁRNÍM VĚTRNÉM POLI

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

1. TEORETICKÝ POSTUP

V případě větrného pole závislého lineárně na pozici se problém hledání nejkratšího letu výrazně zjednoduší. Uvažujme tedy následující větrné pole:

$$u = -\frac{V}{h}y, \quad (1a)$$

$$v = 0. \quad (1b)$$

Pro toto speciální pole se náš systém diferenciálních rovnic zredukuje na:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y_{\text{ext}}, \quad (2a)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (2b)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}. \quad (2c)$$

Kde poslední rovnici lze vyřešit explicitně pomocí separace proměnných,

$$\tan \beta_{\text{ext}} - \tan \beta_{\text{ext, end}} = \frac{V}{h}(t - t_{\text{end, ext}}), \quad (3)$$

kde jsme využili následující značení $\beta_{\text{ext, end}} =_{\text{def}} \beta_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{end, ext}}}$. (Řešení rozepisujeme záměrně tak aby obsahovalo konečný čas, protože ten je co chceme.) Jelikož β_{ext} je ryze rostoucí funkcí času t , tak můžeme provést záměnu proměnných a přepsat (2b) jako $\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} \frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}$, což vede na

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \frac{\sin \beta_{\text{ext}}}{\cos^2 \beta_{\text{ext}}}. \quad (4)$$

Důsledkem toho je, že můžeme také vyřešit rovnici pro y_{ext}

$$y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right). \quad (5)$$

(Pro zjednodušení si určíme konečnou polohu v počátku souřadnic, díky tomu dostáváme $y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext, end}}) = 0$.) Nyní provedeme podobnou záměnu proměnných jako která vedla k rovnici (5), ale aplikovanou na (2a), dostáváme

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos^3 \beta_{\text{ext}}} + \frac{1}{\cos^2 \beta_{\text{ext}} \cos \beta_{\text{ext, end}}} \right), \quad (6)$$

což implikuje

$$x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right), \quad (7)$$

v předchozím jsme znovu využily faktu, že konečná poloha je v počátku, takže platí: $x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext, end}}) = 0$. Nyní sjednotíme rovnici (7) a (5). Počáteční pozice musí splňovat $\mathbf{x}|_{t=t_{\text{start}}} =_{\text{def}} \mathbf{x}_{\text{start}}$, takže dostáváme následující systém rovnic

$$\mathbf{x}_{\text{start}} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext, start}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \\ h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Jelikož známe $\mathbf{x}_{\text{start}}$, tak je nám jasné, že (8) je systém dvou nelineárních algebraických rovnic pro dvě neznámé: $\beta_{\text{ext, end}}$ a $\beta_{\text{ext, start}}$. Jakmile získáme jejich hodnoty, tak už jen stačí použít rovnici (3) k získání konečného času.

Ve výsledku můžeme prohlásit, že k vyřešení problému pro dané V , h a $\mathbf{x}_{\text{start}} =_{\text{def}} [x_{\text{start}} \ y_{\text{start}}]^T$ stačí první vyřešit náš systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} x_{\text{start}} \\ y_{\text{start}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \\ h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

z něho získáme hodnoty $\beta_{\text{ext,start}}$ a $\beta_{\text{ext,end}}$. V rovnici

$$\tan \beta_{\text{ext,start}} - \tan \beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t_{\text{start}} - t_{\text{end,ext}}) \quad (9b)$$

následně najdeme hodnotu konečného času $t_{\text{end,ext}}$. Optimální trajektorie je poté jednoznačně určena jako řešení následujícího systému ODR 1. řádu:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h} y_{\text{ext}}, \quad (9c)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (9d)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}, \quad (9e)$$

kteří řešíme na časovém intervalu $t \in (t_{\text{start}}, t_{\text{end,ext}})$ v souladu s počátečními podmínkami:

$$x_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = x_{\text{start}}, \quad (9f)$$

$$y_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = y_{\text{start}}, \quad (9g)$$

$$\beta_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = \beta_{\text{ext,start}}. \quad (9h)$$

Problém (9) lze vyřešit standardními numerickými metodami.

2. KONKRÉTNÍ ŘEŠENÍ V PROGRAMU MATHEMATICA

Pro náš speciální případ pole (1) postupujeme, jak je popsáno výše tedy:

Krok 1. Vyřešíme nelineární algebraickou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\beta_{\text{ext,start}}$ a $\beta_{\text{ext,end}}$. Rovnici (9a) vyřešíme pomocí příkazu

```
FindRoot[{- (h/2) * (Log[(Cos[be/2] + Sin[be/2]) / (Cos[be/2] - Sin[be/2])]) -  
Log[(Cos[bs/2] + Sin[bs/2]) / (Cos[bs/2] - Sin[bs/2])]) + (1/Cos[bs] - 2/Cos[be]) * Tan[bs] + Tan[be] / Cos[be] == x0,  
h * ((1 / (Cos[bs]) - 1 / Cos[be])) == y0}, {{bs, 0}, {be, 0}}],
```

kde be a bs jsou značení pro $\beta_{\text{ext,end}}$ a $\beta_{\text{ext,start}}$.

Krok 2. Vypočítáme $t_{\text{end,ext}}$ z rovnice (9b) pomocí příkazu

```
Solve[{Tan[bs] - Tan[be] == (V/h) * (ts - te)} /. bsbe, te].
```

Krok 3. Nyní máme všechny počáteční podmínky a stačí vyřešit soustavu rovnic (9c) až (9e) s počátečními podmínkami (10) až (12). Využijme příkazu

```
eqs={x'[t]==V*Cos[b[t]]-(V/h)*y[t], y'[t]==V*Sin[b[t]], b'[t]==(V/h)*(Cos[b[t]])^2}
```

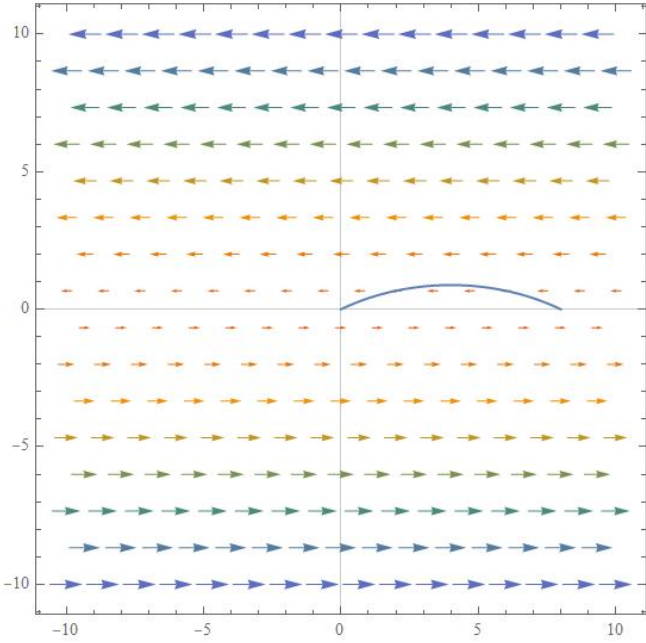
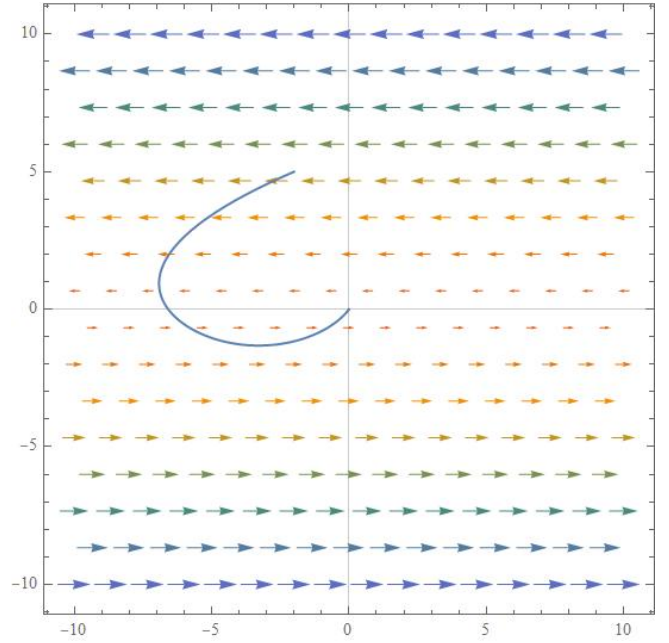
```
time={t, ts, Re[te/.tend]}
```

```
sol=NDSolve[Join[eqs, {x[0]==x0, y[0]==y0, b[0]==Re[bs/.bsbe]}], {x[t], y[t], b[t]}, time].
```

Krok 4. Vykreslíme graf a blaženě pozorujeme, jak se nám to povedlo (viz obrázky).

```
trajektorie=ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. sol, {t, ts, te},  $\square$ Frame->True, GridLines->Automatic, PlotRange->  
{{-10, 10}, {-10, 10}}]
```

```
Show[field, trajektorie]
```

Obrázek 1. $x_0 = 8, y_0 = 0$ Obrázek 2. $x_0 = -2, y_0 = 5$

Počáteční podmínka $y_0 = 0$. Všimněme si, že případ na obrázku (2) přejde pro $y = 0$ na úlohu případu obrázku (1). Tento závěr není nijak překvapivý, protože pro tento model nepředpokládáme žádné zpoždění zatáčení a navíc její rychlost je čistě dána její polohou a parametry V a h (tedy v tomto systému nepředpokládáme žádné "nabrání" kinetické energie z předchozí části trajektorie). Rovněž není překvapivé, že pro $y_0 = 0$ je ideální trajektorie symetrická podle osy $x = \frac{x_0}{2}$. Toto tvrzení si nyní dokažme.

Z informace $y_0 = 0$ a vztahu (9a) dostáváme

$$\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} = \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{start}}} \equiv \cos \beta_{\text{ext},\text{end}} = \cos \beta_{\text{ext},\text{start}}. \quad (10)$$

Nyní využijme fyzikálního nadhledu. Jelikož se musíme dostat z počátečního bodu na ose $y = 0$ do počátku, jistě musí platit

$$\beta_{\text{ext},\text{end}} = -\beta_{\text{ext},\text{start}}. \quad (11)$$

Dále využijme toho, že $\tan x$ je lichá funkce. S tímto poznatkem a vztahy (9b), (11) dostáváme, že pro $t_{\text{end},\text{ext}}$ volbou $t_{\text{start}} = 0$ platí

$$\begin{aligned} \tan \beta_{\text{ext},\text{start}} - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} &= -\tan \beta_{\text{ext},\text{end}} - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} = -2 \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} = \frac{V}{h}(t_{\text{start}} - t_{\text{end},\text{ext}}) = -\frac{V}{h}t_{\text{end},\text{ext}} \implies \\ t_{\text{end},\text{ext}} &= \frac{2h}{V} \tan \beta_{\text{ext},\text{end}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Opět využijme vztahu (9b) a vyjádříme β jako $\beta(t)$

$$\begin{aligned} \tan \beta_{\text{ext}} &= \frac{V}{h}(t - t_{\text{end},\text{ext}}) + \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} = \frac{V}{h}\left(t - \frac{2h}{V} \tan \beta_{\text{ext},\text{end}}\right) + \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} = \frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}} \implies \\ \beta_{\text{ext}} &= \arctan\left(\frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

V závěrečné fázi našeho dokazování si pomocí funkce $y(\beta_{\text{ext}})$, kterou si vyjádříme jako $y(t)$, ukážeme, že je symetrická podle času $\frac{t_{\text{end},\text{ext}}}{2}$, tedy že platí $y(\frac{t_{\text{end},\text{ext}}}{2} + \epsilon) = y(\frac{t_{\text{end},\text{ext}}}{2} - \epsilon)$.

Začneme vyjádřením $y = y(t)$ ze vztahu (5)

$$\begin{aligned} y(\beta_{\text{ext}}(t)) &= h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}(t)} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} \right) = h \left(\frac{1}{\cos \arctan(\frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}})} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} \right) = \\ &= h \left(\frac{1}{\cos \arctan(\frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}})} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} \right) = h \left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} \right) \implies \end{aligned} \quad (14)$$

$$y(t) = h \left(\sqrt{\left(\frac{V}{h}t - \tan \beta_{\text{ext},\text{end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},\text{end}}} \right). \quad (15)$$

Ve výpočtu se nám objevila zajímavá identita $\cos \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Nyní nám už zbývá dosadit hodnotu $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon$ do $y(t)$.

$$\begin{aligned} y\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) &= h \left(\sqrt{\left(\frac{V}{h} \left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan \beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext,end}}} \right) = \\ &= h \left(\sqrt{\left(\frac{V}{h} \left(\frac{\frac{2h}{V} \tan \beta_{\text{ext,end}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan \beta_{\text{ext,end}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext,end}}} \right) = \\ &= h \left(\sqrt{(\tan \beta_{\text{ext,end}} \pm \epsilon - \tan \beta_{\text{ext,end}})^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext,end}}} \right) = h \left(\sqrt{\epsilon^2 + 1} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext,end}}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Tedy jsme ukázali, že řešení se pohybuje symetricky podle času $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2}$. To ovšem nedává tvrzení, jelikož nevíme, jak se řešení chová pro x -ovou souřadnici. Ta je ovšem analyticky složitá na řešení, avšak máme jiný způsob, jak získat dodatečnou informaci a to pomocí okamžitého natočení $\beta_{\text{ext}}(t)$, kterou jsme si při výpočtu odvodili.

Aby naše tvrzení bylo dokázáno musíme ukázat, že platí $\beta_{\text{ext}}(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} + \epsilon) = -\beta_{\text{ext}}(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} - \epsilon)$. To již není žádný problém, jelikož platí

$$\begin{aligned} \beta_{\text{ext}}\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) &= \arctan\left(\frac{V}{h} \left(\frac{\frac{2h}{V} \tan \beta_{\text{ext,end}}}{2} \pm \epsilon\right) - \tan \beta_{\text{ext,end}}\right) = \arctan(\tan \beta_{\text{ext,end}} \pm \epsilon - \tan \beta_{\text{ext,end}}) = \arctan(\pm \epsilon) \\ &\implies \beta_{\text{ext}}\left(\frac{t_{\text{end,ext}}}{2} \pm \epsilon\right) = \pm \arctan(\epsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Tedy z (17) vidíme, že natočení je rovněž symetrické podle času $t = \frac{t_{\text{end,ext}}}{2}$ (přesněji řečeno lichá vzhledem k tomuto času). S touto a ještě informací o závislosti y -ové složky (která je naopak sudá vzhledem k tomuto času) dostáváme tvrzení. \square