

POHYB VZDUCHOLODĚ V LINEÁRNÍM VĚTRNÉM POLI

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

1. TEORETICKÝ POSTUP

V případě větrného pole závislého lineárně na pozici se problém hledání nejkratšího letu výrazně zjednoduší. Uvažujme tedy následující větrné pole:

$$u = -\frac{V}{h}y, \quad (1a)$$

$$v = 0. \quad (1b)$$

Pro toto speciální pole se náš systém diferenciálních rovnic zredukuje na:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y_{\text{ext}}, \quad (2a)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (2b)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}. \quad (2c)$$

Kde poslední rovnici lze vyřešit explicitně pomocí separace proměnných,

$$\tan \beta_{\text{ext}} - \tan \beta_{\text{ext, end}} = \frac{V}{h}(t - t_{\text{end, ext}}), \quad (3)$$

kde jsme využili následující značení $\beta_{\text{ext, end}} =_{\text{def}} \beta_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{end, ext}}}$. (Řešení rozepisujeme záměrně tak aby obsahovalo konečný čas, protože ten je co chceme.) Jelikož β_{ext} je ryze rostoucí funkcí času t , tak můžeme provést záměnu proměnných a přepsat (2b) jako $\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} \frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}$, což vede na

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \frac{\sin \beta_{\text{ext}}}{\cos^2 \beta_{\text{ext}}}. \quad (4)$$

Důsledkem toho je, že můžeme také vyřešit rovnici pro y_{ext}

$$y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right). \quad (5)$$

(Pro zjednodušení si určíme konečnou polohu v počátku souřadnic, díky tomu dostáváme $y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext, end}}) = 0$.) Nyní provedeme podobnou záměnu proměnných jako která vedla k rovnici (5), ale aplikovanou na (2a), dostáváme

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos^3 \beta_{\text{ext}}} + \frac{1}{\cos^2 \beta_{\text{ext}} \cos \beta_{\text{ext, end}}} \right), \quad (6)$$

což implikuje

$$x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right), \quad (7)$$

v předchozím jsme znovu využily faktu, že konečná poloha je v počátku, takže platí: $x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext, end}}) = 0$. Nyní sjednotíme rovnici (7) a (5). Počáteční pozice musí splňovat $\mathbf{x}|_{t=t_{\text{start}}} =_{\text{def}} \mathbf{x}_{\text{start}}$, takže dostáváme následující systém rovnic

$$\mathbf{x}_{\text{start}} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, start}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext, start}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \\ h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Jelikož známe $\mathbf{x}_{\text{start}}$, tak je nám jasné, že (8) je systém dvou nelineárních algebraických rovnic pro dvě neznámé: $\beta_{\text{ext, end}}$ a $\beta_{\text{ext, start}}$. Jakmile získáme jejich hodnoty, tak už jen stačí použít rovnici (3) k získání konečného času.

Ve výsledku můžeme prohlásit, že k vyřešení problému pro dané V , h a $\mathbf{x}_{\text{start}} =_{\text{def}} [x_{\text{start}} \ y_{\text{start}}]^T$ stačí první vyřešit náš systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} x_{\text{start}} \\ y_{\text{start}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \left(\ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext, end}}}{2}} - \ln \frac{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} + \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}}{\cos \frac{\beta_{\text{ext}}}{2} - \sin \frac{\beta_{\text{ext}}}{2}} + \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \tan \beta_{\text{ext}} + \frac{\tan \beta_{\text{ext, end}}}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \\ h \left(\frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, start}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext, end}}} \right) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

z něho získáme hodnoty $\beta_{\text{ext,start}}$ a $\beta_{\text{ext,end}}$. V rovnici

$$\tan \beta_{\text{ext,start}} - \tan \beta_{\text{ext,end}} = \frac{V}{h}(t_{\text{start}} - t_{\text{end,ext}}) \quad (9b)$$

následně najdeme hodnotu konečného času $t_{\text{end,ext}}$. Optimální trajektorie je poté jednoznačně určena jako řešení následujícího systému ODR 1. řádu:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y_{\text{ext}}, \quad (9c)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (9d)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}, \quad (9e)$$

které řešíme na časovém intervalu $t \in (t_{\text{start}}, t_{\text{end,ext}})$ v souladu s počátečními podmínkami:

$$x_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = x_{\text{start}}, \quad (9f)$$

$$y_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = y_{\text{start}}, \quad (9g)$$

$$\beta_{\text{ext}}|_{t=t_{\text{start}}} = \beta_{\text{ext,start}}. \quad (9h)$$

Problém (9) lze vyřešit standardními numerickými metodami.

2. KONKRÉTNÍ ŘEŠENÍ V PROGRAMU MATHEMATICA